



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES**

**MÁSTER DE INVESTIGACIÓN EN ECONOMÍA**

**Trabajo de Fin de Máster**

**VALORACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE  
INTERÉS MEDIANTE PROCESOS ESTOCÁSTICOS**

**Presentado por: Johan Alexander Lara Vega**

**Dirigido por: Dra. María Lourdes Gómez del Valle**

**Dra. Julia Martínez Rodríguez**

**Septiembre de 2015**

## AGRADECIMIENTOS

Para iniciar, deseo agradecer al Banco Santander así como a la Universidad de Valladolid por haber depositado su confianza en mí, y en especial al programa de becas "*Iberoamérica + Asia*" llevado a cabo en conjunto por ambas instituciones. Gracias a este programa, mi sueño y el de varios jóvenes de realizar un Máster en el exterior se ha hecho y se seguirá haciendo realidad. Además deseo agradecer a Esmeralda Lorenzo, quien actuó como coordinadora de dicho programa desde el Servicio de Relaciones Internacionales de la Universidad de Valladolid, porque con su labor garantizó todas las condiciones para que mi estadía en España fuera excelente.

También deseo expresar mi inmensa gratitud a las directoras de mi Trabajo de Fin de Máster, la Doctora Julia Martínez Rodríguez y la Doctora María Lourdes Gómez del Valle, quienes me transmitieron una parte de su conocimiento y estuvieron siempre dispuestas a apoyarme académicamente a lo largo del proceso de elaboración de este trabajo. Debo resaltar especialmente, su alto nivel de compromiso e interés con mi proyecto así como el trato amable y ameno que siempre recibí de su parte. A ambas, muchas gracias por su valiosa ayuda.

## **DEDICATORIA**

A mi mamá, Luz Vega, y a mi hermano, Felipe Lara, quienes a pesar de la distancia, siempre estuvieron presentes con sus palabras de apoyo.

## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	9
2. LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS. CONCEPTOS PREVIOS. 12	
2.1. Definición de bono .....	12
2.1.1. Bonos con cupón.....	13
2.1.2. Bonos cupón cero .....	13
2.2. Valoración de bonos .....	13
2.2.1. Valoración de bonos con cupón .....	14
2.2.2. Valoración de bonos cupón cero .....	15
2.3. Tipo de interés al contado o spot .....	16
2.4. Tipo de interés a plazo o forward .....	16
2.5. La estructura temporal de los tipos de interés o curva de rendimientos .....	18
3. MODELOS DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS.....	22
3.1. Modelo determinista.....	23
3.2. El proceso de Wiener.....	25
3.3. El proceso y el Lema de Itô.....	26
3.4. La ecuación de valoración de los bonos cupón cero.....	26
3.5. Modelos estocásticos.....	30
3.5.1. Modelo de Vasicek.....	31
3.5.2. Modelo de CIR .....	33
4. APLICACIÓN EMPÍRICA.....	36
4.1. La base de datos.....	36
4.2. Los datos .....	37
4.2.1. Aproximación al tipo de interés instantáneo .....	37
4.2.2. El periodo de tiempo a analizar .....	38
4.2.3. Análisis de los datos.....	39
4.3. Funciones que describen la ETTI.....	45
4.3.1. Modelo determinista .....	45
4.3.2. Modelo de Vasicek .....	46
4.3.3. Modelo de CIR .....	47
4.4. Calibración de parámetros .....	47
5. RESULTADOS OBTENIDOS.....	51
5.1. Estimación de los modelos .....	51

5.1.1. Parámetros obtenidos .....	51
5.1.2. Análisis de los errores de estimación .....	52
5.1.3. Análisis gráfico .....	53
5.2. Sensibilidad de los modelos ante cambios en los parámetros .....	58
5.2.1. Modelo determinista .....	58
5.2.2. Modelo de Vasicek .....	62
5.2.3. Modelo de CIR .....	64
5.3. Análisis de la ETTI estimada.....	66
5.4. Valoración de una cartera a partir de la ETTI estimada .....	67
6. CONCLUSIONES .....	74
7. BIBLIOGRAFÍA.....	76

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Interpretación del arbitraje financiero.....	18
<b>Figura 2.</b> Formas funcionales que ha adoptado la ETTI de bonos del Tesoro de Estados Unidos.....	19
<b>Figura 3.</b> Metodologías de estimación de la ETTI. ....	21
<b>Figura 4.</b> Dinámica de reversión a la media. ....	24
<b>Figura 5.</b> Tipo de interés (Enero de 1995 – Marzo de 2015).....	40
<b>Figura 6.</b> Primeras diferencias del tipo de interés (Enero de 1995 – Marzo de 2015).....	40
<b>Figura 7.</b> Representación gráfica del contraste de Ljung-Box para la serie del tipo de interés...	42
<b>Figura 8.</b> Rendimientos observados a 6 meses, 1 año y 2 años. ....	44
<b>Figura 9.</b> Programación en Matlab de la función del rendimiento al vencimiento del modelo determinista.....	46
<b>Figura 10.</b> Programación en Matlab de la función del rendimiento al vencimiento del modelo de Vasicek.....	46
<b>Figura 11.</b> Programación en Matlab de la función del rendimiento al vencimiento del modelo de CIR.....	47
<b>Figura 12.</b> Programación en Matlab de la calibración de parámetros en el modelo determinista, de Vasicek y de CIR. ....	50
<b>Figura 13.</b> Estimaciones del rendimiento al vencimiento generadas por el modelo determinista, de Vasicek y de CIR.....	54
<b>Figura 14.</b> Rendimiento al vencimiento observado y estimado con el modelo de CIR a 6 meses, 1 año y 2 años.....	55
<b>Figura 15.</b> Rendimiento al vencimiento a 2 años, observado versus estimado a lo largo del periodo de estimación. Modelo determinista, Vasicek y CIR.....	57
<b>Figura 16.</b> Sensibilidad del rendimiento al vencimiento a 6 meses, 1 año y 2 años estimado con el modelo determinista ante un cambio de $\pm 25\%$ en el parámetro $b_{11}$ .....	60
<b>Figura 17.</b> Sensibilidad del rendimiento al vencimiento a 2 años estimado con el modelo determinista ante un cambio de $\pm 25\%$ en los parámetros $b_{11}$ y $b_{21}$ .....	61
<b>Figura 18.</b> Sensibilidad del rendimiento al vencimiento a 2 años estimado con el modelo de Vasicek ante un cambio de $\pm 25\%$ en los parámetros $b_{12}$ , $b_{22}$ y $b_{32}$ .....	63

**Figura 19.** Sensibilidad del rendimiento al vencimiento a 2 años estimado con el modelo de CIR ante un cambio de  $\pm 25\%$  en los parámetros  $b_{13}$ ,  $b_{23}$  y  $b_{33}$ .....65

**Figura 20.** Rendimientos observados en el mercado y ETTIs obtenidas con los modelos determinista, de Vasicek y de CIR para los días 01/03/2015 y 01/03/1995.....67

**Figura 21.** ETTIs de los días 01/03/2015 y 01/03/1995 obtenidas mediante el modelo determinista.....68

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1.</b> Estadísticos descriptivos del tipo de interés y sus primeras diferencias (Enero de 1995 – Marzo de 2015).....	41
<b>Tabla 2.</b> Comportamiento dinámico del tipo de interés y sus primeras diferencias (Enero de 1995 – Marzo de 2015) .....	42
<b>Tabla 3.</b> Test de Dickey Fuller Aumentado (ADF) para los tipos de interés (Enero de 1995 – Marzo de 2015) .....	43
<b>Tabla 4.</b> Test de Dickey Fuller Aumentado (ADF) para las primeras diferencias de los tipos de interés (Enero de 1995 – Marzo de 2015).....	44
<b>Tabla 5.</b> Parámetros calibrados: modelo determinista, Vasicek y CIR.....	52
<b>Tabla 6.</b> Bondad del ajuste y medidas de error del modelo determinista, Vasicek y CIR para cada vencimiento.....	53
<b>Tabla 7.</b> Sensibilidad de los rendimientos al vencimiento ante una variación de $\pm 25\%$ sobre uno de los parámetros del modelo determinista.....	59
<b>Tabla 8.</b> Sensibilidad de los rendimientos al vencimiento ante una variación de $\pm 25\%$ sobre uno de los parámetros del modelo de Vasicek.....	62
<b>Tabla 9.</b> Sensibilidad de los rendimientos al vencimiento ante una variación de $\pm 25\%$ sobre uno de los parámetros del modelo de CIR.....	64
<b>Tabla 10.</b> Sensibilidad del rendimiento al vencimiento (6 meses, 1 y 2 años) ante cambios de un 25% en cada parámetro de todos los modelos, el día 01/03/2015.....	69
<b>Tabla 11.</b> Sensibilidad del rendimiento al vencimiento (6 meses, 1 y 2 años) ante cambios de un 25% en cada parámetro de todos los modelos, el día 01/03/1995.....	69
<b>Tabla 12.</b> Sensibilidad de los precios de los bonos cupón cero para vencimientos a 6 meses, 1 y 2 años ante cambios de un 25% de cada uno de los parámetros para todos los modelos el día 01/03/2015. ....	71
<b>Tabla 13.</b> Sensibilidad de los precios de los bonos cupón cero para vencimientos a 6 meses, 1 año y 2 años ante cambios de un 25% de cada uno de los parámetros para todos los modelos el día 01/03/1995. ....	71
<b>Tabla 14.</b> Beneficio o pérdida el día 01/03/2015 de una cartera consistente en una inversión de 1 millón de unidades monetarias en cada bono (6 meses, 1 año y 2 años) ante cambios de un 25% de cada uno de los parámetros de todos los modelos.....	72
<b>Tabla 15.</b> Beneficio o pérdida el día 01/03/1995 de una cartera consistente en una inversión de 1 millón de unidades monetarias en cada bono (6 meses, 1 año y 2 años) ante cambios de un 25% de cada uno de los parámetros de todos los modelos.....	73

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) es de gran importancia desde el punto de vista macroeconómico para los agentes económicos así como desde el punto de vista financiero para los inversionistas y profesionales del mercado financiero. Su importancia desde el punto de vista macroeconómico radica en la capacidad de informar acerca de las expectativas de la inflación futura de una nación y, con ello, puede reflejar la alta o baja efectividad de diferentes políticas económicas. Mientras que desde el punto de vista financiero, su importancia se debe a que refleja las expectativas de tipos de interés futuros y con ello permite la valoración de diferentes tipos de inversiones, que van desde proyectos de inversión hasta activos financieros. En este campo, la ETTI juega un rol que ha sido ampliamente estudiado en la definición de estrategias de inversión y la identificación de riesgos asociados a inversiones realizadas a diferentes plazos así como en la valoración de títulos de deuda y derivados financieros.

Por definición, la ETTI es la relación existente entre el rendimiento esperado de una inversión (expresado como tipo de interés) y el vencimiento de la misma, razón por la cual la ETTI también se conoce como curva de rendimientos. Debido a que los bonos cupón cero son un instrumento de renta fija en el cual un inversor realiza una inversión inicial y en un plazo posterior éste recupera dicha inversión más un rendimiento en un único flujo financiero, es posible obtener los valores de los rendimientos esperados a diferentes vencimientos a partir del precio promedio de negociación de un bono cupón cero en el mercado financiero. No obstante, existe sólo un número finito de bonos cupón cero en el mercado financiero, y por tanto, sólo es posible estimar el mismo número finito de rendimientos esperados al vencimiento. Además, los bonos cupón cero son instrumentos con vencimiento a corto plazo. Finalmente, los bonos cupón cero emitidos en el sector privado tienen riesgos asociados de liquidez y de emisor. Por estos motivos, es necesario recurrir a una metodología de estimación de la ETTI que garantice la obtención de rendimientos al vencimiento libres de riesgo y que incluya vencimientos a largo plazo.

Para ello, existen dos tipos de metodologías, las primeras son técnicas no econométricas, descritas por Nuñez (1995) y Ruiz (2005), que permiten obtener rendimientos para algunos vencimientos específicos (de manera discreta) en un único instante de tiempo, con lo cual son metodologías estáticas. El segundo tipo de metodologías, permiten estimar la ETTI en tiempo continuo e incluyen los modelos funcionales de ajuste y los modelos de no arbitraje y equilibrio general. Los modelos funcionales de ajuste, como los propuestos por Nelson y Siegel (1987) o Svensson (1994), son modelos estáticos que usan una función continua que puede tomar curvaturas esperadas en una ETTI para ajustarla a las observaciones finitas del mercado financiero. Por su parte, los modelos de no arbitraje y equilibrio general, como lo son los propuestos por Vasicek (1977) y Cox *et al.* (1985), tienen como ventaja frente a las demás metodologías, que permiten la estimación de la ETTI en tiempo continuo de manera dinámica, es decir, permiten obtener estimaciones de la evolución de la ETTI a través del tiempo.

La estimación de la ETTI mediante modelos de no arbitraje y equilibrio general, proviene de la teoría de la valoración de activos financieros de tipos de interés. Esta teoría, toma como punto de partida los trabajos de Merton (1973) así como de Black y Scholes (1973), quienes

propusieron la utilización de procesos estocásticos en tiempo continuo para modelizar la dinámica del activo subyacente con el fin de estimar el valor de opciones. Desde entonces, ha aparecido una amplia cantidad de modelos de no arbitraje y equilibrio general que permiten estimar la ETTI de manera consistente con el proceso de valoración de activos financieros. En este campo, existe un amplio número de modelos para modelizar la ETTI. No obstante, no hay un consenso en la literatura acerca de qué modelo es el más idóneo.

Los modelos de no arbitraje y equilibrio general se clasifican en modelos unifactoriales y modelos multifactoriales. Los modelos unifactoriales asumen que el precio de los activos financieros del tipo de interés depende únicamente de la evolución en el tiempo de un único factor o variable de estado que es el tipo de interés instantáneo. Por ejemplo, los modelos propuestos por Vasicek (1977) y Cox *et al.* (1985). Por otra parte, los modelos multifactoriales suponen que el precio de los activos financieros del tipo de interés depende de varios factores. Este es el caso, por ejemplo, el modelo de Fong y Vasicek (1991), en el cual el precio de los activos financieros de tipo de interés depende de dos variables de estado, el tipo de interés instantáneo y la volatilidad.

En este trabajo nos centramos únicamente en los modelos unifactoriales, los cuales son muy valorados en el campo de la investigación así como en el mundo financiero. Estos modelos proporcionan, en la mayoría de los casos, una solución exacta para la ETTI que además se puede obtener de manera sencilla. Su sencillez de implementación es, de hecho, muy valorada entre los profesionales del mercado financiero. Por otro lado, los modelos multifactoriales son muy costosos y laboriosos de implementar, fundamentalmente porque es necesario resolver una ecuación en derivadas parciales de varias dimensiones. En la mayoría de los casos, no es posible encontrar una solución exacta para esta ecuación y es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener una solución aproximada, lo cual desincentiva su uso en el sector financiero.

El tipo de interés en los modelos unifactoriales puede ser determinista o regirse por un proceso estocástico de Itô (1961). En el primer caso, destaca el modelo de reversión a la media comentado por Navarro y Nave (2001) y en el segundo caso destaca el modelo de Vasicek (1977), pionero en la literatura de los modelos estocásticos de la ETTI. Este modelo se ha utilizado ampliamente en la literatura por su sencillez. Sin embargo, presenta un inconveniente, que consiste en que puede generar tipos de interés negativos, lo cual se puede evitar si se asignan valores adecuados a los parámetros del proceso. Si bien es cierto que en la economía obtener tipos de interés negativos no es imposible, este acontecimiento es inusual. No obstante, existen otros modelos como el propuesto por Cox *et al.* (1985) que garantiza la estimación de tipos de interés positivos.

Este trabajo recoge, una aplicación empírica que consiste en la obtención de estimaciones continuas y dinámicas de la ETTI con los tres modelos unifactoriales anteriormente citados: determinista, Vasicek y CIR, a partir de datos del mercado de bonos del tesoro de Estados Unidos.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En el Capítulo 2 describimos con detalle los conceptos básicos inherentes a la teoría de valoración de activos financieros en tiempo continuo, definimos los conceptos de bono con cupón y cupón cero, y además explicamos su valoración en

tiempo discreto y en tiempo continuo. Continuamos estudiando el concepto de tipo de interés al contado y tipo de interés al plazo, fundamentales para entender el concepto de arbitraje financiero y terminamos definiendo la ETTI. En el Capítulo 3, explicamos cada uno de los supuestos de los modelos usados en este trabajo para estimar la ETTI. Estos son, el modelo determinista y los modelos estocásticos de Vasicek y de CIR. Aclaremos cómo obtener la ecuación en derivadas parciales que gobierna la dinámica del precio de un activo derivado del tipo de interés y demostramos como encontrar una solución analítica a dicha ecuación para obtener el precio de un bono cupón cero y la curva de rendimientos en los tres modelos considerados. En el Capítulo 4, estimamos los parámetros de la curva de rendimientos encontrada en cada modelo. Para ello, usamos datos históricos de rendimientos observados a corto plazo en el mercado de bonos del tesoro de Estados Unidos entre enero de 1995 y marzo de 2015, y el programa informático de Matlab. En el Capítulo 5 comparamos los resultados obtenidos con los tres modelos considerados y estudiamos cuál de ellos es más recomendable para estimar la ETTI durante el periodo analizado. Adicionalmente, realizamos un análisis de sensibilidad de los parámetros de los diferentes modelos y calculamos cómo cambiaría la ETTI estimada, los precios de los bonos cupón cero y el valor de una cartera de inversión ante variaciones de cada uno de los parámetros. Finalmente, en el Capítulo 6 presentamos las principales conclusiones de este trabajo.

## 2. LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS. CONCEPTOS PREVIOS

En este capítulo introducimos los conceptos previos necesarios para la modelización de la estructura temporal de los tipos de interés. Así pues, definimos en primer lugar el concepto de bono y los tipos de bonos; para luego mostrar cómo este concepto va muy de la mano con el de tipos de interés. Introducimos además los conceptos de tipo de interés spot y forward así como el de rendimiento al vencimiento. Finalmente, describimos la ETTI y explicamos brevemente las metodologías usadas para modelizarla.

### 2.1. Definición de bono

Para saber qué es la ETTI, es necesario empezar por definir qué es un bono. El bono es un contrato financiero firmado entre dos partes, en el cual una de las partes (emisor de deuda o deudor) adquiere la obligación de pagar a la otra parte (tenedor o acreedor), de manera periódica, una cantidad determinada de flujos financieros en fechas futuras (estos flujos se conocen comúnmente como cupones). De otro lado, cuando llegue la fecha de vencimiento del contrato, el comprador recibirá de forma adicional al cupón un importe final. A cambio de eso, el comprador del bono se compromete a entregar, en el presente, al emisor una cantidad monetaria específica. El importe final pagado al vencimiento del contrato por parte del emisor de la deuda es llamado precio de amortización, que debe expresarse como un porcentaje del valor nominal. Por otro lado, el pago realizado por el comprador del bono al emisor de la deuda se conoce como precio de emisión y también suele expresarse como un porcentaje del valor nominal.

Las características de un bono son las siguientes:

- Valor nominal: Es el monto sobre el cual el emisor de la deuda paga intereses o cupones.
- Fechas de emisión y de vencimiento: La fecha de emisión es el instante inicial de la operación cuando el acreedor acepta el precio de emisión al deudor o emisor. La fecha de vencimiento se corresponde con el instante en que el emisor debe hacer el pago del precio de amortización y, por tanto, donde termina la obligación por parte del emisor.
- Cupón: Cuantía que el emisor paga periódicamente al acreedor y se calcula como un porcentaje del valor nominal.
- Periodicidad: Es la frecuencia con la cual se hace el pago de los cupones. Una vez conocidas la fecha de emisión y de vencimiento así como la periodicidad, se pueden estimar las fechas de pago de cupón, el número de cupones que paga el bono y el número de bonos que faltan por amortizar en un instante de tiempo superior a la fecha de emisión y anterior a la de vencimiento.

Los bonos están clasificados como inversiones de renta fija puesto que a cambio de una inversión inicial, el tenedor de un bono asegura la recepción de unos flujos futuros predeterminados en el momento de realizar la inversión. Por otro lado, cabe aclarar que si el bono se compra directamente al emisor de la deuda en el instante en que éste realizó la emisión,

se habla de que el bono fue comprado en un mercado primario de renta fija. Mientras que, si el bono se adquiere en un instante posterior a la fecha de emisión a un tercero que posee los derechos de este contrato financiero (tenedor), se habla de que el bono fue comprado en un mercado secundario de renta fija. En el mercado de renta fija, existen dos tipos de bonos:

- Bonos con pago periódico de cupones.
- Bonos cupón cero.

### **2.1.1. Bonos con cupón**

Los bonos con cupón son aquellos contratos financieros en los cuales el emisor o deudor paga de manera periódica al comprador una determinada cantidad de flujos financieros futuros positivos, llamados cupones. El valor de esos cupones viene determinado como un porcentaje del valor nominal, véase Navarro y Nave (2001). En este tipo de bonos, el valor nominal puede ser considerado como un préstamo que hace el comprador del bono al emisor. Por otra parte, Kwok (2008) menciona que los cupones se pueden asemejar a un pago periódico de intereses que percibe el comprador por prestar un valor nominal determinado en la fecha que se pacta el contrato.

### **2.1.2. Bonos cupón cero**

En la sección anterior se habló del caso en que un tenedor recibe periódicamente por parte de un emisor unos flujos financieros positivos llamados cupones más un flujo final llamado precio de amortización, a cambio de entregar un flujo financiero en el presente. Ahora bien, si se evalúa el caso en que los cupones adquieren el valor cero, esto significaría que el bono no paga ningún cupón. Este tipo de bonos son llamados bonos cupón cero. Bajo dichas circunstancias, el emisor adquiere la obligación de pagar al comprador del bono solo el valor nominal al vencimiento de la operación. Mientras el comprador debe entregar al emisor en el presente, el precio de emisión del bono que tiende al valor nominal cuando se acerca la fecha de vencimiento del contrato. Si suponemos que el valor nominal del bono es 1 u.m., el precio del bono cupón cero, pagado por el comprador en el momento inicial de la operación, puede ser visto como un factor de descuento.

## **2.2. Valoración de bonos**

Después de haber introducido el concepto de bono, los tipos de bonos y sus características; cabe preguntarse cuál sería ese precio justo que debe pagar un inversor por adquirir un bono. Esto se hace mediante un proceso llamado valoración. El proceso de valoración de un bono consiste en estimar el precio que debe pagar un inversor al emisor o al tenedor del mismo para adquirir los derechos sobre los cupones y el valor nominal que aún no han sido pagados por el bono, en un instante de tiempo determinado que no necesariamente coincide con la fecha de emisión del bono.

Así pues, si queremos determinar el precio que un inversor debe pagar por un bono en un instante de tiempo determinado, este precio debe ser el resultado de sumar todos los flujos futuros (cupones y precio de amortización) que aún no han sido pagados por el bono, una vez que estos han sido descontados a valor presente usando alguna de las leyes de descuento financiero y utilizando el tipo de interés al contado vigente para cada uno de los plazos en que se van a pagar los flujos futuros. En ese orden de ideas, en este trabajo describimos, de manera paralela, el proceso de valoración de un bono cupón cero usando la ley de capitalización compuesta y de capitalización continua. Análogamente valoramos los bonos con pago de cupones.

### 2.2.1. Valoración de bonos con cupón

El precio  $B(t, T)$  que un inversor debe pagar en un instante de tiempo  $t$  por un bono que paga cupones de valor  $C$  periódicamente en instantes de tiempo determinados  $t_j; j = 1, 2, \dots, n$ , es el resultado de sumar cupones que aún no han sido pagados por el bono y el precio de amortización (a pagar en la fecha de vencimiento  $T$ ) una vez que estos han sido descontados a valor presente, utilizando el tipo de interés al contado vigente para cada uno de los plazos en que se pagarán los flujos futuros. De esta manera, la siguiente igualdad muestra cómo se obtiene el precio de un bono utilizando la ley de capitalización compuesta, si se supone que el nominal es igual a 1 u.m.

$$B(t, T) = \frac{C}{[1 + i(t, t_1)]^{t_1 - t}} + \frac{C}{[1 + i(t, t_2)]^{t_2 - t}} + \dots + \frac{C + 1}{[1 + i(t, T)]^{T - t}},$$

donde  $i(t, t_j)$  con  $t \leq t_1 \leq t_j \leq t_n = T$ , es el tipo de interés con el que los mercados financieros remunerar la disposición de capitales en el periodo de tiempo  $[t, t_j]$ .

En este punto es necesario comentar que, en los mercados financieros, el tipo de interés,  $i(t, t_j); j = 1, \dots, n$ , de un bono que vence en  $T$  es una variable desconocida y que no se puede observar directamente en el mercado. Sin embargo, los agentes de mercado comercian a diario con este tipo de contratos, comprando y vendiendo, a diferentes precios, bonos de las mismas características. Por tal motivo, aunque no se conoce el tipo de interés para valorar el activo financiero sí se conoce el precio promedio observado de negociación de un bono determinado; lo cual permite estimar el tipo de interés efectivo periódico constante en capitalización compuesta,  $y$ , que iguala el valor actual de todos los flujos de caja generados por el bono con su precio de mercado, es decir, su tanto interno de rentabilidad (TIR), véase Navarro y Nave (2001). Dicho tanto se muestra en la siguiente expresión

$$B(t, T) = \frac{C}{[1 + y]^{t_1 - t}} + \frac{C}{[1 + y]^{t_2 - t}} + \dots + \frac{C + 1}{[1 + y]^{T - t}}.$$

No obstante, en la Teoría Financiera habitualmente se trabaja en tiempo continuo. Bajo este tipo de análisis, un periodo es un instante de tiempo y los tipos de interés se calculan en capitalización continua. En tal caso, el precio de un bono con pago periódico de cupones  $C$  y precio de amortización igual a 1 u.m. se obtiene mediante la expresión

$$B(t, T) = C e^{-\int_t^{t_1} r(s) ds} + C e^{-\int_t^{t_2} r(s) ds} + \dots + (C + 1) e^{-\int_t^T r(s) ds},$$

donde  $r(s)$  es el tipo de interés instantáneo.

De forma análoga al caso de la capitalización compuesta, podemos obtener el tanto interno de rentabilidad en capitalización continua,  $R$ , de la siguiente forma:

$$B(t, T) = C e^{-R(t_1-t)} + C e^{-R(t_2-t)} + \dots + (C + 1) e^{-R(T-t)}.$$

## 2.2.2. Valoración de bonos cupón cero

A lo largo de este trabajo denotaremos por  $P(t, T)$  el valor en un instante  $t$  ( $t < T$ ) de un bono cupón cero con un valor nominal de 1 u.m. que vence en un instante  $T$ , es decir,

$$P(T, T) = 1.$$

Bajo esta consideración, procedemos a mostrar cómo se obtiene el precio en el instante  $t$  ( $t < T$ ) de un bono cupón cero que vence en  $T$  en capitalización compuesta. Para ello, actualizamos el valor nominal (1 u.m.) a tiempo presente siguiendo un procedimiento análogo al usado para el caso de la valoración de los bonos con cupón, esto es,

$$P(t, T) = \frac{1}{(1 + y(t, T))^{T-t}}. \quad (2.1)$$

El tanto interno de rentabilidad de un bono cupón cero  $y(t, T)$  en el periodo de tiempo  $[t, T]$  puede ser estimado a partir del precio promedio de negociación. Así pues, procedemos a obtener el tanto interno de rentabilidad capitalizable de manera compuesta al despejar la variable  $y(t, T)$  de la expresión (2.1). Dando como resultado la igualdad

$$y(t, T) = \left( \frac{1}{P(t, T)} \right)^{\frac{1}{T-t}} - 1.$$

De forma análoga al procedimiento usado para valorar los bonos con cupón, en tiempo continuo, obtenemos el precio y el tanto interno de rentabilidad de un bono cupón cero que vence en  $T$  en el instante  $t$  ( $t < T$ ) en capitalización continua, de forma que

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r(s) ds}, \quad (2.2)$$

siendo  $r(s)$ , de nuevo, el tipo de interés instantáneo del mercado. Así mismo, el tanto interno de rentabilidad de un bono cupón cero en capitalización continua en el periodo de tiempo  $[t, T]$ ,  $R(t, T)$ , verifica

$$P(t, T) = e^{-(T-t) R(t, T)}. \quad (2.3)$$

En la literatura, este tanto interno de rentabilidad de un bono cupón cero se conoce como rendimiento al vencimiento o *yield to maturity*. Dicho rendimiento al vencimiento puede ser

definido como el tipo de interés anual capitalizable continuamente, que se espera obtener como rendimiento medio por realizar una inversión en un bono cupón cero a un plazo determinado y, suponiendo que la inversión no se venderá o se cederá a una tercera parte sino que será mantenida bajo la propiedad del mismo inversor hasta su vencimiento, véase Mascareñas (2015). También se puede definir como el tipo de interés que el mercado de bonos cupón cero asigna de manera implícita a dichos bonos cuando los agentes del mercado fijan un precio promedio al bono al comprar y vender este activo financiero.

