



---

**Universidad de Valladolid**  
**Facultad de Ciencias Económicas**  
**y Empresariales**  
**Grado en Economía**

**Las Subastas como**  
**Método de**  
**Asignación:**  
**Subastas con puja única más**  
**baja**

Presentado por:  
***Lucía Carretero Peñalva***

*Valladolid, 27 de julio de 2015*

# INDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>2</b>
<b>2. LA TEORÍA DE JUEGOS</b> .....	<b>3</b>
2.1 HISTORIA DE LA TEORÍA DE JUEGOS .....	4
2.2 LOS JUEGOS .....	6
2.2.1 Juegos bayesianos .....	10
<b>3. LAS SUBASTAS</b> .....	<b>11</b>
3.1 HISTORIA DE LAS SUBASTAS .....	12
3.2 TIPOS DE SUBASTAS.....	14
3.2.1 Las subastas de una unidad.....	14
3.2.2 Las subastas de múltiples unidades y múltiples pujas .....	17
3.3 TEOREMA DEL INGRESO EQUIVALENTE .....	18
3.4 FUNCIONAMIENTO DE UNA SUBASTA.....	22
<b>4. SUBASTA DE ÚNICA PUJA MÁS BAJA</b> .....	<b>24</b>
4.1 CARACTERÍSTICAS DEL JUEGO .....	28
4.2 DECISIÓN DEL SUBASTADOR .....	30
4.3 DECISIÓN DE LOS LICITANTES .....	30
<b>5. CONCLUSIONES</b> .....	<b>33</b>
<b>6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>34</b>

## 1. INTRODUCCIÓN

La teoría de las subastas ha tenido un importante desarrollo en el último cuarto de siglo, desarrollándose formas nuevas de realizar subastas en la década de los años noventa y consolidando su práctica. Sin embargo, el desarrollo teórico surgió con anterioridad, constituyéndose como una rama dentro de la economía. La teoría de las subastas tiene analogías con la teoría del monopolio a la hora de fijar precios, además de conexiones cercanas a los mercados competitivos.

Existe un elevado volumen de transacciones económicas que son realizadas mediante algún tipo de subasta. Podemos destacar que este hecho ayuda a entender y a analizar los diferentes tipos existentes de subastas que pueden ser aplicados y las diferentes estrategias que pueden aplicar los participantes. Todo ello basado en que la teoría de subastas es uno de los campos de la teoría de juegos de mayor uso práctico.

En la actualidad, han proliferado notablemente las subastas realizadas vía internet, particularmente las subastas de puja única más baja, aquellas en las que nos centramos en este trabajo. Se realizan a través de diferentes páginas web, existiendo con ellas diferentes puntos de vista desde la perspectiva de los consumidores, ya pueden ser vistas como una estafa o como un chollo.

El objetivo de este trabajo es estudiar y comprender más allá de las subastas como las conocemos, de forma general. Por ello, vamos a estudiar las subastas dentro de la teoría de juegos; y posteriormente, explicaremos el funcionamiento de una subasta tradicional, centrándonos en un tipo de subastas, que son las subastas de puja única más baja.

La organización de este trabajo será la siguiente: en primer lugar se realiza una introducción acerca de los que va a tratar en trabajo. En segundo lugar, habrá un apartado que está destinado a la teoría de juegos, con una parte de historia y otra de juegos, siendo esta última en la que se explica los juegos bayesianos.

En tercer lugar, pasamos a ver las subastas, situándolas en el tiempo mediante la historia, se describen los tipos diferentes de subastas, así como se analizan

con el teorema del ingreso equivalente y por último se observa el funcionamiento de una subasta.

En cuarto lugar, hay un apartado destinado a las subastas de única puja más baja, como método original de realizar una subasta, para ello se explican las características que tienen estos juegos y su mecanismo, así como diferentes autores que han tratado sobre este tipo de subastas, y por último unas conclusiones y un ejemplo de este tipo de subastas de única puja más baja.

Finalmente se concluye el trabajo con un apartado dedicado a las conclusiones. En él se plantean unas conclusiones sacadas de todo el estudio llevado a cabo para su realización; y en el apartado sexto, las referencias bibliográficas.

## **2. LA TEORÍA DE JUEGOS**

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que se encarga de analizar las interacciones entre individuos que toman decisiones en un marco de estímulos determinados, que serían los juegos; se trata por lo tanto, de una herramienta que ayuda a analizar problemas de optimización interactiva. En la actualidad se utiliza en muchos campos, no solo en la economía, sino en filosofía, biología... En la teoría de decisión se observa como un decisor elige una acción concreta entre un conjunto de acciones posibles, tenemos por tanto en esta teoría del decisor: un agente decisor, el conjunto de acciones disponibles, el conjunto de estados de la naturaleza y los resultados obtenidos.

La teoría de juegos está relacionada con la estadística y su objetivo es analizar el comportamiento de los jugadores en las decisiones y establecer los papeles de conducta racional. Un comportamiento es estratégico cuando se tiene en cuenta la influencia en conjunto del resultado del jugador y del resto, en las decisiones; pues bien, la definición de estrategia sería una especificación de una acción que realiza un jugador del juego en cada caso. La principal aplicación de la teoría de juegos, es en la economía, al encontrar estrategias de forma racional en situaciones y juegos que dependen del propio jugador y de las estrategias del resto; aun teniendo objetivos diferentes.

Cada jugador intenta conseguir el mejor resultado posible y esto se consigue maximizando la utilidad individual, pero hay que tener en cuenta que el resultado del juego no sólo depende de las acciones del jugador sino también depende de las acciones de los demás jugadores.

## 2.1 HISTORIA DE LA TEORÍA DE JUEGOS

Aunque se puede considerar que hay aportaciones anteriores se admite la primera vez que apareció una discusión de la teoría de juegos fue en 1713, a manos de James Waldegrave, en una carta en la cual elaboraba una solución minimax de estrategia mixta para un juego de cartas de dos personas.

Fue un siglo después, cuando se obtuvo la primera publicación en este ámbito con Antoine Augustin Cournot, en 1838, con su libro "*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*", en él, habla de su teoría duopolio y presenta lo que sería la primera versión del equilibrio de Nash.

La teoría de juegos nace en torno a 1913 como tal, con Ernts Zermelo y sus diversos trabajos acerca de diferentes tipos de juegos, entre ellos el ajedrez, en el cual demostró que es resoluble. En la década de los años veinte, Emile Borel y John Von Neumann estudiaron equilibrios de tipo minimax en los juegos de suma cero, que posteriormente publicaron en diversos artículos.

El gran avance de esta teoría, surge décadas más tarde, en 1944 con la publicación del libro "*Theory of Games and Economic Behavior*" escrito por John Von Neumann y Oskar Morgenstern, donde se escribe por primera vez de los juegos en forma extensiva y formal, además de tratar de encontrar algunas soluciones que fueran óptimas para juegos de suma cero en los que participaban dos personas y la introducción de estrategias para juegos de más de dos individuos.

John Von Neumann, es considerado el padre de la teoría de juegos, su primera aportación en este ámbito fue el teorema del Minimax donde establece la solución para los juegos bipersonales finitos de suma cero. A partir de esta teoría fue extendiéndose en los estudios hasta incluir juegos de información imperfecta, así como juegos de más de dos jugadores, terminando todo ello en

1944, con el libro "*The Theory of Games and Economic Behavior*" que escribió junto a Oskar Morgenstern, en el cual emplearon el método de prueba por primera vez. Fue el primer autor que representó el juego mediante la forma normal, así como de definir el concepto de estrategia de un juego.

En la década de 1950, se desarrollaron fuertemente estas ideas en la Universidad de Princeton, con algunos autores como, Daniel Luce y Howard Raiffa con su libro "*Games and Decisions*", Harold Kuhn introdujo la información en los juegos y Lloyd Shapley estableció el "valor de Shapley" como una solución para juegos cooperativos, en el que para cada participante del juego se le asigna un reparto único de todo el beneficio que genera el juego debido a la coalición del conjunto de jugadores; evitando así la realización de contratos.

