Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Grado en Administración y Dirección de Empresas

El Dilema del Prisionero y la Cooperación

Presentado por:

Tamara Setién Hernández

Tutelado por:

Carlos Rodríguez Palmero

Valladolid, 25 de Junio de 2015

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de este documento se va a tratar de explicar qué es el Dilema del Prisionero y por qué presenta un dilema. Pero antes es necesario saber qué es ‘La Teoría de Juegos’ ya que el dilema del prisionero es uno de los paradigmas fundamentales recogidos dentro de la misma.

Un juego tal y como lo conocemos en el lenguaje coloquial nos sugiere una actividad de entretenimiento que conlleva unas normas a cumplir por varios sujetos que participan en él con el objetivo de ganarlo. El resultado que el jugador obtenga de un juego no depende sólo de él, ya que es una variable dependiente tanto de las acciones del jugador como del resto de los participantes. Esta es una característica de suma importancia en la teoría de juegos, tal como queda reflejado en un extracto recogido del libro ‘*Teoría de Juegos’* de Pérez, et al., (2013) “*tomar las decisiones que más convengan para ganar, teniendo que cumplir las reglas del juego, y sabiendo que los demás jugadores también influyen en los resultados con sus decisiones*” es una de las premisas en las que se basa esta teoría.

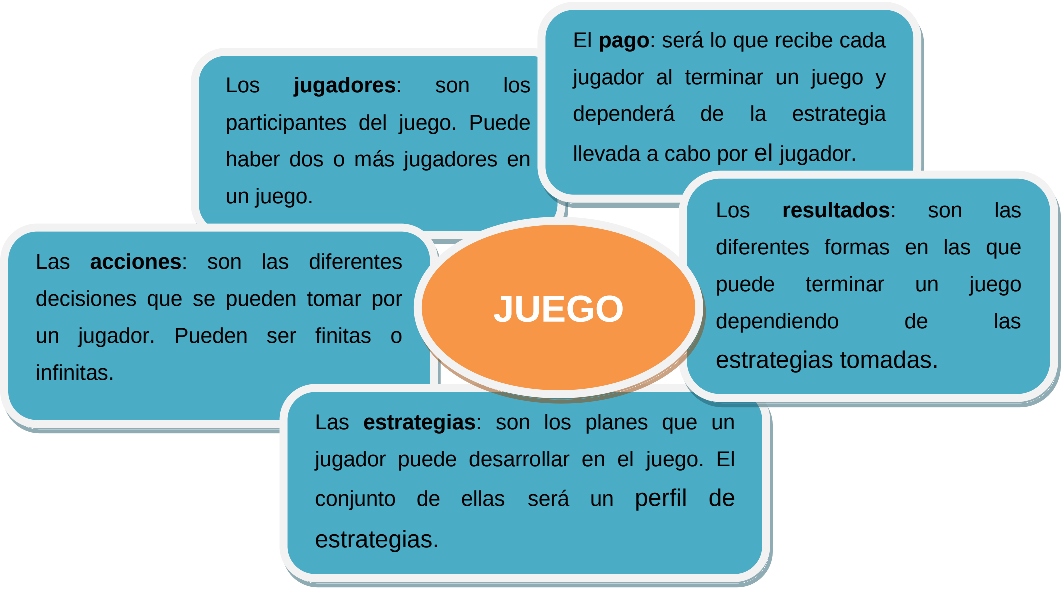
La teoría de juegos tiene aplicaciones en muchos ámbitos de la vida tanto a nivel académico, como laboral y personal. Podría definirse como una teoría derivada de la matemática que analiza la economía, la biología, la psicología y la sociología, entre otras. Es además una herramienta utilizada para explicar conflictos de intereses que se dan como consecuencia de la interacción de sujetos *racionales*. No es utilizada para dar explicación a los juegos corrientes, aunque éstos servirán de ayuda explicativa utilizando gran parte de su terminología (Econlink, 2005).

Para situarnos en un marco histórico referente a la teoría de juegos es necesario destacar la publicación ‘*Theory of Games and Economic Behaviour’* de John Von Neumann y Oskar Morgenstern en 1944 en la que se establecieron las bases de la teoría de juegos ‘clásica’. Si bien es cierto que hubo documentos previos a este libro, como los trabajos de Cournot (1838) y Edgeworth, no fue hasta 1944 cuando comenzó a tomar fuerza. En los años cincuenta John Nash aportó conceptos nuevos dentro de la Teoría de Juegos y más tarde, en 1994, recibiría el Nobel[1] de economía gracias a sus aportaciones a la teoría de juegos y los procesos de negociación. Junto a Nash se concedió el Nobel a los economistas Selten y Harsanyi por su análisis pionero del equilibrio en la teoría de los juegos no cooperativos y, tan solo dos años más tarde, a Vickrey y Mirlees. En la actualidad la teoría de juegos está recibiendo un gran apoyo de la comunidad académica y se demuestra con la entrega de varios premios Nobel a los estudiosos en esta materia. Los economistas premiados recientemente por el desarrollo y la aplicación de la teoría de juegos a la realidad han sido: Roth y Shapley que recibieron el Nobel en 2012.

2. TEORÍA DE JUEGOS

La terminología utilizada en teoría de juegos es muy similar a la empleada para describir un juego común. Los problemas a los que intenta dar solución son denominados juegos y están formados por:

Figura 2.1: Componentes de un juego



Fuente: Elaboración propia

[1] Los Nobeles concedidos por Teoría de Juegos han sido: en 1994 a John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten por su gran aportación en el análisis de los equilibrios en el campo de la Teoría de juegos; William Vickrey y James Mirrlees en 1996 por sus trabajos sobre la teoría económica de los incentivos bajo información asimétrica; Joseph Stiglitz, George Akerlof y Michael Spence, galardonados en 2001 por sus investigaciones sobre las interacciones de los agentes en entornos con información asimetrica; en 2005 a Robert Aumann y Thomas Schelling por *“haber aumentado nuestra comprensión del conflicto y la cooperación a través del análisis de la Teoría de Juegos”* (Jorge, 2006) y Alvin E. Roth y Lloyd Shapley en 2012 por su trabajo en la teoría de asignaciones estables y el diseño de mercado.

Existen dos tipos de juegos: los juegos cooperativos y los no cooperativos. En los primeros se analiza qué sucede cuando los jugadores pueden llegar a un acuerdo sobre las estrategias que van a tomar. Por su parte, en los juegos no cooperativos se analiza lo sucedido cuando esto no es posible y cada jugador elige su estrategia de manera individual. Dentro de los juegos no cooperativos los jugadores elegirán sus decisiones simultáneamente (juegos estáticos) o deberán esperar a que los otros jugadores tomen sus decisiones (juegos dinámicos). Existe además otra distinción: los juegos con información completa o incompleta. En aquellos en los que la información sea completa todos los jugadores conocerán con seguridad las consecuencias propias y ajenas de sus decisiones. Por el contrario esta información no será conocida en los juegos de información incompleta (Pérez, et al., 2013).

2.1. FORMALIZACIÓN DE UN JUEGO

Los juegos pueden representarse de dos formas:

- Forma estratégica o normal: se describen los juegos de forma rectangular de manera que simula un escenario en el que los jugadores son capaces de tomar las decisiones simultáneamente. Por ejemplo en el juego de pares nones hay dos jugadores que deben elegir entre pares (P) y nones (N) obteniendo los pagos abajo representados dependiendo de sus elecciones:

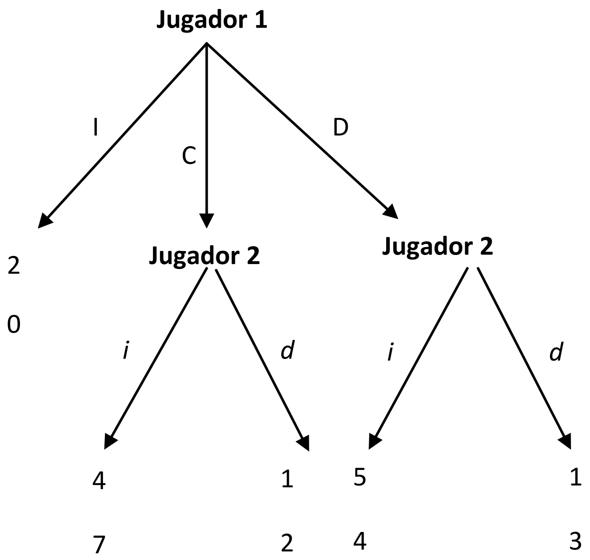
Tabla 2.1: juego pares y nones

		Jugador 2	
		Pares	*Nones*
Jugador 1	*Pares*	5, -5	-5, 5
	Nones	-5, 5	5, -5

- Forma extensiva: los juegos serán simbolizados en forma de árbol, desarrollándose las decisiones de manera secuencial.

Tabla 2.2: Forma extensiva de un juego

Cuando el jugador 1 elija (I, C ó D), el jugador 2 podrá elegir (i ó d), no pudiendo jugar cuando el jugador 1 elija I. Dichas elecciones les reportan unos pagos expresados en los nodos finales.



Al ser nuestro objeto de estudio el Dilema del Prisionero y ser éste un juego representado de manera estratégica nos disponemos a detallar su perfil.

Para formalizar un juego en forma normal es esencial describir los componentes del mismo: los jugadores, las estrategias y los pagos.