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T). \quad (2.4)$$

Así pues, en un mercado financiero en el que se negocian bonos cupón cero para un vencimiento determinado  $T$ , sería posible calcular el rendimiento a dicho vencimiento.

### 2.3. Tipo de interés al contado o spot

Consideremos un contrato financiero o bono pactado el día de hoy (instante inicial  $t$ ), en el cual una de las partes (deudor) adquiere la obligación de pagar a la otra (acreedor) una unidad monetaria en un instante de tiempo posterior  $T$  ( $t \leq T$ ). A cambio de obtener este derecho, el acreedor debe entregar al deudor una cantidad determinada y menor a una unidad monetaria (precio de compra) en el presente. Esto es similar a un préstamo monetario, en el cual el deudor paga al acreedor en el instante  $T$  la cantidad prestada en  $t$  más los intereses. Dicho contrato puede ser definido como contrato al contado, mientras que el tipo de interés que espera recibir el acreedor como retorno por el préstamo realizado se conoce como tipo de interés al contado, véase González y Presa (2005). Por tanto, el tipo de interés al contado es el tipo de interés vigente para el plazo  $[t, T]$ .

En ese orden de ideas, el tipo de interés al contado es el tanto que el mercado aplica hoy para valorar un pago que vence en un instante de tiempo  $T$  y que no tiene riesgo de crédito ni de liquidez. Por tal razón, este tipo de interés para un bono cupón cero es su rendimiento al vencimiento  $R(t, T)$ , véase la expresión (2.3). Del mismo modo, el tipo de interés instantáneo al contado,  $r(t)$ , se obtiene calculando el siguiente límite:

$$r(t) = R(t, t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T).$$

A partir de las expresiones (2.2) y (2.3) el rendimiento al vencimiento  $R(t, T)$  verifica

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s) ds. \quad (2.5)$$

### 2.4. Tipo de interés a plazo o forward

Consideramos ahora el caso en que dos partes firman un contrato financiero, en un instante inicial  $t$ , en el cual el acreedor se compromete a entregar al deudor una cantidad determinada y menor a una unidad monetaria (precio de compra) en un instante  $T_1$  ( $t \leq T_1$ ). Mientras que el

deudor adquiere la obligación de pagarle al acreedor una unidad monetaria en un instante de tiempo  $T_2$  ( $t < T_1 < T_2$ ). Este contrato puede ser llamado contrato a plazo. De este modo, el tipo de interés que espera recibir el acreedor como rendimiento por el préstamo realizado en el marco de un contrato a plazo se conoce como tipo de interés a plazo. Este es interpretado como el tipo de interés que en un instante  $t$  un inversor espera obtener como rendimiento por realizar una inversión futura en un bono cupón cero en el instante  $T_1$ , si la inversión inicial más los rendimientos obtenidos por dicha inversión se recuperan mediante un único flujo monetario en el instante  $T_2$ . Así, el interés a plazo es el tipo de interés  $F(t, T_1, T_2)$  que en el instante  $t$  está vigente para el plazo  $[T_1, T_2]$  y que dada la existencia de los tipos de interés al contado,  $y(t, T_1)$  e  $y(t, T_2)$ , vigentes para los plazos  $[t, T_1]$  y  $[t, T_2]$ , respectivamente, verifica que

$$(1 + y(t, T_2))^{(T_2-t)} = (1 + y(t, T_1))^{(T_1-t)} (1 + F(t, T_1, T_2))^{(T_2-T_1)}. \quad (2.6)$$

Por tanto,

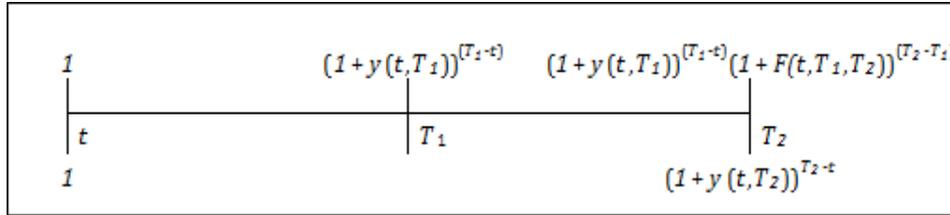
$$F(t, T_1, T_2) = \left[ \frac{(1 + y(t, T_2))^{(T_2-t)}}{(1 + y(t, T_1))^{(T_1-t)}} \right]^{\frac{1}{T_2-T_1}} - 1,$$

véase González y Presa (2005). De la expresión (2.6) podemos intuir que el tipo de interés a plazo correspondiente al periodo  $[T_1, T_2]$  es equivalente al tipo de interés al contado que debería remunerar el mercado en el instante  $T_1$  para que el resultado de una estrategia de inversión consistente en invertir en el instante  $t$  en un bono cupón con vencimiento en  $T_2$  sea igual que una estrategia que consista en invertir en el instante  $t$  en un bono cupón cero con vencimiento en  $T_1$  y, cuando llegue ese instante  $T_1$ , reinvertir la inversión inicial más la rentabilidad adquirida en un bono cupón cero con vencimiento en el instante  $T_2$ .

Podemos notar entonces que independientemente de que existan diferentes estrategias de inversión, siempre que éstas se lleven a cabo dentro del mismo periodo de tiempo deberían proporcionar los mismos rendimientos. Esto sucede si hay certidumbre y por tanto el valor del tipo de interés a plazo  $F(t, T_1, T_2)$  es conocido con certeza desde el instante  $t$ . Esto significa que en presencia de certidumbre no es posible obtener rendimientos adicionales al utilizar diferentes estrategias de inversión o sin asumir riesgos adicionales. Al hecho de generar beneficios sin asumir ningún riesgo se conoce como arbitraje financiero.

Para entender mejor el concepto de arbitraje financiero, suponemos un inversionista que realiza dos estrategias de inversión diferentes de manera simultánea en un instante de tiempo inicial,  $t$ , de una unidad monetaria cada inversión. La primera estrategia consiste en una inversión que se realiza en  $t$  hasta el vencimiento  $T_1$ , dicha inversión proporciona en  $T_1$ :  $(1 + y(t, T_1))^{T_1-t}$ . Por otra parte, en el mismo instante inicial,  $t$ , se planea que cuando la inversión mencionada llegue a su fecha de vencimiento se vuelve a reinvertir la inversión inicial más los rendimientos obtenidos al tipo de interés vigente en ese momento con vencimiento en una fecha posterior  $T_2$ ,  $T_1 < T_2$ . Así, las dos inversiones que componen esta primera estrategia proporcionan en  $T_2$ :  $(1 + y(t, T_1))^{(T_1-t)} (1 + F(t, T_1, T_2))^{(T_2-T_1)}$ . Del mismo modo, la segunda estrategia consiste en una inversión hecha en  $t$  con vencimiento en  $T_2$ , dicha inversión proporciona en  $T_2$ :  $(1 + y(t, T_2))^{T_2-t}$ . Si las dos estrategias de inversión se realizaron por ejemplo en bonos con

el mismo nivel de riesgo, es de esperar que, ya que ambas estrategias empiezan y finalizan en el mismo instante de tiempo, los rendimientos obtenidos sean iguales, véase la Figura 1 y la expresión (2.6). Si esto no fuese así, el inversionista obtendría una ganancia adicional sobre cualquiera de las inversiones sin asumir ningún riesgo, generándose un arbitraje financiero.



**Figura 1.** Interpretación del arbitraje financiero. Fuente: Elaboración propia.

El tipo de interés a plazo también puede expresarse utilizando la ley de capitalización continua, en cuyo caso el concepto de arbitraje financiero es el mismo con la diferencia de que la capitalización de intereses se realiza en tiempo continuo. En este caso

$$e^{R(t, T_2)(T_2-t)} = e^{R(t, T_1)(T_1-t)} e^{f(t, T_1, T_2)(T_2-T_1)},$$

con  $f(t, T_1, T_2)$  igual al tipo de interés a plazo en capitalización continua. Por otra parte, el tipo de interés instantáneo a plazo se define de la siguiente forma. Asumimos que el intervalo de tiempo  $[T_1, T_2]$  tiene una amplitud  $h$ , y que a su vez dicho intervalo es una partición infinitesimal del espacio temporal. Así pues, definimos  $f(t, T)$  como el tipo de interés a plazo instantáneo vigente en  $t$  para el intervalo  $[T_1, T_1 + h]$ , cuando  $h$  tiende a cero

$$f(t, T) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t, T_1, T_1 + h).$$

Por otro lado, en Vasicek (1977) podemos ver que la relación entre el rendimiento al vencimiento y el tipo de interés instantáneo a plazo es la siguiente:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds.$$

## 2.5. La estructura temporal de los tipos de interés o curva de rendimientos

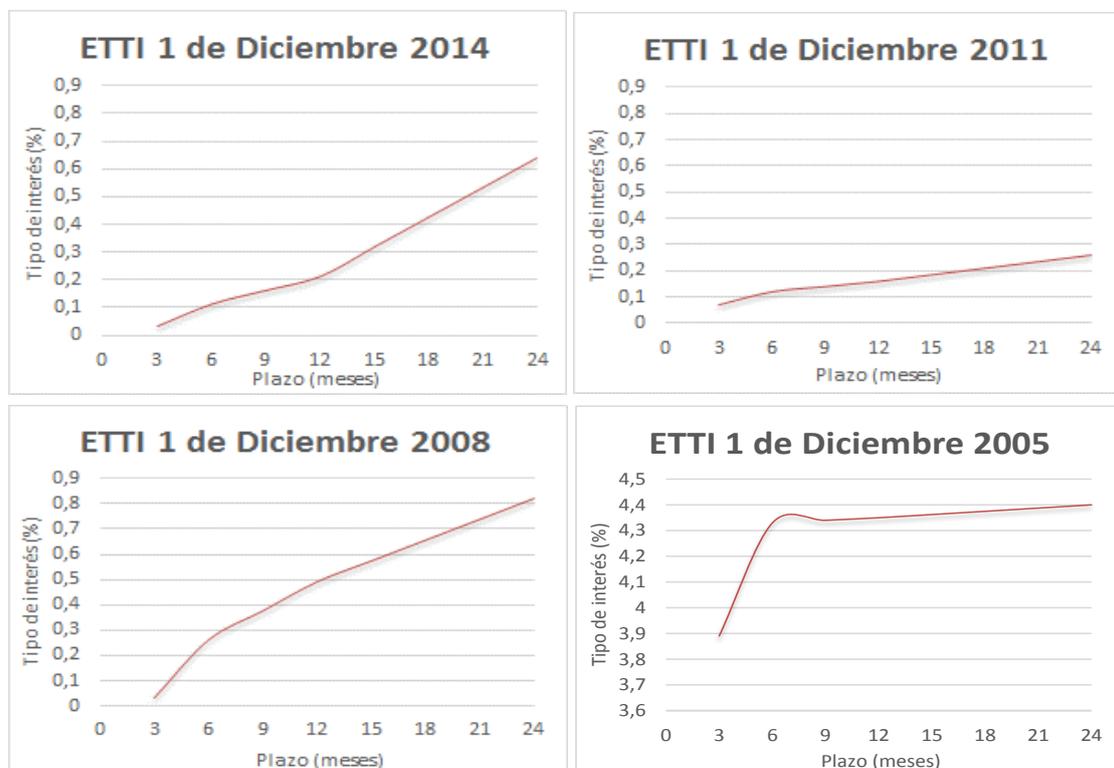
Una vez descrita la valoración de los bonos cupón cero y el rendimiento al vencimiento, introducimos el concepto de ETTI, también conocida en la literatura como curva de rendimientos. La ETTI es la relación existente entre el rendimiento de los bonos cupón cero y su vencimiento. Desde un punto de vista gráfico, ésta es la curva que muestra el rendimiento al vencimiento frente a los diferentes vencimientos de los bonos cupón cero pertenecientes al mismo mercado en un instante de tiempo determinado.

Generalmente, la ETTI toma una forma creciente en la cual los rendimientos son mayores cuanto mayor sea el plazo hasta el vencimiento de la inversión. Un inversor, como agente maximizador de beneficios esperar obtener rendimientos superiores cuanto mayor sea el vencimiento de sus

inversiones. Esto es debido a que invertir a un plazo de vencimiento mayor implica asumir mayores riesgos, como por ejemplo la posibilidad de que a largo plazo el emisor de un título sufra problemas de insolvencia y sea incapaz de pagar sus obligaciones. Además de ésta, pueden presentarse otras situaciones inesperadas que podrían generar pérdidas sobre la inversión. Por tanto, a mayor plazo hasta el vencimiento de una inversión, mayor es la posibilidad de que ocurran este tipo de situaciones inesperadas. Por este motivo, el inversionista sólo está dispuesto a exponer su capital a mayores riesgos a cambio de rendimientos adicionales o primas de riesgo.

Sin embargo, esta función no siempre es creciente y en ocasiones puede ser decreciente. En este caso, el rendimiento esperado en el corto plazo es mayor al de largo plazo. Esto ocurre, cuando los agentes del mercado tienen expectativas de la posible ocurrencia de sucesos futuros anormales tales como una recesión económica, una deflación o niveles relativamente bajos de la inflación, lo cual implicaría que en el futuro los rendimientos de las inversiones serán cada vez menores con respecto a los actuales, véase Carrero (2011). Por otra parte, la ETTI puede ser constante e incluso adoptar combinaciones de las mencionadas.

La Figura 2 muestra diferentes formas que ha adoptado la ETTI en el mercado de Estados Unidos, obtenidas a partir de los rendimientos al vencimiento de los bonos del Tesoro de Estados Unidos. Observamos que a 1 de diciembre de 2008, 1 de diciembre de 2011 y 1 de diciembre de 2014 esta curva es siempre creciente aunque la tasa de crecimiento es diferente y cambia incluso para determinados vencimientos. Por otra parte a 1 de diciembre de 2005 obtenemos que la ETTI es en general creciente, aunque también tiene un tramo decreciente.



**Figura 2.** Formas funcionales que ha adoptado la ETTI de bonos del Tesoro de Estados Unidos.

*Fuente: Elaboración propia usando datos de la Reserva Federal de los Estados Unidos.*

La estructura temporal de los tipos de interés podría obtenerse de forma continua a partir de observaciones del mercado financiero, si existieran negociaciones de bonos cupón cero para todos los posibles vencimientos a lo largo del tiempo. Sin embargo, en el mercado financiero real solo se negocia un número finito de bonos cupón cero que nos permiten calcular el mismo número finito de rendimientos al vencimiento. Por lo general, los bonos cupón cero existentes en el mercado real son a corto plazo. Por tanto, al tomar el precio promedio de negociación de estos bonos sólo se pueden calcular algunos puntos de la ETTI a corto plazo, véase Abad y Robles (2003).

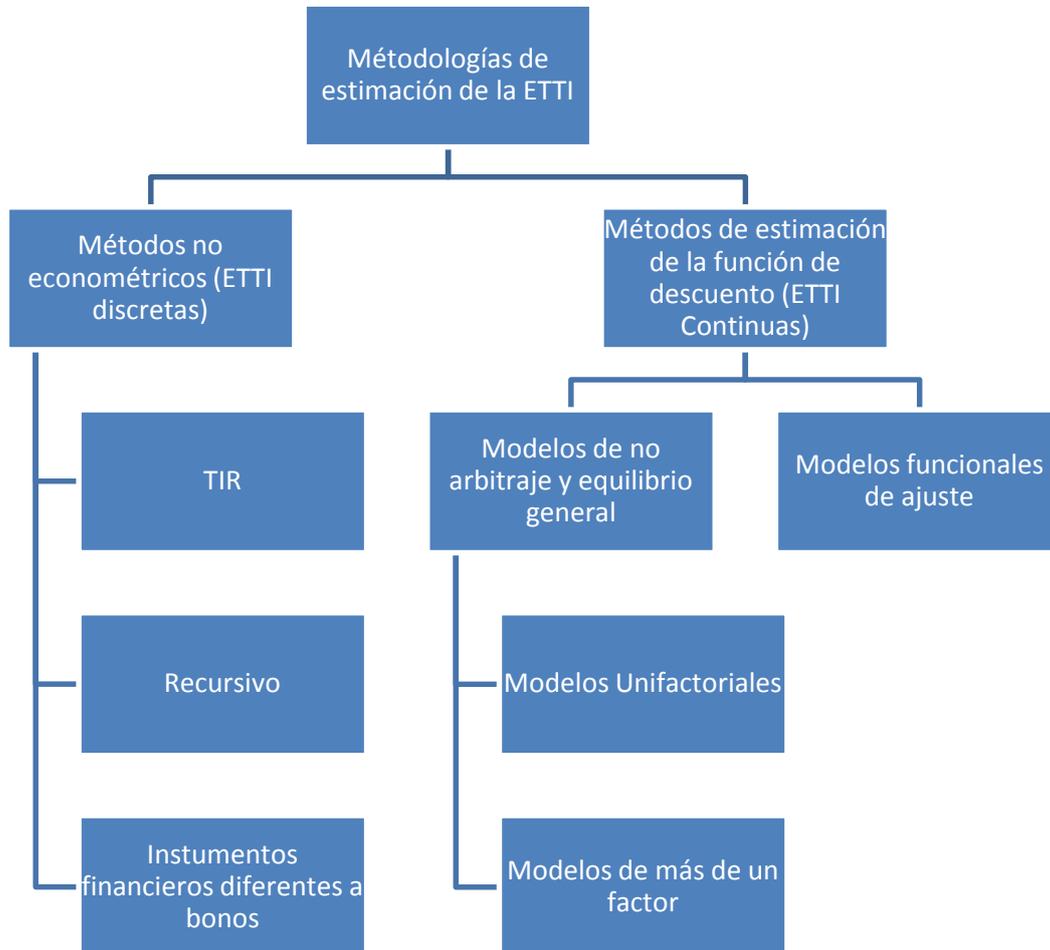
Como comentan Navarro y Nave (2001), debido a la inexistencia de bonos cupón cero con vencimiento para todos los plazos, la ETTI no se puede observar directamente del mercado. Estas dificultades, conllevan que en la práctica se usen diferentes métodos para estimar la ETTI. Algunos métodos usan información de diferentes mercados como lo son el de bonos con cupón, el de futuros y el de swaps de tipos de interés. Este tipo de procedimientos son métodos no econométricos y estiman una ETTI discreta. Es decir, sólo son capaces de estimar rendimientos al vencimiento para un número finito y conocido de vencimientos. Por otra parte, existen otras metodologías que, apoyándose en el cálculo, estiman el rendimiento al vencimiento como una función del tiempo, con lo cual se genera una ETTI de carácter continuo. La Figura 3 muestra un panorama general de las distintas metodologías que existen para calcular la ETTI. Dichas metodologías son descritas en detalle por Núñez (1995) y Ruiz (2005).

En cuanto a los métodos no econométricos encontramos los métodos de la TIR, el método recursivo y el uso de otros instrumentos financieros para estimar la ETTI. Mientras que, los métodos de estimación de descuento incluyen modelos de no arbitraje y equilibrio general, y modelos funcionales de ajuste.

De los métodos no econométricos, el método de la TIR asume que el tanto interno de rendimiento de los bonos disponibles (con o sin cupones) en el mercado puede usarse como rendimiento al vencimiento. Sin embargo, si existe más de un bono con diferente número de cupones pero con la misma fecha de vencimiento, se obtendrían dos valores de rendimiento al vencimiento diferentes, lo cual sería una desventaja. El método recursivo asume que existe una cotización de mercado de un bono cupón cero a corto plazo al cual se le puede calcular su rendimiento al vencimiento. Adicionalmente, se asume que existe un bono que paga un cupón y un precio de amortización, y que la fecha de pago del primer cupón coincide con la de vencimiento del bono cupón cero. Es posible hallar el rendimiento al vencimiento de dicho bono que paga un cupón y un precio de amortización si se descuenta el cupón del mismo usando el rendimiento al vencimiento del primer bono. Conociendo el precio de mercado, es posible hallar el rendimiento asociado a la fecha de vencimiento del bono que paga un cupón y un precio de amortización. De este mismo modo, si existiera un bono con un cupón adicional el proceso anterior se podría aplicar de manera recursiva hasta el bono de vencimiento a mayor plazo disponible. Por último, existen métodos que usan otros instrumentos financieros como swaps o futuros para estimar el tanto interno de rentabilidad asociado a dichos instrumentos.

De los métodos de estimación de la función de descuento, los modelos de arbitraje y equilibrio general asumen que el tipo de interés instantáneo al contado o a plazo evoluciona en el tiempo

de manera aleatoria, siguiendo un proceso estocástico, y dependiendo de uno o más factores, como por ejemplo la metodología usada por Vasicek (1977) o Heath *et al.* (1992). Mientras que los modelos funcionales de ajuste, aprovechan la existencia de funciones que generen curvas semejantes a las esperadas en una ETTI y ajustan los parámetros de dichas funciones a partir de los precios y las estructuras de pago de los bonos comercializados en el mercado, véase, a manera de ejemplo, Nelson y Siegel (1987) o Svensson (1994).



**Figura 3.** Metodologías de estimación de la ETTI. Fuente: *Elaboración propia.*

### 3. MODELOS DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

Pese a la amplia literatura y a la variedad de métodos existentes en la literatura, no existe un acuerdo sobre qué método de estimación de la ETTI debe utilizarse. En este trabajo nos centramos en modelos que, como comentan Abad y Robles (2003), surgieron dentro de la Economía Financiera a partir de la teoría de valoración de activos en tiempo continuo. En particular, consideramos modelos unifactoriales tanto deterministas como estocásticos en los que la variable de estado es el tipo de interés instantáneo.

Estos modelos parten de unos supuestos iniciales que debe cumplir el mercado de bonos cupón cero para estar en equilibrio. Estos supuestos permiten la estimación del precio de los bonos y del rendimiento al vencimiento como función del tiempo asumiendo que el tipo de interés instantáneo sigue una dinámica determinista o estocástica. De esta forma, dependiendo de la manera en que evoluciona el tipo de interés instantáneo, se puede obtener o no una solución analítica para el precio y el rendimiento al vencimiento.

El primer supuesto, del que parten estos modelos y por el cual se les conoce como unifactoriales, es el de asumir que el precio de los bonos cupón cero y el rendimiento al vencimiento solo dependen de un factor, el tipo de interés instantáneo  $r(t)$ . En este sentido, el precio del bono resulta de descontar a valor presente el capital a recibir en el momento del vencimiento, usando como tanto de descuento la evolución del tipo de interés instantáneo en cada instante del tiempo.

El segundo supuesto, es que la evolución del tipo de interés instantáneo es descrita por un proceso que a largo plazo converge a un valor medio (conocidos como procesos de reversión a la media).

Por último, se asume que los mercados son eficientes y están en equilibrio. Un mercado eficiente es aquel en el que todos los inversores tienen acceso al mismo tiempo a la información del mercado. Por tanto, las estrategias que usan sus participantes para llevar al cabo sus inversiones dependen únicamente de la información disponible. Además de esto, en un mercado eficiente los inversores son considerados racionales en tanto que buscan maximizar su utilidad y realizar una transacción no tiene costes. Por último, el equilibrio de dicho mercado se consigue cuando independientemente de la estrategia de inversión que se lleve a cabo a un plazo determinado se obtienen siempre los mismos rendimientos, con lo cual las expectativas de los participantes en un mercado eficiente son homogéneas y no existen oportunidades de arbitraje financiero, véase Vasicek (1977).

Un mercado como éste se asemeja a una competencia perfecta, pues todos los inversores (compradores y vendedores de bonos) están bien informados, disponen de la misma cantidad de información de mercado simultáneamente, actúan de forma racional y tienen las mismas expectativas sobre los rendimientos que debe generar una inversión a un plazo determinado, con lo cual no hay cabida a oportunidades de arbitraje. Por tal motivo, teóricamente todos los inversores esperan que las compras de bonos en ese mercado generen unos rendimientos cuando llegue la fecha de vencimiento, conocidos como tipo de interés libre de riesgo. Esto es

cierto, pues todos los agentes (con expectativas homogéneas) y usando la información disponible en un instante de tiempo determinado esperarían que toda inversión retorne en cada instante  $t$  el tipo de interés libre de riesgo de la economía, equivalente a  $r(t)$ , y que a un plazo determinado se obtenga un rendimiento medio  $R(t, T)$  conocido como rendimiento al vencimiento. Por tanto, en este tipo de modelos,  $R(t, T)$  también se conoce como el rendimiento libre de riesgo para un periodo de vencimiento  $T - t$ .

Después de haber mencionado los principios bajo los cuales se rigen los modelos unifactoriales, empezamos por describir el modelo más sencillo, en el cual la ETTI se estima mediante un modelo determinista donde el tipo de interés sigue una dinámica de reversión a la media en tiempo continuo. Posteriormente, explicamos algunos conceptos necesarios para comprender los modelos estocásticos de estimación de la ETTI. De este modo, en el presente capítulo definimos el proceso de Wiener, el proceso y el Lema de Itô así como la ecuación de valoración de bonos cupón cero, necesaria para obtener los rendimientos al vencimiento. Finalmente, explicamos los modelos estocásticos propuestos por Vasicek (1977) y Cox *et al.* (1985) con el fin de estimar la ETTI.

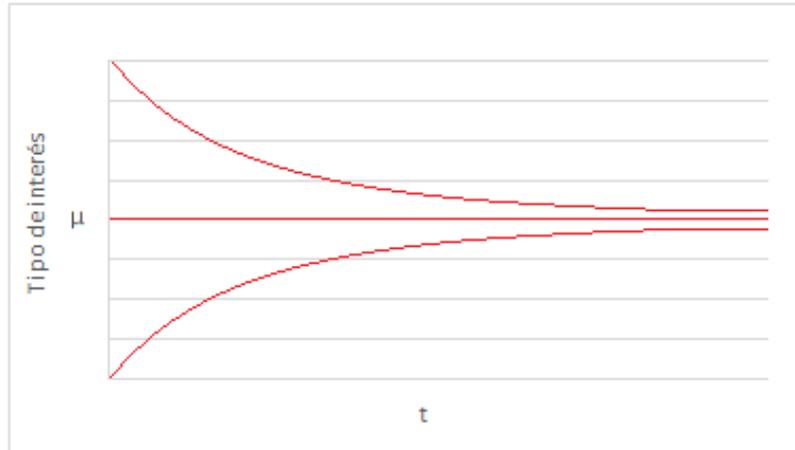
### 3.1. Modelo determinista

En esta sección consideramos el tipo de interés instantáneo,  $r(t)$ , como función determinista del tiempo. Suponemos que  $r$  es solución de una ecuación diferencial ordinaria cuya dinámica se conoce en la literatura financiera como reversión a la media en tiempo continuo y se expresa de la siguiente forma

$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt, \quad k, \mu \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

véase Navarro y Nave (2001). En esta ecuación diferencial,  $k$  mide la velocidad con la cual la solución se acerca a un valor central  $\mu$  a largo plazo. La Figura 4 permite ver más claramente el concepto de reversión a la media, donde la media es  $\mu$ . En dicha figura se puede ver que en este tipo de dinámicas, si un tipo de interés empieza por un valor mayor a la media  $\mu$ , a lo largo del tiempo, dicho tipo de interés irá disminuyendo hacia un valor central. Sin embargo, si el tipo de interés inicial es un valor menor a la media  $\mu$ , se comportará de forma análoga creciendo hacia  $\mu$ . Por último, si se parte de un valor inicial  $\mu$ , la solución permanecerá constante.