John Nash, fue uno de los creadores de la teoría de juegos, escribió la solución de los juegos estratégicos no cooperativos, conocida más adelante como el Teorema de Nash. Posteriormente fue capaz de dar solución al problema de negociación entre dos agentes para lo cual asume que la utilidad era transferible. En los años 50 realizó su mayor aportación a esta teoría de juegos, el Equilibrio de Nash, entendido como el equilibrio general en todos los juegos finitos para un número cualquiera de jugadores, así como de preferencias. Este equilibrio es definido como un conjunto de estrategias, una para cada jugador que haya en el juego, de tal manera que el pago que recibe cada uno de ellos por realizar esa serie de estrategias es mayor o igual que el pago que podría conseguir ese mismo jugador si escogiera otra combinación posible. Los trabajos de Nash suponen que todos los jugadores son racionales y que la información del juego es de dominio público, de esta manera cada jugador puede calcular sus pagos esperados de cada una de las estrategias de sus rivales en el juego y calcular su estrategia óptima; mecanismo por el que ha sido utilizado en algunas ciencias para entender los procesos evolucionistas y los principios de selección natural entre las especies. Además de todo ello, Nash aportó nuevas contribuciones a la teoría de juegos, como la incorporación de juegos dinámicos o la consideración de juegos de información incompleta o también conocidos como juegos bayesianos.

En 1967, el autor, John Harsanyi, extendió la teoría de juegos, a juegos de información incompleta, desarrollando el análisis de estos juegos donde los jugadores no conocen a la perfección las características del juego. Este autor junto con Reinhard Selten y John Forbes Nash fueron ganadores del Nobel de Economía en el año 1994.

En los años 70, de la mano de Reinhard Selten, apareció el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos de información completa y avanzó mucho en el campo de juegos de información incompleta; todo ello para dar solución al problema de multiplicidad de equilibrios de Nash debido a que no eran buenas soluciones a algunos juegos.

En la actualidad, la teoría de juegos sigue presente con autores como Thomas Schelling y Robert Aumann que en el año 2005 recibieron el premio Nobel con el estudio de casos prácticos sencillos y con ello vieron que se puede llegar a tomar una decisión política o económica importante. Dos años más tarde, en 2007, fueron galardonados Hurwicz y sus discípulos, Eric S. Maskin y Roger B. Myerson, con el estudio de "sentar las bases de la teoría del diseño de mecanismos". El último premio Nobel de economía relacionado con trabajos en teoría de juegos, ha sido otorgado en el año 2012 a los autores Alvin E. Roth y Lloyd Shapley.

## 2.2 LOS JUEGOS

En un juego cada jugador intenta alcanzar el mejor resultado posible y con ello, maximizar su utilidad, por lo tanto en los juegos se toman las decisiones más apropiadas para poder ganar, cumpliendo las normas del juego y teniendo en cuenta las decisiones del resto de los jugadores.

Los principales elementos a tener en cuenta en un juego son:

- **Jugadores.** Son los participantes del juego, aquellos que toman las decisiones para poder conseguir la maximización de su utilidad.  
 $J = (0, 1, 2, \dots, n)$

- **Acciones de cada jugador.** Son las distintas decisiones que cada jugador puede tomar en el momento del juego, estas pueden ser finitas o infinitas.
- **Resultado del juego.** Son las diferentes maneras que puede terminar el juego, ligado a ello existen una serie de consecuencias.
- **Función de pagos.** Cada jugador recibe al concluir el juego un pago dependiendo del resultado obtenido en él, este pago está relacionado con la utilidad que le reporte al jugador ese resultado.
- **Estrategias.** Son los diferentes planes contingentes que sigue un jugador al realizar sus acciones para poder participar en el juego; se agrupan en perfiles de estrategias.

En todo juego es necesario que los jugadores puedan maximizar su utilidad, la forma más fácil de realizarlo es mediante funciones de utilidad ya que representan las preferencias de los jugadores a través de curvas de indiferencia, que pueden ser medidas de forma cardinal u ordinal. En nuestro caso, la que más nos interesa es la utilidad de Von Neumann-Morgenstern, que permite definir las preferencias de un agente, se denomina Utilidad Esperada<sup>1</sup> y su objetivo es demostrar que existe una forma racional de asignar números de utilidad a todos los premios disponibles; además con ella se desarrolla el enfoque para modelar el riesgo.

Si sobre el espacio de todas las acciones posibles o espacio de loterías hay una relación de preferencia racional que permita cumplir el axioma de continuidad y de independencia, existirá una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstein.

---

<sup>1</sup> La utilidad esperada surge a partir de Bernoulli en el siglo XVIII, donde enuncia que a los jugadores les interesa la utilidad del juego y no el premio obtenido. Una función de utilidad de Bernoulli es cóncava si su segunda derivada es negativa  $U''(x) < 0$  y una función es convexa si su segunda derivada positiva  $U''(x) > 0$ .

$$U(\pi_1 c_1 + \pi_2 c_2 + \dots + \pi_s c_s) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2) + \dots + \pi_s u(c_s)$$

$$U\left(\sum_{s=1}^S \pi_s c_s\right) = \sum_{s=1}^S \pi_s U(c_s)$$

La actitud frente al riesgo de los compradores puede ser neutral, aversa o amante del riesgo. Esto se determina comparando la utilidad del valor esperado con la utilidad esperada de la lotería, un agente es averso al riesgo cuando le desagrada el riesgo, es decir si el premio cierto es mejor que el valor esperado. En cambio, un agente amante del riesgo es aquel que prefiere ganar un premio más bajo aunque el riesgo sea mayor en el juego, y si es indiferente entre el valor esperado y la utilidad esperada se trata de un agente neutral al riesgo.

Estas tres actitudes pueden identificarse con la curvatura de la función de utilidad:

- Si el jugador es neutral al riesgo tienen funciones de utilidad lineales porque representan directamente las ganancias como utilidades.
- Si el jugador es amante al riesgo tiene una función de utilidad convexa.
- Si el jugador es averso al riesgo tiene su función de utilidad cóncava.

Los juegos normalmente se desarrollan según unas reglas fijadas con anterioridad, no existe ninguna clasificación universal de ellos, aunque sí que podemos analizar diferentes criterios como son los siguientes:

- Información disponible; información completa o información incompleta.
- Relaciones de los jugadores; no cooperativos o cooperativos.
- Acciones de los jugadores; estáticos y dinámicos.
- Número de jugadores; un jugador, dos jugadores o n-personales.
- Número de estrategias; finitos o infinitos.
- Tipo de pago; juegos de suma cero o juegos de suma no nula.

Podemos hacer una división de todos ellos, de la siguiente manera: **juegos cooperativos**, aquellos en los cuales todos los jugadores llegan a un acuerdo

para elegir las decisiones, en ellos por tanto, se trata de analizar los resultados obtenidos en cada una de las coaliciones que se pueden formar con los diferentes jugadores y ver su forma de actuar en los diferentes grupos formados; y **juegos no cooperativos**, aquellos en los cuales cada jugador elige su estrategia sin acuerdo entre todos los jugadores. Dentro de estos últimos, juegos no cooperativos, podemos hacer dos divisiones mas; por un lado están los juegos estáticos en los cuales los jugadores toman las decisiones de forma paralela sin conocer las decisiones del resto de jugadores y los juegos dinámicos, en los que se puede dar el caso de que algún jugador conozca las decisiones del resto de jugadores.

Existen dos formas de representar un juego no cooperativo, bien sea mediante la forma normal, especificando para cada jugador sus espacios de estrategias y sus funciones de pago, o bien mediante la forma extensiva, donde resulta necesario especificar el momento exacto en el que tiene que jugar cada jugador, lo que cada uno de los jugadores puede realizar, la información que tiene en cada momento del juego y todas las ganancias que hayan recibido según las combinaciones de estrategias utilizadas.