- Un juego será representado por $G = \{J, (S_i)_{i\in J}, (u_i)_{i\in J}\}$.
- Los jugadores participantes pueden ser dos o más, así que serán representados de la forma J= {1,2…n}, siendo 'n' un número natural.
- Las estrategias serán representadas por $S = \{S_1,....., S_n\}$, donde $S_i = \{s_{i1}, s_{i2},…, s_{in}\}$ es el conjunto de estrategias del jugador 'i'. Un perfil de estrategias es un vector $s= (s_1, s_2,…, s_n)$, donde cada $s_i \in S_i$ es una estrategia del jugador 'i'.
- La función de pagos será representada por $U= \{u_1,…, u_n\}$, para el conjunto de jugadores. Para expresar los pagos que obtendrá cada jugador dependiendo de la estrategia desarrollada por él y por el resto de jugadores se utiliza $u_i = u_i (s_1,....., s_n)$, $s_i \in S_i$. Todas las estrategias serán elegidas por el conjunto de jugadores individualmente y de forma simultánea.

Uno de los ejemplos más utilizados para explicar los juegos en forma estratégica con un número finito de estrategias son los juegos de dos jugadores o bimatriciales. Dentro de esta categoría se encuentra el Dilema del Prisionero que, como bien se ha dicho antes, es un juego muy estudiado porque está presente en gran cantidad de acciones cotidianas en las que aparece la disyuntiva de la cooperación o la no cooperación. Algunos ejemplos de estas situaciones son el pago, o no, de impuestos; limitar, o no, la producción; reducir, o no, la contaminación, etc. (Fernández, 2005).

2.2. DILEMA DEL PRISIONERO

Como se ha explicado, la teoría de juegos cuenta con una compilación de juegos entre los que se encuentra el **dilema del prisionero**. Es un juego no cooperativo, estático y con información completa. Por lo tanto, no permite a los jugadores llegar a un acuerdo sobre las estrategias que van a llevar a cabo, así que las decisiones que toman los jugadores se realizan simultáneamente. Además, todos ellos conocen las consecuencias que conlleva su toma de decisiones, tanto para los demás como para sí mismos (Pérez, et al., 2013).

El enunciado básico del Dilema del Prisionero, recogido por Pérez Navarro en su libro '*Teoría de Juegos',* dice que:

"Dos delincuentes habituales son apresados cuando acaban de cometer un delito grave. No hay prueba clara contra ellos, pero sí indicios fuertes de dicho delito y además hay pruebas de un delito menor. Son interrogados simultáneamente en habitaciones separadas. Ambos saben que si los dos se callan serán absueltos del delito principal por falta de pruebas, pero condenados por el delito menor (1 año de cárcel), que si ambos confiesan, serán condenados por el principal pero se les rebajará un poco la pena por confesar (4 años), y finalmente, que si solo uno confiesa, él se librará de penas y al otro se le condenará a 5 años."

Para simplificar este escenario se representa la matriz de las estrategias:

Tabla 2.3: Dilema del prisionero

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	-1, -1	-5, 0
	Confesar	0, -5	-4, -4

Esta matriz de estrategias puede ser modificada con una trasformación nominal, por ejemplo sumando 5, sin verse alterados sus resultados. A partir de ahora será esta matriz la utilizada para el análisis del dilema del prisionero.

Tabla 2.4: Dilema del prisionero modificado

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

El dilema del prisionero se basa en la premisa de que los sujetos son racionales lo que significa que buscarán la maximización de su utilidad, lo cual les reporta el mayor beneficio. Teniendo en cuenta esto se pensaría que ambos optarían por *Callar* y así asegurarse recibir una condena inferior. Pero al llevar la teoría a la realidad se ha comprobado que los sujetos son recelosos a cooperar por temor a la traición del otro. Aquí es donde surge el dilema que da nombre a este juego. Aun sabiendo que *Callar* les ofrece una condena de un año, ambos tienden a C*onfesar* obteniendo unos pagos de 4 años de condena para cada uno. Esto es así porque ninguno confía en el otro y piensan: "si callo y el otro confiesa mi condena es de 5 años y él queda libre" (-5, 0). A esto se le suma la naturaleza humana la cual nos hace egoístas queriendo obtener siempre el mejor resultado. Como el objetivo último del jugador es obtener el máximo beneficio (quedar libre) decide C*onfesar* teniendo la posibilidad de quedar libre si el otro calla.

3. CONCEPTOS DE SOLUCIÓN

Los conceptos de solución son aquellos procedimientos llevados a cabo por los jugadores para obtener, de manera racional, una solución. Hay dos tipos de conceptos de solución: mediante argumentos de dominación y mediante argumentos de equilibrio (equilibrio de Nash[2]).

3.1. ARGUMENTOS DE DOMINACIÓN

Para la solución de los juegos los sujetos utilizarán aquella estrategia que sea mejor que el resto de su conjunto de estrategias y mejor para todas las estrategias del resto de los participantes. Este argumento está basado en el hecho de que un jugador nunca utilizará estrategias dominadas, ya que le proporcionarán siempre menores pagos cualesquiera que sean las estrategias del resto. De acuerdo con Pérez, et al., (2013), los jugadores racionales optarán por el uso de estrategias dominantes y desecharán aquellas estrategias dominadas. Como la premisa básica de la teoría de juegos es que los jugadores son racionales, todos ellos escogerán estrategias dominantes siempre que existan. Los argumentos de dominación incluyen los conceptos de dominación débil y dominación estricta. En un juego $G= \{J, (S_i)_{i \in J}, (u_i)_{i \in J}\}$, dadas dos estrategias s_i y $s_i' \in S_i$, se tiene:

- **Estrategias débilmente dominadas:** la estrategia s_i' está débilmente dominada por s_i (o s_i domina débilmente a s_i') si:

  $$u_i (s_1,\dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1},\dots s_n) \leq u_i (s_1,\dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1},\dots, s_n)$$

  para todo $s_1 \in S_i,\dots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1},\dots, s_n \in S_n$, con al menos una desigualdad estricta.

[2] John Nash (1928-2015) fue uno de los matemáticos más influyentes del siglo XX y XXI. Recientemente ha fallecido junto a su esposa en un accidente de coche.

La estrategia s_i le proporciona pagos mejores o iguales que la estrategia s_i', en todas las situaciones, obteniéndose la mejoría estricta para al menos un perfil de estrategias del resto de los jugadores.

- **Estrategias estrictamente dominadas:** la estrategia s_i' está estrictamente dominada por s_i (o s_i domina estrictamente a s_i') si:

$$u_i (s_1,\ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1},\ldots s_n) < u_i (s_1,\ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1},\ldots, s_n)$$

para todo $s_1 \in S_i,\ldots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1},\ldots, s_n \in S_n$, con todas las desigualdades estrictas. La estrategia s_i le proporciona siempre pagos mejores que la estrategia s_i'.

Si aplicamos este concepto de solución al dilema del prisionero la estrategia *Callar* está estrictamente dominada ya que con *Confesar* los jugadores obtienen pagos mayores.

Tabla 3.1: Solución del Dilema del prisionero

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

Si nos fijamos en las estrategias correspondientes al jugador 1 y del jugador 2:

u_1(*Callar, Callar*)= 4 < u_1(*Confesar, Callar*)=5
u_1(*Callar, Confesar*)= 0 < u1(*Confesar, Confesar*) = 1
u_2(*Callar, Callar*)= 4 < u_2(*Callar, Confesar*)=5
u_2(*Confesar, Callar*)= 0 < u_2(*Confesar, Confesar*) = 1

Vemos que la estrategia *Callar* está estrictamente dominada por *Confesar,* siendo ésta la escogida por ambos jugadores aún a pesar de que esta decisión es contraria al interés conjunto de ambos en el que estarían mejor en (*Callar, Callar*).

Con este concepto de solución no siempre es posible llegar a una solución, ya que los juegos en los que los jugadores tienen estrategias dominantes son escasos. Por lo tanto, se buscan otros modos de dar solución a los juegos. Estas formas serán: la eliminación iterativa estricta y la eliminación iterativa débil.

3.1.1. Eliminación iterativa estricta (EIE)

Este concepto de solución se llevará a cabo de manera simultánea por todos los participantes de un juego. Se identifican las estrategias dominadas del conjunto total de estrategias del juego (G) y se eliminan, dando como resultado un subconjunto del juego (G_1). Este proceso continua del mismo modo hasta que desaparecen todas las estrategias dominadas del juego, resultando un perfil de estrategias "supervivientes" S^{EIE}.

Aplicando la eliminación iterativa estricta al dilema del prisionero el perfil de estrategias resultante sería (*Confesar, Confesar*).

Tabla 3.2: Origen del Dilema del prisionero

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

Comenzamos analizando, con origen en el juego G, las dos estrategias del jugador 1 y observamos que *Callar* tiene unos pagos menores que *Confesar*: 4 frente a 5 y 0 frente a 1. Descartamos entonces la estrategia *Callar* para el jugador 1, reduciendo el juego a una estrategia para el jugador 1 y dos para el jugador 2. El juego reducido será G_1.

Tabla 3.3: Juego reducido G_1

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Confesar*	5, 0	1, 1

Con el jugador 2 ocurre lo mismo, por lo cual descartamos dicha estrategia también, quedando como resultado (*Confesar, Confesar*) y un juego reducido final G_2 con un perfil de estrategias S^{EIE}= (1, 1).

