



---

**Universidad de Valladolid**

ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

TESIS DOCTORAL:

**Estudio del campo magnético en vacío en el  
entrehierro de una máquina eléctrica de imanes  
permanentes y flujo axial mediante el Método  
de los Subdominios**

Presentada por Julián Manuel Pérez García para optar al grado  
de doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por  
Dr. Fernando Antonio Frechoso Escudero





Parte de los resultados de este trabajo han sido objeto de las siguientes publicaciones, las cuales se muestran en el apéndice A:

- “Cogging torque reduction in an axial flux brushless permanent magnet machine” realizado por J.M. Pérez, B. Rojo, U. Domínguez, R. Urueña, J. Rodríguez, S. Cavia y F. A. Frechoso.  
Proceedings of Second IASTED International Conference POWER ANS ENERGY SYSTEMS (EuroPES) celebrado en Creta en junio de 2002.
- “2D analytical calculation of the no-load induced EMF in an axial flux slotted permanent magnet machine” realizado por J.M. Pérez y F. A. Frechoso.  
Comunicación presentada en forma de póster en el congreso INTERMAG08 celebrado en Madrid en 2008.
- “2D Analytical Calculation of the Open Circuit Electromagnetic Field Distribution in an Axial Flux Slotted Permanent Magnet Machine using Fourier Analysis” realizado por J.M. Pérez y F. A. Frechoso.  
Ponencia presentada en el International Conference on Renewable Energies and Power Quality celebrada en Santiago de Compostela en marzo de 2012.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objeto del trabajo . . . . .	4
1.3. Estructura de la Memoria de Tesis . . . . .	4
<b>2. Conceptos previos</b>	<b>7</b>
2.1. Máquinas de imanes permanentes . . . . .	7
2.1.1. Máquinas de flujo radial . . . . .	7
2.1.2. Máquinas de flujo axial . . . . .	10
2.1.3. Máquinas de flujo transversal . . . . .	12
2.1.4. Desarrollo de las máquinas de flujo axial e imanes permanentes . . . . .	14
2.1.5. Tipos de máquinas de flujo axial e imanes permanentes	17
2.1.6. Topologías y geometrías . . . . .	18
2.2. Antecedentes . . . . .	29
2.3. Base Teórica . . . . .	35
2.3.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	35
2.3.2. Condiciones de contorno . . . . .	39
2.3.3. Teoría cuasi-estática . . . . .	43
2.3.4. Teoría Estática . . . . .	44
2.3.5. Análisis de campo . . . . .	45
2.3.6. Potencial magnético escalar, Intensidad de campo magnético, Inducción magnética y Flujo magnético . . . . .	52
2.3.7. Ley de la inducción de Faraday . . . . .	55
2.3.8. Los devanados . . . . .	56
2.3.9. Par de reluctancia . . . . .	60
2.3.10. Cálculo de la fuerza y del par . . . . .	65
<b>3. Método de los subdominios</b>	<b>69</b>
3.1. Solución general de la Ecuación de Laplace . . . . .	70
3.2. Ejemplos . . . . .	71

3.2.1.	Ejemplo 1: Región rectangular . . . . .	71
3.2.2.	Ejemplo 2: Entrehierro máquina con doble ranurado . .	74
3.2.3.	Ejemplo 3: Entrehierro máquina ranurada e imanes permanentes . . . . .	82
<b>4.</b>	<b>Máquina brushless de flujo axial e imanes permanentes</b>	<b>99</b>
4.1.	Descripción de la máquina estudiada . . . . .	99
4.1.1.	Modelo cuasi-3D . . . . .	103
4.1.2.	Modelo con entreimán . . . . .	108
4.2.	Máquina lisa . . . . .	112
4.2.1.	Expresiones del potencial magnético escalar en las re- giones de nuestro problema . . . . .	115
4.2.2.	Condiciones de contorno máquina lisa . . . . .	116
4.2.3.	Expresiones del potencial, del campo y de la inducción	126
4.2.4.	Simulación por elementos finitos . . . . .	135
4.3.	Imán con banda de desmagnetización . . . . .	142
4.3.1.	Introducción . . . . .	142
4.3.2.	Calculo del potencial originado por un polo con bandas de desmagnetización . . . . .	145
4.3.3.	Estimación de los parámetros de la banda de desmag- netización . . . . .	152
<b>5.</b>	<b>Máquina ranurada</b>	<b>157</b>
5.1.	Expresiones del potencial magnético escalar . . . . .	160
5.1.1.	Diente Parcial . . . . .	160
5.1.2.	Ranura completa . . . . .	195
5.1.3.	Ranura parcial . . . . .	204
5.1.4.	Diente completo . . . . .	217
5.1.5.	Simulación por elementos finitos . . . . .	226
5.2.	Expresiones de las componentes de la inducción . . . . .	230
5.2.1.	Diente Parcial . . . . .	230
5.2.2.	Ranura Completa . . . . .	239
5.2.3.	Ranura Parcial . . . . .	240
5.2.4.	Diente Completo . . . . .	242
5.2.5.	Simulación por elementos finitos . . . . .	243
5.3.	Determinación del flujo magnético en cada región . . . . .	249
5.3.1.	Diente Parcial . . . . .	254
5.3.2.	Ranura Completa . . . . .	258
5.3.3.	Ranura Parcial . . . . .	259
5.3.4.	Diente Completo . . . . .	260
5.4.	Flujo concatenado por una bobina . . . . .	262

---

5.4.1. Posición 1 . . . . .	265
5.4.2. Posición 2 . . . . .	268
5.4.3. Posición 3 . . . . .	269
5.4.4. Posición 4 . . . . .	272
5.4.5. Posición 5 . . . . .	277
5.4.6. Posición 6 . . . . .	279
5.4.7. Posición 7 . . . . .	282
5.4.8. Posición 8 . . . . .	283
5.4.9. Posición 9 . . . . .	285
5.4.10. Posición 10 . . . . .	286
5.4.11. Posición 11 . . . . .	287
5.4.12. Posiciones siguientes . . . . .	288
5.4.13. Simulación por elementos finitos . . . . .	293
5.5. Fuerza electromotriz inducida (f.e.m.i.) . . . . .	296
5.5.1. Simulación por elementos finitos . . . . .	298
5.6. Cálculo del Par de Reluctancia . . . . .	300
5.6.1. Diente Parcial . . . . .	306
5.6.2. Ranura Completa . . . . .	316
5.6.3. Ranura Parcial . . . . .	316
5.6.4. Diente Completo . . . . .	317
5.6.5. Simulación por elementos finitos . . . . .	319
<b>6. Máquina en tres dimensiones</b>	<b>333</b>
6.1. Flujo concatenado por la bobina (3D) . . . . .	336
6.2. Fuerza electromotriz inducida (3D) . . . . .	337
6.3. Par de reluctancia (3D) . . . . .	338
<b>7. Prototipo y ensayos</b>	<b>341</b>
7.1. Máquina prototipo . . . . .	341
7.2. Banco de ensayos dinamométricos . . . . .	345
7.2.1. Motor de arrastre controlado por un accionamiento . . . . .	346
7.2.2. Medidor de par . . . . .	347
7.2.3. Máquina a ensayar . . . . .	347
7.2.4. Carga electrónica . . . . .	347
7.2.5. Sistema de adquisición de datos . . . . .	349
7.3. Ensayos realizados . . . . .	351
7.3.1. Fuerza electromotriz inducida . . . . .	351
7.3.2. Par de reluctancia de la máquina . . . . .	353

<b>8. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>359</b>
8.1. Conclusiones . . . . .	359
8.2. Trabajo futuro . . . . .	362
<b>A. Publicaciones Científicas</b>	<b>365</b>
<b>B. Distribución de potenciales en las fronteras comunes</b>	<b>383</b>
B.1. Series de Fourier . . . . .	383
B.2. Serie de Fourier de senos . . . . .	385
<b>C. Cálculo del campo en una región rectangular con diferentes condiciones de contorno</b>	<b>389</b>
<b>D. Expresiones del caso Ranura Completa</b>	<b>429</b>
D.1. Expresiones del potencial magnético escalar en cada región . .	429
D.2. Expresiones de las derivadas en las fronteras laterales . . . . .	435
D.3. Expresiones de las ecuaciones en las fronteras comunes . . . . .	439
D.4. Expresiones de las componentes de la inducción en cada región	445
D.5. Expresiones del flujo en cada región . . . . .	449
D.6. Expresiones del par de reluctancia en cada región . . . . .	454
<b>E. Expresiones del caso Ranura Parcial</b>	<b>461</b>
E.1. Expresiones del potencial magnético escalar en cada región . .	461
E.2. Expresiones de las derivadas en las fronteras laterales . . . . .	468
E.3. Expresiones de las ecuaciones en las fronteras comunes . . . . .	473
E.4. Expresiones de las componentes de la inducción en cada región	479
E.5. Expresiones del flujo en cada región . . . . .	484
E.6. Expresiones del par de reluctancia en cada región . . . . .	489
<b>F. Expresiones del caso Diente Completo</b>	<b>497</b>
F.1. Expresiones del potencial magnético escalar en cada región . .	497
F.2. Expresiones de las derivadas en las fronteras laterales . . . . .	503
F.3. Expresiones de las ecuaciones en las fronteras comunes . . . . .	507
F.4. Expresiones de las componentes de la inducción en cada región	513
F.5. Expresiones del flujo en cada región . . . . .	517
F.6. Expresiones del par de reluctancia en cada región . . . . .	521

# Índice de figuras

2.1. Diferentes tipos de máquinas de flujo radial [1] . . . . .	8
2.2. Máquinas de flujo radial con ranuras a) imanes en superficie b) imanes interiores, c) imanes en superficie con polos con zapatos, d)-f) imanes enterrados . . . . .	9
2.3. Máquinas de flujo axial [1] . . . . .	10
2.4. Ejemplos de máquinas de flujo transversal[1] . . . . .	12
2.5. Disco de Faraday, primer generador homopolar (1831) . . . . .	14
2.6. Motor electro-magnético de Nicola Tesla (1889) . . . . .	15
2.7. Máquina de Thomas Davenport (1837) . . . . .	16
2.8. Formas de onda para máquinas brushless de flujo axial e imanes permanentes: a) máquina de onda cuadrada, b) máquina de onda senoidal ([2]) . . . . .	18
2.9. Topologías básicas de máquinas de flujo axial e imanes permanentes: a) máquina lisa de una sola cara, b) máquina lisa de doble cara con estátor interno, c) máquina de doble cara con estátor ranurado y rotor interno, d) máquina sin núcleos de doble cara con estátor interno. 1 → núcleo del estátor, 2 → Bobinado del estátor, 3 → rotor, 4 → imanes permanentes, 5 → carcasa, 6 → rodamientos, 7 → eje. . . . .	19
2.10. Máquina brushless de flujo axial e imanes permanentes de doble cara con estátor interno de polos salientes y rotor externo: a) conjunto, b) estátor, c) rotor. 1 → imanes permanentes, 2 → disco de acero del rotor, 3 → polo del estátor, 4 → bobina del estátor . . . . .	20
2.11. Máquina brushless de flujo axial e imanes permanentes de doble cara con tres fases, 9 bobinas de polos salientes del estátor y 8 polos del rotor. 1 → imanes permanentes, 2 → disco ferromagnético del estátor, 3 → polo del estátor, 4 → bobina del estátor. . . . .	21

2.12. Geometría para el cálculo del Coeficiente de Carter en una máquina con rotor de imanes permanentes y estátor ranurado según la ecuación (2.2). . . . .	21
2.13. Formas de bobinas para un estátor de una máquina de flujo axial sin núcleo: a) bobina trapezoidal, b) bobina romboidal [3]	23
2.14. Máquina brushless de flujo axial e imanes permanentes multi-etapa de tres etapas, con tres estátors sin núcleo y cuatro rotores de imanes permanentes. 1 → bobinado del estátor, 2 → rotor, 3 → carcasa, 4 → rodamiento, 5 → eje. . . . .	24
2.15. Motor axial brushless de imanes permanentes y flujo axial con estátor liso y rotores externos . . . . .	25
2.16. Fases en el mecanizado de las ranuras: a) núcleo toroidal liso, b) núcleo toroidal ranurado, c) y d) detalles de ranuras . . . .	27
2.17. Configuraciones de máquina axial de doble cara con estátor ranurado: a) Rótor interno; b) Estátor interno . . . . .	28
2.18. Trayectoria cerrada en la superficie de separación de dos medios	40
2.19. Caja cilíndrica en la superficie de separación de dos medios . .	41
2.20. Vectores campo magnético a ambos lados de la superficie de separación . . . . .	43
2.21. Corte de una máquina de polos salientes . . . . .	57
2.22. Dinamo de Gramme con bobinado anular . . . . .	57
2.23. Bobinado en tambor de una máquina de flujo radial . . . . .	58
2.24. Espira y bobina, con sus partes: 1) Lados activos y 2) Cabezas	59
2.25. Bobina con un paso de bobina de 4 ranuras . . . . .	59
2.26. Bobinados de 1 capa y de 2 capas . . . . .	60
2.27. Iman libre de girar en el interior de un anillo: a) anillo liso; b) anillo con dos polos . . . . .	61
2.28. Par que experimenta el imán en las figura 2.27 . . . . .	61
2.29. Máquina de 4 polos y 12 ranuras. a) Ranuras rectas b) Ranuras semicerradas (o con "zapatos") . . . . .	62
2.30. Máquina de 4 polos y 15 ranuras . . . . .	63
2.31. Ranuras del estátor inclinadas . . . . .	64
2.32. Dientes con bifurcaciones . . . . .	64
3.1. Región rectangular con un lado a un potencial $\varphi_m = V_0$ y los otros tres lados a un potencial nulo . . . . .	72
3.2. Ranurado doble idéntico cuando las ranuras están justo unas enfrente de la otras. . . . .	75
3.3. Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura (3.2). . . . .	75



3.4.	Aplicación del principio de superposición en la resolución de problemas con varias condiciones de contorno no nulas . . . . .	77
3.5.	Valores del potencial magnético escalar de ambas regiones $\varphi_m^I$ y $\varphi_m^{II}$ para el ejemplo numérico tal que $s = 4$ mm, $t = 8$ mm, $g = 3$ mm y $h = 7$ mm. . . . .	83
3.6.	Entrehierro de un motor trifásico de imanes permanentes. . . . .	83
3.7.	Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura 3.6 . . . . .	84
3.8.	Región I: El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#1 y del caso#4. . . . .	86
3.9.	Región II: El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#1, del caso#12 y del caso#13. . . . .	87
3.10.	Región III: El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#1, del caso#4 y del caso#5. . . . .	88
3.11.	Región IV: El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#3 y del caso#11. . . . .	89
3.12.	Valores del potencial magnético escalar en la zona estudiada para valores de las dimensiones del problema de $s = 6$ mm, $t = 7$ mm, $g = 5$ mm y $h = 11$ mm. . . . .	98
4.1.	Vista general de la máquina objeto de estudio . . . . .	100
4.2.	Rotor interno de la máquina, formado por ocho imanes con magnetización axial. . . . .	100
4.3.	Mitad de la geometría: a) Partes activas y no activas; b) Sólo partes magnéticamente activas . . . . .	101
4.4.	Mitad de la máquina: Simetría y periodicidades . . . . .	102
4.5.	Condiciones de periodicidad: a) Condición periódica o cíclica; b) Condición anti-periódica o anti-cíclica . . . . .	102
4.6.	Modelo resultante al aplicar simetría y periodicidad anti-cíclica. . . . .	103
4.7.	Principio del modelo cuasi-3D . . . . .	104
4.8.	Modelo en dos dimensiones: a) Coordenadas cilíndricas. b) Coordenadas cartesianas. . . . .	105
4.9.	Geometría del modelo en dos dimensiones en coordenadas cartesianas. . . . .	106
4.10.	Máquina lisa obtenida al considerar el ranurado a través del entrehierro efectivo y el coeficiente de Carter. . . . .	107
4.11.	Geometría equivalente a la de la figura 4.10 con entreimán recto. . . . .	108
4.12.	Geometría considerada en la simulación por elementos finitos: a) Modelo con nervios oblicuos. b) Modelo con nervios rectos (entreimán) . . . . .	109

4.13. Elementos de superficie del mallado realizado: a) Modelo con nervios oblicuos. b) Modelo con nervios rectos (entreimán) . . .	110
4.14. Distribución del potencial magnético escalar en la superficie del rotor para las diferentes geometrías estudiadas. . . . .	111
4.15. Distancia $L_2$ y la distancia $L_2$ con peso en función del valor del entreiman en escala logarítmica. . . . .	113
4.16. Variación del potencial escalar en la superficie del imán para la geometría con nervios oblicuos y para la geometría con entreiman recto de 5 milímetros. . . . .	114
4.17. Problema de campo para la máquina lisa, donde podemos distinguir cuatro regiones: Imán ( $I$ ), entreimán 1 ( $E_1$ ), entreimán 2 ( $E_2$ ) y entrehierro ( $G$ ) . . . . .	115
4.18. Perfil de magnetización . . . . .	124
4.19. Geometría con dos zonas . . . . .	124
4.20. Potencial magnético escalar (entreimán: 5 mm) . . . . .	129
4.21. Componente $x$ de la inducción (entreimán: 5 mm) . . . . .	129
4.22. Componente $y$ de la inducción (entreimán: 5 mm) . . . . .	129
4.23. Variación del potencial escalar en la superficie del imán para diferentes valores del entreimán. . . . .	130
4.24. Variación de la componente $x$ de la inducción en la superficie del imán para diferentes valores del entreimán. . . . .	132
4.25. Variación de la componente $y$ de la inducción en la superficie del imán para diferentes valores del entreimán. . . . .	132
4.26. Variación de la componente $y$ de la inducción en la superficie del estátor para diferentes valores del entreimán. . . . .	134
4.27. Comparativa de los resultados obtenidos del potencial escalar en la superficie del imán en función del entreimán . . . . .	136
4.28. Comparativa de los resultados obtenidos de la componente $x$ de la inducción en la superficie del imán en función del entreimán	138
4.29. Comparativa de los resultados obtenidos de la componente $y$ de la inducción en la superficie del imán en función del entreimán	138
4.30. Comparativa de los resultados obtenidos del potencial escalar en la superficie del estátor en función del entreimán . . . . .	139
4.31. Comparativa de los resultados para la componente $x$ de la inducción en la superficie del estator en función del entreimán	140
4.32. Comparativa de los resultados para la componente $y$ de la inducción en la superficie del estator en función del entreimán	141
4.33. Variación del potencial escalar en la superficie del imán (entreimán nulo) . . . . .	143
4.34. Geometría: a) Sin banda de desmagnetización. b) Con banda de desmagnetización . . . . .	144

4.35. Función $y = \tanh(c \cdot x)$ para diferentes valores del parámetro $c$	145
4.36. Geometría del problema y detalle de la zona a estudiar . . . . .	146
4.37. Planteamiento del problema de potencial para el área elegida de la figura 4.36 . . . . .	147
4.38. Región I: el potencial lo obtendremos por superposición del caso#4 y del caso#12 . . . . .	148
4.39. Región II: el potencial lo obtenemos por superposición del caso#3 y del caso#7 . . . . .	149
4.40. Potencial escalar en la región estudiada. Valores de los parámetros: $V_o = 3318.52Av$ , $g' = 5.3370mm$ , $\tau_p = 69mm$ , $a = 25mm$ y $c = 0.5$ . . . . .	152
4.41. Variación del potencial escalar en la superficie del estátor ( $y = 0$ ) y en la superficie del imán ( $y = g'$ ) para el ejemplo numérico considerado. . . . .	153
4.42. Variación del potencial magnético en la superficie del imán obtenidas mediante la formulación propuesta y con el modelo de la banda de desmagnetización para $c = 0.16$ y para diferentes valores de $a$ . . . . .	154
5.1. Geometría de la máquina con ranuras . . . . .	158
5.2. Casos a considerar según las posición del rotor respecto de las ranuras del estátor: a) Caso Diente Parcial. b) Caso Ranura Completa. c) Caso Ranura Parcial. d) Caso Diente Completo .	159
5.3. Caso Diente Parcial: El principio del polo está situado debajo de un diente del ranurado. . . . .	162
5.4. Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura 5.3 . . . . .	163
5.5. Funciones del perfil de magnetización para $z = 0.25$ . . . . .	166
5.6. Funciones del perfil de magnetización para $z = 0.5$ . . . . .	166
5.7. Funciones del perfil de magnetización para $z = 0.75$ . . . . .	167
5.8. Región I. El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#4, del caso#5 y del caso#12. . . . .	170
5.9. Región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#10, del caso#11 y del caso#12. . . . .	171
5.10. Región III. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región I del caso actual. . . . .	172
5.11. Región IV. El potencial en esta región lo obtenemos por superposición de los casos #1, #10 y #11. . . . .	173
5.12. Región V. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la expresión del potencial de la Región I del caso actual. . .	174

5.13. Región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la Región II del caso actual. . . . .	174
5.14. Región VII. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la región I del caso presente. . . . .	175
5.15. Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que $V_0 = 3318.52Av$ , $s = 7mm$ , $t = 16mm$ , $g = 5mm$ , $h = 21.5mm$ y $z = 0.25$ . . . . .	192
5.16. Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que $V_0 = 3318.52Av$ , $s = 7mm$ , $t = 16mm$ , $g = 5mm$ , $h = 21.5mm$ y $z = 0.5$ . . . . .	192
5.17. Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que $V_0 = 3318.52Av$ , $s = 7mm$ , $t = 16mm$ , $g = 5mm$ , $h = 21.5mm$ y $z = 0.75$ . . . . .	193
5.18. Potencial magnético escalar en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Parcial con $z = 0.5$ . . . . .	194
5.19. Caso Ranura Completa: El principio del polo coincide con el comienzo de una ranura del ranurado. . . . .	196
5.20. Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura 5.19 . . . . .	197
5.21. Funciones del perfil de magnetización para el caso de Ranura Completa . . . . .	199
5.22. Potencial magnético escalar en el entrehierro de la máquina para el ejemplo numérico tal que $V_0 = 3318.52Av$ , $s = 7mm$ , $t = 16mm$ , $g = 5mm$ y $h = 21.5mm$ . . . . .	203
5.23. Potencial magnético escalar en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Completa. . . . .	204
5.24. Caso Ranura Parcial: El principio del polo coincide con el comienzo de una ranura del ranurado. . . . .	205
5.25. Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura 5.24 . . . . .	207
5.26. Funciones del perfil de magnetización para $z = 0.25$ . . . . .	209
5.27. Funciones del perfil de magnetización para $z = 0.5$ . . . . .	210
5.28. Funciones del perfil de magnetización para $z = 0.75$ . . . . .	210
5.29. Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que $V_0 = 3318.52Av$ , $s = 7mm$ , $t = 16mm$ , $g = 5mm$ , $h = 21.5mm$ y $z = 0.25$ . . . . .	215
5.30. Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que $V_0 = 3318.52Av$ , $s = 7mm$ , $t = 16mm$ , $g = 5mm$ , $h = 21.5mm$ y $z = 0.5$ . . . . .	216

5.31. Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que $V_0 = 3318.52Av$ , $s = 7mm$ , $t = 16mm$ , $g = 5mm$ , $h = 21.5mm$ y $z = 0.75$ . . . . .	216
5.32. Potencial magnético escalar en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Parcial con $z = 0.5$ . . . . .	217
5.33. Caso Diente Completo: El principio del polo coincide con el comienzo de un diente del ranurado. . . . .	218
5.34. Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura 5.33 . . . . .	219
5.35. Funciones del perfil de magnetización para el caso de Diente Completo . . . . .	221
5.36. Potencial magnético escalar en el entrehierro de la máquina para el ejemplo numérico tal que $V_0 = 3318.52Av$ , $s = 7mm$ , $t = 16mm$ , $g = 5mm$ y $h = 21.5mm$ . . . . .	225
5.37. Potencial magnético escalar en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Completo. . . . .	226
5.38. Geometría considerada en la simulación por elementos finitos para la máquina ranurada . . . . .	227
5.39. Comparativa entre los resultados proporcionados por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Parcial con $z=0.5$ . . . . .	228
5.40. Comparativa entre los resultados proporcionados por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Completa . . . . .	228
5.41. Comparativa entre los resultados proporcionados por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Parcial con $z=0.5$ . . . . .	229
5.42. Comparativa entre los resultados proporcionados por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Completo . . . . .	229
5.43. Componente $x$ de la inducción en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Parcial con $z = 0.5$ . . . . .	236
5.44. Componente $y$ de la inducción en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Parcial con $z = 0.5$ . . . . .	236
5.45. Componente $x$ de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Parcial con $z = 0.5$ . . . . .	237

5.46. Componente $y$ de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Parcial con $z = 0.5$ .	238
5.47. Componente $x$ de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Completa. . . .	239
5.48. Componente $y$ de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Completa. . . .	240
5.49. Componente $x$ de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Parcial con $z = 0.5$ .	241
5.50. Componente $y$ de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Parcial con $z = 0.5$ .	241
5.51. Componente $x$ de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Completo. . . .	242
5.52. Componente $y$ de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Completo. . . .	243
5.53. Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente $x$ de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Parcial con $z=0.5$ . . . . .	244
5.54. Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente $x$ de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Completa	244
5.55. Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente $x$ de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Parcial con $z=0.5$ . . . . .	245
5.56. Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente $x$ de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Completo	245
5.57. Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente $x$ de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Parcial con $z=0.5$ . . . . .	247
5.58. Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente $x$ de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Completa	247
5.59. Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente $x$ de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Parcial con $z=0.5$ . . . . .	248

5.60. Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente $x$ de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Completo	248
5.61. Superficies consideradas en el cálculo del flujo: Superficie $S_t$ en la región $t$ y superficies $S_s^1$ , $S_s^2$ , $S_s^3$ y $S_s^4$ en la región $s$ . . . .	250
5.62. Geometría que vamos a considerar para el cálculo del flujo que concatena una bobina. . . . .	263
5.63. Función de distribución para una bobina . . . . .	264
5.64. Posición 1 . . . . .	265
5.65. Posición 2 . . . . .	269
5.66. Posición 3 . . . . .	270
5.67. Posición 4 . . . . .	272
5.68. Posición 5 . . . . .	277
5.69. Posición 6 . . . . .	280
5.70. Posición 7 . . . . .	283
5.71. Posición 8 . . . . .	284
5.72. Posición 9 . . . . .	285
5.73. Posición 10 . . . . .	286
5.74. Posición 11 . . . . .	287
5.75. Regiones correspondientes a las posiciones estudiadas del caso Diente Parcial ( $z$ varía desde 0.5 hasta 0) . . . . .	289
5.76. Regiones correspondientes a todas las posiciones del caso Diente Parcial ( $z$ varía desde 0.5 hasta 0) . . . . .	290
5.77. Regiones correspondientes a las posiciones estudiadas del caso Ranura Completa . . . . .	290
5.78. Regiones correspondientes a todas las posiciones del caso Ranura Completa . . . . .	291
5.79. Regiones correspondientes a las posiciones del caso Ranura Parcial . . . . .	291
5.80. Regiones correspondientes a las posiciones del caso Diente Completo . . . . .	292
5.81. Regiones correspondientes a las posiciones del caso Diente Parcial ( $z$ desde 1 hasta 0.5) . . . . .	293
5.82. Flujo concatenado por la bobina en un par de polos en mWb .	294
5.83. Geometría considerada en la simulación por elementos finitos para la máquina ranurada con bobina . . . . .	295
5.84. Comparativa entre los resultados proporcionados para el flujo concatenado por una bobina de paso de bobina tres ranuras por el Método de los Subdominios y los obtenidos por Elementos Finitos a lo largo de un par de polos . . . . .	295

5.85. Fuerza electromotriz inducida y flujo concatenado por la bobina en un par de polos obtenidos analíticamente . . . . .	298
5.86. Comparación entre los valores de fuerza electromotriz inducida en un par de polos obtenidos analíticamente y mediante elementos finitos . . . . .	299
5.87. Superficie cerrada de integración que rodea a un par de polos .	302
5.88. Superficie de integración $S_6$ . . . . .	305
5.89. Par de reluctancia de la máquina en un paso de ranura (resultados analíticos) . . . . .	318
5.90. Comparación entre los valores del par de reluctancia obtenidos analíticamente y mediante elementos finitos . . . . .	319
5.91. Comparación entre los valores de la componente tangencial de la fuerza obtenidos analíticamente y mediante elementos finitos	321
5.92. Variación con el radio de las componentes normal y tangencial de la inducción . . . . .	322
5.93. Aproximación de la superficie de integración: superficie original (en verde), paralelogramo del arco (en azul) y paralelogramo de la cuerda (en rojo) . . . . .	323
5.94. Valores del par de reluctancia hallados por la formulación propuesta, la formulación propuesta corregidos y elementos finitos.	324
5.95. Valores de la distancia L2 y de su logaritmo neperiano existentes entre los valores analíticos y los de simulación . . . . .	325
5.96. Resultados obtenidos para la geometría con incremento en la anchura de la ranura . . . . .	326
5.97. Resultados obtenidos para la geometría con incremento en el espesor del entrehierro . . . . .	326
5.98. Resultados obtenidos en la geometría con incremento en las dimensiones radiales . . . . .	327
5.99. Comparativa del par de reluctancia analítico y por elementos finitos tomando $s$ como parámetro . . . . .	328
5.100 Comparativa del par de reluctancia analítico y por elementos finitos tomando $g$ como parámetro . . . . .	329
5.101 Comparativa del par de reluctancia analítico y por elementos finitos tomando $h$ como parámetro . . . . .	330
6.1. Principio del modelo cuasi-3D para 5 láminas . . . . .	334
6.2. Comparación entre los valores del flujo concatenado por la bobina por el modelo cuasi-3D para diferente número de láminas y por elementos finitos . . . . .	337



6.3.	Comparación entre los valores de la fuerza electromotriz inducida obtenidos por el modelo cuasi-3D para diferente número de láminas y por elementos finitos . . . . .	338
6.4.	Comparación entre los valores del par de reluctancia obtenidos por el modelo cuasi-3D para diferente número de láminas y por elementos finitos . . . . .	339
7.1.	Rótor del prototipo construido: a) Estrella central. b)Rótor en su conjunto . . . . .	342
7.2.	Estátor del prototipo: a)Vista frontal. b)Vista lateral . . . . .	343
7.3.	Conjunto de la máquina: a) Inicio del proceso de montaje. b) Montaje finalizado . . . . .	343
7.4.	Esquema del banco de ensayos dinamométricos . . . . .	345
7.5.	Control Unidrive (a) y servomotor Unimotor (b) . . . . .	346
7.6.	Medidor de par Lebow . . . . .	348
7.7.	Carga electrónica Agilent Technologies . . . . .	348
7.8.	Vista general del banco de ensayos dinamométricos . . . . .	350
7.9.	Medida de la f.e.m.i. en la máquina (estátóres coenctados en serie) . . . . .	351
7.10.	Comparación entre los valores de f.e.m.i. obtenidos por el método analítico, mediante elementos finitos y medidos en el prototipo ensayado. . . . .	352
7.11.	Par de reluctancia medido al mover el prototipo con el servomotor. . . . .	354
7.12.	Acoplamientos del banco de ensayos: a) Acoplamiento elástico. b)Acoplamiento rígido modificado . . . . .	355
7.13.	Procedimiento empleado en la medida del par de reluctancia . . . . .	356
7.14.	Par de reluctancia medido en el banco de ensayos: a) Valores instantáneos. b) Ajuste polinómico . . . . .	357
7.15.	Comparación entre los valores del par de reluctancia obtenidos por el método analítico, mediante elementos finitos y medidos en el prototipo ensayado. . . . .	358
B.1.	Extensión periódica de $f(x) = \frac{3}{2}x$ . . . . .	385
B.2.	Función $f(x)$ y su extensión impar . . . . .	387
C.1.	Región rectangular con potencial uniforme en en lado superior . . . . .	390
C.2.	Fracción de la región rectangular con simetría en $x = 0$ . . . . .	391
C.3.	Fracción de la región rectangular con simetría en $x = a$ . . . . .	393
C.4.	Región rectangular donde el potencial del lado $x = a$ varía con la posición . . . . .	396

C.5. Región rectangular donde el potencial del lado $x = 0$ varía con la posición . . . . .	399
C.6. Región rectangular de anchura $2a$ donde el potencial del lado $x = a$ varía con la posición . . . . .	400
C.7. Región rectangular de anchura $2a$ donde el potencial del lado $x = -a$ varía con la posición . . . . .	402
C.8. Fracción de la región rectangular con simetría en $x = 0$ y potencial dependiente de la posición en $x = a$ . . . . .	403
C.9. Fracción de la región rectangular con un potencial dependiente de la posición en $x = 0$ y simetría en $x = a$ . . . . .	406
C.10. Región rectangular en la que se divide uno de los lados en dos partes y se aplica a cada una de las partes una función de potencial distinta. Además, se mantienen otros dos lados a potencial cero y el cuarto lado es un eje de simetría. . . . .	407
C.11. Región rectangular en la que se divide el lado de $x = 0$ en dos partes y se aplica a cada una de las partes una función de potencial distinta. Además, se mantienen otros dos lados a potencial cero y el cuarto lado (el de $x = a$ ) es un eje de simetría. . . . .	416
C.12. Región rectangular en la que se divide uno de los lados en dos partes y se aplica a cada una de las partes una función de potencial distinta. Además, se mantienen los otros tres lados a potencial cero. . . . .	420
C.13. Región rectangular en la que se divide uno de los lados en dos partes y se aplica a cada una de las partes una función de potencial distinta. Además, se mantienen los otros tres lados a potencial cero. . . . .	424
C.14. Región rectangular con variación del potencial proporcional a una función arbitraria impar . . . . .	425
C.15. Potencial escalar con $f_{impar}(x) = V_o \cdot \tanh(cx)$ , $a = 5mm$ , $b = 5mm$ , $c = 1$ y $V_o = 1Av$ . . . . .	428
D.1. Región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#10, del caso#11 y del caso#12. . . . .	430
D.2. Región II. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de los casos #4, #5 y #12. . . . .	431
D.3. Región III. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#1, del caso#10 y del caso#11. . . . .	432
D.4. Región IV. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#1, del caso#4 y del caso#5. . . . .	432

---

D.5. Región V. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la región I del caso actual. . . . .	433
D.6. Región VI. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la región II del caso actual. . . . .	434
E.1. Región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#5, del caso#10 y del caso#12. . . . .	462
E.2. Región II. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de los casos #4, #5 y #12. . . . .	463
E.3. Región III. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la expresión del potencial de la región I del caso actual. . .	463
E.4. Región IV. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#1, del caso#4 y del caso#5. . . . .	464
E.5. Región V. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la región I del caso actual. . . . .	465
E.6. Región VI. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la región II del caso actual. . . . .	466
E.7. Región VII. El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#4, del caso#11 y del caso#12. . . . .	467
F.1. Región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región I del caso Diente Parcial. . . . .	498
F.2. Región II. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región II del caso Diente Parcial. . . . .	499
F.3. Región III. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región IV del caso Ranura Completa. . . . .	500
F.4. Región IV. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región IV del caso Diente Parcial. . . . .	500
F.5. Región V. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región I del caso actual. . . . .	502
F.6. Región VI. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región II del caso actual. . . . .	502



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

En el año 1999 y después de conversaciones mantenidas con Iberdrola, firmamos un contrato para desarrollar el generador eléctrico de una pequeña máquina eólica de 10 *kW* de potencia. Simultáneamente, obtuvimos un proyecto del Ministerio de Educación con el mismo propósito.

Dentro de los diferentes tipos de generadores eléctricos, decidimos desarrollar uno de imanes permanentes y flujo axial. Las razones que motivaron esta elección fueron varias, siendo las más destacadas las siguientes:

- Las máquinas de imanes permanentes, al no necesitar alimentar ningún circuito de excitación en el rotor, no poseen ningún contacto con el rotor de la máquina, simplificando su diseño y mantenimiento, siendo la opción más empleada en máquinas eólicas de pequeña potencia.
- Las máquinas de flujo axial permiten acomodar un elevado número de polos, siendo máquinas que giran a velocidades bajas. La generación eólica también se produce a bajas velocidades de giro; el empleo de un generador de flujo axial, permite acoplar muy bien los dos sistemas, no siendo necesario la instalación de una multiplicadora.
- Por aquellos años, uno de los sectores en los que pensábamos que podíamos entrar era en el diseño de vehículo eléctricos con motores en rueda. Las máquinas de flujo axial tienen una geometría que se adapta perfectamente a esta idea. Si a ello le añadimos una elevada densidad de par, estas máquinas son una opción excelente para esta aplicación.
- Por último, también tuvimos en cuenta factores relacionados con la

investigación científica. Las máquinas de flujo axial e imanes permanentes eran máquinas poco conocidas, siendo las más empleadas las de flujo radial.

Una vez seleccionado el tipo de generador eléctrico, es necesario conocer la distribución del campo electromagnético en su interior, siendo éste un paso importante para un diseño adecuado. Existen numerosas técnicas que permiten modelar o predecir la distribución del campo magnético en estructuras electromagnéticas, pudiéndolas clasificar en:

- Técnicas analíticas: Las técnicas analíticas proporcionan una expresión directa de la magnitud del campo magnético o de su distribución, resolviendo las ecuaciones de Maxwell. Destacan las siguientes técnicas:
  - Modelo de carga,
  - Modelo de corriente y
  - Circuitos magnéticos equivalentes.
- Técnicas semi-analíticas: Las técnicas semi-analíticas, lo mismo que las analíticas, consideran la resolución directa de las ecuaciones del problema (ecuaciones de Maxwell), pero requieren de la integración numérica o del sumatorio de la expresión analítica obtenida. Dentro de esta categoría, podemos mencionar:
  - Método de los subdominios,
  - Método de las imágenes y
  - Transformación conforme de Schwarz-Christoffel.
- Técnicas numéricas: Las técnicas numéricas realizan una discretización de toda la geometría y/o de su contorno. Las más importantes son:
  - Métodos por Elementos Finitos (si sólo se discretiza el contorno esta técnica se conoce como “Método de los elementos de contorno”)  
y
  - Método de las diferencias finitas.

En general, cada tipo de problema posee su técnica óptima, ya que, además de la exactitud de los resultados obtenidos, el tiempo de cálculo es un parámetro a tener en cuenta. Un gran número de las técnicas mencionadas (circuitos magnéticos, transformación conforme, método de los elementos finitos y método de las diferencias finitas) requieren de una discretización (mallado) de la geometría previa al cálculo de la distribución del campo electromagnético;

posteriormente, sólo se obtiene una solución en los puntos predefinidos. Un aumento en la densidad del mallado, mejora la exactitud de los resultados obtenidos, aunque implica un aumento del tiempo de cálculo. Por otro lado, para realizar una buena discretización de la geometría, es necesario tener un conocimiento previo o cierta experiencia en esta tarea. En estructuras sin núcleos de alta permeabilidad, o en máquinas con un entrehierro muy pequeño o con un gran tamaño, estos métodos plantean serios problemas debido a la necesaria alta densidad del mallado o al gran tamaño del modelo. Por otro lado, para el cálculo numérico o analítico de parámetros secundarios, como la fuerza, la fuerza electromotriz, la inductancia o el par electromagnético, sólo es necesario el conocimiento del campo en unos puntos o “líneas” determinadas. Los métodos numéricos requieren el conocimiento del campo en todos los puntos de la geometría mallada con el fin de poder hallar estos parámetros secundarios. Por lo tanto, sería preferible el disponer de soluciones con un “mallado-libre”, ya que se reduciría drásticamente el tiempo de cálculo y, en determinados problemas, incluso proporcionan expresiones analíticas que permiten ilustrar las dependencias existentes entre los parámetros geométricos y las propiedades de los materiales.

El método de los subdominios, también conocida como técnica de armónicos o técnica basada en el Análisis de Fourier, divide la geometría a estudiar en regiones lo suficientemente sencillas, denominadas subdominios, en las que resuelven directamente las ecuaciones de Maxwell en magnetostática (las cuales se reducen a la ecuación de Laplace en las regiones de aire y a la ecuación de Poisson en las regiones donde existen imanes o corrientes) y obtiene la distribución del campo aplicando las condiciones de contorno en las fronteras entre los subdominios. Originariamente, este método sólo consideraba corrientes de longitud infinita, situadas arbitrariamente entre dos superficies de hierro paralelas o concéntricas. Posteriormente, se extendió a regiones que poseían imanes, al ser reemplazados éstos por una distribución equivalente de corrientes. Esta técnica se puede aplicar en cualquier geometría sea una máquina lisa o una máquina ranurada. La ausencia de ranuras simplifica en gran medida la geometría, la cual se subdivide en un número pequeño de subdominios (normalmente dos o tres). Sin embargo, es en las máquinas con ranuras y como consecuencia de la complejidad de la geometría, donde el método de los subdominios cobra especial relevancia y donde es empleada por mayor número de autores, tanto para máquinas de flujo radial, axial, tubulares y con otras topologías. La principal desventaja de este método es que no se pueden considerar formas irregulares en el hierro y que los imanes deben tener una forma geométrica simple y una magnetización también simple. Recientemente, varias publicaciones extienden este método

considerando problemas específicos en diversos sistemas de coordenadas.

## 1.2. Objeto del trabajo

En el contexto indicado, en el desarrollo de la Tesis, se realizará un estudio del campo magnético en vacío en el entrehierro de una máquina eléctrica de imanes permanentes de flujo axial, mediante el método de los subdominios. A partir de este campo se calcularán el resto de variables electromecánicas, como fuerza electromotriz inducida y par de reluctancia.

Una vez obtenidos los resultados para la máquina definida, se compararán los resultados obtenidos, con los proporcionados mediante el Método de los Elementos finitos. Para ello se dispone del software comercial FLUX3D, que permite calcular las mismas variables que las obtenidas por el Método de los Subdominios.

Finalmente, se compararán los resultados obtenidos con las medidas de un ensayo de un prototipo de generador eléctrico de imanes permanentes de flujo axial, para poder comprobar la validez del modelo.

## 1.3. Estructura de la Memoria de Tesis

Este trabajo está dividido en siete capítulos y cinco apéndices:

- El capítulo primero, *Introducción*, recoge el planteamiento y los objetivos de la tesis.
- El capítulo segundo, denominado *Conceptos previos*, establecen el marco en el que se sitúa esta tesis doctoral, desde tres vertientes:
  - El generador eléctrico: Las máquinas de flujo axial e imanes permanentes serán los dispositivos en los que desarrollaremos nuestro estudio. Por ello, vamos a centrar esta topología dentro de las máquinas eléctricas.
  - Antecedentes: El Método de los Subdominios será la técnica que emplearemos para realizar nuestro trabajo pero, no es la única. En este punto repasaremos las principales herramientas empleada en el estudio del campo magnético en máquinas eléctricas.
  - Base teórica: El electromagnetismo es el fenómeno que va a provocar el funcionamiento de nuestra máquina. Sus magnitudes y



las ecuaciones que las relacionan, serán fundamentales en nuestro trabajo, siendo necesario un pequeño repaso. En capítulos posteriores, haremos frecuentes referencias a este apartado.

- En el capítulo tercero explicamos el Método de los Subdominios con ejemplos sencillos, por lo que le dedicamos este capítulo. El Método de los Subdominios es la herramienta fundamental de nuestro trabajo de tesis. Por ello, el dedicarle un capítulo a su conocimiento nos parece una buena idea.
- El cuarto, el quinto y el sexto capítulo podrían haberse agrupado en un solo pero, dada la extensión que tendría, hemos preferido dividirlo en los tres mencionados.

El capítulo cuarto esta dedicado a presentar en detalle la máquina en la que vamos a aplicar el Método de los Subdominios. Se trata de una máquina tridimensional y con ranuras, pero la aproximaremos por una máquina bidimensional y lisa para poder determinar algunos parámetros de su topología como son el entreimán equivalente, el valor del potencial magnético escalar en la superficie del imán y la anchura de la banda de desmagnetización de los imanes.

Una vez definidos estos parámetros entramos en el capítulo quinto, (*Máquina ranurada*), que es el núcleo de todo el trabajo de tesis. En este capítulo y a través de lo que denominamos “casos” vamos a poder estudiar nuestra máquina mediante un modelo en dos dimensiones y según sea la posición relativa del imán respecto de las ranuras del estátor. Es en esta capítulo donde hallaremos las expresiones de las principales magnitudes magnéticas de nuestra máquina, tales como potencial magnético escalar, componentes de la inducción, expresiones del flujo magnético a través de determinadas superficies y del que concatena una bobina tipo, fuerza electromotriz inducida y par de reluctancia.

Como nuestra máquina es tridimensional, es necesario pasar de un modelo en dos dimensiones a otro en tres dimensiones. En el capítulo sexto realizamos este paso.

- La forma de poder validar nuestro modelo es comparando los resultados teóricos con los obtenido en el laboratorio. En el capítulo séptimo describimos el prototipo construido, el banco de ensayos donde realizaremos las medidas y los resultados obtenidos de éstas, comparándolas

con los valores hallados por la técnica analítica y los proporcionados de un software de simulación por elementos finitos.

- El último capítulo esta dedicado a las conclusiones; en él, reflejamos los aspectos más destacados del trabajo realizado.
- En los cinco apéndices que siguen al último capítulo se recoge información que no es esencial para una primera lectura del trabajo realizado, pero que resulta importante para un estudio más detallado del mismo. De esta forma, mediante el empleo de los apéndices, pretendemos que la lectura de la tesis no resulte una tarea pesada pero que en la memoria se refleje todo el trabajo realizado.

# Capítulo 2

## Conceptos previos

### 2.1. Máquinas de imanes permanentes

Las máquinas de imanes permanentes se pueden clasificar atendiendo a diversos criterios:

- Según el camino seguido por el flujo magnético: máquinas de flujo radial, axial o transversal.
- Según la disposición de los imanes: máquinas de imanes superficiales o de flujo concentrado.
- Según la presencia o no de ranuras: máquinas ranuradas o máquinas lisas.

Nosotros vamos a clasificar las máquinas según el camino seguido por el flujo.

#### 2.1.1. Máquinas de flujo radial

En las máquinas de flujo radial, el flujo magnético está en la dirección radial y es originado por imanes que están magnetizados radialmente (figura 2.1). La disposición con un rotor interno es la más empleada, aunque existen diseños con el rotor externo. Una gran parte de los generadores eólicos de baja velocidad son máquinas de flujo radial, debido a su sencillo diseño, economía de fabricación y amplio rango de operación. La forma más sencilla de construir una máquina radial con un número elevado de polos es pegando imanes en la superficie del rotor. En estas máquinas, la longitud del estátor y la longitud radial del entrehierro pueden elegirse uno independientemente del otro, pudiéndose fabricar máquinas con un diámetro pequeño y un estátor

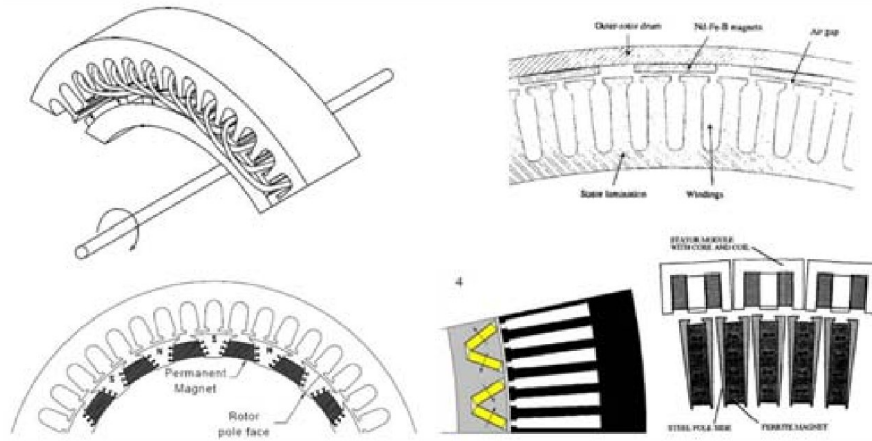


Figura 2.1: Diferentes tipos de máquinas de flujo radial [1]

largo.

La máquina radial con imanes permanentes presenta, en comparación con la máquina radial con excitación eléctrica, una mayor densidad de par. En contra, la presencia de los imanes hace más difícil su ensamblaje y la estructura debe ser más fuerte, sobre todo en máquinas grandes. Estas máquinas han sido ampliamente utilizadas y estudiadas, tanto desde un punto de vista mecánico como electromagnético, siendo difícil mejorar su diseño.

Existen principalmente dos tipos de máquinas de flujo radial (figura 2.2): máquinas de flujo radial con ranuras e imanes en superficie y máquinas de flujo radial con ranuras e imanes enterrados (también denominados estos últimos de concentración de flujo). La manera más sencilla de construir un rotor con un número elevado de polos es colocando los imanes sobre la superficie del núcleo del rotor. No obstante, es necesario emplear imanes permanentes de alta energía (tales como los de Neodimio-Boro-Hierro) para lograr una densidad de flujo aceptable en el entrehierro. Estos imanes son muy caros por lo que deben de usarse de una forma efectiva. Si los imanes se fijan al rotor pegándolos, la velocidad de rotación debe limitarse para que la fuerza centrífuga sea inferior a la fuerza de fijación del pegamento. A veces, con el fin de mejorar la rigidez mecánica del rotor, se añade una banda alrededor del rotor. Esta banda puede ser un cilindro de fibra de vidrio o de acero inoxidable. En el primer caso, la fibra de vidrio es aislante térmico, aumentando los problemas para ventilar el rotor. Si la cinta es de acero inoxidable, aparecen problemas de corrientes de Foucault como consecuencia del ranurado y del contenido en armónicos de la corriente suministrada. Se pueden emplear

diseños especiales que proporcionan una densidad de flujo en el entrehierro senoidal así como una protección mecánica a los imanes (figura 2.2c)).

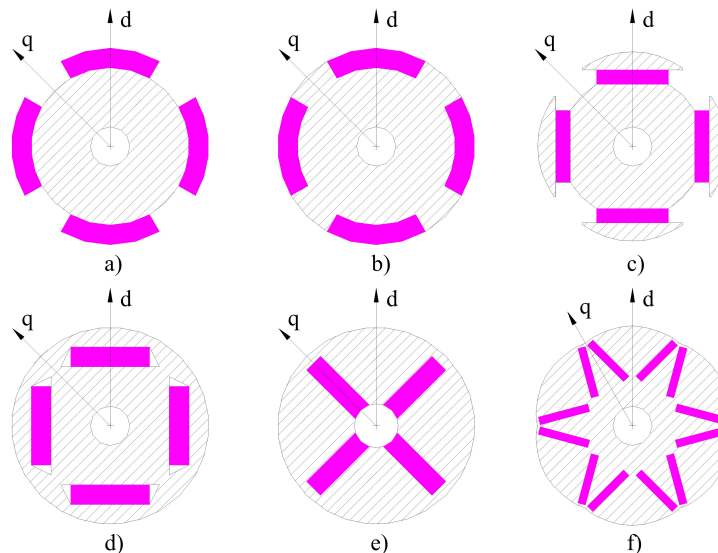


Figura 2.2: Máquinas de flujo radial con ranuras a) imanes en superficie b) imanes interiores, c) imanes en superficie con polos con zapatos, d)-f) imanes enterrados

En el caso de máquinas con imanes enterrados, el material empleado son ferritas, mucho más baratas que los imanes de tierras raras, aunque su ensamblaje es más complicado y caro. Como las ferritas son imanes de baja energía, es necesario emplear mucho más material, aumentando el peso del rotor. En comparación con las máquinas con imanes en superficie, el hecho de enterrar los imanes presenta una serie de ventajas. Los imanes tienen forma de paralelepípedo rectangular, siendo más sencillos de fabricar. No hay problemas a la hora de fijar los imanes, permitiéndose mayores velocidades de giro sin necesidad de usar anillos de refuerzo. Es posible obtener una densidad de flujo en el entrehierro casi senoidal y un bajo par de reluctancia, mejorando la calidad del par proporcionado por la máquina. Al estar los imanes enterrados, se reduce el riesgo de desmagnetización y no es necesario una protección contra impactos mecánicos, desgaste o corrosión. Como desventajas, además de la mayor complejidad en el montaje, ya mencionada anteriormente, este diseño posee un flujo de dispersión bastante más elevado que las máquinas con imanes en superficie, principalmente en los extremos del rotor. Se puede disminuir dicho flujo, colocando barreras de material adecuado, pero no se llega a los niveles de flujo de dispersión de las máquinas

con imanes en superficie. Además el desmontaje y reciclado de las máquinas con imanes enterrados es más difícil, ya que es complicado quitar los imanes del núcleo del rotor.