Como indica Kwok (2008), la reversión a la media explica el comportamiento de los tipos de interés en el mundo real. Un incremento en los tipos de interés supone una caída en la cantidad de bonos emitidos, pues cuanto más altos sean los tipos de interés los agentes de mercado estarán menos dispuestos a captar recursos, ya que el precio de captar esos recursos es muy alto. Esta caída en la emisión de bonos conduce a que los tipos de interés vuelvan a disminuir hasta un valor tal que los agentes estén dispuestos a captar dinero. Por tanto, en el largo plazo el tipo de interés tenderá hacia un valor central.



**Figura 4.** Dinámica de reversión a la media. Fuente: Elaboración propia.

Para resolver la ecuación diferencial separable (3.1) basta con integrar en ambos lados de la igualdad y despejar el tipo de interés instantáneo  $r$ . No hay que olvidar que el tipo de interés instantáneo depende del tiempo  $t$ . Por tanto, para dos instantes de tiempo  $t$  y  $s$  escogidos arbitrariamente, donde  $t < s$ , se cumple que

$$\int_{r(t)}^{r(s)} \frac{dr}{(\mu - r)} = \int_t^s k dz.$$

Integrando y despejando  $r(s)$  de la anterior igualdad, obtenemos la expresión que describe de manera determinista el comportamiento del tipo de interés en un instante determinado,

$$r(s) = \mu + (r(t) - \mu)e^{-k(s-t)}. \quad (3.2)$$

Si reemplazamos el valor de  $r(s)$  de (3.2) en la ecuación (2.5) obtenemos

$$R(t, r; T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T (\mu + (r(t) - \mu)e^{-k(s-t)}) ds.$$

Al resolver la integral tenemos

$$R(t, r; T) = \frac{1}{T-t} \left( \mu s + \frac{(r - \mu)}{-k} e^{-k(s-t)} \right) \Bigg|_{s=t}^{s=T}.$$

Por último, evaluamos los límites superior e inferior de  $s$  en la anterior expresión y obtenemos la fórmula analítica de la ETTI bajo este modelo determinista:

$$R(t, r; T) = \mu + \frac{(r - \mu)}{k(T-t)} (1 - e^{-k(T-t)}). \quad (3.3)$$

Nótese que cuando  $t$  tiende a infinito  $R(t, r; T)$  tiende a  $\mu$ , esto es,

$$R_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t, r; T) = \mu.$$

### 3.2. El proceso de Wiener

En esta sección, introducimos conceptos necesarios para describir los modelos estocásticos que utilizaremos posteriormente. Para ello consideramos un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ , donde  $\Omega$  es el espacio muestral,  $F$  una  $\sigma$ -álgebra formada por todos los sucesos aleatorios y  $P$  una medida de probabilidad que asigna una probabilidad a cada suceso.

En este contexto, entendemos por proceso estocástico una familia parametrizada de variables aleatorias  $\{X(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  en el espacio  $(\Omega, F, P)$  y con valores en  $\mathbb{R}$ , véase Oksendal (2005).

Aquí, para cada  $t \in [0, \infty)$  tenemos una variable aleatoria

$$\omega \rightarrow X(t, \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

y para cada  $\omega \in \Omega$  podemos considerar la función

$$t \rightarrow X(t, \omega), \quad t \in [0, \infty),$$

como un camino o trayectoria de  $X(t)$ .

Entre los procesos estocásticos cabe destacar el proceso de Wiener, definido por Zagst (2002) y Oksendal (2005) como aquel proceso estocástico,  $W(t)$  con  $t \in [0, \infty)$ , con las siguientes características:

- $W(0) = 0$ .
- Tiene incrementos estacionarios e independientes, es decir, los incrementos

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1}),$$

para  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ , son independientes y sólo dependen del incremento en el tiempo.

- Los incrementos  $W(t) - W(s)$  siguen una distribución normal de media 0 y de varianza  $(t - s)$ , para  $0 \leq s \leq t$ , es decir,

$$E [W(t) - W(s)] = 0,$$

$$Var [W(t) - W(s)] = t - s.$$

En notación diferencial se suele expresar como

$$E[dW(t)] = 0,$$

$$Var [dW(t)] = dt.$$

- Las trayectorias de  $W(t)$  son funciones continuas de  $t$ .

### 3.3. El proceso y el Lema de Itô

Uno de los procesos estocásticos más importantes en la literatura es el proceso de difusión descrito por Itô (1961). Dicho proceso evoluciona según la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \gamma(t, X(t))dt + \rho(t, X(t)) dW(t),$$

en la cual  $\gamma(t, X(t))$  y  $\rho(t, X(t))$  son funciones de  $t$  y  $X(t)$ , mientras que  $W(t)$  es un proceso de Wiener. Aquí,  $\gamma(t, X(t))$  y  $\rho^2(t, X(t))$  son la tendencia y la varianza instantánea, respectivamente, del proceso  $X(t)$ .

El comportamiento de una función  $f(X(t))$ , cuando  $X(t)$  sigue un proceso de difusión de Itô, puede ser descrito gracias al Lema de Itô. Este lema es el equivalente a la regla de la cadena en ecuaciones diferenciales estocásticas y fue una de los grandes aportaciones de Itô (1961) al cálculo estocástico.

Según el Lema de Itô, siempre que haya una función  $f(t, X(t))$ , si la variable  $X(t)$  sigue un proceso de difusión de Itô y, además, existen las derivadas parciales de primer y segundo orden  $\partial f / \partial t$ ,  $\partial f / \partial X$  y  $\partial^2 f / \partial X^2$ , entonces, la variación de  $f$  también sigue un proceso de Itô de la forma

$$df(t, X(t)) = \left[ \frac{\partial f}{\partial X} \gamma(t, X(t)) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{2\partial X^2} \rho(t, X(t))^2 \right] dt + \left[ \frac{\partial f}{\partial X} \rho(t, X(t)) \right] dW(t).$$

### 3.4. La ecuación de valoración de los bonos cupón cero

En esta sección se introduce la ecuación en derivadas parciales de valoración de bonos cupón cero, la cual debe ser resuelta para poder encontrar una solución analítica a la curva de rendimientos. Para ello, en primer lugar describimos los principios fundamentales de los modelos estocásticos unifactoriales, que nos conducen a la expresión matemática de la ecuación de valoración de los bonos cupón cero. Así pues, podemos decir que los modelos estocásticos unifactoriales de la estructura temporal de los tipos de interés parten de tres principios o supuestos fundamentales descritos por Vasicek (1977) y usados para modelizar el comportamiento de los tipos de interés:

- Los precios de los bonos cupón cero dependen de una variable de estado, en este caso la evolución del tipo de interés instantáneo a través del tiempo. En ese orden de ideas, este supuesto se representa matemáticamente mediante la expresión

$$P(t, T) = P(t, r(t); T).$$

El precio de un bono cupón cero puede ser interpretado como un factor por el cual se puede descontar el nominal del bono para calcular su valor presente. Este precio sería igual a 1 u.m. el día del vencimiento del bono, pues el instante de valoración coincide con el de vencimiento. Así al llegar el vencimiento se cumple que

$$P(T, r; T) = 1. \quad (3.4)$$

- El tipo de interés instantáneo se modela mediante el uso de un proceso estocástico en tiempo continuo llamado proceso de difusión. Estos procesos pueden representarse mediante un proceso de Itô de la forma

$$dr = \gamma(t, r)dt + \rho(t, r)dW, \quad (3.5)$$

donde  $dr$  es la variación que sigue el tipo de interés instantáneo en el instante  $t$ . Por otro lado,  $\gamma(t, r)$  es la tendencia o la trayectoria seguida por el proceso, mientras  $\rho^2(t, r)$  es la varianza del mismo. Mientras que  $W$  es un proceso de Wiener.

- Todos los agentes del mercado tienen expectativas similares. Por lo cual, independientemente de las estrategias de inversión realizadas, siempre y cuando estas tengan el mismo vencimiento, deberán generar los mismos rendimientos. Por tanto, no existen oportunidades de arbitraje financiero en el mercado.

Uno de los principios básicos de los llamados modelos unifactoriales, es que el precio de un bono con fecha de vencimiento conocida depende del tipo de interés instantáneo. De esta forma, conociendo la ecuación que gobierna la dinámica del mismo, véase (3.5), aplicamos el Lema de Itô para obtener la ecuación diferencial que expresa la dinámica del precio. Dicha dinámica es representada por Kwok (2008) mediante la ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dP = \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \gamma \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \rho \frac{\partial P}{\partial r} dW. \quad (3.6)$$

Si multiplicamos y dividimos la parte derecha de la anterior igualdad por  $P(t, r; T)$ , obtenemos la expresión

$$dP = P(t, r; T) \mu(t, r; T)dt + P(t, r; T) \sigma(t, r; T) dW,$$

donde

$$\mu(t, r; T) = \frac{1}{P(t, r; T)} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \gamma \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right), \quad (3.7)$$

$$\sigma(t, r; T) = \frac{1}{P(t, r; T)} \rho \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (3.8)$$

Sin embargo, hay una condición necesaria para que la variación del precio de mercado del bono a través del tiempo, descrita por la ecuación (3.6) se encuentre en un mercado eficiente. Dicha condición se cumple cuando la variación del precio de mercado del bono es tal que los rendimientos instantáneos de diferentes estrategias de inversión para el mismo periodo de vencimiento e instante de tiempo  $t$  son siempre los mismos. Para esto, asumimos la existencia de una cartera compuesta por la compra y emisión de varios bonos. El rendimiento de esta cartera al vencer debe ser el mismo que el generado por una única inversión que tenga la misma

fecha de vencimiento que la cartera, para evitar oportunidades de arbitraje. De no ser así, si por ejemplo el tanto de rendimiento al vencimiento de la cartera es mayor que el de una única inversión con el mismo vencimiento, todos los agentes del mercado al querer maximizar su utilidad buscarían captar dinero emitiendo bonos al mismo tanto de rendimiento generado por la inversión única, y usarían ese dinero captado para invertir en la cartera que tiene el mismo vencimiento pero que genera mayor rendimiento. Esta operación generaría beneficios equivalentes a la diferencia entre la tasa de rendimiento de la cartera y la del bono emitido ambos con la misma fecha de vencimiento. Se dice que los beneficios fueron obtenidos sin ningún tipo de riesgo, pues no se invirtió ningún capital para obtenerlos, sino que estos se generaron utilizando capitales ajenos y aprovechando las imperfecciones del mercado. Así pues, el equilibrio del mercado se consigue cuando no hay posibilidades de arbitraje.

Construimos, como lo hace Vasicek (1977), una cartera libre de riesgo compuesta por dos operaciones pactadas simultáneamente en el instante  $t$ . La primera operación es la compra de bono cupón cero de valor  $X_1$  con vencimiento en  $T_1$ . La segunda operación es la venta de otro bono cupón cero de valor  $X_2$  con vencimiento en  $T_2$ , donde ( $T_1 \neq T_2$ ). De este modo, el valor de la cartera,  $X$ , vendría dado por la expresión

$$X = X_1 - X_2 .$$

Teniendo en cuenta que el valor de la cartera depende del instante de tiempo y de los vencimientos, para obtener la rentabilidad relativa de esta cartera usamos el Lema de Itô como hicimos en (3.6), y obtenemos

$$dX = [X_1\mu(t, r; T_1) - X_2\mu(t, r; T_2)]dt + [X_1\sigma(t, r; T_1) - X_2\sigma(t, r; T_2)]dW. \quad (3.9)$$

Como queremos construir una cartera libre de riesgo, la parte estocástica de la anterior ecuación debe ser cero, de forma que

$$X_1 \sigma(t, r; T_1) - X_2 \sigma(t, r; T_2) = 0.$$

Esto ocurre cuando las cantidades  $X_1$  y  $X_2$  se eligen de la siguiente forma,

$$X_1 = \frac{X\sigma(t, r; T_2)}{\sigma(t, r; T_2) - \sigma(t, r; T_1)}, \quad (3.10)$$

$$X_2 = \frac{X\sigma(t, r; T_1)}{\sigma(t, r; T_2) - \sigma(t, r; T_1)}. \quad (3.11)$$

Si queremos evitar oportunidades de arbitraje, el rendimiento en el instante  $t$  de esta cartera sin riesgo debe ser igual al tipo de interés instantáneo libre de riesgo de la economía<sup>1</sup>,  $r$ , véase Kwok (2008). De este modo, al sustituir los valores de  $X_1$  y  $X_2$  de (3.10) y (3.11) en la expresión (3.9) e igualando a  $r$  obtenemos

<sup>1</sup> En la práctica, suele considerarse al gobierno como el emisor libre de riesgo y a los rendimientos de los bonos de la nación como el tipo de interés libre de riesgo.

$$\frac{\mu(t, r; T_1)\sigma(t, r; T_2) - \mu(t, r; T_2)\sigma(t, r; T_1)}{\sigma(t, r; T_2) - \sigma(t, r; T_1)} = r,$$

o en otros términos,

$$\frac{\mu(t, r; T_1) - r}{\sigma(t, r; T_1)} = \frac{\mu(t, r; T_2) - r}{\sigma(t, r; T_2)}.$$

Nótese que la relación anterior siempre se cumple para dos vencimientos diferentes escogidos arbitrariamente ( $T_1 \neq T_2$ ). Por esa razón, en un mercado de bonos cupón cero en el cual no haya oportunidades de arbitraje, existe un ratio  $\lambda(t, r)$  común a todos los vencimientos que verifica

$$\lambda(t, r) = \frac{\mu(t, r; T) - r}{\sigma(t, r; T)}. \quad (3.12)$$

Este ratio es conocido como el precio del riesgo de mercado, toda vez que expresa cuál sería la rentabilidad adicional que debe proporcionar un bono si se aumentara una unidad de volatilidad adicional al precio del bono (riesgo asociado al bono). Si se sustituyen los valores de  $\mu(t, r; T)$  y  $\sigma(t, r; T)$  de las expresiones (3.7) y (3.8) en (3.12) se obtiene la ecuación en derivadas parciales que gobierna la dinámica del precio de cualquier derivado del tipo de interés,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (\gamma - \lambda\rho) \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0. \quad (3.13)$$

Si lo que se desea valorar es un bono cupón cero, debemos resolver la anterior ecuación en derivadas parciales junto a la condición final de que el precio del bono en el momento de su vencimiento es 1 u.m., véase la expresión (3.4).

En este problema (3.13) - (3.4), la ecuación en derivadas parciales se conoce también como ecuación de la estructura temporal, toda vez que describe cómo evoluciona el precio de un bono cupón cero a lo largo del tiempo.

En un mercado libre de riesgo, la solución del problema (3.13) – (3.4) es el precio de un bono cupón cero, el cual puede ser interpretado como el valor esperado bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo del descuento generado por el flujo futuro del valor final del bono (1 u.m.) usando la tasa libre de riesgo de dicho mercado, véase Van Elen (2010). Esto es,

$$P(t, T) = E^Q \left[ e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid r(t) \right],$$

donde  $E^Q$ , representa la esperanza en el instante  $t$  condicionada a la información disponible de todos los inversores en ese mismo instante de tiempo bajo  $Q$ , que es la medida neutral al riesgo, es decir, libre de riesgo.

Una vez se especifiquen el precio del riesgo de mercado  $\lambda(t, r)$  y el proceso de difusión que explica la dinámica del tipo de interés instantáneo  $r$  (lo que implica especificar las funciones  $\gamma(t, r)$  y  $\rho(t, r)$  de la expresión (3.5)); la ecuación en derivadas parciales (3.13) puede ser

resuelta para encontrar una solución analítica del precio de los bonos cupón cero, sujeto a la condición final (3.4). Finalmente, conocido el precio de los bonos cupón cero, podemos sustituirlo en la expresión (2.4) y así obtenemos la estructura temporal de tipos de interés o curva de rendimientos  $R(t, r; T)$ .

### 3.5. Modelos estocásticos

En general, los modelos estocásticos usados para la estimación de la ETTI son aquellos modelos que cumplen los tres principios fundamentales descritos en la Sección 3.4. Como se mencionó anteriormente, para encontrar la curva de rendimientos es necesario estimar en primer lugar la función que describe el precio del bono, es decir, es necesario encontrar una solución a la ecuación de la estructura temporal (3.13) una vez que la dinámica del tipo de interés instantáneo  $r$  y el precio del riesgo de mercado han sido especificadas, véase la expresión (3.5).

Según Wilmott (2006) es posible encontrar una solución al problema de la ecuación de valoración del bono cupón cero (3.13)-(3.4) en algunos casos en que las funciones  $\gamma(t, r)$  y  $\rho(t, r)$  verifican

$$\gamma(t, r) - \lambda(t, r) \rho(t, r) = \beta_0(t) - \alpha_0(t)r, \quad (3.14)$$

$$\rho(t, r)^2 = \beta_1(t) + \alpha_1(t)r, \quad (3.15)$$

con  $\beta_0(t)$ ,  $\alpha_0(t)$ ,  $\beta_1(t)$  y  $\alpha_1(t)$  funciones que dependen del tiempo, aunque también pueden ser constantes. Si consideramos las funciones  $\gamma(t, r)$ ,  $\rho(t, r)$  y  $\lambda(t, r)$  que cumplen (3.14) y (3.15), entonces podemos encontrar una solución a la ecuación diferencial de valoración del bono cupón cero (3.13) de la forma,

$$P(t, r; T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r}, \quad (3.16)$$

lo que se suele conocer en la literatura como modelos afines. Así pues, la solución a la ecuación de la estructura temporal, dado que la variación del tipo de interés instantáneo  $r$  fue especificada usando funciones afines, puede encontrarse sustituyendo la solución de la forma (3.16) en la ecuación de derivadas parciales (3.13). Si calculamos las derivadas parciales en (3.16) y las sustituimos junto con (3.14) y (3.15) en (3.13), obtenemos

$$\frac{dA}{dt} - \beta_0 B + \frac{\beta_1}{2} B^2 - r \left[ \frac{dB}{dt} - \alpha_0 B - \frac{\alpha_1}{2} B^2 + 1 \right] = 0.$$

Para que se cumpla la anterior igualdad, que es válida para cualquier valor de  $r$ , debe cumplirse

$$\frac{dB}{dt} - \alpha_0 B - \frac{\alpha_1}{2} B^2 + 1 = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{dA}{dt} - \beta_0 B + \frac{\beta_1}{2} B^2 = 0. \quad (3.18)$$

Además, es necesario que este sistema de ecuaciones diferenciales verifique la condición final (3.4), es decir,

$$P(T, r; T) = e^{A(T,T) - B(T,T)} = 1.$$

Por tanto, añadimos al sistema de ecuaciones diferenciales (3.17) y (3.18) las condiciones finales

$$A(T, T) = 0, \quad B(T, T) = 0. \quad (3.19)$$

Finalmente, una vez especificadas las funciones (3.14) y (3.15), resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales (3.17) - (3.18) junto con las condiciones finales (3.19) y obtenemos el precio de los bonos cupón cero.

En las siguientes secciones, presentamos los modelos propuestos por Vasicek (1977) y Cox *et al.* (1985) para modelizar el comportamiento del tipo de interés instantáneo. En dichos modelos, el tipo de interés instantáneo,  $r$ , se comporta de tal forma que  $\gamma(t, r)$  y  $\rho(t, r)$  son funciones afines, y por tanto, permiten encontrar una solución a la ecuación diferencial de valoración del bono cupón cero como la de la expresión (3.16). Dichas funciones se pueden expresar además en términos de  $\beta_0(t)$ ,  $\alpha_0(t)$ ,  $\beta_1(t)$  y  $\alpha_1(t)$ . Así pues, el conocer  $\alpha_0(t)$  y  $\alpha_1(t)$  hace posible resolver la ecuación diferencial (3.17) y hallar la solución analítica para  $B(t, T)$ . Posteriormente como  $\beta_0(t)$  y  $\beta_1(t)$  son conocidas, es posible resolver la ecuación diferencial (3.18) y encontrar  $A(t, T)$ .

### 3.5.1. Modelo de Vasicek

Con el fin de resolver la ecuación de la estructura temporal, Vasicek (1977) asume que el precio del riesgo de mercado es constante ( $\lambda(t, r) = \lambda$ ) y que la dinámica del tipo de interés sigue un proceso estocástico que se puede describir de la forma

$$dr = k(\mu - r)dt + \rho dW, \quad k, \mu, \rho > 0 \quad (3.20)$$

La expresión anterior es un proceso descrito por Uhlenbeck y Ornstein<sup>2</sup> (1930). Este proceso se caracteriza porque es un proceso de reversión a la media y volatilidad constante. Por tal motivo, es el análogo en tiempo continuo a un proceso autoregresivo de primer orden en tiempo discreto. El parámetro  $k$  es la velocidad con que el tipo de interés instantáneo tiende hacia un valor central  $\mu$  a largo plazo. Este valor es la media no condicionada del proceso, véase Chapman *et al.* (1998). Por tanto el parámetro  $k$  es conocido como la velocidad de reversión. Por otro lado, el primer término del proceso  $k(\mu - r)$  se conoce como la trayectoria, toda vez que es una fuerza que mueve al proceso a una velocidad  $k$  hacia la media no condicionada  $\mu$ . Mientras que, en el segundo término existe una varianza  $\rho^2$  con un valor diferente de cero.

---

<sup>2</sup> Este proceso fue usado por Uhlenbeck y Ornstein (1930) para describir el proceso físico asociado al movimiento aleatorio que presentaban las partículas del polen en un medio fluido. Debido a la naturaleza aleatoria de este proceso, Merton (1971) lo usó por primera vez para modelizar el comportamiento del tipo de interés instantáneo.

A diferencia del caso determinista estudiado en la Sección 3.1, la existencia de un componente estocástico da lugar a que a medida que transcurre el tiempo el tipo de interés se acerque a  $\mu$  de forma aleatoria. Por último,  $W$  es un proceso de Wiener.

Nótese que el proceso está compuesto de dos partes. La primera de ellas está regida por certidumbre, toda vez que los parámetros que indican la fuerza con la que el proceso se aproxima a la media ( $k$  y  $\mu$ ), son constantes. Mientras la segunda parte, se rige por incertidumbre porque uno de sus componentes es un proceso de Wiener, que actúa como un generador aleatorio haciendo que el proceso tienda a un valor medio de manera aleatoria.

Chapman *et al.* (1998), muestran que los momentos no condicionales de dicho proceso son

$$E[r(t)] = \mu,$$

$$Var[r(t)] = \frac{\rho^2}{2k}.$$

Por otro lado, la media y varianza del tipo de interés instantáneo en el instante final  $T$  condicionada al nivel actual de tipo de interés,  $r(t)$ , vienen dadas por las dos siguientes expresiones, respectivamente,

$$E[r(T)|r(t)] = \mu + [r(t) - \mu]e^{-k(T-t)},$$

$$Var[r(T)|r(t)] = \frac{\rho^2}{2k}(1 - e^{-2k(T-t)}),$$

véase Vasicek (1977).

Una vez especificados el precio del riesgo de mercado como una constante,  $\lambda$ , y el tipo de interés instantáneo como un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, se puede resolver la ecuación de la estructura temporal. Para ello sabemos que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck está expresado en términos de funciones afines,

$$\beta_0 = k\mu - \lambda\rho,$$

$$\alpha_0 = k,$$

$$\beta_1 = \rho,$$

$$\alpha_1 = 0.$$

Sustituyendo las anteriores expresiones en las ecuaciones diferenciales (3.17) y (3.18), obtenemos

$$\frac{dB}{dt} - kB + 1 = 0,$$

$$\frac{dA}{dt} - (k\mu - \lambda\rho)B + \frac{\rho^2}{2}B^2 = 0,$$

sujetas a las condiciones finales (3.19). Obtenemos así la solución:

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}, \quad (3.21)$$

$$A(t, T) = R_\infty \left( \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} - (T-t) \right) - \frac{\rho^2}{4k} \left( \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \right)^2, \quad (3.22)$$

con

$$R_\infty = \mu - \frac{\rho\lambda}{k} - \frac{\rho^2}{2k^2}.$$

Sustituyendo (3.21) y (3.22) en (3.16), el precio de un bono cupón cero es el siguiente:

$$P(t, r; T) = \exp \left[ \frac{1}{k} (1 - e^{-k(T-t)}) (R_\infty - r) - R_\infty (T-t) - \frac{\rho^2}{4k^3} (1 - e^{-k(T-t)})^2 \right]. \quad (3.23)$$

Finalmente, sustituimos el precio del bono cupón cero de la expresión (3.23) en (2.4) y obtenemos que los rendimientos al vencimiento o la estructura temporal de los tipos de interés en el modelo de Vasicek (1977) toma la forma

$$R(t, r; T) = R_\infty + \frac{(r - R_\infty)(1 - e^{-k(T-t)})}{k(T-t)} + \frac{\rho^2}{4k^3(T-t)} (1 - e^{-k(T-t)})^2. \quad (3.24)$$

Notamos que cuando el instante de vencimiento tiende a infinito ( $T \rightarrow \infty$ ), los dos últimos términos de la ecuación (3.24) se aproximan a cero. Por tanto,  $R_\infty$  es el valor al cual tiende el rendimiento al vencimiento cuando el vencimiento del bono es tan grande que su valor tiende a infinito.

Este modelo se ha utilizado ampliamente en la literatura por su sencillez. Sin embargo, presenta un inconveniente, que consiste en que los procesos Ornstein-Uhlenbeck pueden tomar valores negativos, aunque la probabilidad de que esto ocurra asignando valores adecuados a los parámetros es muy pequeña.

### 3.5.2. Modelo de CIR

Como mencionamos en la sección anterior, el tipo de interés instantáneo en el modelo de Vasicek puede tomar valores negativos. Si bien es cierto que en la economía este hecho no es imposible, este tipo de acontecimientos son considerados inusuales. Por tanto, en la literatura han ido surgiendo diferentes modelos que son capaces de generar tipos de interés no negativos, véase Paseka *et al.* (2012).

En este sentido, Cox *et al.* (1985) propusieron el siguiente proceso de difusión alternativo

$$dr = k(\mu - r)dt + \rho\sqrt{r} dW, \quad k, \mu, \rho > 0. \quad (3.25)$$

Siempre y cuando el tipo de interés instantáneo en el momento inicial sea mayor que cero, este proceso tenderá a un valor central positivo. Kwok (2008) afirma que este proceso no será negativo si el proceso empieza con un valor arbitrario de  $r_0$  positivo, puesto que a medida que va pasando el tiempo si el valor del tipo de interés instantáneo disminuye acercándose a cero, la volatilidad también va disminuyendo.

Por otro lado, se ha demostrado que el tipo de interés instantáneo,  $r$ , puede llegar a ser cero solo cuando el coeficiente de la varianza,  $\rho^2$ , del proceso descrito por la ecuación (3.25) es mayor que  $2k\mu$ . Mientras que cuando ese coeficiente es menor o igual que  $2k\mu$ , se garantiza que el tipo de interés instantáneo tomará siempre valores positivos, véase Cairns (2004). Este modelo ha tenido gran acogida y se ha usado en una gran cantidad de trabajos para modelizar la ETTI debido a que garantiza que los tipos de interés instantáneos sean siempre positivos, véase González y Presa (2005).

Chapman *et al.* (1998) muestran los momentos no condicionales de dicho proceso.

$$E[r] = \mu,$$

$$Var[r] = \frac{\rho^2 \mu}{2k}.$$

Por su parte, Cox *et al.* (1985) muestran que los momentos finales (cuando  $t = T$ ) condicionados al nivel actual de tipo de interés instantáneo  $r(t)$  vienen dados por

$$E[r(T)|r(t)] = r(t)e^{-k(T-t)} + \mu[1 - e^{-k(T-t)}],$$

$$Var[r(T)|r(t)] = r(t) \frac{\rho^2}{k} [e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)}] + \frac{\mu\rho^2}{2k} (1 - e^{-k(T-t)})^2.$$

De las expresiones mostradas anteriormente podemos visualizar dos propiedades de este proceso, véase Kwok (2008):

- Cuando  $k$  tiende a infinito, el primer momento condicional tiende a  $\mu$  y el segundo tiende a cero.
- Cuando  $k$  se aproxima positivamente a cero, el primer momento condicional tiende a  $r$ , mientras que el segundo tiende a  $\rho^2(T-t)r$ .

Una vez especificada la dinámica del tipo de interés instantáneo en el modelo de CIR, véase la expresión (3.25), y dado un precio del riesgo de mercado

$$\lambda(t, r) = \lambda\sqrt{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.26)$$

es posible encontrar una solución a la ecuación de la estructura temporal de los tipos de interés. El modelo de CIR está expresado en términos de funciones afines, por tanto es posible obtener una solución del tipo (3.16).