Tabla 3.4: Juego reducido G_2

		Jugador 2
		Confesar
Jugador 1	*Confesar*	1, 1

3.1.2. <u>Eliminación iterativa débil (EID)</u>

Esta forma de resolver un juego es similar a la eliminación iterativa estricta: elimina aquellas estrategias que están tanto estrictamente dominadas como débilmente dominadas. Con lo cual la solución de un juego puede ser diferente dependiendo de qué tipo de eliminación se utilice. Como ejemplo de este hecho, se considera el siguiente juego:

Tabla 3.5: Ejemplo de Juego 1

		Jugador 2		
		I	*C*	*D*
Jugador 1	*A*	3, 1	4, 2	1, 2
	M	2, 4	3, 5	4, 0
	B	1, 0	2, 1	0, 3

Fuente: Pérez, et al., (2013)

En este caso al utilizar la eliminación iterativa débil se llega a un perfil de estrategias S^{EID}= {(A,C)}, en cambio si hubiésemos utilizado la eliminación iterativa estricta la solución habría sido, S^{EIE}= {(A,C), (A, D), (M, C), (M, D)}.

Con respecto al dilema del prisionero, la solución volvería a ser (*Confesar, Confesar*) ya que no hay estrategias que están débilmente dominadas por otras (Pérez, et al., 2013).

Ya hemos visto que la eliminación iterativa débil puede dar soluciones diferentes a las de la eliminación iterativa estricta, pero además las soluciones del juego pueden ser diferentes dependiendo del orden del procedimiento de eliminación.

<u>*Ejemplo:*</u>

Tabla 3.6: Ejemplo de Juego 2

		Jugador 2	
		I	*C*
Jugador 1	*A*	4,2	5,2
	B	4,6	3,1

Fuente: Pérez, et al., (2013)

En este ejemplo las soluciones a las que se llega utilizando EIE son diferentes dependiendo del procedimiento a seguir. Si en primer lugar se empieza con el jugador 1 se eliminará la estrategia B ya que está dominada débilmente por A y la solución del juego será, {(A,I), (A,C)}. Si en cambio se empieza con el jugador 2 la estrategia eliminada será C al estar dominada débilmente por I y su solución correspondiente será, {(A,I), (B,I)}.

3.2. EQUILIBRIO DE NASH

Previamente se han analizado varios juegos y sus soluciones al aplicar diferentes conceptos de solución en los que se ha contado con que los sujetos son racionales y por ello no van a escoger aquellas estrategias dominadas ya sea estricta o débilmente. Pero Nash desarrolló un concepto de solución con un enfoque diferente que no se centra en los individuos y sus elecciones, sino en el perfil de estrategias resultante y en si es una buena predicción del comportamiento de sujetos racionales.

Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \ldots s_i^*, \ldots, s_n^*)$ será un equilibrio de Nash (EN) sí y solo sí

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \text{ para todo } s_i \in S_i, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Si $s^* = (s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash, entonces s_i^* es una solución del problema $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i^*, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ donde s_i es la variable de decisión, es decir, para cada jugador i, s_i^* es una respuesta optima a s_{-i}^*, siendo $s_{-i}^* = (s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ (Pérez, et al., 2013). Así pues, en un equilibrio de Nash s^*, ninguno de los jugadores tiene incentivos a cambiar unilateralmente su estrategia. Para aplicar este concepto de solución al dilema del prisionero,

Tabla 3.7: Dilema del prisionero

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

Se comenzará analizando un perfil de estrategias, como por ejemplo, el (*Callar, Callar*). Nos preguntamos si la estrategia *Callar* sería la elegida por el jugador 1 -sabiendo que el jugador 2 elegiría *Callar*-, la respuesta es "no" porque (*Confesar, Callar*) le da un pago de 5 frente a 4. Lo mismo ocurre con el jugador 2. Considerando (*Confesar, Callar*) como posible candidato a Equilibrio de Nash, se tiene que la elección óptima del jugador 2, fijada la estrategia del jugador 1, sería *Confesar*, y lo mismo ocurre para la estrategia *Confesar* del jugador 1. Así pues, ninguna de las dos estrategias es óptima ya que no maximizan su utilidad. Sucede lo mismo para los perfiles de estrategias restantes, (*Callar, Confesar*) y (*Callar, Callar*). Sin embargo, al analizar el perfil de estrategias (*Confesar, Confesar*) para el jugador 1, teniendo fija la estrategia del jugador 2, es la que maximiza su utilidad u_1(*Confesar, Confesar*)= 1> 0 =u_1

(*Callar, Confesar*). Desde el punto de vista del jugador 2 permaneciendo fija la estrategia del primero, u_2(*Confesar, Confesar*)= 1 > 0 = u_2(*Callar, Confesar*). Así pues el perfil estratégico (*Confesar, Confesar*) es un equilibrio de Nash.

A la hora de analizar los juegos, en este caso el dilema del prisionero, de una forma rápida y sencilla se subrayan aquellos pagos más elevados para cada par de estrategias:

Tabla 3.8: Solución del Dilema del prisionero

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

En primer lugar, comienza el jugador 1 comparando su par de estrategias, para la estrategia *Callar* del jugador 2 elige entre 4 y 5, al ser 5 mayor que 4 se marca 5 en rojo. Seguido, el jugador 1 vuelve a comparar sus dos estrategias para la estrategia *Confesar* del jugador 2. En este caso elige entre 0 y 1, y marca 1 por ser mayor que 0. Ahora se va a analizar desde el punto de vista del jugador 2, con la estrategia fijada *Callar* del jugador 1 se comparan 4 y 5, eligiendo 5, que se señala en azul. Para la estrategia del jugador 1 *Confesar* se comparan 0 y 1 y se marca el 1. Una vez analizadas todas las posibles estrategias de los dos jugadores se observa cuál es el par de estrategias doblemente señalado, éste será el equilibrio de Nash, en este caso es (*Confesar, Confesar*). Este es el protocolo a seguir cuando el número de jugadores y de estrategias es finito (Pérez, et al., 2013).

El equilibrio de Nash es una generalización de los conceptos de solución anteriormente mencionados, la eliminación iterativa estricta y la eliminación iterativa débil. Todos estos conceptos pueden dar lugar a soluciones diferentes para los juegos, aunque en alguno pueden coincidir. Este es el caso del dilema del prisionero en el que todos los conceptos de solución nos llevan al mismo perfil estratégico (*Confesar, Confesar*). Se observa que esta solución del juego no es eficiente en el sentido de Pareto por reportar unos pagos menores que el perfil de estrategias (*Callar, Callar*). Se conseguirá la eficiencia de Pareto cuando la solución de un juego permite a todos los sujetos disfrutar del máximo bienestar. En el momento que alguno de ellos obtuviera más bienestar con otra asignación, no sería Pareto-eficiente.

Con respecto al dilema del prisionero, hemos visto que el único perfil estratégico no dominado es (*Confesar, Confesar*), pero a su vez advertimos que es ineficiente en el sentido de Pareto, ya que si nos moviéramos al perfil (*Callar, Callar*) se mejoraría la situación de ambos jugadores. Ambas soluciones son eficientes pero a distintos niveles. Mientras que el perfil de estrategias (*Confesar, Confesar*) es eficiente desde el punto de vista individual, (*Callar, Callar*) es eficiente desde el aspecto social. Siempre que las condiciones del juego establecidas no cambien, se juegue solo una vez y no se permita la colaboración entre los sujetos, el resultado del dilema del prisionero será (*Confesar, Confesar*). En cambio, si dicho juego se realizara entre dos sujetos con una relación de confianza mutua tal como la de un padre y un hijo al uso, la solución cambiaría al otro perfil de estrategias eficiente.

Sin embargo, ¿qué pasaría si este mismo juego se repitiera un número finito de veces? ¿Y un número infinito? Para saberlo se estudian los juegos repetidos, finita e infinitamente.

4. JUEGOS REPETIDOS

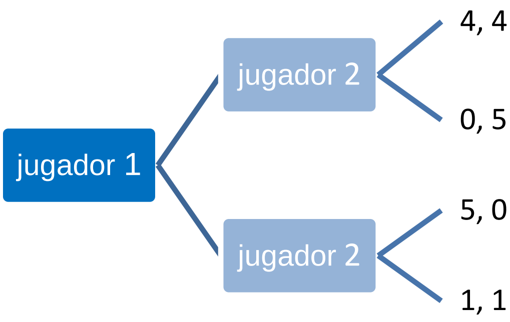
Existen juegos en los que los sujetos saben que la relación existente entre ellos será duradera, lo que quiere decir que la situación en la que se encuentran se repetirá, por lo que el juego habrá de jugarse también en el futuro. Estos juegos repetidos estarán constituidos por los mismos jugadores en igualdad de circunstancias que en la ronda inicial y sabiendo que todos ellos conocerán su actuación presente. Como consecuencia de la información adquirida en la primera ronda, o etapa, los sujetos podrían actuar en rondas posteriores de igual manera que en ésta. Por ello, no será posible analizar cada ronda de interacciones de manera aislada, sino que será necesario tener en cuenta todas las rondas jugadas; es decir, cada etapa no es considerada como un juego independiente y el conjunto una acumulación de juegos, sino como un juego completo con diferentes rondas (Fernández Ruíz, 2002).

Esta situación puede darse durante un numero finito o infinito de veces.