Atendiendo a la información disponible, podemos diferenciar entre juegos con información completa y juegos con información incompleta. Los **juegos con información completa** son aquellos en los que todos los jugadores conocen todas las consecuencias de las decisiones tomadas, los elementos fundamentales en este tipo de juegos son: jugadores, estrategias para cada jugador y ganancias o pagos obtenidos. El concepto que más se utiliza como solución en este caso, es el Equilibrio de Nash, definido como un conjunto de estrategias de las que ninguno de los jugadores quiere desviarse, lo que quiere decir, que ningún jugador va a arrepentirse de la decisión que ha tomado, porque todas ellas son óptimas. No quiere decir, que cada jugador alcance con este equilibrio el mejor resultado posible, sino que dentro del conjunto de jugadores y sus decisiones, si es el mejor resultado condicionado en ello. Las aplicaciones más utilizadas para este tipo de juego son; el oligopolio de Cournot para juegos con información completa, el oligopolio de Bertrand, el

duopolio de Stackelberg, el modelo de Leontief o el problema de los bienes comunales, entre otros.

**Juegos con información incompleta**, son aquellos en los que algún jugador es desconocedor de las consecuencias que se obtienen como resultado en el juego, dependiendo de las decisiones tomadas por cada jugador. En este caso aparece la Teoría de la Decisión Bayesiana, ocupándose de cómo un decisor debe elegir una acción entre un conjunto de acciones, aunque el resultado dependa del estado que alcance la naturaleza y no solo de su decisión tomada. Los elementos presentes en este caso son: el decisor, un conjunto de acciones, un conjunto de estados de la naturaleza y los resultados obtenidos. Las aplicaciones más utilizadas para este tipo de juegos son: el duopolio de Cournot para información incompleta, el modelo de Spence de señalización en el mercado laboral y las subastas, entre otros.

### **2.2.1 Juegos bayesianos**

Un juego bayesiano es un juego estático con información incompleta, es decir aquel en el que los jugadores toman sus decisiones a la vez y toda la estructura del juego es de dominio público, excepto los pagos del juego. Fueron introducidos por Harsanyi en el año 1967. Se trata de modelizar situaciones estáticas en las que los jugadores, algunos o todos, tienen también información privada, que hace que las preferencias de estos no solo dependan de las estrategias tomadas por cada uno de ellos, sino también de la información privada que tienen acerca del juego. La información incompleta que caracteriza a estos juegos significa que por lo menos uno de los jugadores no conoce o no está seguro de la información del resto de jugadores.

Los jugadores tienen opiniones al inicio del juego sobre el resto de jugadores, es decir, diferentes distribuciones de probabilidad que pueden ir cambiando a lo largo del juego en función de las diferentes acciones que se han realizado; se puede decir que cambia las preferencias en función de la regla de Bayes.

En este tipo de juegos, se necesita especificar las estrategias, como un plan de actuación completo para hacer frente a todas las eventualidades que puedan aparecer a cada jugador, además de especificar qué estrategia tomaría el jugador si por su naturaleza fuera de otro tipo, las funciones de pago, y las

creencias de cada jugador como la probabilidad de otro jugador con otro tipo diferente.

La solución para este tipo de juegos, es el equilibrio de Nash, donde aparece como una combinación de estrategias cumpliendo la propiedad de que ningún jugador pueda tener algún estímulo personal a desviarse del equilibrio. Harsanyi transformó los juegos de información incompleta en juegos de información imperfecta introduciendo una jugada previa del azar, denominándolo Equilibrio de Nash Bayesiano.

En definitiva, cada jugador recibe una señal con su tipo de jugador en el juego, y donde el conocimiento de esta señal le permitirá calcular las probabilidades del resto de jugadores maximizando así su utilidad esperada.

### **3. LAS SUBASTAS**

Una subasta es un mecanismo de asignación, entendida como una venta en la que se adjudica un objeto, que suelen ser bienes o artículos de valor, a la persona que ofrece la mayor cuantía de dinero por ello. Se puede decir que es eficiente, si los objetos por los cuales los jugadores pujan, son asignados a aquellos que más valoración les habían dado. Puede haber un único producto o un número mayor de unidades, que podrán ser repartidas al mismo ganador o a diferente persona dentro de la misma subasta. También puede definirse como un proceso de compra o venta de un producto basándose en la competencia directa y pública entre todos los participantes.

Se trata de un dispositivo de asignación que cuenta con tres propiedades:

- La regla que estipula quién obtiene el objeto y la cuantía que se paga por él se conoce a posteriori por los jugadores.
- Las asignaciones dependen de las pujas realizadas.
- La identidad de los jugadores no tiene ninguna importancia, suelen ser anónimos.

El desarrollo de las subastas, cuando estamos en el caso de valoración privada, estaría formado por tres pasos, cada comprador tiene una valoración del bien que se va a subastar que solo conoce él, al igual que desconoce la

valoración del resto de jugadores, con esta valoración cada jugador aporta su puja por el bien y finalmente el jugador que gana el juego, recibe el bien y tiene que realizar el pago del precio dependiendo de las normas que tenga el juego.

Se trata de buscar una eficiencia en la asignación, es decir que aquel que más valora el bien es quien se lo queda, tiene que existir una cierta transparencia, porque si se trata de sobre cerrado, al finalizar la subasta se pueden revelar. El vendedor puede obtener información sobre las valoraciones que realizan los diferentes compradores, de tal manera que tiene que ser un juego objetivo, ya que no se admiten privilegios por parte del vendedor.

### **3.1 HISTORIA DE LAS SUBASTAS**

Las subastas tienen orígenes históricos muy lejanos, ya que se utilizaban para intercambiar diferentes bienes y materias primas; algunos ejemplos son: la subasta de las esposas de los babilonios que realizaban de forma anual para conseguir la mujer más bella, la venta de los botines obtenidos durante las guerras o las subastas de esclavos en tiempo de los romanos.

Pero no es hasta el siglo XVII, cuando se empiezan a utilizar las subastas con mayor auge. Se cree que la casa de subastas más antigua del mundo es “Estocolmo Auction House” establecida en el año 1647 en Suecia. En algunas zonas de Inglaterra en este siglo, se utilizó la denominada subastas de velas, que consistía en encender una vela y empezar a realizar las ofertas de manera ascendente hasta que la vela se agote y ganará aquella puja que sea más alta.

Un siglo después, pasada la Revolución Francesa, estas subastas tenían lugar en tabernas y cafeterías, para subastar diferentes obras de arte, las cuales venían publicitadas en muchos catálogos que cogieron fuerte relevancia en la época. De aquí nacieron dos grandes casas de subastas, como son Sotheby's y Christie's, que empezaron a funcionar oficialmente en 1744 y 1766 respectivamente. Otro hecho también importante, ocurrió después de la Guerra Civil Americana, donde los bienes incautados por el ejército salieron a subasta de la mano del coronel de la división.

En el siglo XX creció significativamente la utilización de las subastas aumentando de forma considerable el número de bienes subastados así como de participantes. En Estados Unidos, las subastas se hicieron más frecuentes a mitad de siglo XX, donde los bienes que se vendían por este método eran: tabaco, frutas y hortalizas, pieles, coches usados, madera y antigüedades; para ello la subasta más utilizada era de tipo ascendente o inglesa, aunque también eran frecuentes las subastas de sobre cerrado sobre todo para bienes de elevado valor económico. Décadas más tarde los gobiernos utilizaron este medio para vender títulos de deuda pública, reservas de oro o derechos para la explotación de minerales.

En la actualidad, el desarrollo de Internet ha hecho aumentar fuertemente las subastas, llegando por esta vía a una mayor gama de compradores y de forma más práctica; los sectores donde más se practica es en maquinaria, agricultura, bienes residenciales y bienes de equipo.

La importancia de las subastas actualmente está muy marcada con la aparición de las subastas electrónicas, que se realizan a través de internet, medio que se ha empezado a desarrollar a finales del siglo XX, y que está a disposición de todos aquellos que tengan un ordenador y acceso a Internet. La existencia de este tipo de subastas a través de internet, ha supuesto la extensión de venta de artículos, aumentando notablemente el número tanto de subastadores como de compradores. Los bienes subastados mediante este sistema son muy variados, desde objetos personales hasta propiedades en algún país exótico, pasando por todo tipo de negocios, como panaderías o fruterías. Se puede destacar la utilización de las subastas dobles que son un tipo de subastas en las que existen múltiples compradores y vendedores, donde los compradores realizan pujas por el importe que están dispuestos a pagar, a la vez que los vendedores realizan ofertas indicando la cantidad por la que están dispuestos a vender el producto; son utilizadas en todo tipo de empresas, destacando el caso de las eléctricas en España.