### 2.1.2. Máquinas de flujo axial

En las máquinas de flujo axial el flujo magnético se produce en la dirección axial siendo originado por imanes magnetizados axialmente. La figura 2.3 muestra diferentes ejemplos de máquinas de flujo axial: máquinas lisas, con ranuras, simples, sin núcleo, etc. Las máquinas de flujo axial tiene las siguientes ventajas respecto a las de flujo radial:

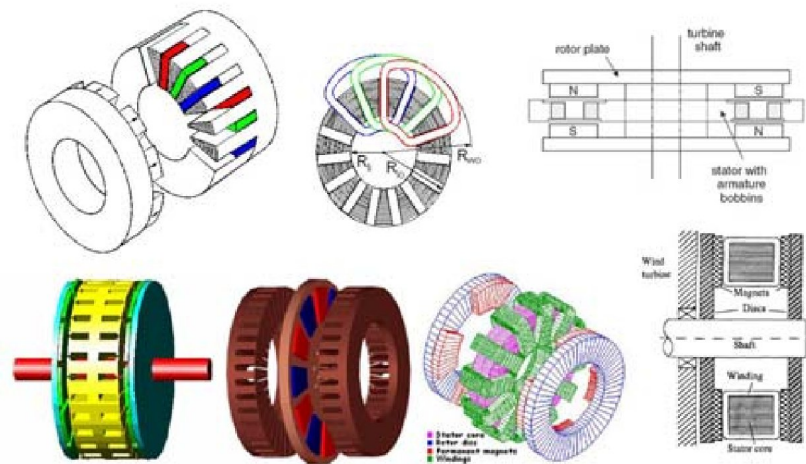


Figura 2.3: Máquinas de flujo axial [1]

- bobinado sencillo,
- pequeño par de reluctancia y bajo ruido (en máquinas lisas),
- pequeña longitud axial de la máquina, y
- elevada relación par/volumen.

No obstante, las máquinas de flujo axial también poseen desventajas en comparación con las de flujo radial, tales como:

- baja relación par/peso,
- elevado diámetros externo, gran cantidad de imanes y elevada inestabilidad (en máquinas lisas),

- dificultades para mantener constante el entrehierro para diámetros altos (en máquinas ranuradas), y
- estátor difícil de fabricar (en máquinas ranuradas).

En aquellas aplicaciones en las que la reducida longitud axial de la máquina es una condición, las máquinas de flujo axial son la geometría a tener en cuenta (es el caso de vehículos eléctricos con el motor situado en el interior de la rueda, [4] y [5]). En otras situaciones, dependiendo de si se prefiere una elevada densidad de par o una reducida relación coste/par se opta por un tipo de máquina u otro. En este sentido, en [6] se realiza una comparación entre diseños optimizados de máquinas de flujo radial y de flujo axial, concluyendo que las máquinas de flujo radial tienen una relación coste/par menor que las axiales, pero también una relación par/volumen menor. En [7] se realiza una comparación similar entre máquinas de flujo radial y de flujo axial, concluyendo que las máquinas de flujo axial son una opción muy atractiva para geometrías muy planas y con un número elevado de polos. En esta situación, las máquinas de flujo axial tienen un par electromagnético mayor y una densidad de par mayor que las máquinas radiales. En [8] y en [9] los autores investigan las posibilidades de emplear las máquinas de flujo axial como generadores portátiles, siendo originado el movimiento de rotación del rotor por una persona. La configuración de máquina seleccionada es la de flujo axial en detrimento de la de flujo radial, ya que aquellas tienen una mayor densidad de potencia y una construcción más compacta que éstas. Dentro de las diferentes máquinas de flujo axial, se selecciona como más idónea una máquina de doble entrehierro y lisa, lo que en la literatura especializada se conoce como máquina 'Torus'; existen numerosos artículos en los que se describe, estudia y compara este tipo de máquina con otras. Sirvan de ejemplo los artículos de Spooner, Chalmers et al ([10], [11] y [12]) y los de Caricchi et al ([13] y [14]).

Sitapati y Krishnan en ([15]) comparan una máquina radial convencional con cuatro axiales (simple ranurada, doble ranurada, simple lisa, y doble lisa), analizando el volumen, el peso, las pérdidas (tanto en el hierro, en el cobre y las totales) y la inercia. Concluyen que las máquinas axiales poseen una mayor densidad de potencia que las radiales pero un menor momento de inercia. En cuanto a la cantidad de imán necesario para producir una potencia de salida fijada, las máquinas axiales lisas necesitan más cantidad de imán que la radial y ésta más que las axiales ranuradas. En lo referente al peso de acero, las máquinas axiales necesitan menos acero que las radiales. Por último y en lo que respecta a las pérdidas, las pérdidas en el cobre de las máquinas ranuradas (tanto las axiales como las radiales) son similares entre

sí e inferiores a las axiales lisas; las pérdidas en el hierro de las máquinas radiales y de las axiales doble son similares y superiores a las de las axiales sencillas. Debido a que las pérdidas en el cobre son las de mayor cuantía, el comportamiento de las diferentes topologías en lo referente a las pérdidas totales es el mismo que en de las pérdidas en el cobre (radiales y axiales ranuradas similares entre sí e inferiores a las axiales lisas).

### 2.1.3. Máquinas de flujo transversal

En las máquinas de flujo transversal, el flujo magnético sigue un camino perpendicular a la dirección de rotación del rotor. La principal diferencia entre estas máquinas y las de flujo radial y axial es que permiten aumentar el espacio para el bobinado sin disminuir el espacio disponible para el flujo principal. Además pueden diseñarse con un paso de polo mucho menor que en los otros dos tipos. En la figura 2.4 se muestran diferentes máquinas de flujo transversal.

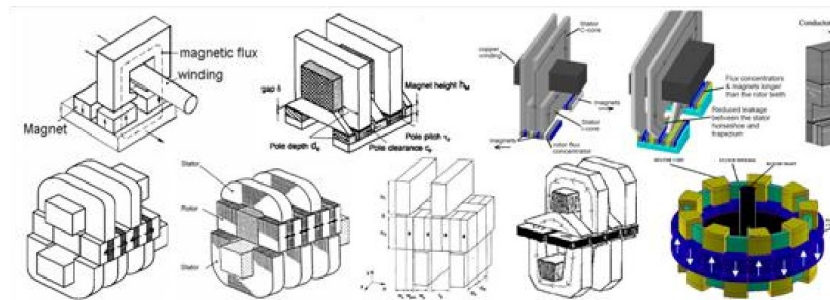


Figura 2.4: Ejemplos de máquinas de flujo transversal[1]

Las principales ventajas de las máquinas de flujo transversal comparado con las de flujo longitudinal son las siguientes:

- mayor densidad de fuerza,
- pérdidas en el cobre muy bajas y
- bobinado sencillo.

El principal inconveniente de estas máquinas radica en su construcción, ya que ésta es mucho más complicada que en las máquinas radiales o axiales, como consecuencia de ser el camino recorrido por el flujo tridimensional (en los imanes es angular mientras que en los núcleos que lo cierran es radial en unos tramos y axial en otros). Estos inconvenientes hacen que las máquinas



de flujo transversal sean menos atractivas.

Dubois et al. en [16] comparan la relación coste/par de máquinas de flujo transversal con máquinas de flujo radial, en función del espesor del entrehierro para valores del diámetro exterior entre 0.5 metros y 4 metros. Los resultados obtenidos muestran que en ambas configuraciones la relación disminuye al aumentar el diámetro. Si variamos el entrehierro, en las máquinas de flujo radial la relación coste/par depende muy poco del entrehierro, mientras que en las máquinas transversales esta dependencia es muy fuerte, disminuyendo la relación al aumentar el entrehierro. En todos los casos estudiados, la relación coste/par en las máquinas radiales es superior a la de las transversales, siendo tanto más superior cuanto menor es el entrehierro (por ejemplo, para un entrehierro de 0.5 mm, el ratio coste/par en la radial es 3.5 veces el de la transversal). En todas las máquinas diseñadas, el rendimiento es el mismo y se ha fijado en un 92 %.

Por último, citaremos el artículo de Dubois et al ([17]) donde se comparan diferentes topologías de máquinas de flujo radial (con imanes en superficie y con concentración de flujo), de flujo axial (tanto ranurada como lisa), de flujo transversal (con cuatro variantes), de reluctancia variable y de reluctancia híbrida, tomando como parámetros del estudio la densidad de par y la relación coste/par. Respecto a las tres topologías que nos ocupan, los autores obtiene los siguientes resultados:

- Las máquinas de flujo radial con imanes en superficie y con concentración de flujo son similares.
- En comparación con las máquinas de flujo radial, la máquina de flujo axial lisa (máquina “torus”) tiene el doble de densidad de par pero también el doble de relación coste/par, mientras que la axial ranurada tiene el doble de densidad de par y la mitad de relación coste/par.
- La máquina de flujo axial interior ranurada tiene un comportamiento similar a las de flujo transversal.

En base a estos resultados, los autores concluyen que, de las opciones analizadas, dos topologías deben ser consideradas para su aplicación en máquinas eólicas sin multiplicadora: las máquinas de flujo transversal y la máquina axial con ranuras y rotor interno.

De todo lo expuesto anteriormente, centraremos nuestro estudio en las máquinas axiales. Veamos cuál ha sido su desarrollo a lo largo de la historia y los diferentes tipos de máquinas de flujo axial.

#### 2.1.4. Desarrollo de las máquinas de flujo axial e imanes permanentes

La historia de las máquinas eléctricas muestra que las primeras máquinas eléctricas que se inventaron fueron máquinas de flujo axial. El primer prototipo que se conoce de una máquina de flujo axial corresponde a Faraday, quien en 1831 construyó un generador homopolar, conocido como “Disco de Faraday”. Está formado por un disco conductor situado dentro del campo magnético originado por un imán en forma de herradura que genera un flujo en la dirección axial (figura 2.5). Al girar el disco, se induce una pequeña corriente continua, que es llevada a un circuito exterior mediante de dos contactos situados en el eje y en la periferia.

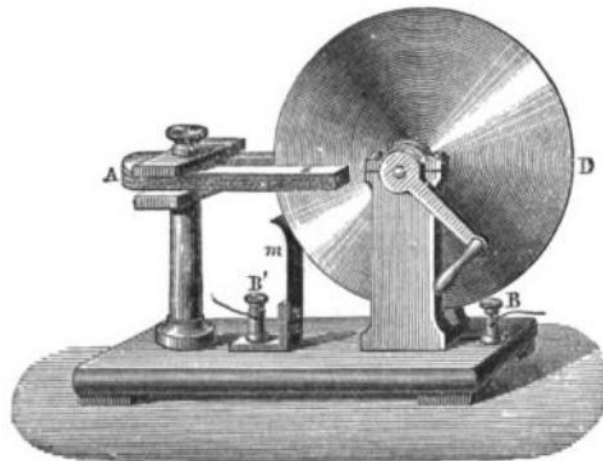


Figura 2.5: Disco de Faraday, primer generador homopolar (1831)

La disposición en forma de disco también aparece en el diseño realizado por Nicola Tesla quien, en junio de 1889, patentó el motor asíncrono al cual denominó “motor electro-magnético” [18] (patente de Estados Unidos n<sup>o</sup>405.858 de 25 de junio de 1889). En la figura 2.6 se muestra una vista lateral de su máquina, donde se puede apreciar que se trata de una máquina de flujo axial.

A pesar de estos prometedores inicios para las máquinas de flujo axial, poco después de que Thomas Davenport patentara su discutida máquina de flujo radial [19] (figura 2.7) (Patente de Estados Unidos n<sup>o</sup>132, año 1837, titulada “Mejora en las máquinas propulsoras por el magnetismo y el electro-magnetismo”), las máquinas de flujo radial fueron ampliamente empleadas

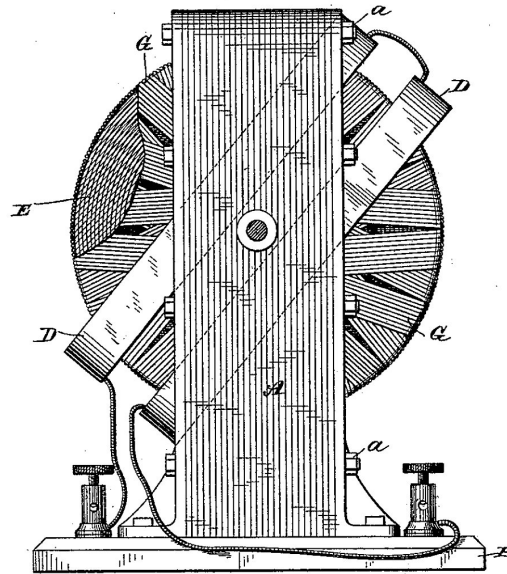


Figura 2.6: Motor electro-magnético de Nicola Tesla (1889)

dejando de lado las de flujo axial. Las razones que hicieron que las máquinas de flujo axial perdieran protagonismo en favor de las de flujo radial, las podemos resumir en los siguientes puntos [2]:

- elevada fuerza de atracción en la dirección axial entre el estátor y el rotor;
- dificultades de fabricación, tales como la realización de las ranuras en los núcleos laminados;
- elevado coste en la fabricación de los núcleos laminados del estátor;
- dificultad en el montaje de la máquina y en el mantenimiento de la uniformidad del entrehierro.

Aunque a principios de 1830 comenzó el empleo de imanes permanentes en las máquinas eléctricas, la baja calidad de los materiales magnéticos duros pronto desanimó de su uso. Hubo que esperar hasta 1940 para que las propiedades de los imanes permanentes mejoraran hasta el punto de ser capaces de competir con los electroimanes, tanto funcional como económicamente [20]. Se trata sobre todo de aleaciones de acero y ferritas, empleándose ampliamente en pequeños motores d.c. En 1970 se produjo un hito de gran importancia: las propiedades se mejoraron casi diez veces; aparecen los imanes de tierras raras y por primera vez en la historia, los imanes posibilitaban nuevas soluciones

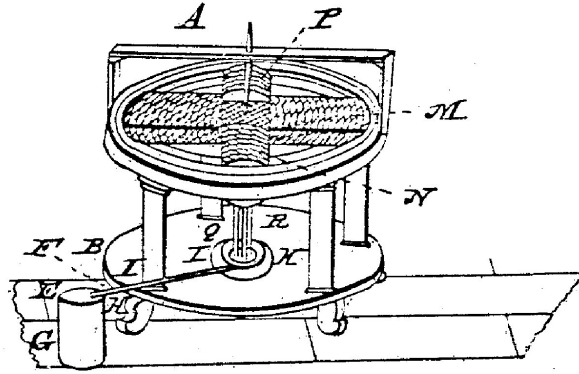


Figura 2.7: Máquina de Thomas Davenport (1837)

que no eran posibles o factibles con los electroimanes. Los imanes permanentes se convertían en un componente único. La eficiencia volumétrica de estos nuevos imanes permitía a los diseñadores reestructurar los circuitos magnéticos y los dispositivos, logrando parámetros de operación que aumentaban su valor; en muchos casos, el coste de los nuevos imanes era justificable, a pesar de emplear materias primas muy caras.

¿A qué escala son de aplicación los imanes permanentes en comparación con los electroimanes? Está claro que en dispositivos de pequeño tamaño, los imanes permanentes tienen mayores ventajas que los electroimanes: la habilidad de un imán permanente para establecer un campo permanece inalterable a pesar de la escala. Sin embargo, en un electroimán, si reducimos las dimensiones, la densidad de corriente aumenta inversamente en la misma proporción, dando lugar a problemas de refrigeración difíciles de superar. Y ¿por qué no emplear los imanes permanentes en dispositivos grandes? A fin de cuentas, la eficiencia volumétrica de un imán es superior a la de un electroimán y no tiene pérdidas. Los imanes permanentes, tradicionalmente, han estado limitados a dispositivos de pequeña potencia, pero hay una tendencia a emplearlos en dispositivos grandes; por ejemplo, Siemens fabrica la turbina SWT-6.0-154 con una potencia nominal de 6MW con un generador síncrono de imanes permanentes y sin multiplicadora o Vestas con el modelo V112-3,0 MW, con una potencia de 3MW y un generador de imanes permanentes.

### 2.1.5. Tipos de máquinas de flujo axial e imanes permanentes

En principio, cada tipo de máquina de flujo radial tiene su correspondiente versión de máquina de flujo axial. No obstante, en la práctica, las máquinas de flujo axial se reducen a tres tipos:

- máquinas conmutadas de corriente continua e imanes permanentes,
- máquinas sin escobillas (“brushless”) de corriente continua e imanes permanentes y máquinas síncronas de corriente alterna, y
- máquinas de inducción.

Las máquinas conmutadas de corriente continua e imanes permanentes emplean imanes permanentes para reemplazar el bobinado encargado de generar el campo electromagnético de excitación. Estas máquinas representan una opción versátil y económica en ciertas aplicaciones industriales, de automoción o domésticas, tales como ventiladores, bombas, pequeños vehículos eléctricos, herramientas, electrodomésticos, etc.

Las máquinas brushless de corriente continua y las máquinas síncronas de corriente alterna tienen casi la misma estructura pero su teoría y principios de operación son completamente diferentes, principalmente en lo referente a la forma de la onda de corriente generada o suministrada para su funcionamiento (ver figura 2.8):

- las máquinas brushless de corriente continua generan una onda de fuerza electromotriz inducida (femi) trapezoidal y operan a partir de una onda de corriente de línea rectangular, siendo denominadas por este hecho, *máquinas de onda cuadrada*.
- Las máquinas síncronas de corriente alterna generan una onda de femi senoidal y operan con una onda de corriente senoidal; por ello, se las denomina máquinas de onda senoidal.

Respecto a las máquinas de inducción, es difícil fabricar un rotor laminado o bien bobinando o bien en jaula de ardilla con forma de disco, por lo que hay poco interés en este tipo de máquinas con flujo axial.

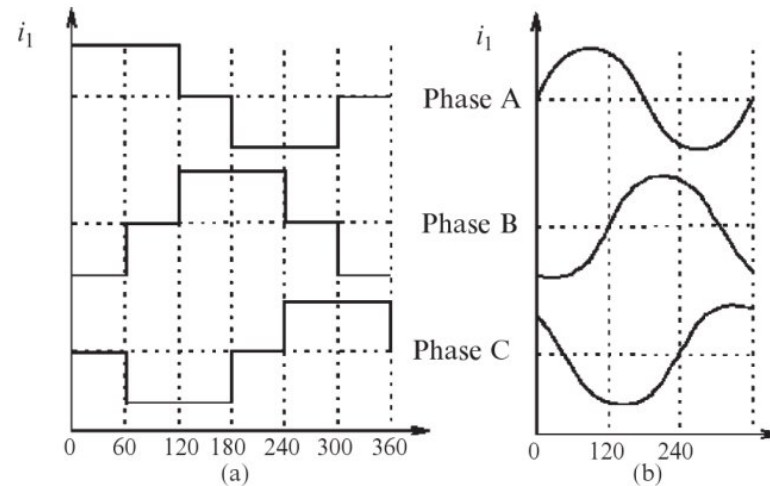


Figura 2.8: Formas de onda para máquinas brushless de flujo axial e imanes permanentes: a) máquina de onda cuadrada, b) máquina de onda senoidal ([2])

### 2.1.6. Topologías y geometrías

Desde un punto de vista constructivo, las máquinas brushless de flujo axial pueden diseñarse de una sola cara o de doble cara, con o sin ranuras en la armadura, con o sin núcleo en la armadura, con rotor de imanes permanentes interno o externo y de una sola etapa o de etapa múltiple. En el caso de configuraciones de doble cara, se pueden adoptar las disposiciones de rotor externo o estátor externo. Las diferentes topologías de máquinas brushless de flujo axial e imanes permanentes se pueden clasificar de la siguiente forma:

- máquinas de flujo axial e imanes permanentes de una sola cara:
  - con estátor ranurado (figura 2.9a)
  - con estátor liso (sin ranuras)
  - con estátor de polos salientes
- máquinas de flujo axial e imanes permanentes de doble cara:
  - con estátor interno (figura 2.9b)
    - con estátor ranurado
    - con estátor liso
    - ◇ con estátor con núcleo de hierro

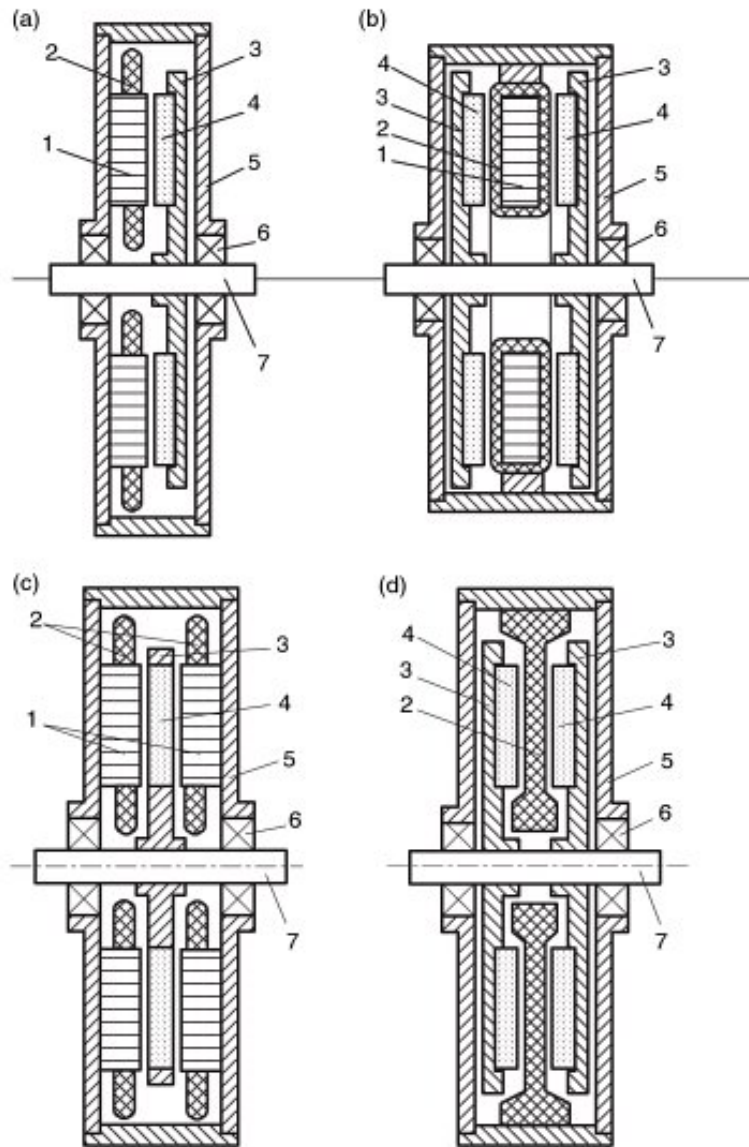


Figura 2.9: Topologías básicas de máquinas de flujo axial e imanes permanentes: a) máquina lisa de una sola cara, b) máquina lisa de doble cara con estátor interno, c) máquina de doble cara con estátor ranurado y rotor interno, d) máquina sin núcleos de doble cara con estátor interno. 1 → núcleo del estátor, 2 → Bobinado del estátor, 3 → rotor, 4 → imanes permanentes, 5 → carcasa, 6 → rodamientos, 7 → eje.

- ◇ con estátor sin núcleo (figura 2.9d)
- ◇ con rotor y estátor sin núcleos
- con estátor de polos salientes (figura 2.10)

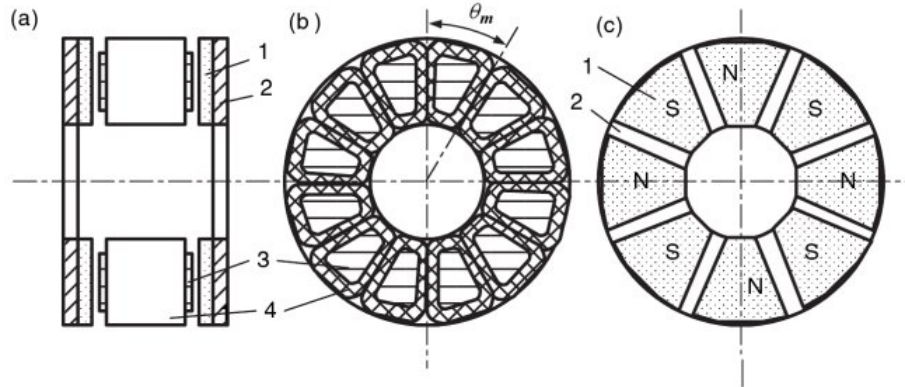


Figura 2.10: Máquina brushless de flujo axial e imanes permanentes de doble cara con estátor interno de polos salientes y rotor externo: a) conjunto, b) estátor, c) rotor. 1 → imanes permanentes, 2 → disco de acero del rotor, 3 → polo des estátor, 4 → bobina del estátor

- con rotor interno (figura 2.9c)
  - con estátor ranurado
  - con estátor liso
  - con estátor de polos salientes (figura 2.11)

■ máquinas de flujo axial e imanes permanentes multi-etapa (figura 2.14)

En las máquinas con ranuras el entrehierro suele ser relativamente pequeño. La densidad del flujo magnético en el entrehierro disminuye bajo las ranuras debido al aumento de la reluctancia. Este cambio en la densidad de flujo causado por la abertura de las ranuras equivale a un aumento ficticio del espesor del entrehierro junto con la eliminación de las ranuras. La relación entre el entrehierro ficticio y el entrehierro real puede expresarse con ayuda del denominado *coeficiente de Carter*:

$$g' = K_C \cdot g \quad (2.1)$$

siendo la expresión del coeficiente de Carter [21]:

$$K_C = \left[ 1 - \frac{2s}{\pi\tau_S} \left\{ \arctan \left( \frac{s}{2g} \right) - \frac{g}{s} \ln \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{s}{g} \right)^2 \right] \right\} \right]^{-1} \quad (2.2)$$



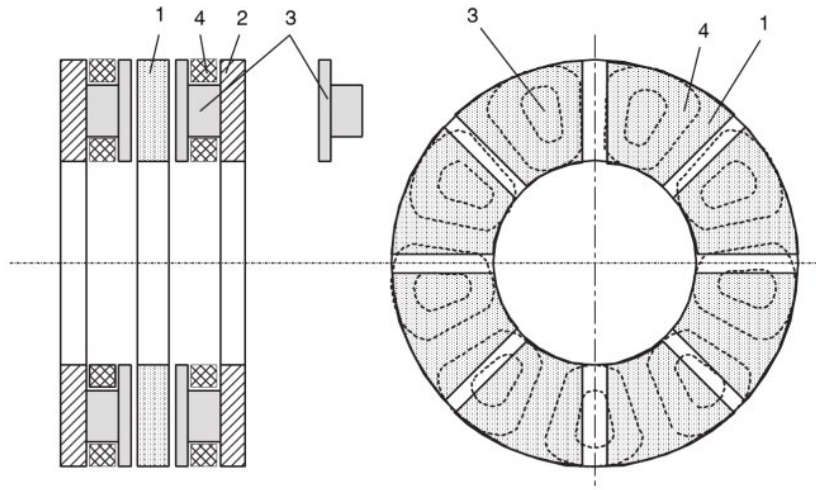


Figura 2.11: Máquina brushless de flujo axial e imanes permanentes de doble cara con tres fases, 9 bobinas de polos salientes del estátor y 8 polos del rotor. 1 → imanes permanentes, 2 → disco ferromagnético del estátor, 3 → polo del estátor, 4 → bobina del estátor.

donde  $s$  es la anchura de la abertura de la ranura,  $g$  el espesor del entrehierro real y  $\tau_s$  el paso de ranura, suma de la anchura de la ranura  $s$  y de la anchura del diente  $t$  (figura 2.12).

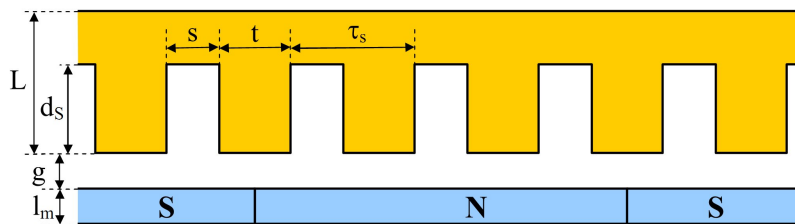


Figura 2.12: Geometría para el cálculo del Coeficiente de Carter en una máquina con rotor de imanes permanentes y estátor ranurado según la ecuación (2.2).

En las máquinas de flujo axial e imanes permanentes lisas el entrehierro es mucho mayor, siendo igual a la suma del espacio físico del entrehierro más el espesor de todos los materiales no magnéticos (bobinado, material de aislamiento, de soporte, etc...) que son recorridos por el flujo magnético. Al no haber ranuras, el coeficiente de Carter vale la unidad. Las máquinas lisas, en

comparación con las ranuradas, presentan las ventajas de tener un estátor más sencillo de ensamblar, eliminan por completo el par de reluctancia y disminuyen las pérdidas en la superficie del rotor, la saturación magnética y el ruido acústico. Como desventajas podemos señalar el que emplean mayor cantidad de imanes permanentes, menor inductancia del bobinado y pérdidas significativas por corrientes de Foucault.

En la máquina de flujo axial e imanes permanentes de polos salientes y doble cara mostrada en la figura 2.10, las bobinas del estátor están bobinadas alrededor de polos laminados axialmente. Con el fin de obtener un motor trifásico con auto arranque, el número de polos del estátor y del rotor tienen que ser diferentes; en el ejemplo mostrado en la figura 2.10 el estátor posee 12 polos y el rotor 8. La figura 2.11 muestra una máquina de flujo axial e imanes permanentes de doble cara con estátor externo de polos salientes y rotor de imanes permanentes interno. El estátor posee nueve bobinas y el rotor ocho polos para una máquina trifásica.

Según la aplicación de la máquina y el entorno de trabajo, las máquinas lisas pueden ser o con núcleo ferromagnético o sin núcleo. Las máquinas sin núcleo eliminan todo el material ferromagnético del estátor, haciendo que las correspondientes pérdidas por corrientes de Foucault y por histéresis sean nulas. También se consiguen eliminar las fuerzas de atracción axiales existentes entre el rotor y los estatores con lo máquina en circuito abierto, mejorando la respuesta dinámica de la máquina al disminuir la inercia.

En algunas ocasiones, las máquinas de flujo axial e imanes permanentes lisas se clasifican de acuerdo a la forma de sus bobinas, existiendo máquinas trapezoidales, rómboidales, etc. La figura (2.13) muestra bobinas con forma trapezoidal y romboidal para el estátor de una máquina axial de imanes permanentes sin núcleo y refrigerada por agua desarrollada por Caricchi et al ([3]).

En las máquinas de flujo axial, el par electromagnético es una función, principalmente, del diámetro externo. Si el espacio disponible para alojar a la máquina es inferior al diámetro calculado, entonces el par requerido en el eje de la máquina puede lograrse mediante una disposición multietapa, como se muestra en la figura 2.14. En una máquina de flujo axial multietapa, si  $j$  es el número de etapas, la máquina tiene  $j$  estatores con sus correspondientes bobinado y  $(j + 1)$  rotores. Los  $(j + 1)$  rotores comparten un eje mecánico común, mientras que los terminales de los  $j$  bobinados trifásicos de los estatores pueden conectarse en serie o en paralelo. En algunas ocasiones, como

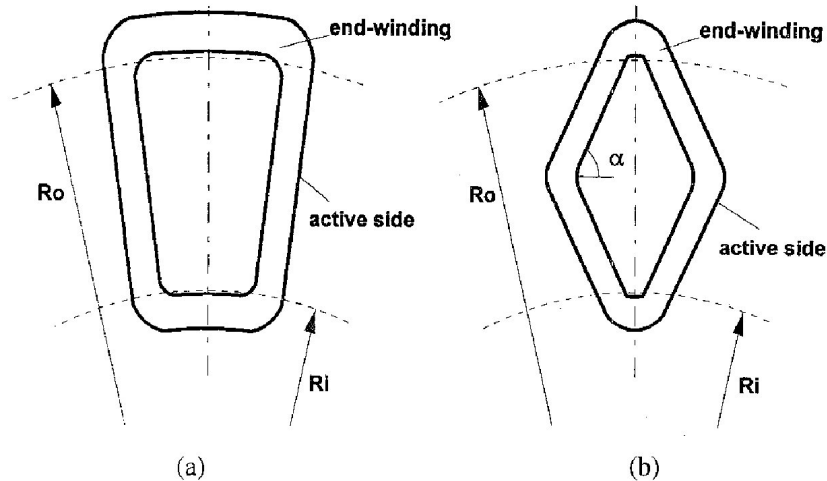


Figura 2.13: Formas de bobinas para un estator de una máquina de flujo axial sin núcleo: a) bobina trapecoidal, b) bobina romboidal [3]

es el caso de vehículos eléctricos, la conexión de las bobinas conmuta de serie a paralelo o de paralelo a serie, en base a los requerimientos de la aplicación.

Cada una de las topologías de máquinas axiales de imanes permanentes tiene sus puntos fuertes y sus puntos débiles. Comparando máquinas de una cara con las de doble cara podemos señalar:

- Las máquinas de una sola cara son más sencillas de fabricar que las de doble cara, pero tienen una menor capacidad de producción de par.
- Además, si se trata de diseños con núcleo ferromagnético, en las de una sola cara existen una fuerza de atracción entre los imanes del rotor y el núcleo del estator, dando lugar a una carga axial sobre los rodamientos. En los diseños de doble cara, al existir dos entrehierros, estas fuerzas de atracción son dobles y se compensan entre sí, no existiendo ninguna fuerza neta en la dirección axial y no se transmite ninguna carga axial a los rodamientos.
- Por último, en comparación con la máquina de doble cara, el rotor de las máquinas de una sola cara es más grueso ya que el flujo magnético se tiene que cerrar a través de él.

Si optamos por un diseño de doble cara, tendremos que elegir entre un rotor interno o un estator interno. La opción de rotor interno posee las siguientes ventajas frente a la de estator interno:

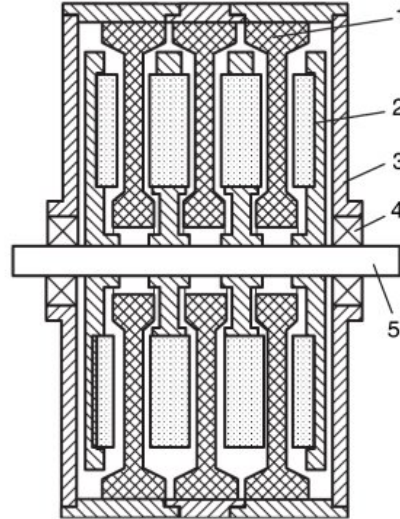


Figura 2.14: Máquina brushless de flujo axial e imanes permanentes multi-etapa de tres etapas, con tres estatores sin núcleo y cuatro rotores de imanes permanentes. 1 → bobinado del estator, 2 → rotor, 3 → carcasa, 4 → rodamiento, 5 → eje.

- En el rotor de las máquinas de doble cara con estator interno, igual que sucede en los diseños de una cara, tiene que existir un núcleo ferromagnético que se encargue de cerrar el flujo creado por los imanes. Las máquinas de rotor interno no necesitan de este material ferromagnético.
- En los diseños de doble cara con rotor interno, el bobinado está localizado en los dos estatores, girando el rotor de imanes permanentes entre ambos. Los bobinados de ambos estatores se pueden conectar en paralelo o en serie. Si se conectan en paralelo, la máquina puede operar incluso si uno de los bobinados está deteriorado. La conexión en serie es preferida ya que proporciona fuerzas de atracción axiales iguales pero opuestas entre el rotor y cada uno de los estatores.
- Además, al estar los bobinados situados en el exterior de la máquina, es más fácil su refrigeración.

A pesar de estas ventajas y dependiendo de la aplicación de la máquina, en ocasiones los diseños con rotores externos son preferidos a los de estatores externos; es el caso de los vehículos eléctricos pequeños, donde los motores van montados directamente en el interior de la rueda. Si el motor es de rotores

externos, al unir solidariamente la rueda con el rotor, el movimiento en el rotor conlleva el de la rueda y viceversa. Si optáramos por un diseño con rotor interno, la transmisión del movimiento se realizaría mediante un eje que saldría de la máquina y sería necesario insertar unos engranajes para lograr una unión mecánica entre el rotor y la rueda. En la figura 2.15 se muestra un motor de flujo axial e imanes permanentes con rotores externos y estátor interno liso, que servirá como motor de propulsión de un pequeño vehículo eléctrico y que irá directamente alojado en la rueda.

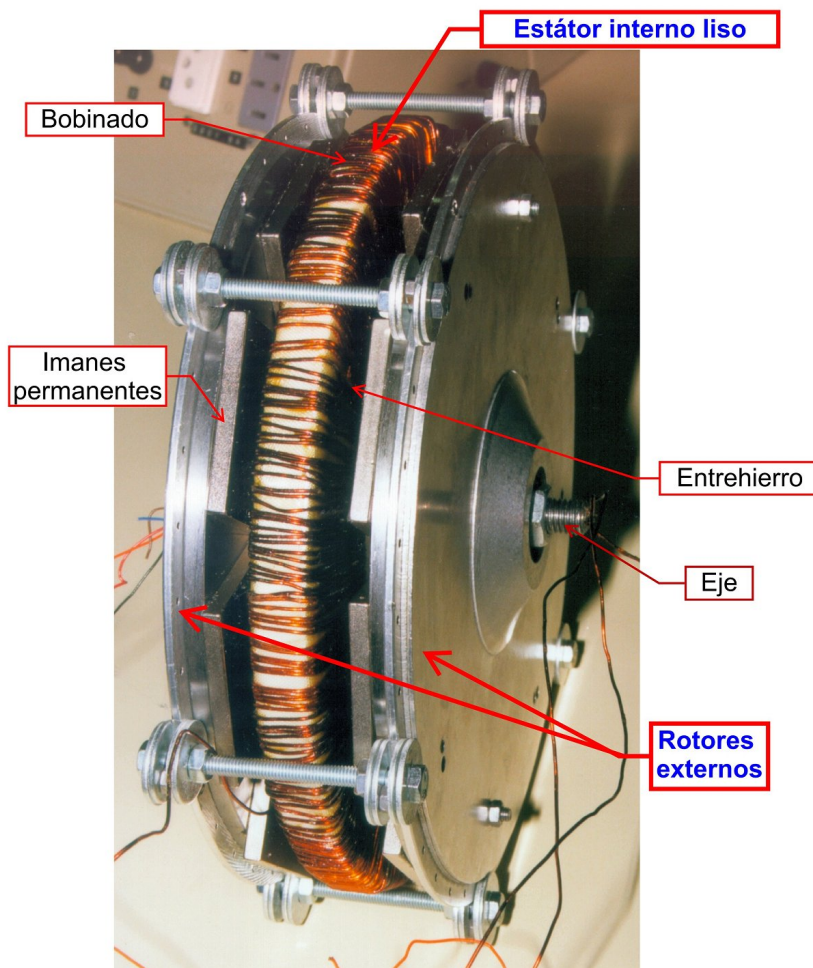


Figura 2.15: Motor axial brushless de imanes permanentes y flujo axial con estátor liso y rotores externos

Independientemente de elegir un diseño de una cara o de doble cara, tendremos que optar entre estátor liso o ranurado. El estátor liso está formado por un disco sobre cuya superficie se encuentra bobinado el devanado polifásico de la máquina. El estátor ranurado está formado por un disco con ranuras o canales radiales donde van alojados los conductores que forman el bobinado. Cada uno de ellos tiene sus ventajas e inconvenientes:

- En las máquinas ranuradas el entrehierro es igual al espacio físico existente entre la base del estátor y el rotor, mientras que en las máquinas con estátor liso poseen un entrehierro mayor, ya que al espesor físico del entrehierro hay que añadir el espacio ocupado por el bobinado y los aislantes.
- Como consecuencia de este mayor entrehierro en la máquina lisa, la densidad de flujo máxima en el entrehierro no suele exceder de 0.65T, siendo necesario un gran volumen de imanes para conseguir este valor. Por el contrario, en la máquina ranurada, al poseer un entrehierro menor, se logran valores de densidad de flujo máxima en el entrehierro de 0.85T con la mitad de volumen de imanes que en la máquina lisa.
- En las máquinas ranuradas y debido a la presencia de las ranuras, el entrehierro no es uniforme y, en consecuencia, su reluctancia varía con la posición, originando un par denominado de *reluctancia*. Algunas máquinas basan su funcionamiento en este par y, por ello, en el diseño se tiende a favorecerlo y aumentarlo. Es el caso de las máquinas de reluctancia variable y de los motores paso a paso. En otras situaciones, como la que no ocupa, este par es indeseable y por ello se tiende a eliminarlo o, en su defecto, a minimizarlo. En las máquinas lisas, al poseer un entrehierro uniforme, el par de reluctancia es prácticamente nulo.
- El circuito magnético de las máquinas lisas se diseña para que no se sature. En las máquinas ranuradas, hay pequeñas zonas en las que el circuito magnético está saturado, como es en las esquinas y en los vértices de los dientes, debido a la concentración de flujo que se produce al evitar el flujo la ranura y buscar el diente.
- La fabricación de un núcleo liso es relativamente sencillo, ya que basta con bobinar una cinta de acero para obtener un núcleo toroidal laminado liso. Estos núcleos son bastante comunes ya que, además de emplearse para motores lisos también se emplean en otras aplicaciones, como son transformadores toroidales y autotransformadores.

- Por contra, la fabricación de un núcleo ranurado es complicado ya que sobre el núcleo toroidal laminado hay que mecanizar las ranuras. Si esta tarea se realiza con una fresa, debe tenerse especial cuidado a principio y al final de la ranura, ya que la entrada y, sobre todo, la salida de la fresa, puede dañar la ranura. En la figura 2.16 se muestran las diferentes etapas en el mecanizado, partiendo de un núcleo toroidal liso (figura 2.16a), y obteniendo un núcleo ranurado (figura 2.16b). Podemos observar (figuras 2.16c y d) como a la entrada y la salida de la ranura y, sobre todo, en el radio interno, la pared del diente puede resultar dañada. Para evitarlo, se pueden emplear anillos de material blando (por ejemplo, aluminio) que ciñan al núcleo de tal modo, que cuando la fresa llega al final de la ranura, no se encuentra en el aire si no que penetra en el material del anillo.

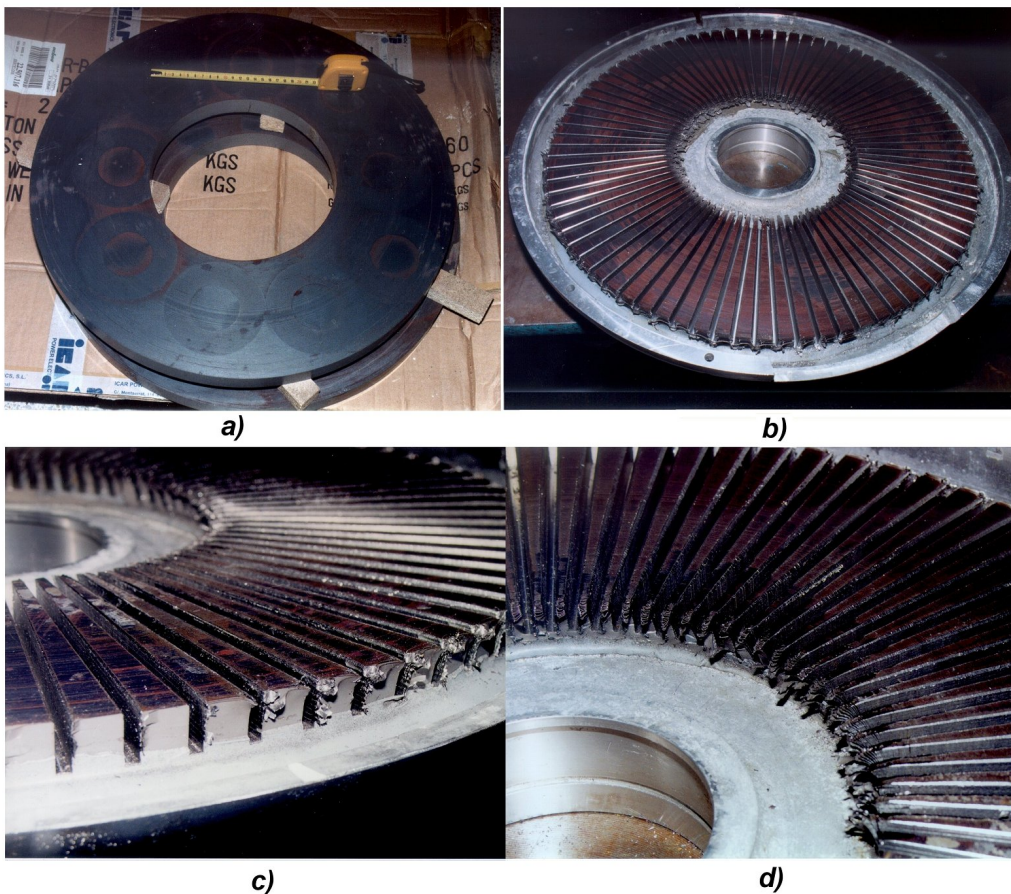


Figura 2.16: Fases en el mecanizado de las ranuras: a) núcleo toroidal liso, b) núcleo toroidal ranurado, c) y d) detalles de ranuras



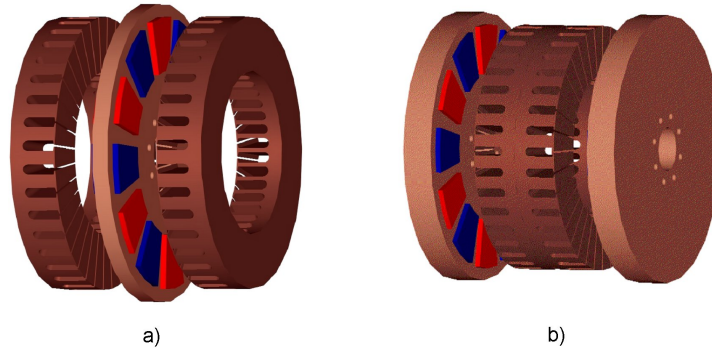


Figura 2.17: Configuraciones de máquina axial de doble cara con estátor ranurado: a) Rotor interno; b) Estátor interno

- Si la máquina es de estátor interno, el elegir un diseño de estátor liso (como el de la figura 2.15) conlleva el aprovechar los dos lados activos del bobinado de la máquina, ya que ambos lados están expuestos al flujo creado por los imanes permanentes. Si por el contrario, optáramos por un diseño con rotor interno ( y, por lo tanto, estatores externos), sólo aprovecharíamos un lado activo de cada estátor (el que mira al entrehierro), aumentando la resistencia del devanado y las pérdidas que esta resistencia implica.
- Si la máquina es de rotor interno, el diseño del estátor ranurado implica el tener que colocar dos estatores ranurados a ambos lados del rotor central con sus correspondientes bobinados. Si el estátor es interno, ambos lados del estátor tendrían que estar mecanizados, tarea que resulta bastante complicada. En la figura (2.17) se muestran las configuraciones de rotor interno y rotor externo para el caso de máquina ranurada.

Expuestas las ventajas y desventajas de las diferentes configuraciones de máquinas de flujo axial, hemos seleccionado para nuestro diseño la *máquina axial de doble cara con rotor interno y estatores ranurados*, ya que es una topología no tan estudiada como las máquinas de flujo radial, presenta una muy buena densidad de par, es muy adecuada para su aplicación en una máquina eólica sin multiplicadora, al ser de doble cara, existe una compensación de fuerzas de atracción entre el rotor y cada uno de los estatores, sufriendo menos los rodamientos de la máquina, su construcción no es tan complicada como las máquinas de flujo transversal, aunque tiene una dificultad importante sobre todo en la mecanización de las ranuras de los estatores.



## 2.2. Antecedentes

Una máquina eléctrica es un dispositivo formado por materiales con diferentes características eléctricas y magnéticas y donde dos bobinados o un bobinado y unos imanes interactúan entre sí. El conocimiento del campo magnético que se origina en su interior es un paso fundamental en el estudio, análisis o diseño de estos aparatos. Desde un punto de vista de su comportamiento magnético, una máquina eléctrica es un medio heterogéneo, formado por diferentes materiales y, en donde las superficies de separación entre los diferentes medios imponen condiciones que deben ser satisfechas por el campo magnético; son las denominadas *condiciones de contorno*. La tarea del cálculo del campo magnético con condiciones de contorno no es una tarea fácil y para su resolución se han empleado diferentes técnicas a lo largo de la historia. Veamos aquellas aportaciones que, en mi opinión, han sido las más importantes.

La primera referencia que destacamos es el libro de Hague ([22]) quien obtiene la expresión del campo originado por conductores rectilíneos situados entre dos superficies concéntricas o paralelas, con distinta permeabilidad. Posteriormente Mishkin ([23]), en una máquina de jaula de ardilla, resuelve directamente las ecuaciones de Maxwell, hallando el par creado por la máquina y la corriente que circula por el estátor, pero considerando solamente el armónico fundamental. Para ello, reemplaza la zona de las ranuras del rotor y del estátor por una zona lisa isótropa eléctricamente y anisótropa magnéticamente y sustituye la corriente de excitación del estátor por una densidad lineal de corriente. Posteriormente, Eastham ([24]) aplica la técnica a una máquina tubular, donde propone un nuevo tipo de bobinas inclinadas en lugar de las tradicionales no inclinadas. Divide la región de estudio en un conjunto infinito de regiones cilíndricas, de espesor infinitesimal, con una capa de corriente en un radio determinado. Aplica las ecuaciones de Maxwell a cada región y relaciona cada región con sus vecinas aplicando las condiciones de contorno. En la solución que obtiene aparecen las funciones modificadas de Bessel. En 1976, Williamson ([25]) extiende el trabajo de Mishkin a máquinas anisótropas tanto eléctrica como magnéticamente en los tres ejes coordenados de cada región de un modelo multiregión. Aplica el análisis a los casos particulares de regiones isótropas, compuestas, laminadas y con ranuras. En 1977, Hughes ([26]) calcula el campo magnético, la inductancia y el coeficiente de acoplamiento en máquinas lisas con núcleo de aire o de hierro, tanto en el rotor como en el estátor, mediante la resolución de la ecuación de Laplace en el potencial magnético vectorial, suponiendo que la densidad de corriente de excitación es senoidal.

Los primeros trabajos aplicados a máquinas con imanes permanentes corresponden a Boules, quien aplica la formulación desarrollada por Hague para determinar el campo en una máquina cilíndrica de flujo radial tanto en coordenadas rectangulares ([27]) como en coordenadas polares ([28]). En ambos casos considera la máquina lisa (el efecto de las ranuras se tiene en cuenta a través del coeficiente de Carter) y sustituye los imanes por densidades de corriente que originan la misma fuerza magnetomotriz que éstos. En ese año de 1985, Qishan y Hongzhan ([29]) partiendo de los resultados de Carter ([30], [31] y [32]) deducen la expresión del coeficiente de Carter para máquinas con imanes permanentes. Deng ([33] y [34]) realiza un planteamiento similar al sustituir los imanes por capas de corriente, pero el efecto del ranurado es tenido en cuenta al considerar que la permeabilidad en la zona de las ranuras es anisótropa y que varía con la posición. En 2004, Bumby estudia una máquina de flujo axial y sin ranuras. En 2006 Marignetti ([35]) también representa a los imanes por capas de corriente, desplazando la posición de estas capas de corriente cuando estudia el efecto que tiene en el campo el inclinar los imanes. Nasar ([36]) estudia una máquina lisa de flujo radial empleando el concepto de carga magnética y aplicando el método de las imágenes, método que también sería empleado por Xiong ([37]) para una máquina lineal y por Furlani ([38] y [39]) para una máquina lisa de flujo axial.

Otros autores han empleado los circuitos magnéticos para estudiar el campo magnético en las máquinas de imanes permanentes, técnica que permite representar mediante parámetros concentrados los distintos elementos por los que circula el flujo magnético. Tal es el caso de Koski ([40]), Mi ([41]), Zhu ([42]) y Guo ([43]) los cuales estudian el campo en máquinas radiales.

Pero la técnica que emplean el mayor número de autores se basa en *la resolución directa de las ecuaciones de Maxwell empleando la técnica de la separación de variable* que, para el caso estático o cuasi-estático, conduce a la resolución de la ecuación de Laplace o de Poisson, tanto para máquinas lisas como para máquinas ranuradas. En el caso de ser la máquina ranurada, podemos representar las ranuras directamente en la geometría o considerar su efecto global, empleando el coeficiente de Carter. En este último caso, el planteamiento del problema es totalmente análogo al de una máquina lisa. Entre los autores que trabajan con máquinas lisas, destacamos los trabajos de Furlani que determina el campo en una máquina sin ranuras y de flujo axial, considerando que la permeabilidad del imán es igual a la del vacío ([44]) o superior ([45]), Zhu, quien, para una máquina de flujo radial y con ranuras, pero utilizando el coeficiente de Carter, determina el comportamiento de la

máquina en circuito abierto ([46]), la reacción del inducido ([47]) y en carga ([48]). Zhu también determina el campo en presencia de las ranuras empleando un coeficiente de permeancia que establece a través de la transformación conforme ([49]), técnica de la que hablaremos más adelante; este coeficiente de permeancia también lo utilizará el autor para trabajar con máquinas radiales que poseen magnetización radial o paralela ([50]). En esta misma línea están los trabajos de Wang que, para una máquina tubular con ranuras, representa el ranurado a través del coeficiente de Carter ([51], [52] y [53]) y mediante el coeficiente de permeancia ([54]) descrito por Zhu ([49]). En el estudio de máquinas lisas de flujo axial e imanes permanentes destacamos a Bumby y a Virtic; Bumby ([55]) obtiene la expresión del potencial magnético vectorial originado por una capa de corriente, modelo válido para determinar tanto el campo originado por los imanes como el debido a las bobinas del estátor. Por su parte, Virtic ([56] y [57]) analiza una máquina axial sin núcleo hallando el campo originado por el rotor, por las bobinas del estator y, aplicando superposición, por el conjunto rotor-estátor. Un trabajo también en máquinas sin núcleo pero de flujo radiales, es presentado por Choi ([58]) quien calcula el campo en este tipo de máquinas en dos dimensiones pero realizando una corrección para tres dimensiones a través de una función que tenga en cuenta la dependencia radial del campo.