La solución completa se obtiene reemplazando las funciones del proceso (3.25) y el precio del riesgo de mercado (3.26) en (3.17) y (3.18)

$$\frac{dB}{dt} - (k + \lambda\rho)B - \frac{\rho^2}{2}B^2 + 1 = 0,$$

$$\frac{dA}{dt} - k\mu B = 0.$$

Dichas ecuaciones pueden ser resueltas sujetas a las condiciones finales (3.19) obteniendo

$$A(t, T) = \frac{2k\mu}{\rho^2} \ln \left( \frac{2\theta e^{(\theta+\varphi)(T-t)/2}}{(\theta + \varphi)(e^{\theta(T-t)} - 1) + 2\theta} \right),$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\theta(T-t)} - 1)}{(\theta + \varphi)(e^{\theta(T-t)} - 1) + 2\theta},$$

donde  $\varphi = k + \lambda\rho$  y  $\theta = \sqrt{\varphi^2 + 2\rho^2}$ .

Finalmente, al igual que con el modelo de Vasicek, sustituimos el precio del bono en la expresión (2.4) y obtenemos que la ETTI toma la forma

$$R(t, r; T) = - \frac{A(t, T) - B(t, T) r}{T - t}. \quad (3.27)$$

## 4. APLICACIÓN EMPÍRICA

Después de haber introducido los fundamentos teóricos de la modelización de la estructura temporal de los tipos de interés, procedemos a aplicar dichos principios a la valoración de la ETTI en el mercado de Estados Unidos usando los modelos determinista, de Vasicek y de CIR.

En este capítulo comentamos la base de datos, explicamos las características de los datos usados y hacemos un análisis de los mismos. De igual forma, describimos el proceso de ajustar las funciones, que teóricamente describen el comportamiento de la ETTI, a los datos observados en el mercado de Estados Unidos para cada modelo objeto de estudio del presente trabajo (determinista, Vasicek y CIR). Esto incluye una breve descripción de los programas y funciones de Matlab como herramienta informática fundamental en este trabajo.

### 4.1. La base de datos

La base de datos que utilizamos es la “H.15” proporcionada por el Sistema de la Reserva Federal de los Estados Unidos, el cual fue creado en 1913 por el Congreso de dicha nación con el fin de garantizar la existencia de un sistema monetario y financiero estable y seguro. Como banco central de dicho país, sus principales funciones son<sup>3</sup>:

- Orientar la política monetaria del país con el fin de mantener a largo plazo condiciones favorables de empleo y niveles adecuados de precios así como de tipos de interés.
- Prevenir acciones que puedan generar riesgo sistémico para la economía, procurando un mercado financiero estable.
- Ser el regulador de las actividades bancarias y en general del sector financiero.
- Brindar servicios financieros al gobierno y a las instituciones internacionales.

Debido a sus funciones, el Sistema de la Reserva Federal de los Estados Unidos debe contar con información amplia y suficiente que le permita tomar decisiones económicas y en política monetaria que garanticen la estabilidad de los mercados en tal país. Es por esto que la Reserva Federal cuenta con una base de datos que contiene información para cada uno de los siguientes ítems:

- Activos y pasivos financieros.
- Estructura bancaria.
- Financiación empresarial.
- Tasas de cambio e información de mercados internacionales.
- Cuentas nacionales.
- Finanzas de los hogares.
- Información industrial.
- Tipos de interés.
- Reservas monetarias y balances de las reservas.

---

<sup>3</sup> Para información más detallada sobre la Reserva Federal consultar: <http://www.federalreserve.gov/> [Último acceso: 15/04/2015]

En este trabajo usamos los datos disponibles en la sección de tipos de interés de la base de datos de la Reserva Federal<sup>4</sup>. Dicha sección contiene información de rendimientos observados históricamente de títulos financieros tales como:

- Depósitos eurodólar
- *T-Bills* y títulos del tesoro a vencimientos constantes (*Treasury Constant Maturities*).
- Swaps de tipos de interés.
- Bonos corporativos.
- Hipotecas convencionales.

## 4.2. Los datos

A continuación describimos con más detalle los datos que usamos para modelizar los tres modelos descritos en el Capítulo 3 para, posteriormente, comparar cómo se ajusta cada uno de ellos al comportamiento histórico de los rendimientos al vencimiento.

### 4.2.1. Aproximación al tipo de interés instantáneo

Cuando pasamos del marco teórico al empírico, en modelización de tipos de interés, es necesario saber que el tipo de interés instantáneo libre de riesgo,  $r$ , no es una variable directamente observable. Esto significa que es necesario hacer uso de una variable proxy para obtener valores observados que podamos aproximar al tipo de interés instantáneo.

En primer lugar, dicha variable proxy debe ser una serie temporal de tipos de interés que podamos considerar como un tipo de interés libre de riesgo. En la práctica, suele considerarse al gobierno como el emisor de deuda con menor riesgo en una economía. Por tanto, éste puede considerarse el emisor libre de riesgo y los rendimientos asociados a la deuda pública (los bonos emitidos por el tesoro de la nación) como el tipo de interés libre de riesgo. Por tal motivo, utilizar observaciones de los *T-Bills*<sup>5</sup> del mercado secundario de los Estados Unidos puede considerarse una aproximación adecuada al tipo de interés libre de riesgo, véase Ruiz (2005).

Además, debemos elegir dicha variable proxy de una serie temporal que sea capaz de aproximar la forma funcional continua de  $r$  mediante observaciones discretas del tipo de interés, véase Mancini y Renò (2011). En la literatura, se han utilizado habitualmente tres aproximaciones discretas al tipo de interés instantáneo  $r$ . La primera, es el rendimiento observado en *T-Bills* con vencimiento a 3 meses, utilizado por autores como Andersen y Lund (1997) así como por Stanton (1997). La segunda, es el rendimiento observado en *T-Bills* con vencimiento a 1 mes, utilizado en las investigaciones de Chan *et al.* (1992) y Vetzal (1997). Por último, los rendimientos observados del tipo Eurodólar<sup>6</sup> con vencimiento a 7 días, este es el caso de los trabajos de Bandi (2002) así como de Hong y Li (2005).

---

<sup>4</sup> Datos de libre disposición en <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm>. [Último acceso: 15/04/2015]

<sup>5</sup> Los *T-Bills* o *Treasury Bills* son bonos cupón cero que emite la Reserva Federal estadounidense a plazos menores de 1 año.

<sup>6</sup> El tipo Eurodólar o *Eurodollar rate* indica el rendimiento de los depósitos en dólares fuera de Estados Unidos.

En este trabajo, utilizamos los rendimientos observados en el mercado secundario<sup>7</sup> de *T-Bills* con vencimiento a 3 meses, con observaciones que corresponden a datos tomados el primer día de cada mes. El motivo de dicha elección se sustenta en los estudios realizados por dos grupos de investigaciones. El primero de ellos defiende que es más adecuado utilizar rendimientos observados de los *T-Bills* con vencimiento a 3 meses en vez de los rendimientos observados en el tipo Eurodólar con vencimiento a 7 días; estos trabajos realizados por Andersen *et al.* (2004) así como por Mancini y Renò (2011) muestran que los rendimientos con vencimiento a 3 meses pueden presentar saltos o cambios de nivel con una intensidad dependiente del nivel donde se encuentra el tipo de interés, mientras que las observaciones del tipo Eurodólar a 7 días presentan variaciones discontinuas independientes del nivel del tipo de interés que pueden contener ruidos provenientes de características propias del mercado tales como la liquidez. El segundo grupo de trabajos considera más adecuado el uso de rendimientos observados en *T-Bills* con vencimiento a 3 meses que con vencimiento a 1 mes, ya que existen características propias del mercado que pueden distorsionar y afectar a los datos observados en series de rendimientos con vencimientos muy pequeños que van desde vencimientos *overnight* en negociaciones de repos<sup>8</sup> hasta vencimientos mensuales observados en *T-Bills*. Entre este último grupo de trabajos destaca Chapman *et al.* (1998).

Por tanto, como el tipo de interés instantáneo no es una variable observable debemos aproximarla mediante una variable proxy que presente el menor ruido posible proveniente de características institucionales del mercado (como lo son la liquidez de los títulos, los niveles de negociación, la concentración de los títulos disponibles en el mercado, etc.) que puedan afectar o distorsionar las observaciones de posibles variables proxy con vencimientos menores a 3 meses.

#### 4.2.2. El periodo de tiempo a analizar

Después de escoger una variable proxy del tipo de interés instantáneo, es necesario seleccionar un periodo de tiempo para el cual se hará el análisis correspondiente. La selección de dicho periodo se basó en tres criterios. El primero de ellos es la cantidad de datos que ofrece el intervalo temporal a analizar, el segundo criterio es que el periodo incluya datos recientes y el tercero es la disponibilidad de información. De este modo, buscamos analizar un periodo de tiempo suficientemente grande para que la muestra de datos observados sea representativa y que se pueda confiar en sus resultados. Después, buscamos que el periodo de tiempo escogido incluya datos tan recientes como sea posible. Finalmente, nos fijamos en que en la base de datos de la Reserva Federal de Estados Unidos haya información disponible para el periodo de estudio.

---

<sup>7</sup> El mercado de capitales se compone del mercado primario y del secundario. En el mercado primario, un emisor vende por primera vez un título mediante una oferta pública o privada. Por otra parte, en el mercado secundario se realizan operaciones de compraventa de títulos que ya fueron ofertados en el mercado primario.

<sup>8</sup> Un repo es un préstamo a corto plazo, generalmente a un día, en el cual el prestamista ofrece dinero prestado a cambio del pago de un rendimiento. Mientras que el prestatario entrega al prestamista un título con valor comercial igual a la deuda adquirida como garantía de pago de la misma. Dicho título se devuelve con el pago de la deuda.

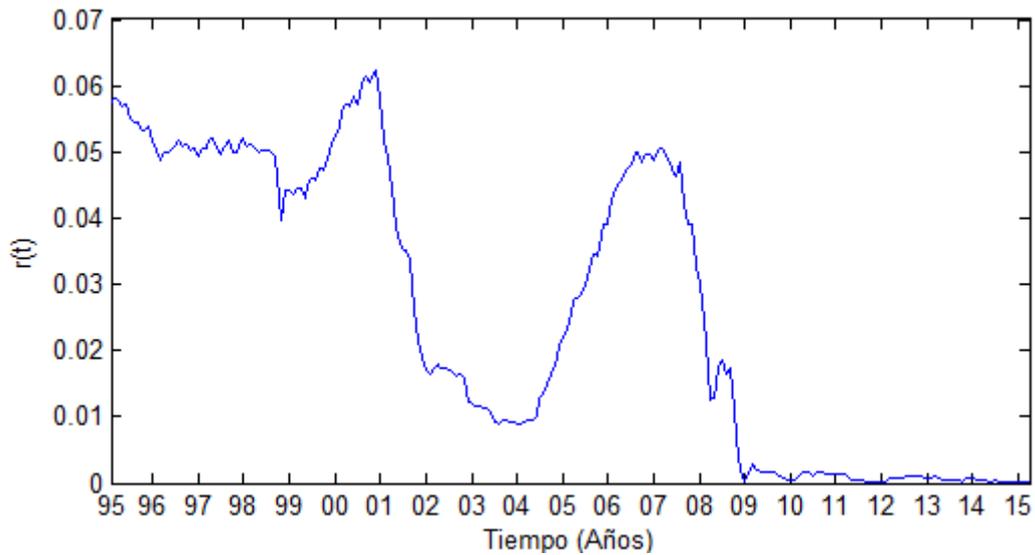
En base a los criterios mencionados seleccionamos un periodo con una duración aproximada de 20 años, comenzando en enero de 1995 y terminando en marzo del año 2015. Por último, la periodicidad de los datos escogida es mensual, de tal modo que los datos que obtuvimos de la base de datos de la Reserva Federal son 243 observaciones del rendimiento de los *T-Bills* con vencimiento a 3 meses registradas el primer día de cada mes.

### 4.2.3. Análisis de los datos

Antes de realizar la estimación de los modelos, es una práctica generalizada analizar las propiedades de la serie temporal de la variable usada como proxy mediante al análisis gráfico, la estadística descriptiva y algunos contrastes de hipótesis, véase por ejemplo, Vetzal (1997), Gómez-Valle (2003) y Mancini y Renò (2011). Por tanto, en primer lugar ilustramos y describimos las gráficas de la serie de los tipos de interés y la de sus primeras diferencias. Posteriormente, usamos la estadística descriptiva y en último lugar estudiamos la dinámica bajo la que se rigen dichas series. Dicha dinámica la analizamos mediante el uso del test de Ljung-Box (1978) y de Dickey Fuller Aumentado, éste último es descrito en detalle en Said y Dickey (1984). Dichos contrastes fueron realizados con el paquete estadístico E-Views, que ofrece la opción de realizar los test mencionados de forma sencilla.

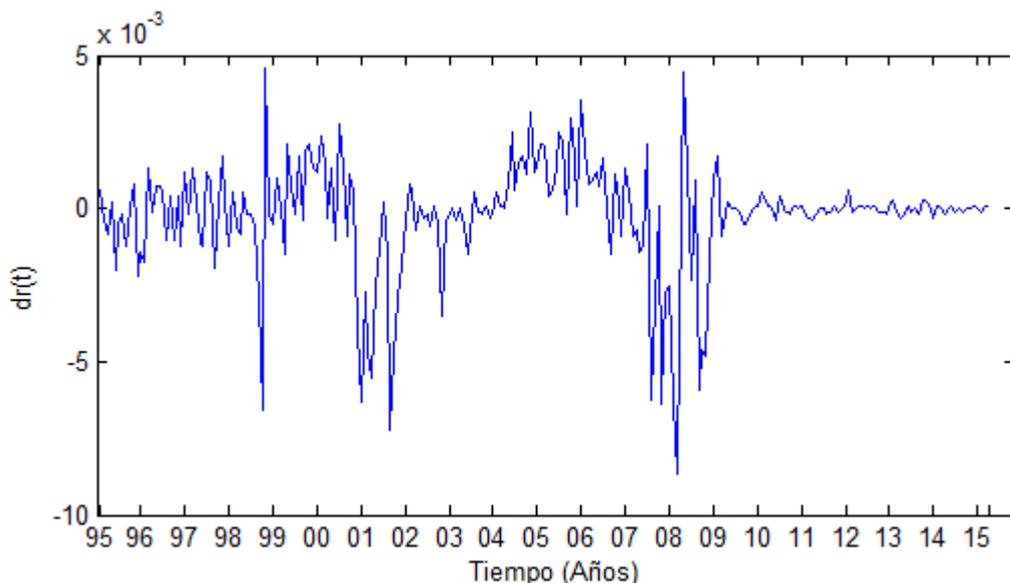
En la Figura 5 mostramos el rendimiento de los *T-Bills* con vencimiento a 3 meses, que es la variable proxy que hemos seleccionado para el tipo de interés instantáneo. A comienzos de 1995, los tipos de interés tomaban valores ligeramente por debajo del 6%, dichos tipos cayeron a niveles cercanos al 5% en 1996 y se mantuvieron oscilando aleatoriamente en torno a dicho nivel hasta 1999, momento en el cual caen precipitadamente hasta un nivel cercano al 4%. Entre el año 1999 y comienzos del año 2001 se presenta una tendencia creciente de los tipos de interés pasando de niveles del 4% hasta niveles cercanos al 6%. Dicha tendencia se revierte a lo largo del año 2001, esto es claro, toda vez que a comienzos de 2001 los tipos de interés tenían niveles superiores al 6% y a finales de dicho año los tipos tenían niveles cercanos al 1.5%. Cabe aclarar que como menciona Chavez (2010) esta fuerte caída de los tipos de interés coincide con la recesión de Estados Unidos del año 2001, en la cual la Reserva Federal decidió bajar el tipo de interés de los Fondos Federales conocido como Federal Funds Rate de niveles cercanos al 6.5% a niveles sobre el 1%. Dicha bajada se trasladó naturalmente a los demás títulos de deuda pública. Del mismo modo, esos bajos niveles de tipos de interés se mantuvieron hasta finales del 2004, momento en el cual se genera una tendencia creciente pasando de niveles cercanos al 1% a niveles sobre el 5% en el 2006 y comienzos del 2007. En este último año, los niveles del tipo de interés empezaron a tener una marcada tendencia decreciente que hizo que los tipos cayeran en el año 2009 hasta niveles cercanos al 0.1%. Desde entonces, los tipos de interés han oscilado en niveles cercanos a cero, entre el 0.3% y el 0.01%, dichos niveles han sido sin duda alguna los más bajos del periodo temporal objeto de estudio. La caída brusca de los tipos de interés experimentada en el 2007 concuerda con la crisis inmobiliaria y financiera de dicho año.

Por tanto, para el periodo de tiempo estudiado los tipos de interés más altos se presentaron en el año 2001 (por encima del 6%), mientras que los tipos de interés más bajos están presentes desde el año 2009 hasta el año 2015 (llegando en ocasiones a tipos de interés del 0.01%).



**Figura 5.** Tipo de interés (Enero de 1995 – Marzo de 2015). Fuente: *Elaboración propia con datos de los T-Bills con vencimiento a 3 meses procedentes de la Reserva Federal de Estados Unidos.*

En la Figura 6, presentamos la serie de las primeras diferencias del rendimiento de los *T-Bills* con vencimiento a 3 meses. El comportamiento de esta serie puede ser visto como una aproximación discreta a las expresiones (3.1), (3.20) y (3.25) dependiendo de si se escoge el modelo determinista, el de Vasicek o el de CIR, respectivamente, para modelizar la ETTI. Vemos que el comportamiento de dicha serie temporal es bastante errático y parece oscilar en torno al valor central correspondiente a cero. Por otra parte, hay saltos importantes presentes en torno al año 1999, el periodo comprendido entre el 2001 y el 2003 así como en el periodo comprendido entre el 2007 y el 2009. Los dos últimos periodos corresponden también con la recesión del año 2001 y la crisis inmobiliaria y financiera del 2007 en Estados Unidos.



**Figura 6.** Primeras diferencias del tipo de interés (Enero de 1995 – Marzo de 2015). Fuente: *Elaboración propia con datos de los T-Bills con vencimiento a 3 meses procedentes de la Reserva Federal de Estados Unidos.*

En la Tabla 1 mostramos los estadísticos de carácter descriptivo más utilizados en la literatura para los datos utilizados. El número de observaciones que poseemos es de 243, las cuales corresponden a rendimientos que oscilan entre valores del 0.1% hasta el 6.218%. Dichos tipos de interés tienen una media de 2.596% y su desviación estándar es del 0.022. Del mismo modo, en la Tabla 1 mostramos también información estadística para las primeras diferencias de los tipos de interés.

Variable	$r_t$	$\Delta r = (r_t - r_{t-1})$
N	243	242
Media	0.025960	-0.000236
Des. Est	0.022094	0.001837
Máximo	0.062181	0.004548
Mínimo	0.000100	-0.008636

**Tabla 1.** Estadísticos descriptivos del tipo de interés y sus primeras diferencias (Enero de 1995 – Marzo de 2015). Fuente: *Elaboración propia con datos de los T-Bills con vencimiento a 3 meses procedentes de la Reserva Federal de Estados Unidos.*

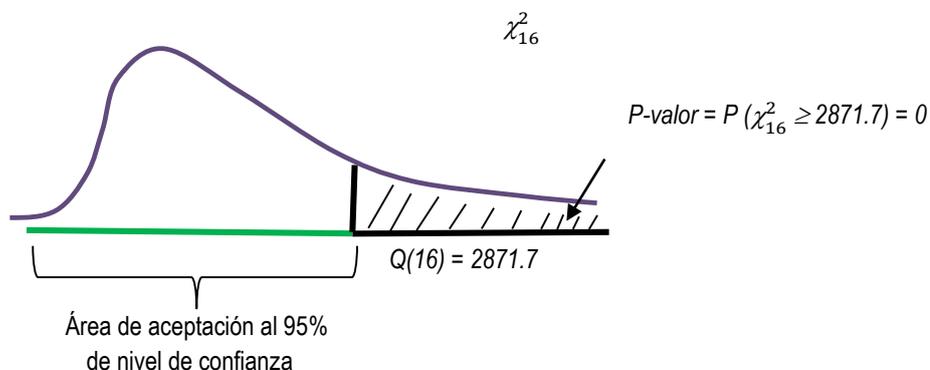
La Tabla 2 nos permite analizar el comportamiento dinámico de la variable usada para aproximar el tipo de interés instantáneo así como sus primeras diferencias. En esta tabla mostramos los coeficientes de correlación lineal del tipo de interés hasta por  $h$  periodos de tiempo o retardos, con  $h=16$ , mostramos la misma información para la serie de primeras diferencias. Observamos entonces, que los coeficientes de autocorrelación del tipo de interés decrecen lentamente y de manera aproximadamente lineal a medida que va aumentando el número del retardo, pasando así de un coeficiente de autocorrelación muy alto y cercano a uno en el primer retardo, 0.989, a un coeficiente de 0.646 en el retardo número 16. Por otro lado, los coeficientes de correlación de la serie de primeras diferencias del tipo de interés son menores que los de los propios tipos. Además, tienen variaciones erráticas que parecen tener una tendencia decreciente a medida que aumenta el retardo, pasando así de un coeficiente de autocorrelación del 0.429 en el primer retardo a un coeficiente negativo y muy cercano a cero, -0.048, en el retardo 16. Algunos coeficientes adquieren signo negativo sin seguir ningún patrón determinado.

Un primer indicio de que la serie temporal del tipo de interés no corresponde a un ruido blanco es que las primeras autocorrelaciones muestrales de la serie se aproximan a 1. Para saber si esta serie corresponde o no con un ruido blanco, usamos el test de Ljung-Box, que permite contrastar si las autocorrelaciones en observaciones que se encuentren separadas hasta por  $h$  periodos de tiempo son todas iguales a cero. Este es un test global que usamos para contrastar la hipótesis nula de que las  $h$  primeras autocorrelaciones de la serie de rendimientos en *T-Bills* con vencimiento a 3 meses sean iguales a cero ( $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_h = 0$ ) frente a la hipótesis alternativa de que alguna de estas autocorrelaciones sea diferente de cero. Diebold (1999) indica que la elección del  $h$ -ésimo número de primeros retardos sobre los cuales debe realizarse el contraste se debe hacer teniendo en cuenta que un número  $h$  muy elevado disminuye la confiabilidad del resultado y uno muy pequeño resulta inadecuado. Para el caso del presente trabajo se escogió  $h=16$  (con lo cual la hipótesis nula es  $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_{16} = 0$ ).

Variable	$r_t$	$\Delta r = (r_t - r_{t-1})$
$\rho_1$	0.989	0.429
$\rho_2$	0.976	0.240
$\rho_3$	0.960	0.323
$\rho_4$	0.943	0.194
$\rho_5$	0.924	0.109
$\rho_6$	0.904	0.276
$\rho_7$	0.883	0.255
$\rho_8$	0.860	0.233
$\rho_9$	0.836	0.233
$\rho_{10}$	0.810	0.095
$\rho_{11}$	0.783	0.072
$\rho_{12}$	0.755	0.100
$\rho_{13}$	0.728	0.007
$\rho_{14}$	0.701	-0.051
$\rho_{15}$	0.673	-0.008
$\rho_{16}$	0.646	-0.048
$Q(16)$	2871.7	166.83
$P$ - Valor	0.000	0.000

**Tabla 2.** Comportamiento dinámico del tipo de interés y sus primeras diferencias (Enero de 1995 – Marzo de 2015). Fuente: *Elaboración propia con datos de los T-Bills con vencimiento a 3 meses procedentes de la Reserva Federal de Estados Unidos.*

Cabe resaltar que la distribución asintótica del estadístico de Ljung-Box,  $Q(h)$ , es una distribución  $\chi^2$  con  $h$  grados de libertad. Por tanto, comparamos el estadístico de Ljung-Box en el retardo número 16 ( $Q(16)=2871.7$ ) con la distribución  $\chi^2$  con 16 grados de libertad y vemos que ese valor observado deja a la derecha de dicha distribución una probabilidad,  $p$ -valor, menor al 5%, véase la Figura 7.



**Figura 7.** Representación gráfica del contraste de Ljung-Box para la serie del tipo de interés (Enero de 1995 – Marzo de 2015). Fuente: *Elaboración propia.*

El  $p$ -valor indica la probabilidad de cometer error si se rechaza la hipótesis nula. En este caso, dicha probabilidad es menor del 5% y por esta razón rechazamos la hipótesis nula. Por tanto, la función de autocorrelación lineal no es cero en todos los casos. Esto significa que la serie temporal del tipo de interés no se corresponde con un ruido blanco.

De forma análoga, aplicamos el mismo contraste a la serie temporal de las primeras diferencias de los tipos de interés y obtenemos un estadístico de Ljung-Box,  $Q(16)$ , igual a 166.83 y un  $p$ -valor menor de 5%, véase Tabla 2. Con estos resultados se rechaza la hipótesis nula según la cual  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_{16} = 0$  y por tanto, la serie de tiempo de las primeras diferencias de los tipos de interés tampoco es un ruido blanco.

En la Tabla 3 mostramos los resultados obtenidos al realizar el Test de Dickey Fuller Aumentado o *Augmented Dickey Fuller* para el tipo de interés. Este es un test de raíces unitarias usado para verificar la estacionariedad de una serie. Las hipótesis a contrastar según este test son la hipótesis nula de la existencia de raíces unitarias, en cuyo caso la serie no es estacionaria, versus la hipótesis alterna de no presencia de raíces unitarias en cuyo caso la serie es estacionaria, para más detalles sobre este test véase Dickey y Fuller (1979) así como Said y Dickey (1984). Observamos que la probabilidad de cometer error a un 95% de nivel de confianza ( $p$ -valor) si se rechaza la hipótesis nula de no estacionariedad, es muy alta y equivalente al 51.4%. Por tanto, no rechazamos la hipótesis nula. Así mismo, los valores críticos al 90% y 99% de nivel de confianza no permiten rechazar la hipótesis nula. Según dicho test la serie no es estacionaria.

ADF $r$	
Estadístico-t	-1.544
P-Valor	0.510
Valores críticos	
1%	-3.458
5%	-2.873
10%	-2.573

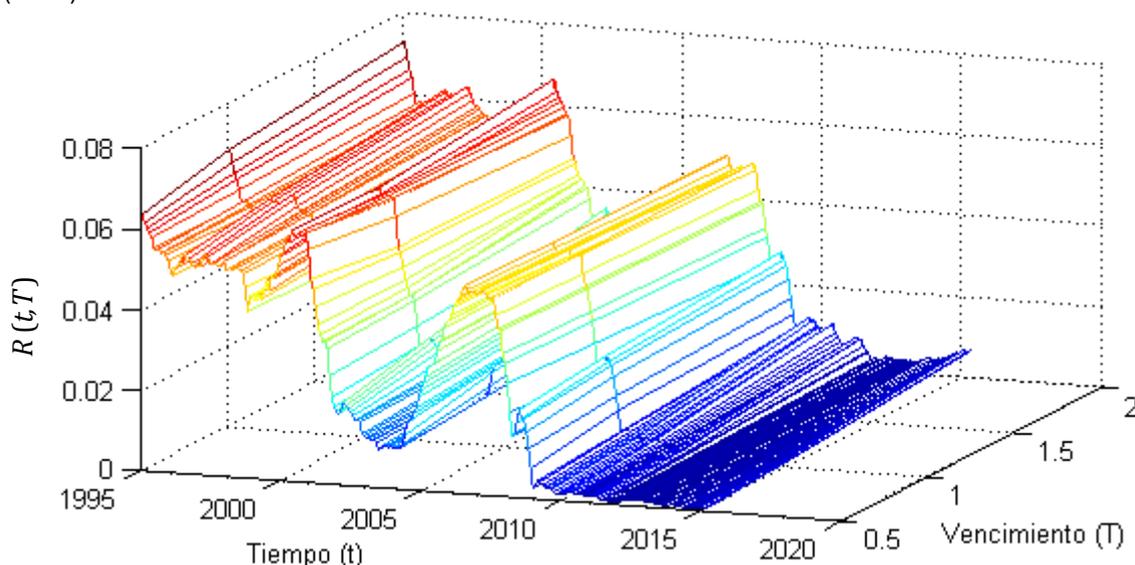
**Tabla 3.** Test de Dickey Fuller Aumentado (ADF) para los tipos de interés (Enero de 1995 – Marzo de 2015). Fuente: *Elaboración propia*.