El empleo de internet en las subastas tiene las siguientes repercusiones:

- El mercado se globaliza, porque las subastas quedan abiertas a todo el mundo, por lo tanto, aumenta el número de participantes.
- Los costes que ocasionaba la realización de una subasta se minimizan, debido a que el único coste que tendrían sería la utilización de equipos informáticos y una conexión a la red.
- Las posibilidades de colusión entre los agentes que participan en el juego disminuyen porque puede darse el caso, en el que los jugadores no tengan ningún tipo de contacto.

En una subasta existen diferentes tipos de precios, como: el precio de tasación, el precio de salida, el precio de reserva, el precio de adjudicación y el precio récord.

### **3.2 TIPOS DE SUBASTAS**

Tenemos dos tipos de subastas, por un lado están las subastas de venta en aquellas en las que el vendedor, pone a la venta un producto entre los posibles compradores que participan en la subasta y resultará ganador aquel comprador que ofrezca la puja que más se adecua para ese producto, dependiendo del tipo de subasta elegido. Por otro lado, están las subastas de compra, que son aquellas en las que el comprador hace una oferta de su deseo de compra entre los vendedores y resulta ganador el vendedor que pida la menor cantidad de dinero por ese producto. También otra clasificación es entre, subastas de una unidad, en las que solo se subasta un único objeto y subastas de múltiples unidades y múltiples pujas, donde los compradores quieren adquirir más de una unidad.

#### **3.2.1 Las subastas de una unidad**

**Subasta dinámica**, es aquella subasta en la que los jugadores conocen todas las ofertas que se realizan por el único bien que se subasta, no sólo la suya propia, pudiendo producirse una modificación de esta mientras la subasta permanezca abierta. Existen dos tipos: inglesa o ascendente y holandesa o descendente.

- **Subasta ascendente**, como aquella subasta en la cual un vendedor que desea realizar la venta de un producto, lo empieza a hacer con un precio mínimo de salida o precio de reserva y va incrementando su valor en las diferentes pujas, hasta que no haya ningún comprador que supere la última puja realizada. También es conocida como subasta inglesa y suele utilizarse para vender cuadros o antigüedades.
- **Subasta descendente**, como aquella subasta en la que un comprador que quiere adquirir un producto, empieza pujando por un precio máximo de salida y se va disminuyendo este valor en las diferentes rondas hasta que algún comprador está dispuesto a comprar el objeto a dicho precio. También es conocida como subasta holandesa.

**Subasta en sobre cerrado**, es aquella en la que los jugadores muestran su oferta en una sola ocasión, es decir sus pujas son privadas. Puede tratarse de primer precio, el bien se adjudica al mejor postor, si el precio que se paga al final es el mismo precio que se ofertó y de segundo precio, siendo el ganador el postor que realiza la puja más alta, aunque deberá pagar por el objeto la segunda puja más alta, por tanto, el precio en esta situación es independiente de la mejor puja. Existen más tipos de subastas en sobre cerrado, aunque estas son los más importantes.

**Subasta Round Robin**, se trata de una variante de subasta en sobre cerrado, se utiliza principalmente para los bienes inmuebles. En esta subasta existe una oportunidad de subir la puja máxima en una segunda ronda posible.

**Subasta perdedores tristes** con cuota de entrada, es aquella en la que cada participante que quiera formar parte de la subasta debe pagar una determinada cuota de entrada y para realizar sus ofertas puede realizar cualquier cantidad siempre que sea positiva. El jugador que realiza la mayor oferta recibe el objeto que se haya subastado y no entrega ninguna cantidad al vendedor, debido a que son el resto de participantes cuyas ofertas fueran menores los que tienen que pagar al subastador la

oferta que realizaron aunque no reciban el objeto a cambio. Esta subasta fomenta ofertas muy altas si la valoración del objeto es elevada, a diferencia de las subastas Holandesa o Inglesa cuyas ofertas están acotadas y no pueden superar el valor del objeto. Un apunte adicional es que gracias a la cuota de entrada que tiene esta subasta, si un jugador tiene una valoración del objeto que se va a subastar menor al valor de reserva, este jugador no tendrá incentivos para participar en este juego.

**Subasta Santa Clauss**, es una subasta en la que todos ganan aunque el participante cuya oferta es mayor es el que obtiene el bien subastado. Se genera una utilidad entre la diferencia de las valoraciones del subastador y del ganador de la subasta; siendo esta utilidad la que se reparten entre todos los participantes del juego; es decir la puja ganadora se paga y se reparte entre todos los participantes; estableciéndose como primera diferencia entre las subastas de primer o segundo precio, en las que esta utilidad se reparte solamente entre el ganador de la subasta y el subastador. Por lo tanto, en esta subasta la utilidad de todos los participantes es siempre mayor o igual a cero.

**Subasta todos pagan**, es aquella en la que el jugador que realiza la oferta más alta es el que se lleva el objeto, aunque todos los participantes en ella tienen que realizar el pago de sus ofertas ya se lleven el bien subastado o no.

**Subasta último paga**, se trata de un tipo de subasta en la que el jugador cuya oferta sea más elevada se llevará el objeto pero sin entregar nada a cambio, sino que es el jugador que ha realizado la siguiente oferta más alta el que entrega al subastador su oferta sin recibir el objeto a cambio. Esta subasta cuando el número de participantes es dos, es equivalente a la subasta perdedores tristes.

**Subasta a la baja**, es aquella subasta en la que el ganador es el jugador cuya propuesta es la única más baja, el resto de jugadores no conocen las pujas de los participantes, para lo cual se establece un periodo de

tiempo, que al agotarse se conoce al ganador. También es conocida como subasta inversa.

**Subasta por céntimos**, es una variante añadida recientemente, es aquella que consiste en aumentar el importe del producto un céntimo cada vez que se realiza una propuesta. Cada producto tiene un reloj que cuando finaliza el tiempo, se conoce al ganador como la última persona que ha realizado su propuesta y al precio ofertado.

**Subasta japonesa**, es aquella en la que los participantes tienen que hacer su propuesta a un nivel dado que por lo general tiende a ascender. Esta subasta concluye cuando solo queda un solo jugador para cierta cantidad. Se trata de una variante de la subasta ascendente.

### 3.2.2 Las subastas de múltiples unidades y múltiples pujas

**Subasta dinámica**, es aquella subasta en la que los jugadores conocen todas las ofertas que se realizan por el total de los bienes que se subastan, no sólo la suya propia, pudiendo producirse una modificación de esta mientras la subasta permanezca abierta. Existen dos tipos: inglesa o ascendente y holandesa o descendente.

- **Subasta ascendente**, como aquella subasta en la cual un vendedor que desea realizar la venta de varios artículos, lo empieza a hacer con un precio mínimo de salida o precio de reserva y va incrementando su valor en las diferentes pujas, hasta que no haya ningún comprador que supere la última puja realizada. También es conocida como subasta inglesa y suele utilizarse para vender cuadros o antigüedades.
- **Subasta descendente**, como aquella subasta en la que un comprador que quiere adquirir diferentes artículos, empieza pujando por un precio máximo de salida y se va disminuyendo este valor en las diferentes rondas hasta que algún comprador está dispuesto a comprar el lote de objetos a dicho precio. También es conocida como subasta holandesa.

**Subastas de sobre cerrado de precio variable uniforme;** en ella los jugadores, en este caso compradores, entregan un sobre cerrado en el que se especifica el número de unidades que quiere comprar y el precio que está dispuesto a pagar por ellas. El poseedor de los objetos, ordenará los precios de mayor a menor y tiene que fijar un precio de corte, denominado así al precio máximo a partir del cual la demanda es mayor que la oferta. Todos aquellos pujantes cuyo precio esté por encima del precio de corte serán asignadas las unidades y pagará por ellas el precio de corte.

**Subasta de sobre cerrado de precio variable discriminatoria,** es el mismo mecanismo que en la variable uniforme pero el comprador paga por cada unidad el precio que ha pujado por ellas.