4.1. JUEGOS REPETIDOS FINITAMENTE

Con respecto al dilema del prisionero, ambos jugadores deben elegir entre *Callar* y *Confesar*, al igual que en el enunciado original, con la diferencia de que esta vez no conocen la decisión que el otro jugador tomará en el futuro. Si el juego no se repite, se juega una única vez (T=1) y ambos sujetos no vuelven a verse. La representación en forma normal es como la representada anteriormente, pero también es posible representarla de forma extensiva:

Figura 4.1: Dilema del prisionero en forma extensiva, T=1

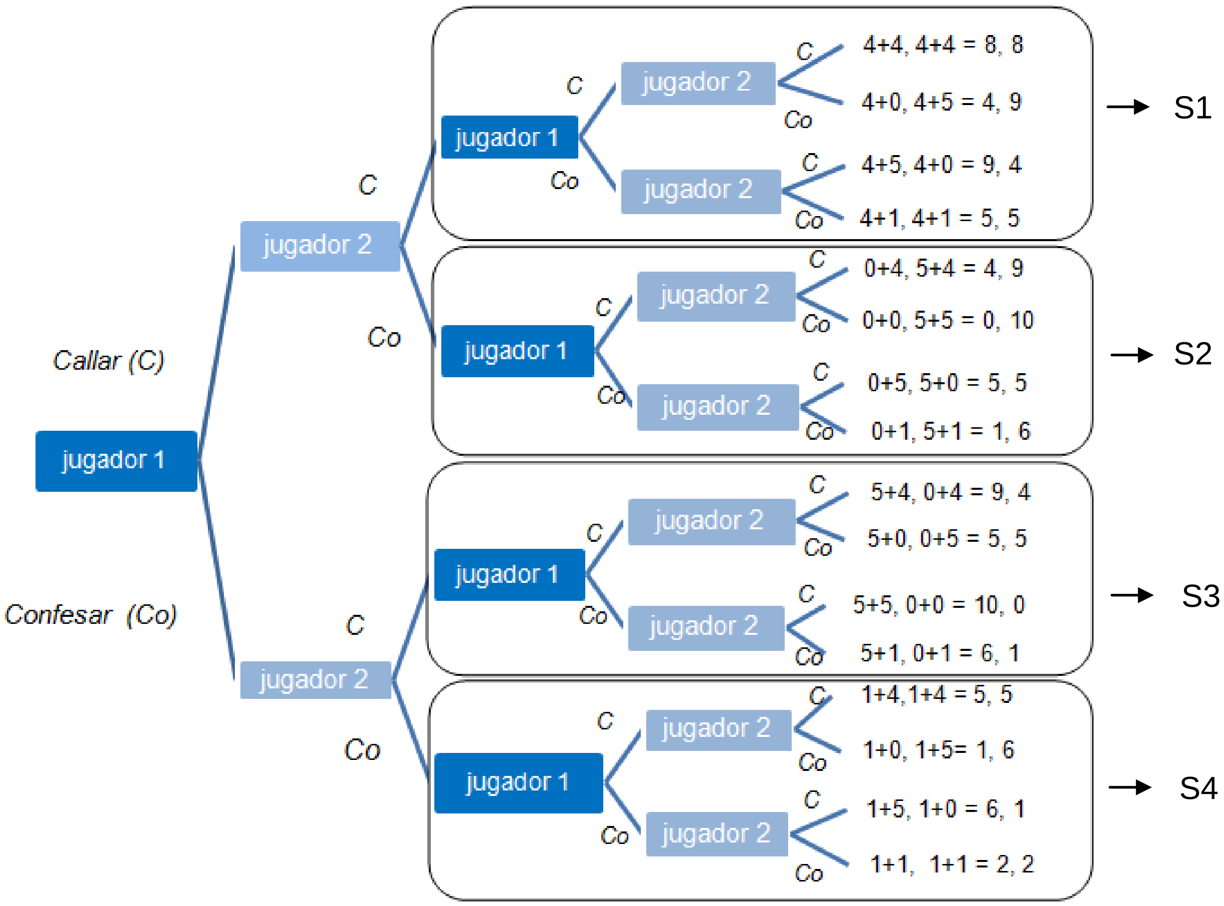


Esta vez en lugar de jugar solo una vez, jugaran el juego dos veces (T=2), debiendo decidir simultáneamente entre *Callar* o *Confesar*. Sabiendo que los pagos de cada uno serán la suma de los pagos que se les otorgaría al elegir una u otra estrategia en ambas rondas. El método a seguir para la determinación del resultado se denomina *'inducción hacia atrás'*.

Viendo la representación del dilema del prisionero, jugado dos veces, en forma extensiva (Figura 4.2) se observa que el inicio de la siguiente ronda del juego comenzaría en la segunda interacción del jugador uno. En esta situación los sujetos tienen que elegir de entre cinco estrategias, a saber, debe elegir qué hacer al comienzo del juego; qué hacer si el otro jugador elige C*onfesar*;

qué hacer, en caso contrario, si el otro sujeto decide *Callar*; cómo actuar si ambos confiesan y cómo hacerlo si ambos callan. Por lo tanto ambos jugadores contarían con un número de estrategias de 2^5=32. Todas ellas pueden representarse, en la forma normal, en una tabla de 5 filas por 5 columnas. Dicha tabla puede representarse a su vez por separado en cuatro tablas, correspondientes a cada subjuego marcado en la Figura 4.2 (S1, S2, S3, S4).

Figura 4.2: Forma extensiva Dilema del prisionero, T= 2



Tablas 4.3: Representación en forma extensiva de los cuatro subjuegos

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	8, 8	4, 9
	Confesar	9, 0	5, 5

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	4, 9	0, 10
	Confesar	5, 5	1, 6

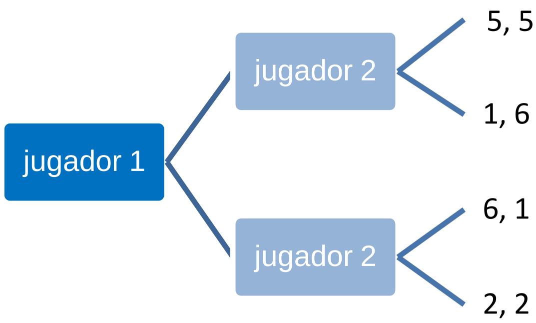
		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	9, 4	5, 5
	Confesar	10, 0	6, 1

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	5, 5	1, 6
	Confesar	6, 1	2, 2

Fuente: Elaboración propia basada en (Fernández Ruíz, 2002)

Para simplificar este escenario se podría decir que ambos jugadores tienen que escoger su estrategia idónea entre qué hacer en la primera etapa del juego, qué hacer en la siguiente etapa si el otro jugador “calla” y qué hacer si éste “confiesa”. En este caso los jugadores eligen entre un numero más ‘manejable’ de estrategias, 2^3=8, las cuales pueden representarse en un nodo final compuesto por aquellos perfiles de estrategias escogidos de entre las matrices anteriores, los cuales son equilibrios de Nash.

Figura 4.4: Forma extensiva tras la inducción hacia atrás



Fuente: (Fernández Ruíz, 2002)

Se podría pensar que los jugadores van a actuar de un modo diferente del anterior, en cambio al estudiar el dilema del prisionero con juegos repetidos se da de nuevo el mismo resultado. Los sujetos no cooperarán y por lo tanto confesarán para conseguir una pena más reducida. Lo que sí ha cambiado en esta variante del dilema del prisionero es que en la primera etapa del juego ambos sujetos cooperan y deciden *Callar*, pero en la segunda etapa, ambos confiesan ya que esta estrategia es un equilibrio de Nash en el dilema del prisionero. Si se escogen los juegos en los que en la segunda ronda ambos jugadores confiesan se obtiene el juego transformado. (Fernández Ruíz, 2002). El perfil estratégico que es solución del juego – (C*onfesar*, C*onfesar*)- se denomina como Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS) al cual llegamos tras la inducción hacia atrás. El resultado del juego es el nodo final representado en la figura 4.6 que también puede representarse en modo normal:

Tabla 4.7: Forma extensiva tras la inducción hacia atrás

		Jugador 2	
		Callar	*Confesar*
Jugador 1	*Callar*	5, 5	1, 6
	Confesar	6, 1	2, 2

Fuente: (Fernández Ruíz, 2002)

En definitiva, todo esto viene a demostrar que si un juego tiene solo un EN, entonces para cualquier número finito de repeticiones que se produzcan del juego, el juego repetido tendrá también un único ENPS.

4.2. JUEGOS REPETIDOS INFINITAMENTE

Los juegos repetidos infinitamente son básicamente iguales a los juegos repetidos finitamente, con la variante de que éstos terminan en un determinado momento del tiempo y, en cambio, en los repetidos infinitamente no se conoce cuándo terminarán. En los juegos repetidos -tanto finitamente como infinitamente- con información completa, se atiende a la evolución de ciertas formas de conducta entre las personas.

> *"Its aim is to account for phenomena such as cooperation, altruism, revenge,threats,… _phenomena which may at first seem irrational. In terms of the usual "selfish" utility-maximizing paradigm of game theory and neoclassical economics."* (Robert J. Aumann, 1981).

En esta modalidad de juegos no es seguro si la interacción de los sujetos se va a quedar parada para siempre tras haber jugado un número determinado de veces -dando lugar a un juego repetido finitamente- o si en un futuro se va a continuar jugando -repetido infinitamente-. Por esta razón no se puede decir que una etapa del juego es la final y que se podrá analizar el juego resultante, es decir, *"podemos interpretar como juego repetido infinitamente como aquel en el que aunque cada interacción pudiera ser la última, siempre existe una probabilidad positiva de que no lo sea."* (Fernández Ruíz, 2002).

Aplicado al dilema del prisionero, se dilucida un juego en el que hay una probabilidad determinada de que dicho juego termine tras la última interacción de uno de los sujetos pero existe a su vez otra probabilidad de que no sea así. Dichas probabilidades se expresan como (1- ∂) y ∂, respectivamente. Todo esto tiene una repercusión en el juego y es que no se podrá calcular su utilidad del mismo modo que con anterioridad. Por ejemplo, en el caso de que ambos jugadores elijan cooperar (*Callar*) pase lo que pase, ambos conseguirán un pago de 4 en el primer periodo. Obtendrían otro de igual cuantía en el segundo periodo si fuera un juego repetido finitamente, pero esta vez el juego continuará con una probabilidad de que esto pase de ∂, por lo tanto el pago ya no será 4 sino 4∂. En el tercer periodo la probabilidad será de ∂^2 y sus pagos de $4\partial^2$, así que el pago esperado en cada periodo es igual a $4[1+\partial+\partial^2+\ldots+\partial^{n-1}+\ldots]$. El significado de que los pagos se multipliquen por ∂^{n-1} es que los pagos cuanto más lejanos en el tiempo menos valor tiene para los jugadores, es decir que éstos prefieren 4 si se los dan en la actualidad a los 4 que puede ganar en el futuro.