En el caso de máquinas ranuradas, el coeficiente de Carter permite representar el efecto global de las ranuras en el funcionamiento de la máquina pero no es válido para predecir el par de reluctancia o la forma de onda de la fuerza magnética cuando la máquina está en circuito abierto, siendo necesario incluir las ranuras en la geometría que pretendemos analizar. La consideración del ranurado en la geometría no resulta un problema sencillo y los métodos analíticos que lo resuelven los podemos agrupar en tres categorías, a saber, coeficiente de permeancia, transformación conforme y subdominios.

El análisis de máquinas con ranuras a través del *coeficiente de permeancia* se basa en considerar que el campo en estas máquinas es igual al campo que se origina en una máquina lisa pero que es modulado por un coeficiente que depende de las ranuras. Ejemplos de esta técnica los encontramos en los trabajos ya citado de Zhu ([49] y [50]) en máquinas radiales y en los de Wang ([54]) en máquinas lineales tubulares, en los de Zarko para máquinas radiales, donde considera que las ranuras sólo influyen en la componente radial ([59]) o en las componentes radial y tangencial ([60]), o en los de Jin ([61]) para actuadores lineales rotativos. Dado que este coeficiente de permeancia se halla mediante la transformación conforme de una ranura, muchas veces estos métodos son incluidos en la categoría de transformación conforme.

*La transformación conforme* es la representación de una área poligonal en el plano de otra variable compleja. Una transformación se dice que conforme si los puntos adyacentes en un plano son transformados en puntos adyacentes en el otro plano, si mantiene la ortogonalidad y si conserva el sentido de los ángulos. Cuando queremos hallar la distribución del campo magnético entre dos superficies de contorno que tienen una forma complicada (como es el caso del entrehierro de una máquina con ranuras) resulta muy adecuado encontrar una transformación que pase del plano complejo de partida a otro en el que se conoce la expresión del campo para la geometría resultante, siendo a veces necesario pasar por más de un plano, es decir, emplear más de una transformación conforme.

En la mayoría de los problemas prácticos se conoce el plano en el cual tenemos que resolver el problema y el plano en el cual conocemos la solución, y a partir de ambos debemos determinar la transformación que nos permita pasar de uno a otro. Lo deseable en estos casos sería el poder disponer de un procedimiento rutinario que nos proporcione la ecuación de transformación de un plano a otro. Uno de estos procedimientos permite determinar la ecuación de transformación cuando las equipotenciales de ambos planos forman parte de un polígono cerrado y el problema está totalmente determinado en el polígono. Esta condición, que puede dar la impresión de ser una gran limitación, en la práctica no lo es, ya que hay muchos problemas en los que las condiciones de contorno pueden tratarse como un polígono cerrado. Este método fue primeramente publicado por H. A. Schwarz y E. B. Christoffel, ambos de forma independiente y simultáneamente, y se le conoce como la *transformación de Schwarz-Christoffel*.

La transformación de Schwarz-Christoffel abre el interior de un polígono en el plano de partida a la mitad superior de otro plano. Como el interior del polígono se transforma en la mitad superior del segundo plano, el exterior del polígono se transformará en la mitad inferior del segundo plano y el contorno del polígono será el eje real de este plano. Como el plano final no es la parte superior del plano intermedio, ya que el campo puede no ser regular en él, se emplea una segunda transformación de Schwarz-Christoffel desde la configuración deseada a la parte superior del plano intermedio. La combinación de ambas transformaciones cambiará la configuración del plano de partida en el que está definido el problema, en la configuración deseada del plano final.

Son numerosos los autores que emplean la transformación de Schwarz-Christoffel para analizar máquinas eléctricas. Destacamos los artículos de

Krop ([62]) en máquinas lineales, Gysen ([63] y [64]) en máquinas tubulares, Zarko ([60]), Boughrara ([65] y [66]) y Lin ([67]) en máquinas de flujo radial y Lin ([68]) en máquinas con imanes enterrados.

El tercer grupo de métodos analíticos que permiten determinar el campo en máquinas con ranuras (y también en máquinas lisas) es el *método de los subdominios*. Consiste en dividir la geometría a estudiar en regiones lo suficientemente sencillas, denominadas subdominios, en las que podamos resolver directamente las ecuaciones de Maxwell y obtener la distribución del campo aplicando las condiciones de contorno en las fronteras entre los subdominios. Esta técnica se puede aplicar en cualquier geometría, sea una máquina lisa o una máquina con ranuras.

La ausencia de ranuras simplifica en gran medida la geometría, la cual se subdivide en un número pequeño de subdominios (normalmente dos o tres). Algunos ejemplos de aplicación del método de los subdominios a máquinas sin ranuras los encontramos en los artículos de Rahideh quien presenta un método analítico para el cálculo del campo en máquinas radiales con imanes interiores o exteriores, con la presencia de aire y hierro entre los imanes, estando los imanes magnetizados radial, paralelamente o con configuración Halbach ([69], [70], [71] y [72]) o considerando excentricidades en los imanes ([73]), Huang ([74]) quien aplica la técnica al estudio en tres dimensiones de una máquina de flujo axial y sin hierro, y Sung ([75]) que trabaja con una máquina lisa, doble y con estátor interno.

Sin embargo, es en las máquinas con ranuras y como consecuencia de la complejidad de la geometría, donde el método de los subdominios cobra especial relevancia y donde es empleada por mayor número de autores, tanto para máquinas de flujo radial, axial, tubulares y con otras topologías.

En máquinas de flujo radial se ha realizado algún trabajo en coordenadas cartesianas, como es el caso de Liu ([76] y [77]) quien estudia el efecto de una única ranura, la cual considera recta, para posteriormente, aplicando superposición, extrapolar los resultados a geometrías con más de una ranura. No obstante, la mayor parte de los trabajos realizados emplean coordenadas polares; podemos citar a Dubas ([78]) quien contempla que la magnetización pueda ser radial o paralela, a Bellara ([79]) quien calcula la reacción del inducido, a Zhu ([80]) también para ranuras rectas, a Lubin quien considera que el entreimán es aire ([81]) o aire y hierro ([82]), a Wu ([83], [84], [85] y [86]) analizando máquinas radiales con ranuras semicerradas, a Fu ([87]) analizando la influencia de la excentricidad y a Boughrara ([88]) que analiza una máquina

de imanes permanentes doblemente excitada y con ranuras semicerradas.

En máquinas tubulares, destacamos los trabajos de Gysen ([89]) que estudia el efecto de una ranura y halla la reacción del inducido, y de Amara ([90] y [91]) que considera todas las ranuras simultáneamente, en ambos casos, con ranuras rectas.

Los artículos que estudian las máquinas de flujo axial, aunque algunos lo hacen en coordenadas cartesianas, como es el caso de Barriere ([92]), la mayor parte son en coordenadas polares, como, por ejemplo, Bellara ([93]) y Tiegna ([94] y [95]) para ranuras semicerradas. Todos los trabajos hasta aquí comentados del método de los subdominios han sido realizados para geometrías en dos dimensiones. En tres dimensiones, destacamos el trabajo de Tiegna ([96]) quien, partiendo del modelo en dos dimensiones planteado en ([95]), pasa a un modelo en tres dimensiones; para ello, divide la geometría tridimensional en láminas, estudia cada lámina aplicando el modelo bidimensional y, aplicando superposición, halla el comportamiento de la máquina de partida (modelo en tres dimensiones) sumando las contribuciones de cada lámina.

Por último, existen trabajos donde se aplica el método de los subdominios para realizar formulaciones generales, como es el caso de Gysen ([97]) quien plantea las bases del método desde un punto de vista genérico, particularizando para geometrías ilustrativas tanto en coordenadas cartesianas, polares y cilíndricas, o de Boughrara ([98]) quien plantea una formulación general en dos dimensiones para máquinas de flujo variable con cualquier combinación de ranuras en el estátor y polos en el rotor. Otros trabajos están enfocados a máquinas menos empleadas, como son las máquinas de reluctancia variable ([99]) y las máquinas bobinadas doblemente excitadas ([100]).

Para terminar, existen métodos que combinan varias de las técnicas anteriormente comentadas, aprovechando los puntos fuertes de las diferentes técnicas que emplean. Destacamos la combinación de circuitos magnéticos y subdominios, como son los trabajos de Ilhan ([101]) en máquinas de imanes permanentes y flujo variable, o de Hemeida ([102]) quien estudia una máquina de flujo axial en tres dimensiones a partir de una sucesión de laminas modeladas en dos dimensiones, combinación de capa de corriente y subdominios, empleado por Lubin para estudiar una máquina radial ([103]), dominio y transformación conforme de Schwarz-Christoffel empleado por Barriere en el estudio de una máquina tubular ([104]) o técnicas analíticas basadas en la teoría de series de Fourier y elementos finitos empleado por Egea ([105]) en

el estudio de máquinas de flujo axial e imanes permanentes.

La técnica que nosotros vamos a emplear, es el método de subdominios y la aplicaremos en el estudio en circuito abierto de una máquina axial de doble cara con rotor interno y estátores ranurados.

## 2.3. Base Teórica

Antes de aplicar la citada técnica a la máquina objeto de nuestro trabajo, vamos a realizar un repaso del campo electromagnético, recordando las ecuaciones que lo describen, las condiciones que existen entre medios con distinta permeabilidad y las diferentes técnicas que permiten determinar las distribución del campo. Terminaremos estableciendo las relaciones que existen entre las magnitudes del campo y sus efectos, como son el flujo magnético, la fuerza electromotriz inducida y la fuerza y el par electromagnético.

### 2.3.1. Ecuaciones de Maxwell

Las cargas y las corrientes originan los campos electromagnéticos, siendo las ecuaciones de Maxwell las ecuaciones que los describen. Su expresión en forma diferencial es:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (2.6)$$

siendo

$\bar{E}$  la intensidad del campo eléctrico ( $V/m$ ),

$\bar{D}$  la densidad de corriente de desplazamiento ( $C/m^2$ ),

$\bar{H}$  la intensidad del campo magnético ( $A/m^2$ ),

$\bar{B}$  la densidad de flujo magnético ( $T$ ),

$\bar{J}$  la densidad superficial de corriente libre ( $A/m^2$ ) y

$\rho$  la densidad volumétrica de carga libre ( $C/m^3$ ).

En estas ecuaciones, las fuentes están representadas por  $\bar{J}$  y por  $\rho$ , mientras que el campo está representado por  $\bar{E}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{H}$  y  $\bar{B}$ , donde las magnitudes que representan al campo son funciones vectoriales que dependen de la posición y del tiempo. Para relacionar las componentes de los cuatro campos, necesitamos más ecuaciones:

- En primer lugar, y teniendo en cuenta que la carga libre es la carga que se ha desligado de los átomos o de las moléculas y que es capaz de moverse libremente y la densidad de corriente libre es debida al movimiento de la carga libre, ambas magnitudes se pueden relacionar a través de la denominada ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

Esta ecuación se puede obtener combinando la divergencia de la ecuación (2.3) y la derivada respecto del tiempo de la ecuación (2.6).

- En segundo lugar, tenemos dos ecuaciones independientes que relacionan, por un lado, las magnitudes del campo eléctrico entre sí, y por otro lado, las del campo magnético entre sí. Son las denominadas, relaciones constituyentes:

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) \quad (2.8)$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (2.9)$$

donde

$\bar{M}$  es la magnetización ( $A/m$ ),

$\bar{P}$  es la polarización ( $C/m^2$ ),

$\mu_0$  es la permeabilidad del vacío ( $T\dot{m}/A$ ) y

$\epsilon_0$  es la permitividad del vacío ( $F/m$ ).

La magnetización  $\bar{M}$  representa el momento magnético dipolar por unidad de volumen de un material y se define por:

$$\bar{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \bar{m}_i}{\Delta V}$$

donde  $\sum_i \bar{m}_i$  es el vector suma de los momentos magnéticos dipolares contenidos en el volumen  $\Delta V$ .



Igualmente, la polarización  $\bar{P}$  representa el momento dipolar eléctrico neto por unidad de volumen. Se define mediante

$$\bar{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \bar{P}_i}{\Delta V}$$

donde  $\sum_i \bar{P}_i$  es el vector suma de los momentos eléctricos dipolares contenidos en el volumen  $\Delta V$ .

En un medio estacionario, lineal, isótropo y homogéneo, las ecuación constitutivas se reducen a:

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (2.10)$$

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad (2.11)$$

donde  $\mu$  y  $\epsilon$  son la permeabilidad y la permitividad del medio, respectivamente. Hay otra relación constitutiva adicional que liga la densidad de corriente libre ( $\bar{J}$ ) y la intensidad del campo eléctrico ( $\bar{E}$ )

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \quad (2.12)$$

Las relaciones constituyentes (2.10), (2.11) y (2.12) necesitan modificarse si el medio es no lineal, no homogéneo o anisótropo, del siguiente modo:

- El material es lineal si  $\mu$ ,  $\epsilon$  o  $\sigma$  no dependen de los campos; en caso contrario, el material es no lineal. En este último caso, las anteriores ecuaciones deben reescribirse de la siguiente forma:

$$\bar{B} = \mu(H) \bar{H}$$

$$\bar{D} = \epsilon(E) \bar{E}$$

y

$$\bar{J} = \sigma(E) \bar{E}$$

- Si el material es homogéneo,  $\mu$ ,  $\epsilon$  o  $\sigma$  no dependen de la posición; si no, el material es no homogéneo; en este caso, las expresiones de  $\mu$ ,  $\epsilon$  y  $\sigma$  se escribirían, para el caso de coordenadas cartesianas, de la siguiente forma:

$$\mu = \mu(x, y, z)$$

$$\epsilon = \epsilon(x, y, z)$$

$$\sigma = \sigma(x, y, z)$$

- Por último, un material se dice que es anisótropo si  $\mu$ ,  $\epsilon$  o  $\sigma$  dependen de la dirección; en caso contrario, el material es isótropo. Si el material es anisótropo, la relación (2.10) es equivalente a tres ecuaciones, cuyas expresiones en coordenadas cartesianas son:

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{11}H_x + \mu_{12}H_y + \mu_{13}H_z \\ B_y &= \mu_{21}H_x + \mu_{22}H_y + \mu_{23}H_z \\ B_z &= \mu_{31}H_x + \mu_{32}H_y + \mu_{33}H_z \end{aligned}$$

Expresiones similares se pueden escribir para las relaciones (2.11) y (2.12).

### Ecuaciones de Maxwell en forma integral

Las ecuaciones de Maxwell que hemos visto en el apartado anterior, ecuaciones (2.3), (2.4), (2.5) y (2.6), se conocen como ecuaciones de Maxwell en forma diferencial. La aplicación de integrales de superficie o de volumen a las ecuaciones en forma diferencial, junto con el teorema de Stokes y el de la divergencia, van a originar otro conjunto de ecuaciones denominadas ecuaciones de Maxwell en forma integral.

Si hallamos la integral de superficie de las ecuaciones (2.3) y (2.5) sobre una superficie abierta  $S$ , delimitada por un contorno  $C$ , y aplicamos el teorema de Stokes al miembro izquierdo de cada ecuación, obtenemos:

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S \left( \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{s} \quad (2.13)$$

y

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} \quad (2.14)$$

respectivamente.

Análogamente, si hallamos la integral de volumen de las ecuaciones (2.4) y (2.6) sobre un volumen  $V$  delimitado por una superficie cerrada  $S$  y aplicando el teorema de la Divergencia al miembro izquierdo de las ecuaciones obtenidas, resulta:

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \quad (2.15)$$

y

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \rho \cdot dv \quad (2.16)$$

respectivamente.

Las ecuaciones (2.13), (2.15), (2.14) y (2.16) constituyen las ecuaciones de Maxwell en forma integral, ecuaciones de gran importancia en el electromagnetismo:

- La primera ecuación (2.13) es una generalización de la Ley de Ampere, la cual establece que la integral de línea de  $\vec{H}$  alrededor de un contorno cerrado  $C$  es igual a la corriente libre que fluye a través de la superficie delimitada por  $C$ .
- La segunda ecuación (2.15) representa la Ley de la Inducción de Faraday, la cual establece que la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado es igual a la variación del flujo que atraviesa el circuito.
- La tercera ecuación (2.14) también se conoce con el nombre de ley de la conservación del flujo magnético, ya que establece que el flujo magnético total de salida que atraviesa una superficie cerrada es igual a cero, dicho de otro modo, establece la no existencia de monopolos magnéticos, es decir, no existen fuentes o sumideros aislados del campo magnético.
- la cuarta ecuación (2.16) es la Ley de Gauss, la cual establece que el flujo de salida total de campo  $\vec{D}$  a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga libre total encerrada en la superficie.

### 2.3.2. Condiciones de contorno

Para resolver problemas electromagnéticos que comprenden regiones contiguas de parámetros constitutivos diferentes es necesario conocer las condiciones en la frontera (condiciones de contorno) que deben satisfacer los vectores de campo  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  en la superficie de separación de los medios. Estas condiciones se obtienen aplicando la forma integral de las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones (2.13), (2.15), (2.14) y (2.16)) a una región pequeña de la superficie de separación de los dos medios.

Consideremos una trayectoria pequeña  $abcd$  con lados  $ab$  y  $cd$  en el medio 1 y 2, respectivamente, ambos paralelos a la superficie de separación e iguales a  $\Delta l$ , y los lados  $bc$  y  $da$  perpendiculares a la superficie de separación e iguales a  $\Delta h$  (figura 2.18). Aplicamos la ecuación (2.13) a esta trayectoria. Si dejamos que los lados  $bc = da = \Delta h$  se aproximen a cero, podemos ignorar

sus contribuciones a la integral de línea, obteniendo:

$$H_{1t} \cdot \Delta l - H_{2t} \cdot \Delta l = J_n \cdot \Delta l \cdot \Delta h + \frac{\partial D_n}{\partial t} \cdot \Delta l \cdot \Delta h$$

donde  $H_{it} (i = 1, 2)$  son las componentes de  $\vec{H}$  tangentes a la frontera. Si tomamos el límite cuando  $\Delta h$  tiende a cero, obtenemos:

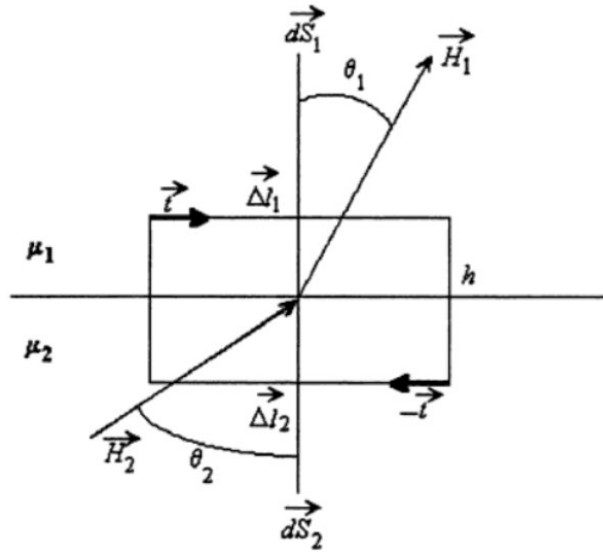


Figura 2.18: Trayectoria cerrada en la superficie de separación de dos medios

$$H_{1t} - H_{2t} = J_{ns} \quad (2.17)$$

donde

$$J_{ns} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (J_n \cdot \Delta h)$$

es la densidad de corriente superficial libre en la superficie de separación normal al contorno  $abcd$ . La dirección de  $J_{ns}$  viene dado por el sentido en el que recorremos el contorno  $abcd$ , y, para el ejemplo que consideramos, figura (2.18), entra perpendicularmente en la página.

Cuando las conductividades de ambos medios son finitas (que es cierto para las aplicaciones que vamos a estudiar), la densidad de corriente superficial es nula y la componente tangencial de la intensidad de campo magnético,  $\vec{H}$ , es continua a través de la superficie de separación de esos medios.

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (2.18)$$

Realizando un desarrollo similar con la ecuación (2.15), obtendríamos:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2.19)$$

que indica la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico a través de la superficie de separación de ambos medios.

El siguiente paso es obtener las condiciones de contorno para las ecuaciones (2.14) y (2.16). Para ello, consideremos una pequeña caja circular con la cara superior en el medio 1 y la inferior en el 2, como se muestra en la figura 2.19. Las caras tienen un área  $\Delta S$  y la altura de la caja es  $\Delta h$ . Al aplicar la Ley de la Inducción de Faraday (ecuación (2.14)) a la caja, obtenemos:

$$B_{1n} \cdot \Delta S - B_{2n} \cdot \Delta S = 0$$

que implica:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (2.20)$$

es decir, la componente normal de  $\vec{B}$  es continua en la superficie de separación

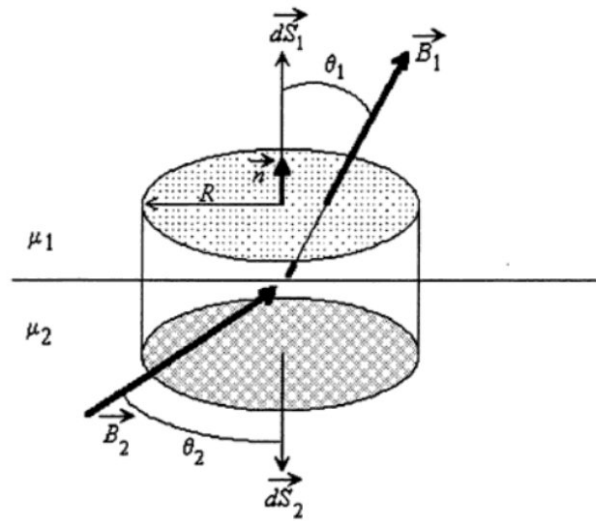


Figura 2.19: Caja cilíndrica en la superficie de separación de dos medios

de los dos medios. Si realizamos un análisis similar con la Ley de Gauss (ecuación (2.14)) en la caja, obtendríamos:

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (2.21)$$

donde

$$\rho_s = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\rho \cdot \Delta h)$$

es la densidad superficial de carga libre en la superficie de separación de ambos medios. Es decir, la componente normal de  $\bar{D}$  es discontinua a través de una superficie de separación cuando existe una carga superficial, y la cantidad de la discontinuidad es igual a la densidad superficial de carga. Si ambas superficies son dieléctricos perfectos (conductividad nula), entonces  $\rho_S = 0$  y la componente normal de  $\bar{D}$  es continua. Si por el contrario, la región 1 es un conductor perfecto (conductividad infinita) y el medio 2 un dieléctrico perfecto, entonces  $D_{1n} = 0$  y  $D_{2n} = \rho_S$ , donde  $\rho_S$  se encuentra en el lado de la superficie del conductor perfecto.

En resumen, las condiciones de contorno en la superficie de separación de dos medios son:

1. La componente tangencial de  $\bar{H}$  es discontinua a través de la superficie de separación en una cantidad igual a la densidad superficial de corriente libre normal que existe en la superficie ( $H_{1t} - H_{2t} = J_{ns}$ ).
2. La componente tangencial de  $\bar{E}$  es continua a través de la superficie de separación ( $E_{1t} = E_{2t}$ ).
3. La componente normal de  $\bar{B}$  es continua a través de la superficie de separación ( $B_{1n} = B_{2n}$ ).
4. La componente normal de  $\bar{D}$  es discontinua a través de la superficie de separación en una cantidad igual a la densidad superficial de carga libre que existe en la superficie ( $D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$ ).

Para el caso particular del campo magnético y con regiones donde la conductividad es finita, hemos comprobado que se cumple la conservación de la componente tangencial de la intensidad del campo magnético (ecuación 2.18) y de la componente normal de la inducción magnética (ecuación 2.20). Sean  $\theta_1$  y  $\theta_2$  el ángulo que forma el campo magnético en cada región con la normal a la superficie de separación (figura 2.20). A partir de (2.18) podemos escribir:

$$H_1 \cdot \text{sen}\theta_1 = H_2 \cdot \text{sen}\theta_2$$

De un modo similar y partiendo de (2.20) tenemos:

$$B_1 \cdot \text{cos}\theta_1 = B_2 \cdot \text{cos}\theta_2$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{H_1}{B_1} \cdot \text{tg}\theta_1 = \frac{H_2}{B_2} \cdot \text{tg}\theta_2$$

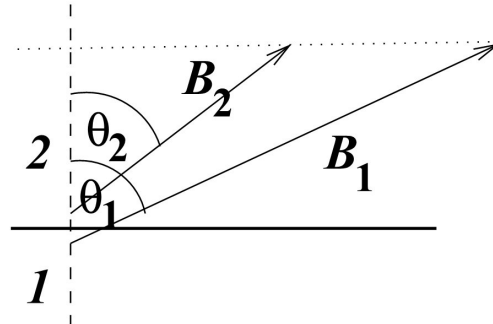


Figura 2.20: Vectores campo magnético a ambos lados de la superficie de separación

Si utilizamos la relación constitutiva (2.10) podemos poner

$$B_1 = \mu_1 H_1$$

y

$$B_2 = \mu_2 H_2$$

resulta:

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (2.22)$$

Si la permeabilidad es infinita a un lado de la superficie (por ejemplo en el medio 2), entonces  $\theta$  es cero en el otro lado ( $\theta_1 = 0$ ), lo cual implica que el flujo entra perpendicularmente en una superficie de permeabilidad infinita (la superficie de separación es una superficie equipotencial), y su componente tangencial es nula:

$$H_{1t} = 0 \quad (2.23)$$

### 2.3.3. Teoría cuasi-estática

La teoría de campo cuasi-estática se aplica a bajas frecuencias cuando las dimensiones de la región en estudio son relativamente pequeñas en comparación con la longitud de onda del campo electromagnético. Esta aproximación nos permite ignorar la velocidad finita de propagación del campo y considerar que cualquier cambio en el campo se refleja de forma instantánea en la región estudiada. Con esta teoría se estudian un amplio rango de aplicaciones como el análisis de circuitos eléctricos, dispositivos electromecánicos y fenómenos

con corrientes de Foucault.

Desde un punto de vista matemático, la aproximación cuasi-estática ignora la variación del vector desplazamiento con el tiempo ( $\partial\bar{D}/\partial t = 0$ ) en las ecuaciones de campo. Con esta aproximación, las ecuaciones de Maxwell se simplifican, resultando:

$$\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}}\bar{H} = \bar{J} \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla_{\mathbf{x}}\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \bar{D} = \rho \end{cases} \quad (2.24)$$

Como en las dos primeras ecuaciones de (2.24) no hay derivadas respecto del tiempo, los campos  $\bar{B}$  y  $\bar{H}$  se obtienen como si el sistema fuera estático, incluso cuando  $J$  depende del tiempo. Por otro lado, si a la primera ecuación de (2.24) le aplicamos la divergencia y considerando que la divergencia del rotacional es igual a cero, obtenemos:

$$\nabla \cdot \bar{J} = 0$$

### 2.3.4. Teoría Estática

En la Teoría Estática de Campos no hay variación respecto del tiempo. A pesar de ser una condición muy restrictiva, esta teoría permite estudiar un amplio rango de fenómenos importantes que incluyen corrientes constantes (teoría magnetostática) y distribuciones estacionarias de carga (teoría electrostática). Por ello, podremos aplicar esta teoría en el estudio de dispositivos que basan su funcionamiento en el empleo de imanes permanentes y/o corrientes continuas.

Matemáticamente, la teoría estática implica despreciar los términos con derivadas en el tiempo, esto es:

$$\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = \frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = 0$$

desacoplándose las ecuaciones de Maxwell y dando lugar a dos ecuaciones que relacionan las magnitudes del campo eléctrico, es decir, la *electrostática*:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\bar{E} = 0 \quad (2.25)$$

y

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (2.26)$$



y las dos ecuaciones restantes relacionan las magnitudes del campo magnético o *magnetostática*:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \bar{H} = \bar{J} \quad (2.27)$$

y

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.28)$$

El campo eléctrico y el campo magnético se pueden obtener de forma independiente a partir de las ecuaciones de la electrostática y de la magnetostática junto con las ecuaciones constituyentes.

### 2.3.5. Análisis de campo

En este apartado vamos a estudiar los principales métodos empleados en el análisis de corrientes estacionarias, imanes permanentes y circuitos magnéticos. Introduciremos el concepto de modelo de carga y modelo de corriente, los cuales permiten reducir el imán permanente a un conjunto de fuentes equivalentes. También estudiaremos los circuitos magnéticos, quienes, mediante el concepto de reluctancia, permiten transformar un circuito real en un circuito equivalente de parámetros concentrados. Finalmente, estudiaremos varios métodos de análisis como son la teoría de valores de contorno, el método de las imágenes, la transformación conforme, el análisis por elementos finitos y el método de las diferencias finitas.

#### Modelo de corriente

El modelo de corriente se emplea en el análisis de imanes permanentes. En este modelo, el imán es reducido a una distribución de corrientes equivalentes. De esta forma, el imán puede ser considerado dentro de las ecuaciones del campo magnetostático como un conjunto de fuentes y el campo se obtiene utilizando métodos estándar para corrientes estáticas.

Al ser nula la divergencia de la inducción magnética, ecuación (2.28), podemos expresar  $\bar{B}$  como el rotacional de otro campo vectorial, denominado  $\bar{A}$ , de manera que:

$$\bar{B} = \nabla_{\mathbf{x}} \bar{A} \quad (2.29)$$

El campo vectorial  $\bar{A}$  definido de esta manera se denomina *potencial magnético vectorial*. Su unidad en el sistema internacional es el weber por metro (Wb/m). Para tener completamente definido este vector, tenemos que especificar su divergencia además de su rotacional. Si en la ecuación (2.28) sustituimos la ecuación anterior (2.29), teniendo en cuenta la ecuación constituyente (2.8) tenemos

$$\nabla^2 \bar{A} - \nabla (\nabla \cdot \bar{A}) = -\mu_0 (\bar{J} + \nabla_{\mathbf{x}} \bar{M})$$

Si ahora imponemos la condición de Coulomb ( $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ ), obtenemos:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 (\bar{J} + \nabla \times \bar{M})$$

La forma de esta ecuación sugiere el definir una densidad de corriente volumétrica magnética equivalente ( $\bar{J}_m = \nabla \times \bar{M}$ ), resultando

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 (\bar{J} + \bar{J}_m) \quad (2.30)$$

Dado que (2.30) es una ecuación lineal, el potencial  $\bar{A}$  (y por tanto  $\bar{B}$ ) puede obtenerse como superposición de las soluciones obtenidas para  $\bar{J}$  y para  $\bar{J}_m$  por separado.

Si no existe corriente libre ( $\bar{J} = 0$ ) y la magnetización está confinada en un volumen  $V$  y cae abruptamente a cero fuera del volumen, según [106], podemos reemplazar el imán por dos densidades de corriente, una volumétrica ( $\bar{J}_m$ ) definida en el volumen del imán  $V$ , y otra superficial ( $\bar{j}_m$ ) definida en la superficie del imán,  $S$ , según las expresiones:

$$\begin{aligned} \bar{J}_m &= \nabla \times \bar{M} \quad (\text{A/m}^2) \\ \bar{j}_m &= \bar{M} \times \hat{n} \quad (\text{A/m}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

El modelo de corriente es útil para hallar la fuerza y el par originadas por imanes permanentes, ya que se calculan empleando las relaciones básicas para la fuerza y el par sobre una distribución de corrientes en un campo externo.

### Modelo de carga

El modelo de carga es otro método empleado para calcular el campo magnético originado por imanes permanentes, el cual se basa en reducir el imán a una distribución de carga magnética equivalente. La distribución de carga es el término fuente en las ecuaciones del campo magnetostático, y el campo se calcula empleando métodos estándar.

El procedimiento para obtener el modelo de carga es el siguiente: si particularizamos la primera ecuación de la magnetostática (ecuación (2.27)) para regiones sin corrientes libres ( $\bar{J} = 0$ ) obtenemos:

$$\nabla \times \bar{H} = 0$$

Dado que si el rotacional de un vector es igual a cero podemos expresar este vector como la divergencia de un escalar, podemos definir un escalar  $\varphi_m$  tal que

$$\bar{H} = -\nabla \varphi_m \quad (2.32)$$

Si sustituimos esta ecuación y la ecuación constituyente (2.8) en la segunda ecuación de la magnetostática (ecuación (2.28)) obtenemos:

$$\nabla^2 \varphi_m = \nabla \cdot \bar{M} \quad (2.33)$$

Tal y como se deduce en [106], si  $\bar{M}$  está confinado en un volumen  $V$  de permeabilidad  $\mu_0$  y cae abruptamente a cero fuera de ese volumen, la ecuación (2.33) sugiere el definir una densidad volumétrica de carga,  $\rho_m$ , y una densidad superficial de carga,  $\sigma_m$  según las expresiones:

$$\begin{aligned} \rho_m &= -\nabla \cdot \bar{M} \quad (A/m^2) \\ \sigma_m &= \bar{M} \cdot \hat{n} \quad (A/m) \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde  $\hat{n}$  es el vector normal unitario a la superficie  $S$  y dirigido hacia el exterior, siendo  $S$  la superficie que encierra el volumen  $V$ . Una vez definidas las densidades de carga, podemos hallar el campo magnético creado por éstas empleando métodos tradicionales.

### Análisis por Circuitos Magnéticos

El análisis por circuitos magnéticos se emplea en aquellos dispositivos en los que el flujo magnético originado por bobinas e imanes es guiado y dirigido mediante estructuras de material ferromagnético. Para realizar este análisis, se desarrolla un circuito equivalente de parámetros concentrados aplicando las ecuaciones de la magnetostática pero en su forma integral, es decir,

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = I_{tot} \quad (2.35)$$

(obtenida a partir de (2.13) anulando las derivadas respecto del tiempo) y

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \quad (2.36)$$

que coincide con la ecuación (2.15). En la expresión (2.35),  $I_{tot}$  es la corriente total que atraviesa la superficie  $S$  delimitada por el contorno  $C$ . Para evaluar el miembro izquierdo de (2.35), necesitamos conocer  $\bar{H} \cdot d\bar{l}$ , es decir, necesitamos conocer la orientación y la magnitud de  $\bar{H}$  en relación con el contorno de integración  $d\bar{l}$ . En muchos casos prácticos, se suele asumir que  $\bar{H}$  es paralelo a  $d\bar{l}$ , reduciendo  $\bar{H} \cdot d\bar{l}$  al producto escalar  $H \cdot dl$ . Esta es la primera hipótesis del análisis mediante circuitos magnéticos. La segunda hipótesis es que el flujo  $\phi$  generado por las fuentes del campo queda confinado en el material

ferromagnético, siendo despreciable el flujo de dispersión. Estas hipótesis son difíciles de verificar a priori pero, aunque no son totalmente ciertas, los resultados que se obtienen al considerarlas poseen una precisión razonable.

El nombre de circuitos magnéticos proviene de su similitud con los circuitos eléctricos, del modo siguiente: El comportamiento del flujo magnético  $\phi$  es similar al de la corriente eléctrica, la fuerza electromotriz de un circuito eléctrico tiene su análogo en un circuito magnético y se la denomina fuerza magnetomotriz ( $F$ ) y es igual, cuando en el circuito existen bobinas, al producto de los amperios que circulan por la bobina por el número de vueltas de ésta, y el comportamiento del material, que en el circuito eléctrico viene reflejado por la resistencia, aquí es representado por la reluctancia ( $\mathfrak{R}$ ). Aplicando la ecuación (2.35), podemos relacionar estas tres magnitudes, obteniendo:

$$F = \mathfrak{R} \cdot \phi \quad (2.37)$$

La ecuación (2.37) es totalmente análoga a la ley de Ohm de los circuitos eléctricos. Además, a partir de las ecuaciones (2.35) y (2.36) podemos obtener dos ecuaciones similares a Leyes de Kirchhoff de los circuitos eléctricos. El hecho de poseer una ley similar a la de Ohm y dos leyes equivalentes a las de Kirchhoff, permite establecer un paralelismo entre circuitos eléctricos y circuitos magnéticos, pudiendo representar el dispositivo magnético mediante un circuito de parámetros concentrados el cual analizamos aplicando las leyes anteriormente citadas. Además, muchas expresiones empleadas con frecuencia en el análisis de un circuito eléctrico (como son las expresiones del divisor de tensión, divisor de corriente, asociación de resistencias en serie o en paralelo, ....) tiene su equivalente en el análisis por circuitos magnéticos. El planteamiento es similar para circuitos con bobinas y para circuitos con imanes, diferenciándose únicamente que, en el caso de la bobina, el número de vueltas y la corriente que la recorre son conocidas de antemano, mientras que en los imanes, el punto de funcionamiento de éstos no son conocidos de antemano y tienen que ser determinados. En [106] se muestran ejemplos con ambas situaciones.

Para muchas aplicaciones, el análisis por circuitos magnéticos da una buena estimación del funcionamiento del circuito. Lógicamente, si se desean obtener resultados más precisos, se debe realizar un análisis más riguroso que tenga en cuenta factores tales como saturación, flujos de dispersión, comportamiento no lineal de los materiales ferromagnéticos, etc.

### Problemas con condiciones de contorno

Los problemas con condiciones de contorno surgen con bastante frecuencia en el estudio del campo magnético. En estos problemas, se busca la solución de una ecuación en derivadas parciales en una región dada, con condiciones sobre la solución en los límites de dicha región. Según [107], podemos utilizar el método de separación de variables para resolver una ecuación diferencial si la ecuación diferencial y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas. El método de separación de variables permite expresar la solución de la ecuación diferencial como producto de funciones de una sola variable, transformando la ecuación en derivadas parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las condiciones de contorno se pueden clasificar en condiciones de Dirichlet, condiciones de Neumann o condiciones mixtas. En los problemas con condiciones de Dirichlet se especifica el valor de la función en el contorno. En los problemas con condiciones de Neumann se especifica en el contorno el valor de la derivada normal de la función. En problemas con condiciones mixtas, se especifica el valor de la función en algunas partes del contorno y el valor de la derivada normal de la función en otras partes del contorno.

El método de los subdominios se encuentra dentro de esta última categoría, ya que nos permitirá resolver la ecuación de Laplace o de Poisson y obtener la expresión del campo aplicando las condiciones de contorno en las fronteras entre los subdominios.

### Método de las imágenes

El método de las imágenes se emplea para resolver problemas de campo en los que la fuente está cerca de un material con alta permeabilidad y la región de estudio tiene un alto grado de simetría. Este método sustituye el material por un número de fuentes, llamadas imágenes, cuidadosamente elegidas, de tal modo que la fuente original y las imágenes reproducen las condiciones de contorno en la superficie de separación. Se necesita determinar el valor y la posición de las imágenes. Una vez que éstas son conocidas, el valor del campo se halla mediante la superposición de los campos originados por la fuente real y sus imágenes como si estuvieran en el vacío. En el caso de existir dos o más superficies de separación, el número de imágenes es infinito y es necesario realizar un truncamiento de las imágenes. La solución sólo es válida en la región donde se encuentra la fuente real.

Este método también se puede emplear para calcular el campo originado por una fuente que está embebida en un medio de permeabilidad infinita y que está próxima a una superficie libre de material (en [22] se muestran numerosos ejemplos de corrientes embebidas en aire rodeado por material de permeabilidad infinita y viceversa, corrientes en medios de permeabilidad infinita rodeados de aire).

El método de las imágenes permite que problemas que incluyen dos medios sean rápidamente analizados en términos del campo en un medio homogéneo, transformando un problema con condiciones de contorno a uno en un medio homogéneo. La validez del método se basa en la unicidad de la solución del campo: ya que las imágenes son seleccionadas para que reproduzcan las condiciones de contorno establecidas en la frontera y la solución obtenida satisface estas condiciones y la ecuación del campo en la región considerada, la solución es única.

### **Transformación conforme**

La transformación conforme es una técnica que transforma la región que queremos analizar en otra región con una geometría más sencilla, de tal forma que el campo en esta segunda geometría se puede calcular empleando métodos tradicionales. Una vez que la solución en la región transformada es hallada, obtenemos la solución en la región inicial aplicando la transformada inversa. En algunos casos, es necesario aplicar más de una transformación, de tal forma que pasamos de la región inicial a una región intermedia transformada y de ésta a la región final. Para aplicar este método, tenemos que determinar la transformación directa (de la región inicial a la transformada) y la transformación inversa (de la región transformada a la inicial). Se puede hallar la expresión analítica de estas funciones si la región inicial no posee más de cuatro vértices, En caso contrario, estas funciones tienen que ser calculadas numéricamente. La transformación conforme más ampliamente utilizada en el análisis del campo magnético en máquinas eléctricas es la transformación conforme de Schwarz-Christoffel.

### **Análisis por elementos finitos**

El análisis por elementos finitos es uno de los métodos más populares para la resolución de problemas de campo electromagnéticos. Dos son los motivos para este auge. En primer lugar, el análisis por elementos finitos es un método muy potente que rápidamente se adapta a una amplia variedad de aplicaciones. En segundo lugar, existe una amplia oferta de programas comer-

ciales que aplican este método, por lo que el usuario puede resolver problemas complejos sin necesidad de desarrollar su propio código.

Los pasos que comprende el análisis por elementos finitos son los siguientes:

1. Dividir la región a estudiar en un número finito de subregiones, denominadas elementos, marcando los nudos que definen cada elemento;
2. seleccionar una función mediante la que aproximar la expresión del campo en cada elemento (normalmente se emplean polinomios);
3. expresar la solución en cada elemento como una función de los valores del campo en los nodos y de las variables espaciales en ese elemento;
4. definir un funcional de energía para la función de campo y evaluar este funcional en cada elemento. De esta forma, tenemos una expresión para la energía en cada elemento en función de sus valores nodales;
5. ensamblar la expresión de la energía global como una suma de la energía individual de cada elemento. Simplificar esta expresión eliminando valores redundantes y valores nodales prefijados;
6. minimizar la expresión de la energía global con respecto a los valores nodales incógnita. Así, obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas en función de los valores nodales;
7. resolver el sistema de ecuaciones del paso anterior hallando los valores nodales; y
8. evaluar la solución del campo en cada elemento sustituyendo los valores nodales en las expresiones obtenidas en el paso 3.

### Método de las diferencias finitas

El método de las diferencias finitas es uno de los métodos numéricos más antiguos y que más se han empleado en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. En este método, la región en la que se busca la solución se divide en un número finito de nodos, y la ecuación en derivadas parciales es aproximada por una ecuación en diferencias finitas que relaciona el valor de la solución en el nodo considerado con su valor en los nodos vecinos. De esta forma, el problema inicial de condiciones de contorno se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas que puede ser resuelto empleando métodos

tradicionales.

Los pasos para llevar a cabo el método de las diferencias finitas son:

1. Dividir la región a estudiar y su contorno en un número finito de nodos;
2. aproximar la ecuación en derivadas parciales por una ecuación en diferencias finitas que relacione el valor de la solución en cada nodo con el valor en los nodos vecinos;
3. construir un sistema algebraico de ecuaciones para el valor de la solución en cada nodo, teniendo en cuenta los valores asignados en la condiciones de contorno y las condiciones iniciales; y
4. resolver el sistema de ecuaciones del paso anterior, y obtener el valor de la solución en cada nodo.

### 2.3.6. Potencial magnético escalar, Intensidad de campo magnético, Inducción magnética y Flujo magnético

Vamos a plantear la formulación que utilizaremos en el estudio de nuestra máquina axial de doble cara con rotor interno y estátores ranurados, desarrollando las relaciones existentes entre las principales magnitudes del campo magnético para nuestro caso particular.

#### Potencial magnético escalar

Para determinar el campo magnético que se origina en nuestra máquina, vamos a emplear las ecuaciones de la magnetostática (ecuaciones 2.27 y 2.28) particularizadas al problema que nos ocupa. Cuando la máquina funciona en circuito abierto, las bobinas del estátor no están alimentadas, siendo nula la densidad de corriente ( $\bar{J} = 0$ ). En estas condiciones, la ecuación (2.27) es equivalente a

$$\nabla_{\mathbf{x}} \bar{H} = 0 \quad (2.38)$$

expresión que ya habíamos obtenido al describir el modelo de carga en el Análisis de Campo (apartado 2.3.5). Dado que un campo vectorial con rotacional nulo siempre puede expresarse como el gradiente de un campo escalar, a partir de la anterior ecuación podemos definir un campo escalar  $\varphi_m$ , al que denominamos *potencial magnético escalar*, de manera que:

$$\bar{H} = -\nabla \varphi_m \quad (2.39)$$



El principal motivo para definir un potencial magnético escalar es que las cantidades escalares son más fáciles de manejar que las vectoriales.

Si sustituimos la ecuación 2.39 en la segunda ecuación de la magnetostática (expresión 2.28) obtenemos

$$\nabla^2 \varphi_m = \nabla \cdot \bar{M} \quad (2.40)$$

expresión idéntica a la obtenida en el mencionado modelo de carga, ecuación (2.33). En un caso concreto, la expresión del vector magnetización es conocida, pudiendo hallar su divergencia. Por lo tanto, el conocimiento de la expresión del potencial magnético escalar requiere de la resolución de la ecuación (2.40), que no es más que la ecuación de Poisson o, en el caso de ser nula la divergencia de la magnetización, la ecuación de Laplace. Si estamos en un modelo en dos dimensiones y trabajando con coordenadas cartesianas, si expresamos el vector magnetización como:

$$\bar{M} = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} \quad (2.41)$$

la ecuación (2.40) es equivalente a:

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (2.42)$$

si la divergencia de la magnetización es no nula, e igual a:

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} = 0 \quad (2.43)$$

en caso contrario.

### Intensidad de campo magnético

Una vez hallado el potencial magnético escalar, podremos determinar la intensidad del campo magnético sin más que aplicar la ecuación (2.39), es decir, por medio de una operación diferencial (divergencia). Para el modelo bidimensional y en coordenadas cartesianas, las relaciones que ligán las componentes de la intensidad de campo con el potencial magnético escalar son:

$$\bar{H} = H_x \bar{i} + H_y \bar{j} = - \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \bar{j} \right)$$

siendo la expresión de las componentes de la intensidad del campo magnético:

$$H_x = - \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \quad (2.44)$$

y

$$H_y = -\frac{\partial\varphi_m}{\partial y} \quad (2.45)$$

### Inducción magnética

La relación constituyente (2.8) nos proporciona un método para determinar la expresión de la inducción magnética una vez hallada la de la intensidad magnética; si estamos en un medio donde el vector de magnetización no es nulo, por ejemplo en los imanes, la relación entre  $\bar{B}$  y  $\bar{H}$  es la propia ecuación (2.8):

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M})$$

que expresándolo en función del potencial magnético escalar (2.39) resulta:

$$\bar{B} = \mu_0 (-\nabla\varphi_m + \bar{M}) \quad (2.46)$$

Si por el contrario, la magnetización es nula, la relación entre  $\bar{B}$  y  $\bar{H}$  es:

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} \quad (2.47)$$

o, si empleamos el potencial escalar tenemos:

$$\bar{B} = -\mu_0 \nabla\varphi_m \quad (2.48)$$

Para el caso de dos dimensiones y coordenadas cartesianas, las expresiones que relacionan las componentes de la inducción con la intensidad del campo magnético o con el potencial magnético son:

$$B_x = \mu_0 (H_x + M_x) = \mu_0 \left( -\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} + M_x \right) \quad (2.49)$$

y

$$B_y = \mu_0 (H_y + M_y) = \mu_0 \left( -\frac{\partial\varphi_m}{\partial y} + M_y \right) \quad (2.50)$$

si el medio posee magnetización, y

$$B_x = \mu_0 H_x = -\mu_0 \frac{\partial\varphi_m}{\partial x} \quad (2.51)$$

y

$$B_y = \mu_0 H_y = -\mu_0 \frac{\partial\varphi_m}{\partial y} \quad (2.52)$$

si la magnetización es nula.

### Flujo magnético

La inducción magnética (o densidad de flujo) y el flujo magnético son dos magnitudes íntimamente relacionadas: podemos definir a la inducción magnética,  $\vec{B}$ , como el número de líneas de fuerza del campo magnético por unidad de superficie perpendicular a dichas líneas, mientras que el flujo magnético,  $\phi$ , es el número de líneas de fuerza que atraviesan una superficie. Por lo tanto, podemos obtener la expresión del flujo magnético que atraviesa una superficie,  $S$ , integrando la expresión de la inducción a través de la citada superficie:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.53)$$

Tendremos que establecer un criterio que nos permita distinguir entre flujo entrante (le vamos a considerar como positivo) y flujo saliente (el cual será negativo). Nosotros vamos a considerar la entrada o salida del flujo respecto del estátor, es decir, el flujo será entrante o positivo cuando entre en el estátor procedente del rotor, y será saliente o negativo cuando salga del estátor buscando el rotor.

#### 2.3.7. Ley de la inducción de Faraday

Si tenemos un circuito estacionario con un contorno  $C$  y superficie  $S$ , la segunda ecuación de Maxwell en forma integral, expresión (2.15), puede escribirse como:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.54)$$

Si definimos:

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

a la que denominamos *fuerza electromotriz inducida* en el circuito con contorno  $C$ , y sustituimos la ecuación (2.53), la expresión (2.54) se convierte en:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (2.55)$$

La ecuación (2.55) establece que *la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado estacionario es igual a la razón negativa del incremento del flujo magnético ligado al circuito*. Este es un enunciado de la **Ley de la inducción de Faraday**. El signo negativo en la ecuación (2.55) indica que la polaridad de la fuerza electromotriz inducida es tal que origina una corriente

cuyo campo magnético se opone a las variaciones del campo magnético que la indujo. Esta afirmación se conoce con el nombre de *Ley de Lenz*.

La Ley de la inducción de Faraday es la base del funcionamiento del generador eléctrico, en general, y de nuestra máquina axial, en particular: el movimiento de rotación del eje de la máquina provoca el giro de los imanes del rotor; este giro ocasiona que los bobinados del estátor se vean sometidos a un flujo que varía, induciéndose una fuerza electromotriz sobre los mismos; cuando estos bobinados se cierran sobre un circuito exterior, la fuerza electromotriz inducida creará una corriente que circulará por el citado circuito.

Si queremos conocer al expresión de la fuerza electromotriz inducida en nuestra máquina nos bastará con hallar la variación respecto del tiempo del flujo que atraviesa el bobinado de la máquina, para lo que será necesario establecer cómo están dispuestas las bobinas del estátor.

### 2.3.8. Los devanados

En general, en una máquina eléctrica existen dos circuitos eléctricos, denominados circuito inductor y circuito inducido. La finalidad del circuito inductor es crear un campo magnético; como consecuencia de este campo magnético, en el circuito inductor se inducirá una fuerza electromotriz, si nuestra máquina es un generador, o un par electromagnético si se trata de un motor. Al conjunto de conductores que forma cada uno de estos circuitos eléctricos se le denomina **devanado**, **bobinado** o **arrollamiento**. En las máquinas de imanes permanentes, el circuito inductor es reemplazado por los imanes, existiendo un único circuito eléctrico, el inducido.

Vamos a describir algunos aspectos relacionados con los bobinados que necesitaremos en secciones posteriores, extrayendo gran parte de la información de [108].

Los devanados se clasifican en dos tipos: concentrados o distribuidos.

Los devanados concentrados consisten (figura 2.21) en un arrollamiento de varias espiras en serie alrededor de un núcleo de hierro, denominado polo, en el sentido adecuado para que éstos sean alternativamente norte y sur. El conjunto de espiras devanadas alrededor de un polo forman una bobina y las bobinas de todos los polos se suelen conectar en serie, aunque a veces se puedan conectar formando varias ramas en paralelo iguales.

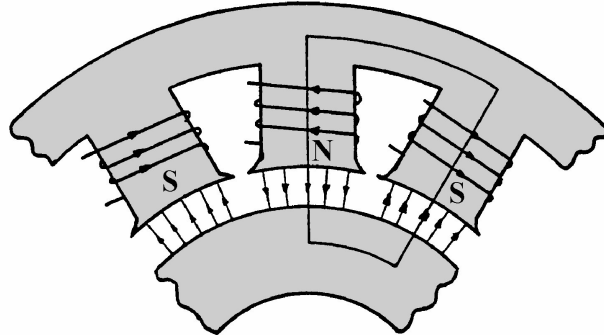


Figura 2.21: Corte de una máquina de polos salientes

En los devanados distribuidos, el núcleo magnético sobre el que se coloca el bobinado es cilíndrico. Estos devanados pueden ser anulares y de tambor.

En los devanados anulares o en anillo, las espiras se arrollan sobre el anillo que constituye el núcleo magnético y cada espira sólo tiene un lado activo, es decir, un lado que corta las líneas de flujo del campo magnético cuando la máquina gira. Un ejemplo es la dinamo de Gramme, mostrada en la figura 2.22, o la máquina de Tesla (figura 2.6). Fueron los primeros devanados que se emplearon, pero hoy en día se usan muy poco, utilizándose principalmente los de tambor.

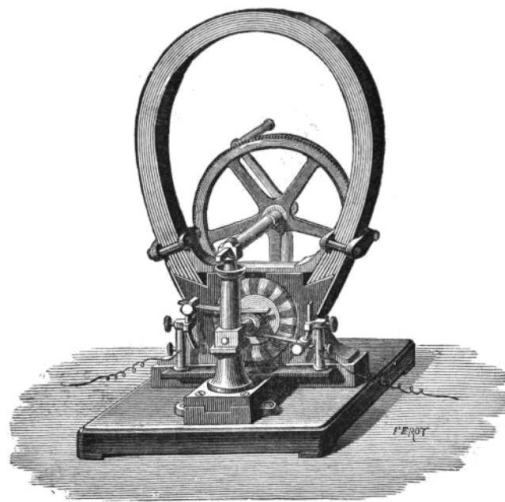


Figura 2.22: Dinamo de Gramme con bobinado anular

En los devanados de tambor, las bobinas van alojados en ranuras practicadas al efecto en la superficie del núcleo magnético que da al entrehierro (2.23). De esta forma, cada espira tiene dos lados activos situados en sendas ranuras, obteniéndose un mejor aprovechamiento del cobre respecto a los bobinados en anillo.