Existen también diferentes modalidades de las subastas dependiendo de las unidades del producto; si las unidades son homogéneas, los compradores realizan sus pujas con el precio que están dispuestos a pagar por las diferentes unidades del producto; todas aquellas pujas que queden por encima del precio que el propio vendedor había fijado son satisfechos. O bien, si las unidades son heterogéneas, los compradores realizan sus pujas por diferentes combinaciones de unidades del producto y a través de un algoritmo se resuelve este juego.

### **3.3 TEOREMA DEL INGRESO EQUIVALENTE**

La equivalencia de los ingresos es un concepto propio de la teoría de la subastas, que precisa de tener valoraciones privadas e independientes por parte de los jugadores, además de ser neutrales al riesgo; para que los mecanismos de asignación más comunes que son: subasta holandesa, subasta inglesa, subasta de primer precio y subasta de segundo precio, den el mismo ingreso esperado al vendedor.

Uno de los principales resultados que se obtienen con este teorema en una subasta, es que el establecimiento de cualquier mecanismo de asignación, en

el cual la oferta tiene un valor más alto gana el juego, así como la oferta con el menor valor espera beneficios nulos; siempre y cuando los jugadores son neutrales al riesgo. El vendedor también puede ser neutral o averso al riesgo, aunque si es averso prefiere las subastas que tienen la varianza más pequeña en el precio de venta, entre las que ofrecen el mismo ingreso esperado.

Como consecuencia de este teorema podemos demostrar como la subasta inglesa y la subasta al segundo precio reportan los mismos resultados. Así como la subasta holandesa y la subasta al primer precio, coincidían en la puja y en el precio por el que era aceptado el bien, respectivamente, llevando con ello al mismo resultado.

El objetivo que tiene el subastador al realizar la subasta es obtener el mayor ingreso posible, de forma que, si la subasta elegida como método de asignación cumple las características explicadas a continuación y todos los participantes son neutrales al riesgo, los ingresos que obtendrá el subastador serán iguales para cualquier tipo de subasta; es decir cumplirá el Teorema de Ingreso Equivalente.

Las características son las siguientes:

- Los participantes pueden realizar ofertas, siempre y cuando, sean mayores o iguales a un precio de reserva, entendido como el precio mínimo por el que se entrega el bien subastado y que tiene que notificar el subastador.
- El jugador que realiza la oferta mayor es el ganador de la subasta y al que se adjudica el bien subastado.
- Todos los jugadores son tratados por igual sin ningún tipo de restricción.
- Existe una estrategia común de equilibrio, a través de la cual a cada jugador hace una oferta en función creciente de la valoración del propio jugador hacia el bien que se subasta.

- Los agentes que participan son neutrales al riesgo y sus valoraciones respecto de los bienes son independientes y simétricas.
- Los pagos que se realizan dependen de las pujas realizadas.

El primer autor que habla de este teorema fue Vickrey, en el que establece que el ingreso que espera el vendedor del bien que se va a subastar en los cuatro tipos de subastas es el mismo, en media. De forma resumida, lo que viene a decir este teorema es que *la subasta inglesa, la subasta holandesa, la subasta con sobre cerrado al primer y la subasta con sobre al segundo precio proporcionan, en media, los mismos ingresos esperados.*

En la subasta al segundo precio, el vencedor de la subasta tiene que pagar el precio de la segunda puja más elevada, como cada jugador presenta una puja que sea igual a la valoración que tenga personal hacia el objeto, el precio que se tiene que pagar finalmente por el bien es aquella valoración que sea la segunda más alta. En cambio, en la subasta al primer precio el ganador del juego tiene que pagar un precio que sea igual a la puja que ha realizado; las pujas realizadas por todos los participantes son igual a la esperanza de la segunda valoración más elevada. Como ya hemos visto que en estas dos subastas, el precio que espera el vendedor es, para los dos casos, el valor esperado de la segunda valoración más alta, demostrando que los ingresos esperados, en media, por el vendedor son los mismos en los cuatro tipos de subasta que hemos nombrado.

Además, se puede comprobar este resultado, a través del número de jugadores que participan en la subasta; lo cual quiere decir que cuanto mayor sea el número de participantes, más alta será esta segunda valoración de la subasta. Por lo tanto, un aumento en el número de jugadores que quieren comprar el bien subastado provocará un aumento en ese precio esperado.

Otros autores que también enunciaron esta teoría fueron Riley y Samuelson y Myerson, siguiendo con los cuatro tipos de subastas distintos, si en el juego se cumplen los requisitos que menciona estos autores, los ingresos esperados para el comprador en los diferentes casos serían los mismos. En este caso, los

tipos de subastas se amplían como por ejemplo el caso de la subasta al tercer precio.

El vendedor puede mejorar el resultado a obtener si decide aplicar otro mecanismo de subasta, se trata de encontrar un sistema de subasta óptimo, en el que los cuatro tipos de subastas que hemos visto lo cumplen siempre que el cálculo del precio mínimo sea óptimo ya que el vendedor maximiza los ingresos esperados; por eso, un subastador no tiene que recurrir a sistemas más complejos de subastas porque con los casos sencillos bastaría para realizar una subasta óptima.

El precio mínimo, tratado anteriormente, debe de ir sujeto a una política de fijación, que implica que para poder maximizar el ingreso que espera el vendedor tiene que establecerse el citado precio mínimo y siempre que sea mayor al precio de reserva, el cual es el precio que equivale a la ponderación del bien por parte del vendedor. Esta política de fijación de precios mínimos provoca que las subastas resulten ineficientes porque distorsionan el resultado, haciendo que se aleje del óptimo de Pareto; por ello, exige que el subastador tenga compromiso y marque el valor tal cual sea su valoración del objeto ya que si no incurriría a un sistema inconsistente y de poca credibilidad.

La consecuencia más importante que se desprende de este teorema es que, sabiendo el número de participantes en la subasta y el valor de reserva a partir del cual los participantes empiezan a enunciar sus ofertas, el valor esperado del ingreso para el subastador será el mismo, sea cual sea el tipo de subasta elegida. Este valor de reserva puede ser fijado mediante dos formas diferentes, prohibiendo ofertar por debajo de ese valor, o bien, cobrando una cuota fija a todos los jugadores de la subasta de tal manera, que realizar una oferta por debajo de ese valor no resulta rentable. Además, con este valor se maximiza el ingreso esperado del subastador, sea cual sea el número de participantes en la subasta.

En cuanto a la subasta holandesa y de primer precio son equivalentes en estrategias, lo que quiere decir que por cada estrategia de la subasta

holandesa existe una estrategia en la subasta de primer precio que es equivalente en pagos.

Algunos casos de subastas que no son los convencionales y en los cuales también se cumple el Teorema del Ingreso Equivalente son los siguientes: subasta perdedores tristes, subasta santa Claus, subasta todos pagan y subasta último paga.

No obstante, podemos resaltar, que si no se cumplen las hipótesis necesarias para que se cumpla este teorema, pueden cambiar los ingresos esperados dependiendo de la subasta seleccionada, algún caso a destacar sería: si los jugadores no fueran neutrales al riesgo, es decir si fueran aversos; la subasta de primer precio tendría ingresos esperados más altos que los de la subasta ascendente o también, si todos los agentes que participan en la subasta tienen correlación de forma positiva entre ellos, la subasta ascendente tendría unos ingresos esperados mayores que los de la subasta de primer precio.

### **3.4 FUNCIONAMIENTO DE UNA SUBASTA**

Para conocer cómo funciona una subasta lo primero que vamos a estudiar son las diferentes etapas que hay en todo el proceso de compra o venta de bienes, estas son:

- La tasación de la pieza, se trata de conocer el verdadero valor del bien que se va a subastar para lo cual se necesita realizar una evaluación completa del objeto.
- El estudio del mercado, se basa en conocer en qué mercado ese bien tendrá mejor aceptación, es decir, entre el nacional o el extranjero.
- El contrato de venta, cuando el propietario del bien que se va a subastar decide venderlo, se realiza un contrato en el que aparecen los datos del propietario, datos del bien y especificación de la subasta a realizar.
- La distribución del catálogo del bien subastado entre posibles compradores a nivel global, así como la exposición del bien al público.
- El siguiente paso, es la subasta, en la cual diferentes pujadores realizan sus licitaciones con ofertas para ese bien. Dependiendo del tipo de

subasta elegida, el ganador obtendrá el bien y con ello se acabará la subasta.