En la Tabla 4 mostramos los resultados obtenidos con el Test de Dickey Fuller Aumentado para las primeras diferencias de los tipos de interés,  $\Delta r$ . Observamos que la probabilidad de cometer error a un 95% de nivel de confianza ( $p$ -valor) si se rechaza la hipótesis nula de no estacionariedad, es muy baja y menor del 5%. Por tanto, rechazamos la hipótesis nula. Así mismo, los valores críticos al 90% y 99% de nivel de confianza permiten rechazar la hipótesis nula. Los resultados de dicho test indican que la serie es estacionaria.

ADF $\Delta r$	
Estadístico-t	-5.336
P-Valor	7.335E-06
Valores críticos	
1%	-3.458
5%	-2.873
10%	-2.573

**Tabla 4.** Test de Dickey Fuller Aumentado (ADF) para las primeras diferencias de los tipos de interés (Enero de 1995 – Marzo de 2015). Fuente: *Elaboración propia.*

Por último, para poder estimar los parámetros de cada uno de los modelos objeto de estudio, utilizamos los rendimientos observados en *T-Bills* con vencimiento a 6 meses y 1 año así como el rendimiento en títulos del Tesoro de Estados Unidos a vencimientos constantes<sup>9</sup> (*Treasury Constant Maturities*) con vencimiento a 2 años. Estos datos se escogieron con periodicidad mensual para el periodo comprendido entre enero de 1995 y marzo del año 2015 (la misma periodicidad y para el mismo periodo de tiempo que el de la variable proxy). La Figura 8, muestra la evolución de los datos seleccionados. Vemos que el comportamiento de los rendimientos observados a través del tiempo para cada vencimiento es análogo al del rendimiento observado en *T-bills* con vencimiento a 3 meses. Por otra parte, para un mismo instante de tiempo ( $t$ ), generalmente los rendimientos al vencimiento son mayores cuanto mayor es el vencimiento, siendo diferentes las tasas de crecimiento de los rendimientos con respecto al vencimiento en cada instante de tiempo. No consideramos vencimientos a más largo plazo porque los modelos unifactoriales son inadecuados para estimar la ETTI a vencimientos largos, véase Moreno (2000).



**Figura 8.** Rendimientos observados a 6 meses, 1 año y 2 años. Fuente: *Elaboración propia con datos de los T-Bills con vencimiento a 6 meses y 1 año así como de los Treasury Constant Maturities con vencimiento a 2 años procedentes de la Reserva Federal de Estados Unidos.*

<sup>9</sup> El rendimiento de los *Treasury Constant Maturities* es un rendimiento obtenido a partir de títulos emitidos por el Tesoro de Estados Unidos con vencimientos constantes que oscilan entre 1 mes y 30 años.

### 4.3. Funciones que describen la ETTI

Las funciones utilizadas para describir el comportamiento de la ETTI en tiempo continuo son diferentes dependiendo del modelo usado. De hecho, dicha función del rendimiento al vencimiento,  $R(t, r; T)$ , es obtenida tras haber calculado la solución de la ecuación diferencial (3.1) para el caso del modelo determinista y después de haber encontrado una solución a la ecuación de la estructura temporal (3.13) sujeta a (3.4) para el caso de los modelos estocásticos de Vasicek y CIR.

Para modelizar la ETTI debemos encontrar los valores que toman los parámetros de la función del rendimiento al vencimiento, para cada uno de los modelos considerados. En concreto, debemos encontrar los valores apropiados para los parámetros de las expresiones (3.3), (3.24) y (3.27). Así, obtenemos la ETTI modelizada mediante el modelo determinista, el modelo de Vasicek y el modelo de CIR, respectivamente. En la práctica, encontrar esos valores mediante el uso de datos históricos observados se conoce como calibración de parámetros.

Para calibrar los parámetros en cada uno de los modelos, procedemos a programar las funciones  $R(t, r; T)$  de cada uno de ellos con el software Matlab. Como paso previo a la estimación, realizamos una agrupación de parámetros adecuada en las expresiones de las funciones de rendimientos para los modelos estocásticos.

#### 4.3.1. Modelo determinista

Para el caso del modelo determinista no fue necesario hacer ninguna reagrupación de los parámetros. Sin embargo, por conveniencia, cambiamos el nombre a los parámetros en la ecuación (3.3) que describe el rendimiento al vencimiento, para que dichos parámetros se adapten a la notación que se usa en los parámetros reagrupados en el caso de los modelos de Vasicek y CIR. De este modo, la expresión (3.3) se reescribe como se muestra a continuación

$$R(t, r; T) = b_{11} + \frac{r - b_{11}}{b_{21}(T - t)} (1 - e^{-b_{21}(T-t)}), \quad (4.1)$$

con

$$b_{11} = \mu = R_{\infty},$$

$$b_{21} = k.$$

En la Figura 9, mostramos la función `modeloDeterminista(beta, equis)` que recoge la función del rendimiento al vencimiento del modelo determinista en código de Matlab. El primer valor de entrada de la función, `beta`, recoge el vector de parámetros del modelo:  $\text{beta} = (b_{11}, b_{21})$ . El segundo argumento, `equis`, recoge las dos variables del modelo:  $\text{equis} = (r(t), T - t)$ . `Yresult` es el valor de salida y es el correspondiente rendimiento al vencimiento.

```

modeloDeterminista.m* x +
1  function YRESULT = modeloDeterminista(beta,equis)
2
3  b1 = beta(1); % mu = Rinf
4  b2 = beta(2); % k
5
6  X1 = equis(:,1); % r(t)
7  X2 = equis(:,2); % T-t
8
9  YRESULT = b1+(X1-b1)./(b2*X2).* (1-exp(-b2*X2));
10
11 end
    
```

**Figura 9.** Programación en Matlab de la función del rendimiento al vencimiento del modelo determinista (4.1). Fuente: *Elaboración propia*.

### 4.3.2. Modelo de Vasicek

La reagrupación de parámetros que realizamos para el rendimiento al vencimiento con el modelo de Vasicek, véase expresión (3.24), es la siguiente,

$$R(t, r; T) = b_{12} + \frac{(r - b_{12})(1 - e^{-b_{22}(T-t)})}{b_{22}(T-t)} + \frac{b_{32}}{(T-t)} (1 - e^{-b_{22}(T-t)})^2, \quad (4.2)$$

con

$$b_{12} = R_{\infty} = \mu - \frac{\rho\lambda}{k} - \frac{\rho^2}{2k^2},$$

$$b_{22} = k,$$

$$b_{32} = \frac{\rho^2}{4k^3}.$$

En la Figura 10, escribimos la función del rendimiento al vencimiento del modelo de Vasicek en código de Matlab. A esta función la denominamos `modeloVasicek(beta,equis)`. Los valores de entrada y salida de la función tienen un significado análogo a la función `modeloDeterminista` antes comentado. La única diferencia es que en el modelo de Vasicek existe un parámetro adicional recogido dentro del vector de parámetros `beta`.

```

modeloVasicek.m* x +
1  function YRESULT = modeloVasicek(beta,equis)
2
3  b1 = beta(1); % Rinf= mu-rho*lambda/k-rho^2/2k^2
4  b2 = beta(2); % k
5  b3 = beta(3); % rho^2/4k^3
6
7  X1 = equis(:,1); % r
8  X2 = equis(:,2); % T-t
9
10 YRESULT = b1+(X1-b1).*(1-exp(-b2*X2))./(b2*X2)+(b3./X2).*((1-exp(-b2*X2)).^2);
11
12 end
    
```

**Figura 10.** Programación en Matlab de la función del rendimiento al vencimiento del modelo de Vasicek (4.2). Fuente: *Elaboración propia*.

### 4.3.3. Modelo de CIR

La reagrupación de parámetros realizada para el rendimiento al vencimiento con el modelo de CIR, véase expresión (3.27), es la siguiente

$$R(t, r; T) = -\frac{A(t, T) - B(t, T) r}{T - t}, \quad (4.3)$$

donde,

$$A(t, T) = b_{13} \ln \left( \frac{2b_{33} e^{b_{23}(T-t)/2}}{b_{23}(e^{b_{33}(T-t)} - 1) + 2b_{33}} \right),$$

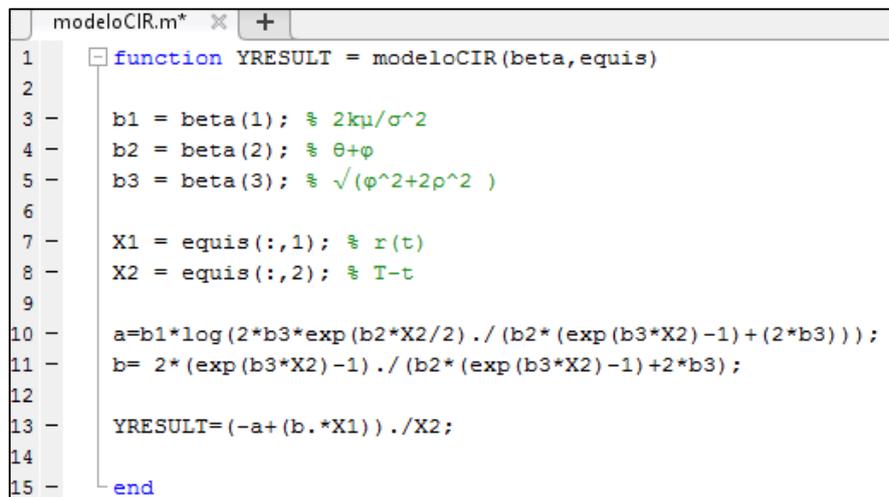
$$B(t, T) = \frac{2(e^{b_{33}(T-t)} - 1)}{b_{23}(e^{b_{33}(T-t)} - 1) + 2b_{33}},$$

$$b_{13} = \frac{2k\mu}{\rho^2},$$

$$b_{23} = \theta + \varphi,$$

$$b_{33} = \theta = \sqrt{\varphi^2 + 2\rho^2}.$$

De Forma análoga a los modelos anteriores, escribimos el rendimiento al vencimiento del modelo de CIR en código de Matlab, véase Figura 11.



```

1  function YRESULT = modeloCIR(beta,equis)
2
3  b1 = beta(1); % 2kμ/σ^2
4  b2 = beta(2); % θ+φ
5  b3 = beta(3); % √(φ^2+2ρ^2)
6
7  X1 = equis(:,1); % r(t)
8  X2 = equis(:,2); % T-t
9
10 a=b1*log(2*b3*exp(b2*X2/2) ./ (b2*(exp(b3*X2)-1)+(2*b3)));
11 b= 2*(exp(b3*X2)-1) ./ (b2*(exp(b3*X2)-1)+2*b3);
12
13 YRESULT=(-a+(b.*X1))./X2;
14
15 end
    
```

**Figura 11.** Programación en Matlab de la función del rendimiento al vencimiento del modelo de CIR (4.3). Fuente: *Elaboración propia*.

## 4.4. Calibración de parámetros

Después de conocer las funciones de la ETTI o curva de rendimientos asociadas a cada modelo y de haber identificado los parámetros a estimar, mediante el proceso de calibración,

procedemos a hacer uso de los datos históricos disponibles y descritos anteriormente para encontrar los valores de los parámetros de los diferentes modelos:

- $r(t)$ , aproximada mediante el uso del rendimiento observado de los *T-Bills* con vencimiento a 3 meses.
- $R(t, r; 0.5)$ , es el rendimiento observado de los *T-Bills* con vencimiento a 6 meses. Para este rendimiento se cumple que  $T - t = 0.5$  años.
- $R(t, r; 1)$ , es el rendimiento observado en *T-Bills* con vencimiento a 1 año. Para este rendimiento se cumple que  $T - t = 1$  año.
- $R(t, r; 2)$ , es el rendimiento observado en *Treasury Securities at Constant Maturity* con vencimiento a 2 años. Para este rendimiento se cumple que  $T - t = 2$  años.

Así pues, con las 243 observaciones disponibles de las anteriores series temporales ajustamos los datos a las funciones continuas descritas por las expresiones (4.1), (4.2) y (4.3) mediante el uso del método de los mínimos cuadrados para funciones no lineales<sup>10</sup>. Según Hanke y Wichern (2005) este es un método de optimización matemática usado para encontrar los parámetros de una función continua que mejor se ajustan a los datos observados (donde se poseen observaciones tanto de la variable dependiente  $R(t, r; T)$  como de sus variables explicativas  $r$  y  $T - t$ ). La función objetivo a minimizar es el sumatorio del error cuadrático de la diferencia entre los datos observados y los generados por la función a ajustar,

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\text{beta}} \left( \sum_{j=1}^{243} \left( R(t_j, r_j; 0.5) - Ro(t_j, r_j; 0.5) \right)^2 \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{243} \left( R(t_j, r_j; 1) - Ro(t_j, r_j; 1) \right)^2 + \sum_{j=1}^{243} \left( R(t_j, r_j; 2) - Ro(t_j, r_j; 2) \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde  $R(t, r; T)$  y  $Ro(t, r; T)$  son los rendimientos estimados y observados, respectivamente, y  $\text{beta}$  es el vector de parámetros a estimar en cada modelo. Además, la expresión del rendimiento estimado es (4.1) para el caso del modelo determinista, (4.2) para el modelo de Vasicek y (4.3) para el modelo de CIR.

Para realizar dicha estimación se utilizó el software Matlab y en concreto la función `lsqcurvefit`<sup>11</sup> mediante la cual ajustamos las funciones teóricas (4.1), (4.2) y (4.3) con las observaciones de los rendimientos al vencimiento con  $T = 6$  meses, 1 año y 2 años. En este ajuste, el rendimiento al vencimiento es la variable dependiente y por tanto se expresa en función de sus variables explicativas: el tipo de interés instantáneo  $r$  y el periodo de vencimiento  $T - t$ .

De este modo, encontramos los parámetros de las funciones (4.1), (4.2) y (4.3) que minimizan la función objetivo de la expresión (4.4).

<sup>10</sup> Existen otros métodos de estimación, en particular para los modelos estocásticos, véase Chan *et al.* (1992) y Nowman (1997).

<sup>11</sup> Para más detalles acerca de la función `lsqcurvefit` recomendamos consultar el sitio web de Matlab: <http://es.mathworks.com/help/optim/ug/lsqcurvefit.html>. [Último acceso: 15/04/2015].

La Figura 12 muestra el código utilizado en Matlab para solucionar el problema (4.4) para cada modelo. La función `lsqcurvefit` mediante la cual se calibran los parámetros en cada modelo tiene 7 argumentos. El primero de ellos es la función a ajustar, que dependiendo del modelo a usar, ya sea determinista, Vasicek o CIR, se corresponde con las funciones no lineales, cuya programación se muestra en las Figuras 8, 9 y 10, respectivamente. El segundo argumento es un vector de tamaño  $1 \times 2$  para el modelo determinista y  $1 \times 3$  para los dos modelos estocásticos, el cual, almacena inicialmente un valor arbitrario para los parámetros de cada modelo. El proceso de iteración para solucionar el problema descrito en la expresión (4.4) comienza con dicho valor.

El tercer argumento de la función `lsqcurvefit`, `xdata`, es una matriz de  $2 \times 729$  con los valores de las variables explicativas  $r(t)$  en la primera columna y  $T - t$  en la segunda columna. Las 243 primeras filas de la primera columna contienen la serie de datos de la variable  $r(t)$ , mientras que los campos de estas mismas filas pero en la segunda columna almacenan todos el valor de  $T - t = 0.5$  años. Por su parte, las 243 siguientes filas de la primera columna contienen de nuevo la serie de datos de la variable  $r(t)$ , mientras que los campos de estas mismas filas pero en la segunda columna almacenan todos el valor de  $T - t = 1$  año. Por último, las 243 últimas filas de la primera columna contienen la serie temporal de la variable  $r(t)$  y los campos de estas mismas filas pero en la segunda columna almacenan todos el valor de  $T - t = 2$  años.

El cuarto argumento de la función `lsqcurvefit`, `ydata`, es un vector de  $1 \times 729$  en el cual los primeros 243 campos corresponden con la serie de rendimientos observados con vencimiento semestral,  $Ro(t, r; 0.5)$ ; los siguientes 243 campos corresponden a los rendimientos observados con vencimiento anual,  $Ro(t, r; 1)$ ; mientras que los últimos 243 campos corresponden a la serie de rendimientos observados con vencimiento bianual  $Ro(t, r; 2)$ .

El quinto y el sexto argumento son vectores de tamaño  $1 \times 2$  para el modelo determinista y  $1 \times 3$  para los dos modelos estocásticos, en los cuales se almacena a manera de restricción el valor mínimo y máximo que debe tomar cada uno de los parámetros. Esta restricción nos permite evitar que los parámetros tomen valores negativos, lo cual es inconsistente con estos modelos.

Finalmente, el séptimo argumento corresponde a opciones adicionales sobre el proceso de calibración. En la Figura 12, las líneas de código 20, 24 y 28 definen la opción de maximizar el número de iteraciones realizadas por Matlab antes de encontrar una solución óptima para los parámetros. Las variables `yestd`, `yestv` y `yestc` son vectores de tamaño  $1 \times 729$  que almacenan el valor del rendimiento al vencimiento estimado por las funciones del modelos determinista (4.1), de Vasicek (4.2), y de CIR (4.3), respectivamente. En dichos vectores, los primeros 243 campos corresponden a  $R(t, r; 0.5)$ ; los siguientes 243 campos corresponden a  $R(t, r; 1)$ ; mientras que los últimos 243 campos corresponden a  $R(t, r; 2)$ .

Por su parte, las variables `paramd`, `paramv` y `paramc` recogen los vectores de parámetros que dan solución al problema (4.4) después del proceso de ajuste o calibración. La variable `paramd` es un vector de tamaño  $1 \times 2$  que almacena el valor de los parámetros de la función del

rendimiento al vencimiento del modelo determinista una vez que estos han sido calibrados,  $(b_{11}, b_{21})$ . La variable `paramv` es un vector de tamaño  $1 \times 3$  que almacena el valor de los parámetros de la función del rendimiento al vencimiento del modelo de Vasicek una vez que estos han sido calibrados  $(b_{12}, b_{22}, b_{32})$ . La variable `paramc` es un vector de tamaño  $1 \times 3$  que almacena el valor de los parámetros de la función del rendimiento al vencimiento del modelo de CIR una vez que estos han sido calibrados,  $(b_{13}, b_{23}, b_{33})$ .

```

19
20 - options=optimset('MaxFunEvals',100000,'TolFun',1e-5,'MaxIter',10000);
21 - paramd=lsqcurvefit(@modeloDeterminista,x0d,xdata,ydata,xmind,xmaxd,options);
22 - yestd=modeloDeterminista(paramd,xdata);
23
24 - options=optimset('MaxFunEvals',100000,'TolFun',1e-5,'MaxIter',10000);
25 - paramv=lsqcurvefit(@modeloVasicek,x0v,xdata,ydata,xminv,xmaxv,options);
26 - yestv=modeloVasicek(paramv,xdata);
27
28 - options=optimset('MaxFunEvals',100000,'TolFun',1e-5,'MaxIter',10000);
29 - paramc=lsqcurvefit(@modeloCIR,x0c,xdata,ydata,xminc,xmaxc,options);
30 - yestc=modeloCIR(paramc,xdata);

```

**Figura 12.** Programación en Matlab de la calibración de parámetros en el modelo determinista, de Vasicek y de CIR. *Fuente: Elaboración propia.*

## 5. RESULTADOS OBTENIDOS

En este capítulo, mostramos los parámetros obtenidos tras el proceso de calibración realizado con los datos considerados en el Capítulo 4. Una vez se reemplazan dichos parámetros en las expresiones (4.1), (4.2) y (4.3) del modelo determinista, de Vasicek y de CIR, respectivamente, obtenemos la función que modeliza la ETTI usando la información histórica disponible. Es de resaltar que como indica Gómez-Valle (2003), en la literatura, es habitual comparar el comportamiento del proceso que modeliza los tipos de interés de los diferentes modelos. Sin embargo, no es común analizar la forma en que dichos modelos ajustan la curva de rendimientos usando datos históricos. No obstante, evaluamos como se ajustan los modelos a los datos observados usando como criterio diferenciador medidas de error, como el error absoluto medio (MAE) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE). Además, comparamos y analizamos gráficamente el comportamiento de los diferentes modelos y observamos la sensibilidad de los rendimientos estimados ante variaciones en cualquiera de los parámetros de cada modelo.

Posteriormente, evaluamos la ETTI en dos fechas del periodo de observación, el 01/03/2015 y el 01/03/1995, y usamos dichas ETTIs para calcular el precio de los bonos cupón cero con vencimientos a 6 meses, 1 año y 2 años. Finalizamos dicho análisis estudiando cómo el cambio de un 25% en cualquiera de los parámetros de cada modelo puede afectar el precio de mercado de los bonos y los posibles beneficios o pérdidas que se generarían para un inversor.

### 5.1. Estimación de los modelos

En esta sección, mostramos los resultados del proceso de calibración de los parámetros y usamos medidas de error como el MAE<sup>12</sup> y el RMSE<sup>13</sup> para analizar el nivel de error cometido en el ajuste de los datos históricos.

Finalmente, analizamos gráficamente el comportamiento de los rendimientos estimados con cada modelo para los vencimientos de 6 meses, 1 año y 2 años.

#### 5.1.1. Parámetros obtenidos

En la Tabla 5 mostramos los valores de los parámetros obtenidos para cada uno de los modelos, después de haber ejecutado el código en Matlab descrito en la Sección 4.3.

---

<sup>12</sup> El MAE se calcula mediante el uso de la siguiente expresión:

$$MAE = \sum_{j=1}^N |R(t_j, r_j; T) - Ro(t_j, r_j; T)|$$

<sup>13</sup> El RMSE se calcula mediante el uso de la siguiente expresión:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (R(t_j, r_j; T) - Ro(t_j, r_j; T))^2}$$

Modelo Determinista	
$b_{11} = \mu$	0.1606148
$b_{21} = k$	0.0351769
Modelo Vasicek	
$b_{12} = R_{\infty}$	0.1128750
$b_{22} = k$	0.0348128
$b_{32} = \rho^2 / 4k^3$	0.6843281
Modelo CIR	
$b_{13} = k\mu / \rho^2$	213.7842016
$b_{23} = \theta + \varphi$	0.0070243
$b_{33} = \theta$	0.0095628

**Tabla 5.** Parámetros calibrados: modelo determinista, Vasicek y CIR. Fuente: *Elaboración propia.*

### 5.1.2. Análisis de los errores de estimación

Si reemplazamos los valores de los parámetros de la Tabla 5 en las expresiones (4.1), (4.2) y (4.3) obtenemos las curvas de rendimientos al vencimiento para los diferentes modelos. Aunque dichas funciones son continuas, a fin de mostrar la calidad con la que los parámetros estimados para cada uno de los modelos generan estimaciones que se ajusten a los datos históricos, centramos nuestro análisis en los rendimientos estimados a 6 meses, 1 año y 2 años, ya que estos son los vencimientos a más corto plazo para los cuales poseemos observaciones históricas. Así pues, en la Tabla 6 mostramos la bondad del ajuste  $R^2$ , el MAE y el RMSE para cada modelo y vencimiento.

En la Tabla 6, observamos que en cada modelo a medida que va aumentando el vencimiento del rendimiento modelizado, las medidas de error (MAE y RMSE) también se incrementan. Esto significa que a mayores vencimientos, mayores serán también los errores de las estimaciones de los diferentes modelos. De hecho, la medida de bondad del ajuste  $R^2$  disminuye cuando aumenta el vencimiento.

Por otra parte, vemos que al modelizar los rendimientos para dos de los tres vencimientos estudiados (6 meses y 1 año), las medidas de error del modelo determinista son mayores a las de los modelos estocásticos, siendo las medidas de error del modelo de Vasicek mayores a las del de CIR. Por otra parte, al modelizar los rendimientos a 2 años las medidas de error del modelo de CIR son mayores que las del modelo de Vasicek, estas últimas son a su vez mayores a las del modelo determinista. Por tanto, usando como criterio de calidad de ajuste el MAE o el RMSE el modelo de CIR ofrece mejor calidad de ajuste, seguido por el de Vasicek para el rendimiento a 6 meses y 1 año. Sin embargo, este comportamiento no se mantiene para el vencimiento a 2 años<sup>14</sup>.

<sup>14</sup> Hay que tener en cuenta que los modelos unifactoriales estocásticos son limitados y no son capaces de modelizar curvas de rendimiento a vencimientos a largo plazo, véase Moreno (2000).

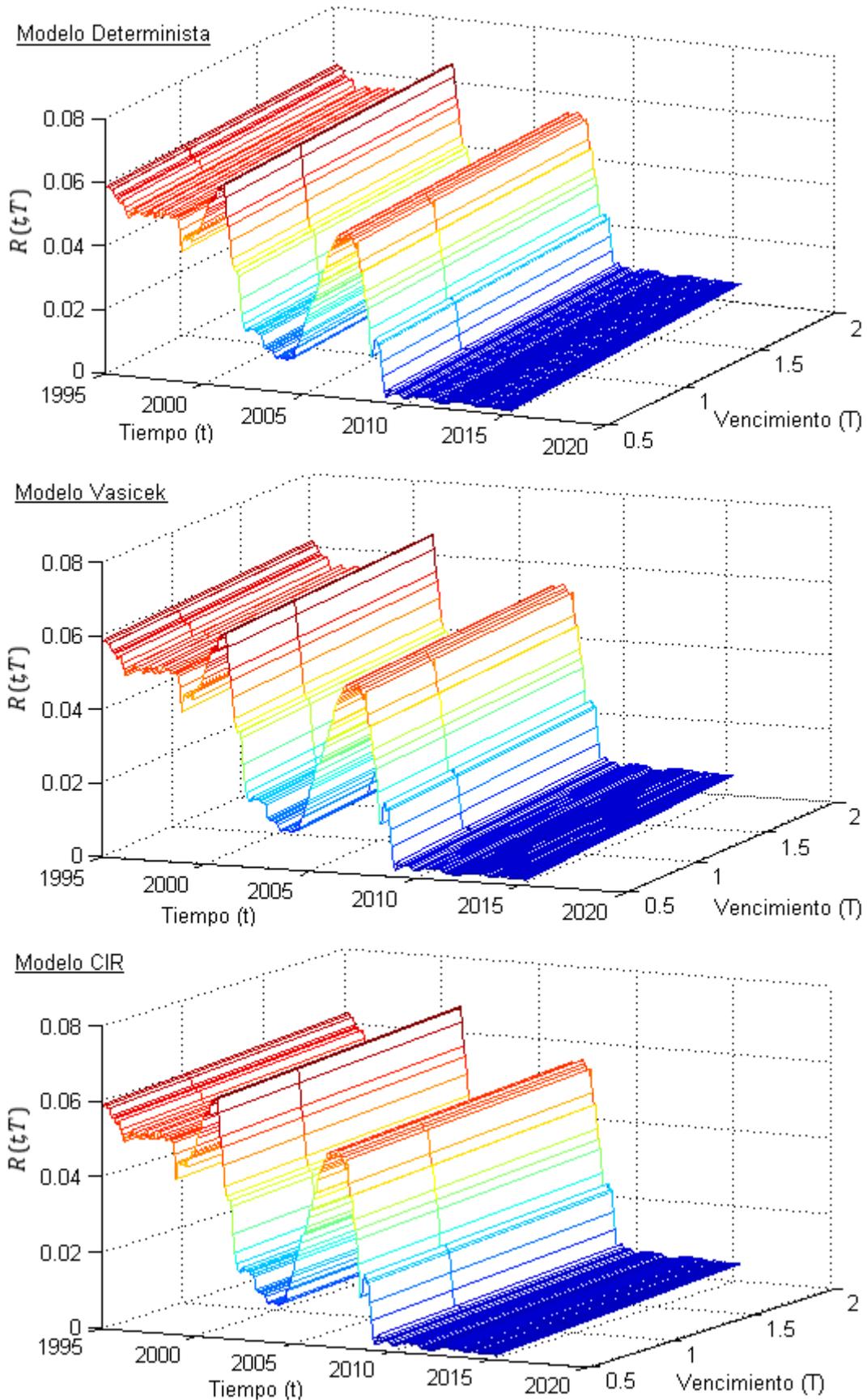
Modelo Determinista			
Medida	$R(t, r(t), 0.5)$	$R(t, r(t), 1)$	$R(t, r(t), 2)$
$R^2$	0.9971959	0.9896498	0.9651722
MAE	0.0009683	0.0018138	0.0032440
RMSE	0.0011788	0.0022459	0.0040047
Modelo Vasicek			
Medida	$R(t, r(t), 0.5)$	$R(t, r(t), 1)$	$R(t, r(t), 2)$
$R^2$	0.9971988	0.9896536	0.9651648
MAE	0.0009634	0.0018078	0.0032456
RMSE	0.0011776	0.0022427	0.0040107
Modelo CIR			
Medida	$R(t, r(t), 0.5)$	$R(t, r(t), 1)$	$R(t, r(t), 2)$
$R^2$	0.9974089	0.9897065	0.9629686
MAE	0.0008920	0.0017588	0.0032742
RMSE	0.0011325	0.0022375	0.0041297

**Tabla 6.** Bondad del ajuste y medidas de error del modelo determinista, Vasicek y CIR para cada vencimiento. *Fuente: Elaboración propia.*

### 5.1.3. Análisis gráfico

Después de calibrar los parámetros de cada modelo para conseguir las curvas de rendimientos al vencimiento de los mismos, representamos gráficamente los rendimientos estimados para cada uno de los modelos en la Figura 13. En la parte superior de esta figura, mostramos las estimaciones realizadas con el modelo determinista, en la parte intermedia con el modelo de Vasicek y en la parte inferior las realizadas con el modelo de CIR. Cabe resaltar que las estimaciones de cada modelo son tridimensionales siendo representadas mediante 3 ejes. El primero es el tiempo (desde enero de 1995 hasta marzo del 2015), el segundo el vencimiento y, por último, en el eje vertical, el rendimiento al vencimiento. En ese orden de ideas, analizar la relación existente entre los rendimientos al vencimiento y los posibles vencimientos para una fecha determinada, es analizar la ETTI estimada en un instante de tiempo. Mientras que analizar la relación de los rendimientos al mismo vencimiento y el tiempo, es analizar las estimaciones históricas que ofrece cada modelo de los rendimientos a un mismo vencimiento.