Las estrategias escogidas por los jugadores a lo largo del juego y en función de cómo actuar teniendo en cuenta las diferentes actuaciones del resto y de las circunstancias en las que cada uno juegue para un periodo de tiempo 'n' se llamara "historia del juego hasta el periodo n" y abarcará 1-n periodos (Fernández Ruíz, 2002).

Con relación a este concepto y para plasmar la idea de manera clara se toma como ejemplo "la estrategia del gatillo".

4.2.1. La estrategia de gatillo[3] o del disparador

Esta estrategia se caracteriza por la forma de actuar de los jugadores ya que todos cooperarán, escogerán la estrategia *Callar*, en la primera ronda del juego y continuarán cooperando en todas las posteriores si en las anteriores el jugador contrario así lo ha hecho. En el caso de que uno de los dos cambie su estrategia a no cooperar (*Confesar*), el otro sujeto así lo hará también cuando le llegue el turno. Se dice que los jugadores "disparan" una reacción que se mantendrá fija en el tiempo, acorde con la actuación del otro jugador (Singer, 2014).

Esto implica que si en el dilema del prisionero los jugadores comienzan eligiendo la estrategia *Callar*, así se continuará hasta el fin del juego aún siendo éste infinito, y se alcanza el estado de equilibrio en la cooperación, siempre y cuando ambos jugadores lleven a cabo dicha estrategia y no se aparten de ella. Esto se confirma si se considera que el jugador 2 tiene una estrategia de gatillo y que el jugador 1 comience eligiendo la estrategia *Callar* consiguiendo así que

[3] Denominado en inglés *'Trigger Strategy'.*

el jugador 2 elija dicha estrategia siempre. Los pagos obtenidos serán de $4[1+\partial+\partial^2+\ldots+\partial^{n-1}+\ldots]= 4(1/(1-\partial))$.

Sin embargo, puede suceder que el jugador 1 no siga la estrategia de gatillo y escoja C*onfesar* en algún momento, por lo que el jugador 2 deja de cooperar. En este escenario el equilibrio se alcanzará en la no cooperación. Esto le reporta unos pagos de 5 en el primer periodo pero de 1 en los demás consiguiendo así un pago final de $5+1(\partial/(1-\partial))$. Siendo así al jugador 1 le conviene seguir con la estrategia de gatillo si el pago obtenido en el primer caso es mayor o igual al del segundo caso:

$$4(1/(1-\partial)) \geq 5+1(\partial/(1-\partial)) \text{ ó } \partial \geq 1/4$$

De este modo se alcanzarán dos equilibrios dependiendo de si el jugador 1 se aparta o no de la estrategia de gatillo, ambos serán equilibrio de Nash, ya que el jugador 1 maximiza su utilidad cuando el jugador 2 sigue la estrategia de gatillo, al no cambiar nunca su elección. Es decir, si el jugador 1 escogiera *Confesa*r o *Callar*, el jugador 2 continuaría con dicha estrategia hasta el final y el jugador 1 seguiría con esta estrategia si quiere maximizar su utilidad.

Folk Theorems

Los *Folk Theorems* o teoremas de tradición popular se denominan así por ser un conocimiento que la mayoría de la gente tiene de manera intuitiva. Dentro de esta categoría se encuentra el Teorema de Friedman propuesto en 1971 por Milton Friedman, Nobel de Economía en 1996.

Estos teoremas sostienen que cualquier resultado posible, con el que el total de jugadores implicados obtienen un beneficio superior que el alcanzado en un EN de la versión estática del juego, puede sostenerse como un EN en la versión infinitamente repetida del mismo, siempre y cuando los jugadores valoren lo suficiente el futuro (Coloma, 2002).

4.2.2. Estrategia Tit for Tat[4] (TFT)

Esta estrategia consiste en que el jugador en su turno realizará la misma acción que el otro jugador en la ronda anterior, habiendo elegido en la primera etapa ambos la estrategia *Callar.* De este modo se consigue la cooperación a lo largo de todo el juego, sean cuales sean el número de veces en que se repite el juego. Para determinar si este perfil de estrategias es un EN y a su vez un ENPS se llevan a cabo los siguientes cálculos:

- Será un EN si cumple la condición de que el perfil estratégico seguido por la estrategia TFT es una respuesta óptima para ambos jugadores en todas las rondas.

  Si por *ejemplo*: en la primera ronda ambos callan dándoles unos pagos de (4, 4). En un momento determinado el jugador 1 se da cuenta de que si modifica su estrategia podría conseguir un pago de 5, teniendo en cuenta que el otro jugador mantuviera su estrategia de *Callar*. Esta situación solo durará un periodo ya que el otro jugador cambiará su estrategia a *Confesar* al haber sido "traicionado". Si el castigo dura únicamente un par de rondas el jugador 1 puede comparar los pagos obtenidos en el caso de continuar con la estrategia *Callar* y en el caso de modificarla:

  - Si continúa con *Callar* obtiene unos pagos de $4+4\partial$
  - Si cambia su estrategia obtendrá $5+0\partial= 5$

  Continuará con *Callar* en caso de que $5 \leq 4+4\partial$ ó $\partial\geq1/4$.

  Sin embargo, ¿qué ocurre si el jugador 2 implanta su castigo durante un número indefinido de rondas? En este caso, al "castigar" el jugador 2 al 1 el pago que obtiene este último es de 1. Así que para saber qué ocurre con la decisión que debe tomar el jugador 1 se comparan sus pagos con el cambio y sin él:

  - Si no hay cambio sus pagos son $4+4\partial+\ldots+4\partial^n+\ldots= 4/(1-\partial)$
  - Si cambia su estrategia obtiene $5+0\partial+0\partial^2+\ldots+0\partial^n+\ldots= 5+ \partial/(1-\partial)$

  Al igual que antes, para no modificar la estrategia los pagos de ésta deben ser mayores o iguales a los de modificarla, $5+ \partial/(1-\partial)\leq4/(1-\partial)$ ó $\partial\geq1/4$.

[4] Su significado es 'toma y daca' u 'ojo por ojo'. Tiene connotaciones referentes al judaísmo y la Ley del Talión en la cual se castiga un crimen con reciprocidad, su dicho más conocida es 'ojo por ojo' recogido en Éxodo 21:24.

Se deduce con esto que la estrategia TFT será un EN cuando $\partial \geq 1/4$.

- Será un ENPS el perfil estratégico TFT si a ambos jugadores les conviene seguir dicho perfil estratégico siempre.

  En el caso del jugador 1, si el subjuego de la ronda anterior fue (*Callar*, *Confesar*) su motivación es la de cambiar de estrategia a *Confesar* y el jugador 2 cambiará a su vez a las estrategia *Callar*. Se consigue así una sucesión de estrategias intercaladas a lo largo del tiempo, obteniendo el jugador 1 unos pagos de $5+0\partial+5\partial^2+0\partial^3+5\partial^4+\ldots= 5/(1+\partial^2)$. En cambio si el jugador 1 continuara con la estrategia *Callar* -no continua con el perfil estratégico TFT- el perfil estratégico sería (*Callar*, *Callar*) a lo largo del tiempo, obteniendo así uno pagos de $4+4\partial+4\partial^2+4\partial^3+4\partial^4+\ldots= 4/(1+\partial)$.

  En el caso de que $4/(1+\partial)\geq 5/(1+\partial^2)$ no hay ENPS, esto ocurre cuando $\partial \geq 1/4$. Por lo tanto:

  - Si $\partial \geq 1/4$ la estrategia Tit for Tat es un EN pero no ENPS.
  - Si $\partial < 1/4$ la estrategia Tit for Tat no es EN pero sí ENPS.

Haciendo un análisis de todo lo anterior se llega a la conclusión de que por vez primera se sostiene la cooperación en el dilema de prisionero por medio de la "coacción" (Pérez, et al., 2013).

De hecho la estrategia Tit for Tat fue estudiada por Robert Axelrod (1986) mediante un Torneo Computarizado del Dilema del Prisionero. Invitó a expertos en la materia a enviar sus propuestas de cuál era la mejor estrategia a seguir para a la hora de tomar decisiones. Tal y como cuenta él mismo en su libro *'La evolución de la cooperación'* (1986) la estrategia que batió a todas fue el Tit for Tat. Ante el asombro por los resultados decidió realizar otra ronda de juegos con estrategias diferentes o modificadas enviadas por los expertos anteriormente citados y por otros nuevos. Tras recibir setenta y dos propuestas desde seis países diferentes se puso el concurso en marcha y de nuevo el vencedor fue el Tit for Tat. Estos resultados le hicieron plantearse la relevancia de tan simple estrategia y estudiarla en profundidad. En su libro demuestra que el Tit for Tat o Toma y Daca es eficaz porque se consigue por primera vez la colaboración entre los dos sujetos gracias a la reciprocidad. Los sujetos no consiguen el mejor resultado para sí mismos sino que consiguen el mejor resultado para ambos, '*la cooperación mutua puede ser para ambas partes mejor que la defección mutua. La clave para lograr buenos resultados no estriba en vencer a otros, sino en obtener su cooperación.'* (Axelrod, 1986).