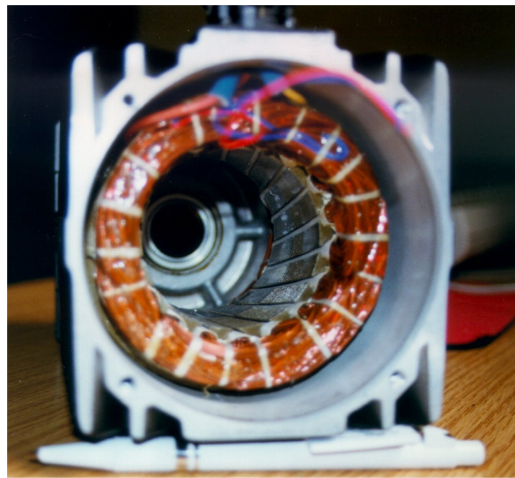


Figura 2.23: Bobinado en tambor de una máquina de flujo radial

En un bobinado de tambor, se denomina espira al conjunto formado por dos conductores alojados en ranuras diferentes unidos por una conexión frontal (figura 2.24a). Un conjunto de una o varias espiras iguales, alojadas en las mismas ranuras, conectadas en serie y aisladas juntas formando una unidad constituyen una bobina (figura 2.24b). Los lados activos de la bobina son las zonas de la bobina que están dentro de las ranuras; las uniones entre los dos lados activos de una bobina son las cabezas de la bobina. Una bobina tiene dos lados activos y dos cabezas.

Se denomina paso de bobina a la distancia que hay entre sus lados activos; se puede medir en fracciones del paso polar, en radianes eléctricos o geométricos, pero normalmente se expresa indicando el número de ranuras que hay entre sus lados activos (figura 2.25).

Dependiendo del número de lados activos de diferentes bobinas existentes en una ranura, los devanados se clasifican en arrollamientos de *una capa* y de *dos capas*. En el arrollamiento de una capa, cada ranura sólo posee un lado activo de una bobina, mientras que en el de dos capas en cada ranura hay dos lados activos correspondientes a dos bobinas diferentes, situados uno

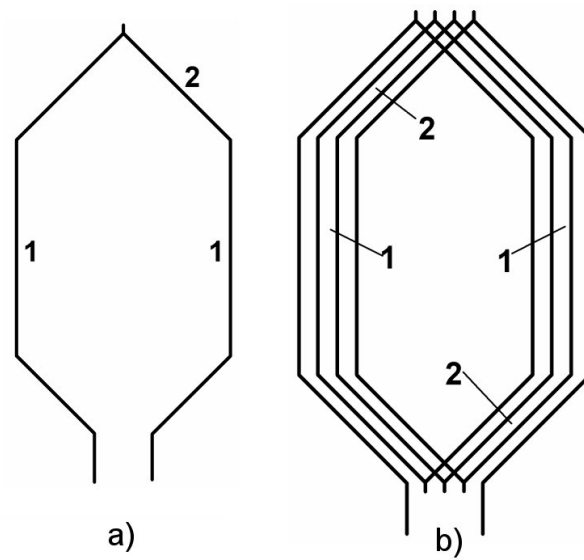


Figura 2.24: Espira y bobina, con sus partes: 1) Lados activos y 2) Cabezas

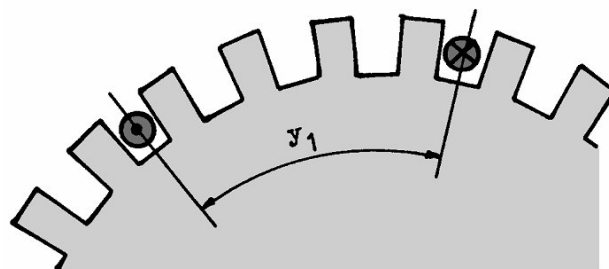


Figura 2.25: Bobina con un paso de bobina de 4 ranuras

encima del otro. En este último caso, un lado de la bobina está colocado en la parte superior de una ranura y el otro lado se sitúa en la parte inferior de la otra (figura 2.26).

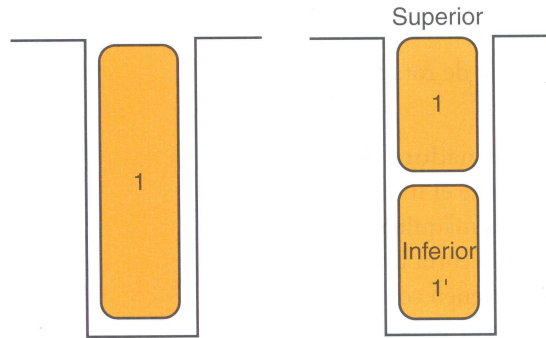


Figura 2.26: Bobinados de 1 capa y de 2 capas

### 2.3.9. Par de reluctancia

El par de reluctancia es el elemento parásito más importante en las máquinas de imanes permanentes ranuradas y es ocasionado por la no uniformidad de la superficie del estátor. Consideremos un imán en forma de barra que puede girar libremente alrededor de su centro y que está colocado en el interior de un anillo de acero que está fijo, tal y como se muestra en la figura 2.27a. El anillo es el estátor, el imán es el rotor y ambos están separados por un entrehierro. En estas condiciones, el imán no tiene ninguna posición de reposo preferida ya que, en cualquier dirección del imán, ambos extremos experimentarán la misma fuerza de atracción sobre el anillo pero con sentido contrario. Como consecuencia de ello, el imán no experimenta ninguna fuerza neta y ningún par es producido. Consideremos, figura 2.27b, que reemplazamos el anillo por otro que posee dos salientes o *polos* diametralmente opuestos. Igual que antes, ambos extremos del imán experimentan la misma fuerza de atracción pero con sentido contrario. No obstante, ahora el imán al girar experimenta una fuerza que tiende a alinearlos con los polos del anillo. Esto ocurre por que la fuerza de atracción entre el imán y el anillo aumenta drásticamente al disminuir la distancia entre ambos, tal y como sucede al situarse el imán enfrente de los polos. Como el imán puede girar libremente, esta fuerza tiene una componente tangencial la cual produce un par. Este par es el que se denomina par de reluctancia.



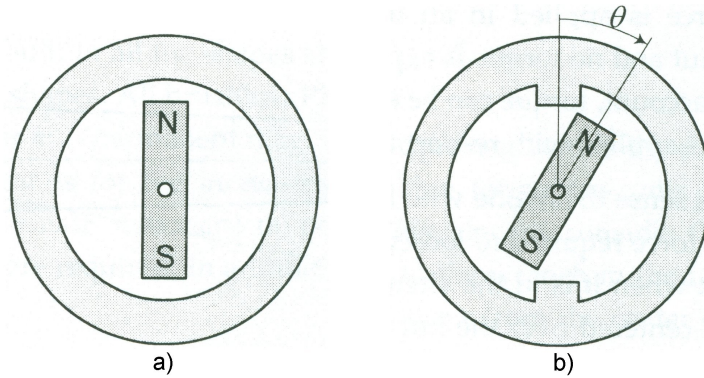


Figura 2.27: Imán libre de girar en el interior de un anillo: a) anillo liso; b) anillo con dos polos

La figura 2.28 representa gráficamente la variación de este par en función de la posición del imán. Las posiciones donde el par es cero se denominan posiciones de reposo. Cuando el imán está alineado con los polos ( $\theta = 0$  y  $\theta = \pm\pi$ ), cualquier pequeña perturbación ocasiona que el imán vuelva de nuevo a esta posición. Se dice que estas posiciones de reposo son estables. Por el contrario, si el imán se encuentra en la posición intermedia entre los polos ( $\theta = \pm\pi/2$ ), cualquier pequeña perturbación ocasiona que el imán se aleje de estas posiciones de desalineamiento, buscando la posición de alineamiento. Estas posiciones son posiciones inestables. En el ejemplo que hemos considerado, el par es aproximadamente senoidal; en una máquina real, la forma del par es una función compleja que depende de la geometría de la máquina y de las propiedades de los materiales que la forman.

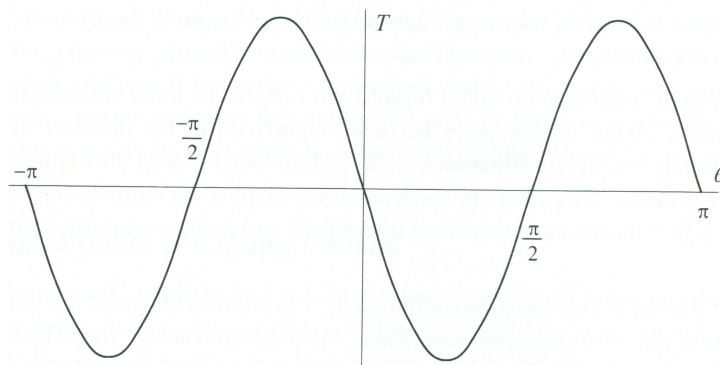


Figura 2.28: Par que experimenta el imán en las figura 2.27

Según [109], el par de reluctancia se puede expresar matemáticamente como:

$$T_{reluc} = -\frac{1}{2}\phi_g^2 \frac{d\mathfrak{R}}{d\theta} \quad (2.56)$$

donde  $\phi_g$  es el flujo del imán que atraviesa el entrehierro,  $\mathfrak{R}$  es la reluctancia total del camino por el que circula el flujo y  $\theta$  es la posición angular. Observando esta expresión, si la reluctancia no varía con la posición, el par de reluctancia es nulo. Además, el par de reluctancia es independiente de la dirección del flujo ya que está al cuadrado.

Por ejemplo consideremos la máquina de cuatro polos y doce ranuras rectas mostrada en la figura 2.29a). Cuando el rotor gira, los imanes van pasando por delante de las diferentes ranuras y la reluctancia que ve cada imán es distinta de estar enfrente de una ranura a estar enfrente de un diente. Por lo tanto, la abertura de las ranuras crea una reluctancia que varía con la posición, es decir, crea un par de reluctancia. Si la abertura de las ranuras del estátor disminuye, esta reluctancia disminuye, disminuyendo el par originado; esta situación es la que se busca al colocar los denominados “zapatos” en las ranuras, como se ilustra en la imagen b) de la figura 2.29.

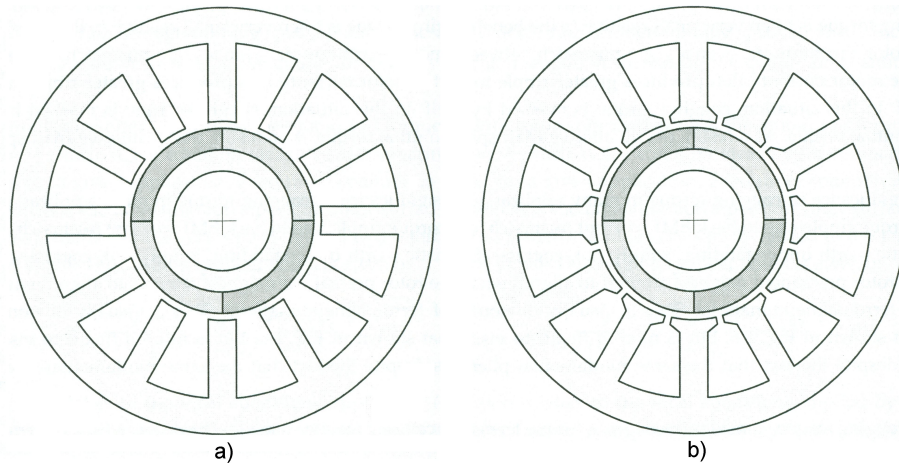


Figura 2.29: Máquina de 4 polos y 12 ranuras. a) Ranuras rectas b) Ranuras semicerradas (o con "zapatos")

Existen diferentes formas de reducir el par de reluctancia [110] [109]. Las más importantes son:

- Aumentar el entrehierro: Si el entehierro aumenta, la reluctancia del circuito magnético se incrementa disminuyendo el flujo en el entrehierro,

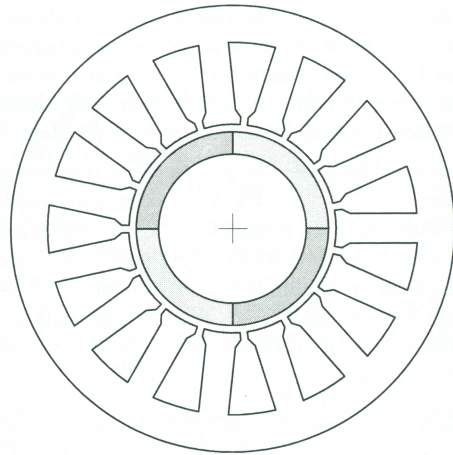


Figura 2.30: Máquina de 4 polos y 15 ranuras

$\phi_g$ , disminuyendo el valor del par de reluctancia según 2.56. Lógicamente, también disminuye el par mutuo como consecuencia de haber menor densidad de flujo en el entrehierro, siendo menor el rendimiento de la máquina.

- Diseñar máquinas con una relación de ranuras por polo no entera: En máquinas con una relación entera de ranuras por polo (como los mostrados en la figura 2.29) todos los imanes tienen la misma posición relativa respecto de las ranuras del estátor. Como resultado, el par de reluctancia creados por todos los imanes están en fase entre sí, y el par de reluctancia total es igual al producto del número de imanes por el par creado por un imán. Es decir, el par de cada imán se suma para originar el par total.

En máquinas donde el número de ranuras por polo no es entero, como es la máquina mostrada en la figura 2.30 con cuatro polos y quince ranuras, cada imán tiene una posición diferente respecto de las ranuras del estátor. Como resultado, el par de reluctancia creado por todos los imanes están desfasados entre sí, y el par total se reduce debido a que el par de un imán es parcialmente cancelado por el de otro imán.

- Inclinar las ranuras del estátor o los imanes del rotor: Esta técnica se basa en el término  $d\mathcal{R}/d\theta$  de la expresión (2.56). En las máquinas mostradas en las figuras 2.29 y 2.30, existe par de reluctancia debido a que la reluctancia vista por los imanes varía cuando éstos van pasando por delante de las ranuras. La variación en la reluctancia puede ser minimizada, a pesar de la presencia de ranuras, si la abertura de las

ranuras se distribuye a lo largo de la superficie del imán, tal y como se muestra en la figura 2.31; en dicha figura, las ranuras están inclinadas de tal forma que cada imán ve una reluctancia que permanece constante o casi constante según van pasando por delante de las ranuras. De esta forma se disminuye la variación de la reluctancia con la posición, disminuyendo también el par de reluctancia. Una situación similar se origina si mantenemos las ranuras rectas e inclinamos los imanes.

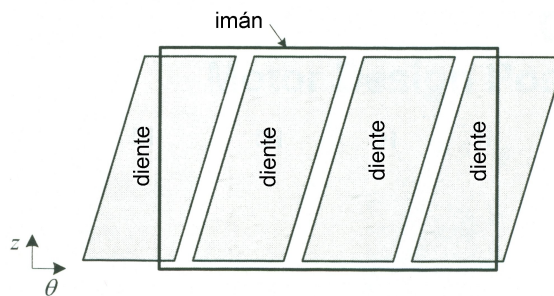


Figura 2.31: Ranuras del estátor inclinadas

- Aumentar el número de ranuras por polo reduce el par de reluctancia ya que la variación de la reluctancia que ven los imanes es menor. Si doblamos el número de ranuras obtenemos un par de reluctancia de menor amplitud y del doble de frecuencia.
- Otros métodos para reducir el par de reluctancia es el empleo de diente bifurcados (figura 2.32) o realizar perforaciones en los dientes del estátor. El efecto que logramos es corregir la variación de la reluctancia, para que ésta sea más suave.

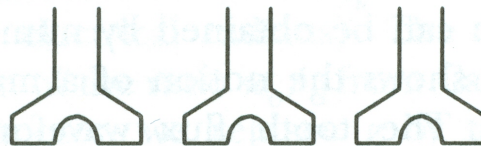


Figura 2.32: Dientes con bifurcaciones

- Compensación electromagnética: El par de reluctancia se puede compensar electromagnéticamente adaptando la forma de onda de la alimentación para que se origine un par pulsante que compense y cancele al de reluctancia.

### 2.3.10. Cálculo de la fuerza y del par

La fuerza y el par de reluctancia son la única fuerza y par que proporcionará la máquina cuando ésta opere en circuito abierto, por lo que podremos emplear la formulación general para el cálculo de estas magnitudes. Veamos cómo podemos calcular la fuerza y el par. Según [111] hay cuatro formas básicas de predecir la fuerza:

1. *Método de Lorentz o Ley de Ampere*: válido sólo para hallar fuerza sobre conductores recorridos por una corriente. Es fácil de usar aunque solamente se puede aplicar en regiones no magnéticas.
2. *Método del Tensor de Tensión de Maxwell o Maxwell Stress Tensor*: Es el método más popular para hallar la fuerza y su implementación es relativamente sencilla. Requiere sólo de una solución del campo y realiza la integral de la densidad de fuerza a lo largo de una superficie cerrada que rodea la estructura cuya fuerza se quiere calcular. Presenta la desventaja de tener problemas de exactitud por la dependencia que existe entre el valor calculado y el tipo de elementos recorridos en el camino de integración, y la localización del camino de integración dentro del elemento considerado cuando se calcula por elementos finitos. No obstante, desde un punto de vista teórico, la elección de la superficie de integración es arbitraria, el resultado es independiente de dicha superficie y es un método muy adecuado para el cálculo de la fuerza y el par magnético total que actúan sobre partes móviles [112].
3. *Método del Trabajo Virtual Clásico*: En este método, el cálculo de la fuerza se basa en la variación de la energía total del sistema cuando su parte móvil se desplaza en la dirección de la componente de la fuerza requerida. Por ello se necesitan dos soluciones del campo. Por otro lado, hay que hallar la diferencia de energía entre dos posiciones próximas, conllevando errores de evaluación al restar dos cantidades similares. Además, esta diferencia es dividida por el incremento del desplazamiento y, al ser éste pequeño, aumenta el error [113].

Una versión más refinada del método del trabajo virtual, calcula la coenergía de un conjunto de posiciones de la parte móvil próximas, junto con una curva de ajuste para producir una función polinómica; la función polinómica es entonces derivada para dar la fuerza o el par como una función continua de la posición [112]. Esta técnica es conveniente en problemas donde la parte móvil se mueve sólo en una dirección.

4. *Método del Trabajo Virtual de Coulomb*: Se basa en el principio de conservación de la energía y en el principio del desplazamiento virtual. La fuerza global que actúa sobre una parte móvil es evaluada mediante diferenciación de la energía o coenergía magnética en el espacio libre comprendido entre las partes fija y móvil del sistema considerado. Por ello, sólo requiere de una solución del campo. El Método del Trabajo Virtual de Coulomb es un método muy apropiado para emplearse en análisis por elementos finitos, siempre y cuando el punto de partida del análisis por elementos finitos sea la minimización de la expresión de la energía almacenada por el campo magnético. Ya que esta energía es una magnitud global, es menos sensible a errores locales originados por un mallado pobre o por aproximaciones [113] [114].

Cuando se implementa en elementos finitos, el Método del Trabajo Virtual de Coulomb realiza una integral de volumen, mientras que el del Tensor de Tensión de Maxwell realiza una integral de superficie. En tres dimensiones, la realización de la integral de superficie es mucho más compleja que la realización de una integral de volumen [111], siendo más eficiente el primero que el segundo [114]. Desde un punto de vista del usuario, los resultados numéricos proporcionados por el Método del Trabajo Virtual de Coulomb y por el del Tensor de Tensión de Maxwell son similares, siempre y cuando se elija una buena superficie para la integración del tensor [114]. Se ha demostrado que el Método del Trabajo Virtual de Coulomb y el del Tensor de Tensión de Maxwell son equivalentes con elementos finitos si se emplean elementos de primer orden y el camino de integración del Método del Tensor de Tensión de Maxwell está formado por líneas que unen los puntos medios de las aristas de los triángulos [111] [113].

Desde un punto de vista teórico, todos los métodos y en particular, los tres últimos, son equivalentes y conducen a la misma solución. Las diferencias aparecen a la hora de implementarlos mediante elementos finitos, el cual no es nuestro caso. Por otro lado y ya que evaluaremos las componentes de la inducción magnética en el entrehierro y en las ranuras de nuestra máquina, el método que mejor se adapta es el del Tensor de Tensión de Maxwell. Además, este método es el más empleado por otros autores que tratan problemas similares al nuestro, es decir, problemas en los que una vez hallado el campo magnético analíticamente queremos obtener la fuerza y/o el par [115] [63] [64] [116] [60] [65]. Otros autores, emplean este método cuando quieren determinar la fuerza o el par, pero han hallado el campo con otros métodos, como circuitos magnéticos [117] o elementos finitos [118] [119]. Para minimizar, en el cálculo de la fuerza o del par, el error originado por la selección del

camino de integración, la mayoría de los autores sitúan este camino en medio del entrehierro [115] [63] [64] [116] [60] [65] [119]. Otros autores, como [118], proponen elegir diferentes contornos a lo largo del entrehierro y obtener el promedio de los resultados obtenidos en cada uno de ellos.

Por las razones anteriormente expuestas, emplearemos el Método de Tensor de Tensión de Maxwell para calcular la fuerza y el par de reluctancia que se origina en nuestra máquina. Vamos a desarrollar este método, siguiendo la exposición realizada en [113].

### Método del Tensor de Tensión de Maxwell

El Método del Tensor de Maxwell proporciona una herramienta para hallar la fuerza originada por un campo magnético a partir de las componentes de la inducción magnética de dicho campo, mediante la integral de superficie de un tensor. Dicho tensor es el Tensor de Tensiones de Maxwell cuya expresión para el caso de coordenadas cartesianas y en tres dimensiones es [113]:

$$\bar{T}_{MST} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y^2 - \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & B_z^2 - \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

A partir de este tensor podemos hallar la densidad de fuerza por unidad de volumen,  $p_v$  según:

$$p_v = \nabla \cdot \bar{T}_{MST} \quad (2.58)$$

La fuerza total se hallará integrando la densidad de fuerza en todo el volumen:

$$\bar{F} = \int_V \nabla \cdot \bar{T}_{MST} \cdot dv \quad (2.59)$$

Empleando el teorema de la divergencia podemos transformar la integral de volumen de la ecuación (2.59) en una integral de superficie:

$$\bar{F} = \oint_S \bar{T}_{MST} \cdot \bar{ds} \quad (2.60)$$

siendo  $S$  una superficie que encierra al dispositivo del que estamos hallando la fuerza que experimenta.

El par o momento de una fuerza es una magnitud vectorial definida como el producto vectorial del vector de posición del punto de aplicación de la fuerza por el vector fuerza, es decir:

$$\bar{T} = \bar{r} \times \bar{F} \quad (2.61)$$

siendo sus unidades  $N \cdot m$ .

Si la fuerza la descomponemos en sus componentes normal y tangencial, el par es un vector perpendicular al plano definido por el vector de posición y la componente tangencial de la fuerza y de magnitud igual al producto de la componente tangencial de la fuerza por la magnitud del vector de posición del punto en el que se aplica dicha fuerza:

$$T = F_t \cdot r \quad (2.62)$$

Para geometrías extensas, el cálculo del par lo obtendremos integrando el diferencial del par a lo largo de la trayectoria de integración. La expresión del diferencial del par es:

$$dT = r \cdot dF_t \quad (2.63)$$

siendo la expresión del par total:

$$T = \oint_S r \cdot dF_t \quad (2.64)$$



# Capítulo 3

## Método de los subdominios

El método de los subdominios es la técnica que vamos a utilizar en la obtención de la distribución del campo magnético en el entrehierro de una máquina axial de doble cara con rotor interno y estátores ranurados, cuando está en circuito abierto. Posteriormente, hallaremos la fuerza electromotriz inducida y la fuerza y el par de reluctancia. Veamos en qué consiste este método.

El método de los subdominios divide la geometría a estudiar en regiones lo suficientemente sencillas, denominadas subdominios, en las que resuelven directamente las ecuaciones de Maxwell en magnetostática (las cuales se reducen a la ecuación de Laplace en las regiones de aire y a la ecuación de Poisson en las regiones donde existen imanes o corrientes) y obtiene la distribución del campo aplicando las condiciones de contorno en las fronteras entre los subdominios.

La única referencia que hemos encontrado de esta técnica y que sirvió como punto de partida para este trabajo, está en el libro de Engelmann y Middendorf [120] titulado "*Handbook of Electric Motors*", libro escrito por 47 autores, cada uno de ellos experto en su campo. En el primer capítulo, escrito por V.D. Nene y J.R. Brauer, los autores repasan los principios de la conversión de energía, tratando, entre otros aspectos, los principales métodos empleados para estudiar el campo magnético originado por corrientes inmersas en núcleos de hierro; uno de los métodos que contemplan es el método de los subdominios, al que denominan "solución mediante series de Fourier". A modo de ejemplo, se aplica este método en la resolución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones para el potencial magnético escalar en dos casos: un primer caso sencillo formado por un único subdominio y una segunda geometría más complicada como es el entrehierro de una máquina con

doble ranurado idéntico; el problema resultante consta de dos subdominios con una frontera común. Antes de explicar cómo se aplica el método, vamos a obtener la solución general de la ecuación de Laplace en dos dimensiones y coordenadas cartesianas para un campo escalar.

### 3.1. Solución general de la Ecuación de Laplace

La solución a la ecuación de Laplace, sujeta a unas condiciones de contorno específicas, nos proporcionará el modelo de campo que estamos buscando. La ecuación de Laplace para el potencial magnético escalar, en dos dimensiones y en coordenadas cartesianas venía dada por la expresión (2.43):

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} = 0$$

y una posible solución a esta ecuación será  $\varphi_m = e^{(\alpha x \pm \beta y)}$ , que al ser sustituida en la ecuación de Laplace nos da:

$$(\alpha^2 + \beta^2)e^{(\alpha x \pm \beta y)} = 0$$

que para cumplirse se ha de dar obligatoriamente que  $(\alpha^2 + \beta^2) = 0$ , o lo que es lo mismo que  $\alpha = \pm i\beta$ .

Por tanto serían posibles soluciones las siguientes:

$$\varphi_m = e^{\beta(y-ix)}$$

$$\varphi_m = e^{\beta(-y+ix)}$$

$$\varphi_m = e^{\beta(-y-ix)}$$

y la suma de dos cualquiera de estas soluciones también sería solución, por tanto sumando y operando nos queda que:

$$\varphi_m = e^{\beta(y+ix)} + e^{\beta(y-ix)} = e^{\beta y}(e^{\beta ix} + e^{-\beta ix}) = 2e^{\beta y} \cos \beta x$$

y

$$\varphi_m = e^{\beta(-y+ix)} + e^{\beta(-y-ix)} = e^{-\beta y}(e^{\beta ix} + e^{-\beta ix}) = 2e^{-\beta y} \cos \beta x$$

ya que  $e^{\beta ix} = \cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x$  y  $e^{-\beta ix} = \cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x$ .

En general, podemos decir que los valores de  $\varphi_m$  de la forma  $K e^{\beta y} \cos \beta x$ , o  $K' e^{-\beta y} \cos \beta x$  son soluciones de la ecuación de Laplace.

Si sumamos ambas soluciones obtenemos una nueva solución de la forma:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= K e^{\beta y} \cos \beta x + K' e^{-\beta y} \cos \beta x = \cos \beta x (K e^{\beta y} + K' e^{-\beta y}) = \\ &= \cos \beta x [(K + K') \cosh \beta y + (K - K') \sinh \beta y] = \\ &= A \cos \beta x \cosh \beta y + B \cos \beta x \sinh \beta y\end{aligned}$$

ya que  $e^{\beta y} = \cosh \beta y + \sinh \beta y$  y  $e^{-\beta y} = \cosh \beta y - \sinh \beta y$ .

Si en vez de sumar restásemos, nos quedaría que

$$\begin{aligned}\varphi_m &= e^{\beta(y+ix)} - e^{\beta(y-ix)} = e^{\beta y} (e^{\beta ix} - e^{-\beta ix}) = 2 e^{\beta y} \operatorname{sen} \beta x \\ \varphi_m &= e^{\beta(-y+ix)} - e^{\beta(-y-ix)} = e^{-\beta y} (e^{\beta ix} - e^{-\beta ix}) = 2 e^{-\beta y} \operatorname{sen} \beta x\end{aligned}$$

y siguiendo el mismo razonamiento anterior tendríamos que

$$\varphi_m = C \operatorname{sen} \beta x \cosh \beta y + D \operatorname{sen} \beta x \sinh \beta y$$

y como cualquier combinación lineal de estas soluciones sigue siendo solución, tendremos que para cualquier valor de  $\beta$

$$\begin{aligned}\varphi_m(x, y) &= \sum_n (A_n \cos \beta_n x \cosh \beta_n y + B_n \cos \beta_n x \sinh \beta_n y + \\ &+ C_n \operatorname{sen} \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \operatorname{sen} \beta_n x \sinh \beta_n y)\end{aligned}\quad (3.1)$$

Ahora, utilizaríamos las condiciones de contorno para hallar los valores de los diferentes coeficientes  $\beta_n$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  y  $D_n$ . Veamos un ejemplo.

## 3.2. Ejemplos

Vamos a ilustrar cómo se calculan los coeficientes  $\beta_n$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  y  $D_n$  de la solución obtenida a la ecuación de Laplace y cómo se aplica la técnica de los subdominios desarrollando tres ejemplos.

### 3.2.1. Ejemplo 1: Región rectangular

Como ejemplo del cálculo de los coeficientes de la solución de la ecuación de Laplace, vamos a hallar la distribución del potencial magnético escalar en una región rectangular en la que uno de los lados se mantiene a un potencial constante,  $\varphi_m = V_0$ , y los otros tres lados se mantienen a un potencial nulo (figura 3.1).

Primeramente plantearemos las condiciones de contorno:

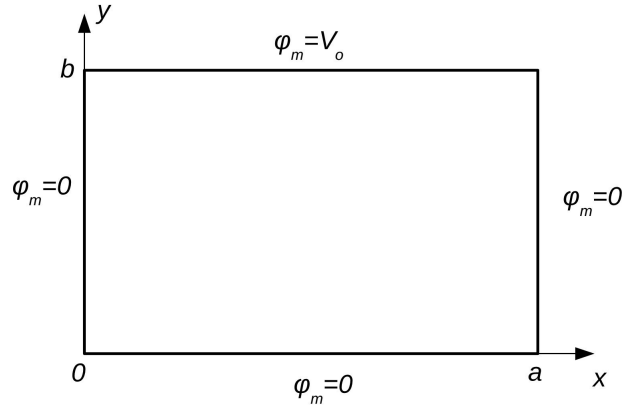


Figura 3.1: Región rectangular con un lado a un potencial  $\varphi_m = V_0$  y los otros tres lados a un potencial nulo

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = V_0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .

Sustituiremos estas condiciones de contorno en el modelo general de solución para obtener los coeficientes  $\beta_n$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  y  $D_n$ :

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ : Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución general llegamos a que:

$$\varphi_m(0, y) = \sum_n (A_n \cosh \beta_n y + B_n \sinh \beta_n y) = 0$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que  $A_n = 0$  y  $B_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n (C_n \cosh \beta_n y + D_n \sinh \beta_n y) \sin \beta_n x$$

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ : Sustituyendo estos dos valores en la solución que nos viene ya de la aplicación la anterior condición de contorno obtenemos que:

$$\varphi_m(x, 0) = \sum_n C_n \sin \beta_n x = 0$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  y  $x$ , la única posibilidad es que  $C_n = 0$ , quedando la solución de la forma:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n D_n \sinh \beta_n y \sin \beta_n x$$

- $\varphi_m = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ : Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(a, y) = \sum_n D_n \sinh \beta_n y \sin \beta_n a = 0$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que el  $\sin \beta_n a = 0$ , o, lo que es lo mismo, que  $\beta_n a = m\pi$  (donde  $m$  es cualquier número entero). La solución quedará como:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n D_n \sinh \left( \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right)$$

en donde hemos sustituido  $m$  por  $n$  ya que con cualquier entero se satisface la solución encontrada.

- $\varphi_m = V_0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ : Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(x, b) = \sum_n D_n \sinh \left( \frac{n\pi b}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) = V_0$$

Para poder extraer algo de información de esta condición recurriremos al desarrollo en serie de Fourier de una distribución rectangular  $\varphi_m = V_0$  para  $0 \leq x \leq a$  y en el que el límite por la izquierda y por derecha en  $x = 0$  y en  $x = a$ , es cero en ambos casos. Esto es, el desarrollo en serie de Fourier del contorno de la región que estamos analizando. Este desarrollo viene dado por:

$$\varphi_m = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_0}{(2k+1)} \sin \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{a} \right]$$

El desarrollo en serie de Fourier debe ser igual a la fórmula anterior, por lo que identificando ambas (y eliminando los términos pares pues el desarrollo en serie de Fourier nos los tiene) tenemos que:

$$D_n \sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{a} \right] = \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{(2k+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{(2k+1)} \frac{1}{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{a} \right]} = \frac{4V_0}{(2k+1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{a} \right]$$

Así que sustituyendo este valor en la solución de la condición de contorno anterior obtenemos la solución final para la distribución del potencial magnético escalar en el interior de la región rectangular en función de  $x$  e  $y$ :

$$\varphi_m(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_0}{(2k+1)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{a} \right] \cdot \sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{a} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{a} \right] \quad (3.2)$$

En el anexo C se muestran otros ejemplos cuyos resultados, además de ilustrar cómo se calculan estos coeficientes, se utilizarán en la aplicación de la técnica de los subdominios, tanto en este capítulo como en capítulos posteriores. Un par de ejemplo de la citada técnica se muestran a continuación.

### 3.2.2. Ejemplo 2: Entrehierro máquina con doble ranurado

Resolvamos una aplicación real como es la distribución del potencial magnético escalar en el entrehierro de una máquina con doble ranurado idéntico (en el rotor y en el estator). Resolveremos el problema cuando las ranuras están justo una en frente de la otra, apreciando de esta manera que en las dos superficies las ranuras y los dientes son iguales (figura 3.2). Podemos observar también, cómo, por simetría, el problema se reduce al cálculo del potencial en el área rayada.

Las medidas que nos encontramos en las figuras 3.2 y 3.3 corresponden a:  
 $s$  = anchura de la ranura,  
 $t$  = anchura del diente,  
 $\lambda$  = paso del pie =  $s + t$ ,  
 $g$  = longitud del entrehierro y  
 $h$  = profundidad de la ranura.

En la figura 3.3 hemos planteado el problema del potencial en el área rayada de la figura 3.2. Como se puede observar existen dos regiones claramente diferenciadas e interconectadas a través de la frontera común  $ED$ . Se debe cumplir que el potencial magnético escalar y su derivada espacial

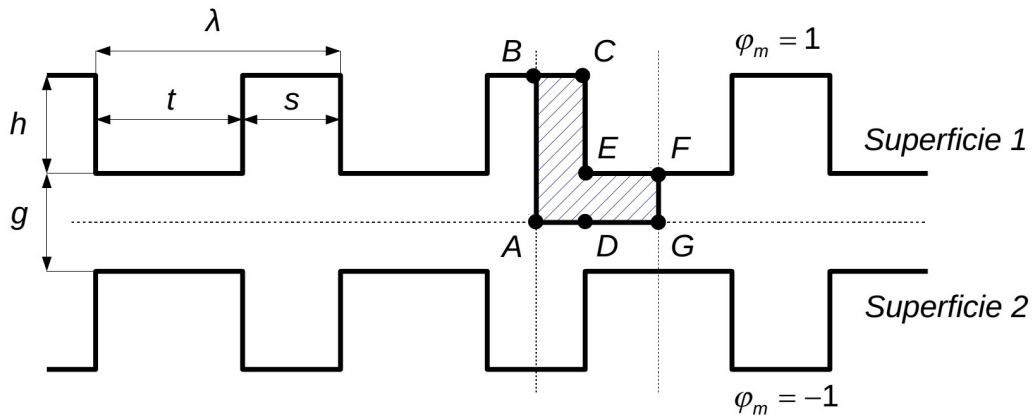


Figura 3.2: Ranurado doble idéntico cuando las ranuras están justo unas enfrente de la otras.

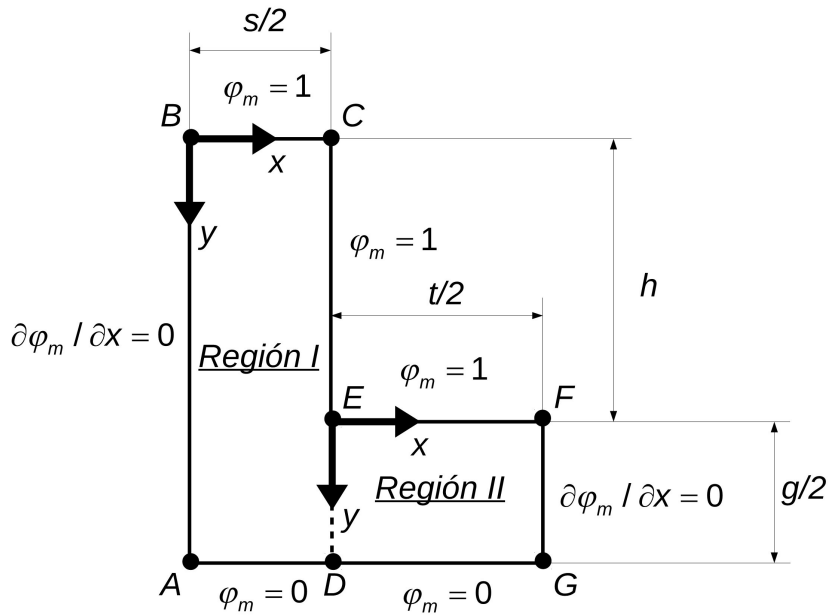


Figura 3.3: Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura (3.2).

deben ser continuos a través de esta frontera. Basándonos en esta propiedad resolveremos el problema en dos pasos:

1. Impondremos una distribución de potencial arbitraria a lo largo de la frontera común  $ED$ . La distribución vendrá expresada en forma de un desarrollo de Fourier en senos en el que los coeficientes son variables por determinar (en el apéndice B se justifica la elección de esta distribución de potencial). Ahora que tenemos especificadas las condiciones de contorno en ambas regiones resolveremos, por separado, la distribución de potencial en la región I y en la región II.
2. Obtendremos los coeficientes del desarrollo de Fourier de la distribución de potencial en la frontera  $ED$  igualando la derivada normal de la función potencial en ambas regiones a lo largo de esta frontera.

### Paso 1

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común  $ED$  es de la forma:

$$\varphi_m^{ED} = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{g/2} (y - h) \right] \text{ para } h \leq y \leq h + g/2 \text{ en la región I, y}$$

$$\varphi_m^{ED} = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \text{sen} \left( \frac{q\pi}{g/2} y \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g/2 \text{ en la región II}$$

donde  $B_q$  son los coeficientes a determinar.

Estas dos fórmulas son la misma distribución excepto un desplazamiento en las ordenadas, pues en la región I tomamos el origen de coordenadas en el punto  $B$  con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia  $C$  y  $A$ , respectivamente, y en la región II tomamos el origen de coordenadas en el punto  $E$  con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia  $F$  y  $D$ .

En el ejemplo anterior y en los casos ilustrados en el apéndice C, todas las condiciones de contorno eran homogéneas excepto una. No obstante, nos podemos encontrar con problemas en los que todas las condiciones de contorno son no homogéneas. La forma de resolver estos problemas es, aplicando el principio de superposición, dividir nuestro problema en tantos como sea necesario para que cada uno de ellos sólo tenga una condición no homogénea, tal y como se ilustra en la figura 3.4; la solución del problema será igual a la suma de las soluciones de cada uno de los problemas en que hemos dividido nuestro problema inicial [107], es decir:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_i \varphi_m^i(x, y)$$



donde cada  $\varphi_m^i(x, y)$  cumple la ecuación de Laplace con una condición de contorno no homogénea y las otras tres homogéneas. De esta forma, reducimos la resolución del problema original a la resolución de un conjunto de problemas más sencillos. La suma de todos los problemas sencillos será la solución del problema original, ya que la suma satisface tanto la ecuación diferencial como las condiciones de contorno: la ecuación diferencial, al satisfacerla cada problema sencillo también es satisfecha por la suma de éstos; cada problema sencillo cumple una de las condiciones de contorno por lo que la suma cumplirá todas las condiciones de contorno.

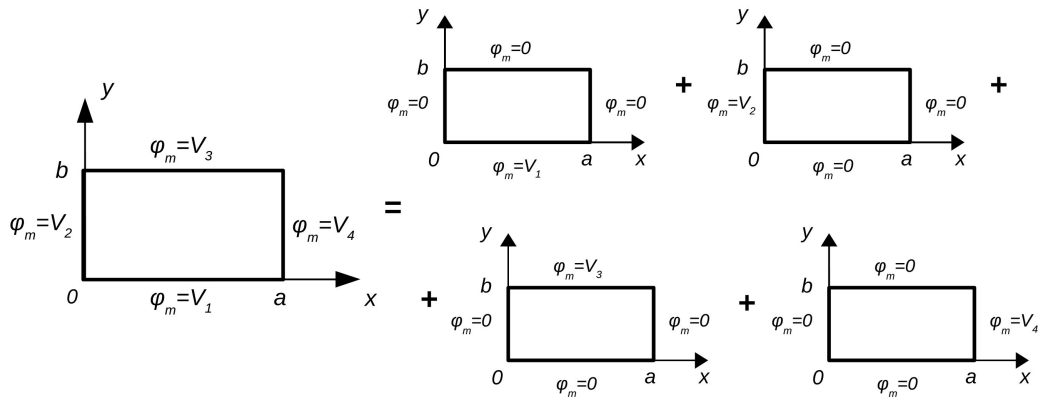


Figura 3.4: Aplicación del principio de superposición en la resolución de problemas con varias condiciones de contorno no nulas

En virtud de lo expuesto anteriormente, el potencial en la región I lo obtendremos, por superposición del caso#2 (en el que desplazamos  $h + g/2$  el eje  $y$ ) y el caso#10, llegando a:

$$\begin{aligned} \varphi_m^I = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi} \cdot \frac{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s} (h + g/2 - y) \right]}{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s} (h + g/2) \right]} \cdot \cos \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{s} \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \frac{\cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g/2} \right)}{\cosh \left[ \frac{n\pi(s/2)}{h+g/2} \right]} \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h + g/2} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde:

$$K_n = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi\alpha)] + \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} B_q +$$

$$+ \sum_{q=1}^{\infty} (1 - \alpha) B_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{2q\pi h}{g} \right) \quad (3.4)$$

y

$$\alpha = \frac{h}{h + g/2}$$

El potencial en la región II lo obtendremos por superposición del caso#3 (en el que desplazamos  $g/2$  el eje  $y$ ) y el caso#9, llegando a:

$$\begin{aligned} \varphi_m^{II} = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \cdot \frac{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t} (g/2 - y) \right]}{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t} g/2 \right]} \cdot \text{sen} \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{t} \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \frac{\cosh \left[ \frac{2q\pi}{g} (t/2 - x) \right]}{\cosh \left( \frac{2q\pi}{g} t/2 \right)} \cdot \text{sen} \left( \frac{2q\pi y}{g} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

## Paso 2

Una vez obtenidas las expresiones del potencial en ambas regiones podemos plantear un conjunto de ecuaciones en función de los coeficientes  $B_q$  sin mas que plantear en la frontera común  $ED$  que:

$$\left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=s/2} = \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=0}$$

Primeramente, realizaremos la derivada en la región I, no sin antes realizar una traslación del origen de coordenadas de ésta, pues hemos resuelto el problema del potencial en ambas regiones con sendos orígenes de coordenadas. Por tanto, la traslación  $y = y + h$  nos situará las ordenadas de los centros de coordenadas de ambas regiones al mismo nivel, resultando, de esta manera que la solución de la distribución de potencial de la región I queda:

$$\begin{aligned} \varphi_m^I = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi} \cdot \frac{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s} (g/2 - y) \right]}{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s} (h + g/2) \right]} \cdot \cos \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{s} \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \frac{\cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g/2} \right)}{\cosh \left[ \frac{n\pi(s/2)}{h+g/2} \right]} \cdot \text{sen} \left[ \frac{n\pi(y+h)}{h+g/2} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

y su derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_m^I}{dx} = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4(-1)^k}{s} \cdot \frac{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s/g} (1/2 - y/g) \right]}{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s/g} (h/g + 1/2) \right]} \cdot \text{sen} \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{s} \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \frac{n\pi}{h + g/2} \cdot \frac{\sinh \left( \frac{n\pi x}{h+g/2} \right)}{\cosh \left[ \frac{n\pi(s/2)}{h+g/2} \right]} \cdot \text{sen} \left[ \frac{n\pi(y+h)}{h + g/2} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Vamos a definir unas nuevas constantes en función de las que ya tengo con la intención de simplificar el formulismo. Definimos  $\mu$  como:

$$\mu = \frac{\lambda}{g} = \frac{t+s}{g}$$

y  $\beta$  como

$$\beta = \frac{s}{s+t} \Rightarrow 1 - \beta = \frac{t}{s+t}$$

resultando

$$\frac{s}{g} = \mu\beta$$

y

$$\frac{t}{g} = \mu(1 - \beta)$$

Además, definimos  $\alpha$  según la expresión:

$$\alpha = \frac{h}{h + g/2}$$

Operando, obtenemos:

$$1 - \alpha = \frac{g/2}{h + g/2}$$

y

$$\frac{1}{1 - \alpha} = \frac{h + g/2}{g/2} = \frac{2h + g}{g}$$

que nos permite escribir:

$$\frac{h}{g} = \frac{0.5\alpha}{1 - \alpha}$$

En la frontera común  $ED$ , el valor de las abscisas en la región I para cualquier punto es  $x = s/2$ , valor que sustituido en la derivada anterior, ecuación (3.7), nos proporciona:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=s/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{s} \cdot \frac{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu\beta} (1/2 - y/g) \right]}{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2\mu\beta(1-\alpha)} \right]} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \frac{n\pi}{h+g/2} \cdot \frac{\sinh \left[ \frac{n\pi(s/2)}{h+g/2} \right]}{\cosh \left[ \frac{n\pi(s/2)}{h+g/2} \right]} \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g/2} + \frac{n\pi h}{h+g/2} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Multiplicando por  $g$  a la ecuación (3.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} g \left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=s/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\mu\beta} \cdot \text{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{g} \right) \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot 2n\pi(1-\alpha) \cdot \text{tgh} \left[ \frac{n\pi(s/2)}{h+g/2} \right] \cdot \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g/2} + \frac{h}{g/2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

resultando:

$$\begin{aligned} g \left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=s/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\mu\beta} \cdot \text{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{g} \right) \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot 2n\pi(1-\alpha) \cdot \text{tgh} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \text{sen} \left[ 2n\pi(1-\alpha) \left( \frac{0.5\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1/2$ .

A continuación realizaremos la derivada en la región II; a partir de la ecuación (3.5) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{t} \cdot \frac{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t} (g/2 - y) \right]}{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t} g/2 \right]} \cdot \cos \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{t} \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \left( \frac{-2q\pi}{g} \right) \cdot \frac{\sinh \left[ \frac{2q\pi}{g} (t/2 - x) \right]}{\cosh \left( \frac{2q\pi}{g} t/2 \right)} \cdot \text{sen} \left( \frac{2q\pi y}{g} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

En la frontera común  $ED$ , el valor de las abcisas en la región II para cualquier punto es  $x = 0$ , valor que sustituido en (3.11) nos proporciona:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{t} \cdot \frac{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t} \left( \frac{g}{2} - y \right) \right]}{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t} \frac{g}{2} \right]} + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} B_q \left( \frac{-2q\pi}{g} \right) \cdot \operatorname{tgh} \left( \frac{q\pi}{g} t \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{2q\pi y}{g} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Multiplicando a toda la ecuación (3.12) por  $g$  queda:

$$\begin{aligned} g \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{t/g} \cdot \frac{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t/g} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{g} \right) \right]}{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t/g} \frac{1}{2} \right]} + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot (-2q\pi) \cdot \operatorname{tgh} [q\pi\mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{2q\pi}{g} y \right) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} g \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\mu(1-\beta)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2\mu(1-\beta)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu(1-\beta)} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{g} \right) \right] + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} -B_q \cdot (2q\pi) \cdot \operatorname{tgh} [q\pi\mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{2q\pi}{g} y \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1/2$ .

Igualando ambas derivadas (ecuaciones (3.10) y (3.13)) y recolocando los términos para dejar los que poseen  $B_q$  en un único lado de la ecuación queda:

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^{\infty} \left\{ 2q\pi \cdot \operatorname{tgh} [q\pi\mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( 2q\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\ &\left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2n\pi(1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{2q\pi h}{g} \right) + \frac{4nq(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\ &\left. \operatorname{tgh} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ 2n\pi(1-\alpha) \left( \frac{0.5\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} B_q = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{g} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\mu(1-\beta)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2\mu(1-\beta)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu(1-\beta)} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{g} \right) \right] - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} 4(1-\alpha) \cdot [1 - \cos(n\pi\alpha)] \cdot \operatorname{tgh} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \\
& \quad \cdot \operatorname{sen} \left[ 2n\pi(1-\alpha) \left( \frac{0.5\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \tag{3.14}
\end{aligned}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1/2$ .

Esta ecuación debe ser resuelta por métodos numéricos para poder obtener los valores de  $B_q$ . Para ello, por ejemplo, elegiremos un valor máximo para  $q$  como  $Q$ , y elegiremos  $Q$  diferentes valores para la variable  $y/g$  dentro de su rango. De esta manera tendremos  $Q$  ecuaciones con  $Q$  incógnitas (los coeficientes  $B_q$ ).

Como ejemplo numérico procedimos a elegir unos valores para las dimensiones del problema que nos ocupa y realizar un programa en Matlab para su resolución. La figura 3.5 muestra gráficamente la variación del potencial magnético escalar en la zona estudiada para valores de las dimensiones del problema de  $s = 4$  mm,  $t = 8$  mm,  $g = 3$  mm y  $h = 7$  mm.

### 3.2.3. Ejemplo 3: Entrehierro máquina ranurada e imanes permanentes

Resolvamos otra aplicación real, pero esta vez un poco más complicada. Queremos obtener la distribución del potencial magnético escalar en el entrehierro de una máquina trifásica de imanes permanentes y flujo axial. Vamos a representar la parte correspondiente a la longitud ocupada por dos imanes consecutivos, uno con su cara norte mirando al ranurado y el otro con su cara sur. Hemos adoptado una situación simétrica en la posición de las ranuras respecto los imanes por simplicidad. Podemos observar cómo, por esta simetría, el problema se reduce al cálculo del potencial en el área rayada (figura 3.6).

Las medidas que nos encontramos en las figuras 3.6 y 3.7 corresponden a:

- $s$  = anchura de la ranura,
- $t$  = anchura del diente,
- $\lambda$  = paso del pie =  $s + t$ ,
- $g$  = longitud del entrehierro y
- $h$  = profundidad de la ranura.

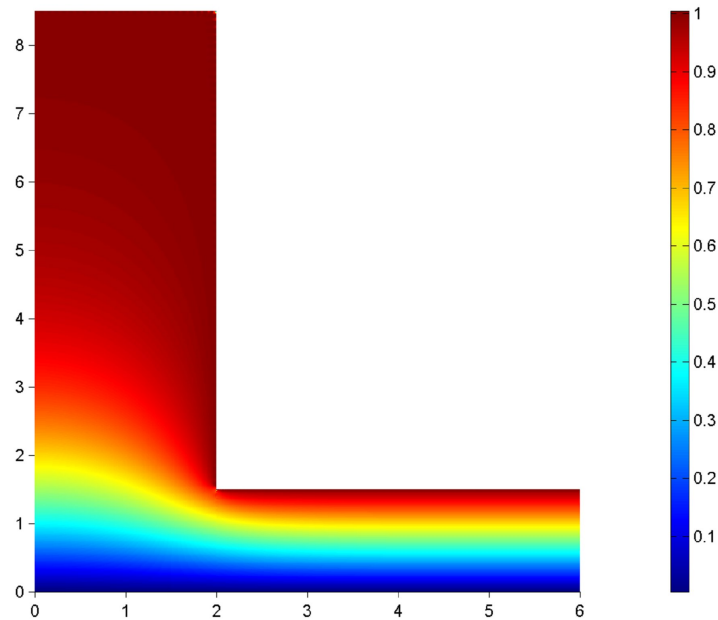


Figura 3.5: Valores del potencial magnético escalar de ambas regiones  $\varphi_m^I$  y  $\varphi_m^{II}$  para el ejemplo numérico tal que  $s = 4$  mm,  $t = 8$  mm,  $g = 3$  mm y  $h = 7$  mm.