Los usos de las subastas son muy amplios, debido a que cualquier bien u objeto puede venderse a través de este procedimiento. Aunque cualquier persona relaciona el ámbito de las subastas con las antigüedades o colecciones, es decir con obras de arte o joyas; no solo existen esos usos, algunos otros pueden ser la compra-venta de: maquinaria industrial, bienes inmuebles, colecciones de vino, ganado, el pescado en las lonjas...

Los principales aspectos que alteran el funcionamiento de una subasta son:

- Aversión al riesgo de los compradores; tiene miedo a quedarse sin el producto y por lo tanto, valoran más la posibilidad de ganar que la reducción de su excedente por pujar demasiado alto. Si existiera neutralidad frente al riesgo las pujas serían más bajas que en esta situación y la subasta que más afectada se ve en este aspecto es la subasta al primer precio.
- Valoraciones comunes; si todos los compradores dan la misma valoración al bien que se subasta, el ganador será aquel que realice la puja más alta, lo que quiere decir que se paga un precio más alto del valor real del bien por obtenerlo. Este caso es conocido como “La maldición del ganador”<sup>2</sup> y obtiene mejores resultados en la subasta ascendente que en el caso de subasta en sobre cerrado.
- Asimetrías entre compradores; si se da el caso que unos jugadores tienen más información que otros, puede haber imperfecciones porque algunos dejen de jugar ya que existan pocas posibilidades de ganar el bien pujado.
- Colusión, ocurre cuando los diferentes licitadores de las ofertas del bien se ponen de acuerdo entre ellos para optar por el bien y salir beneficiados.

---

<sup>2</sup> **Maldición del ganador:** el ganador de la subasta realiza un pago por el bien subastado superior al verdadero valor del bien, puede darse por dos causas: la oferta ganadora es mayor que el bien que se subasta o el valor del bien es inferior al valor que se tenía previsto.

Entre estos factores distorsionadores, se puede aclarar que las subastas de primer precio suelen comportarse mejor que las subastas ascendentes, porque existe menos posibilidad de colusión entre los jugadores además de evitar que entren en el juego participantes débiles y evitar que se favorezca a aquellos jugadores más fuertes en el sentido económico.

Existen diferentes estrategias en las pujas realizadas que sirven para que el funcionamiento de una subasta sea adecuado como:

- Shading oferta, consiste en realizar una puja por debajo del valor que tiene el jugador sobre el bien subastado. Con esta estrategia se evitaría la maldición del ganador si el jugador gana la subasta porque paga un precio más bajo por el objeto, aunque puede darse la opción de que no gane la subasta.
- Araña de licitación, se trata de realizar falsas pujas en la subasta para hacer crecer la demanda del bien o bien para que el precio de la puja sea más elevado.

#### **4. SUBASTA DE ÚNICA PUJA MÁS BAJA**

Como caso especial a estudiar en este trabajo vamos a centrarnos en el estudio de un tipo de subasta que llama la atención por sus características. Se trata de la subasta de única puja más baja y entre todo los jugadores, el ganador es aquel que realiza la puja más baja por el objeto subastado que no es repetida.

En ingles las siglas son LUBA provenientes de Lowest Unique Bid Auction, es una subasta realizada la mayor parte de las veces a través de Internet, en la que el ganador del bien subastado es aquel que realiza la puja más baja y de forma única, es decir que no coincida con ninguna otra puja del resto de participantes. Los bienes subastados son de alto valor económico, como coches o aparatos electrónicos y son transferidos al ganador del juego por pujas insignificantes, lo que suele equivaler en torno al 0.2% del valor en el mercado de dicho producto. Por lo tanto, el subastador con este tipo de subasta no espera beneficios como si se tratara de una venta de un producto,

sino que obtiene beneficios de los pagos, que realizan cada uno de los postores de un coste fijo, por cada una de sus pujas que realizan.

La aparición de estas páginas web tiene su origen en el año 2006, en algunos países escandinavos, aunque en la actualidad se ha extendido a la mayoría de los países desarrollados siguiendo el mismo patrón que tenían las páginas en sus inicios. Se trata de una subasta de venta en la que los oferentes tienen una situación de estrategias compleja, y en la que coinciden el propietario de la página web y el vendedor o subastador del bien que en este caso es único.

El funcionamiento de este tipo de subastas es el siguiente; los jugadores tienen que registrarse en la página web que va a realizar la subasta del producto del que el agente está interesado, una vez que lo hacen, el primer paso es empezar a pujar por los diferentes bienes que más les atraigan, haciendo las pujas que deseen. Estas ofertas se realizan en céntimos y son de carácter privado; la realización de cada una lleva implícito el depósito de una cantidad de dinero en una cuenta que el subastador justifica como información que envía al jugador.

En algunas ocasiones, una vez realizada la puja, el jugador recibe un mensaje que puede contener alguna de los siguientes tres mensajes:

- La oferta realizada es la única más baja.
- La oferta realizada es única, pero no la más baja.
- La oferta realizada no es única.

Esta información va actualizándose continuamente en el transcurso de los días, que no suelen ser demasiado debido a que el periodo de duración de estas subastas es de unos pocos días, como cuatro o cinco. El jugador puede comprobar desde su cuenta el estado de esta información, igual que puede realizar otra puja en otro momento siguiendo el mismo esquema. En el momento en el que la subasta cierra, el bien subastado se adjudica al jugador que haya presentado la puja única más baja.

Es muy importante conocer la información del estado de la puja realizada en cualquier momento porque pueden influir en las estrategias tomadas por los

jugadores. El nivel óptimo de inversión de este tipo de juegos depende de las valoraciones privadas de los sujetos.

Algunos autores han estudiado este tipo de subastas de diferente manera, como:

- Bruss, Louchard y Ward, en el año 2007, realizaron un estudio para calcular las estrategias óptimas en estas subastas a través de un conjunto de supuestos adicionales que tenían que ver con la naturaleza de esas subastas. Ese mismo año, Raviv y Virag, realizaron predicciones teóricas y compararon los resultados de estas subastas con los resultados de subastas normales.
- Houba y Rapoport, en 2011 y 2009 respectivamente, estos autores analizaban los equilibrios de estas subastas de precio único más bajo, cuando los jugadores presentan una única puja. Comprobando que los resultados que obtenían eran pujas de números consecutivos y cuyos pujantes veían disminuir sus probabilidades de poder llevarse el bien.
- Eicheberger y Vinogradov, en el año 2008, analizaron las llamadas LUPA, que son subastas en las que los pujantes pueden presentar las ofertas que deseen y el ganador si realiza el pago de su oferta. Pero es tratado como un juego simultáneo porque los jugadores no conocen el estado de la información en ningún momento del juego.
- Östling en el año 2011, estudiaba el caso de los LUPA, que son subastas en las que los pujantes pueden repetir sus pujas, teniendo la peculiaridad de que el ganador no paga su oferta realizada por llevarse el bien y el número de jugadores que participan sigue una distribución de Poisson.
- Por último en el año 2012, Pigolotti, ha realizado un estudio de las subastas de puja única más baja para conseguir una expresión teórica del equilibrio de Nash.

En la práctica este tipo de subastas actúan como loterías o sorteos; los jugadores que realizan sus pujas, ejecutan más de una oferta, y estas suelen ser muy precisas, porque un jugador puede ganar o perder el juego por cantidades como céntimos.

Un ejemplo de una subasta LUBA sería el siguiente:

**Tabla1. Ejemplo de una subasta LUBA**

Valor de la puja	Número de pujas
0,01 €	5
0,02€	9
0.03€	3
0.04€	1
0.05€	4
0.06€	2
0.07€	1

*Fuente: Elaboración propia*

En este tipo de subastas el ganador de juego sería el postor que realizó la oferta de 0.04€, debido a que aunque no es la mínima, si es la más baja que tiene una única puja. La rentabilidad que proporcionan estas subastas, es mayor que la que en realidad se piensa, ya que se obtienen bienes de alto valor económico por cantidades bastante pequeñas; debido a que por cada realización de una puja se cobra una cuota de participación, que si en la subasta participan un número grande de licitadores, el valor de ingreso esperado será mayor que el valor del bien subastado, obteniendo así el vendedor un beneficio.