5. MODELO DE COURNOT[5]

La teoría de juegos, como ya se ha dicho con anterioridad, se ha usado para la investigación en diversos campos de estudio a lo largo de los años. Una de esas aplicaciones es el Oligopolio de Cournot, consiste en la aplicación de la teoría de juegos en el ámbito industrial. Cournot fue uno de los impulsores de la teoría de juegos. En 1838 desarrolló un modelo en el que un número reducido de empresas interactuaban dentro de un mercado en el que se ponía a la venta un producto homogéneo. Dichas empresas debían competir en cantidades, es decir tenían que determinar la cantidad que querían vender de dicho producto de manera simultánea. Tal cantidad puesta a la venta era establecida por la función de demanda inversa, una vez puesta a la venta una determinada cantidad se estipulaba el precio.

Dentro del modelo de Cournot se distinguen dos casos, el Duopolio y el Oligopolio de Cournot. El primero se caracteriza por ser una interacción entre dos empresas, mientras que el oligopolio está compuesto por 'n' empresas.

5.1. DUOPOLIO DE COURNOT

En este caso hay dos empresas que compiten en un mismo mercado ambas con un producto homogéneo. Tal y como se ha dicho antes, compiten en cantidades, lo que significa que escogen la cantidad a producir y dependiendo de ella se establece el precio. Las empresas se van a denominar como E_1 y E_2 y las cantidades que va a producir cada una q_1 y q_2 respectivamente. Se sabe que su función de demanda inversa, función que establece los precios, es decreciente y lineal para el intervalo cerrado [0, *a/b*], que los costes marginales –iguales a los costes variables (*c*)- son constantes, menores a *a* e iguales para ambas empresas. Además sus costes fijos son

[5] Antoine Augustin Cournot (1801-1877) fue un matemático francés impulsor de la matematización de las funciones económicas como la oferta y la demanda. (eumed, s.f.)

nulos y la cantidad que se va a producir es igual a la que se vende. La demanda inversa viene determinada por la función:

$$P(Q) = \begin{cases} a\text{-}bQ & \text{si} \quad bQ < a \\ 0 & \text{si} \quad bQ \geq a \end{cases} \qquad \text{(siendo } Q = q_1 + q_2 \text{ ; } b > 0 \text{ y } a > 0\text{)}$$

La función de costes para cada empresa es:

$C_1 (q_1)= cq_1$; $C_2(q_2)= cq_2$ (siendo $c < a$)

La utilidad de cada empresa es igual a los beneficios que obtienen por la venta del producto, esto es así porque las empresas tienen preferencias racionales:

$$\Pi_1 (q_1, q_2)= q_1(a- bq_1 - bq_2) - cq_1 = q_1(a- bq_1 - bq_2 – c) = u_1(q_1, q_2)$$

$$\Pi_2 (q_1, q_2)= q_2(a- bq_1 - bq_2) – cq_2 = q_2(a- bq_1 - bq_2 – c)= u_2(q_1, q_2)$$

Una vez descritas las funciones de demanda, de costes y de utilidad de las empresas el objetivo es determinar el punto de equilibrio entre las dos, es decir el equilibrio de Nash. La respuesta óptima de cualquiera de las dos empresas para una estrategia fijada de la otra (q_1 o q_2) se determina resolviendo la siguiente función -en caso de que lo hiciéramos para E_1- :

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1 \ (a - bq_1 - bq_2 - c) \qquad \text{(Sujeto a } 0 \leq q_1 \leq a/b\text{)}$$

Se trata de la maximización de los beneficios o, en este caso, de la maximización de la utilidad de la empresa ya que es el objetivo último de ésta, conseguir el máximo beneficio o el máximo pago. Se supone que la solución va a estar dentro del intervalo cerrado [0, *a/b*], en el que se cumple que la cantidad que van a producir ambas empresas es positiva y además que para cada cantidad producida los beneficios son máximos. Estas dos situaciones se denominan condiciones de primer y segundo orden respectivamente y se comprueban del siguiente modo:

- Condición de primer orden:

$$d\, u_1(q_1, q_2)/\, dq_1 = a - 2bq_1 - 2q_2 - c = 0 \quad \rightarrow \quad q_1 = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

- Condición de segundo orden:
  $d^2\, u_1(q_1, q_2)/\, dq_1^2 = -2b < 0$ (Se cumple al ser menor que 0, es un máximo)

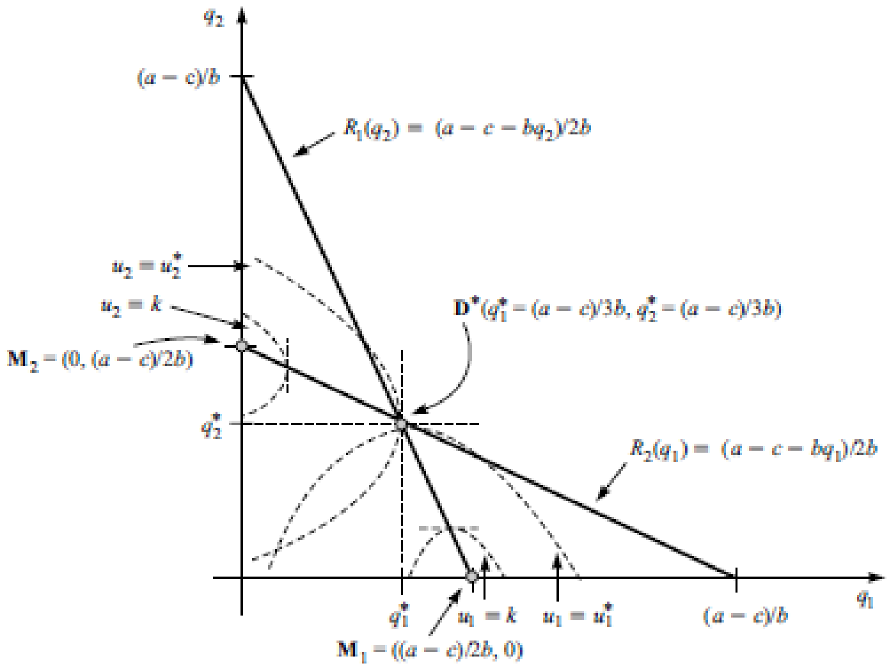
Por lo tanto la respuesta óptima de E_1 será $R(q_1) = \frac{a-bq_2-c}{2b}$ y la de E_2 se obtiene análogamente por lo tanto su respuesta óptima será $R(q_2) = \frac{a-bq_1-c}{2b}$. Si ambas son la respuesta óptima entonces significará que q_1^* es la respuesta óptima para q_2^* y q_2^* lo es para q_1^*, *entonces* (q_1^*, q_2^*) es el EN, por lo tanto se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{a - bq_2^* - c}{2b} \\ q_2^* = \dfrac{a-bq_1^*-c}{2b} \end{cases} \rightarrow \quad q_2^* = \frac{a-c-b\left(\frac{a-c-\,bq_2^*}{2b}\right)}{2b} = \frac{a-c+bq_2^*}{4b}$$

Despejando la incógnita se obtiene $q_2^* = \frac{a-c}{3b}$ y de forma análoga $q_1^* = \frac{a-c}{3b}$ por lo tanto el punto de equilibrio son: S^{EN}= $\{(q_1^* = \frac{a-c}{3b}; q_2^* = \frac{a-c}{3b})\}$. La cantidad producida en equilibrio es Q* = q_1^* + q_2^* = $2(\frac{a-c}{3b})$, el precio en equilibrio es $P(Q^*)= a-bQ^*= \frac{a+2c}{3}$, por lo tanto los beneficios en equilibrio serán $u_1^* = u_1^*(q_1^*, q_2^*) = q_1(a- b\frac{a-c}{3b} - b\frac{a-c}{3b} - c) = \frac{(a-c)^2}{9b}$ y $u_2^* = \frac{(a-c)^2}{9b}$. Así que el beneficio total es $U^* = \frac{2(a-c)^2}{9b}$.

La representación grafica de dichos puntos es:

Figura 5.1: Representación Duopolio de Cournot



Fuente: (Pérez, et al., 2013)

Los puntos representados como M_1 y M_2 son los beneficios que la empresa obtendría en una situación de monopolio, el punto D* constituye el equilibrio de Nash. Las curvas discontinuas reflejan las utilidades que cada empresa obtiene para cada cantidad de producto, gracias a ellas se demuestra que D* es el punto de equilibrio ya que para otra cantidad fabricada por cualquiera de las dos empresas el beneficio proporcionado por las curvas de utilidad es menor (Pérez, et al., 2013).

Se observa de este modo que el Duopolio de Cournot es un dilema del prisionero ya que ambos jugadores tienen incentivos a la no cooperación, al ser los beneficios mayores que los que se obtienen cuando cooperan:

- Sin cooperar, en el EN, la cantidades a producir por cada una de las empresas serían $q^*_1 = \frac{a-c}{3b}$ y $q^*_2 = \frac{a-c}{3b}$, las cuales llevarían a unos beneficios individuales de: $u_1^* = \frac{(a-c)^2}{9b}$ y $u_2^* = \frac{(a-c)^2}{9b}$, respectivamente.

- Cooperando[6] las cantidades a fabricar por cada una de las empresas sería dividir la cantidad a producir en el monopolio entre las dos, es decir: $q_1 = \frac{a-c}{4b}$ y $q_2 = \frac{a-c}{4b}$. Sus beneficios individuales serían:

  $u_1 = u_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c) = \frac{(a-c)^2}{8b}$ y análogamente $u_2 = \frac{(a-c)^2}{8b}$.