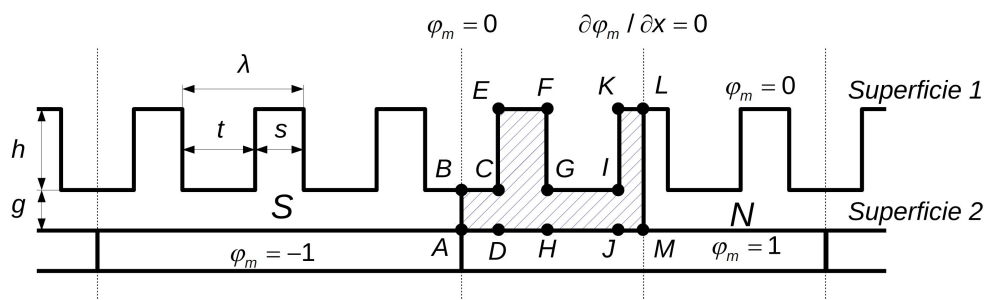


Figura 3.6: Entrehierro de un motor trifásico de imanes permanentes.

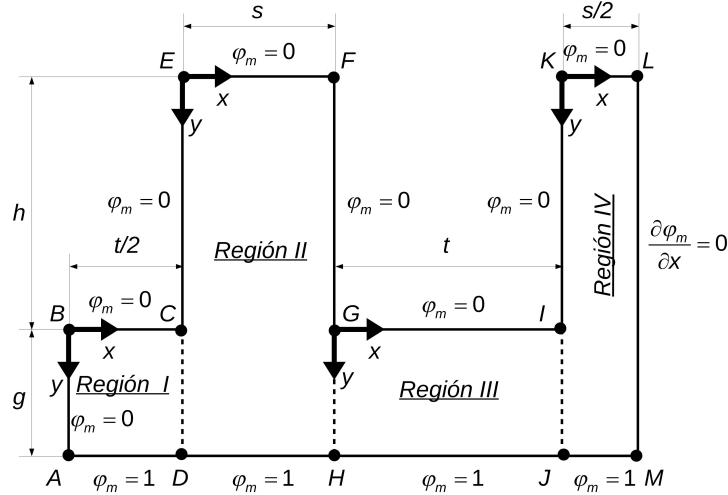


Figura 3.7: Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura 3.6

En la figura 3.7 hemos planteado el problema del potencial en el área rayada de la figura 3.6. Como se puede observar existen cuatro regiones claramente diferenciadas e interconectadas a través de las fronteras comunes  $CD$ ,  $GH$  e  $IJ$ . Se debe cumplir que el potencial magnético escalar y su derivada espacial deben ser continuos a través de estas fronteras. Basándonos en esta propiedad resolveremos el problema en los dos pasos citados en el ejemplo anterior:

1. Impondremos una distribución de potencial arbitraria a lo largo de las fronteras comunes  $CD$ ,  $GH$  e  $IJ$ . Estas distribuciones vendrán expresadas en forma de un desarrollo de Fourier en senos en el que los coeficientes son variables por determinar (véase justificación en el apéndice B). Ahora que tenemos especificadas las condiciones de contorno en ambas regiones a cada lado de las fronteras resolveremos, por separado, la distribución de potencial en cada región.
2. Obtendremos los coeficientes del desarrollo de Fourier de la distribución de potencial en las fronteras  $CD$ ,  $GH$  e  $IJ$  igualando la derivada normal de la función potencial en ambas regiones a lo largo de cada frontera.

### Paso 1

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común  $CD$  es de la forma:



$$\varphi_m^{CD} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \cdot \text{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región I, y}$$

$$\varphi_m^{CD} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \cdot \text{sen} \left[ \frac{q\pi(y-h)}{g} \right] \text{ para } h \leq y \leq h + g \text{ en la región II}$$

donde  $H_q$  son los coeficientes a determinar.

Estas dos fórmulas son la misma distribución excepto un desplazamiento en las ordenadas pues en la región I tomamos el origen de coordenadas en el punto  $B$  con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia  $C$  y  $A$ , respectivamente; y en la región II tomamos el origen de coordenadas en el punto  $E$  con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia  $F$  y  $D$ .

En las otras dos fronteras  $GH$  e  $IJ$  procederemos de forma similar. La distribución de potencial que impondremos a la frontera común  $GH$  es de la forma:

$$\varphi_m^{GH} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \cdot \text{sen} \left[ \frac{l\pi(y-h)}{g} \right] \text{ para } h \leq y \leq h + g \text{ en la región II, y}$$

$$\varphi_m^{GH} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \cdot \text{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región III}$$

donde  $M_l$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común  $IJ$  es de la forma:

$$\varphi_m^{IJ} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \cdot \text{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región III, y}$$

$$\varphi_m^{IJ} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \cdot \text{sen} \left[ \frac{m\pi(y-h)}{g} \right] \text{ para } h \leq y \leq h + g \text{ en la región IV}$$

donde  $L_m$  son los coeficientes a determinar.

Una vez definidas las distribuciones de potencial a lo largo de las fronteras comunes, vamos a calcular las expresiones del potencial magnético en cada región, empleando las expresiones deducidas en los casos considerados en el apéndice C y el principio de superposición.

■ Potencial en la región I:

El potencial en la región I (figura 3.8) lo obtendremos por superposición del caso#1 y del caso#4, llegando a:

$$\varphi_m^I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \cdot \text{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi g}{t/2} \right] \cdot \text{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{t/2} \right] \cdot \text{sen} \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{t/2} \right] +$$

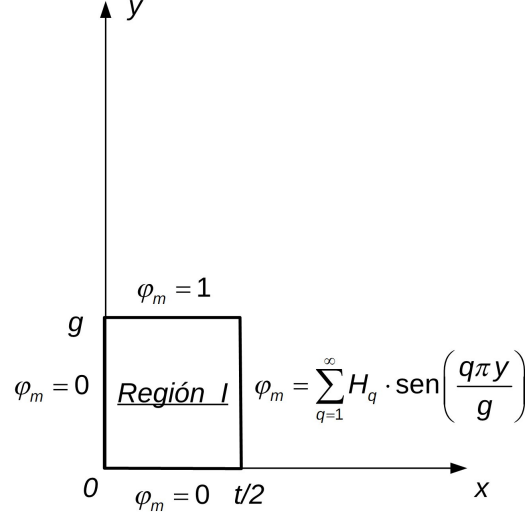


Figura 3.8: Región I: El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#1 y del caso#4.

$$+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t/2}{g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) \quad (3.15)$$

■ Potencial en la región II:

El potencial en la región II (3.9) lo obtendremos por superposición del caso#1 del caso#12 y del caso#13, llegando a:

$$\begin{aligned} \varphi_m^{II} = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \\ & \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{s} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{s} \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde

$$K_n^2 = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l(1-\delta_{l,n(1-\alpha)})}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} M_l +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} (1 - \alpha) M_l \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{l\pi h}{g}\right) \quad (3.17)$$

y

$$K_n^{2'} = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} H_q +$$

$$+ \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) H_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right) \quad (3.18)$$

siendo

$$\alpha = \frac{h}{h+g} \quad (3.19)$$

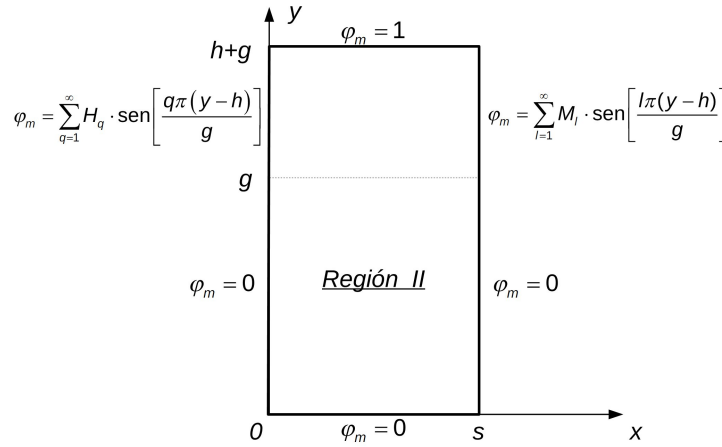


Figura 3.9: Región II: El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#1, del caso#12 y del caso#13.

■ Potencial en la región III:

El potencial en la región III (3.10) lo obtendremos por superposición del caso#1 del caso#4 y del caso#5, llegando a:

$$\varphi_m^{III} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \cdot \operatorname{csch}\left[\frac{(2k+1)\pi g}{t}\right] \cdot \operatorname{senh}\left[\frac{(2k+1)\pi y}{t}\right] \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{(2k+1)\pi x}{t}\right] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} M_l \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{l\pi t}{g}\right) \cdot \operatorname{senh}\left[\frac{l\pi(t-x)}{g}\right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi y}{g}\right) +$$

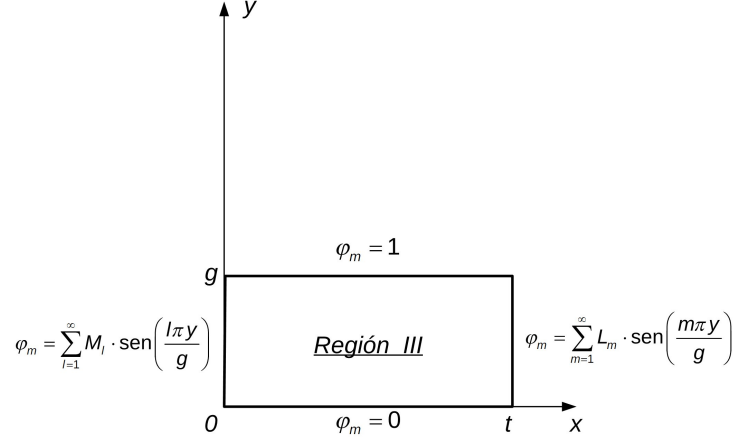


Figura 3.10: Región III: El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#1, del caso#4 y del caso#5.

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} L_m \cdot \text{csch}\left(\frac{m\pi t}{g}\right) \cdot \text{senh}\left(\frac{m\pi x}{g}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{g}\right) \quad (3.20)$$

■ Potencial en la región IV:

El potencial en la región IV (3.11) lo obtendremos por superposición del caso#3 y del caso#11, llegando a:

$$\begin{aligned} \varphi_m^{IV} = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \cdot \text{csch}\left[\frac{(2k+1)\pi(h+g)}{s}\right] \cdot \\ & \cdot \text{senh}\left[\frac{(2k+1)\pi y}{s}\right] \cdot \text{sen}\left[\frac{(2k+1)\pi x}{s}\right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \cdot \text{sech}\left(\frac{n\pi s/2}{h+g}\right) \cdot \cosh\left[\frac{n\pi(s/2-x)}{h+g}\right] \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{h+g}\right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde

$$\begin{aligned} K_n^{4'} = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \text{sen}(n\pi\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(1-\delta_{m,n(1-\alpha)})}{m^2 - n^2(1-\alpha)^2} L_m + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (1-\alpha) L_m \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{m\pi h}{g}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

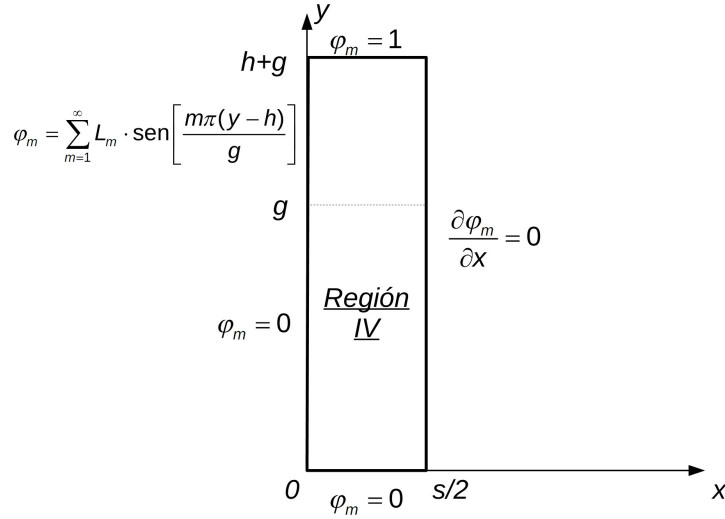


Figura 3.11: Región IV: El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso #3 y del caso #11.

### Paso 2

Una vez obtenidas las expresiones del potencial escalar en las cuatro regiones podemos plantear un conjunto de ecuaciones en función de los coeficientes  $H_q$ ,  $M_l$  y  $L_m$  igualando la derivada normal de la función potencial a ambos lados de cada frontera, es decir,

$$\left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=t/2} = \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=0} \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=s} = \left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=0} \quad (3.24)$$

y

$$\left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=t} = \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=0} \quad (3.25)$$

Primeramente, realizaremos la derivada en la región I, derivando la ecuación (3.15):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_m^I}{dx} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{t/2} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi g}{t/2} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{2(2k+1)\pi y}{t/g} \right] \cdot \cos \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{t/2} \right] + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t/2}{g} \right) \cdot \operatorname{cosh} \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) \end{aligned}$$

Antes de proseguir voy a definir unas nuevas constantes en función de las que ya tengo con la intención de simplificar el formulismo:

$$\mu = \frac{\lambda}{g} = \frac{t+s}{g}$$

y

$$\beta = \frac{s}{s+t} \Rightarrow 1 - \beta = \frac{t}{s+t}$$

resultando

$$\frac{s}{g} = \mu\beta$$

y

$$\frac{t}{g} = \mu(1 - \beta)$$

Además, definimos  $\alpha$  según la expresión:

$$\alpha = \frac{h}{h+g}$$

Operando, obtenemos:

$$1 - \alpha = \frac{g}{h+g}$$

y

$$\frac{1}{1 - \alpha} = \frac{h+g}{g}$$

que nos permite escribir:

$$\frac{h}{g} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

En la frontera común  $CD$  con la región II, el valor de las abcisas en la región I para cualquier punto es  $x = t/2$ , valor que sustituido en la derivada anterior nos proporciona:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=t/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8}{t} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{2(2k+1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{2(2k+1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t/2}{g} \right) \cdot \operatorname{cosh} \left( \frac{q\pi t/2}{g} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) \end{aligned}$$

Si multiplicamos por  $g$ , obtenemos:

$$g \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=t/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8}{\mu(1-\beta)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{2(2k+1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{2(2k+1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] +$$

$$+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q q\pi \cdot \coth \left[ \frac{q\pi\mu(1-\beta)}{2} \right] \cdot \text{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) \quad (3.26)$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

Ahora realizaremos la derivada en la región II, no sin antes realizar una traslación del origen de coordenadas de ésta para dejarlo a la misma altura que los orígenes de las regiones I y III con las que limita. Por tanto, la traslación  $y = y + h$  nos situará las ordenadas de los centros de coordenadas de las regiones I, II y III al mismo nivel. De esta manera, la derivada de la distribución de potencial de la región II (ecuación 3.16) queda:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{s} \cdot \text{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \\ &\cdot \text{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi(y+h)}{s} \right] \cdot \cos \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{s} \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \text{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cdot \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cdot \text{sen} \left[ \frac{n\pi(y+h)}{h+g} \right] - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \text{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cdot \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cdot \text{sen} \left[ \frac{n\pi(y+h)}{h+g} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

En la frontera común  $CD$  con la región I, el valor de las abscisas en la región II para cualquier punto es  $x = 0$ , valor que sustituido en la derivada anterior (ecuación 3.27) nos proporciona:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{s} \cdot \text{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s/g} \left( \frac{h}{g} + 1 \right) \right] \cdot \text{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s/g} \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right) \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \text{csch} \left[ \frac{n\pi(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \text{sen} \left[ \frac{n\pi \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right)}{\frac{h}{g} + 1} \right] - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \text{csch} \left[ \frac{n\pi(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \cosh \left[ \frac{n\pi(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \text{sen} \left[ \frac{n\pi \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \end{aligned}$$

Si multiplicando a toda la ecuación por  $g$  e introducimos las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$  previamente definidas, obtenemos:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\mu\beta} \cdot \text{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu\beta} \frac{1}{1-\alpha} \right] \cdot \text{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 n\pi(1-\alpha) \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi\mu\beta}{1/(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)}{1/(1-\alpha)} \right] - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} n\pi(1-\alpha) \cdot \operatorname{coth} \left[ \frac{n\pi\mu\beta}{1/(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)}{1/(1-\alpha)} \right] \quad (3.28)
\end{aligned}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

En la frontera común  $GH$  con la región III, el valor de las abcisas en la región II para cualquier punto es  $x = s$ , valor que sustituido en la derivada del potencial en esta región (expresión 3.27) anterior nos proporciona:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=s} & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{s} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s/g} \left( \frac{h}{g} + 1 \right) \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s/g} \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right) \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \operatorname{cosh} \left[ \frac{n\pi(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right)}{\frac{h}{g} + 1} \right]
\end{aligned}$$

Multiplicando a toda la ecuación por  $g$  e introducimos las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$  previamente definidas, queda:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=s} & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{s} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s/g} \left( \frac{h}{g} + 1 \right) \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s/g} \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right) \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \operatorname{cosh} \left[ \frac{n\pi(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \quad (3.29)
\end{aligned}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

A continuación y partiendo de la expresión (3.20), realizaremos la derivada en la región III:

$$\frac{d\varphi_m^{III}}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{t} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t/g} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{t/g} \right] \cdot \cos \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{t} \right] -$$



$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cdot \cosh \left[ \frac{l\pi (t-x)}{g} \right] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) + \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \cdot \cosh \left( \frac{m\pi x}{g} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) \quad (3.30)
\end{aligned}$$

En la frontera común  $GH$  con la región II, el valor de las abcisas en la región III para cualquier punto es  $x = 0$ , valor que sustituido en la derivada anterior nos proporciona:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{t} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t/g} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{t/g} \right] - \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cdot \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) + \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right)
\end{aligned}$$

Multiplicando a toda la ecuación por  $g$  queda y empleando las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$ , resulta:

$$\begin{aligned}
g \left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\mu(1-\beta)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{\mu(1-\beta)} \right] - \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} M_l l\pi \cdot \coth [l\pi\mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} L_m m\pi \cdot \operatorname{csch} [m\pi\mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) \quad (3.31)
\end{aligned}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

En la frontera común  $IJ$  con la región IV, el valor de las abcisas en la región III para cualquier punto es  $x = t$ , valor que sustituido en la ecuación (3.30) nos proporciona:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{t} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{t/g} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{t/g} \right] - \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \cdot \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right)$$

Multiplicando a toda la ecuación por  $g$  y empleando las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$ , queda:

$$\begin{aligned} g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\mu(1-\beta)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] - \\ &\quad - \sum_{l=1}^{\infty} M_l l\pi \cdot \operatorname{csch} [l\pi\mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} L_m m\pi \cdot \operatorname{coth} [m\pi\mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

Por último realizaremos la derivada en la región IV, no sin antes realizar una traslación del origen de coordenadas de ésta para dejarlo a la misma altura que el origen de la región III. Por tanto, la traslación  $y = y + h$  nos situará las ordenadas de los centros de coordenadas de las regiones III y IV al mismo nivel, resultando, de esta manera que la derivada de la distribución de potencial de la región IV (ecuación 3.21) queda:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{s} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi(y+h)}{s} \right] \cdot \cos \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{s} \right] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \operatorname{sech} \left( \frac{n\pi s/2}{h+g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s/2-x)}{h+g} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi(y+h)}{h+g} \right] \end{aligned}$$

En la frontera común  $IJ$  con la región III, el valor de las abcisas en la región IV para cualquier punto es  $x = 0$ , valor que sustituido en la derivada anterior nos proporciona:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{s} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s/g} \left( \frac{h}{g} + 1 \right) \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{s/g} \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right) \right] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \operatorname{sech} \left[ \frac{(n\pi/2)(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(n\pi/2)(s/g)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi \left( \frac{y}{g} + \frac{h}{g} \right)}{\frac{h}{g} + 1} \right] \end{aligned}$$

Multiplicando a toda la ecuación por  $g$  y empleando las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$ , resulta:

$$g \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu\beta} \frac{1}{1-\alpha} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} n\pi(1-\alpha) \cdot \tanh \left[ \frac{(n\pi/2)\mu\beta}{1/(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)}{1/(1-\alpha)} \right] \quad (3.33)$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

Una vez halladas las derivadas de cada región en las fronteras comunes, podemos plantear un tres conjuntos de ecuaciones que nos permitirán calcular los coeficientes  $H_q$ ,  $M_l$  y  $L_m$ . El primer conjunto de ecuaciones lo obtenemos a partir de la ecuación (3.23) que, multiplicando por  $g$  en ambos lados, resulta:

$$g \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=t/2} = g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=0}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.26) y (3.28) y agrupando los sumandos para dejar los que poseen  $H_q$  y  $M_l$  en un único lado de la ecuación, queda:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left\{ q\pi \coth \left[ \frac{q\pi\mu(1-\beta)}{2} \right] \operatorname{sen} \left( q\pi \frac{y}{g} \right) + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi(1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{q\pi h}{g} \right) + \frac{2nq(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \cdot$$

$$\cdot \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} H_q -$$

$$- \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi(1-\alpha)^2 \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{l\pi h}{g} \right) + \frac{2nl(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{l,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right.$$

$$\cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} M_l =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{2(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{2(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] \quad (3.34)$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

A partir de la ecuación (3.24), multiplicando por  $g$  a ambos lados obtenemos:

$$g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=s} = g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=0}$$

Si sustituimos en esta ecuación las expresiones (3.29) y (3.31), y colocando los sumandos para dejar los que poseen  $H_q$ ,  $M_l$  y  $L_m$  en un único lado de la ecuación queda:

$$\begin{aligned} & - \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2nq(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \text{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} H_q + \\ & \quad + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ l\pi \coth [l\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( l\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{l\pi h}{g}\right) + \frac{2nl(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{l,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} M_l - \\ & \quad - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m\pi \text{csch} [m\pi\mu(1-\beta)] \text{en} \left( m\pi \frac{y}{g} \right) \right\} L_m = \\ & \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\mu\beta} \text{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \text{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] + \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\mu(1-\beta)} \text{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \text{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] \quad (3.35) \end{aligned}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

Si, en la ecuación (3.25) multiplicamos ambos miembros por  $g$ , resulta:

$$g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=t} = g \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=0}$$

Si ahora, en esta ecuación, sustituimos las expresiones dadas las ecuaciones (3.32) y (3.33) y agrupamos y colocamos los sumandos para dejar los que poseen  $M_l$  y  $L_m$  en un único lado de la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ l\pi \operatorname{csch} [l\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( l\pi \frac{y}{g} \right) \right\} M_l + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m\pi \coth [m\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\
& + \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{m\pi h}{g} \right) + \frac{2nm(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{m^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{m,n(1-\alpha)}) \right] \right. \\
& \cdot \left. \operatorname{tgh} \left[ n\pi \frac{\mu\beta(1-\alpha)}{2} \right] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} L_m = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] \quad (3.36)
\end{aligned}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

Las ecuaciones (3.34), (3.35) y (3.36) se deben cumplir simultáneamente y a través de su resolución, en la se emplearán métodos numéricos, obtendremos los valores de los coeficientes  $H_q$ ,  $M_l$  y  $L_m$ . Para ello, por ejemplo, elegiremos unos valores máximos para  $q$ ,  $l$  y  $m$  como  $Q$  (puede ser el mismo valor para todas), y elegiremos  $Q$  diferentes valores para la variable  $y/g$  dentro de su rango. De esta manera tendremos  $3Q$  ecuaciones con  $3Q$  incógnitas (los coeficientes  $H_q$ ,  $M_l$  y  $L_m$ ).

Como ejemplo numérico procedimos a elegir unos valores para las dimensiones del problema que nos ocupa y realizar un programa en Matlab para su resolución. La figura (3.12) muestra gráficamente la variación del potencial magnético escalar en la zona estudiada para valores de las dimensiones del problema de  $s = 6$  mm,  $t = 7$  mm,  $g = 5$  mm y  $h = 11$  mm:

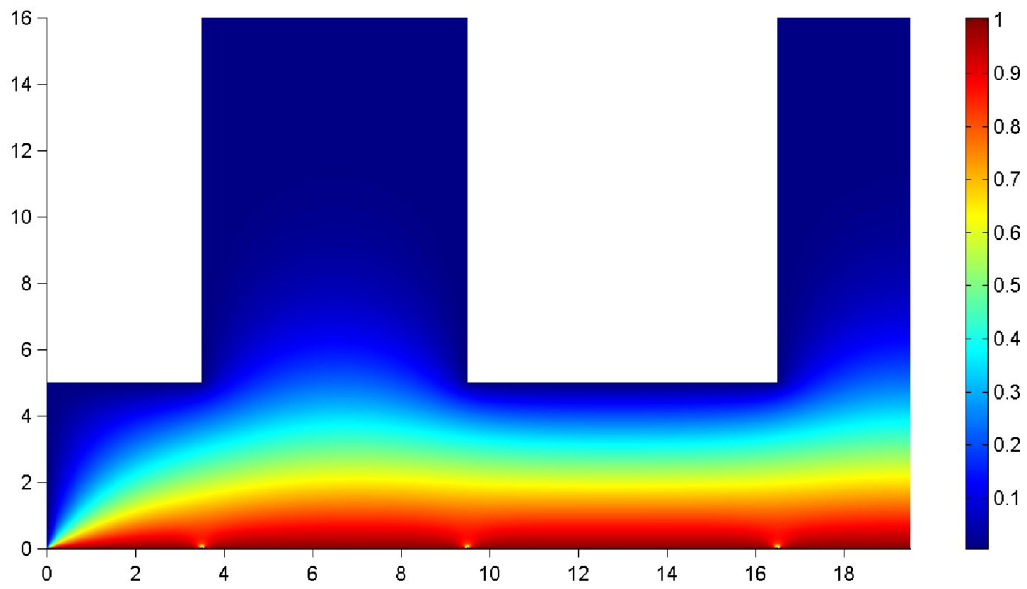


Figura 3.12: Valores del potencial magnético escalar en la zona estudiada para valores de las dimensiones del problema de  $s = 6$  mm,  $t = 7$  mm,  $g = 5$  mm y  $h = 11$  mm.

# Capítulo 4

## Máquina brushless de flujo axial e imanes permanentes

Una vez conocido cómo funciona el método de los subdominios vamos a describir la máquina que hemos estudiado y a la que aplicaremos esta técnica.

### 4.1. Descripción de la máquina estudiada

Dentro de los diferentes tipos de máquinas que detallábamos en el capítulo 2, vamos a estudiar una máquina de imanes permanentes y flujo axial de doble cara con rotor interno y estatores ranurados, tal y como se muestra en la figura 4.1.

En la figura 4.2 se muestra sólo el rotor interno de la máquina, formado por ocho imanes que alternan en polaridad y con magnetización axial.

Cuando un dispositivo posee algún plano de simetría, es posible representar al dispositivo total por una fracción de éste, siempre y cuando se establezcan las correspondientes condiciones de contorno en el plano de simetría. En el caso que nos ocupa y a la vista de las figuras 4.1 y 4.2, podemos apreciar que la máquina es simétrica, siendo el plano  $y=0$  un plano de simetría, donde el campo magnético es normal a dicho plano de simetría. Por ello, podemos considerar solamente la mitad de la máquina, es decir, un estator y la mitad del rotor, tal y como mostramos en la figura 4.3.

En la figura 4.3a) se muestra la mitad de la geometría, donde se puede apreciar, además del rotor y del estator de la máquina, la carcasa externa,

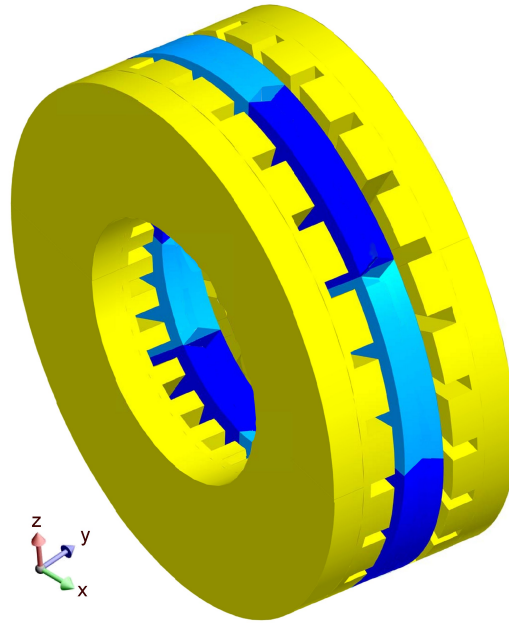


Figura 4.1: Vista general de la máquina objeto de estudio

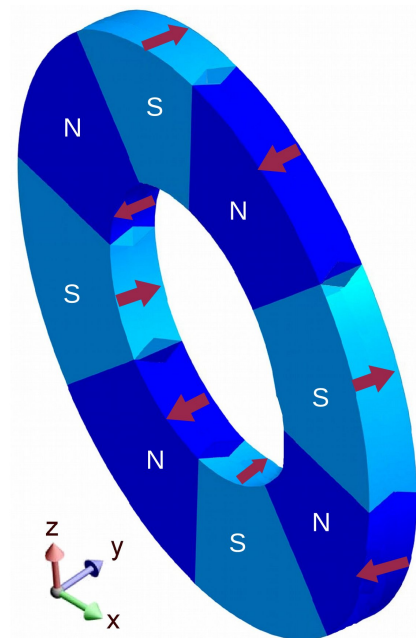


Figura 4.2: Rotor interno de la máquina, formado por ocho imanes con magnetización axial.



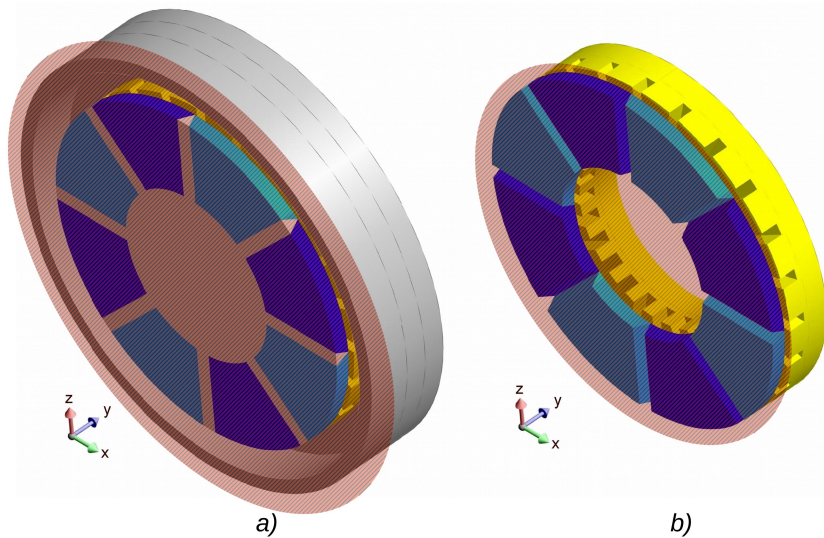


Figura 4.3: Mitad de la geometría: a) Partes activas y no activas; b) Sólo partes magnéticamente activas

fabricada en aluminio, y el disco central y los nervios del rotor, fabricados en acero austenítico. Debido a que el aluminio y el acero austenítico presentan, desde un punto de vista magnético, un comportamiento similar al del vacío, estas partes de la máquina no van a influir en el comportamiento magnético de la máquina, denominándolas partes “no activas” y pudiéndolas obviar en el estudio que vamos a realizar. Por el contrario, los imanes del rotor y el estátor de la máquina, son elementos fundamentales en el comportamiento magnético del conjunto y deberemos tenerlos en cuenta. A estos elementos les denominamos partes “activas”; la figura 4.3b) muestra éstas últimas.

La figura 4.4 muestra otra vista de las partes activas de la máquina, donde podemos apreciar las ranuras del estátor, dispuestas radialmente y rectas, es decir, sin cierre en la parte inferior de las mismas, y el plano de simetría comentado.

Se dice que un dispositivo posee una periodicidad cuando este dispositivo está formado por un patrón que se repite; en este caso y al igual que sucedía con las simetrías, es posible estudiar el dispositivo modelando el patrón e imponiendo las condiciones de periodicidad apropiadas en los planos de periodicidad existentes. Estas condiciones de periodicidad pueden ser:

- Condición periódica o cíclica: Existe una condición de periodicidad o cíclica cuando los valores de la variable son idénticos en puntos homó-

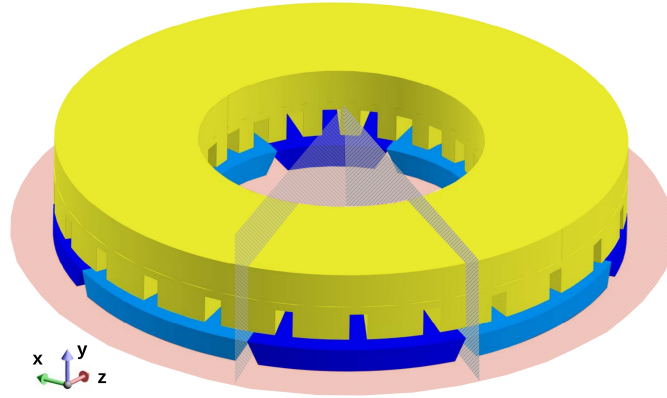


Figura 4.4: Mitad de la máquina: Simetría y periodicidades

logos, tal y como se muestra en la figura 4.5a).

- Condición antiperiódica o anticíclica: Una condición es de anti-periodicidad o anti-cíclica cuando la variable presenta valores opuestos en puntos homólogos, como se ilustra en la figura 4.5b).

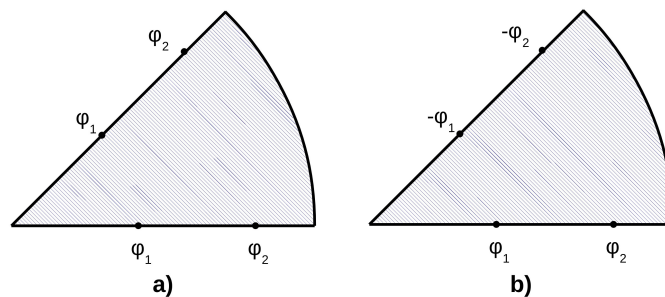


Figura 4.5: Condiciones de periodicidad: a) Condición periódica o cíclica; b) Condición anti-periódica o anti-cíclica

Si nos fijamos en nuestra máquina y dada la alternancia de polos norte y sur, podemos considerar que tiene una periodicidad cíclica (si consideramos un par de polos) o anti-cíclica (si consideramos solamente un polo). Ya que la geometría resultante al trabajar con un polo es más sencilla que la que manejaríamos al tomar un par de polos, vamos a aplicar la periodicidad anti-cíclica en el estudio que realizaremos. En la figura 4.4 se muestran los dos planos de periodicidad que delimitan la porción de máquina que vamos a estudiar, además del citado plano de simetría. La figura 4.6 muestra el modelo que estudiaremos y cuyos resultados podremos extrapolar, mediante

la aplicación de periodicidades y simetrías, para conocer el comportamiento global de la máquina.

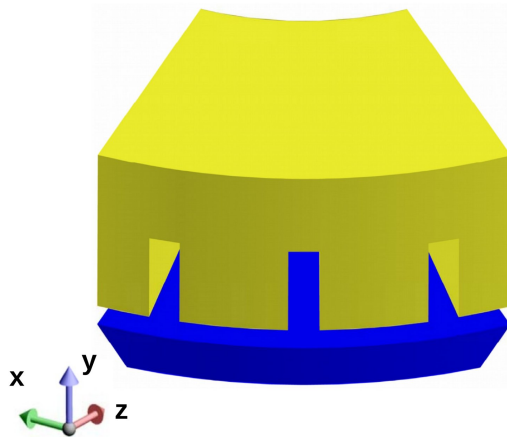


Figura 4.6: Modelo resultante al aplicar simetría y periodicidad anti-cíclica.

#### 4.1.1. Modelo cuasi-3D

La técnica de los subdominios es una técnica que trabaja en un sistema de coordenadas en dos dimensiones, mientras que el modelo considerado es un modelo en tres dimensiones; por lo tanto, es necesario algún procedimiento que nos permita transformar la geometría en tres dimensiones (3D) a una geometría en dos dimensiones (2D). En la literatura existen diferentes aproximaciones para tener en cuenta la naturaleza tridimensional de las máquinas de flujo axial:

- Una primera aproximación, como son los artículos [121] y [38], consiste en obtener directamente la solución analítica tridimensional del campo magnético.
- Una segunda aproximación [122] se basa en, partiendo de la solución analítica exacta de las ecuaciones de Maxwell de la máquina en dos dimensiones en el radio medio, extenderlo a tres dimensiones al modelar la dependencia del campo magnético con el radio; un planteamiento similar es realizado por [105] quienes, a partir de resultados de simulación realizados en dos dimensiones y mediante la aplicación de factores de corrección obtenidos analíticamente empleando series de Fourier, obtienen el comportamiento de la máquina en tres dimensiones.

- La tercera aproximación y que será la que nosotros aplicaremos, consiste en considerar que la máquina está compuesta por varias máquinas de flujo axial con diferente longitud radial (varias láminas), pudiéndose modelar cada una de las láminas mediante un modelo en dos dimensiones; el funcionamiento global de la máquina se obtiene como suma de las aportaciones de cada una de las máquinas individuales, al considerar despreciable el flujo en la dirección radial. Ejemplos de esta aproximación los encontramos en [123], [124] y [94]. A esta aproximación la vamos a denominar modelo *cuasi-3D*.

En la figura 4.7 se muestra el principio del modelo cuasi-3D: la máquina se divide en un determinado número de láminas anulares en la dirección radial de espesor  $e_l$  (figura 4.7a). El modelo analítico basado en la resolución de las ecuaciones de Maxwell aplicando la técnica de los subdominios se establecerá en el radio medio de cada lámina. Si el número de láminas fuera uno, dicho radio medio coincidiría con el de la máquina (figura 4.7b).

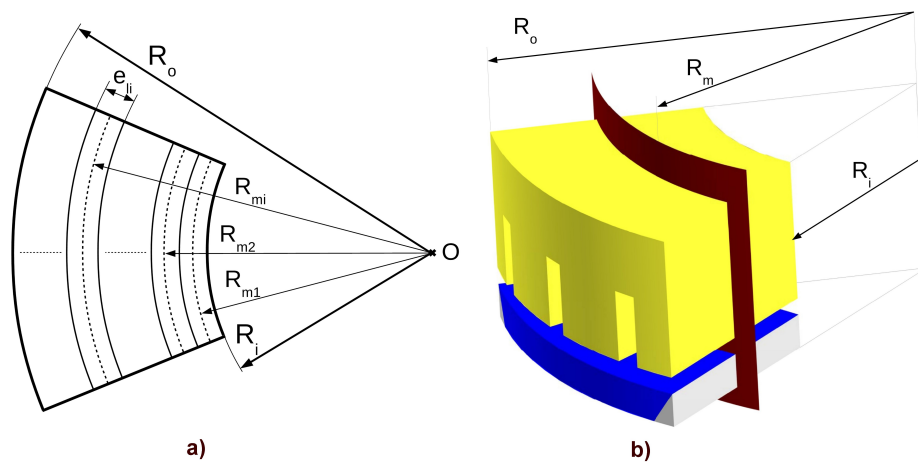


Figura 4.7: Principio del modelo cuasi-3D

La figura 4.8 muestra cómo obtenemos el modelo en dos dimensiones para una lámina determinada: inicialmente la lámina es curva (figura 4.8a) y esta referenciada en un sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$ ; si consideramos despreciable la curvatura, podemos aproximar la superficie curva de la lámina por una superficie plana referida a un sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$ , siendo la coordenada cartesiana  $x$  coincidente con la coordenada cilíndrica  $\varphi$ , la coordenada cartesiana  $y$  con la coordenada cilíndrica  $z$  y la coordenada cartesiana  $z$  con la coordenada cilíndrica  $r$  (figura

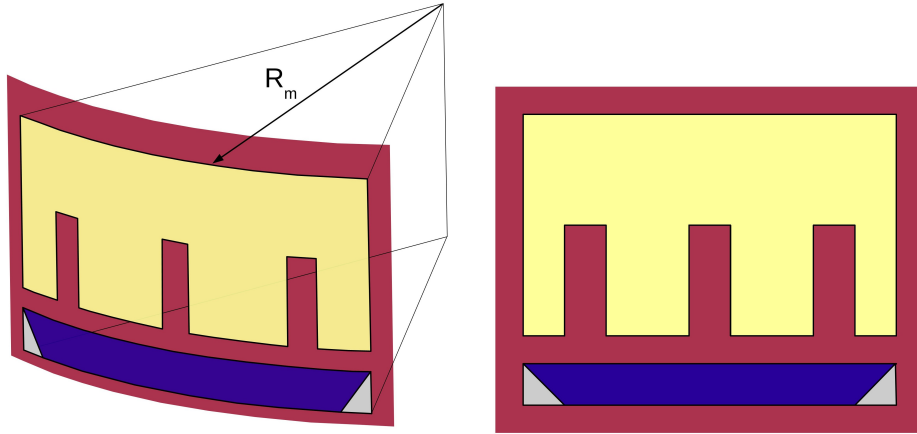


Figura 4.8: Modelo en dos dimensiones: a) Coordenadas cilíndricas. b) Coordenadas cartesianas.

4.8b).

La figura 4.9 muestra la geometría en dos dimensiones donde se muestran las distintas regiones que la componen, a saber, imán, nervios del rotor, entrehierro, ranuras y estátor. También se indican los principales parámetros que la definen, como son el grosor del imán ( $l_m$ ), el espesor del entrehierro ( $g$ ), la anchura de las ranuras ( $s$ ), su profundidad ( $d_s$ ), la anchura del diente ( $t$ ), el paso de ranura ( $\tau_s$ ), el paso de polo ( $\tau_p$ ), el espesor del hierro trasero ( $\omega_{bi}$ ), la longitud axial del estator ( $l_s$ ) y la longitud axial de la máquina ( $L$ ). Los valores numéricos de los principales parámetros de nuestra máquina, se muestran en la tabla 4.1.

Para poder aplicar la técnica de los subdominios a la geometría en dos dimensiones mostrada en la figura 4.9, necesitamos determinar el potencial magnético en la superficie del rotor, para cuyo fin resolveremos la Ecuación de Laplace en el entrehierro de nuestra máquina, pero donde no consideraremos a las ranuras directamente en la geometría, sino que tendremos en cuenta su efecto global a través del coeficiente de Carter, reduciendo el problema al de una máquina lisa. Determinaremos el coeficiente de Carter empleando la expresión (2.2) particularizada en el radio medio de la máquina, y sustituiremos el entrehierro real,  $g$ , por el entrehierro efectivo,  $g'$ , según la expresión (2.1), esto es:

$$g' = K_C \cdot g$$

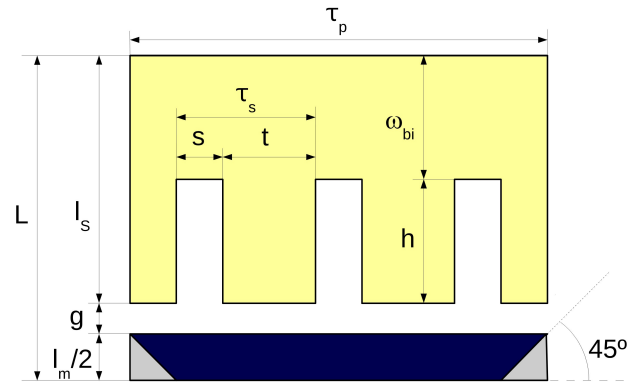


Figura 4.9: Geometría del modelo en dos dimensiones en coordenadas cartesianas.

Parámetro	Magnitud	Valor
$R_o$	Radio externo	120 mm
$R_i$	Radio Interno	60 mm
$B_r$	Inducción remanente	1.2 T
$N_p$	Número de polos	8
$N_s$	Número de ranuras por estátor	24
$l_m$	Grosor del imán	20 mm
$g$	Espesor del entrehierro	5 mm
$s$	Anchura de la ranura	7 mm
$t$	Anchura del diente*	16 mm
$d_s$	Profundidad de la ranura	21.5mm
$t_s$	Paso de ranura*	23 mm
$t_p$	Paso de polo*	69 mm
$g$	Espesor del entrehierro	5 mm
$w_{bi}$	Espesor del hierro trasero	20 mm
$l_s$	Longitud axial del estátor	41.5 mm
$L$	Longitud axial de media máquina	56.5 mm

\* Valores para un radio de 87.86 mm, al que llamaremos  
*Radio medio aproximado*

Tabla 4.1: Dimensiones de nuestra máquina

siendo  $K_C$  la expresión del coeficiente de Carter dada por:

$$K_C = \left[ 1 - \frac{2s}{\pi\tau_s} \left\{ \arctan\left(\frac{s}{2g}\right) - \frac{g}{s} \ln \left[ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{s}{g}\right)^2 \right] \right\} \right]^{-1}$$

donde  $s$  es la anchura de la abertura de la ranura,  $g$  el espesor del entrehierro real y  $\tau_s$  el paso de ranura calculado en el radio medio de la lámina que estamos considerando y que será igual a suma de la anchura de la ranura  $s$  y de la anchura del diente  $t$ , este último también calculado en el radio medio de la lámina. La figura 4.10 muestra el modelo equivalente en dos dimensiones resultante al considerar la máquina lisa y el efecto del ranurado representado a través del entrehierro efectivo y el coeficiente de Carter. Los valores del coeficiente de Carter y del entrehierro efectivo para el Radio medio aproximado, se muestran en la tabla 4.2.

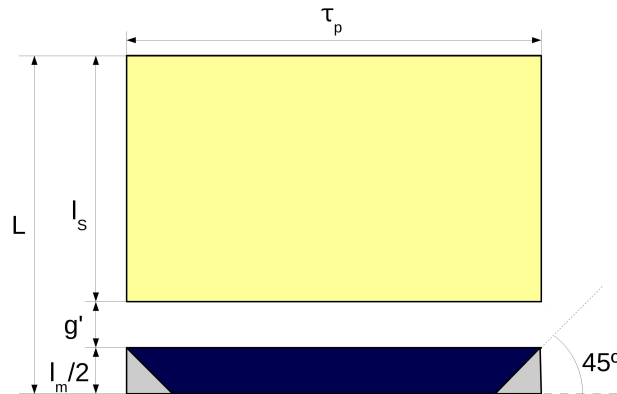


Figura 4.10: Máquina lisa obtenida al considerar el ranurado a través del entrehierro efectivo y el coeficiente de Carter.

Parámetro	Magnitud	Valor
$K_C$	Coficiente de Carter *	1.0674
$g'$	Entrehierro efectivo	5.3370 mm

\* Valores para el radio medio aproximado

Tabla 4.2: Coeficiente de Carter y entrehierro efectivo en el radio medio aproximado

### 4.1.2. Modelo con entreimán

De cara a resolver el problema de campo que se plantea en la geometría representada en la figura 4.10, el hecho de que los nervios del rotor tengan la forma que se muestra en dicha figura, resulta complicado de reflejar en las condiciones de contorno del problema. Por ello vamos a considerar la geometría equivalente mostrada en la figura 4.11 donde hemos reemplazado los nervios oblicuos por otro rectos a los que denominaremos entreimán; las condiciones que imponen esta nueva geometría sí que las podemos tener en cuenta de una forma directa en la resolución de la ecuación de Laplace.

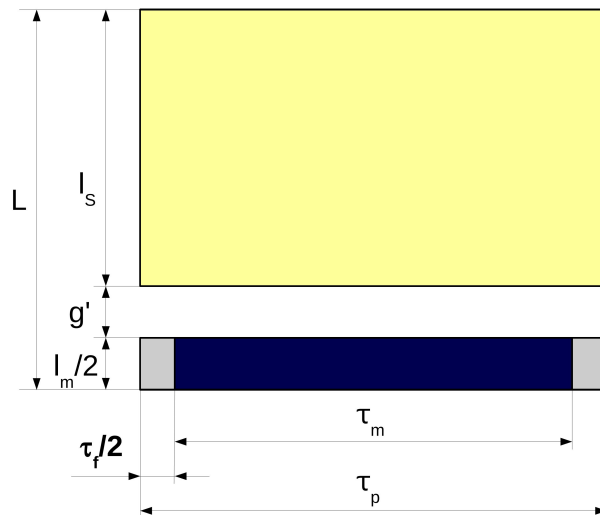


Figura 4.11: Geometría equivalente a la de la figura 4.10 con entreimán recto.

No obstante, podremos sustituir la geometría con nervios oblicuos por la geometría con nervios rectos siempre y cuando ambas geometrías sean equivalentes. Vamos a establecer esta equivalencia en términos del potencial escalar en la superficie del imán. Por lo tanto deberemos seleccionar aquella geometría con nervios rectos que origine la misma distribución de potencial magnético escalar en la superficie del imán que la geometría con nervios oblicuos, para lo que emplearemos el software Flux del Grupo Cedrat.

Flux es un conjunto de aplicaciones, basadas en elementos finitos, que permiten diseñar y analizar electromagnética y térmicamente un dispositivo, tanto en dos como en tres dimensiones. Con este software, se pueden realizar análisis estáticos, armónicos y transitorios.



Para el caso que nos ocupa, realizaremos un estudio en 3 dimensiones (empleando el paquete Flux3D) de los dos modelos que queremos estudiar: por un lado realizaremos el modelo del rotor con los nervios oblicuos, además de los imanes, estátor liso y entrehierro efectivo y por otro lado diseñaremos la geometría de entreimán recto, imanes, estátor liso y entrehierro efectivo. La figura (4.12) muestra la geometría obtenida para cada modelo, después de aplicar periodicidades y simetrías.

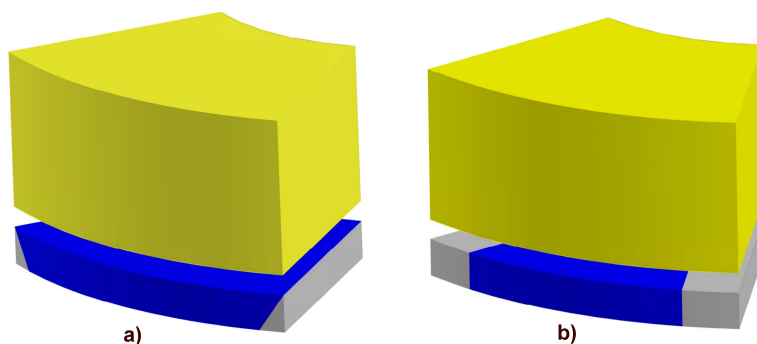


Figura 4.12: Geometría considerada en la simulación por elementos finitos: a) Modelo con nervios oblicuos. b) Modelo con nervios rectos (entreimán)

Una vez dibujada la geometría de cada máquina, asignamos las propiedades físicas a cada zona de la misma y realizamos el mallado; el mallado consiste en la subdivisión de un dominio (parte de la geometría) en subdominios, denominados elementos. Si el dominio es un volumen, los subdominios son elementos de volumen, si es una superficie, son elementos de superficie y si es una línea son elementos de línea. Flux dispone de herramientas para realizar las subdivisiones, denominadas “generadores de mallado”. En la siguiente figura (figura 4.13) se observa el mallado obtenido en el estátor (en amarillo), en el imán (en azul) y en los entreimanes (en gris claro). Se puede apreciar que en aquellas zonas donde las magnitudes varían más rápidamente o presentan un mayor interés (en la frontera estátor-entrehierro, por ejemplo) el mallado es más fino, siendo éste más grueso allí donde la variación es más lenta o no se desea realizar un estudio tan detallado (por ejemplo, en la parte superior del estátor).

Los cálculos basados en elementos finitos permiten aproximar las variables de estado (el potencial magnético escalar o vectorial, la temperatura, etc.) y las magnitudes derivadas (el campo magnético, la inducción, el campo eléctrico, etc.).

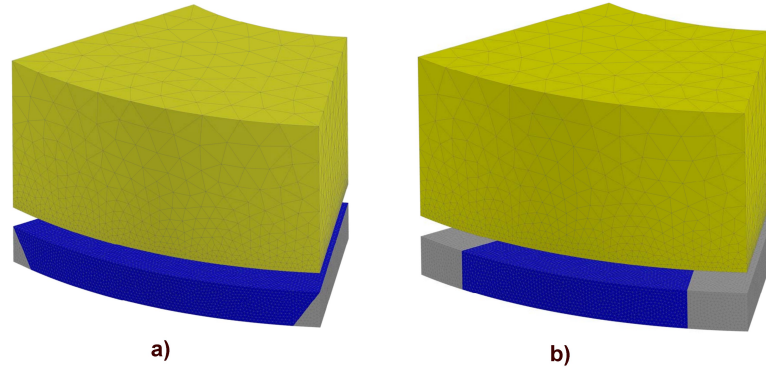


Figura 4.13: Elementos de superficie del mallado realizado: a) Modelo con nervios oblicuos. b) Modelo con nervios rectos (entreamán)

La calidad de la solución aproximada depende del mallado, esto es, del número y dimensiones de los elementos finitos y de las funciones de interpolación en cada elemento. Estas funciones pueden ser funciones polinómicas de 1<sup>er</sup> o de 2<sup>o</sup> orden. Con el mallado de 1<sup>er</sup> orden, los nodos se colocan en los vértices de la geometría, las funciones de interpolación son lineales (polinómicas de 1<sup>er</sup> orden), los potenciales se aproximan linealmente y las derivadas del campo son constantes. Con el mallado de 2<sup>o</sup> orden los nodos se insertan en los vértices y en las mitades de las aristas, las funciones de interpolación son cuadráticas (polinomios de 2<sup>o</sup> orden), los potenciales se aproximan cuadráticamente y las derivadas del campo se aproximan linealmente. Los resultados del mallado realizado en cada modelo se muestran en la tabla 4.3.