Algunas empresas que realizan este tipo de subastas, ofrecen a sus licitadores alguna oferta por cada puja realizada con el fin de no parecer una lotería tal cual; así se da el caso de que los ofertantes reciben bonos de descuento o algunos cupones cada vez que realicen una oferta.

Para la participación en este tipo de subastas, existen diferentes trucos para poder conseguir el objeto subastado por una cantidad pequeña de dinero; bien algunas páginas de subastas por vía internet ofrecen una especie de puntos que denominan créditos, los cuales los participantes los pueden conseguir mediante promociones de registro, invitando a amigos a la subasta o bien por promociones especiales. Estos créditos es conveniente que sean empleados

en un único objetivo o premio sin diversificarlos, es decir, que los pujantes no los utilicen para todos los objetos subastados que aparezcan.

Una vez que el licitador tiene una cantidad de esos créditos acumulados, el siguiente truco a utilizar es revisar alguna publicación de ganadores de otras subastas inversas, y obtener como datos las pujas ganadoras. Con esos datos se realizará la media, desechando los valores más altos y los más bajos, y ese resultado podría ser la primera opción de puja que realizará el jugador. Otro valor para poder empezar a pujar, sería con ofertas que supongan entre el 0,50% y el 1,50% del precio real del producto subastado.

Una vez que se ha empezado a realizar pujas, lo más importante es obtener una puja única, aunque no sea la más baja; pues bien si la puja que realizamos está repetida, lo más aconsejable es realizar otras pujas con valores superiores, porque por lógica si el valor pujado está repetido, será más fácil encontrar una puja única en valores más altos. Pero siempre con sentido común y realizando las pujas con el presupuesto inicial que habíamos pensado.

#### **4.1 CARACTERÍSTICAS DEL JUEGO**

Podemos señalar los siguientes elementos y etapas que tiene una subasta de única puja más baja.

- Existen en total  $(n+1)$  jugadores, de los cuales uno es el subastador que le denominamos A y el resto es un conjunto  $N = \{1, \dots, n\}$  que son los diferentes licitadores.
- El agente que se encarga de realizar la subasta conoce con certeza, a posteriori, el número de participantes de la subasta, pero sin embargo los oferentes solo saben que bien  $n=n$  ó que se trata de una variable aleatoria distribuida sobre  $\{0, \dots, n\}$ .
- Las valoraciones respecto al bien que tienen los jugadores son idénticas y distribuidas de forma independiente, se denominan  $v_i$ , sólo son conocidas por el licitador y tienen una variación entre  $[0, \dots, V^{Max}]$ . El subastador tiene una valoración  $v \geq 0$  respecto del bien subastado.

- El valor de  $V^{\text{Max}} \geq V_r$ , siendo este último el precio de venta del bien, para que existan ganancias del comercio.
- En este tipo de juego, existen tres periodos distintos, en el primero el subastador decide crear una LUBA y es anunciado de forma pública; los dos periodos siguientes, vienen dados por *la decisión de inversión*, es decir, la cantidad que ha decidido cada agente que va a invertir en esa subasta y *la fase de licitación*, aquella en la que los jugadores deciden cuando y donde colocar la oferta por el bien subastado.

Al final de cada periodo, el subastador comprueba la distribución que tienen las pujas existentes hasta ese momento y es cuando se encarga de enviar un mensaje a cada licitante informándole como está su puja; puede contener cualquiera de esta información:

- La valoración de la puja es W [ $\sigma^t (X_i^t) = W$ ], indica que en el momento actual se trata de la oferta ganadora, siendo la menor única existente.
- La valoración de la puja es M [ $\sigma^t (X_i^t) = M$ ], indica que se trata de una oferta única peor no es la más baja, aunque podría convertirse en la ganadora.
- La valoración de la puja es L [ $\sigma^t (X_i^t) = L$ ], indica que no se trata de una oferta única y que no tiene posibilidades de ganar con ella.

En el caso de existir cantidades con diferentes ofertas en todas ellas, este tipo de subastas emplean como regla de desempate escoger aquella cantidad que tenga menos licitadores, y con ella, ver el orden en el que se han presentado las pujas, dando por ganador al primero que la presentó. En el caso, en que los licitadores hayan realizado la puja más baja igual y en el mismo periodo de tiempo, el conflicto se resuelve al azar.

## 4.2 DECISIÓN DEL SUBASTADOR

Primero vamos a destacar la decisión del subastador de realizar la apertura de la subasta LUBA dependiendo de los beneficios esperados, al inicio de esta. El subastador sólo conoce el número de participantes que es  $n$  y la media de la distribución de las valoraciones de los agentes; por lo que puede estimar el número máximo de ofertas que un agente con cierta valoración puede realizar. Según el comportamiento de los agentes racionales, el subastador sabe que cuando existe equilibrio,  $n-1$  agentes realizan todas sus ofertas disponibles.

Además, resulta destacar la diferencia que existe entre las ganancias que obtiene el subastador con los beneficios que este mecanismo puede recaudar si las señales del juego no estaban disponibles. Este resultado nos lleva a preguntarnos por qué hay sitios web que organizan subastas de tipo LUBA si ocurre esto, pues bien existen dos respuestas: el subastador tiene un comportamiento por debajo del óptimo o los licitadores no participan en el juego como un juego de equilibrio, y bien se trata de un juego en el que los licitadores son limitadamente racionales.

## 4.3 DECISIÓN DE LOS LICITANTES

Una vez que se ha creado la subasta hasta el periodo en el que el producto es adjudicado al licitador que ha presentado la puja única más baja, existen dos fases de gran importancia en las subastas LUBA, que son:

**La decisión de la inversión**, en esta fase los diferentes oferentes tienen costes que van aumentando por cada oferta que se presenta. Antes de la fase de licitación, estos pujadores tienen que establecer un límite superior en la cantidad de dinero que están dispuestos a invertir, determinando así el número máximo de ofertas que un jugador puede realizar.

En la elección de su máximo de inversión, el postor debe comparar la probabilidad de ganar la subasta LUBA con las pérdidas que pueda tener en caso de que no ganara, este problema lo soluciona maximizando la utilidad esperada  $E_0(u_i)$ . De forma ex ante cada postor tiene la misma probabilidad de ganar el LUBA, pero un licitador que presente más ofertas

que sus oponentes, tiene más posibilidades de conseguir la oferta ganadora y con ello ganar la subasta, siempre teniendo en cuenta la cuota que hay que pagar por cada puja realizada y la cantidad de dinero que un agente quiere invertir en el juego.

Por lo tanto, según la fase de licitación la probabilidad que tienen los jugadores a priori de ganar la subasta depende principalmente de la inversión del jugador  $i$  y los niveles de inversión del resto de jugadores.

Cuando los jugadores en  $t=0$  deciden su nivel óptimo de inversión, no tienen en cuenta el pago que les supondrá, abonar su oferta ganadora en el caso de que ganen la subasta, aunque en este caso hemos mencionado que se trata de una cantidad insignificante.

La maximización de este problema plantea la decisión de inversión de una subasta LUBA, como un juego de búsqueda de rentas, lo que viene a ser un juego de probabilidades en el que los jugadores compiten por un premio realizando pujas que les suponen recursos costosos.

Para resolver este problema de forma explícita tenemos que especificar algunas propiedades:

- Un agente que no participa, es decir que no presenta ninguna oferta,  $\eta_i^{\max} = 0$ , no tiene ninguna posibilidad de ganar.
- Si solo existe un único participante, entonces es el ganador de forma segura.
- Si dos jugadores invierten la misma cantidad de dinero en la subasta, tienen las mismas posibilidades de éxito.
- La probabilidad de ganar el juego, va en aumento según la inversión realizada y hace reducir débilmente la de los oponentes.

El número máximo de ofertas que un agente racional presenta va en función creciente de su valoración por el bien subastado y en función decreciente por la cuota que hay que abonar con cada una de las ofertas.