Se puede fácilmente comprobar que los beneficios los beneficios obtenidos dividiendo entre las dos empresas la solución del monopolio son superiores a la situación del EN, ya que $\frac{a-c}{8b} > \frac{(a-c)^2}{9b}$.

5.2. OLIGOPOLIO DE COURNOT

En este caso el mercado está compuesto por un numero 'n' de empresas que compiten, al igual que en el duopolio de Cournot, con un producto homogéneo y en cantidades, no en precios. Las empresas participantes se denominan E_1, E_2, E_3,…E_n y las cantidades que producen q_1, q_2, q_3,…q_n. sea una empresa E_i la cantidad producida será q_i y su demanda inversa:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si} \quad bQ < a \\ 0 & \text{si} \quad bQ \geq a \end{cases} \qquad (\text{siendo } Q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n \text{ y } b > 0)$$

La función de costes para cada empresa es:

$C_i(q_i) = cq_i$ (siendo $c < a$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$)

Los beneficios que obtienen las empresas por la venta del producto, iguales a sus utilidades, son:

$$u_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = q_i\, P(q_i + Q_{-i}) - C(q_i) = q_i\,(a - b(q_i + Q_{-i}) - c)$$

siendo $Q_{-i} = q_1 + \ldots + q_{i-1} + \ldots + q_n$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Al igual que en el caso anterior de duopolio, una vez descritas las funciones se pasa a determinar el equilibrio de Nash. La respuesta óptima de

[6] En la realidad esta situación no sería posible ya que las empresas tienen prohibida la colusión según la Ley 15/2007, de 3 de julio, de Defensa de la competencia recogida en el BOE.

cualquiera de las empresas para una estrategia q_i de las otras, se hallará resolviendo la siguiente ecuación:

$\max_{q_i} u_i(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n) = q_i\ (a - b(q_i + Q_{-i}) - c)$ sujeto a $0 \leq q_i \leq a/b$

Como en el duopolio, se tienen en cuenta las condiciones de primer y segundo orden para la maximización de los beneficios, por lo que se va a derivar dos veces la ecuación anterior.

- Condición de primer orden:

$d\, u_i(q_i, q_{-i}) /\, dq_i = P(q_i + Q_{-i}) - dC_i(q_i) /\, d\, q_i + q_i dP(q_i + Q_{-i}) /\, d\, q_i = 0$

Resolviendo queda $a - 2bq_i - bQ_{-i} - c = 0$

- Condición de segundo orden:

$d^2\, u_i(q_i, q_{-i}) /\, dq_i^2 = -2b < 0$ (Se cumple al ser menor que 0)

Por todo lo anterior $(q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$ será un EN si cumple las 'n' condiciones de primer orden:

$a - 2bq_i^* - bQ^*_{-i} - c = 0$ sabiendo que $Q^*_{-i} = (1-n)q_i^* \rightarrow$

$a - 2bq_i^* - b(1-n)q_i^* - c = 0$ en la que despejando $q_i^* = \frac{a-c}{(n+1)b}$ para todo i= 1, 2,…, n.

En definitiva, el punto de equilibrio es:

$$(q_1^* = \frac{a-c}{(n+1)b}, \dots, q_i^* = \frac{a-c}{(n+1)b}, \dots, q_n^* = \frac{a-c}{(n+1)b})$$

La cantidad de producto producida Q*= $n\frac{a-c}{(n+1)b}$ es y el precio en el punto de equilibrio $P^* = a - bQ^* = \frac{a+nc}{n+1}$ siendo por tanto los beneficios:

$u_i^* = q_i^*(a - b(q_i + Q_{-i}) - c) = q_i^*(a - n\frac{a-c}{(n+1)} - c) = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b}$ para todo i= 1, 2,…, n.

siendo el beneficio total $U^* = u^*_1 + \dots + u^*_n = \frac{n(a-c)^2}{(n+1)^2 b}$.

Como se ha hecho en el caso anterior, en el Oligopolio de Cournot también se comprueba que es un dilema del prisionero por tener los jugadores alicientes para no cooperar, al ser los beneficios mayores que los que se obtienen cuando cooperan:

- No cooperando, en el EN, la cantidades a producir por cada una de las empresas serían $q^*_i = \frac{a-c}{(n+1)b}$ para todo i= 1, 2,…, n; las cuales llevarían a unos beneficios individuales de: $u^*_i = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b}$ para todo i= 1, 2,…, n.
- Cuando se reparten las solución de monopolio cooperando, es decir, cuando la producción de cada una de las empresas es $q_i = \frac{a-c}{2nb}$ para todo i= 1, 2,…, n, sus beneficios serían: $u_i = q_i(a - b(q_i + Q_{-i}) - c) = \frac{(a-c)^2}{4nb}$ para todo i= 1, 2,…, n.

Se puede fácilmente comprobar que los beneficios en la cooperación son superiores a la situación no cooperativa del EN, ya que $\frac{(a-c)^2}{4nb} > \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b}$.

6. EJEMPLOS DEL DILEMA DEL PRISIONERO

Como se ha apuntado previamente, el dilema del prisionero no es un juego teórico que se plasma solo en los libros, sino que es un juego muy analizado a lo largo de la historia por cantidad de estudiosos en muy diversos campos. En este apartado se quiere reflejar este carácter práctico del dilema del prisionero, para ello se van a numerar una serie de ejemplos prácticos en los que se da el dilema del prisionero. Estamos rodeados de estos ejemplos prácticamente a todas horas, un ejemplo de ello es el deporte, el ciclismo en este caso. Se da la situación en la que dos ciclistas se apartan del pelotón y han de intercambiar posiciones a lo largo de la etapa, sus opciones son o bien irse turnando (colaboración) o que uno lo haga solo y el otro, probablemente el ganador (no colabora), se beneficie del compañero (colabora). Con respecto a temas políticos actuales, la situación podrían ser dos países implicados en una *carrera armamentística* barajando la posibilidad de reducir su armamento o seguir invirtiendo en él.

Existen miles de ejemplos que podrían ilustrar este tema pero los más destacables son los que siguen.

6.1. LOS ARANCELES

En este caso en particular se verían involucrados dos países, ambos tienen incentivos para establecer barreras arancelarias que limiten la entrada de un producto o varios al mercado nacional propio. La aplicación de un impuesto sobre los productos importados del otro país es consecuencia del deseo de vender el producto nacional por delante del extranjero. Es una situación que ejemplifica el dilema del prisionero porque ambos países tiene las opciones de colaborar o no colaborar. Si colaboran los impuestos que establezcan cada uno de ellos sobre los productos del otro serán razonables, no demasiado altos. En cambio, si no colaboran estos impuestos pueden llegar a ser desorbitados e imposibles de hacer frente por el otro país. Los encargados de establecer los aranceles son los gobiernos y, en teoría, promoverán la colaboración ya que mediante ella podrán exportar sus productos y ser gravados con un arancel apropiado y asequible. En general los gobiernos realizan una estrategia Tit for Tat, colaboran si el otro gobierno así lo hace pero dejan de colaborar cuando el opuesto no colabora. Con esa "amenaza" en mente y teniendo en cuenta que hoy en día gracias a la globalización los países están intercomunicados y estableciendo acuerdos, el interés es colaborar entre ellos. Esta situación en la que los agentes interactúan repetidamente es descrita por Axelrod (1986) en su libro '*La evolución de la cooperación'* como una situación en la que la *sombra del futuro es muy amplia,* es decir que ambos agentes saben que la interacción será duradera y para conseguir la máxima utilidad deben cooperar.

6.2. LA CONTAMINACIÓN

En el caso de la contaminación se ve claramente por qué ilustra el juego del dilema del prisionero. Los sujetos tienen la opción de contaminar o no, es decir no colaborar con el gobierno (ya que es el que pone las normas de sanidad y medio ambiente) o colaborar no contaminando.

Dentro de este caso se encuentran, en primer lugar los empresarios. Éstos tienen la elección de contaminar o no, en un primer momento parece que lo más beneficioso sería no contaminar ya que el gobierno puede sancionarle con una multa por la eliminación irresponsable de desperdicios. Además a la larga se ha demostrado que para las empresas es más beneficioso no contaminar o de lo contrario su actividad empresarial se podría ver afectada por las repercusiones de la contaminación. Pero y entonces, ¿por qué muchas empresas siguen contaminando? Ésta es la clara situación del dilema del prisionero en la que los sujetos terminan no cooperando y consiguiendo unos pagos menores que con la cooperación. Muchas empresas pueden pensar que se ahorran lo costes que acarrea la depuración de residuos y no tienen en cuenta los factores arriba mencionados para no contaminar. Por ello, los gobiernos mediante leyes y normas fuerzan esta colaboración para conseguir el mayor beneficio para la mayoría (Axelrod, 1986).

Los otros agentes que pueden entrar en juego en la decisión de contaminar o no son los países, es decir los gobiernos. En este caso cada gobierno tiene como objetivo la maximización de su utilidad que viene traducida como un mayor producto interior bruto. Los países desean conseguir el máximo PIB que puedan conseguir y para ello deben incrementar la actividad industrial lo que conlleva a mayores emisiones contaminantes a la atmósfera. Como ya se ha observado los países tienen mayores incentivos para no colaborar y contaminar, pero al igual que antes existe una figura superior que controla y "fuerza" la colaboración (Axelrod, 1986). Un ejemplo de ello es la medida que se tomó en 1997[7], denominada como 'Protocolo de Kioto' y cuyo objetivo era limitar las emisiones nocivas a la atmósfera y así retrasar el calentamiento climático. Aunque todos los países que firmaron el protocolo se comprometieron a reducir dichas emisiones nocivas muy pocos lo hicieron realmente.