Modelo	Nervios oblicuos	Entreamán
Elementos no evaluados	0 %	0 %
Elementos de excelente calidad	61.98 %	61.78 %
Elementos de buena calidad	31.03 %	29.91 %
Elementos de calidad media	6.44 %	7.68 %
Elementos de pobre calidad	0.55 %	0.62 %
Número de nodos	704,342	673,847
Número de elementos de línea	2,413	1,796
Número de elementos de superficie	81,159	64,923
Número de elementos de volumen	494,613	489,943
Mallado de 2 <sup>o</sup> orden	Sí	Sí

Tabla 4.3: Información del mallado realizado

Para poder encontrar el modelo con entreimán equivalente al modelo con nervios oblicuos, variaremos, en el primer modelo, el espesor del entreimán desde 1 mm hasta 20 mm con incrementos de 1 mm. En todos los casos obtendremos el potencial escalar en la superficie del rotor para un conjunto de 256 puntos uniformemente distribuidos en el radio medio. La figura 4.14 muestra los valores de este potencial para cada caso estudiado tanto para la geometría original (marcado por la leyenda “nervios”) como para las diferentes geometrías con entreimán recto (las correspondientes leyendas hacen referencia al valor de dicho entreimán expresado en milímetros).

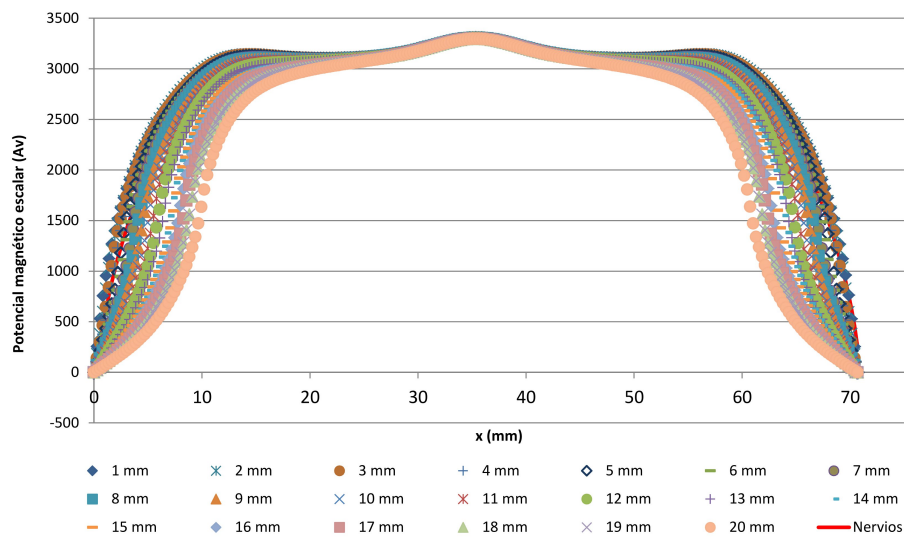


Figura 4.14: Distribución del potencial magnético escalar en la superficie del rotor para las diferentes geometrías estudiadas.

Con el fin de poder determinar qué geometría con entreimán recto es la que más se aproxima a la de nervios oblicuos, vamos a calcular la distancia  $L_2$ , tanto sin pesos como con pesos.

Sea una función  $g(x)$  y una aproximación de ella  $f(x)$ , ambas evaluadas en una serie de puntos; se define la distancia  $L_2$  entre la función y la aproximación como el sumatorio del cuadrado de la diferencia entre el valor de la función y de la aproximación en cada punto, extendiendo el sumatorio a todos los puntos, es decir:

$$\text{distancia } L_2 = \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)]^2 \quad (4.1)$$

Cuanto menor sea la distancia  $L_2$  más se aproxima  $f(x)$  a  $g(x)$ . Ya que nosotros queremos aproximar el imán oblicuo por el entreimán recto, calcularemos la distancia  $L_2$  entre los valores del potencial escalar en la superficie del imán para cada geometría con entreimán recto y para la geometría con nervios oblicuos. Ahora bien, la distancia  $L_2$  sólo tiene en cuenta la diferencia que existe entre la función y la aproximación, pero no el valor de la función. Podemos modificar la definición de la distancia  $L_2$  para que tenga en cuenta dónde se realiza la aproximación, introduciendo una función de peso que pondere la aproximación en ciertos valores o rangos de valores. Si la función de peso es el valor absoluto de la función que queremos aproximar,  $g(x)$ , estaremos dando mayor peso a la aproximación en valores elevados de la función y menor peso en valores pequeños de la función. De esta forma, definiremos la distancia  $L_2$  con pesos como el sumatorio del producto del valor absoluto de la función por el cuadrado de la diferencia entre el valor de la función y de la aproximación en cada punto, extendiendo el sumatorio a todos los puntos, es decir:

$$\text{distancia } L_2 \text{ con peso} = \sum_{i=1}^n \{g(x_i) \cdot [g(x_i) - f(x_i)]^2\} \quad (4.2)$$

En la tabla (4.4) se muestra, para cada valor del entreimán, la distancia  $L_2$  y la distancia  $L_2$  con peso entre los valores del potencial escalar en la superficie del imán para la geometría con nervios oblicuos y para cada geometría con entreimán recto. La figura (4.15) muestra gráficamente estos valores en escala logarítmica.

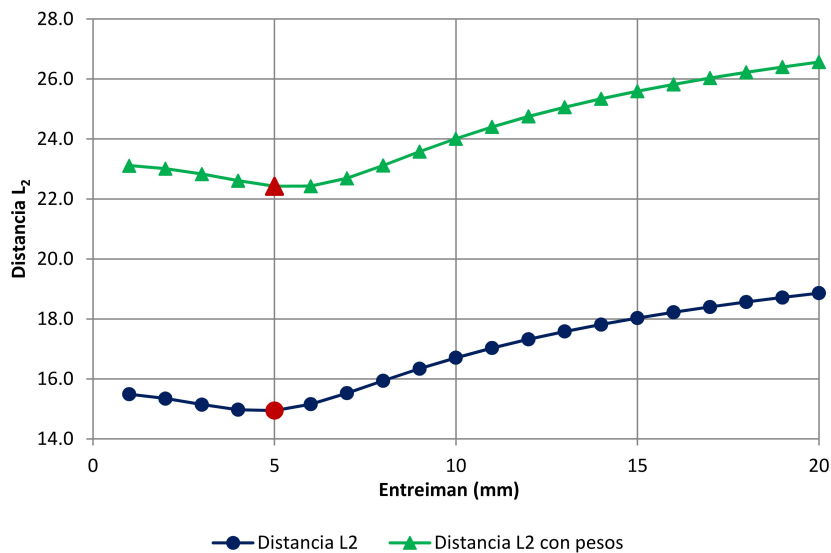
De la observación del conjunto de datos podemos concluir que la geometría con entreimán recto que mejor se aproxima a la geometría con nervios oblicuos es aquella cuyo entreimán es de 5 milímetros. La figura (4.16) muestra gráficamente la variación del potencial escalar en la superficie del imán para la geometría con nervios oblicuos y para la geometría con entreimán recto de 5 milímetros.

Una vez hallado el valor de este entreimán, ya estamos en condiciones de resolveremos la Ecuación de Laplace en el entrehierro de nuestra máquina.

## 4.2. Máquina lisa

Vamos a resolver el problema de hallar la expresión del potencial escalar en el entrehierro de una máquina rotativa lisa (no ranurada) de acuerdo a la

$\tau_f$ (mm)	Distancia $L_2$ $(Av)^2$	Distancia $L_2$ con pesos $(Av)^3$
1	$5.34E + 06$	$1.09E + 10$
2	$4.63E + 06$	$9.85E + 09$
3	$3.78E + 06$	$8.23E + 09$
4	$3.18E + 06$	$6.60E + 09$
<b>5</b>	<b><math>3.10E+06</math></b>	<b><math>5.48E+09</math></b>
6	$3.82E+06$	$5.51E+09$
7	$5.52E+06$	$7.16E+09$
8	$8.38E+06$	$1.10E+10$
9	$1.25E+07$	$1.74E+10$
10	$1.80E+07$	$2.68E+10$
11	$2.49E+07$	$3.96E+10$
12	$3.33E+07$	$5.61E+10$
13	$4.32E+07$	$7.66E+10$
14	$5.47E+07$	$1.01E+11$
15	$6.76E+07$	$1.30E+11$
16	$8.21E+07$	$1.64E+11$
17	$9.81E+07$	$2.02E+11$
18	$1.16E+08$	$2.45E+11$
19	$1.35E+08$	$2.93E+11$
20	$1.55E+08$	$3.45E+11$

Tabla 4.4: Distancia  $L_2$  y la distancia  $L_2$  con peso en función del entreiman.Figura 4.15: Distancia  $L_2$  y la distancia  $L_2$  con peso en función del valor del entreiman en escala logarítmica.

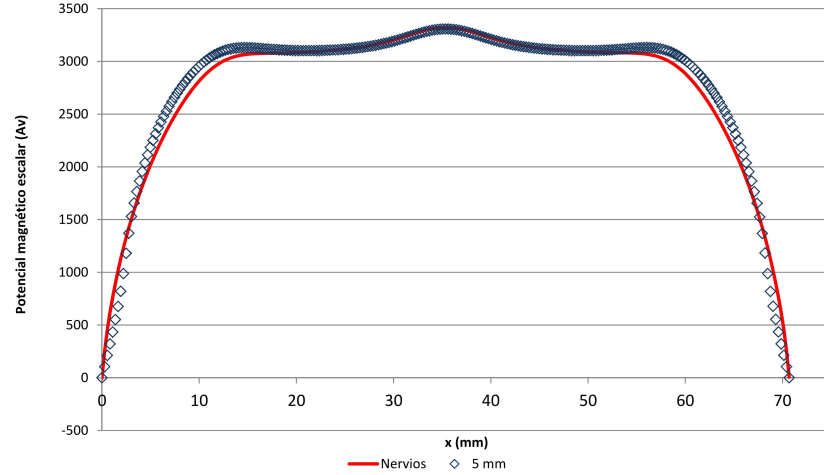


Figura 4.16: Variación del potencial escalar en la superficie del imán para la geometría con nervios oblicuos y para la geometría con entreimán recto de 5 milímetros.

geometría mostrada en la figura (4.11), donde los imanes están magnetizados axialmente, alternan en polaridad y entre dos imanes consecutivos existe una zona no magnética rectangular denominada *entreimán*. Podemos distinguir cuatro zonas, tal y como se muestra en la figura 4.17:

- entrehierro (emplearemos el subíndice o el superíndice  $G$  para referirnos a ella),
- imán (subíndice o superíndice  $I$ ),
- entreimán 1 (subíndice o superíndice  $E_1$ ), y
- entreimán 2 (subíndice o superíndice  $E_2$ ).

Las cuatro zonas (*entreimán 1*, *entreimán 2*, *imán* y *entrehierro*) se diferencian en el vector de magnetización: la zona imán posee un vector de magnetización de valor  $M$  dirigido hacia la parte positiva del eje  $y$  ( $\overline{M}_1 = +M\overline{j}$ ) mientras que las zonas entreimán y entrehierro tienen un vector de magnetización nulo. Cuando en el capítulo 2 definíamos el potencial magnético escalar (sección 2.3.6), obteníamos que éste obedecía a la ecuación de Poisson si la divergencia de la magnetización no era nula (ecuación 2.42) o la ecuación de Laplace en caso contrario (ecuación 2.43). Como el vector de magnetización o es nulo (regiones entreimán y entrehierro) o es constante (región imán), su divergencia es nula ( $\nabla \cdot \overline{M} = 0$ ), resultando que en las cuatro zonas de nuestra geometría, el potencial magnético escalar cumple la

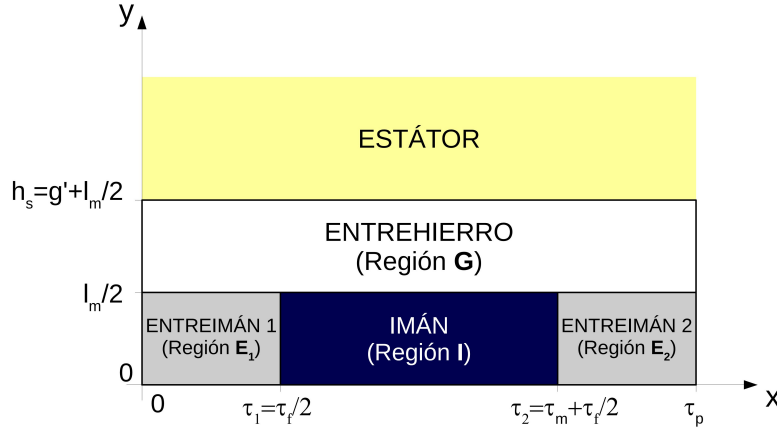


Figura 4.17: Problema de campo para la máquina lisa, donde podemos distinguir cuatro regiones: Imán ( $I$ ), entreimán 1 ( $E_1$ ), entreimán 2 ( $E_2$ ) y entrehierro ( $G$ )

ecuación de Laplace ( $\nabla^2 \varphi_m = 0$ ) cuya solución general en dos dimensiones y con coordenadas cartesianas viene dada por la ecuación (3.1), solución que reproducimos a continuación:

$$\begin{aligned} \varphi_m(x, y) = \sum_n (A_n \cos \beta_n x \cosh \beta_n y + B_n \cos \beta_n x \sinh \beta_n y + \\ + C_n \sin \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \sin \beta_n x \sinh \beta_n y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Vamos a particularizar esta ecuación para cada región de nuestro problema.

#### 4.2.1. Expresiones del potencial magnético escalar en las regiones de nuestro problema

##### ■ Región imán

Partiendo de la ecuación (4.3), la ecuación que describe el potencial escalar dentro del imán será:

$$\begin{aligned} \varphi_I(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^I \cos(\beta_n^I x) \cosh(\beta_n^I y) + B_n^I \cos(\beta_n^I x) \sinh(\beta_n^I y) + \\ + C_n^I \sin(\beta_n^I x) \cosh(\beta_n^I y) + D_n^I \sin(\beta_n^I x) \sinh(\beta_n^I y)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

siendo  $A_n^I$ ,  $B_n^I$ ,  $C_n^I$ ,  $D_n^I$  y  $\beta_n^I$  constantes a determinar.

- **Región entreimán 1**

Para la región entreimán 1, la expresión del potencial escalar será:

$$\begin{aligned} \varphi_{E_1}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{E_1} \cos(\beta_n^{E_1} x) \cosh(\beta_n^{E_1} y) + B_n^{E_1} \cos(\beta_n^{E_1} x) \sinh(\beta_n^{E_1} y) + \\ + C_n^{E_1} \sin(\beta_n^{E_1} x) \cosh(\beta_n^{E_1} y) + D_n^{E_1} \sin(\beta_n^{E_1} x) \sinh(\beta_n^{E_1} y)] \quad (4.5) \end{aligned}$$

siendo  $A_n^{E_1}$ ,  $B_n^{E_1}$ ,  $C_n^{E_1}$ ,  $D_n^{E_1}$  y  $\beta_n^{E_1}$  constantes a determinar.

- **Región entreimán 2**

Igualmente, la ecuación que describe el potencial escalar dentro del entreimán 2 será:

$$\begin{aligned} \varphi_{E_2}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{E_2} \cos(\beta_n^{E_2} x) \cosh(\beta_n^{E_2} y) + B_n^{E_2} \cos(\beta_n^{E_2} x) \sinh(\beta_n^{E_2} y) + \\ + C_n^{E_2} \sin(\beta_n^{E_2} x) \cosh(\beta_n^{E_2} y) + D_n^{E_2} \sin(\beta_n^{E_2} x) \sinh(\beta_n^{E_2} y)] \quad (4.6) \end{aligned}$$

siendo  $A_n^{E_2}$ ,  $B_n^{E_2}$ ,  $C_n^{E_2}$ ,  $D_n^{E_2}$  y  $\beta_n^{E_2}$  constantes a determinar.

- **Región entrehierro**

La expresión del potencial escalar en el entrehierro de la máquina vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \varphi_G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^G \cos(\beta_n^G x) \cosh(\beta_n^G y) + B_n^G \cos(\beta_n^G x) \sinh(\beta_n^G y) + \\ + C_n^G \sin(\beta_n^G x) \cosh(\beta_n^G y) + D_n^G \sin(\beta_n^G x) \sinh(\beta_n^G y)] \quad (4.7) \end{aligned}$$

siendo  $A_n^G$ ,  $B_n^G$ ,  $C_n^G$ ,  $D_n^G$  y  $\beta_n^G$  constantes a determinar.

#### 4.2.2. Condiciones de contorno máquina lisa

Las cuatro regiones de la figura 4.17 están delimitadas por cuatro rectas formando un área rectangular. Dos lados de ese rectángulo (el eje  $y$  y la recta  $x = \tau_p$ ) son líneas de periodicidad anti-cíclica a lo largo de las cuales la



componente tangencial del campo magnético ( $H_t$ ) es nula. La frontera inferior (el eje  $x$ ) es un plano de simetría en el que el campo magnético es normal siendo, por tanto, la componente tangencial nula ( $H_t$ ). Por último, en el límite superior (recta  $y = l_s$ ) hay un material ferromagnético con permeabilidad infinita, por lo que el campo incide normalmente y su componente tangencial es nula. Vamos a evaluar las condiciones de contorno para cada región.

### 1. Región entreimán 1

Las condiciones de la región entreimán 1 son las siguientes:

- La región entreimán 1 está delimitada por un plano de simetría del campo magnético (recta  $y = 0$ ). La componente tangencial del campo a lo largo de esta frontera es nula:

$$H_{E_1,t}(x, 0) = H_{E_1,x}(x, 0) = -\frac{\delta\varphi_{E_1}}{\delta x} \Big|_{y=0} = 0 \quad (0 \leq x \leq \tau_1)$$

con  $\tau_1 = \tau_f/2$  y de donde se deduce que:

$$A_n^{E_1} = 0 = C_n^{E_1}$$

que sustituido en la ecuación (4.5) resulta

$$\varphi_{E_1}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n^{E_1} \cos(\beta_n^{E_1} x) + D_n^{E_1} \sen(\beta_n^{E_1} x)] \sinh(\beta_n^{E_1} y) \quad (4.8)$$

- Otro de los límites de la región entreimán 1 es el eje  $y$ , eje de periodicidad anti-cíclica del campo magnético, a lo largo del cual la componente tangencial del campo es nula:

$$H_{E_1,t}(0, y) = H_{E_1,y}(0, y) = -\frac{\delta\varphi_{E_1}}{\delta y} \Big|_{x=0} = 0 \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

Esta condición se cumple si y solo si:

$$B_n^{E_1} = 0$$

quedando la ecuación (4.8):

$$\varphi_{E_1}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{E_1} \sen(\beta_n^{E_1} x) \sinh(\beta_n^{E_1} y) \quad (4.9)$$

### 2. Región entreimán 2

Las condiciones en la región entreimán 2 son las siguientes:

- El eje  $x$  es un eje de simetría, incidiendo el campo normalmente sobre dicha recta y siendo nula la componente tangente:

$$H_{E_2,t}(x, 0) = H_{E_2,x}(x, 0) = -\frac{\delta\varphi_{E_2}}{\delta x}\Big|_{y=0} = 0 \quad (\tau_2 \leq x \leq \tau_p)$$

siendo  $\tau_2 = \frac{\tau_f}{2} + \tau_m$ .

Esta condición implica que

$$A_n^{E_2} = 0 = C_n^{E_2}$$

reduciéndose la ecuación del potencial a:

$$\varphi_{E_2}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n^{E_2} \cos(\beta_n^{E_2} x) + D_n^{E_2} \sin(\beta_n^{E_2} x)] \sinh(\beta_n^{E_2} y) \quad (4.10)$$

- La componente tangencial del campo es cero a lo largo de la línea de periodicidad anti-cíclica definida por  $x = \tau_p$ :

$$H_{E_2,t}(\tau_p, y) = H_{E_2,y}(\tau_p, y) = -\frac{\delta\varphi_{E_2}}{\delta y}\Big|_{x=\tau_p} = 0 \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

Aplicando esta condición, obtenemos:

$$B_n^{E_2} = 0 \quad \text{y} \quad \beta_n^{E_2} \tau_p = n\pi$$

o

$$D_n^{E_2} = 0 \quad \text{y} \quad \beta_n^{E_2} \tau_p = (2n + 1) \pi/2$$

Denominando  $\beta_n = \beta_n^{E_2}$ , si sustituimos el primer conjunto de condiciones en la ecuación del potencial magnético escalar en la región entreimán 2 (4.10), éste queda de la forma:

$$\varphi_{E_2}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{E_2} \sin(\beta_n x) \sinh(\beta_n y) \quad (4.11)$$

con

$$\beta_n = \frac{n\pi}{\tau_p} \quad (4.12)$$

### 3. Región imán

Una de las condiciones de contorno en la región imán es la siguiente:

- La componente tangente del campo es nula, a lo largo de la recta  $y = 0$ , por ser éste un eje de simetría:

$$H_{I,t}(x, 0) = H_{I,x}(x, 0) = -\frac{\delta\varphi_I}{\delta x}\Big|_{y=0} = 0 \quad (\tau_1 \leq x \leq \tau_2)$$

Esta condición es satisfecha si

$$A_n^I = 0 = C_n^I$$

Sustituyéndola en la ecuación del potencial en el entreimán (4.4) resulta:

$$\varphi_I(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n^I \cos(\beta_n^I x) + D_n^I \sin(\beta_n^I x)] \sinh(\beta_n^I y) \quad (4.13)$$

#### 4. Región entrehierro

Esta región está delimitada por dos rectas que son ejes de periodicidad anti-cíclica y por otra que forma frontera con un material de permeabilidad infinita.

- La recta  $x = 0$  es un eje de periodicidad anti-cíclica del campo magnético, siendo, por lo tanto, nula su componente tangencial:

$$H_{G,t}(0, y) = H_{G,y}(0, y) = -\frac{\delta\varphi_G}{\delta y}\Big|_{x=0} = 0 \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

obteniendo:

$$A_n^G = 0 = B_n^G$$

quedando la expresión del potencial de la forma:

$$\varphi_G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\beta_n^G x) [C_n^G \cosh(\beta_n^G y) + D_n^G \sinh(\beta_n^G y)] \quad (4.14)$$

- Igualmente, la recta  $x = \tau_p$  también es otro eje de periodicidad anti-cíclica del campo, cumpliéndose:

$$H_{G,t}(\tau_p, y) = H_{G,y}(\tau_p, y) = -\frac{\delta\varphi_G}{\delta y}\Big|_{x=\tau_p} = 0 \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

de donde se deduce:

$$\beta_n^G = \frac{n\pi}{\tau_p}$$

la cual habíamos denotado por  $\beta_n$ . La expresión del potencial en el entrehierro será:

$$\varphi_G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_n x) [C_n^G \cosh(\beta_n y) + D_n^G \text{senh}(\beta_n y)] \quad (4.15)$$

- Debido a la permeabilidad infinita del estátor, el campo incide perpendicularmente en  $y = l_s$ :

$$H_{G,t}(x, h_s) = H_{G,x}(x, h_s) = -\frac{\delta\varphi_G}{\delta x} \Big|_{y=h_s} = 0 \quad (0 \leq x \leq \tau_p/2)$$

Esta condición es satisfecha si

$$C_n^G = -D_n^G \text{tgh}(\beta_n h_s)$$

Si sustituimos en la anterior expresión (4.15) obtenemos:

$$\varphi_G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^G \text{sen}(\beta_n x) [\text{senh}(\beta_n y) - \text{tgh}(\beta_n h_s) \cosh(\beta_n y)]$$

que, operando, resulta:

$$\varphi_G(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} D_n^G \text{sen}(\beta_n x) \frac{\text{senh}[\beta_n (h_s - y)]}{\cosh(\beta_n h_s)} \quad (4.16)$$

## 5. Frontera Entreimán 1-Imán

En esta frontera se cumple la continuidad de la componente tangencial del campo y la normal de la inducción.

- Continuidad de la componente tangencial del campo magnético en la recta  $x = \tau_1$ :

$$H_{E_1,t}(\tau_1, y) = H_{I,t}(\tau_1, y) \Rightarrow H_{E_1,y}(\tau_1, y) = H_{I,y}(\tau_1, y) \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

Es decir

$$-\frac{\delta\varphi_{E_1}}{\delta y} \Big|_{x=\tau_1} = -\frac{\delta\varphi_I}{\delta y} \Big|_{x=\tau_1} \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

obteniendo

$$D_n^{E_1} \text{sen}(\beta_n^{E_1} \tau_1) \beta_n^{E_1} = [B_n^I \cos(\beta_n^I \tau_1) + D_n^I \text{sen}(\beta_n^I \tau_1)] \beta_n^I \quad (4.17)$$

- Continuidad de la componente normal de la inducción en la recta  $x = \tau_1$ :

$$B_{E_1,n}(\tau_1, y) = B_{I,n}(\tau_1, y) \Rightarrow B_{E_1,x}(\tau_1, y) = B_{I,x}(\tau_1, y) \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

que equivale a

$$\mu_0 H_{E_1,x}(\tau_1, y) = \mu_0 H_{I,x}(\tau_1, y) \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

y en función del potencial, podemos escribir

$$-\left. \frac{\delta\varphi_{E_1}}{\delta x} \right|_{x=\tau_1} = -\left. \frac{\delta\varphi_I}{\delta x} \right|_{x=\tau_1} \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

obteniendo:

$$D_n^{E_1} \cos(\beta_n^{E_1} \tau_1) \beta_n^{E_1} = [-B_n^I \text{sen}(\beta_n^I \tau_1) + D_n^I \cos(\beta_n^I \tau_1)] \beta_n^I \quad (4.18)$$

## 6. Frontera Imán-Entreimán 2

Las condiciones a cumplir en la frontera imán-entreimán 2 son equivalentes a las de la frontera entreimán 1-imán: continuidad de la componente tangencial del campo y de la componente normal de la inducción.

- Continuidad de la componente tangencial del campo magnético en la recta  $x = \tau_2$ :

$$H_{E_2,t}(\tau_2, y) = H_{I,t}(\tau_2, y) \Rightarrow H_{E_2,y}(\tau_2, y) = H_{I,y}(\tau_2, y) \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

o

$$-\left. \frac{\delta\varphi_{E_2}}{\delta y} \right|_{x=\tau_2} = -\left. \frac{\delta\varphi_I}{\delta y} \right|_{x=\tau_2} \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

resultando:

$$D_n^{E_2} \text{sen}(\beta_n \tau_2) \beta_n = [B_n^I \cos(\beta_n^I \tau_2) + D_n^I \text{sen}(\beta_n^I \tau_2)] \beta_n^I \quad (4.19)$$

- Continuidad de la componente normal de la inducción en la recta  $x = \tau_2$ :

$$B_{E_2,n}(\tau_2, y) = B_{I,n}(\tau_2, y) \Rightarrow B_{E_2,x}(\tau_2, y) = B_{I,x}(\tau_2, y) \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

se escribe como

$$\mu_0 H_{E_2,x}(\tau_2, y) = \mu_0 H_{I,x}(\tau_2, y) \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

o lo que es lo mismo

$$-\frac{\delta\varphi_{E_2}}{\delta x}\Big|_{x=\tau_2} = -\frac{\delta\varphi_I}{\delta x}\Big|_{x=\tau_2} \quad (0 \leq y \leq l_m/2)$$

obteniéndose:

$$D_n^{E_2} \cos(\beta_n \tau_2) \beta_n = [-B_n^I \sin(\beta_n^I \tau_2) + D_n^I \cos(\beta_n^I \tau_2)] \beta_n^I \quad (4.20)$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (4.17), (4.18), (4.19) y (4.20) obtenemos:

$$\beta_n^{E_1} = \beta_n^I = \beta_n,$$

$$B_n^I = 0,$$

$$D_n^{E_1} = D_n^I$$

y

$$D_n^{E_2} = D_n^I$$

que al sustituirlas en las ecuaciones (4.9), (4.11) y (4.13) nos proporcionan las nuevas expresiones del potencial magnético escalar en la región entreimán 1

$$\varphi_{E_1}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^I \sin(\beta_n x) \sinh(\beta_n y) \quad (4.21)$$

en la región entreimán 2

$$\varphi_{E_2}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^I \sin(\beta_n x) \sinh(\beta_n y) \quad (4.22)$$

y en la región iman:

$$\varphi_I(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^I \sin(\beta_n x) \sinh(\beta_n y) \quad (4.23)$$

Observando las expresiones anteriores, vemos que las soluciones para las tres regiones son idénticas, pudiendo emplear una expresión general para estas regiones, a la que denominaremos  $\varphi_M$ , de la forma

$$\varphi_M(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^M \sin(\beta_n x) \sinh(\beta_n y) \quad (4.24)$$

siendo válida para  $0 \leq x \leq \tau_p$  y  $0 \leq y \leq l_m/2$ . Las expresiones de las componentes del campo, también serán idénticas para las tres zonas. A partir de (2.44) obtenemos:

$$H_{M,x}(x, y) = -\frac{\partial \varphi_M(x, y)}{\partial x}$$

para la componente  $x$  y a partir de (2.45):

$$H_{M,y}(x, y) = -\frac{\partial \varphi_M(x, y)}{\partial y}$$

para la componente  $y$ , con  $0 \leq x \leq \tau_p$  y  $0 \leq y \leq l_m/2$ .

Una vez conocido el campo y aplicando la expresión (2.8), podemos obtener la inducción. Dado que la magnetización en la dirección  $x$  es nula, la componente en este eje de la inducción será idéntica en las tres zonas. Así y partiendo de (2.51):

$$B_{M,x}(x, y) = \mu_0 H_{M,x}(x, y)$$

donde  $0 \leq x \leq \tau_p$  y  $0 \leq y \leq l_m/2$ .

Por su parte, la componente  $y$  será diferente en cada zona, debido a que la magnetización en esta dirección no es uniforme en dichas regiones (la zona entre-imán 1 y entre-imán 2 tienen un vector de magnetización nulo, mientras que la zona imán posee un vector de magnetización de valor  $M$  dirigido hacia la parte positiva del eje  $y$ ). Empleando (2.52) en las regiones entre-imán y (2.50) en la región imán, resulta:

$$B_{M,y}(x, y) = \begin{cases} \mu_0 H_{M,y}(x, y) & 0 \leq x \leq \tau_1 \\ \mu_0 [H_{M,y}(x, y) + M] & \tau_1 \leq x \leq \tau_2 \\ \mu_0 H_{M,y}(x, y) & \tau_2 \leq x \leq \tau_p \end{cases} \quad 0 \leq y \leq l_m/2 \quad (4.25)$$

Para evitarnos el tener que particularizar el valor de la magnetización en cada zona, vamos a definir una función que represente la variación de la magnetización para el rango  $0 \leq x \leq \tau_p$  y  $0 \leq y \leq l_m/2$ . A esta función la llamaremos *perfil de magnetización* y la denotaremos por  $M_y$ . La figura 4.18 muestra esta función. Introduciendo el perfil de magnetización en la ecuación (4.25) obtenemos:

$$B_{M,y}(x, y) = \mu_0 [H_{M,y}(x, y) + M_y(x)] \quad (4.26)$$

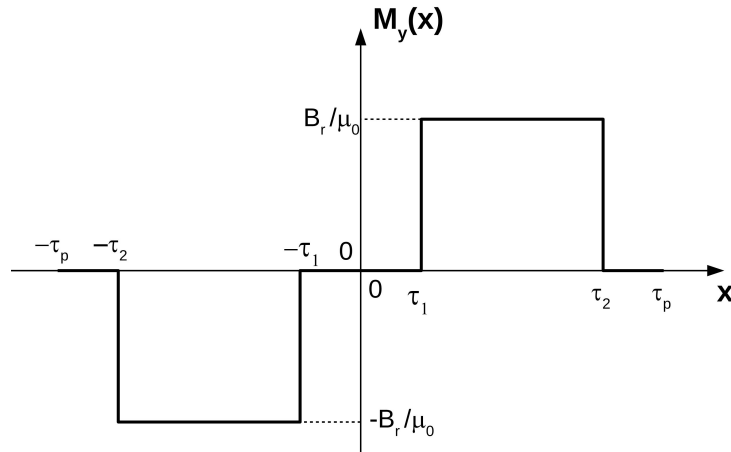


Figura 4.18: Perfil de magnetización

para  $0 \leq x \leq \tau_p$  y  $0 \leq y \leq l_m/2$ .

Con la introducción de la función perfil de magnetización conseguimos:

- a) reducir las zonas de estudio a dos zonas (figura 4.19):
- entrehierro (emplearemos el subíndice o el superíndice  $G$  para referirnos a ella), e
  - imán (subíndice o superíndice  $M$ ).

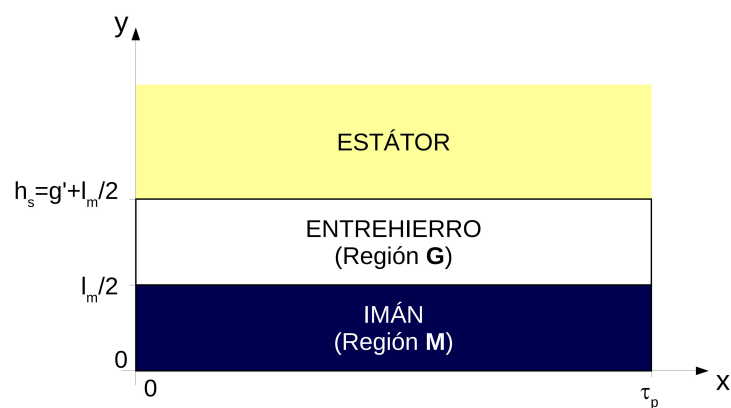


Figura 4.19: Geometría con dos zonas

- b) poder trabajar de una forma más genérica y compacta. El perfil de magnetización, al ser una función periódica, puede



desarrollarse en serie de Fourier, de la forma siguiente:

$$M_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{yn} \cdot \text{sen}(\beta_n x) \quad (4.27)$$

con

$$K_{yn} = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi} \frac{B_r}{\mu_0} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{sen}\left(\frac{n\pi\alpha_m}{2}\right) & n \text{ impar} \end{cases} \quad (4.28)$$

siendo  $B_r$  la inducción remanente del imán y  $\alpha_m$  la denominada *fracción de imán*, la cual se define como el cociente entre el paso de imán y el paso de polo:

$$\alpha_m = \frac{\tau_m}{\tau_p}$$

La fracción de imán es una cantidad entre 0 y 1. Si no existe entreimán, la fracción de imán vale la unidad, reduciéndose los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier del perfil de magnetización a:

$$K_{yn} = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi} \frac{B_r}{\mu_0} & n \text{ impar} \end{cases} \quad (4.29)$$

## 7. Frontera imán - entrehierro

Las condiciones en esta frontera de separación son idénticas a las vistas previamente: conservación de la componente tangencial del campo y de la componente normal de la inducción.

- Conservación de la componente tangencial del campo en la recta  $y = l_m/2$ :

$$\begin{aligned} H_{M,t}(x, l_m/2) &= H_{G,t}(x, l_m/2) \Rightarrow \\ \Rightarrow H_{M,x}(x, l_m/2) &= H_{G,x}(x, l_m/2) \quad (0 \leq x \leq \tau_p) \end{aligned}$$

que equivale a

$$-\frac{\delta\varphi_M}{\delta x} \Big|_{y=l_m/2} = -\frac{\delta\varphi_G}{\delta x} \Big|_{y=l_m/2} \quad (0 \leq x \leq \tau_p)$$

De esta relación obtenemos:

$$D_n^M = -D_n^G \frac{\text{senh}(\beta_n g)}{\cosh(\beta_n l_s) \cdot \text{senh}(\beta_n l_m/2)} \quad (4.30)$$

- Conservación de la componente normal de la inducción en la recta  $y = l_m/2$ :

$$\begin{aligned} B_{M,n}(x, l_m/2) &= B_{G,n}(x, l_m/2) \Rightarrow \\ \Rightarrow B_{M,y}(x, l_m/2) &= B_{G,y}(x, l_m/2) \quad (0 \leq x \leq \tau_p) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión 4.26 :

$$\mu_0 [H_{M,y}(x, l_m/2) + M_y(x)] = \mu_0 H_{G,y}(x, l_m/2) \quad (0 \leq x \leq \tau_p)$$

es decir

$$\mu_0 \left[ -\frac{\delta\varphi_M}{\delta y} \Big|_{y=l_m/2} + M_y(x) \right] = -\mu_0 \frac{\delta\varphi_G}{\delta y} \Big|_{y=l_m/2} \quad (0 \leq x \leq \tau_p)$$

cumpléndose

$$D_n^M \cosh(\beta_n l_m/2) - \frac{K_{yn}}{\beta_n} = D_n^G \frac{\cosh(\beta_n g)}{\cosh(\beta_n h_s)} \quad (4.31)$$

Si resolvemos el sistema formado por 4.30 y 4.31 obtenemos la expresión de la constante  $D_n^G$ :

$$D_n^G = -\frac{K_{yn}}{\beta_n} \cdot \frac{\sinh(\beta_n l_m/2)}{\operatorname{tgh}(\beta_n h_s)} \quad (4.32)$$

y de  $D_n^M$ :

$$D_n^M = \frac{K_{yn}}{\beta_n} \cdot \frac{\sinh(\beta_n g)}{\sinh(\beta_n h_s)} \quad (4.33)$$

### 4.2.3. Expresiones del potencial, del campo y de la inducción

Una vez aplicadas las condiciones de contorno y calculadas las constantes, podemos obtener las expresiones del potencial y, a partir de éste, las del campo, empleando las relaciones (2.44) y (2.45), y las de la inducción en cualquier punto de la geometría, mediante (2.49) y (2.50) o (2.51) y (2.52), según se trate de la región imán o la región entrehierro. Las expresiones en cada región son:

- **Región imán**

- *Potencial magnético escalar*

Sustituyendo  $D_n^M$ , expresión (4.33), en (4.24) obtenemos:

$$\varphi_M(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{yn}}{\beta_n} \cdot \frac{\sinh(\beta_n g)}{\sinh(\beta_n h_s)} \cdot \sin(\beta_n x) \cdot \sinh(\beta_n y) \quad (4.34)$$

- *Componentes del campo magnético*

$$H_{M,x}(x, y) = -\frac{\partial \varphi_M}{\partial x} \Rightarrow$$

$$H_{M,x}(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} K_{yn} \cdot \frac{\sinh(\beta_n g)}{\sinh(\beta_n h_s)} \cdot \cos(\beta_n x) \cdot \sinh(\beta_n y) \quad (4.35)$$

$$H_{M,y}(x, y) = -\frac{\partial \varphi_M}{\partial y} \Rightarrow$$

$$H_{M,y}(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} K_{yn} \cdot \frac{\sinh(\beta_n g)}{\sinh(\beta_n h_s)} \cdot \sin(\beta_n x) \cdot \cosh(\beta_n y) \quad (4.36)$$

- *Componentes de la inducción*

$$B_{M,x}(x, y) = \mu_0 H_{M,x} \Rightarrow$$

$$B_{M,x}(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 K_{yn} \cdot \frac{\sinh(\beta_n g)}{\sinh(\beta_n h_s)} \cdot \cos(\beta_n x) \cdot \sinh(\beta_n y) \quad (4.37)$$

$$B_{M,y}(x, y) = \mu_0 (H_{M,x} + M_y) \Rightarrow$$

$$B_{M,y}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 K_{yn} \cdot \left[ 1 - \frac{\sinh(\beta_n g)}{\sinh(\beta_n h_s)} \cdot \cosh(\beta_n y) \right] \cdot \sin(\beta_n x) \quad (4.38)$$

### ■ Región entrehierro

- *Potencial magnético escalar*

Sustituyendo  $D_n^G$ , expresión (4.33), en (4.16) obtenemos:

$$\varphi_G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{yn}}{\beta_n} \cdot \frac{\sinh(\beta_n l_m/2)}{\sinh(\beta_n h_s)} \cdot \sin(\beta_n x) \cdot \sinh[\beta_n (h_s - y)] \quad (4.39)$$

- Componentes del campo magnético

$$H_{G,x}(x, y) = -\frac{\partial \varphi_G}{\partial x} \Rightarrow$$

$$H_{G,x}(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} K_{yn} \cdot \frac{\sinh(\beta_n l_m / 2)}{\sinh(\beta_n h_s)} \cdot \cos(\beta_n x) \cdot \sinh[\beta_n (h_s - y)] \quad (4.40)$$

$$H_{G,y}(x, y) = -\frac{\partial \varphi_G}{\partial y} \Rightarrow$$

$$H_{G,y}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{yn} \cdot \frac{\sinh(\beta_n l_m / 2)}{\sinh(\beta_n h_s)} \cdot \sin(\beta_n x) \cdot \cosh[\beta_n (h_s - y)] \quad (4.41)$$

- Componentes de la inducción

$$B_{G,x}(x, y) = \mu_0 H_{G,x} \Rightarrow$$

$$B_{G,x}(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 K_{yn} \cdot \frac{\sinh(\beta_n l_m / 2)}{\sinh(\beta_n h_s)} \cdot \cos(\beta_n x) \cdot \sinh[\beta_n (h_s - y)] \quad (4.42)$$

$$B_{G,y}(x, y) = \mu_0 H_{G,y} \Rightarrow$$

$$B_{G,y}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 K_{yn} \cdot \frac{\sinh(\beta_n l_m / 2)}{\sinh(\beta_n h_s)} \cdot \sin(\beta_n x) \cdot \cosh[\beta_n (h_s - y)] \quad (4.43)$$

Con los valores numéricos de los parámetros indicados en la tabla 4.1 y aplicando las expresiones 4.27, 4.28 o 4.29 y desde 4.34 hasta 4.43, realizamos un programa en Matlab para su resolución. En las siguientes figuras, se muestran la variación del potencial escalar (figura 4.20), y de la componente  $x$  (figura 4.21) e  $y$  de la inducción (figura 4.22) obtenidas con la programación realizada en un polo para un entreimán de 5 milímetros.

En cada una de las figuras, se muestra la variación tridimensional de la magnitud representada (en la parte izquierda) y la proyección de esta variación en el plano  $xy$  (en la parte derecha).

En la gráfica siguiente (figura 4.23), se muestra la variación del potencial escalar sobre la superficie del imán para diferentes valores del entreimán (30,

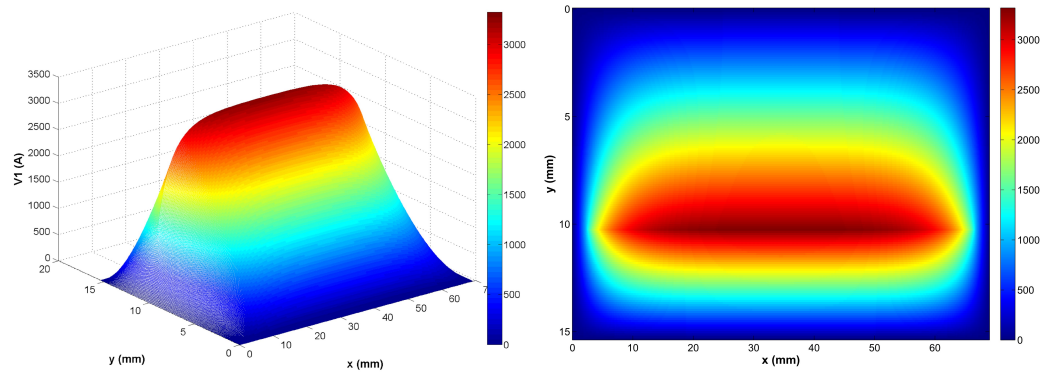
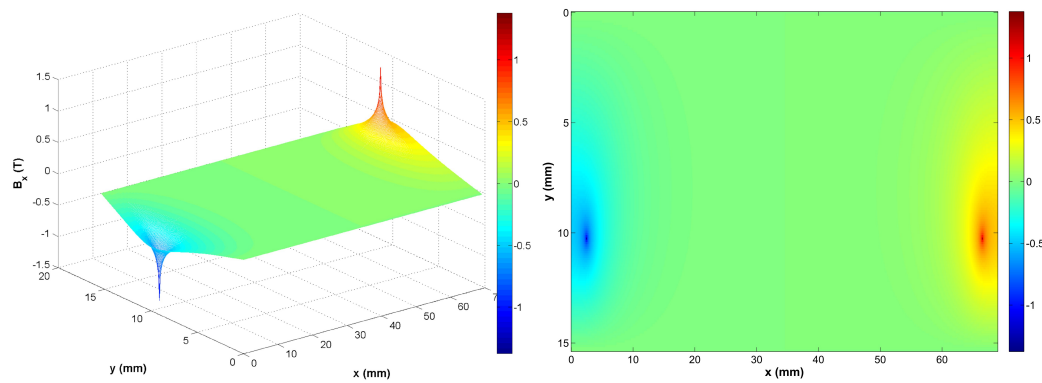
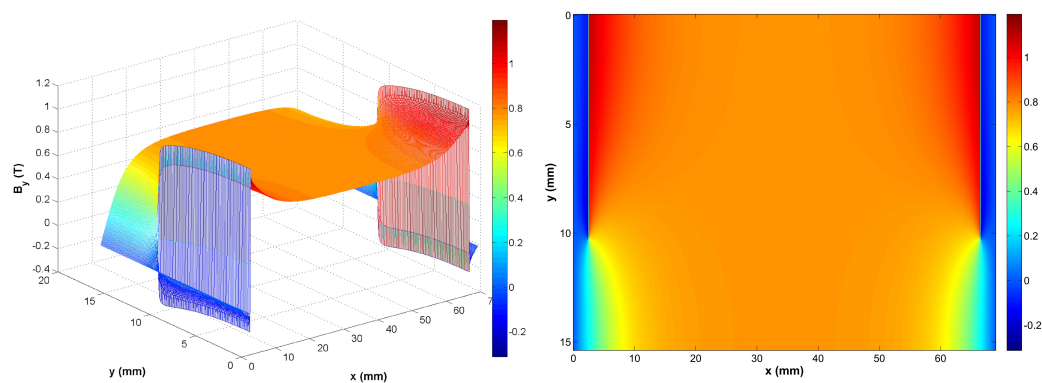


Figura 4.20: Potencial magnético escalar (entreimán: 5 mm)

Figura 4.21: Componente  $x$  de la inducción (entreimán: 5 mm)Figura 4.22: Componente  $y$  de la inducción (entreimán: 5 mm)

25, 20, 15, 10, 5 y 0 milímetros), donde hemos mantenido constante el paso de polo (69 mm) y, por lo tanto, hemos ido aumentando el paso de imán (39, 44, 49, 54, 59, 64 y 69 milímetros).

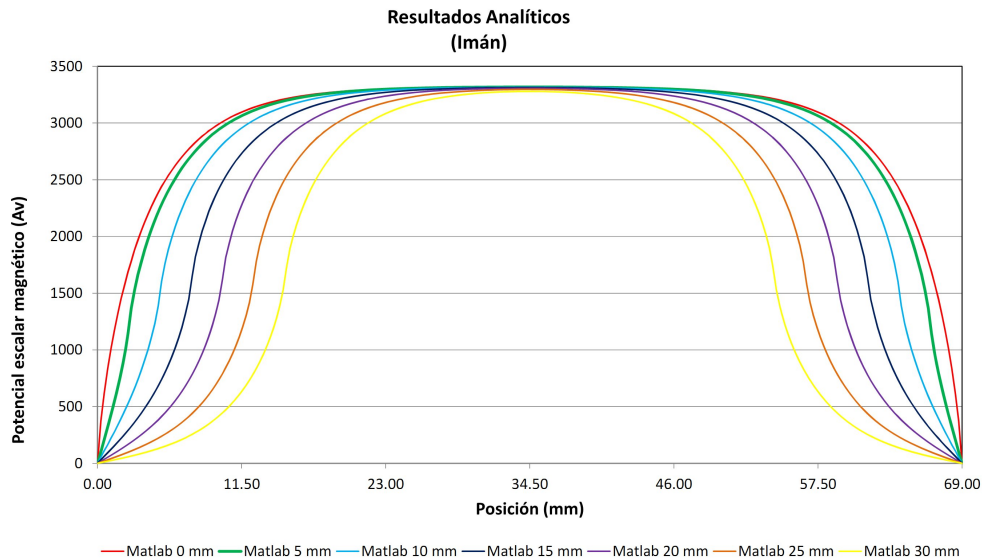


Figura 4.23: Variación del potencial escalar en la superficie del imán para diferentes valores del entreimán.

En la tabla siguiente (tabla 4.5) se muestra, en función del entreimán, el valor máximo absoluto del potencial escalar (al que denominaremos  $V_o$ ), el porcentaje de variación con respecto al valor para entreimán nulo y la desviación estándar del potencial escalar.

A la vista de los resultados mostrados, observamos como una magnetización positiva origina un potencial escalar positivo; además, dada la alternancia de polos que existe en el rotor de la máquina, también habrá una alternancia en el signo del potencial escalar en cada polo. Como consecuencia de este cambio de signo, debe existir una transición entre ambos valores, estando condicionada dicha transición por el tamaño del entreimán. Al variar el entreimán, observamos:

- A medida que disminuimos el entreimán, la transición es más rápida.
- El valor máximo absoluto apenas varía cuando modificamos el entreimán (una variación ligeramente superior al 1% para un entreimán de 30 mm con respecto al valor para entreimán nulo)

Entreimán (mm)	Máximo absoluto		Desviación estándar	
	$V_0$ (Av)	Diferencia (%)	Valor (Av)	Diferencia (%)
0	3319.08	0.00 %	671.93	0.00 %
5	3318.52	-0.02 %	801.34	19.26 %
10	3316.71	-0.07 %	966.32	43.81 %
15	3313.34	-0.17 %	1109.44	65.11 %
20	3307.32	-0.35 %	1221.83	81.84 %
25	3296.93	-0.67 %	1300.52	93.55 %
30	3279.59	-1.19 %	1344.13	100.04 %

Tabla 4.5: Máximo absoluto y desviación estándar del potencial escalar en la superficie del imán para diferentes valores del entreimán

- La desviación estándar sí que experimenta variaciones importantes (próxima al 94 % para el entreimán de 30 mm con respecto al entreimán nulo). Este comportamiento es una consecuencia directa de mantener constante el paso de polo y tener que disminuir la anchura del imán al aumentar el entreimán.

En las gráficas siguientes mostramos la variación de la componente x de la inducción (figura 4.24) y de la componente y de la inducción (figura 4.25) sobre la superficie del imán para diferentes valores del entreimán (30, 25, 20, 15, 10, 5 y 0 milímetros) manteniendo constante el paso de polo.

De la observación de las figuras que muestran las componentes de la inducción podemos destacar:

- Sobre la componente x:
  - Esta componente de la inducción es nula excepto en las proximidades de la frontera entre el imán y los entreimanes, presentando sendos picos en cada una de dichas fronteras.
  - A medida que disminuye el entreimán, el valor máximo es mayor, debido al mayor gradiente de potencial que existe en esa dirección (el valor máximo para entreimán nulo es superior al doble del correspondiente a un entreimán de 30 mm).
  - Según nos movemos hacia valores de x crecientes, la primera frontera supone un incremento del potencial escalar mientras que la segunda es un decremento del mismo. Debido a ello, las componentes x de la inducción en cada frontera serán negativa y positiva, respectivamente.

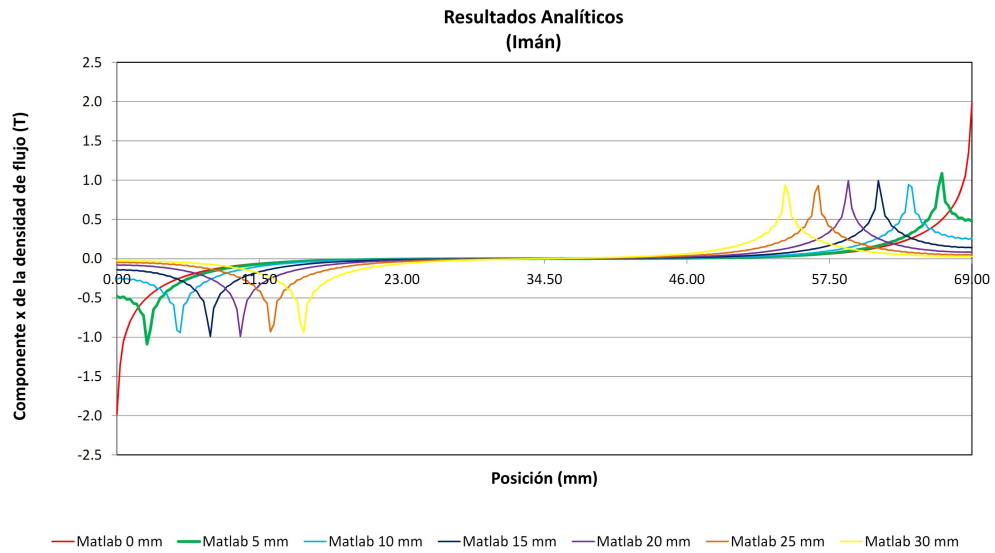


Figura 4.24: Variación de la componente x de la inducción en la superficie del imán para diferentes valores del entreimán.