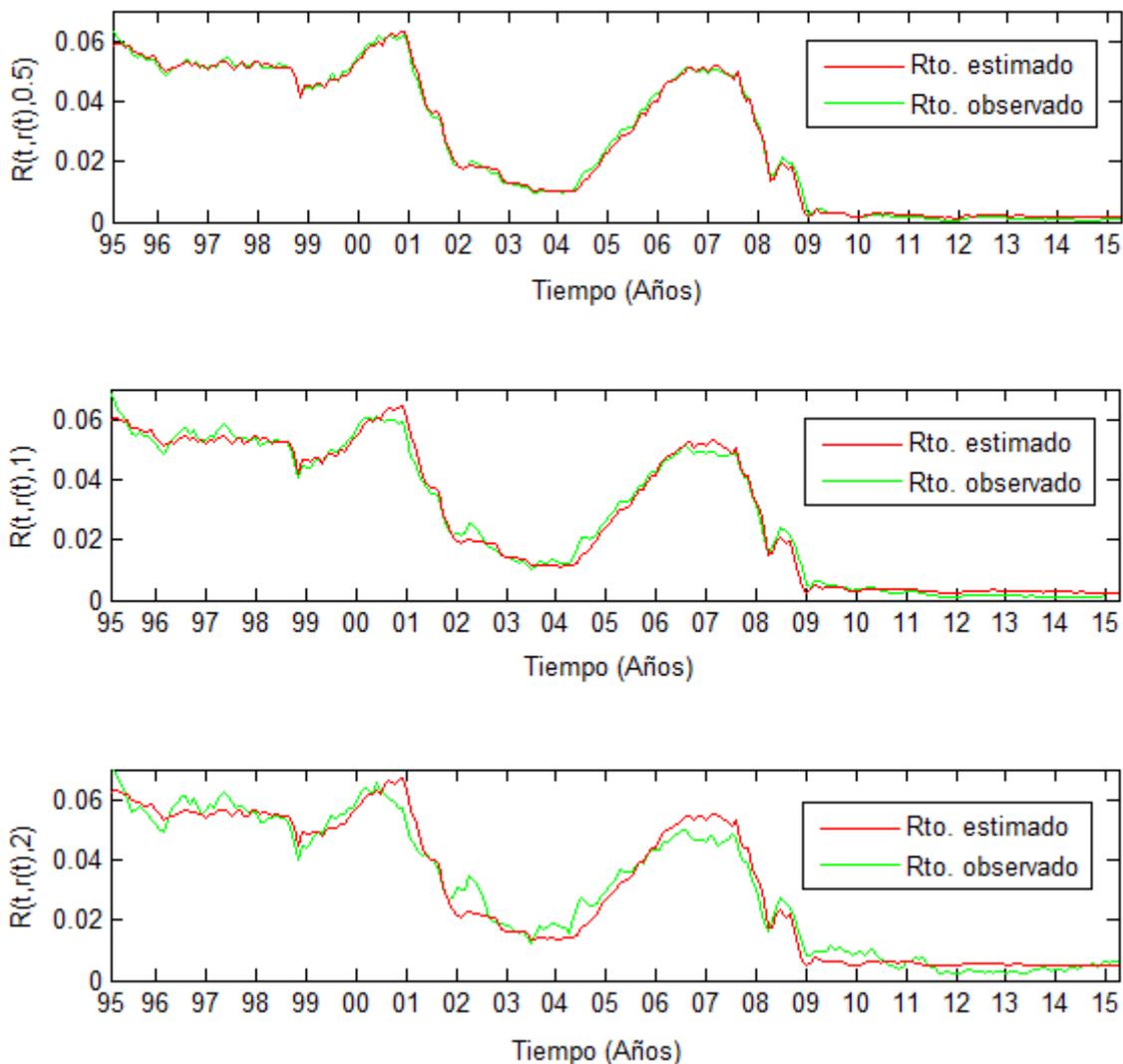
En la Figura 13, podemos observar que los tres modelos generan estimaciones de rendimientos al vencimiento que para un mismo vencimiento tienen comportamientos similares. No obstante, los rendimientos estimados para un mismo vencimiento no son iguales entre un modelo u otro aunque las diferencias no son muy grandes. Además, vemos que para un mismo instante de tiempo, los rendimientos estimados con cada uno de los modelos son mayores cuanto mayor es el vencimiento. Si comparamos los rendimientos estimados con los observados, véase Figura 8, las tasas de crecimiento de los rendimientos observados con respecto al vencimiento son visualmente similares y suaves en cada instante de tiempo.



**Figura 13.** Estimaciones del rendimiento al vencimiento generadas por el modelo determinista, de Vasicek y de CIR. Fuente: *Elaboración propia.*

Para ver gráficamente cómo se comportan las estimaciones de cada modelo con respecto a las observaciones históricas disponibles, usamos la Figura 14, en la cual representamos los rendimientos al vencimiento estimados para el caso particular del modelo de CIR (en rojo) frente a los observados (en verde) para cada uno de los vencimientos: 6 meses, 1 año y 2 años. En dicha figura, podemos observar que las estimaciones de este modelo para el rendimiento a 6 meses son muy próximas a los rendimientos observados para dicho vencimiento. Mientras que, los rendimientos estimados con vencimiento a plazos mayores (1 año y 2 años) se ven más alejados de los datos observados, la distancia que separa las estimaciones de las observaciones es mayor para el caso del vencimiento a 2 años.

La Figura 14 también permite ver que cuanto mayor sea el vencimiento de los rendimientos a modelizar, la exactitud con que se ajustan los datos históricos es más baja. Este resultado es análogo para el caso del modelo determinista y de Vasicek.



**Figura 14.** Rendimiento al vencimiento observado y estimado con el modelo de CIR a 6 meses, 1 año y 2 años. *Fuente: Elaboración propia.*

Después de haber analizado el comportamiento individual de los rendimientos estimados por cada modelo con respecto a las observaciones para cada vencimiento, representamos los tres modelos junto con los rendimientos observados para un vencimiento de 2 años<sup>15</sup> en la Figura 15. En verde mostramos las estimaciones generadas por el modelo determinista, en azul por el modelo de Vasicek y en rojo por el modelo de CIR. Por último, mostramos los rendimientos observados en negro. Esta figura permite comparar cómo se comportan los rendimientos estimados por diferentes modelos entre sí y con respecto a los rendimientos observados.

En la Figura 15, vemos que las estimaciones del modelo determinista siempre están por encima de las estimaciones del modelo de Vasicek. A pesar de que las distancias verticales entre estos modelos son tan pequeñas que pueden no ser fácilmente perceptibles gráficamente. Es un hecho que el modelo determinista genera rendimientos estimados mayores al modelo de Vasicek para los tres vencimientos estudiados (6 meses, 1 año y 2 años). Los rangos en los que oscilan las distancias que separan al modelo determinista con respecto al de Vasicek son  $[1.44 \times 10^{-5}, 2 \times 10^{-5}]$  para el rendimiento a 6 meses,  $[3.79 \times 10^{-5}, 4.89 \times 10^{-5}]$  para el rendimiento a 1 año y  $[1.10 \times 10^{-4}, 1.32 \times 10^{-4}]$  para el rendimiento a 2 años. Vemos entonces, cómo la amplitud de dichos rangos es mayor cuanto mayor es el vencimiento.

Del mismo modo, encontramos que en los tres vencimientos estudiados, el modelo de CIR genera rendimientos estimados superiores al modelo determinista y de Vasicek para niveles de tipo de interés altos (superiores a 3.2%). Esto se verifica al observar los tramos comprendidos entre los años 1995 y 2000 así como entre los años 2006 y 2007 de la Figura 15. Mientras que para niveles de tipo de interés bajos (inferiores a 3.2%) el modelo de CIR genera rendimientos estimados por debajo de los generados mediante el modelo determinista o el de Vasicek, véase los tramos comprendidos entre los años 2002 y 2005 así como entre los años 2009 y 2015 en la Figura 15.

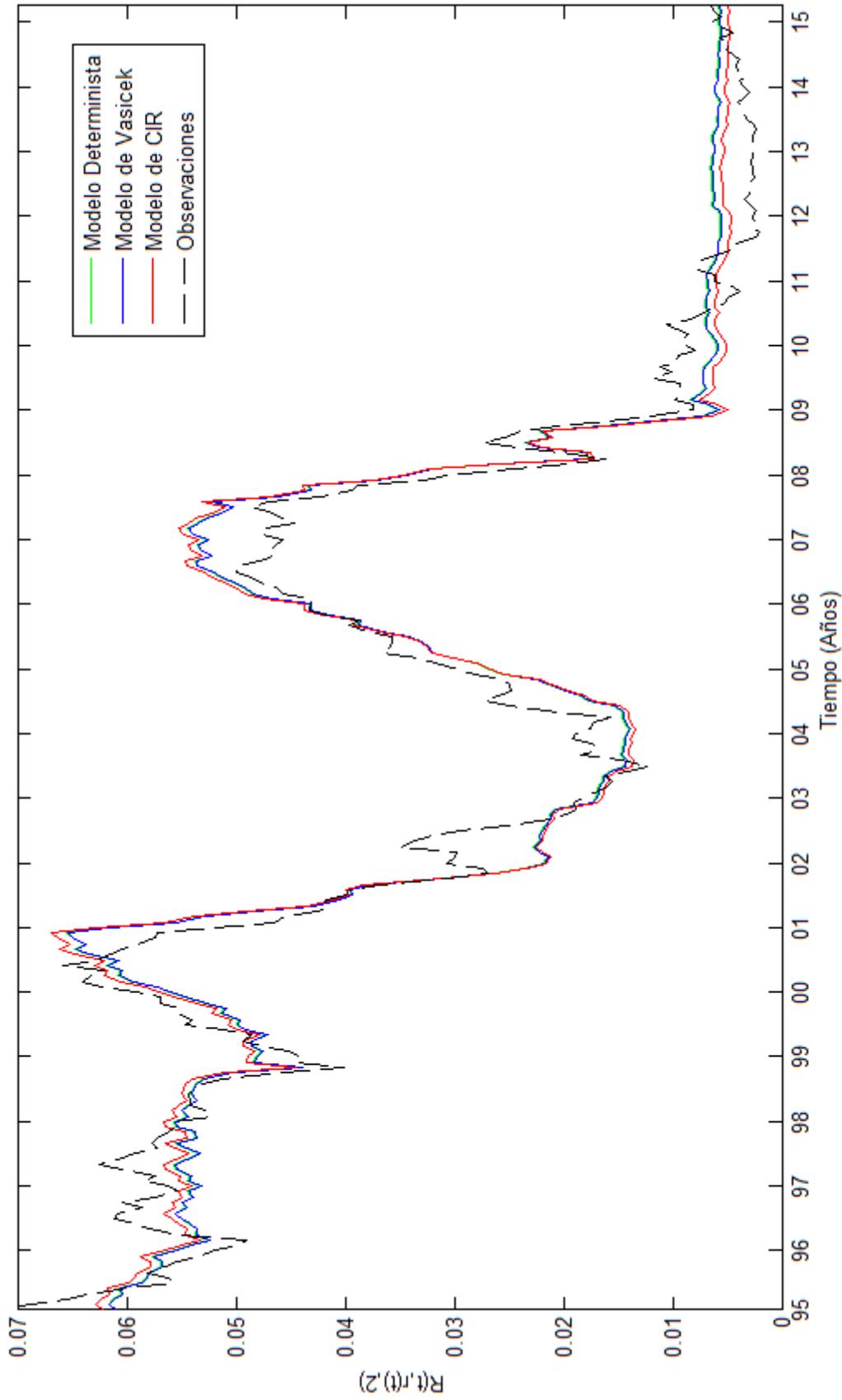
Por otro lado, la amplitud de los rangos que separan a todos los modelos es mayor cuanto mayor es el vencimiento. Por tanto, las estimaciones de los tres modelos son más cercanas a las observaciones para el caso de la modelización del rendimiento a 6 meses, mientras que para vencimientos mayores las estimaciones se vuelven cada vez menos exactas.

De este modo, concluimos que a medida que se modelizan rendimientos a vencimientos cada vez mayores, las estimaciones de los tres modelos no sólo se van haciendo más distantes de las observaciones históricas<sup>16</sup> sino que también se van separando cada vez más entre sí.

---

<sup>15</sup> Cabe resaltar que el comportamiento de los rendimientos estimados para los demás vencimientos (6 meses o 1 año) mediante los tres modelos sigue el mismo patrón común al del vencimiento a 2 años. La diferencia radica en que las distancias entre modelos se vuelven más pequeñas a medida que el vencimiento del rendimiento modelizado es menor, siendo imperceptibles en las gráficas para un vencimiento a 6 meses y difícilmente perceptibles en una gráfica para un vencimiento a 1 año.

<sup>16</sup> Esto es cierto, toda vez que las medidas de error calculadas en la sección 5.1.2. aumentan a medida que aumenta el vencimiento modelizado. Con lo cual, la calidad con la que los modelos se ajustan a los rendimientos observados disminuye a medida que se modelizan vencimientos mayores.



**Figura 15.** Rendimiento al vencimiento a 2 años, observado versus estimado a lo largo del periodo de estimación. Modelo determinista, Vasicek y CIR.  
Fuente: *Elaboración propia.*

## 5.2. Sensibilidad de los modelos ante cambios en los parámetros

En la presente sección analizamos qué comportamiento tendrían las estimaciones de las curvas de rendimientos, en el caso en que alguno de los parámetros de los modelos cambiara de valor. Un cambio en el valor de los parámetros puede ser debido a varias situaciones y entre ellas, una recalibración ocasionada por un cambio de metodología de calibración o por la aparición de un nuevo dato histórico que debe ser incluido en el modelo, a fin de estimar haciendo uso de toda la información disponible.

En la práctica, en el sector financiero es usual analizar la sensibilidad que puede tener el cambio de un parámetro antes de realizar un cambio en la metodología de estimación de un modelo. Un cambio de metodología de estimación puede darse por diferentes razones, entre ellas un error encontrado en el proceso de estimación, un cambio en la regulación o el deseo de adaptarse a nuevas y más sofisticadas metodologías. Debe tenerse en cuenta que la ETTI, por ser una curva que refleja las expectativas del mercado, es usada por los inversores para valorar las carteras de inversiones que se poseen. Por tanto, un cambio en la metodología de estimación puede generar cambios en los valores de los parámetros, lo que a su vez genera cambios en los valores de las curvas de rendimientos, alterando el precio de cada producto valorado y con ello el valor de la cartera de inversión en conjunto. De esta forma el nuevo valor calculado de la cartera, debe ser contabilizado como un beneficio o pérdida por cambio en la metodología y entra a formar parte del estado de resultados del inversionista.

Por otra parte, con el transcurso del tiempo va apareciendo más información de mercado (observaciones) que debe incluirse en los modelos para generar una ETTI actualizada. Esto conduciría a una recalibración de los parámetros que a su vez puede generar un cambio en el valor de la cartera de los inversionistas. No obstante, dicha variación refleja el cambio de expectativas de los agentes de mercado, generando una utilidad o pérdida por valoración para el inversor que debe ser registrada en su estado de resultados. El conocimiento de esta variación es oportuno en la medida que los inversores desean saber cuál es el valor actualizado de sus carteras acorde con la información (expectativas) actual del mercado.

Así pues, analizamos cómo cambiarían las estimaciones de los rendimientos a cada vencimiento realizadas con los modelos objeto de estudio, en el caso en que los parámetros de manera individual aumentaran o disminuyeran su valor en un 25%.

### 5.2.1. Modelo determinista

En esta sección mostramos el estudio realizado de la sensibilidad de los parámetros en el modelo determinista. Así pues, la Tabla 7 muestra la sensibilidad de los rendimientos estimados para cada vencimiento respecto a los parámetros  $b_{11}$  y  $b_{21}$  del modelo determinista. Para el caso del parámetro  $b_{21}$ , el valor mostrado en la tabla, para cada vencimiento, representa la media de las variaciones que se producen a lo largo del tiempo en los rendimientos estimados como consecuencia de un cambio del 25% del parámetro  $b_{21}$ . Esto contrasta con el caso de la sensibilidad de los rendimientos estimados ante cambios en el parámetro  $b_{11}$ , en donde las variaciones en los rendimientos son constantes en el tiempo.

Vencimiento	Cambio en el parámetro	Sensibilidad $b_{11}$	Sensibilidad $b_{21}$
6 meses	+25%	±0.0351%	+0.0292%
	-25%		-0.0293%
1 año	+25%	±0.0698%	+0.0576%
	-25%		-0.0580%
2 años	+25%	±0.1380%	+0.1123%
	-25%		-0.1137%

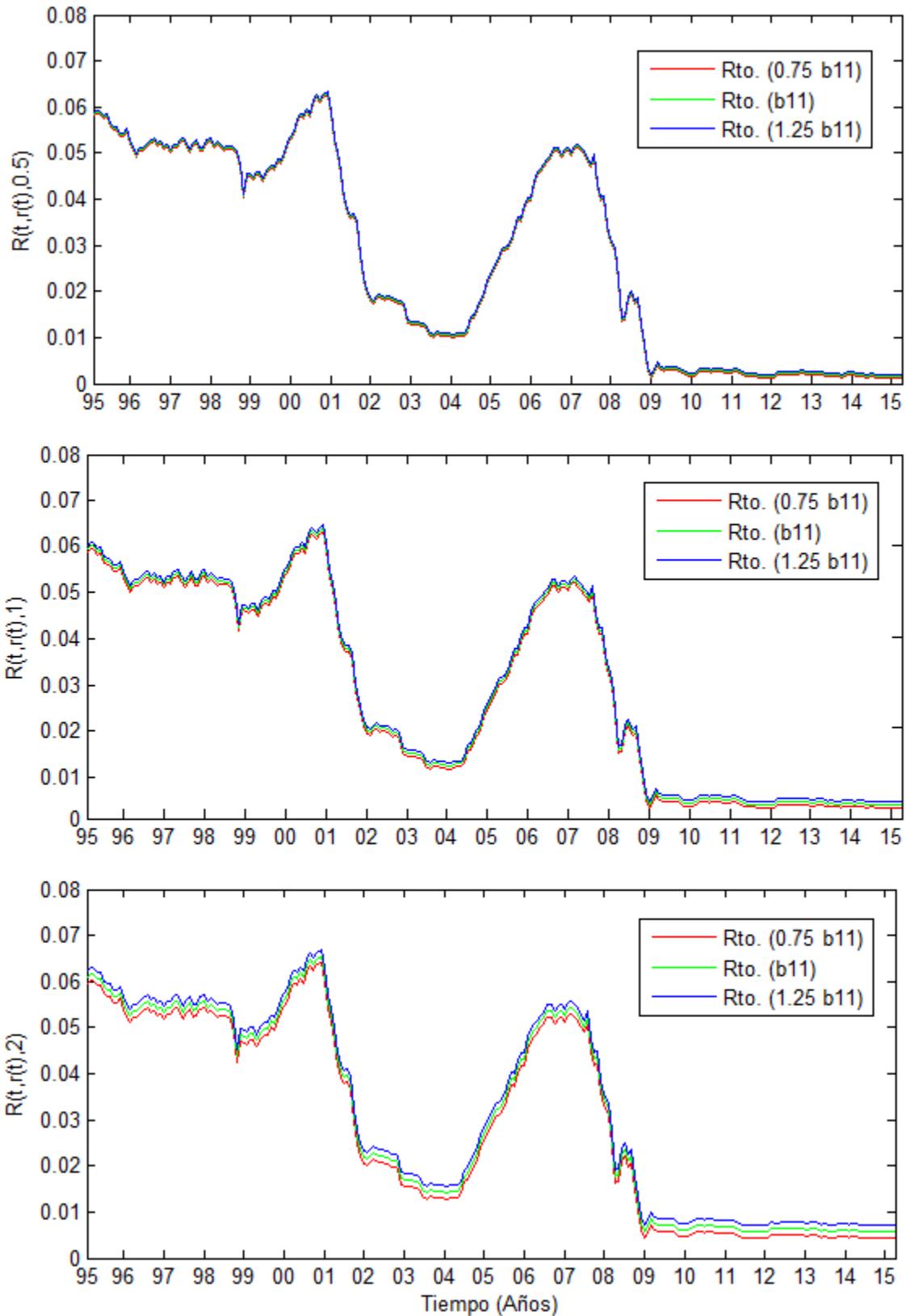
**Tabla 7.** Sensibilidad de los rendimientos al vencimiento ante una variación de  $\pm 25\%$  sobre uno de los parámetros del modelo determinista. *Fuente: Elaboración propia.*

Para el parámetro  $b_{11}$ , que es el valor medio al cual tiende el proceso a largo plazo, un aumento del 25% en su valor, implica que los rendimientos históricos estimados para los tres vencimientos estudiados (6 meses, 1 año y 2 años) se incrementen pero en diferente magnitud, ver Tabla 7. Sin embargo, dicho incremento es constante para los rendimientos estimados para un vencimiento concreto. Por otro lado, una disminución del 25% en el parámetro  $b_{11}$  genera que los rendimientos para cada vencimiento disminuyan en la misma cantidad constante en la que se incrementarían si el parámetro aumentara un 25%. Por tanto, la sensibilidad aumenta al aumentar el vencimiento. Por tal razón, es para los rendimientos más bajos (véase tramo entre el año 2009 y 2015 en la Figura 16 donde se producen mayores variaciones en términos relativos).

En la Figura 16 observamos los rendimientos estimados para cada vencimiento (en verde) así como el desplazamiento hacia arriba de dichos rendimientos (en azul) que se genera cuando el parámetro  $b_{11}$  incrementa un 25% y el desplazamiento hacia abajo de los mismos (en rojo) que se genera cuando el parámetro disminuye un 25%. Observamos que los incrementos o decrementos en los niveles de rendimientos son mayores cuanto mayores son los vencimientos de los rendimientos modelados.

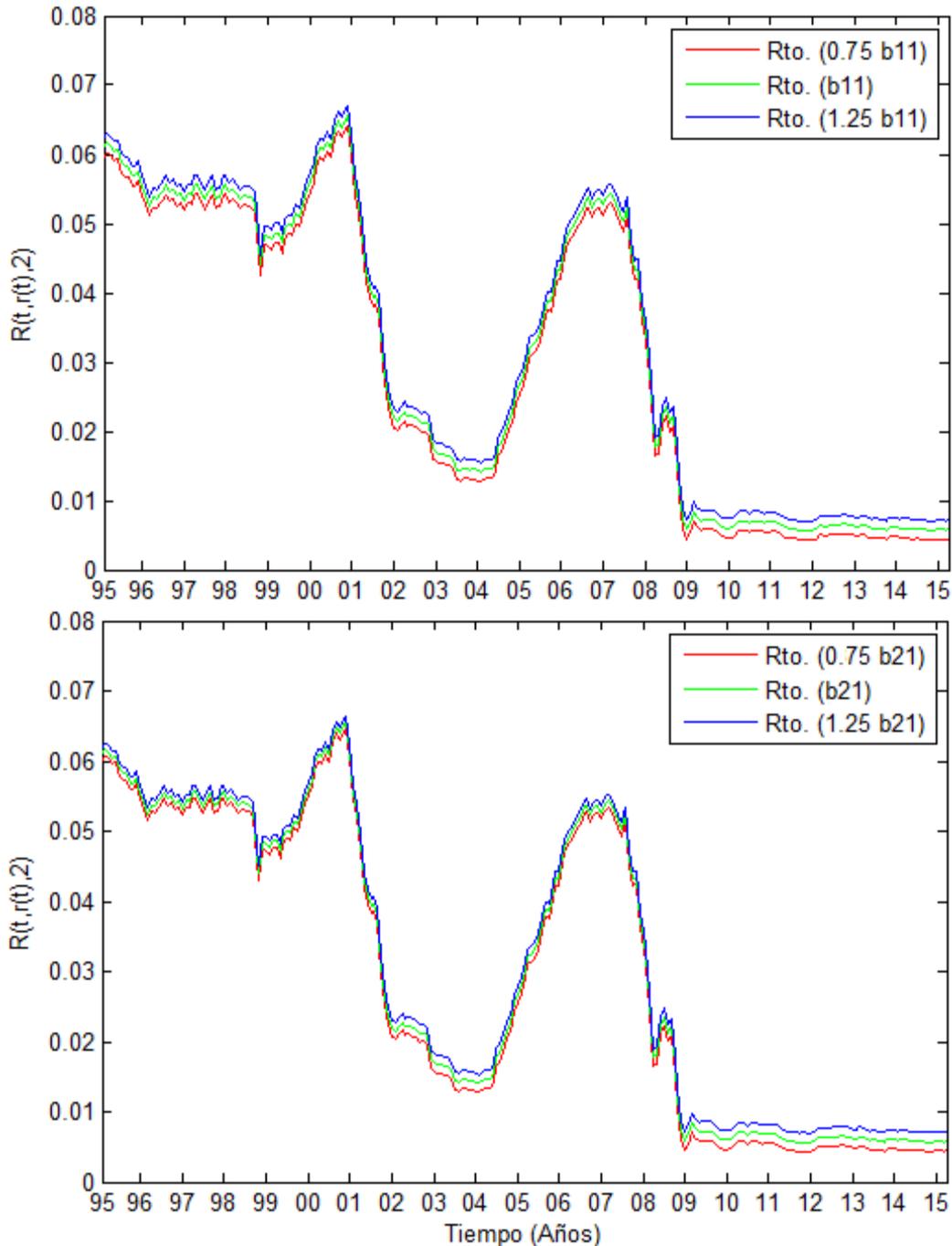
En cuanto al parámetro  $b_{21}$  del modelo determinista, que es la velocidad de reversión a la media, un aumento del 25% en el mismo implica que los rendimientos históricos estimados para los tres vencimientos estudiados (6 meses, 1 año y 2 años) se incrementen. No obstante dicho incremento no es igual para todos los rendimientos con el mismo vencimiento y por tanto en la Tabla 7 recogemos su variación media. Por otro lado, una disminución del 25% en el parámetro  $b_{21}$  genera que los rendimientos para cada vencimiento disminuyan en promedio cantidades muy similares, aunque ligeramente mayores, a las que aumentarían debido a un incremento en  $b_{21}$ . Por tanto, los rendimientos estimados con el modelo determinista son ligeramente más sensibles ante decrementos que ante incrementos en el parámetro  $b_{21}$ .