A nivel individual se observa la disyuntiva en la que se encuentran los individuos a la hora de contaminar o no. Por ejemplo cuando han de elegir si usar el transporte público o el privado. Si usan el público están contribuyendo a una menor contribución pero no disfrutan de las comodidades de un transporte privado que goza de una mayor comodidad y rapidez. Se puede pensar que los

[7] Aunque el Protocolo de Kioto se adoptó el 11 de diciembre de 1997 no entró en vigor hasta el 16 de febrero de 2005.

individuos obtienen una utilidad superior utilizando sus vehículos propios pero a la larga se observa que el mal que ocasionan es muy perjudicial. Con la colaboración y utilización del transporte público consiguen más utilidad a largo plazo. Y es aquí donde entra en juego el agente superior, el gobierno, que trata de enseñar a la gente. Tiene muchas maneras de aleccionar a la población. Por ejemplo, mediante campañas publicitarias enseña a preocuparse unos por otros y las repercusiones de los actos tendrán en las generaciones futuras (Axelrod, 1986).

6.3. DILEMA DEL PRISIONERO EN EMPRESAS

Ya hemos visto lo que ocurre matemáticamente cuando dos empresas compiten en un mercado similar en el Duopolio de Cournot, en la práctica esto es lo que ocurre:

Si ambas empresas compiten en un mismo sector, por lo tanto con un producto similar, una de las ventajas con las que cuentan es que pueden beneficiarse mediante la especialización de su producto. De este modo ambas consiguen competir ventajosamente en el mercado. Otra de las ventajas de la colaboración de las empresas es mediante el aprovechamiento de economías de escala, mediante la reducción del coste unitario de fabricar el producto con el aumento de la producción. Todo esto lo consiguen con la colaboración mutua y una especie de *simbiosis de ambos negocios* con ello conseguirán un beneficio (utilidad) superior al obtenido con la actuación individual. En el caso de que las empresas decidan no cooperar se dará una competencia “feroz” entre ambas que terminará con la expulsión de una de ellas del mercado. Esto podría sucederle a cualquiera de las dos por lo que tratarán de cooperar para no ser eliminadas de la “competición”. En el caso de que una coopere y la otra no en busca de su propio beneficio una de ellas o ambas saldría perjudicada. En la realidad las empresas es raro que decidan cooperar ya que el beneficio que obtienen es a repartir entre ambas (Gálvez, 2013). Aunque cada vez más a menudo las empresas se unen para hacer frente a un problema o rival común (Buckingham & Reading, 2013). El artículo de The guardian, ‘*How to make progress on colaboration for sustainability’* señala que se han visto casos en los que la colaboración puntual de dos empresas ha sido muy efectiva para la erradicación de un problema superior. El caso más destacado es el de Coca Cola y WWF (el fondo mundial para la naturaleza) para solventar la administración del agua. Aun así las empresas siguen manteniendo que '*la colaboración no es siempre la respuesta, y señalan que la competición es el mejor enfoque cuando las empresas tratan de desarrollar un modelo de negocio más sostenible y/o productos o servicios'* (Buckingham & Reading, 2013).

7. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se ha intentado explicar qué es el Dilema del Prisionero y por qué presenta un dilema. Comenzando con una explicación de qué es la Teoría de Juegos. Para conocer el contexto del tema a tratar se han ido detallando los estudiosos que fueron galardonados con un Nobel gracias a su trabajo en Teoría de Juegos. Se ha observado desde el comienzo del trabajo y hasta su final que la Teoría de Juegos no se limita sólo al campo de las matemáticas o la economía sino que ha sido implantado a lo largo de los años en muchas materias y campos diferentes, tan diversos como la política, la biología, psicología, sociología, etc. Así pues, dentro de la amplia Teoría de Juegos se encuentra el Dilema del Prisionero, aparte de otros muchos juegos. Pero ¿por qué éste entre la multitud de juegos es el objeto de este trabajo? La respuesta es sencilla, se trata de un juego conflictivo al que hacen frente la mayoría de las personas en algún momento de su vida y, de hecho, con bastante frecuencia. Sin embargo no tienen por qué ser personas únicamente las que se encuentren ante tal disyuntiva, pueden ser empresas, países y hasta incluso entes como las bacterias. Durante el trabajo se han ido viendo las diferentes formas que tienen los agentes de enfrentarse al dilema del prisionero, siendo en la mayoría de los casos propensos a la defección, o la no colaboración, que se traduce en este juego como *Confesar.* Y es precisamente aquí donde se encuentra el dilema que da nombre al juego, si bien para ambos agentes es mejor la opción de *Callar*, éstos como consecuencia de muchos factores (tanto morales, como humanos) escogen *Confesar*. Esto puede ser consecuencia de la desconfianza que ambos jugadores tienen a que el otro les "traicione", es más se ha demostrado que si dicho juego se diera entre dos individuos con una confianza muy grande los resultados cambiarían y no existiría dilema. Este es el caso de que se jugara entre dos familiares –entre los que existe una relación funcional-, sean un padre y un hijo, una madre y un hijo, etc. Todo esto es lo que sucedería en caso de que el dilema del prisionero se jugase una única vez pero se puede dar el caso de que el número de veces a jugar sea mayor pudiendo ser hasta infinito. En este caso la solución podría cambiar por primera vez desde que se comenzó a hablar del dilema del prisionero. Sucedió cuando los jugadores dejaron a un lado sus deseos egoístas de obtener el máximo beneficio individual y comenzaron a cooperar entre sí. Esta nueva estrategia que surgía se denomina Tit for Tat y terminó siendo la estrategia que daba fin al conflicto implícito en el dilema del prisionero. De hecho una de las enseñanzas que nos otorga el dilema del prisionero es que cuando se busca el interés común el conjunto de los interesados salen mejor parados que si únicamente atienden a sus propios beneficios. Es más, se ha puesto en práctica, al final de este trabajo, el dilema del prisionero en una serie de ejemplos basados en la vida real y se ha comprobado que aunque en la mayoría los incentivos de los agentes son hacia la no cooperación, gracias muchas veces a un agente superior se ha conseguido la cooperación y con ella la solución de los problemas comunes. En cambio si no apareciera en juego este agente mediador los sujetos implicados podrían no colaborar nunca, sin embargo en la práctica se ha comprobado que los jugadores sí pueden colaborar aún no existiendo tal agente mediador. Es el caso de empresas que se enfrentan a un mismo problema y que para solventarlo han de colaborar entre ellas. Si bien es verdad, dicha colaboración no continúa en el tiempo, sirve para hacer frente a problemas comunes y otorga la maximización de la utilidad común de los agentes. Por tanto, queda demostrado que en el grueso de las ocasiones en las que las personas se encuentren con un dilema del prisionero su estrategia a seguir ha de ser el Tit for Tat, es decir responder a nuestros rivales con reciprocidad. Aun existiendo incentivos a la no cooperación es necesario pensar que a la larga es más beneficiosa la colaboración.

En resumen, a mi parecer, la máxima que deberíamos seguir para conseguir nuestros propósitos quedó recogida perfectamente en el libro de Robert Axelrod 'La evolución de la cooperación' y dice así: '*La clave para lograr buenos resultados no estriba en vencer a otros, sino en obtener su cooperación.'*

10. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Libros y artículos

Aumann, R. J., 1981. *"Survey of Repeated Games" in Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern.* Berlín: Bibliographisches Institut.

Axelrod, R., 1986. *La evolución de la cooperación.* Madrid: Alianza Editorial, S.A..

Fernández Ruíz, J., 2002. *Teoría de juegos: su aplicacion en economía.* San Marcos, México, D.F.: Solar, Servicion editoriales, S.A..

Jorge, F. R., 2006. El Premio Nobel de Economía y la Teoría de Juegos: un encuentro más. *Análisis económico,* XXI(48), pp. 79-92.

Pérez, J., Jimeno, J. L. & Cerdá, E., 2013. *Teoría de Juegos.* Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L..

Singer, M., 2014. *Una práctica teoría de juegos: Estrategias para cooperar y competir.* s.l.:Ediciones UC.

Recursos electrónicos

Ecolink (2005): *Teoría de Juegos.*

Disponible en: http://www.econlink.com.ar/definicion/teoriadejuegos.shtml [consulta: 26/01/2015].

Fernández, F., 2005, *Teoría de juegos: análisis matemático de conflictos* [online]. Las Palmas de Gran Canaria. Disponible en: http://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo1lp/5/ffernandez.pdf [consulta: 01/02/2015].

Eumed, s.f. *Eumed.net Enciclopedia virtual.* [online] Disponible en: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/Cournot.htm [Último acceso: 15/05/2015].

Gálvez, C. T., 2013. *IENAF Business School.* [online] Disponible en: http://www.ineaf.es/tribuna/el-dilema-del-prisionero-en-actividades-empresariales/ [Último acceso: 19/05/2015].

Buckingham, F. & Reading, M., 2013. *The guardian.* [online] Disponible en: http://www.theguardian.com/sustainable-business/blog/how-to-progress-collaboration-sustainability [Último acceso: 19/05/2015].

Coloma, G., 2002. *Apuntes de organización industrial- Parte 2-* (*Ucema).* [online] Disponible en: http://www.ucema.edu.ar/publicaciones/download/documentos/222.pdf [Último acceso: 28/05/2015].

Organismos oficiales

Agencia Estatal Boletín Oficial del Estado: Ley 15/2007, de 3 de julio, de de Defensa de la Competencia.

Disponible en: http://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2007-12946 [Último acceso: 01/06/2015]