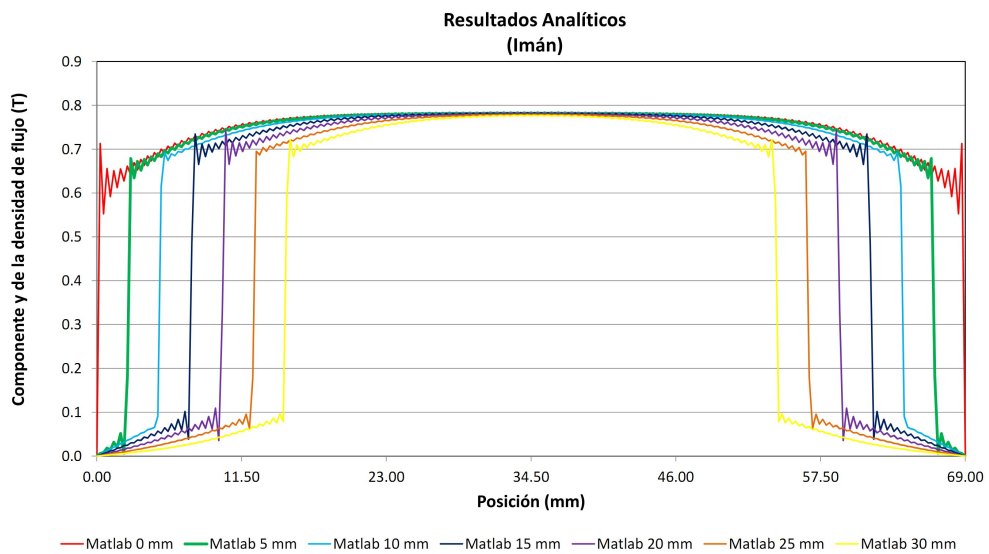


Figura 4.25: Variación de la componente y de la inducción en la superficie del imán para diferentes valores del entreimán.



- Respecto a la componente  $y$ :
  - La componente  $y$  de la inducción es positiva para una magnetización positiva, tendiendo a cero cuando nos acercamos a los extremos del polo.
  - Cuando estamos encima del imán, el valor de esta componente adquiere valores próximos al máximo.
  - Cuando estamos en la región entreimán, el valor de esta componente tiende a cero, valor que toma en los extremos del polo.
  - En las fronteras imán-entreimán se observan oscilaciones en el valor de esta componente. Este comportamiento es debido al fenómeno Gibbs que aparece como consecuencia de realizar un desarrollo en serie de Fourier de una función con discontinuidades.
  - El valor máximo absoluto apenas varía cuando modificamos el entreimán (una variación inferior al 1 % para un entreimán de 30 mm con respecto al valor para entreimán nulo)

Debido a que consideramos la permeabilidad del estátor infinita, el potencial escalar y la componente  $x$  de la inducción en la superficie del estátor son nulas, siendo no nula la componente  $y$ . La figura (4.26) muestra la variación de esta componente en la superficie del estátor para diferentes valores del entreimán, manteniendo constante el paso de polo.

A la vista de los resultados mostrados, observamos como la componente  $y$  de la inducción es positiva para una magnetización positiva; como consecuencia de la alternancia de polos y al igual que sucedía en el potencial escalar, también habrá una alternancia en el signo de esta componente, produciéndose una transición entre los valores positivos y los negativos. Esta transición se produce en el entreimán, condicionando el tamaño de éste su forma. La tabla siguiente (tabla 4.6) muestra, en función del entreimán, el valor máximo absoluto de la componente  $y$  de la inducción (al que denominaremos  $B_y^{max}$ ), el porcentaje de variación con respecto al valor para entreimán nulo y la desviación estándar de esta componente.

Cuando variamos el entreimán, observamos:

- A medida que disminuimos el entreimán, la transición es más rápida.
- El valor máximo absoluto apenas varía cuando modificamos el entreimán (una variación ligeramente inferior al 1.5 % para un entreimán de 30 mm con respecto al valor para entreimán nulo)

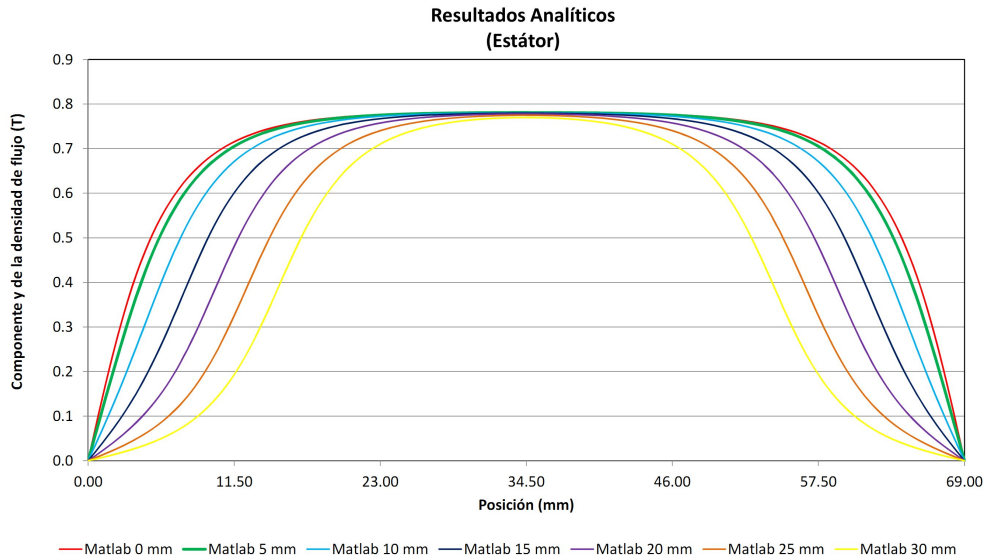


Figura 4.26: Variación de la componente y de la inducción en la superficie del estátor para diferentes valores del entreimán.

Entreimán (mm)	Máximo absoluto		Desviación estándar	
	$B_y^{max}$ (T)	Diferencia (%)	Valor (T)	Diferencia (%)
0	0.781	0.00 %	0.185	0.00 %
5	0.781	-0.02 %	0.196	6.00 %
10	0.781	-0.08 %	0.222	19.84 %
15	0.780	-0.21 %	0.250	35.14 %
20	0.778	-0.44 %	0.275	48.32 %
25	0.775	-0.82 %	0.292	57.88 %
30	0.770	-1.47 %	0.302	63.21 %

Tabla 4.6: Máximo absoluto y desviación estándar de la componente y de la inducción en la superficie del estátor para diferentes valores del entreimán

- La desviación estándar sí que experimenta variaciones importantes (próxima al 64 % para el entreimán de 30 mm con respecto al entreimán nulo). Este comportamiento es una consecuencia directa de mantener constante el paso de polo y tener que disminuir la anchura del imán al aumentar el entreimán.

#### 4.2.4. Simulación por elementos finitos

Con el fin de validar el procedimiento seguido y los resultados hallados, vamos a obtener los valores del potencial escalar y de las componentes de la inducción en la superficie del imán y del estátor que nos proporciona el programa Flux3D. Para ello, y continuando con el modelo con entreimán que habíamos desarrollado en el apartado (4.1.2), procedimos a calcularlos las magnitudes señaladas para los mismos valores del entreimán que hemos considerado en la modelización analítica (0, 5, 10, 15, 20, 25 y 30 milímetros) para, posteriormente, realizar la comparación de los resultados proporcionados por ambos procedimientos (denominaremos "Matlab" a los resultados obtenidos con la formulación propuesta y "Flux" a los proporcionados por la simulación por elementos finitos). Comparamos los siguientes resultados:

- Variación del potencial escalar en la superficie del imán en función de la posición, para diferentes valores del entreimán (0, 5, 10, 15, 20, 25 y 30 milímetros) (figura 4.27).

Podemos observar como, para todos los valores del entreimán, los resultados del potencial escalar en la superficie del imán proporcionados por nuestra formulación son prácticamente iguales a los obtenidos mediante la simulación por elementos finitos en las zonas ascendentes y descendentes, siendo algo superiores en la zona central.

La tabla (4.7) muestra, para cada valor del entreimán, el máximo absoluto en ambos modelos y el porcentaje de desviación del resultado analítico respecto al de elementos finitos. Podemos observar como esa desviación es ligeramente superior al 2 % en la peor situación (entreimán de 30 mm), siendo en cualquier caso un error pequeño. Para el modelo con entreimán de 5 mm, que corresponde al modelo equivalente a la geometría con nervios oblicuos, esta desviación es inferior al 2 %. En esta tabla aparecen resaltados los valores correspondientes al entreimán de 5 mm, ya que este valor de entreimán corresponde al modelo equivalente a la geometría con nervios oblicuos.

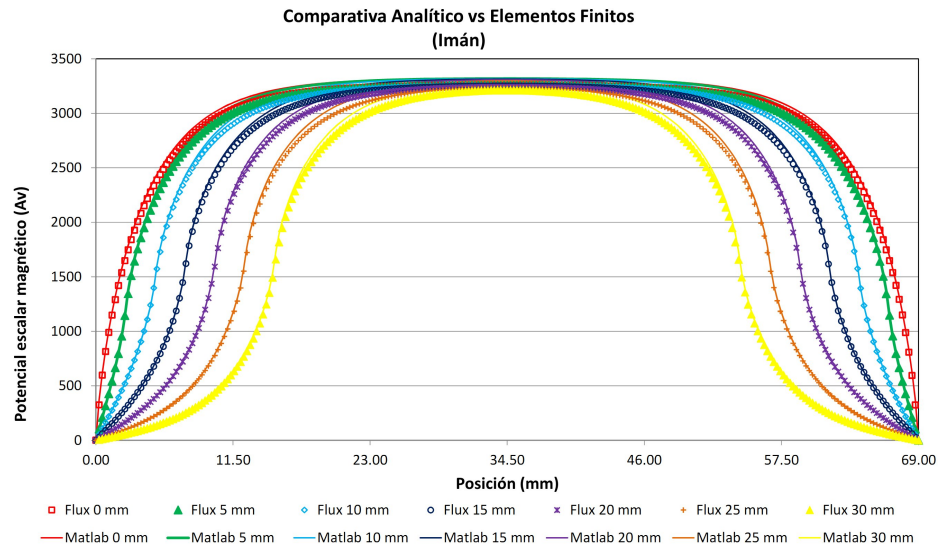


Figura 4.27: Comparativa de los resultados obtenidos del potencial escalar en la superficie del imán en función del entreimán

<i>Entreimán</i> (mm)	<i>Analítico</i> (Av)	<i>Elementos Finitos</i> (Av)	<i>Desviación</i> (%)
0	3319.08	3256.77	1.91 %
<b>5</b>	<b>3318.52</b>	<b>3256.20</b>	<b>1.91 %</b>
10	3316.71	3254.21	1.92 %
15	3313.34	3250.26	1.94 %
20	3307.32	3243.29	1.97 %
25	3296.93	3231.36	2.03 %
30	3279.59	3211.21	2.13 %

Tabla 4.7: Valores máximos del potencial magnético escalar en la superficie del imán y porcentaje de desviación

El principal motivo de esta diferencia de valores reside en que, en la formulación propuesta, consideramos que flujo de dispersión del imán en la dirección  $x$  es nulo, no siendo cierto en el modelo con elementos finitos. La existencia de un flujo de dispersión provoca que los valores del potencial magnético sean inferiores a los que se obtendrían si no existiera dicho flujo.

La finalidad que perseguíamos al resolver la Ecuación de Laplace en el entrehierro de nuestra máquina, era conocer el valor del potencial magnético en la superficie del rotor para poder aplicar la técnica de los subdominios, parámetro que denotábamos por  $V_o$ . A la vista de las gráficas obtenidas para esta magnitud (figura 4.27) y si tuviéramos que fijar un valor constante en toda la superficie del imán, elegiríamos el valor máximo del potencial magnético escalar. Este valor, para el caso de entreimán de 5 mm, es de 3318.52 Av.

No obstante y tal como indica la gráfica correspondiente, aunque este valor se mantiene más o menos constante en la zona central del imán, tiende a cero al aproximarnos a los extremos. Por lo tanto, el suponer que el potencial en la superficie del imán tiene un valor constante no es una buena aproximación, siendo necesario modelizar de alguna forma el comportamiento real de esta magnitud. Este aspecto le abordaremos en el siguiente apartado.

- Variación de la componente  $x$  de la inducción en la superficie del imán en función de la posición, para diferentes valores del entreimán (0, 5, 10, 15, 20, 25 y 30 milímetros) (figura 4.28).

La componente  $x$  de la inducción en la superficie del imán muestra un excelente acuerdo entre los valores proporcionados por nuestra formulación con aquellos suministrados por el software Flux3D, para todas las posiciones y para cualquier valor del entreimán.

- Variación de la componente  $y$  de la inducción en la superficie del imán en función de la posición, para diferentes valores del entreimán (0, 5, 10, 15, 20, 25 y 30 milímetros) (figura 4.29).

Las diferencias existentes entre los resultados obtenidos mediante la formulación propuesta y los proporcionado por elementos finitos son debidos a las oscilaciones provocadas por el fenómeno Gibbs, obsevándose como, cuando nos alejamos de la frontera entre el imán y el entreimán, ambas formulaciones muestran un buen acuerdo. En la medida en que

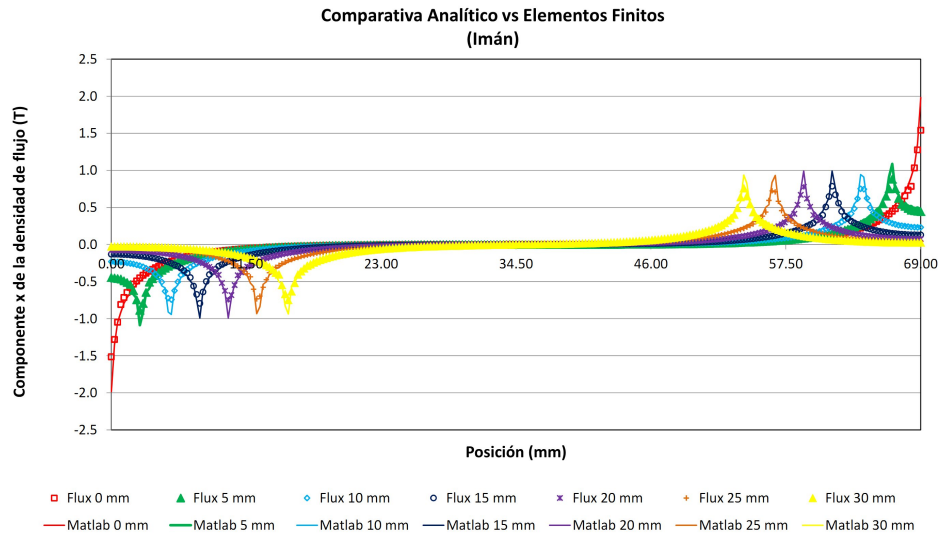


Figura 4.28: Comparativa de los resultados obtenidos de la componente  $x$  de la inducción en la superficie del imán en función del entreimán

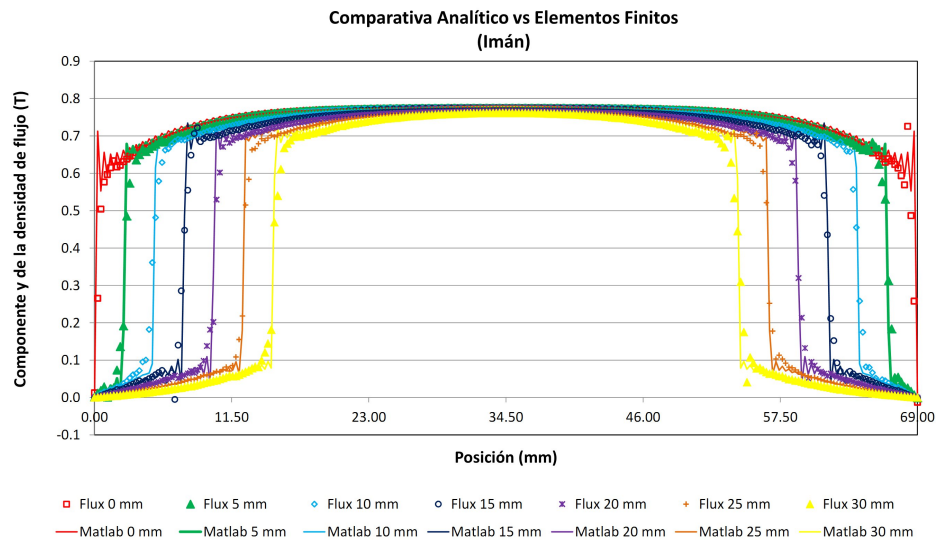


Figura 4.29: Comparativa de los resultados obtenidos de la componente  $y$  de la inducción en la superficie del imán en función del entreimán

seamos capaces de disminuir o eliminar este fenómeno, mejoraremos los resultados obtenidos.

- Variación del potencial escalar en la superficie del estátor en función de la posición, para diferentes valores del entreimán (0, 5, 10, 15, 20, 25 y 30 milímetros) (figura 4.30).

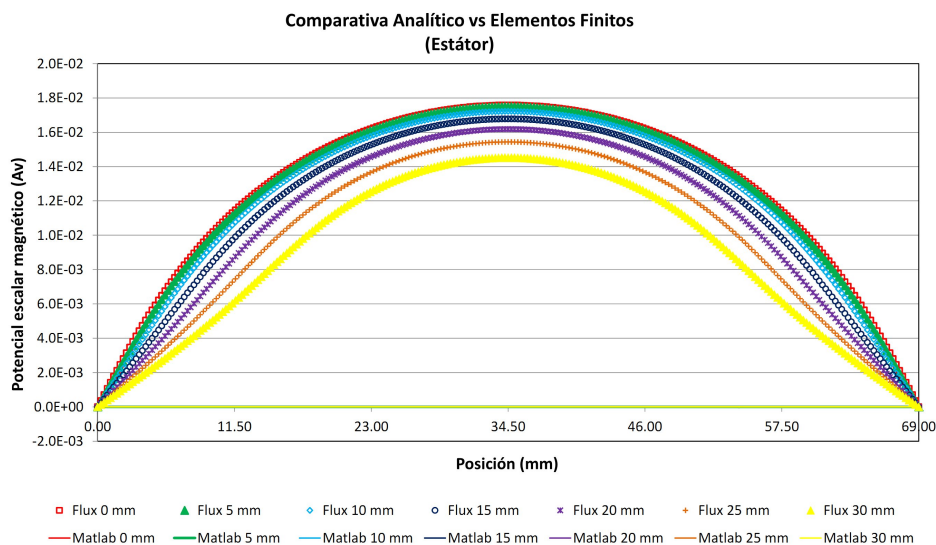


Figura 4.30: Comparativa de los resultados obtenidos del potencial escalar en la superficie del estátor en función del entreimán

En la formulación propuesta consideramos la superficie del estátor una superficie equipotencial con un valor nulo del potencial magnético escalar. Los resultados por elementos finitos muestran que esta superficie no es equipotencial, si no que existe una pequeña variación del potencial a lo largo de ella; no obstante, en comparación con los valores obtenidos en la superficie del imán, los del estátor son del orden de  $10^5$  veces inferiores a los del rotor (3318.52 Av en el imán frente a  $1.76 \cdot 10^{-2}$  Av en el estátor).

- Variación de la componente  $x$  de la inducción en la superficie del estátor en función de la posición, para diferentes valores del entreimán (0, 5, 10, 15, 20, 25 y 30 milímetros) (figura 4.31).

Se aprecian diferencias entre los valores calculados con nuestra formulación de los hallados por la simulación con elementos finitos. Mientras que en la primera la componente  $x$  de la inducción es nula en la superficie del estátor como consecuencia de considerar al estátor una región

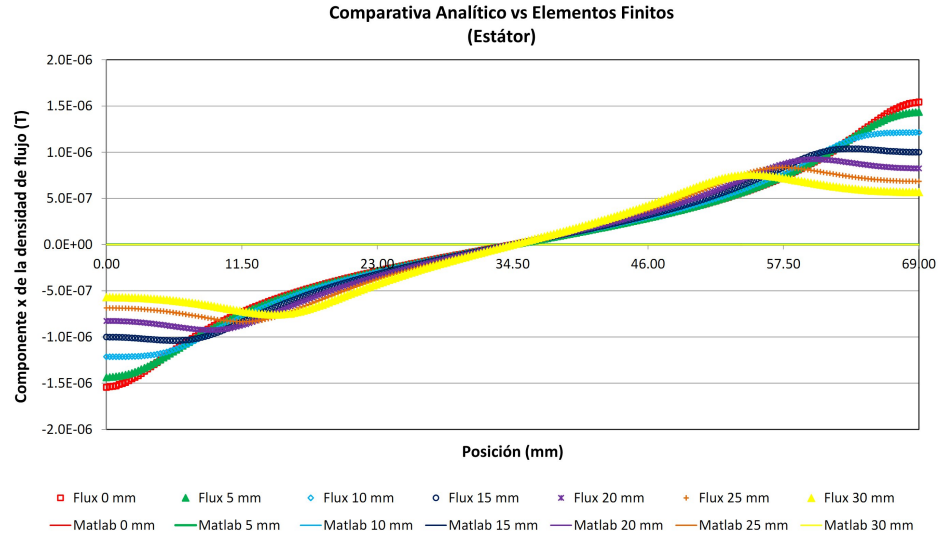


Figura 4.31: Comparativa de los resultados para la componente  $x$  de la inducción en la superficie del estator en función del entreimán

con permeabilidad infinita, en la segunda se observa que existe una variación en el valor de esta componente de la inducción. No obstante, el orden de magnitud de esta componente es la millonésima parte de la componente en la dirección  $y$  siendo, por lo tanto, pequeño el error que cometemos con nuestra formulación.

- Variación de la componente  $y$  de la inducción en la superficie del estator en función de la posición, para diferentes valores del entreimán (0, 5, 10, 15, 20, 25 y 30 milímetros) (figura 4.32).

A diferencia de la componente  $x$ , la componente  $y$  de la inducción muestra un buen acuerdo entre los valores proporcionados por nuestra formulación con aquellos suministrados por el software Flux3D, para todas las posiciones y para cualquier valor del entreimán. La tabla 4.8 muestra, para cada valor del entreimán, el valor máximo en cada formulación y el porcentaje de diferencia existente entre ambas.

Podemos observar como los valores obtenidos por ambas formulaciones son próximos entre sí, siendo algo inferiores en la formulación por elementos finitos, disminución originada por la existencia del flujo de dispersión.

Tal y como indicábamos en el punto anterior, el orden de magnitud de



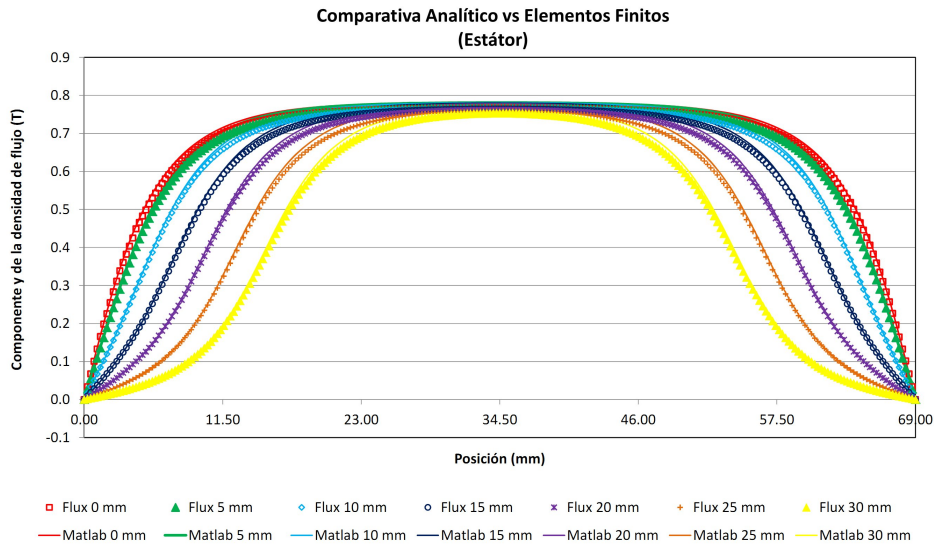


Figura 4.32: Comparativa de los resultados para la componente  $y$  de la inducción en la superficie del estator en función del entreimán

<i>Entreimán</i> (mm)	<i>Analítico</i> (T)	<i>Elementos Finitos</i> (T)	<i>Desviación</i> (%)
0	0.78	0.77	1.95 %
5	0.78	0.77	1.95 %
10	0.78	0.77	1.96 %
15	0.78	0.76	1.99 %
20	0.78	0.76	2.03 %
25	0.77	0.76	2.10 %
30	0.77	0.75	2.23 %

Tabla 4.8: Valores máximos de la componente  $y$  de la inducción en la superficie del estator y porcentaje de desviación

esta componente es  $10^6$  veces superior a la del eje  $x$ , siendo este componente  $y$  la que influirá decisivamente en los cálculos que realicemos a partir de la inducción, como lo será, por ejemplo, el flujo abarcado por las bobinas que se encuentren en el estátor.

A la vista de la comparación realizada, podemos afirmar que existe un buen acuerdo entre nuestra formulación y el software de simulación por elementos finitos Flux3D, quedando, a nuestro juicio, validada la formulación realizada.

## 4.3. Imán con banda de desmagnetización

### 4.3.1. Introducción

La aplicación del método de los subdominios a nuestra máquina, requiere el conocimiento del valor del potencial magnético escalar en el contorno de la geometría que vayamos a estudiar y, en particular, en la superficie del rotor. En los ejemplos mostrados en el capítulo 3 y en el apéndice C, este potencial tenía un valor constante en toda la superficie, que igualábamos a la unidad o denotábamos por  $V_0$ .

En este apartado vamos a enfrentarnos al problema de expresar matemáticamente el potencial escalar en la superficie del rotor, cuyo comportamiento analizábamos en el apartado anterior y que se mostraba gráficamente en la figura 4.27. Los resultados mostrados en esta figura nos indican que, aunque el potencial magnético mantiene un valor constante en la zona central del imán, este valor disminuye según nos vamos acercando a los extremos del imán, sigue disminuyendo según nos vamos moviendo por el entreimán, siendo cero en el centro del entreimán, posición que corresponde con el extremo del polo. Este comportamiento se origina por la alternancia de polos, que implica una alternancia en el signo del potencial magnético originado por el imán, siendo necesaria una transición del valor positivo que posee éste en un polo al valor negativo que tendrá en el polo siguiente. Dicha transición es más rápida cuanto menor es el valor del entreimán, pero nunca es instantánea, ni para el caso de entreimán nulo.

Por lo dicho anteriormente, no podemos suponer que el potencial en la superficie del imán sea constante y que el potencial cambia de forma instantánea del valor positivo al valor nulo cuando estemos sobre el entreimán. En la figura 4.33 se muestra, para un entreimán de 5 mm, la variación del potencial escalar en la superficie del rotor para un polo proporcionada por

el método analítico (Matlab), por elementos finitos (Flux3D) y si suponemos un cambio instantáneo (Salto). Se observa cómo existen diferencias en los extremos del polo entre las dos primeras y la tercera. Lógicamente, estas diferencias en el potencial escalar implicarán también diferencias en las componentes de la inducción y en los valores del flujo que calculemos a partir de dicha inducción.

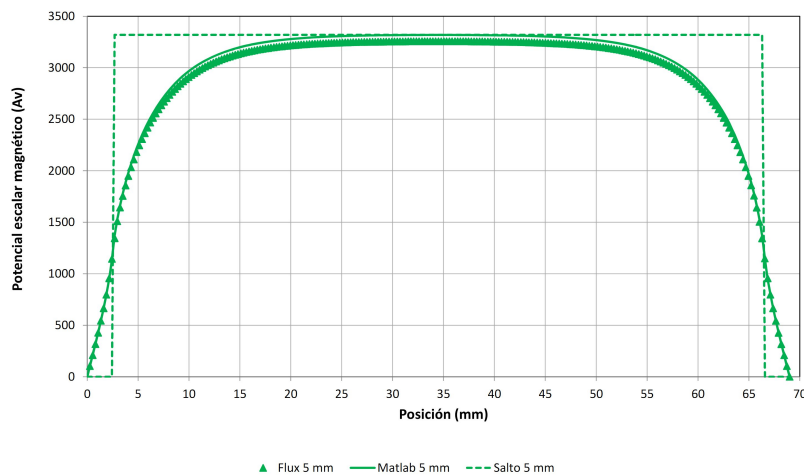


Figura 4.33: Variación del potencial escalar en la superficie del imán (entreimán nulo)

El objetivo que nos proponemos en este apartado es el modelizar matemáticamente el comportamiento del potencial escalar en la superficie del rotor. Para representar la variación en el potencial escalar mostrada en la gráfica anterior, no vamos a distinguir entre imán y entreimán, si no que vamos a considerar todo el polo como un conjunto el cual posee una zona en la proximidad de la frontera de separación entre un polo y el siguiente, en la cual el potencial disminuye desde el valor que posee en la región central hasta cero. A esta zona la denominaremos *banda de desmagnetización*. En la figura 4.34 se muestra la geometría antigua (sin banda de desmagnetización y con entreimán) y la nueva geometría (con banda de desmagnetización), siendo  $a$  la anchura de la banda.

Para expresar la variación del potencial escalar en la banda, emplearemos la tangente hiperbólica, al ser ésta una función continua y que varía entre  $-1$  y  $+1$ . En la figura 4.35 se muestra la función  $y = \tanh(c \cdot x)$  para diferentes valores del parámetro  $c$  y variando la abcisa desde  $-20$  hasta  $20$ .

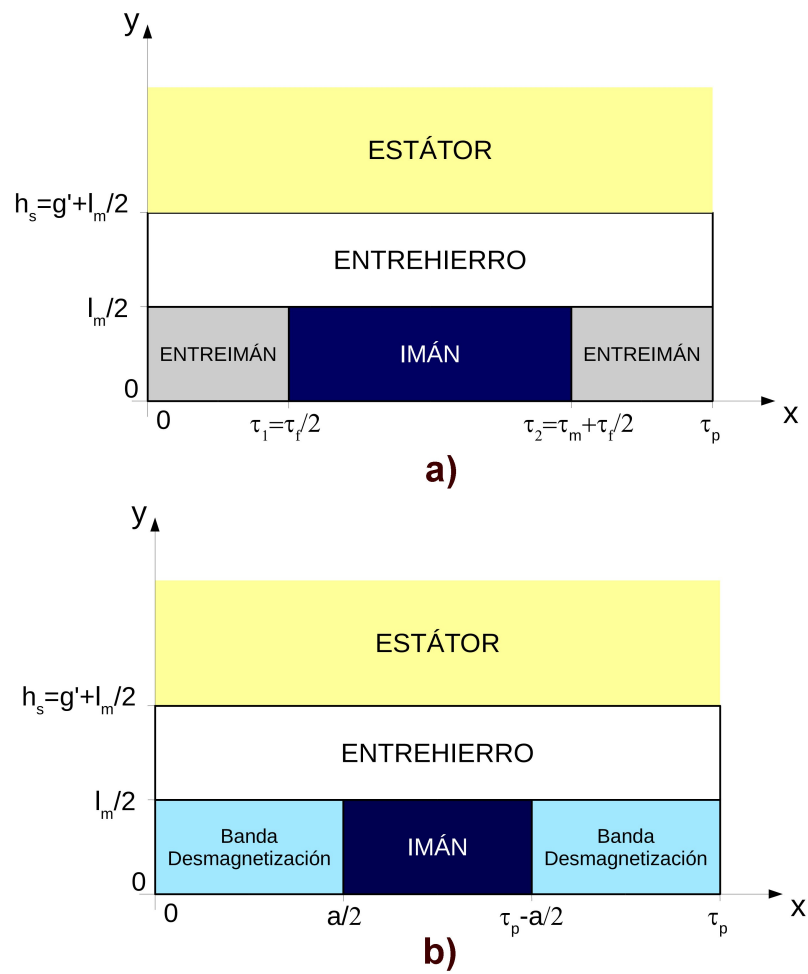


Figura 4.34: Geometría: a) Sin banda de desmagnetización. b) Con banda de desmagnetización

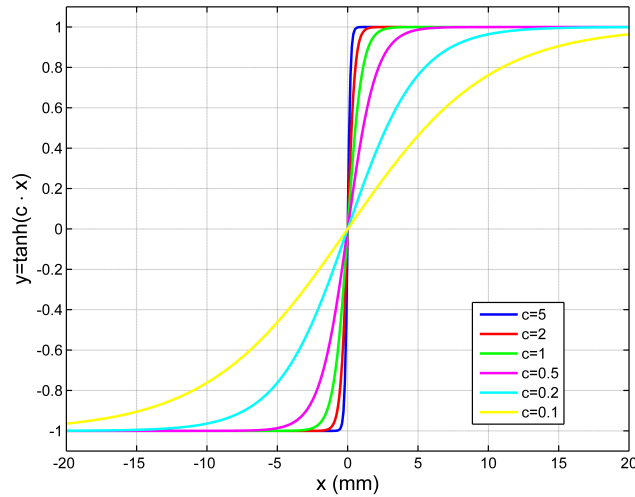


Figura 4.35: Función  $y = \tanh(c \cdot x)$  para diferentes valores del parámetro  $c$

Como el parámetro  $c$  nos permite controlar la pendiente de la tangente hiperbólica y el parámetro  $a$  la anchura de la banda de desmagnetización, necesitamos hallar un valor de  $c$  y de otro de  $a$  que originen una variación del potencial escalar en la superficie del rotor que se ajuste a la que obtenemos mediante la formulación propuesta y mediante elementos finitos, tal y como mostrábamos en la figura 4.33. Para ello, vamos a calcular la expresión del potencial magnético escalar en la superficie del rotor para un polo con banda de desmagnetización, empleando el método de los subdominios.

### 4.3.2. Cálculo del potencial originado por un polo con bandas de desmagnetización

Consideremos la geometría de nuestro problema, que se muestra en la parte superior de la figura 4.36. Esta geometría está formada por un estátor liso y un rotor compuesto por un número determinado de polos; cada polo posee un imán en la zona central y sendas bandas de desmagnetización que separan unos imanes de otros, los cuales alternan en polaridad. La anchura de la banda de desmagnetización la hemos representado por  $a$ , la longitud del imán completo es el paso de imán ( $\tau_m$ ), mientras que la longitud del imán eliminando las bandas de desmagnetización viene dada por el paso de imán efectivo ( $\tau_{m_{eff}}$ ). Debido a las simetrías que existen, podemos reducir el problema al cálculo del potencial en la zona recuadrada, en la cual se distinguen dos regiones como se muestra en la zona ampliada de la figura 4.36.

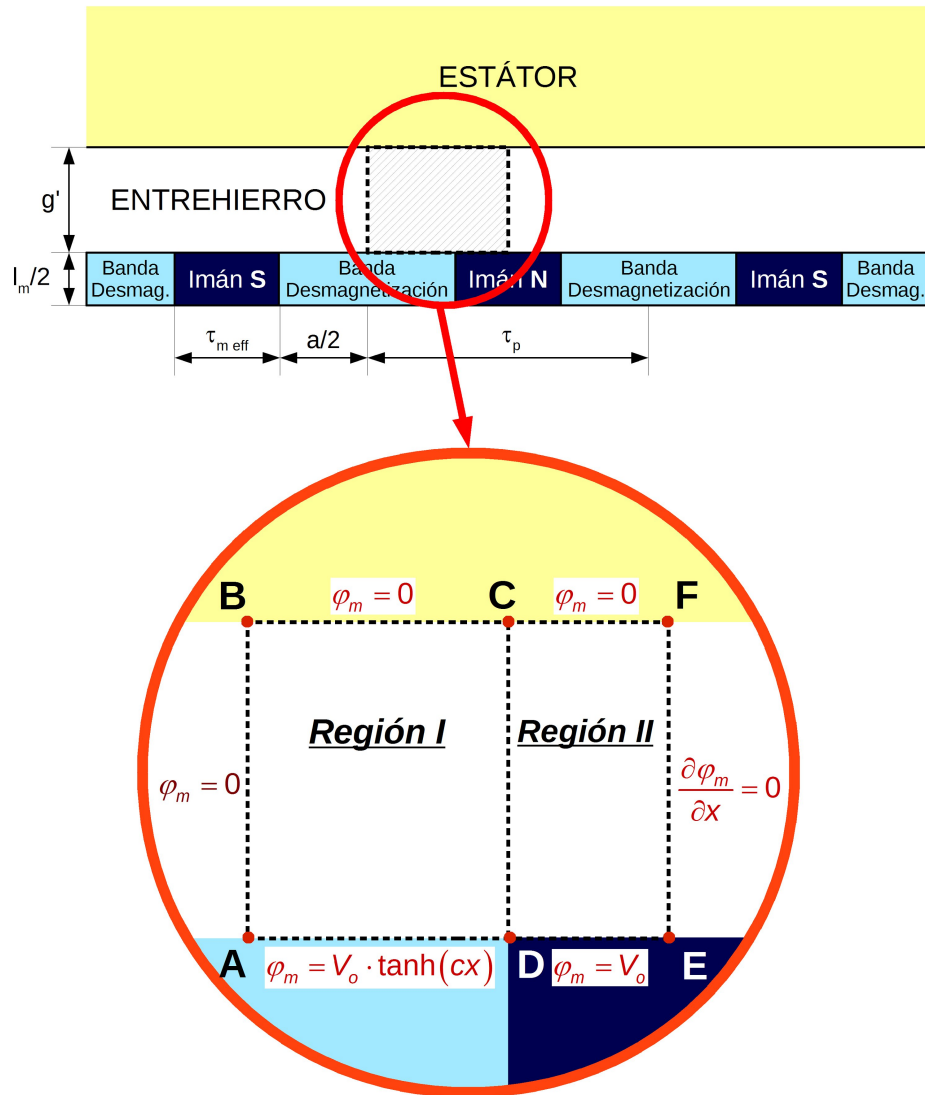


Figura 4.36: Geometría del problema y detalle de la zona a estudiar

La figura 4.37 muestra el problema de potencial para el área elegida de la figura 4.36. Como se puede observar existen dos regiones claramente diferenciadas e interconectadas a través de la frontera común  $CD$ . Se debe cumplir que el potencial magnético escalar y su derivada espacial deben ser continuos a través de esta frontera. Basándonos en esta propiedad y tal y como lo hemos planteado en ejemplos precedentes, resolveremos el problema en los dos pasos ya conocidos:

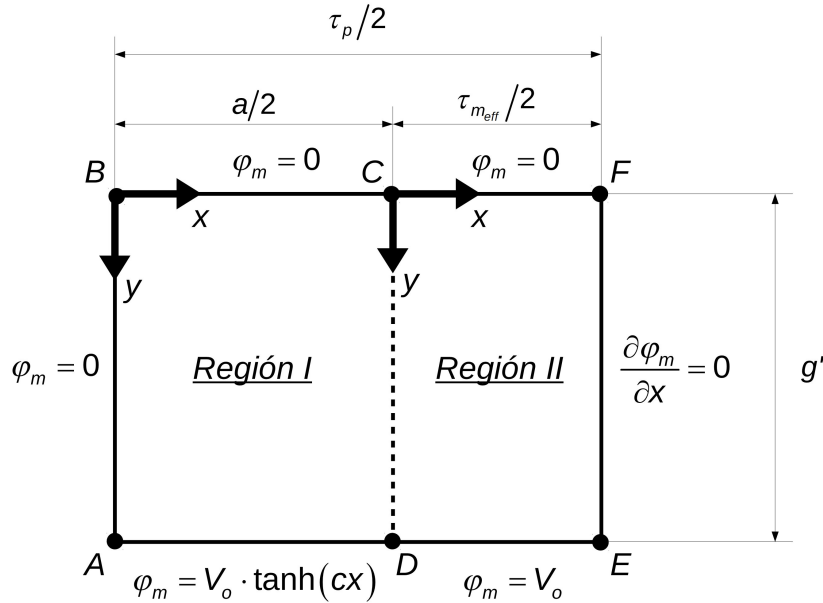


Figura 4.37: Planteamiento del problema de potencial para el área elegida de la figura 4.36

1. Impondremos una distribución de potencial arbitraria a lo largo de la frontera común  $CD$ . Esta distribución vendrá expresada en forma de un desarrollo de Fourier en senos en el que los coeficientes son variables por determinar (esta elección se justifica en el apéndice B). Ahora que tenemos especificadas las condiciones de contorno en ambas regiones a cada lado de la frontera, resolveremos, por separado, la distribución de potencial en cada región.
2. Obtendremos los coeficientes del desarrollo de Fourier de la distribución de potencial en la frontera  $CD$  igualando la derivada normal de la función potencial en ambas regiones a lo largo de dicha frontera.

#### ■ Paso 1

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común  $CD$  es de la forma  $\varphi_m^{CD} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \sin\left(\frac{q\pi y}{g'}\right)$  para  $0 \leq y \leq g'$  tanto en la región I como en la II, siendo  $H_q$  son los coeficientes a determinar.

Estudiemos cada región.

### Potencial en la región I

Dado que la tangente hiperbólica es una función impar, el potencial en la región I (figura 4.38) lo obtendremos por superposición del caso#4 y del caso#12 del anexo C, llegando a:

$$\begin{aligned} \varphi_m^I = & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{csch} \left( \frac{2n\pi g'}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{2n\pi y}{a} \right) + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi a}{2g'} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi x}{g'} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g'} \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

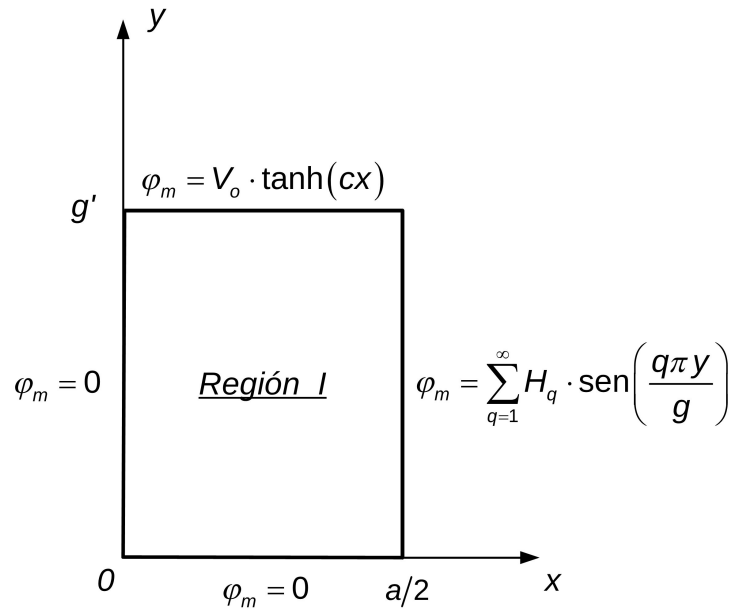


Figura 4.38: Región I: el potencial lo obtendremos por superposición del caso#4 y del caso#12

### Potencial en la región II

El potencial en la región II (figura 4.39) lo obtendremos por superposición del caso#3 y del caso#7 del anexo C, llegando a:

$$\varphi_m^{II} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g'}{\tau_{m\text{eff}}} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\tau_{m\text{eff}}} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{\tau_{m\text{eff}}} \right] +$$



$$+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sech} \left( \frac{q\pi\tau_{m_{eff}}}{2g'} \right) \cosh \left[ \frac{q\pi(\tau_{m_{eff}} - 2x)}{2g'} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g'} \right) \quad (4.45)$$

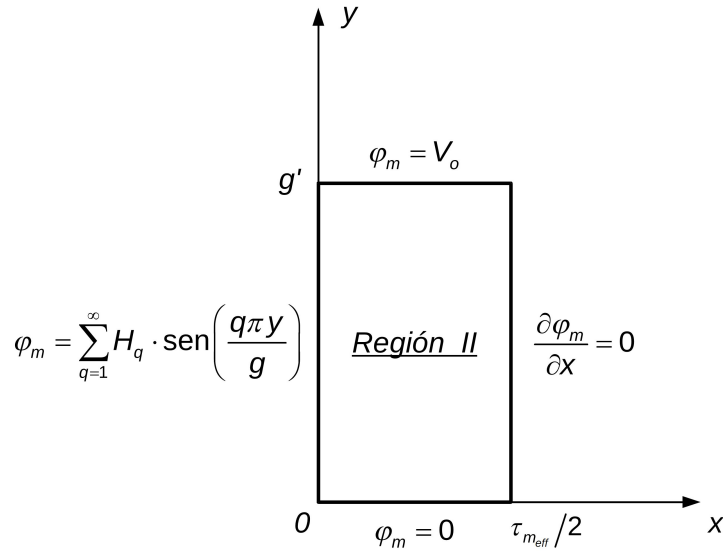


Figura 4.39: Región II: el potencial lo obtenemos por superposición del caso#3 y del caso#7

### ■ Paso 2

Una vez obtenidas las expresiones del potencial escalar en las dos regiones podemos obtener un conjunto de ecuaciones en función de los coeficientes  $H_q$  sin más que plantear en la frontera común que

$$\left. \frac{\partial \varphi_m^I}{\partial x} \right|_{x=\frac{a}{2}} = \left. \frac{\partial \varphi_m^{II}}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Obtengamos dichas derivadas.

### Derivada en la región I

La derivada del potencial escalar de la región I respecto de  $x$  viene dada por:

$$\frac{\partial \varphi_m^I}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{2n\pi}{a} \operatorname{csch} \left( \frac{2n\pi g'}{a} \right) \cos \left( \frac{2n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{2n\pi y}{a} \right) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g'} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi a}{2g'} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi x}{g'} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g'} \right)$$

En la frontera común  $CD$  con la región II, el valor de las abcisas en la región I para cualquier punto es  $x = a/2$ , valor que sustituido en la derivada anterior nos proporciona:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_m^I}{\partial x} \right|_{x=\frac{a}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{2n\pi}{a} (-1)^n \operatorname{csch} \left( \frac{2n\pi g'}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{2n\pi y}{a} \right) + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g'} \operatorname{coth} \left( \frac{q\pi a}{2g'} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g'} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

para valores de  $y/g'$  tal que  $0 \leq y/g' \leq 1$ .

### Derivada en la región II

La derivada del potencial escalar de la región II respecto de  $x$  viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_m^{II}}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\tau_{m_{eff}}} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g'}{\tau_{m_{eff}}} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\tau_{m_{eff}}} \right] \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{\tau_{m_{eff}}} \right] + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q \left( -\frac{q\pi}{g'} \right) \operatorname{sech} \left( \frac{q\pi \tau_{m_{eff}}}{2g'} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{q\pi (\tau_{m_{eff}} - 2x)}{2g'} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g'} \right) \end{aligned}$$

En la frontera común  $CD$  con la región I, el valor de las abcisas en la región II para cualquier punto es  $x = 0$ , valor que sustituido en la derivada anterior nos proporciona:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_m^{II}}{\partial x} \right|_{x=0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\tau_{m_{eff}}} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g'}{\tau_{m_{eff}}} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\tau_{m_{eff}}} \right] - \\ &- \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g'} \tanh \left( \frac{q\pi \tau_{m_{eff}}}{2g'} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g'} \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

para valores de  $y/g'$  tal que  $0 \leq y/g' \leq 1$ .

Si en la ecuación

$$\left. \frac{\partial \varphi_m^I}{\partial x} \right|_{x=\frac{a}{2}} = \left. \frac{\partial \varphi_m^{II}}{\partial x} \right|_{x=0}$$

sustituimos las expresiones (4.46) y (4.47), y recolocando sumandos para dejar los que poseen  $H_q$  en un único lado de la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g'} \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g'} \right) \left[ \tanh \left( \frac{q\pi\tau_{m_{eff}}}{2g'} \right) + \coth \left( \frac{q\pi a}{2g'} \right) \right] = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\tau_{m_{eff}}} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g'}{\tau_{m_{eff}}} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\tau_{m_{eff}}} \right] - \\ & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{2n\pi}{a} (-1)^n \operatorname{csch} \left( \frac{2n\pi g'}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{2n\pi y}{a} \right) \end{aligned}$$

e introduciendo la relación  $y/g'$  resulta:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g'} \operatorname{sen} \left( q\pi \frac{y}{g'} \right) \left[ \tanh \left( \frac{q\pi\tau_{m_{eff}}}{2g'} \right) + \coth \left( \frac{q\pi a}{2g'} \right) \right] = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\tau_{m_{eff}}} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g'}{\tau_{m_{eff}}} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi g' y}{\tau_{m_{eff}} g'} \right] - \\ & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{2n\pi}{a} (-1)^n \operatorname{csch} \left( \frac{2n\pi g'}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{2n\pi g' y}{a g'} \right) \quad (4.48) \end{aligned}$$

para valores de  $y/g'$  tal que  $0 \leq y/g' \leq 1$ .

De la resolución de la anterior ecuación (4.48), en la se emplearán métodos numéricos, obtendremos los valores de los coeficientes  $H_q$ . Para ello, por ejemplo, elegiremos un valor máximo para  $q$ , como  $Q$ , y elegiremos  $Q$  diferentes valores para la variable  $y/g'$  dentro de su rango. De esta manera tendremos  $Q$  ecuaciones con  $Q$  incógnitas (los coeficientes  $H_q$ ).

Como ejemplo numérico procedimos a elegir unos valores para las dimensiones del problema que nos ocupa, estos son:  $V_o = 3318.52Av$ ,  $g' = 5.3370mm$ ,  $\tau_p = 69mm$ ,  $a = 25mm$  y  $c = 0.5$ , y realizamos un programa en Matlab para su resolución. El programa nos proporciona los valores de los coeficientes  $H_q$ , valores que introducidos en las expresiones del potencial en la región I (ecuación 4.44) y en la región II (ecuación 4.45) nos permiten conocer el valor del potencial escalar en cualquier punto de la zona considerada. La figura 4.40 nos muestra

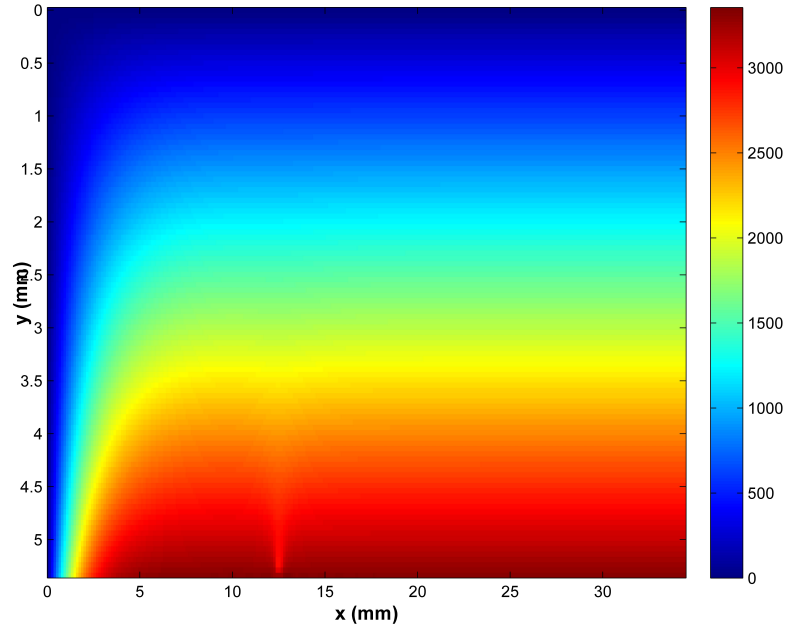


Figura 4.40: Potencial escalar en la región estudiada. Valores de los parámetros:  $V_o = 3318.52Av$ ,  $g' = 5.3370mm$ ,  $\tau_p = 69mm$ ,  $a = 25mm$  y  $c = 0.5$ .

gráficamente dicho potencial.

En la siguiente gráfica (figura 4.41) se muestra la variación del potencial escalar en la superficie del estátor ( $y = 0$ ) y en la superficie del imán ( $y = g'$ ). Podemos observar que se cumplen las condiciones impuestas en el planteamiento del problema, es decir, el estátor es una superficie de potencial nulo y en la superficie del imán, el potencial evoluciona desde el valor nulo hasta un valor positivo de  $(+V_o)$  a través de una banda de desmagnetización, en la que el potencial varía proporcionalmente a la tangente hiperbólica ( $V_o \cdot \tanh(cx)$ ).

### 4.3.3. Estimación de los parámetros de la banda de desmagnetización

Una vez calculada la expresión del potencial magnético escalar en la superficie del rotor para un polo con banda de desmagnetización, estamos en condiciones de determinar qué valores de la pendiente de la tangente hi-

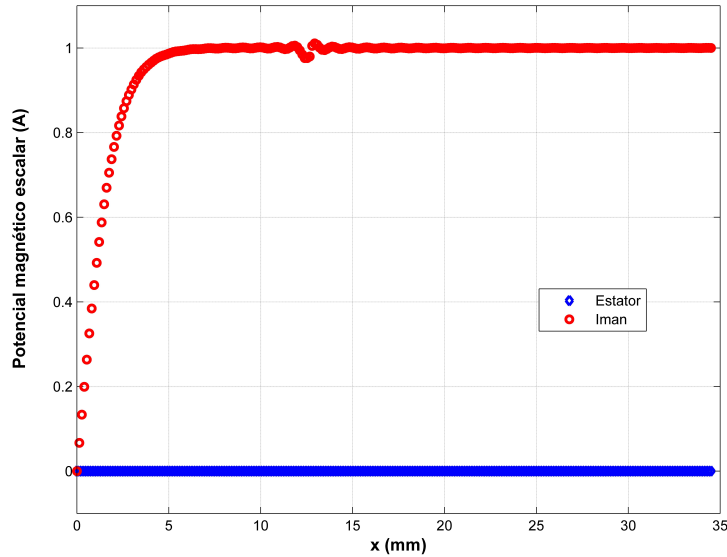


Figura 4.41: Variación del potencial escalar en la superficie del estátor ( $y = 0$ ) y en la superficie del imán ( $y = g'$ ) para el ejemplo numérico considerado.

perbólica (parámetro  $c$ ) y de la anchura de la banda de desmagnetización (parámetros  $a$ ) originan una variación del potencial escalar en la superficie del rotor que se ajusta a la que obtenemos mediante la formulación propuesta y mediante elementos finitos, tal y como mostrábamos en la figura 4.33. Para ello, hemos calculado la variación del potencial magnético escalar en la superficie del imán para diferentes valores de  $a$  y de  $c$  y lo hemos comparado con los valores obtenidos por la formulación propuesta, calculando el valor de la distancia  $L2$  según la expresión (4.1), valor que nos servirá para determinar que pareja de valores de  $a$  y de  $c$  son los más adecuados.