**La fase de licitación**, se trata de un periodo en el que se seleccionan la adquisición de bienes y servicios, en este caso mediante la subasta. Para ello vamos a estudiar las posibles pujas realizadas por los postores,

siendo  $\eta_i \in \mathbb{N}$ , la cantidad máxima de ofertas que puede realizar cada pujador  $i$  de forma racional en la Subasta de Puja Única más Baja; siendo esta cantidad diferentes entre los jugadores dependiendo del carácter de cada uno.

- Cuando  $\eta_i^{\max} = 0$ , el licitador no presenta ninguna oferta, lo que quiere decir que no participa en la subasta.
- Cuando  $\eta_i^{\max} \geq 1$ , en este caso los licitadores están en activo y presentan diferentes ofertas en la subasta.

Los agentes que presentan las ofertas en el periodo  $t \in \{1, \dots, T\}$ , corresponden con esas ofertas que no son las ganadoras; ya que el licitador que realiza la oferta ganadora en  $t-1$  debe abstenerse de presentar ofertas a mayores porque requiere unos costes y haría disminuir la rentabilidad del jugador.

Para el análisis de las estrategias de oferta con los agentes en equilibrio, se trata de un equilibrio que mantenga el anonimato de los jugadores y un modelo en el que cada licitador quiera anticiparse a sus rivales del juego. Sin embargo, una caracterización de este equilibrio parece imposible debido a la complejidad de la naturaleza del juego, pero sí que se pueden describir algunas características cualitativas de este equilibrio mixto que caracteriza a la licitación, como la realización de una oferta por parte de un postor en cualquier periodo de forma aleatoria, siguiendo una distribución de probabilidad estrictamente decreciente y delimitada superiormente.

- Si el postor solo realiza una puja, es decir,  $\eta_i^{\max} = 1$ , los agentes tienen que hacer coincidir las posibilidades de elegir un número bajo con las posibilidades de elegir un número único, ya que en equilibrio cada número debe de tener la misma recompensa esperada. Todo esto, requiere pujas de números bajos para que se jueguen con mayor probabilidad y con ello ser menos propensos a resultar pujas únicas. Además en este caso, los

jugadores no tienen pujas realizadas con anterioridad, por lo tanto, no pueden condicionar su comportamiento por ello.

- Cuando el postor realiza más de una puja, es decir,  $\eta_i^{\max} \geq 1$ ; como las ofertas requieren unos costes, cuando el agente ha realizado su primera oferta, tiene que ver si lo ha hecho de forma óptima o no; si se diera el segundo caso, estará condicionado a presentar otras pujas ya que su fin es maximizar las posibilidades que tienen de ganar; sin olvidar que la rentabilidad estará disminuyendo según aumenten las pujas presentadas.

## 5. CONCLUSIONES

La Teoría de Juegos estudia las decisiones óptimas que deben tomar los diferentes jugadores, consideradas estratégicas, lo que quiere decir que todos los participantes en el juego actúan teniendo en cuenta las diferentes acciones que llevarían a cabo el resto de los jugadores. Un juego no tiene porque ser un juego de mesa relacionado con el azar, existen muchos otros como conflictos militares, campañas de publicidad o modelos de evolución biológicos. Además centrándonos en los juegos relacionados con la teoría de juegos, existen diferentes clasificaciones para ellos, como: juegos cooperativos y juegos no cooperativos, juegos estáticos y juegos dinámicos o juegos de información completa y juegos de información incompleta. El principio fundamental para hallar la solución en estos juegos, es el equilibrio de Nash.

Después de haber estudiado la teoría de juegos y la teoría de las subastas, podemos decir que las subastas son un mecanismo de asignación eficiente debido a que el ganador de la subasta es aquel cuya puja es más apropiada para los diferentes tipos de subastas. Existe una clasificación general para las subastas, que son aquellas subastas de una unidad y las subastas de múltiples unidades; dentro de las cuales existe una cantidad muy grande de tipos de subastas, pero en realidad, son sólo cuatro las más utilizadas, la subasta inglesa, la subasta holandesa, la subasta con sobre cerrado al primer y la subasta con sobre al segundo precio. Estos cuatro tipos de subastas

mencionados, generan los mismos ingresos esperados para el vendedor, dando lugar al Teorema del Ingreso Equivalente.

En el caso de este trabajo, que está enfocada a estudiar las subastas de puja única más baja, una LUBA es un mecanismo de venta que ha crecido de forma repentina su popularidad con el desarrollo de Internet, trata de asignar objetos de valor al sujeto que presenta la oferta más baja y que no coincida con ninguna otra. Si los jugadores son racionales, esta subasta puede ser rentable para el subastador solo si existen ganancias con el comercio, pero también hemos visto que pueden tener éxito si la racionalidad de los agentes es limitada, ya que los licitantes pueden carecer del compromiso hacia el equilibrio y desviar sus estrategias. Este tipo de subastas triunfa debido al papel que desempeñan las señales que el subastador proporciona a los diferentes licitadores, ya que por un lado, hacen ganar los bienes de gran valor por ofertas muy bajas y por otro lado, dan la ilusión a los jugadores de tener el control de lo que hacen con sus ofertas y llegan a transmitir la idea de que ganar este tipo de subastas se basa en ser más inteligente que los demás jugadores. Llegando con estas dos formas a que el negocio de estas subastas tenga éxito.

## **6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Alós Ferrer, C. “Teoría de Juegos e Historia Económica: Una simbiosis necesaria.” Enero 2004
- Beltrán, F., Santamaría N., Restrepo C. y Cardoso P. “El Teorema de Ingreso Equivalente para Subastas de un Objeto: Aproximación Experimental.” 2014
- Castroman Torres, P y García Teruel M. “John F.Nash y su contribución al análisis económico.” Abril 2002.
- Cerdá, E., Pérez, J., Jimeno, J.L. “Teoría de Juegos” 2004
- Durá Juez, P. “Teoría de Subastas y reputación del Vendedor” Julio 2003.
- Durá Juez, P. “Teoría de Subastas y Privatizaciones: un modelo de reputación del vendedor.” Memoria 2003.
- Gallice, Andrea, “Lowest Unique Bid Auctions with Signals” Collegio Carlo Alberto, May 2009.

- Hernández Mogollón, R., Coca Pérez, J.L., Torres Pruñonosa, J. “Las limitaciones del precio de subasta para su empleo en análisis empíricos. 2007
- Millán, L., “Teoría de Subastas” Notas de Clase, Febrero-Junio 2006.
- Villajos Gómez, J. “La teoría de Juegos y su historia.” Curso 2005-2006

Las páginas web consultadas:

- [http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa\\_de\\_juegos](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_juegos) [consulta:14/03/2015]
- [http://es.wikipedia.org/wiki/Equivalencia\\_de\\_ingresos](http://es.wikipedia.org/wiki/Equivalencia_de_ingresos) [consulta:2/04/2015]
- [http://es.wikipedia.org/wiki/Subasta\\_inversa](http://es.wikipedia.org/wiki/Subasta_inversa) [consulta:23/04/2015]
- <http://es.wikipedia.org/wiki/Categor%C3%ADa:Subastas> [consulta:23/04/2015]
- <http://wikitel.info/wiki/Subastas> [consulta:23/04/2015]
- <http://pujamasbajo.com/> [consulta:30/04/2015]
- <http://www.subastadeocio.es/> [consulta:30/04/2015]
- <http://www.cne.es/cgi-bin/BRSCGI.exe?CMD=VEROBJ&MLKOB=599373644949> [consulta:30/04/2015]
- <http://www.subastadeocio.es/> [consulta:30/04/2015]
- <http://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia/que-es-la-teoria-de-juegos> [consulta:14/03/2015]
- <http://www.zonaeconomica.com/teoriadejuegos/teoriadejuegos> [consulta:14/03/2015]
- <https://microeconomiaavanzada210.files.wordpress.com/2012/05/utilidad-esperada-latex.pdf> [consulta:20/03/2015]
- <http://www.ebour.com.ar/pdfs/An%20Introduction%20to%20Game%20Theory.pdf> [consulta:14/03/2015]
- <https://iaap.wordpress.com/2007/05/19/%C2%BFque-es-un-juego-de-suma-cero-zero-sum-game/> [consulta:2/03/2015]
- <http://www.economia48.com/spa/d/juego-de-suma-cero/juego-de-suma-cero.htm> [consulta:2/03/2015]