Finalmente, cabe resaltar que al igual que ocurre con el parámetro  $b_{11}$ , la sensibilidad de los rendimientos estimados ante variaciones del parámetro  $b_{21}$  es mayor cuanto mayor es el vencimiento.



**Figura 16.** Sensibilidad del rendimiento al vencimiento a 6 meses, 1 año y 2 años estimado con el modelo determinista ante un cambio de  $\pm 25\%$  en el parámetro  $b_{11}$ . Fuente: *Elaboración propia.*

En la Figura 17 observamos los rendimientos estimados para un vencimiento a 2 años (en verde) así como el desplazamiento hacia arriba de dichos rendimientos (en azul) que se genera cuando uno de los parámetros del modelo determinista incrementa un 25% y, el desplazamiento hacia abajo (en rojo) que se genera cuando uno de los parámetros disminuye en 25%. En la parte superior, representamos la sensibilidad de los rendimientos ante cambios en el parámetro  $b_{11}$ , la cual es constante a lo largo del tiempo y en la parte inferior representamos la sensibilidad de los rendimientos ante cambios en el parámetro  $b_{21}$ , la cual no es constante. De hecho, la sensibilidad del parámetro  $b_{21}$  es menor que la que la del parámetro  $b_{11}$ , principalmente en tramos con rendimientos elevados (de 1995 a 2001 y del 2006 al 2008).



**Figura 17.** Sensibilidad del rendimiento al vencimiento a 2 años estimado con el modelo determinista ante un cambio de  $\pm 25\%$  en los parámetros  $b_{11}$  y  $b_{21}$ . Fuente: *Elaboración propia.*

### 5.2.2. Modelo de Vasicek

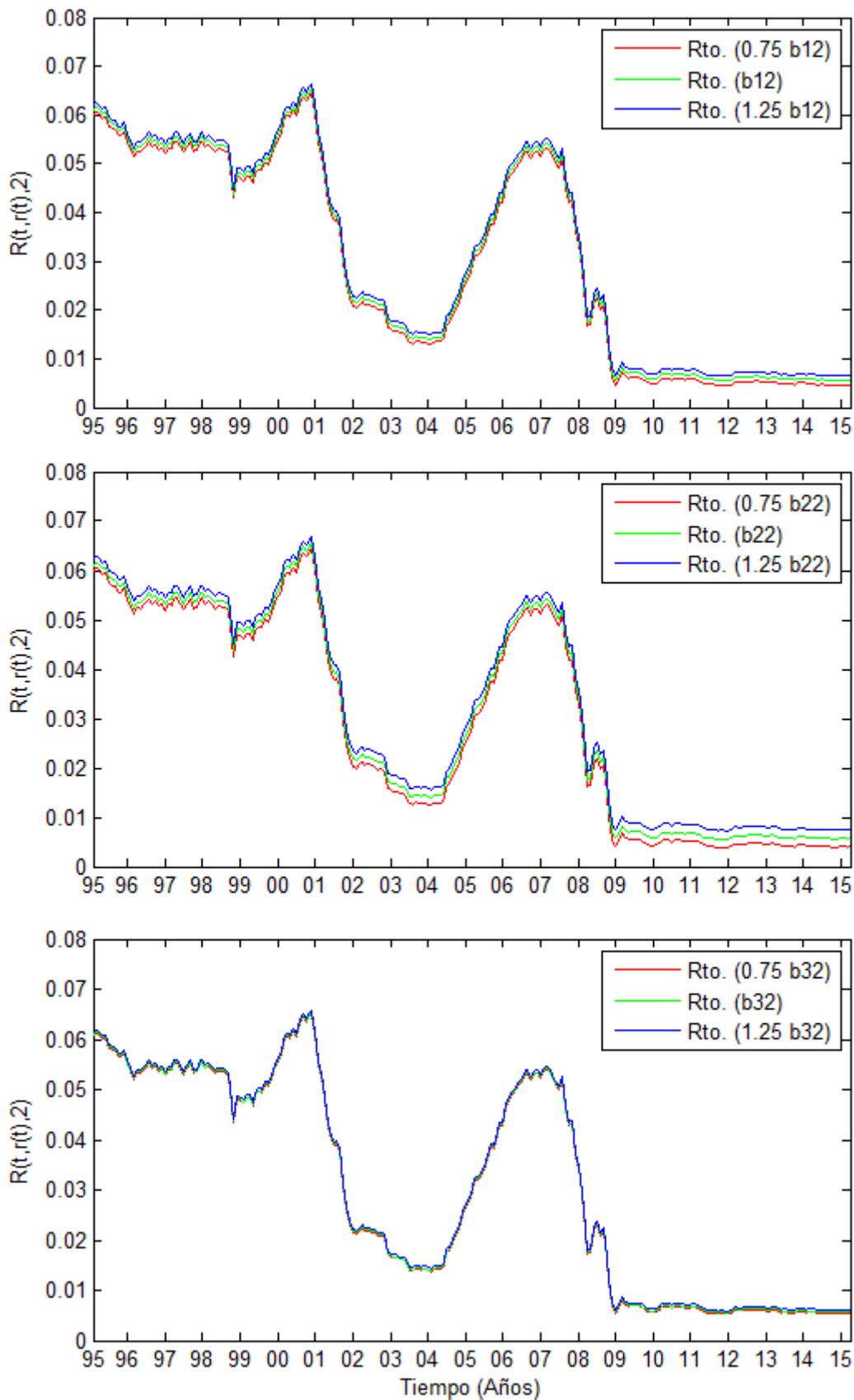
En esta sección mostramos el análisis de la sensibilidad de los parámetros del modelo de Vasicek. De este modo, en la Tabla 8 observamos que un aumento del 25% en el parámetro  $b_{12}$  implica que los rendimientos históricos estimados para los tres vencimientos estudiados se incrementen. Dicho incremento es constante para todos los rendimientos estimados para un mismo vencimiento. Por otro lado, una disminución del 25% en el parámetro  $b_{21}$  genera que los rendimientos para cada vencimiento disminuyan en la misma cantidad en la que se incrementarían si el parámetro aumentara un 25%. Además, los incrementos o decrementos en los niveles de rendimientos son mayores cuanto mayores son los vencimientos de los rendimientos modelados. Por tanto, a mayor vencimiento de los rendimientos estimados, mayor es la sensibilidad de las estimaciones ante un cambio del parámetro  $b_{12}$ . Observamos que este último comportamiento de los rendimientos es análogo ante cambios en los demás parámetros ( $b_{22}$  y  $b_{32}$ ).

Vencimiento	Cambio en el parámetro	Sensibilidad $b_{12}$	Sensibilidad $b_{22}$	Sensibilidad $b_{32}$
6 meses	+25%	±0.0244%	+0.0413%	±0.0101%
	-25%		-0.0364%	
1 año	+25%	±0.0486%	+0.0808%	±0.0200%
	-25%		-0.0717%	
2 años	+25%	±0.0960%	+0.1547%	±0.0387%
	-25%		-0.1388%	

**Tabla 8.** Sensibilidad de los rendimientos al vencimiento ante una variación de  $\pm 25\%$  sobre uno de los parámetros del modelo de Vasicek. *Fuente: Elaboración propia.*

En la Tabla 8 recogemos el aumento y la disminución media experimentados por los rendimientos a cada vencimiento ante un cambio del 25% del parámetro  $b_{22}$ , toda vez que los incrementos que se generan en los rendimientos para cada vencimiento por cuenta de cambios en el parámetro  $b_{22}$  no son constantes. Por otro lado, un aumento del 25% en  $b_{22}$  genera una sensibilidad media mayor que la generada por un descenso del 25% del parámetro.

La sensibilidad que presenta el parámetro  $b_{32}$  del modelo de Vasicek tiene un comportamiento análogo al del parámetro  $b_{12}$ , ya que un cambio en los parámetros genera que los rendimientos a un vencimiento específico aumenten o disminuyan de manera constante. La diferencia radica en que los aumentos o disminuciones sobre los rendimientos a un vencimiento específico son menores cuando hay cambios del parámetro  $b_{32}$ , que cuando los hay en el  $b_{12}$ . Con lo cual, los rendimientos estimados son más sensibles a variaciones en el parámetro  $b_{12}$  que en el  $b_{32}$ . No obstante, los rendimientos son más sensibles a cambios en el parámetro  $b_{22}$  que a los demás parámetros del modelo. Esto se puede ver gráficamente en la Figura 18, en la cual representamos la sensibilidad del rendimiento a 2 años estimado con el modelo de Vasicek ante un cambio del 25% en cada uno de los parámetros. En la parte superior presentamos la sensibilidad de los rendimientos al parámetro  $b_{12}$ , en la parte media al parámetro  $b_{22}$  y en la parte inferior al parámetro  $b_{32}$ . Observamos que aunque la sensibilidad de los rendimientos ante cambios en el parámetro  $b_{22}$  no es constante, gráficamente ésta es en promedio mayor que la de los otros dos parámetros.



**Figura 18.** Sensibilidad del rendimiento al vencimiento a 2 años estimado con el modelo de Vasicek ante un cambio de  $\pm 25\%$  en los parámetros  $b_{12}$ ,  $b_{22}$  y  $b_{32}$ . Fuente: *Elaboración propia*.

### 5.2.3. Modelo de CIR

En esta sección recogemos el análisis de sensibilidad de los parámetros del modelo de CIR. De este modo, en la Tabla 9 observamos que un cambio en el parámetro  $b_{13}$  del modelo de CIR genera que todos los rendimientos para un vencimiento específico aumenten o disminuyan en un valor constante. Siendo esta cantidad constante mayor a medida que aumenta el vencimiento. Por tanto, la sensibilidad ante una variación de este parámetro es mayor cuando aumenta el vencimiento. Este último comportamiento también se presenta ante variaciones de los demás parámetros.

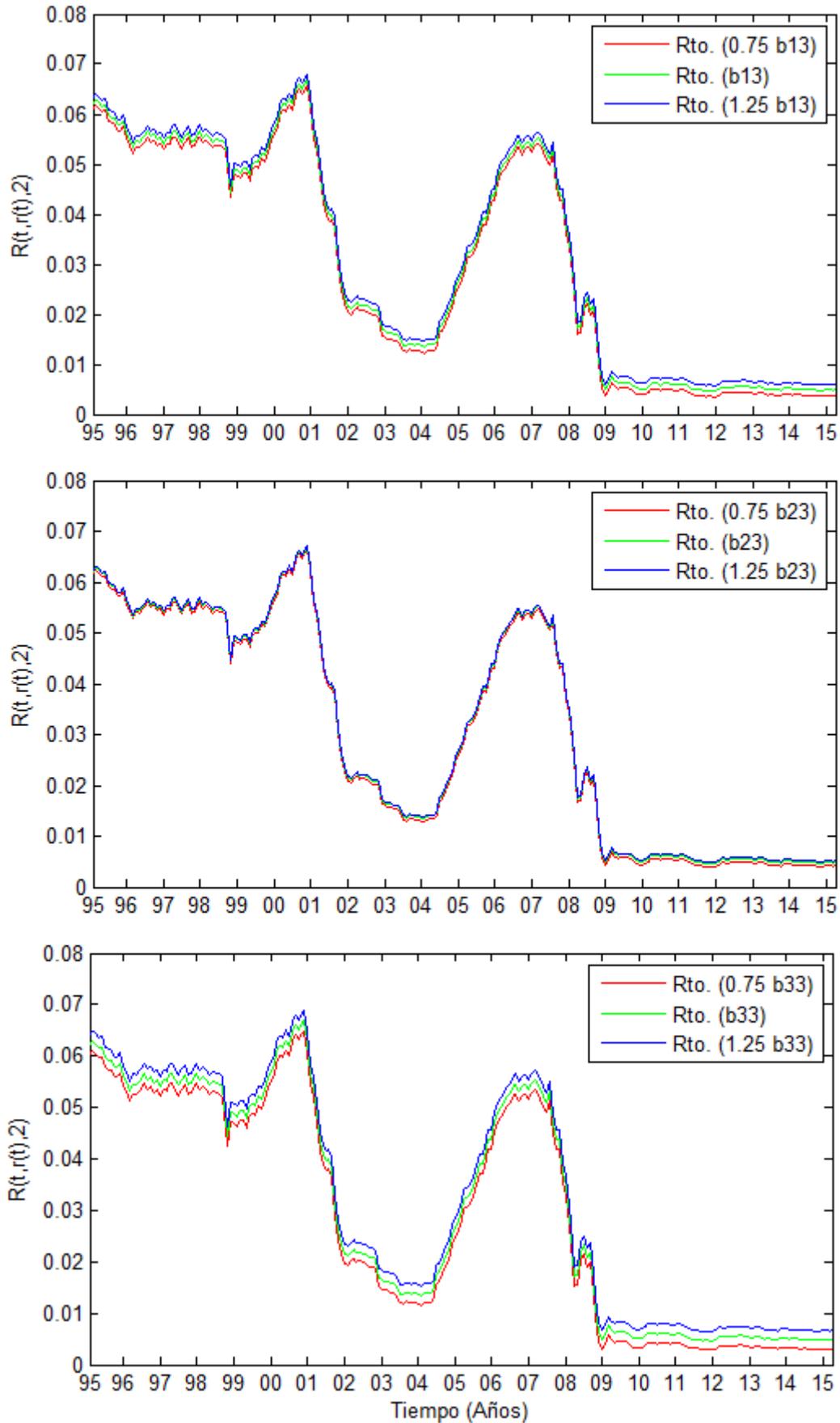
Vencimiento	Cambio en el parámetro	Sensibilidad $b_{13}$	Sensibilidad $b_{23}$	Sensibilidad $b_{33}$
6 meses	+25%	±0.0284%	+0.0066%	+0.0465%
	-25%		-0.0149%	-0.0465%
1 año	+25%	±0.0568%	+0.0132%	+0.0932%
	-25%		-0.0297%	-0.0930%
2 años	+25%	±0.1138%	+0.0261%	+0.1870%
	-25%		-0.0592%	-0.1864%

**Tabla 9.** Sensibilidad de los rendimientos al vencimiento ante una variación de  $\pm 25\%$  sobre uno de los parámetros del modelo de CIR. *Fuente: Elaboración propia.*

Por su parte, un incremento del 25% en el parámetro  $b_{23}$  genera un incremento de los rendimientos para los tres vencimientos estudiados. Mientras un descenso del 25% en el valor de este parámetro genera que los rendimientos estimados desciendan. Por otro lado, para un mismo vencimiento el descenso medio generado en los rendimientos por una caída del 25% del parámetro es mayor que el incremento medio generado por un aumento del 25% del valor del parámetro. Por tanto, los rendimientos a un vencimiento son más sensibles a una caída que a un aumento del parámetro  $b_{23}$ . Es de resaltar que dichos descensos e incrementos no son constantes como en el caso del parámetro  $b_{13}$  sino que son variables y su media para cada vencimiento se muestra en la Tabla 9.

Por último, un aumento del 25% en el parámetro  $b_{33}$  implica que los rendimientos históricos estimados para los tres vencimientos estudiados se incrementen. No obstante dicho incremento no es igual a todos los rendimientos estimados para el mismo vencimiento. Por otra parte, una disminución del 25% en el parámetro  $b_{33}$  genera que los rendimientos a cada vencimiento disminuyan en media distancias muy similares a las que dichos rendimientos aumentarían si este parámetro se incrementara un 25%.

En la Figura 19 representamos la sensibilidad del rendimiento a 2 años estimado con el modelo de CIR ante un cambio del 25% en los parámetros  $b_{13}$  (parte superior),  $b_{23}$  (parte intermedia) y  $b_{33}$  (parte inferior). Observamos que los rendimientos son más sensibles ante variaciones del parámetro  $b_{33}$ , seguidos por el parámetro  $b_{13}$ . Mientras que la menor sensibilidad del rendimiento es ante cambios del parámetro  $b_{23}$ .



**Figura 19.** Sensibilidad del rendimiento al vencimiento a 2 años estimado con el modelo de CIR ante un cambio de  $\pm 25\%$  en los parámetros  $b_{13}$ ,  $b_{23}$  y  $b_{33}$ . Fuente: *Elaboración propia*.

### 5.3. Análisis de la ETTI estimada

En esta sección calculamos la ETTI, en diferentes instantes de tiempo, con los tres modelos estudiados. Posteriormente analizamos el impacto que un cambio en alguno de los parámetros supone sobre el precio de los bonos cupón cero y, por tanto, sobre el valor de la cartera.

Una vez calibrados los parámetros podemos obtener una ETTI o curva de rendimientos para cualquier instante de tiempo. Esta ETTI es una curva que refleja las expectativas que tienen los agentes del mercado en dicha fecha sobre cuáles serán los rendimientos que se podrán obtener a un vencimiento o plazo determinado.

En la parte superior de la Figura 20 mostramos la ETTI el 01/03/2015 (fecha más reciente del periodo de estimación y donde los rendimientos toman valores muy pequeños) obtenida con cada uno de los tres modelos estudiados y el rendimiento observado en el mercado a 6 meses, 1 año y 2 años. Vemos que la ETTI estimada con el modelo determinista y el de Vasicek genera estimaciones de rendimientos al vencimiento por encima de las generadas por el modelo de CIR.

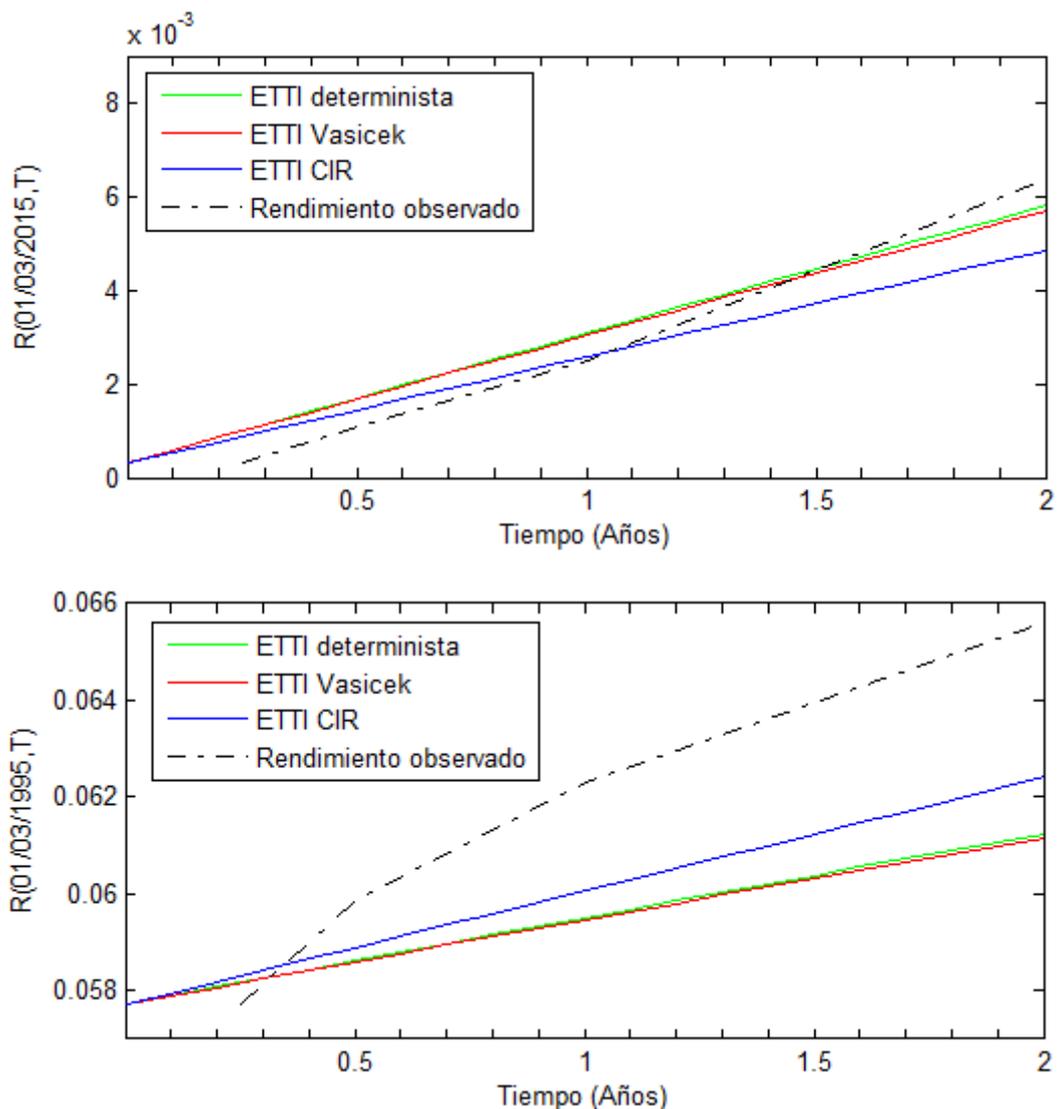
En la parte inferior de la Figura 20 mostramos la ETTI el 01/03/1995 obtenida con los modelos descritos y los rendimientos observados, cuando los rendimientos alcanzan niveles del 6%. En este caso, son los rendimientos obtenidos con el modelo de CIR los que se encuentran por encima de los valores alcanzados con los otros dos modelos.

En cualquier caso, debemos fijarnos en que los rendimientos valorados con el modelo de CIR son más cercanos a los observados en el mercado en las dos fechas estudiadas, presentando niveles de vencimiento muy diferentes. En el caso del día 01/03/2015, la ETTI estimada con el modelo de CIR está más próxima que los demás modelos a los rendimientos observados para los vencimientos a 6 meses y 1 año, esto no sucede para el rendimiento a 2 años. Mientras que el día 01/03/1995, la ETTI estimada con el modelo de CIR es más cercana a los rendimientos observados a 6 meses, 1 año y 2 años. Por tanto, el modelo de CIR sería el más adecuado para estimar la ETTI, tal y como vimos en la Sección 5.1.2.

Desde un punto de vista gráfico existen algunas curvaturas que cumplen unas propiedades deseadas a la hora de modelizar la ETTI, las cuales son descritas por Anderson y Sleath (2001). Estas propiedades son la suavidad, la flexibilidad y la estabilidad de la curva. La suavidad alude a la existencia de una curvatura bien definida, la flexibilidad a que la función sea capaz de recoger de la mejor manera posible información para los diferentes vencimientos y estabilidad se refiere a que pequeñas variaciones en el rendimiento a un vencimiento determinado no afecten significativamente a toda la curva y que no haya cambios bruscos a lo largo de la curva. En la Figura 20, podemos ver que los tres modelos cumplen dichas propiedades ya que generan curvas suaves que parecen ajustarse a las observaciones del mercado. No obstante, la ETTI del 01/03/2015 parece ajustarse mejor a los rendimientos observados que la del 01/03/1995. Por último, puede notarse que no hay cambios bruscos en ninguna de las curvas.

Observamos además, que las ETTIs generadas en ambas fechas por todos los modelos, así como las observadas son crecientes, este comportamiento es el esperado en un mercado de negociación de bonos toda vez que realizar inversiones a un plazo mayor implica asumir

mayores riesgos, tales como una posible insolvencia o banca rota del emisor que le impida cumplir sus obligaciones en el largo plazo. De este modo, los inversionistas sólo estarán dispuestos a exponer su capital a mayores riesgos a cambio de rendimientos adicionales.



**Figura 20.** Rendimientos observados en el mercado y ETTIs obtenidas con los modelos determinista, de Vasicek y de CIR para los días 01/03/2015 y 01/03/1995. *Fuente: Elaboración propia.*

#### 5.4. Valoración de una cartera a partir de la ETTI estimada

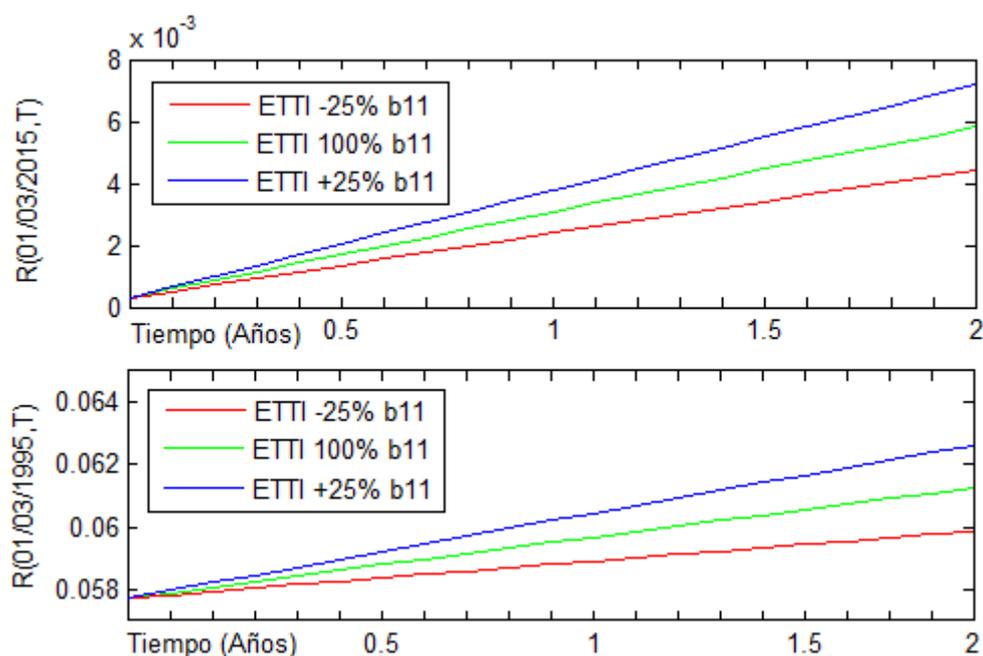
Es de resaltar que las ETTIs obtenidas con cada uno de los modelos cumplen una serie de propiedades desde el punto de vista de la Teoría Financiera demostradas en el Capítulo 3, entre las cuales podemos destacar la imposibilidad de oportunidades de arbitraje así como el permitir que el precio de un bono cupón cero de valor nominal 1 u.m alcance el valor de 1 u.m. en su fecha de vencimiento. Estas propiedades son las que permiten que los inversionistas usen dicha curva de expectativas para valorar o estimar el precio de diferentes activos financieros de tipos de interés y carteras de inversión. A la hora de valorar una cartera de bonos, en primer lugar,

debemos estimar el precio de los bonos que forman dicha cartera. Así pues, para analizar la sensibilidad de la cartera, debemos estudiar la sensibilidad en los precios de los bonos.

En esta sección, estimamos el precio de un bono cupón cero, que vence a los plazos analizados (6 meses, 1 año y 2 años) usando la ETTI generada por cada modelo y complementaremos el análisis estimando cuál sería el beneficio o pérdida que tendría un inversor de darse un cambio en cada uno de los parámetros de los modelos del 25%, siempre que todos los demás parámetros permanezcan constantes. Para ello, suponemos, como ejemplo, la existencia de un inversor con una cartera compuesta por la compra de 3 tipos de bonos del Tesoro de Estados Unidos, cada uno de ellos con un vencimiento distinto (6 meses, 1 año y 2 años), y que el valor invertido en cada tipo de bono es de 1 millón de unidades monetarias.

En la Sección 5.2, hemos analizado cómo un cambio en uno de los parámetros de los modelos modifica las estimaciones de los rendimientos históricos a cada uno de los vencimientos estudiados. A continuación, describimos cómo estos cambios en los rendimientos generan a su vez un impacto sobre el precio de los bonos cupón cero con vencimientos a 6 meses, 1 año y 2 años, en dos instantes de tiempo: un primer instante de tiempo con un tipo de interés instantáneo muy bajo, del 0.03%, que corresponde al 01/03/2015, y otro instante de tiempo con un tipo de interés más alto, 5.77%, para el día 01/03/1995.

La Figura 21, muestra, cómo cambia la ETTI estimada con el modelo determinista para los días 01/03/2015 (parte superior) y 01/03/1995 (parte inferior) si el parámetro  $b_{11}$  se incrementa o se reduce en un 25%. En ambas fechas observamos el mismo comportamiento, un aumento del parámetro  $b_{11}$  supone que la curva se desplace hacia arriba y una disminución que la curva se desplace hacia abajo. Siendo la magnitud de los desplazamientos igual en ambos casos, como se indica en la Sección 5.2.1. Por tanto, los tipos de interés más pequeños, el 01/03/2015, experimentan mayores variaciones en términos relativos.



**Figura 21.** ETTIs de los días 01/03/2015 y 01/03/1995 obtenidas mediante el modelo determinista. Fuente: *Elaboración propia.*

A continuación, mostramos con más detalle, la magnitud de la sensibilidad de la ETTI ante cambios en los diferentes parámetros de los modelos. En la Tabla 10, mostramos los rendimientos estimados con cada modelo para cada vencimiento el día 01/03/2015 (véase columna 100%) y, además, en caso de que cada uno de los parámetros aumente o disminuya un 25% (véase columnas +25% y -25% respectivamente) mientras todos los demás parámetros permanecen constantes. La sensibilidad de los rendimientos ante una variación en cada uno de los parámetros es coherente con los comentarios realizados en la Sección 5.2.

Modelo	Vencimiento	Sensibilidad $b_{11}$			Sensibilidad $b_{21}$					
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%
Modelo Determinista	6 meses	0.1351%	0.1702%	0.2053%	0.1353%	0.1702%	0.2049%			
	1 año	0.2389%	0.3087%	0.3785%	0.2396%	0.3087%	0.3774%			
	2 años	0.4430%	0.5809%	0.7189%	0.4456%	0.5809%	0.7147%			
Modelo Vasicek	Vencimiento	Sensibilidad $b_{12}$			Sensibilidad $b_{22}$			Sensibilidad $b_{23}$		
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%
Modelo Vasicek	6 meses	0.1437%	0.1682%	0.1926%	0.1262%	0.1682%	0.2150%	0.1580%	0.1682%	0.1784%
	1 año	0.2553%	0.3038%	0.3524%	0.2211%	0.3038%	0.3955%	0.2838%	0.3038%	0.3238%
	2 años	0.4717%	0.5677%	0.6637%	0.4075%	0.5677%	0.7437%	0.5290%	0.5677%	0.6064%
Modelo CIR	Vencimiento	Sensibilidad $b_{13}$			Sensibilidad $b_{23}$			Sensibilidad $b_{33}$		
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%
Modelo CIR	6 meses	0.1152%	0.1436%	0.1721%	0.1276%	0.1436%	0.1514%	0.0987%	0.1436%	0.1886%
	1 año	0.2005%	0.2574%	0.3142%	0.2254%	0.2574%	0.2728%	0.1674%	0.2574%	0.3475%
	2 años	0.3714%	0.4851%	0.5989%	0.4214%	0.4851%	0.5157%	0.3048%	0.4851%	0.6660%

**Tabla 10.** Sensibilidad del rendimiento al vencimiento (6 meses, 1 y 2 años) ante cambios de un 25% en cada parámetro de todos los modelos, el día 01/03/2015. *Fuente: Elaboración propia.*

La Tabla 11 muestra los rendimientos estimados con cada modelo para cada uno de los vencimientos considerados el día 01/03/1995 y sus variaciones en caso de que cada uno de los parámetros aumente o disminuya un 25%, mientras todos los demás parámetros permanecen constantes. El comportamiento de los rendimientos es análogo al mostrado en la Tabla 10, con la diferencia de que los niveles de tipos de interés son mayores.

Modelo	Vencimiento	Sensibilidad $b_{11}$			Sensibilidad $b_{21}$					
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%
Modelo Determinista	6 meses	5.8263%	5.8614%	5.8965%	5.8390%	5.8614%	5.8837%			
	1 año	5.8805%	5.9503%	6.0201%	5.9060%	5.9503%	5.9944%			
	2 años	5.9871%	6.1251%	6.2631%	6.0382%	6.1251%	6.2109%			
Modelo Vasicek	Vencimiento	Sensibilidad $b_{12}$			Sensibilidad $b_{22}$			Sensibilidad $b_{23}$		
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%
Modelo Vasicek	6 meses	5.8355%	5.8599%	5.8843%	5.8303%	5.8599%	5.8944%	5.8497%	5.8599%	5.8701%
	1 año	5.8979%	5.9465%	5.9950%	5.8883%	5.9465%	6.0138%	5.9264%	5.9465%	5.9665%
	2 años	6.0179%	6.1139%	6.2099%	6.0016%	6.1139%	6.2424%	6.0752%	6.1139%	6.1526%
Modelo CIR	Vencimiento	Sensibilidad $b_{13}$			Sensibilidad $b_{23}$			Sensibilidad $b_{33}$		
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%
Modelo CIR	6 meses	5.8603%	5.8887%	5.9171%	5.8752%	5.8887%	5.8939%	5.8403%	5.8887%	5.9371%
	1 año	5.9492%	6.0061%	6.0629%	5.9792%	6.0061%	6.0165%	5.9092%	6.0061%	6.1031%
	2 años	6.1273%	6.2410%	6.3548%	6.1874%	6.2410%	6.2615%	6.0470%	6.2410%	6.4356%

**Tabla 11.** Sensibilidad del rendimiento al vencimiento (6 meses, 1 y 2 años) ante cambios de un 25% en cada parámetro de todos los modelos, el día 01/03/1995. *Fuente: Elaboración propia.*

A continuación, describimos en qué medida afecta a la valoración de los bonos cupón cero una posible modificación de alguno de los parámetros del modelo considerado, es decir, la sensibilidad de los precios de los bonos cupón cero a los parámetros de los diferentes modelos.

Para calcular el precio de un bono cupón cero para cada vencimiento con cada uno de los modelos, usamos la expresión (2.3), donde  $T - t = 6$  meses, 1 año y 2 años.  $R(t, T)$  es el rendimiento al vencimiento mostrado en las Tablas 10 y 11 para los días 01/03/2015 y 01/03/1995, respectivamente.

En la Tabla 12, mostramos el precio calculado el día 01/03/2015 para cada bono utilizando cada uno de los modelos, véase columna 100%. Además, mostramos el precio en caso de que uno de los parámetros varíe un 25% y los demás permanezcan constantes para cada uno de los modelos considerados y para cada vencimiento, véase columnas +25% y -25%.

En la Tabla 10, observamos que un aumento en cualquiera de los parámetros generaba un aumento del rendimiento al vencimiento. Dicho aumento en el rendimiento se traduce en un menor precio del bono cupón cero, véase la Tabla 12. Esto es debido a que el tanto al que se actualiza (rendimiento al vencimiento) el precio de amortización del bono (1 u.m) es mayor. Por otra parte, una disminución en alguno de los parámetros genera que el rendimiento al vencimiento estimado se reduzca, véase la Tabla 10. Por lo tanto, el precio del bono cupón cero aumenta pues el tanto al que se actualiza el precio de amortización es menor. Además, vemos que para un mismo modelo, el precio del bono es menor cuanto mayor es el vencimiento.

En todos los modelos, el cambio que se genera en el precio al aumentar o disminuir el valor de uno de los parámetros es mayor cuanto mayor es el vencimiento estudiado. En el caso del modelo determinista, la sensibilidad del precio de los bonos para cada vencimiento ante cambios del parámetro  $b_{11}$  es muy similar a la obtenida ante cambios del parámetro  $b_{21}$ , ya que la diferencia de los precios generados para el mismo vencimiento por un aumento o disminución del 25% del parámetro  $b_{11}$  no es mayor de un punto básico con respecto a los precios resultantes de un aumento o disminución del parámetro  $b_{21}$  para los mismos vencimientos.

En el modelo de Vasicek, el precio de los bonos cupón cero para cualquier vencimiento es más sensible a cambios en el parámetro  $b_{22}$ , seguido por el parámetro  $b_{12}$ , siendo el parámetro  $b_{32}$  aquél cuyos cambios generan menores variaciones sobre los precios.

Por último, en el modelo de CIR el precio de los bonos cupón cero a cualquier vencimiento es más sensible a cambios en el parámetro  $b_{33}$ , seguido por el parámetro  $b_{13}$ . Por su parte, el parámetro  $b_{23}$  es el que menos impacto tiene sobre el cambio en precios de los bonos cupón cero para los diferentes vencimientos.

No hay que olvidar que cambios en el precio de los bonos cupón cero afectan directamente al valor de la cartera de inversión compuesta por dichos bonos. Esto implica que el valor de la cartera también es sensible ante cambios en cualquiera de los parámetros de los modelos estudiados.

Modelo	Vencimiento	Sensibilidad $b_{11}$			Sensibilidad $b_{21}$					
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%			
Modelo Determinista	6 meses	0.9993	0.9991	0.9990	0.9993	0.9991	0.9990			
	1 año	0.9976	0.9969	0.9962	0.9976	0.9969	0.9962			
	2 años	0.9912	0.9884	0.9857	0.9911	0.9884	0.9858			
Modelo Vasicek	Vencimiento	Sensibilidad $b_{12}$			Sensibilidad $b_{22}$			Sensibilidad $b_{23}$		
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%
Modelo Vasicek	6 meses	0.9993	0.9992	0.9990	0.9994	0.9992	0.9989	0.9992	0.9992	0.9991
	1 año	0.9975	0.9970	0.9965	0.9978	0.9970	0.9961	0.9972	0.9970	0.9968
	2 años	0.9906	0.9887	0.9868	0.9919	0.9887	0.9852	0.9895	0.9887	0.9879
Modelo CIR	Vencimiento	Sensibilidad $b_{13}$			Sensibilidad $b_{23}$			Sensibilidad $b_{33}$		
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%
Modelo CIR	6 meses	0.9994	0.9993	0.9991	0.9994	0.9993	0.9992	0.9995	0.9993	0.9991
	1 año	0.9980	0.9974	0.9969	0.9977	0.9974	0.9973	0.9983	0.9974	0.9965
	2 años	0.9926	0.9903	0.9881	0.9916	0.9903	0.9897	0.9939	0.9903	0.9868

**Tabla 12.** Sensibilidad de los precios de los bonos cupón cero para vencimientos a 6 meses, 1 y 2 años ante cambios de un 25% de cada uno de los parámetros para todos los modelos el día 01/03/2015. Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 13 muestra el precio calculado para los bonos utilizando cada uno de los modelos considerados el día 01/03/1995. Las conclusiones a las que llegamos son similares a las obtenidas para los precios de los bonos cupón cero el día 01/03/2015, aunque en algunas ocasiones la magnitud en la que varían los precios de los bonos es ligeramente mayor en la fecha en la que los tipos de interés son menores, es decir, el 01/03/2015. Esto se debe a que la expresión para calcular el precio del bono, véase (2.3), es exponencial<sup>17</sup>. Con lo cual, el precio de los bonos es más sensible ante cambios en cualquiera de los parámetros de los modelos, y con ello en los rendimientos, cuando los tipos de interés son bajos.

Modelo	Vencimiento	Sensibilidad $b_{11}$			Sensibilidad $b_{21}$					
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%			
Modelo Determinista	6 meses	0.9713	0.9711	0.9709	0.9712	0.9711	0.9710			
	1 año	0.9429	0.9422	0.9416	0.9427	0.9422	0.9418			
	2 años	0.8871	0.8847	0.8823	0.8862	0.8847	0.8832			
Modelo Vasicek	Vencimiento	Sensibilidad $b_{12}$			Sensibilidad $b_{22}$			Sensibilidad $b_{23}$		
		-25%	100%	+25%	+25%	100%	-25%	-25%	100%	+25%
Modelo Vasicek	6 meses	0.9712	0.9711	0.9710	0.9713	0.9711	0.9710	0.9712	0.9711	0.9711
	1 año	0.9427	0.9423	0.9418	0.9428	0.9423	0.9416	0.9425	0.9423	0.9421
	2 años	0.8866	0.8849	0.8832	0.8869	0.8849	0.8826	0.8856	0.8849	0.8842
Modelo CIR	Vencimiento	Sensibilidad $b_{13}$			Sensibilidad $b_{23}$			Sensibilidad $b_{33}$		
		-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%	-25%	100%	+25%
Modelo CIR	6 meses	0.9711	0.9710	0.9708	0.9711	0.9710	0.9710	0.9712	0.9710	0.9708
	1 año	0.9422	0.9417	0.9412	0.9420	0.9417	0.9416	0.9426	0.9417	0.9408
	2 años	0.8847	0.8827	0.8806	0.8836	0.8827	0.8823	0.8861	0.8827	0.8792

**Tabla 13.** Sensibilidad de los precios de los bonos cupón cero para vencimientos a 6 meses, 1 año y 2 años ante cambios de un 25% de cada uno de los parámetros para todos los modelos el día 01/03/1995. Fuente: Elaboración propia.

<sup>17</sup> La función  $P(t, T) = e^{-(T-t)R(t, T)}$  es exponencial y disminuye ante incrementos en  $R(t, T)$ . No obstante, ante continuos incrementos iguales en  $R(t, T)$  la función  $P(t, T)$  va decreciendo pero cada vez en menor magnitud.

Finalmente, evaluamos cuál sería el beneficio o pérdida que tendría el inversor de modificarse uno de los parámetros del modelo en un 25%, para un inversor que tiene una cartera compuesta por la compra de 1 millón de unidades monetarias de un bono de cada vencimiento (6 meses, 1 año y 2 años). Por tanto, la inversión total equivale a 3 millones de unidades monetarias.

En las Tablas 14 y 15 mostramos el análisis de sensibilidad para esta cartera para los días 01/03/2015 y 01/03/1995, respectivamente. Como era de esperar, el mismo comportamiento que observamos en la sensibilidad para el precio del bono se refleja también en la cartera de inversión en las dos fechas consideradas. Cabe destacar que una disminución del 25% en alguno de los parámetros  $b_{11}$ ,  $b_{21}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{32}$ ,  $b_{13}$  y  $b_{33}$  sobre sus valores iniciales genera un beneficio en la cartera ligeramente superior a la pérdida soportada si se produjera un aumento del 25% de dichos parámetros. En el caso de un decremento del 25% del parámetro  $b_{23}$ , el beneficio sigue siendo superior a la pérdida soportada si el valor del parámetro cayera un 25%, pero en este caso las cuantías son considerablemente diferentes entre sí. Por último, el valor de la cartera es considerablemente más sensible ante un incremento que ante una caída del parámetro  $b_{22}$ .

Modelo Determinista	Vencimiento	Sensibilidad $b_{11}$		Sensibilidad $b_{21}$			
		-25%	+25%	-25%	+25%		
	6 meses	175	-175	174	-174		
	1 año	696	-696	689	-684		
	2 años	2732	-2724	2679	-2641		
	Beneficio o pérdida	3603	-3595	3542	-3499		
Modelo Vasicek	Vencimiento	Sensibilidad $b_{12}$		Sensibilidad $b_{22}$		Sensibilidad $b_{32}$	
		-25%	+25%	-25%	+25%	-25%	+25%
	6 meses	122	-122	210	-234	51	-51
	1 año	484	-484	824	-914	200	-200
	2 años	1900	-1896	3175	-3473	765	-765
	Beneficio o pérdida	2506	-2502	4209	-4621	1016	-1015
Modelo CIR	Vencimiento	Sensibilidad $b_{13}$		Sensibilidad $b_{23}$		Sensibilidad $b_{33}$	
		-25%	+25%	-25%	+25%	-25%	+25%
	6 meses	142	-142	80	-39	225	-225
	1 año	567	-567	319	-154	898	-898
	2 años	2256	-2251	1263	-606	3578	-3576
	Beneficio o pérdida	2965	-2959	1662	-798	4700	-4699

**Tabla 14.** Beneficio o pérdida el día 01/03/2015 de una cartera consistente en una inversión de 1 millón de unidades monetarias en cada bono (6 meses, 1 año y 2 años) ante cambios de un 25% de cada uno de los parámetros de todos los modelos. Valor inicial de la cartera 3 millones de unidades monetarias. *Fuente: Elaboración propia.*

Si comparamos las Tablas 14 y 15 entre sí, observamos que los beneficios o pérdidas experimentadas por la cartera anteriormente descrita ante variaciones del 25% de cualquiera de los parámetros son mayores el día 01/03/2015 que el día 01/03/1995. Por tanto, la cartera

valorada con cualquiera de los modelos estudiados es más sensible a los cambios de alguno de sus parámetros cuanto menores sean los niveles de los tipos de interés.

Modelo	Vencimiento	Sensibilidad $b_{11}$		Sensibilidad $b_{21}$			
		-25%	+25%	-25%	+25%	-25%	+25%
Modelo Determinista	6 meses	170	-170	109	-108		
	1 año	658	-657	418	-415		
	2 años	2445	-2438	1538	-1518		
	Beneficio o pérdida	3273	-3266	2065	-2041		
Modelo Vasicek	Vencimiento	Sensibilidad $b_{12}$		Sensibilidad $b_{22}$		Sensibilidad $b_{32}$	
		-25%	+25%	-25%	+25%	-25%	+25%
Modelo Vasicek	6 meses	119	-119	144	-167	49	-49
	1 año	458	-457	548	-635	189	-189
	2 años	1701	-1697	1990	-2272	685	-685
	Beneficio o pérdida	2277	-2273	2682	-3074	923	-923
Modelo CIR	Vencimiento	Sensibilidad $b_{13}$		Sensibilidad $b_{23}$		Sensibilidad $b_{33}$	
		-25%	+25%	-25%	+25%	-25%	+25%
Modelo CIR	6 meses	138	-138	65	-25	235	-235
	1 año	535	-535	253	-98	912	-913
	2 años	2011	-2006	946	-362	3431	-3429
	Beneficio o pérdida	2684	-2679	1265	-485	4578	-4577

**Tabla 15.** Beneficio o pérdida el día 01/03/1995 de una cartera consistente en una inversión de 1 millón de unidades monetarias en cada bono (6 meses, 1 año y 2 años) ante cambios de un 25% de cada uno de los parámetros de todos los modelos. Valor inicial de la cartera 3 millones de unidades monetarias. *Fuente: Elaboración propia.*

## 6. CONCLUSIONES

La ETTI es un tema de elevado interés tanto para profesionales del mercado financiero como para investigadores y académicos debido a su elevado número de aplicaciones. En este trabajo nos centramos únicamente en su aplicación a la valoración de activos financieros.

Desafortunadamente la ETTI no es observable directamente en los mercados, por tanto, su obtención requiere, en general, un proceso de estimación. En la literatura existen numerosos enfoques y modelos que se ocupan de su estimación, sin embargo, no existe ningún consenso sobre cuál puede ser el más indicado.

En este trabajo realizamos una revisión de los conceptos básicos necesarios para modelizar la ETTI y recogemos algunos de los modelos más conocidos que existen en la literatura para su modelización: el modelo determinista, el de Vasicek y el de CIR. Además realizamos una aplicación empírica utilizando datos de la Reserva Federal de Estados Unidos desde enero de 1995 hasta marzo de 2015 y comparamos las curvas observadas con las estimadas con los diferentes modelos. Finalmente realizamos un análisis de sensibilidad de los parámetros de los diferentes modelos y analizamos los cambios que supone una variación de alguno de los parámetros sobre la ETTI, el precio de los bonos cupón cero y el valor de una cartera de inversión.

Después de realizar la estimación de las ETTIs utilizando cada uno de los modelos objeto de estudio, obtenemos varias conclusiones que mencionamos a continuación. En primer lugar, observamos que, las ETTIs estimadas con los diferentes modelos analizados son crecientes, continuas, suaves, flexibles y estables, las cuáles son propiedades deseables para estas curvas, véase Anderson y Sleath (2001). En segundo lugar, observamos que los modelos unifactoriales son más adecuados para modelizar rendimientos a 6 meses, seguidos en orden consecutivo de los rendimientos a 1 año y 2 años. Por tanto, la efectividad de estos modelos para estimar rendimientos al vencimiento va disminuyendo a medida que aumenta el vencimiento del rendimiento modelizado. Estos resultados son consistentes con los existentes en la literatura, véase Moreno (2000), quien encuentra que los modelos unifactoriales no son adecuados para modelizar rendimientos a largo plazo. Finalmente, observamos que el modelo de CIR sería el más adecuado para modelizar la ETTI, con los datos escogidos, ya que en dos de los tres rendimientos modelizados (a 6 meses y 1 año) el error cometido en la estimación medido en términos de RMSE y MAE es menor que el cometido por los otros dos modelos. Además, debemos añadir que el modelo de CIR es más realista a la hora de modelizar los tipos de interés ya que, en contraste con el modelo determinista y de Vasicek, no permite tipos de interés negativos.

Por otro lado, el análisis de sensibilidad ante variaciones de los parámetros es de gran utilidad ya que al aparecer nuevas observaciones, éstas pueden incluirse en el modelo generando una reestimación de los parámetros. Esta nueva estimación genera cambios en los rendimientos que a su vez modifican el precio de los bonos cupón cero y, con ello, el valor de carteras de inversión compuestas por bonos (ya que una de las aplicaciones directas de la ETTI es la valoración de activos financieros) generando un beneficio o pérdida por valoración para el inversor que debe

ser contabilizado. Este análisis permite identificar el riesgo de que el valor de una cartera disminuya considerablemente ante el cambio de las expectativas de los agentes del mercado.

Las principales conclusiones del análisis de sensibilidad realizado en este trabajo se mencionan a continuación. En primer lugar, para todos los modelos estimados, la sensibilidad de los rendimientos estimados ante el cambio de uno de los parámetros del modelo aumenta a medida que crece el vencimiento de los rendimientos estimados. Además, encontramos que un incremento de cualquiera de los parámetros implica que los rendimientos estimados para los tres vencimientos estudiados aumenten. Mientras que una disminución en cualquiera de los parámetros genera que los rendimientos estimados a cada vencimiento disminuyan. En este sentido, un incremento en cualquiera de los parámetros genera un mayor rendimiento para cualquier vencimiento. Dicho acrecentamiento, se traduce en un menor precio del bono cupón cero y esto, a su vez, en una pérdida de valor de una cartera que contenga dicho bono, debido a que el tanto al que se actualiza el precio de amortización del bono es mayor. Por otra parte, una disminución en alguno de los parámetros genera que el rendimiento al vencimiento estimado se reduzca. Por tanto, el precio del bono cupón cero así como el valor de una cartera que contenga este bono se acrecientan pues el tanto al que se actualiza el precio de amortización es menor. Finalmente, observamos que cuanto menores sean los niveles de los tipos de interés, el valor de una cartera de inversión compuesta por bonos cupón cero es más sensible ante cambios de alguno de los parámetros para cualquiera de los modelos estudiados.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Abad, P. y Robles, M. (2003): "Estructura temporal de los tipos de interés: Teoría y evidencia empírica". *Revista Asturiana de Economía*, Nº 27, pp. 7-47.
- [2] Andersen, T., Benzoni, L. y Lund, J. (2004): *Stochastic Volatility, Mean Drift and Jumps in the Short-Term Interest Rate*. Northwestern University. Illinois.
- [3] Andersen, T. y Lund, J. (1997): "Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate". *Journal of Econometrics*, Nº 77, pp. 343-377.
- [4] Anderson, N. y Sleath, J. (2001): *New Estimates of the UK Real and Nominal Yield Curves*. Bank of England. Londres.
- [5] Bandi, F. (2002): "Short-term interest rate dynamics: a spatial approach". *Journal of Financial Economics*, Nº 65, pp. 73–110.
- [6] Black, F. y Scholes, M. (1973): "The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of Political Economy*, Nº 81 (3), pp. 637–654.
- [7] Cairns, A. (2004): *Interest Rate Models*. Ed. Princeton University Press. Princeton.
- [8] Carrero, C. (2011): *Análisis de Técnicas Evolutivas para la Estimación de Tipos de Interés*. Universidad Carlos III de Madrid. Madrid.
- [9] Chan, K., Karolyi, G., Longstaff, F. y Sanders, A. (1992): "An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate". *The Journal of Finance*, Nº 47, pp. 1209-1227.
- [10] Chapman, D., Long, J. y Pearson, N. (1998): *Using Proxies for the Short Rate: When are Three Months Like an Instant?*. University of Illinois at Urbana-Champaign. Illinois.
- [11] Chávez, H. (2010): "La crisis financiera en Estados Unidos", *Revista Virtual Contribuciones a la Economía*. Disponible en: <http://www.eumed.net/ce/2010a/hbc.htm>. [Última consulta: 01-07-2015].
- [12] Cox, J. Ingersoll J. y Ross, S. (1985): "A theory of the term structure of interest rates". *Econometrica*, Nº 53 (2), pp. 385-408.
- [13] Dickey, D. y Fuller, W. (1979): "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root". *Journal of the American Statistical Association*, Nº 74, pp. 427–431.
- [14] Diebold, F. (1999): *Elementos de Pronóstico*. Ed. International Thomson Editores, México D.F.

- [15] Fong, H. y Vasicek, O. (1991): "Fixed income volatility management." *Journal of Portfolio Management*, Summer, pp. 41–46.
- [16] Gómez-Valle, M. (2003): *Nuevos Planteamientos en Modelos Unifactoriales de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés*. UMI 315 6558, ProQuest Learning, Madrid.
- [17] González, C. y Presa, M. (2005): *Matemática Financiera para la Profesión Actuarial*. Ed. Aranzadi. Navarra.
- [18] Hanken J. y Wichern, D. (2005): *Business Forecasting, Eighth Edition*. Ed. Pearson. New Jersey.
- [19] Heath, D. Jarrow, R. y Morton, A. (1992): "Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation". *Econometrica*, Nº 60 (1), pp. 77-105.
- [20] Hong, Y. y Li, H. (2005): "Nonparametric specification testing for continuous-time models with applications to term structure of interest rates". *Review of Financial Studies*, Nº 18 (1), pp. 37–84.
- [21] Itô, K. (1961): *Lectures on Stochastic Processes*. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay.
- [22] Kwok, Y. (2008): *Mathematical Models of Financial Derivatives, Second Edition*. Ed. Springer. Hong Kong.
- [23] Ljung, G. y Box, G. (1978). "On a measure of a lack of fit in time series models". *Biometrika* 65, Nº 2, pp. 297–303.
- [24] Mancini, C. y Renò, R. (2011): "Threshold estimation of Markov models with jumps and interest rate modeling". *Journal of Econometrics*, Nº 36, pp. 77-92.
- [25] Mascareñas, J. (2015): *La Estructura Temporal de los Tipos de Interés*. Universidad Complutense de Madrid. Madrid.
- [26] Merton, R. (1971): "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model". *Journal of Economic Theory*, Nº 3, pp. 373-413.
- [27] Moreno, M. (2000): "Modelización de la estructura temporal de los tipos de interés: valoración de activos derivados y comportamiento empírico". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Nº 104, pp. 345-376.
- [28] Navarro, E. y Nave, J. (2001): *Fundamentos de Matemáticas Financieras*. Ed. Antoni Bosch. Barcelona.

- [29] Nelson, C. and Siegel, A. (1987). "Parsimonious modeling of yield curves for U.S. treasury bills". *Journal of Business*, N° 60 (4), pp. 473-489.
- [30] Nowman, K. (1997): "Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates". *Journal of Financial Economics*, N° 52, pp. 1695–1706.
- [31] Núñez, S. (1995): *Estimación de la Estructura Temporal de Tipos de Interés*. Banco de España. Madrid.
- [32] Oksendal, B. (2005): *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications, Sixth Edition*. Ed. Springer. New York.
- [33] Paseka, A. Koullis T. y Thavaneswaran, A. (2012): "Interest rate models". *Journal of Mathematical Finance*, N° 2, pp. 141-158.
- [34] Ruiz, E. (2005): *Comparación de Curvas de Tipos de Interés. Efectos de la Integración Financiera*. Tesis Doctoral. Universitat Barcelona. Barcelona.
- [35] Said, S. y Dickey D. (1984). "Testing for unit roots in autoregressive moving-average models with unknown order". *Biometrika*, N° 71, pp. 599-607.
- [36] Stanton, R. (1997): "A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk". *The Journal of Finance*, N° 52, pp. 1973-2002.
- [37] Svensson, L. (1994). "Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994". *NBER Working Paper Series*, N° 4871, pp. 1-26.
- [38] Uhlenbeck, G. y Ornstein, L. (1930): "On the theory of Brownian". *Physical Review Letters*, N° 36, pp. 823-841.
- [39] Van Elen, E. (2010): *Term Structure Forecasting*. Tilburg School of Economics and Management. Tilburg.
- [40] Vasicek, O. (1977): "An equilibrium characterization of the term structure". *Journal of Financial Economics*, N° 5, pp. 177-188.
- [41] Vetzal, K. (1997): "Stochastic volatility, movements in short term interest rates, and bond option values". *Journal of Banking and Finance*, N° 21, pp. 169-196.
- [42] Wilmott, P. (2006): *Paul Wilmott on Quantitative Finance, Second Edition*. Ed. John Wiley & Sons Ltd. West Sussex.
- [43] Zagst, R. (2002): *Interest Rate Management*. Ed. Springer Finance. Berlin.