Hemos variado el parámetro  $c$  desde 0.1 hasta 1 en incrementos de 0.1 y la anchura de la banda de desmagnetización desde 5 mm hasta 65 mm en pasos de 2.5 mm. A la vista de los valores de la distancia  $L2$  obtenidos para cada pareja de valores, observamos como esta distancia disminuía al variar el valor de  $c$  desde 0.1 a 0.2 y aumentaba cuando  $c$  tomaba el valor de 0.3 y superiores. Por ello, decidimos estudiar con más detalle la variación de  $c$  entre 0.1 y 0.2, tomando un paso de 0.01. En este rango de  $c$  y para todos los valores de  $a$ , la distancia  $L2$  toma su menor valor cuando  $c$  es igual a 0.16.

Respecto al valor de la anchura de la banda de desmagnetización, tanto

gráficamente como a través de la distancia  $L2$ , observábamos que valores pequeños de este parámetro proporcionan un mal ajuste de ambas curvas. En la figura 4.42 se muestran las gráficas obtenidas para la formulación propuesta (etiquetada como “Laplace”) y mediante la modelización con la banda de desmagnetización (etiquetadas como “Banda”) para un valor de  $c$  de 0.16 y variando la anchura de la banda desde 15 mm hasta 40 mm en pasos de 5 mm. A la vista de las gráficas mostradas podemos apreciar que valores de  $a$  inferiores a 20 mm proporcionan un mal ajuste, mejorando este ajuste a medida que la banda toma valores de 25 mm o superiores.

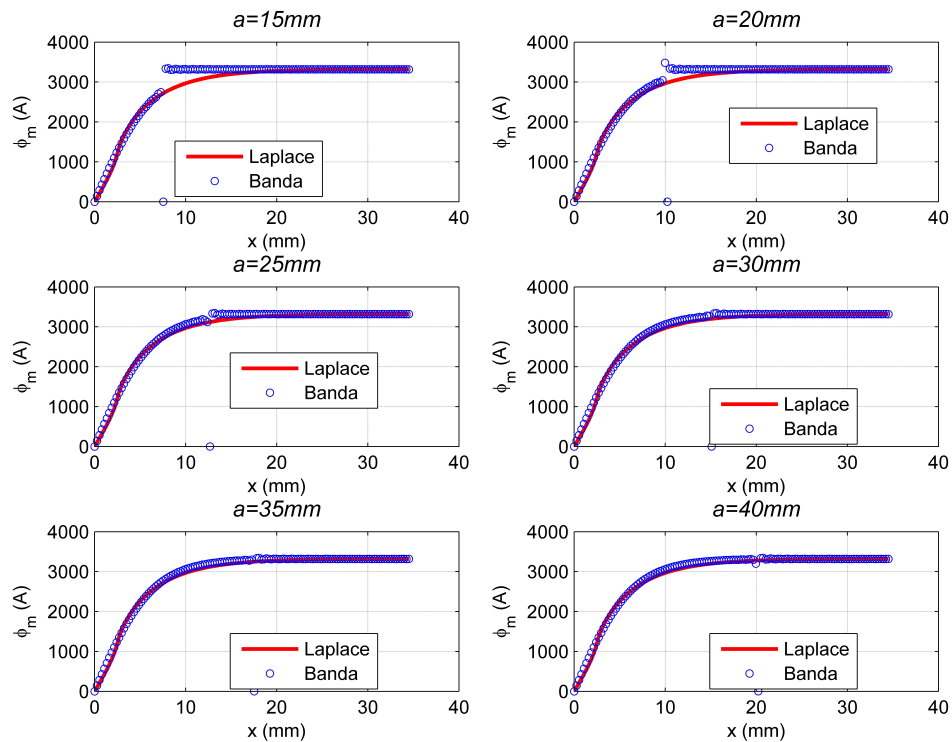


Figura 4.42: Variación del potencial magnético en la superficie del imán obtenidas mediante la formulación propuesta y con el modelo de la banda de desmagnetización para  $c = 0.16$  y para diferentes valores de  $a$ .

La tabla 4.9 muestra el valor del logaritmo neperiano de la distancia  $L2$  obtenida entre ambas formulaciones para los valores de la anchura de la banda de desmagnetización mostrados en la figura 4.42 y para los valores de  $c$  de 0.15, 0.16 y 0.17. Podemos observar como para todos los valores de  $a$ , la

distancia  $L2$  es menor cuando el parámetro  $c$  toma el valor de 0.16

$a$ (mm)	15	20	25	30	35	40
$c = 0.15$	15.01	14.23	13.51	13.23	13.11	13.09
<b><math>c = 0.16</math></b>	<b>14.96</b>	<b>14.19</b>	<b>13.42</b>	<b>13.18</b>	<b>13.08</b>	<b>13.07</b>
$c = 0.17$	15.00	14.38	13.82	13.71	13.66	13.66

Tabla 4.9: Distancia  $L2$  para los valores de  $a$  y de  $c$  mostrados.

Como veremos en el próximo apartado, el valor que tomaremos para la banda de desmagnetización no será fijo sino que oscilará entre un mínimo de 23 mm y un máximo de 39 mm, rango en el cual el ajuste entre ambas formulaciones es aceptable, a la vista de las gráficas de la figura 4.42 y de los valores de la tabla 4.9.

En resumen, los parámetros que definen los polos de nuestra máquina son:

- **Potencial absoluto:**  $V_o = 3318.52 Av$
- **Pendiente de la tangente hiperbólica:**  $c = 0.16$
- **Anchura mínima de la banda de desmagnetización:**  $a_{min} = \tau_s = t + s$  (23 mm en el radio medio)

Una vez que hemos modelado adecuadamente el rotor mediante la banda de desmagnetización, estamos en condiciones de estudiar nuestra máquina ranurada. Dada la importancia de esta parte y su extensión, y aunque su contenido forma parte del capítulo en el que nos encontramos, vamos a dedicarle un capítulo. De esta forma podemos estructurar mejor su contenido y hacer que éste pueda seguirse más cómodamente.





# Capítulo 5

## Máquina ranurada

Una vez que hemos determinado la variación del potencial escalar en la superficie del imán, estamos en condiciones de estudiar nuestra máquina ranurada aplicando el Método de los Subdominios.

La figura 5.1 muestra la geometría a considerar: se trata de un estátor con ranuras rectas de anchura  $s$  y profundidad  $h$  separadas por dientes de espesor  $t$ , existiendo tres ranuras por polo. El paso de ranura ( $\tau_s$ ) representa la separación entre dos ranuras consecutivas, siendo igual a la suma de la anchura de la ranura y del espesor del diente. El rotor está formado por imanes que alternan en polaridad, con una banda de desmagnetización que separa dos polos consecutivos entre sí;  $\tau_{m_{eff}}$  representa la anchura efectiva del imán y  $a$  la anchura de la banda de desmagnetización; su suma es igual al paso de polo, magnitud representada por  $\tau_p$ ; la zona comprendida entre las dos rectas a trazos representa un polo de la máquina. El rotor y el estátor están separados por un entrehierro de aire de espesor  $g$ . Otras magnitudes que aparecen en la figura son la longitud axial de los imanes ( $l_m$ ), el espesor del hierro trasero ( $\omega_{bi}$ ), longitud axial del estátor ( $l_s$ ) y la longitud axial de la máquina ( $L$ ).

En la figura anterior también se muestra la dirección del movimiento del rotor respecto del estátor. Este movimiento va a originar diferentes posiciones relativas del rotor respecto del ranurado, pudiéndose distinguir cuatro situaciones diferentes, las cuales se repiten cíclicamente. La figura 5.2 muestra estas cuatro situaciones, que describimos a continuación:

- Caso Diente Parcial: Esta situación se ilustra en la figura 5.2a). En ella el principio del polo (centro de la banda de desmagnetización) se encuentra situado debajo de un diente del ranurado.

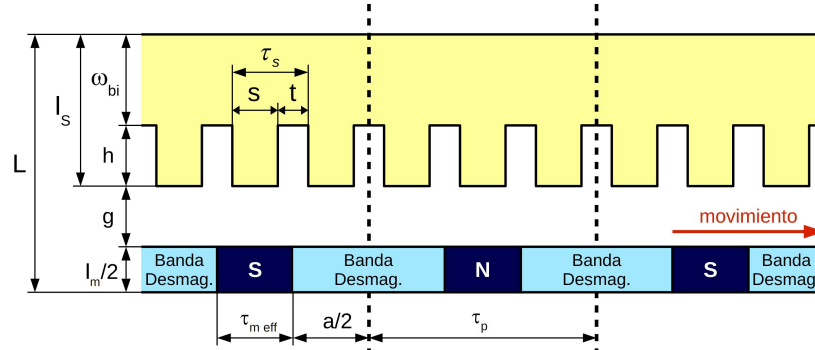


Figura 5.1: Geometría de la máquina con ranuras

- Caso Ranura Completa: Según el rotor avanza desde la posición de Diente Parcial, se mantiene en esta situación hasta que el principio del polo coincide con el principio de una ranura del estátor. A esta situación la denominaremos “Caso Ranura Completa” y se muestra en la figura 5.2b).
- Caso Ranura Parcial: Si continuamos moviendo el rotor, abandonamos la posición de “Ranura Completa” y entramos en la de “Ranura Parcial”. Ahora la disposición del principio del polo es tal que éste se sitúa debajo de una ranura del ranurado, tal y como se ilustra en la figura 5.2c).
- Caso Diente Completo: La última situación que consideraremos será aquella en la que el principio del polo coincide con el principio de un diente del estátor. Esta situación se produce si, partiendo del caso de Ranura Parcial, continuamos desplazando el rotor. La figura 5.2d) muestra este caso. Desde esta posición y si continuamos moviendo el rotor, pasaríamos de nuevo a la posición de Diente Parcial.

Si en la figura 5.2 nos fijamos en el rotor, veremos que, para los cuatro casos considerados, el paso de polo es constante pero no lo son ni la anchura efectiva del imán ni la anchura de la banda de desmagnetización. Esto es así para disminuir el número de subdominios que tendremos en cada caso: los subdominios se originan como consecuencia de las discontinuidades que hay en el rotor y en el estátor. Las discontinuidades del estátor viene fijadas por su topología (número de ranuras y su anchura) y no las podemos modificar. Sin embargo, las discontinuidades del rotor sí que las podemos modificar ya que su topología la hemos modelado, a partir de la geometría real, mediante un imán efectivo y dos bandas de desmagnetización, cuyas dimensiones no son constantes si no que pueden oscilar dentro de unos límites, tal y como

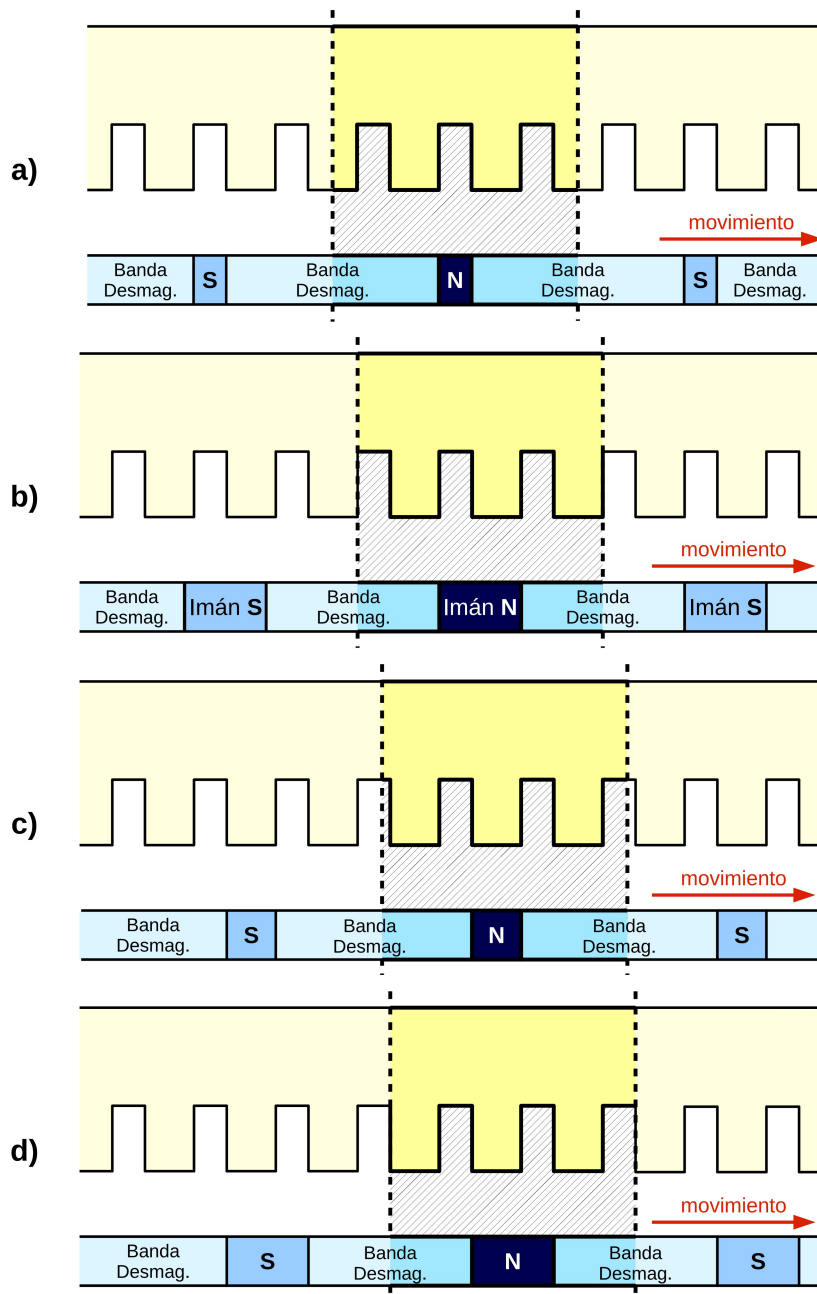


Figura 5.2: Casos a considerar según las posición del rotor respecto de las ranuras del estátor: a) Caso Diente Parcial. b) Caso Ranura Completa. c) Caso Ranura Parcial. d) Caso Diente Completo

comentábamos en el apartado 4.3.3. Por ello, si ajustamos la anchura de la banda de desmagnetización y del imán efectivo para que las discontinuidades del rotor coincidan con discontinuidades del estátor, lograremos que el número de subdominios que tengamos que considerar sea menor que si las dimensiones del rotor fueran fijas.

En particular y fijándonos en las cuatro posiciones mostradas en la figura 5.2, en los casos de Ranura Completa y Diente Completo, la anchura del imán efectivo y de la mitad de la banda de desmagnetización son iguales y de valor el paso de ranura, existiendo seis subdominios por polo para cada uno de estos casos, tal y como veremos en los próximos apartados. Por contra, en los casos de Diente Parcial y Ranura Parcial, la anchura del imán efectivo no es constante, tampoco lo es la anchura de las bandas de desmagnetización y éstas no son simétricas. Por ejemplo, la anchura del imán efectivo es igual a la anchura de la ranura en el caso de Diente Parcial (figura 5.2a) y coincide con la anchura del diente en el caso de Ranura Parcial (figura 5.2c). En ambos casos el número de subdominios que tendremos será de siete por polo, tal y como veremos más adelante.

Debido a que el procedimiento que vamos a seguir en el estudio de cada caso va a ser muy similar y con el fin de facilitar la lectura de este trabajo de tesis, sólo mostraremos en el texto principal las expresiones que deduzcamos para el primer caso que estudiemos, el caso Diente Parcial. En los casos restantes, los diferentes conjuntos de expresiones no se mostrarán en el texto principal, si no que serán referenciados a los correspondientes apéndices.

## 5.1. Expresiones del potencial magnético escalar

Vamos a comenzar el estudio de la máquina ranurada determinando la expresión del potencial magnético escalar en el entrehierro de la máquina para cada uno de los casos, en cuya determinación emplearemos el Método de los Subdominios y los casos hallados en el anexo C. El orden que seguiremos será el mostrado en la figura 5.2, es decir, Diente Parcial, Ranura Completa, Ranura Parcial y Diente Completo.

### 5.1.1. Diente Parcial

El caso Diente Parcial hace referencia a aquella situación en la que el principio del polo está situado debajo de un diente del ranurado, tal y como

se muestra en la figura 5.3. El problema del cálculo del potencial magnético escalar en el entrehierro se reduce al cálculo del campo en el área rayada.

En esta situación, el principio del polo divide al diente en dos partes, estando una de las partes situada encima de un polo norte y la otra encima del polo sur contiguo. Como el paso de polo es constante e igual a tres veces el paso de ranura, el que una fracción del diente esté en un lateral del polo implica necesariamente que la otra fracción del diente estará en el otro lateral de ese mismo polo, tal y como podemos observar en la figura 5.3. Ya que  $t$  es el ancho del diente, seguiremos empleando  $t$  para expresar la anchura de cada una de las partes del diente, pero lo multiplicaremos por un parámetro que varíe entre 0 y 1 o entre 1 y 0, según se trate de una o de otra parte del diente. Para ello definimos el parámetro  $z$ , el cual varía entre 0 y 1. Así  $tz$  será la anchura de una de las dos partes en que dividimos al diente y  $t - tz$ , es decir,  $t(1 - z)$  la anchura de la otra parte del diente (en la parte superior de la figura 5.3 se indican estas dimensiones).

Las geometrías que se obtienen al tomar los valores extremos de  $z$  son las correspondiente a "Ranura Completa" ( $z = 0$ ) y "Diente Completo" ( $z = 1$ ). No obstante, no es posible estudiar estos casos a partir del de *Diente Parcial*, ya que, como veremos más adelante, en algunas de las expresiones que vamos a obtener, los términos  $z$  y  $1 - z$  aparecen dividiendo y darían lugar a indeterminaciones al tomar  $z$  sus valores extremos. Es por ello por lo que sólo vamos a considerar los valores de  $z$  tal que  $0 < z < 1$ , siendo ésta la razón por la que se estudian por separado los casos "Ranura Completa" (sección 5.1.2) y "Diente Completo" (sección 5.1.4).

Con el fin de lograr el menor número de regiones posible, hemos hecho que la banda de desmagnetización del imán no sea simétrica y que su anchura no sea constante, si no que se pueda ajustar de tal modo, que el final de la banda coincida con una discontinuidad en el estátor (paso de ranura a diente o viceversa). De esta forma logramos que las discontinuidades en el polo coincidan con discontinuidades en el estátor y, por lo tanto, el número de regiones que obtengamos vengan determinadas solamente por las discontinuidades del estátor. En la figura 5.3 hemos resaltado las bandas de desmagnetización del imán, siendo el ancho de la banda de desmagnetización  $s + t(1 + z)$  para el lado izquierdo del polo y  $s + t(2 - z)$  para la parte derecha del polo. En ambos casos el valor mínimo de dicha banda es  $s + t$ , anchura suficiente para que el potencial del imán se estabilice, tal y como habíamos comprobado cuando definíamos la banda de desmagnetización (apartado 4.3.3).

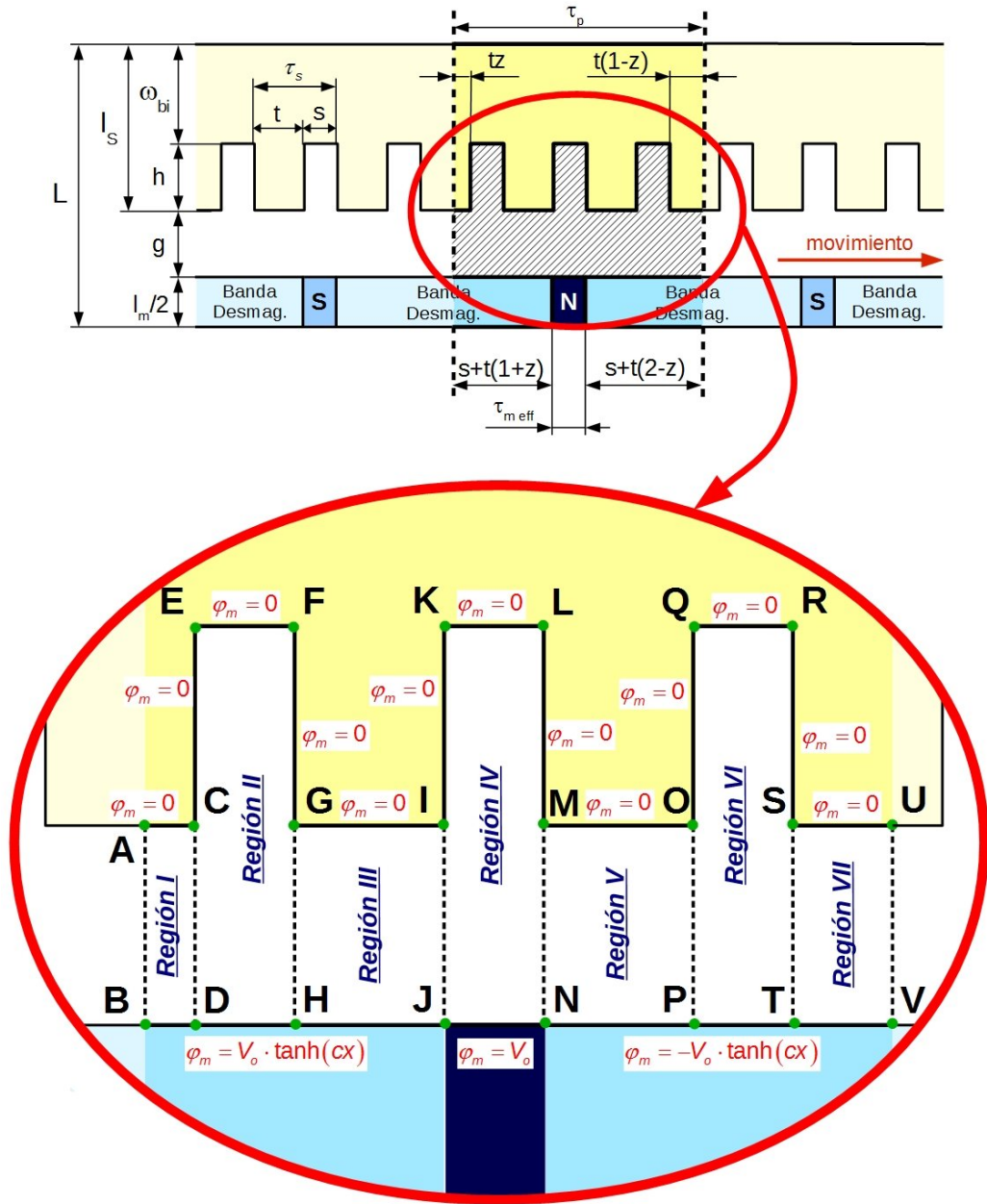


Figura 5.3: Caso Diente Parcial: El principio del polo está situado debajo de un diente del ranurado.

Si consideráramos el ancho de la banda de desmagnetización constante e igual al paso de ranura, tal y como veremos en los casos "Ranura Completa" y "Diente Completo", el número de regiones que se formarían vendrían originadas por discontinuidades en el estátor o por discontinuidades en el rotor, dando lugar a un número mayor de regiones y a una mayor complejidad en el estudio. En la figura 5.4 hemos planteado el problema del potencial para el área rayada de la figura 5.3, donde podemos observar que se originan siete regiones por polo, frente a las nueve que obtendríamos si el ancho de la banda de desmagnetización fuera constante e igual al paso de ranura.

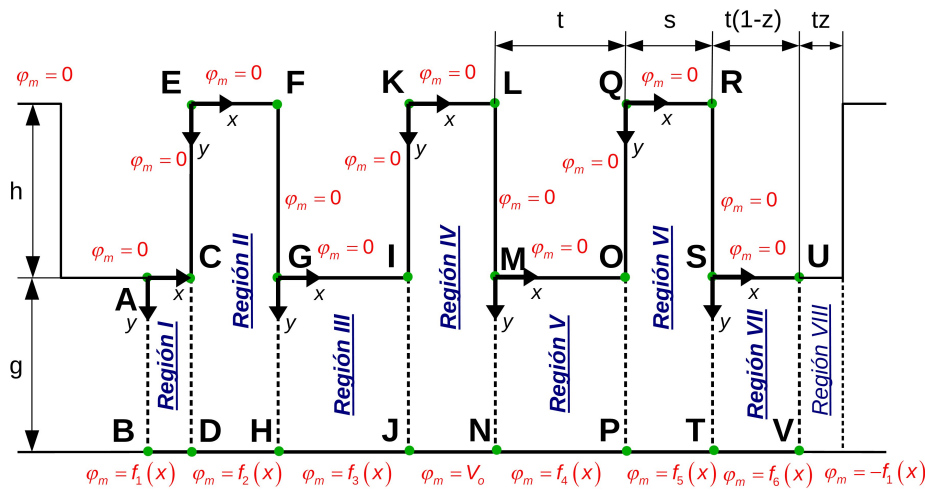


Figura 5.4: Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura 5.3

### Funciones de la banda de desmagnetización

La primera tarea que tenemos que abordar es definir las funciones que vamos a utilizar para representar la banda de desmagnetización en cada una de las regiones de la geometría que poseen banda de desmagnetización (regiones I, II, III, V, VI y VII); a estas funciones las hemos denotado por  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ ,  $f_4(x)$ ,  $f_5(x)$  y  $f_6(x)$ . La filosofía que seguiremos para definir estas funciones es la de representar a la porción de banda de magnetización correspondiente a la región que estemos estudiando, mediante una función impar, para posteriormente representarla mediante su desarrollo en serie de Fourier; el hecho de describirla como una función impar nos permite, empleando el caso#12 del anexo C, poder determinar la expresión del po-

tencial magnético escalar que origina. Definamos cada una de estas funciones:

- Función  $f_1(x)$ : Definimos  $f_1(x)$  mediante la expresión:

$$f_1(x) = V_o \cdot \tanh(c \cdot x) \quad x \in [-tz, tz]$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) \quad x \in [-tz, tz]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,1}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_2(x)$ : Definimos  $f_2(x)$  mediante la expresión:

$$f_2(x) = \begin{cases} -V_o \cdot \tanh [c \cdot (-x + tz)] & x \in [-s, 0] \\ V_o \cdot \tanh [c \cdot (x + tz)] & x \in [0, s] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \quad x \in [-s, 0] \cup [0, s]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,2}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_3(x)$ : Definimos  $f_3(x)$  mediante la expresión:

$$f_3(x) = \begin{cases} -V_o \cdot \tanh [c \cdot (-x + tz + s)] & x \in [-t, 0] \\ V_o \cdot \tanh [c \cdot (x + tz + s)] & x \in [0, t] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \quad x \in [-t, 0] \cup [0, t]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,3}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_4(x)$ : Definimos  $f_4(x)$  mediante la expresión:

$$f_4(x) = \begin{cases} V_o \cdot \tanh \{c \cdot [-x - (t(2 - z) + s)]\} & x \in [-t, 0] \\ -V_o \cdot \tanh \{c \cdot [x - (t(2 - z) + s)]\} & x \in [0, t] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \quad x \in [-t, 0] \cup [0, t]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,4}$  mediante cálculo numérico.



- Función  $f_5(x)$ : Definimos  $f_5(x)$  mediante la expresión:

$$f_5(x) = \begin{cases} V_o \cdot \tanh \{c \cdot [-x - (t(1-z) + s)]\} & x \in [-s, 0] \\ -V_o \cdot \tanh \{c \cdot [x - (t(1-z) + s)]\} & x \in [0, s] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_5(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \quad x \in [-s, 0] \cup [0, s]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,5}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_6(x)$ : Definimos  $f_6(x)$  mediante la expresión:

$$f_6(x) = \begin{cases} V_o \cdot \tanh \{c \cdot [-x - t(1-z)]\} & x \in [-t(1-z), 0] \\ -V_o \cdot \tanh \{c \cdot [x - t(1-z)]\} & x \in [0, t(1-z)] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_6(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \text{sen} \left[ \frac{n\pi x}{t(1-z)} \right] \quad x \in [-t(1-z), 0] \cup [0, t(1-z)]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,6}$  mediante cálculo numérico.

En las siguientes figuras, se muestra las funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ ,  $f_4(x)$ ,  $f_5(x)$  y  $f_6(x)$  para valores del parámetro  $z$  de 0.25 (figura 5.5), de 0.5 (figura 5.6) y de 0.75 (figura 5.7), donde los valores de la geometría son los mismo para todas ellas y de valores  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$ , donde el trazo continuo rojo muestra la función exacta y con puntos amarillos la aproximación mediante el desarrollo en serie de Fourier.

Una vez definidas las funciones  $f_i(x)$ , sólo nos resta definir las que existen en las fronteras comunes. En referencia a la figura (5.4), las siete regiones de nuestro problema están interconectadas a través de las fronteras comunes AB, CD, GH, IJ, MN, OP, ST y UV. Se debe cumplir que el potencial magnético escalar y su derivada espacial deben ser continuos a través de estas fronteras. Basándonos en esta propiedad resolveremos el problema en los dos pasos que ya conocemos:

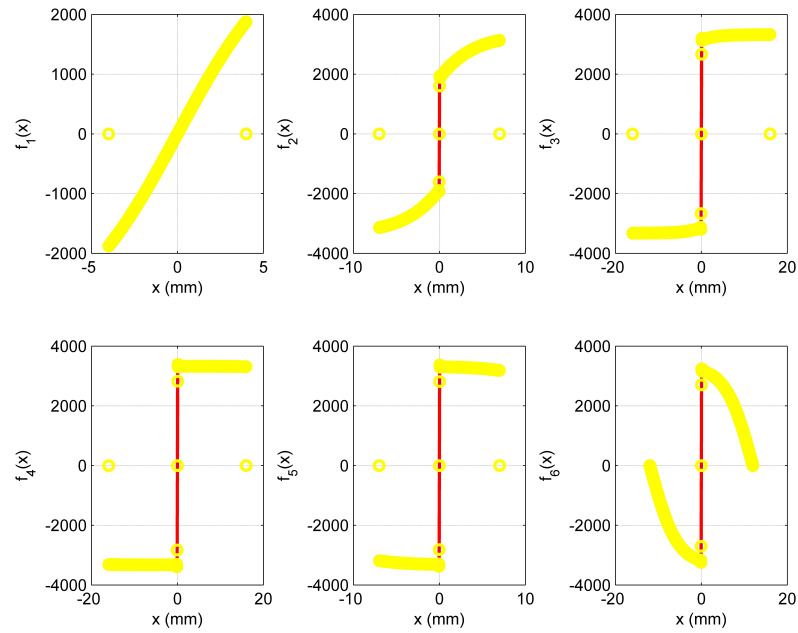


Figura 5.5: Funciones del perfil de magnetización para  $z = 0.25$

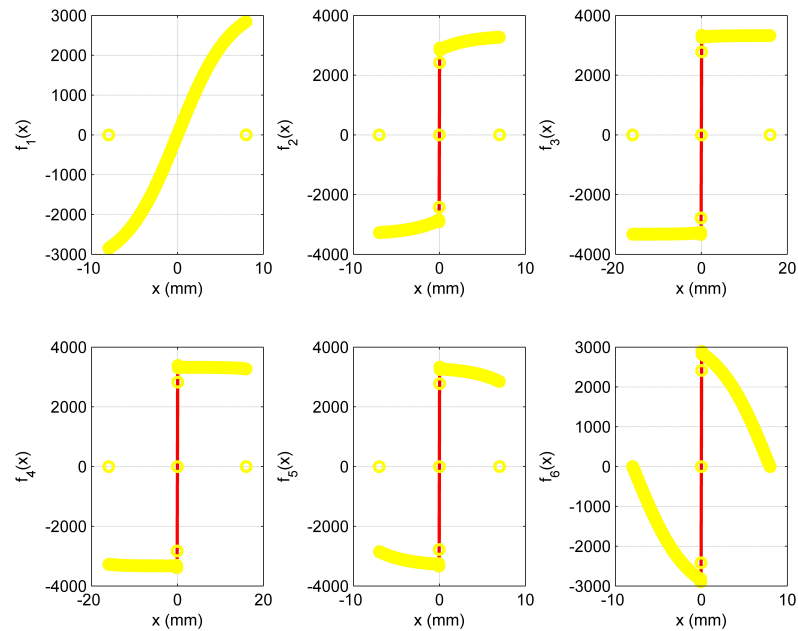


Figura 5.6: Funciones del perfil de magnetización para  $z = 0.5$

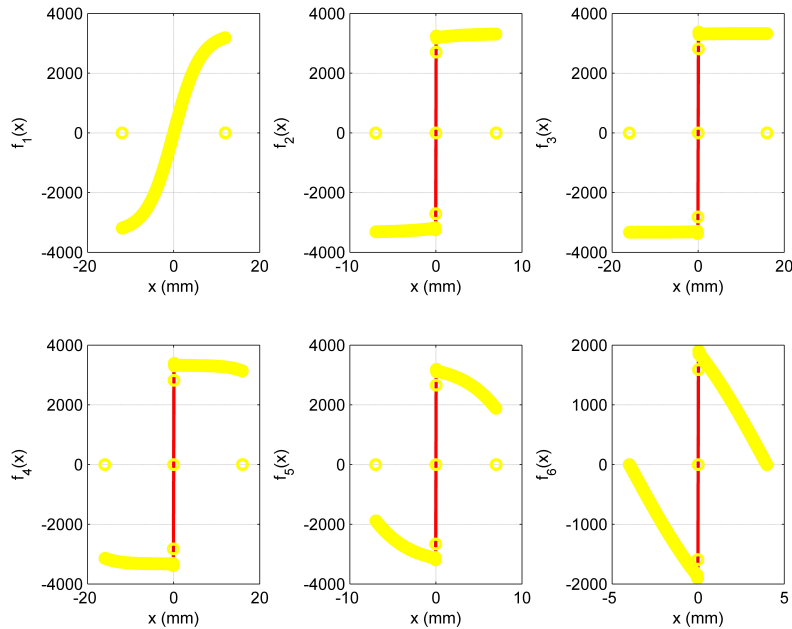


Figura 5.7: Funciones del perfil de magnetización para  $z = 0.75$

1. Impondremos unas distribuciones de potencial arbitrarias a lo largo de las fronteras comunes AB, CD, GH, IJ, MN, OP, ST y UV. Estas distribuciones vendrán expresadas en forma de un desarrollo de Fourier en senos (en el apéndice B se justifica esta elección) en el que los coeficientes son variables por determinar. Ahora que tenemos especificadas las condiciones de contorno en ambas regiones a cada lado de las fronteras, resolveremos, por separado, la distribución de potencial en cada región.
2. Obtendremos los coeficientes del desarrollo de Fourier de la distribución de potencial en las fronteras AB, CD, GH, IJ, MN, OP, ST y UV igualando la derivada normal de la función potencial en ambas regiones a lo largo de cada frontera.

### Distribuciones de potencial en las fronteras comunes

La distribución de potencial que impondremos en la frontera común AB es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{AB} = \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región I}$$

donde  $Q_w$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común CD es de la forma:

- $\varphi_m^{CD} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi}{g}y\right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región I, y
- $\varphi_m^{CD} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen}\left[\frac{q\pi}{g}(y-h)\right]$  para  $h \leq y \leq h+g$  en la región II

donde  $H_q$  son los coeficientes a determinar.

Estas dos fórmulas son la misma distribución excepto un desplazamiento en las ordenadas, pues en la región I tomamos el origen de coordenadas en el punto A con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia C y B, respectivamente, y en la región II tomamos el origen de coordenadas en el punto E con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia F y D.

En las siguientes cinco fronteras GH, IJ, MN, OP y ST, procederemos de forma similar a la frontera CD. La distribución de potencial que impondremos a la frontera común GH es de la forma:

- $\varphi_m^{GH} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{sen}\left[\frac{l\pi}{g}(y-h)\right]$  para  $h \leq y \leq h+g$  en la región II, y
- $\varphi_m^{GH} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{g}y\right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región III

donde  $M_l$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común IJ es de la forma:

- $\varphi_m^{IJ} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{g}y\right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región III, y
- $\varphi_m^{IJ} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{g}(y-h)\right]$  para  $h \leq y \leq h+g$  en la región IV

donde  $L_m$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común MN es de la forma:

- $\varphi_m^{MN} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{sen}\left[\frac{r\pi}{g}(y-h)\right]$  para  $h \leq y \leq h+g$  en la región IV, y
- $\varphi_m^{MN} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{g}y\right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región V

donde  $P_r$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común OP es de la forma:

- $\varphi_m^{OP} = \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{g}y\right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región V, y
- $\varphi_m^{OP} = \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{sen}\left[\frac{p\pi}{g}(y-h)\right]$  para  $h \leq y \leq h+g$  en la región VI

donde  $R_p$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común ST es de la forma:

- $\varphi_m^{ST} = \sum_{u=1}^{\infty} V_u \operatorname{sen}\left[\frac{u\pi}{g}(y-h)\right]$  para  $h \leq y \leq h+g$  en la región VI, y
- $\varphi_m^{ST} = \sum_{u=1}^{\infty} V_u \operatorname{sen}\left(\frac{u\pi}{g}y\right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región VII

donde  $V_u$  son los coeficientes a determinar.

Si tenemos en cuenta la periodicidad del problema (periodicidad anticíclica), los coeficiente de la distribución de potencial que impondremos a la frontera común UV deben de ser iguales a los de la frontera AB pero con signo contrario. Por ello, la distribución de potencial en la frontera común UV es de la forma:

- $\varphi_m^{UV} = \sum_{w=1}^{\infty} (-Q_w) \operatorname{sen}\left(\frac{w\pi y}{g}\right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región VII, y
- $\varphi_m^{UV} = \sum_{w=1}^{\infty} (-Q_w) \operatorname{sen}\left(\frac{w\pi y}{g}\right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región VIII

donde  $Q_w$  son los coeficientes a determinar. Las distribuciones de potencial son las mismas y sin desplazamiento en las ordenadas, ya que ambos orígenes se encuentran a la misma altura (punto S para la región VII y punto U para la región VIII).

### Expresiones del potencial escalar

Una vez establecidas las distribuciones de potencial en las fronteras comunes a cada región, vamos a determinar la expresión del potencial en las diferentes regiones, aplicando el principio de superposición junto con las respuestas obtenidas en los casos estudiados en el anexo C.

**Región I:** La figura 5.8 muestra la región I. El potencial en esta región, lo obtenemos por superposición del caso#4, del caso#5 y del caso#12, resultando:

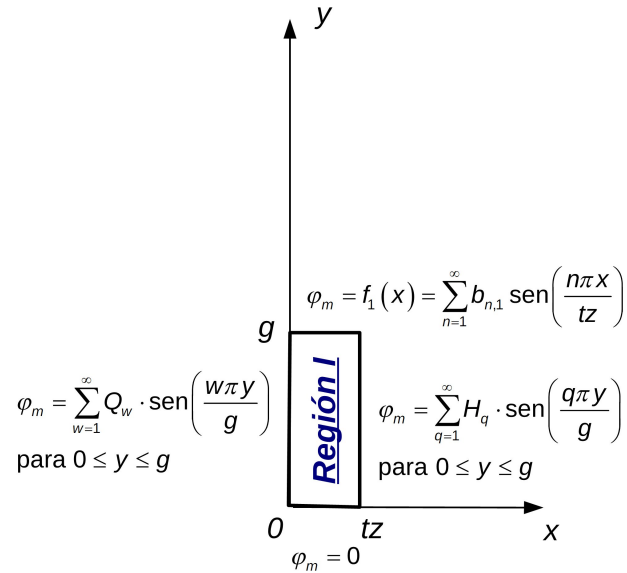


Figura 5.8: Región I. El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#4, del caso#5 y del caso#12.

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^I = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{tz} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{tz} \right) + \\
 & + \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{w\pi(tz-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right) + \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

**Región II:** La figura (figura 5.9) muestra la región II. El potencial en esta región, lo obtenemos a partir de las expresiones de potencial obtenidas en el caso#10, en el caso#11 y en el caso#12. Por lo tanto su potencial será:

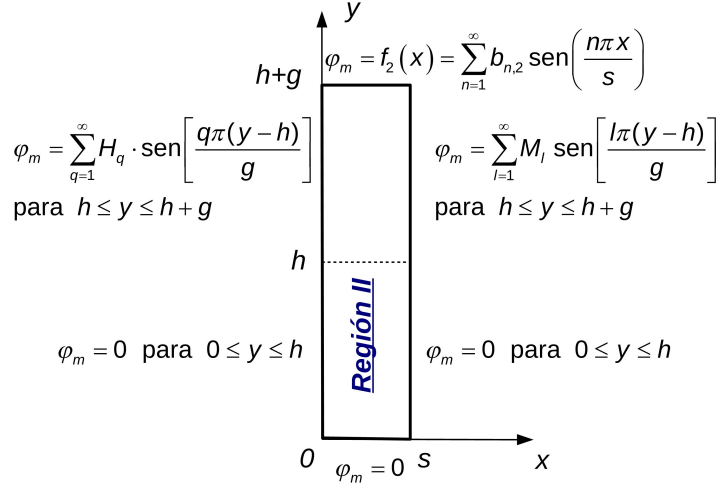


Figura 5.9: Región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#10, del caso#11 y del caso#12.

$$\begin{aligned}
\varphi_m^{II} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch}\left[\frac{n\pi(h+g)}{s}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{s}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{s}\right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi s}{h+g}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{h+g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{h+g}\right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi s}{h+g}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi(s-x)}{h+g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{h+g}\right)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

donde:

$$\begin{aligned}
K_n^2 &= \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l(1-\delta_{l,n(1-\alpha)})}{l^2-n^2(1-\alpha)^2} M_l + \sum_{l=1}^{\infty} (1-\alpha) M_l \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{l\pi h}{g}\right) \\
K_n^{2'} &= \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2-n^2(1-\alpha)^2} H_q + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) H_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

**Región III:** La figura 5.10 muestra la región III. El potencial en esta región, lo obtenemos a partir de la expresión del potencial de la Región I del caso actual. La expresión del potencial será entonces:

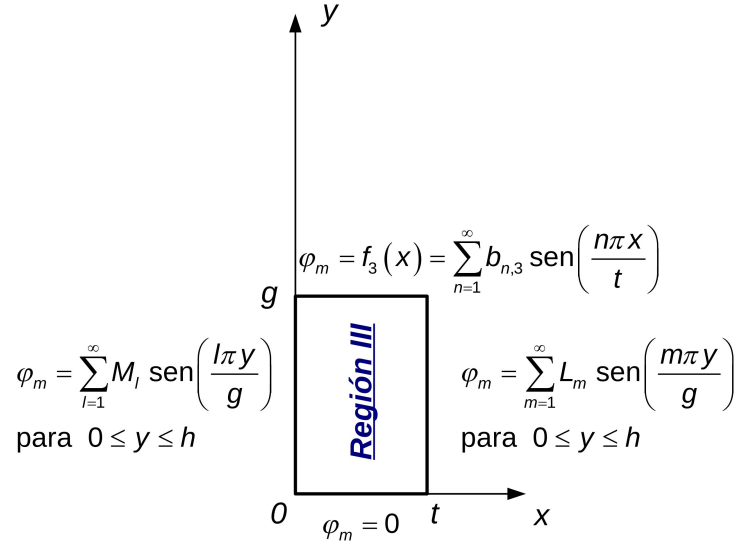


Figura 5.10: Región III. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región I del caso actual.

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^{III} = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{l\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

**Región IV:** La geometría de la región IV se muestra en la figura (figura 5.11). Su potencial, lo obtenemos por superposición de los casos #1, #10 y #11, siendo su expresión:

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^{IV} = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \\
 & \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{s} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{s} \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$



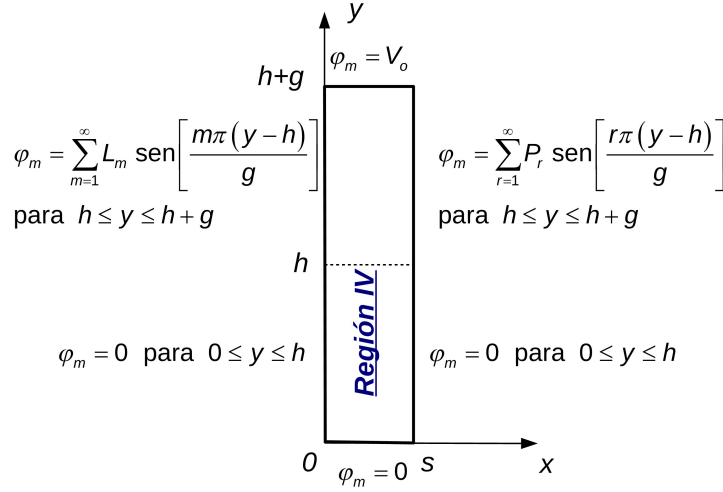


Figura 5.11: Región IV. El potencial en esta región lo obtenemos por superposición de los casos #1, #10 y #11.

donde:

$$K_n^4 = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r(1-\delta_{r,n(1-\alpha)})}{r^2-n^2(1-\alpha)^2} P_r + \sum_{r=1}^{\infty} (1-\alpha) P_r \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{r\pi h}{g} \right)$$

$$K_n^{4'} = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(1-\delta_{m,n(1-\alpha)})}{m^2-n^2(1-\alpha)^2} L_m + \sum_{m=1}^{\infty} (1-\alpha) L_m \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{m\pi h}{g} \right) \quad (5.6)$$

**Región V:** El potencial en la región V (figura 5.12) lo obtenemos a partir de la expresión del potencial de la Región I del caso actual, resultando la expresión del potencial de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_m^V = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\ & + \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{r\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right) + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{p\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

**Región VI:** El potencial en la región VI (figura 5.13) lo obtendremos a partir de la expresión del potencial de la Región II del presente caso, siendo su ecuación:

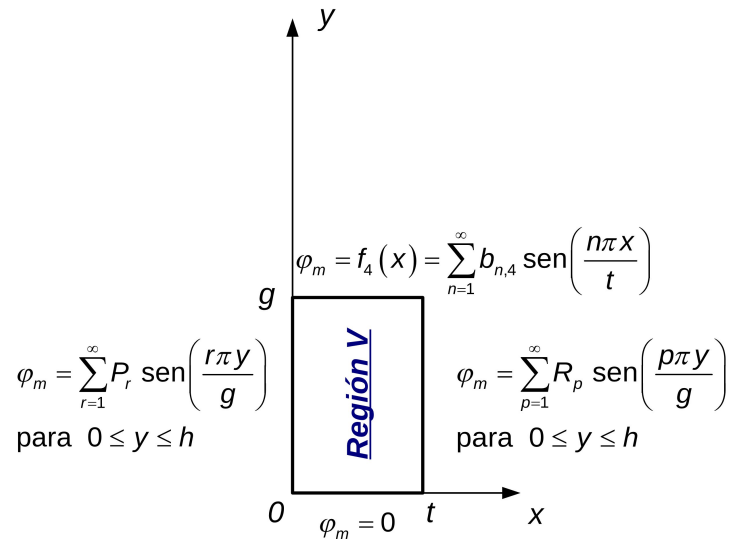


Figura 5.12: Región V. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la expresión del potencial de la Región I del caso actual.

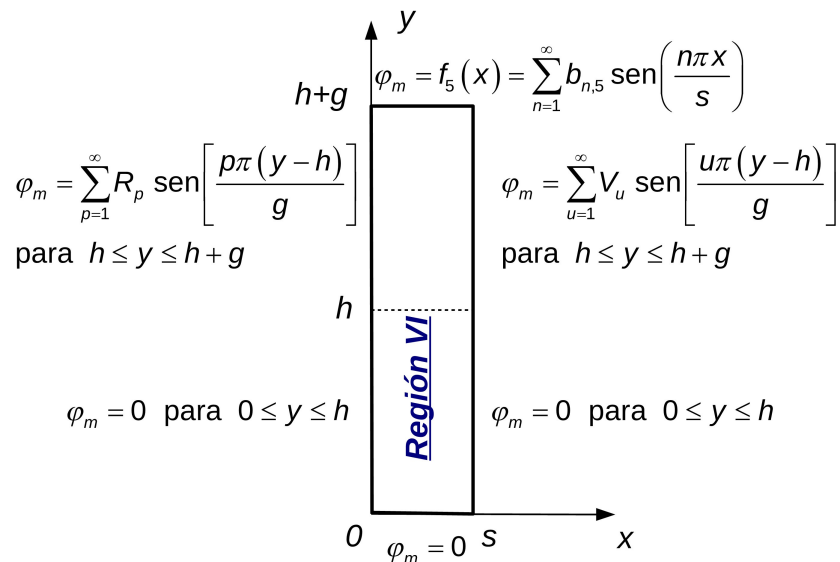


Figura 5.13: Región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la Región II del caso actual.

$$\begin{aligned} \varphi_m^{VI} = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,5} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde:

$$\begin{aligned} K_n^6 = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{u=1}^{\infty} \frac{u(1-\delta_{u,n(1-\alpha)})}{u^2-n^2(1-\alpha)^2} V_u + \sum_{u=1}^{\infty} (1-\alpha) V_u \delta_{u,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{u\pi h}{g} \right) \\ K_n^{6'} = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(1-\delta_{p,n(1-\alpha)})}{p^2-n^2(1-\alpha)^2} R_p + \sum_{p=1}^{\infty} (1-\alpha) R_p \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{p\pi h}{g} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

**Región VII:** El potencial en la región VII (figura 5.14) lo obtendremos a partir de la expresión del potencial de la Región I del caso presente, llegando a:

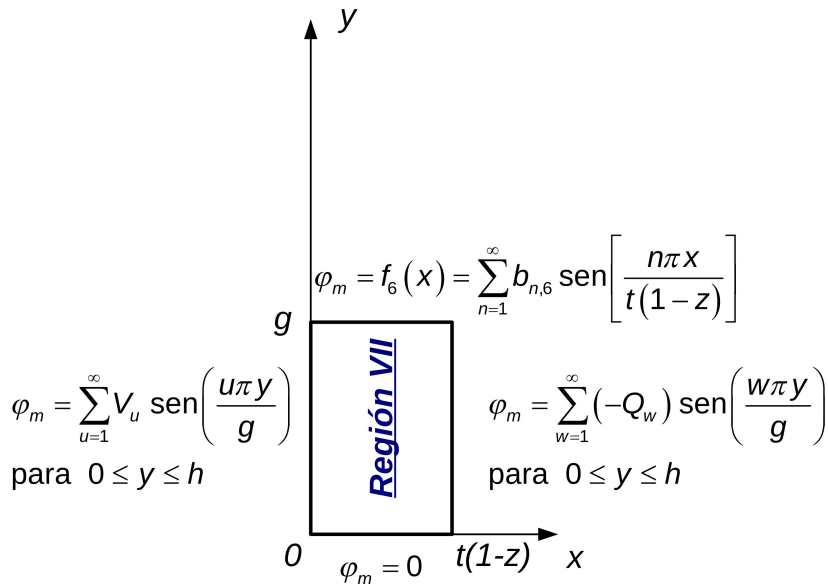


Figura 5.14: Región VII. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la región I del caso presente.

$$\begin{aligned}
\varphi_m^{VII} = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,6} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi g}{t(1-z)} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi x}{t(1-z)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi y}{t(1-z)} \right] + \\
& + \sum_{u=1}^{\infty} V_u \operatorname{csch} \left[ \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right] \operatorname{senh} \left\{ \frac{u\pi [t(1-z)-x]}{g} \right\} \operatorname{sen} \left( \frac{u\pi y}{g} \right) - \\
& - \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left[ \frac{w\pi t(1-z)}{g} \right] \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right)
\end{aligned} \quad (5.10)$$

**Región VIII:** Una vez halladas las expresiones del potencial escalar en las regiones situadas bajo el polo norte (regiones I a VII) podemos obtener el potencial escalar en cualquier otra región sin más que considerar la periodicidad anticíclica del problema; en particular, la expresión del potencial escalar en la región VIII será idéntica a la de la región I pero con signo contrario, ya que la geometría y la posición relativa de ésta respecto al polo son las mismas, aunque la región VIII se encuentra bajo un polo sur mientras que la I está bajo un polo norte. Por lo tanto, la expresión del potencial en la región VIII será:

$$\begin{aligned}
\varphi_m^{VIII} = -\varphi_m^I = & - \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{tz} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{tz} \right) - \\
& - \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{w\pi (tz-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right) - \\
& - \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right)
\end{aligned} \quad (5.11)$$

### Expresiones de las derivadas en las fronteras laterales

Una vez obtenidas las expresiones del potencial escalar en las siete regiones podemos obtener un conjunto de ecuaciones en función de los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$ ,  $R_p$  y  $V_u$ , sin más que plantear en las fronteras comunes que:

$$\frac{dv_j}{dx} = \frac{dv_{j+I}}{dx}$$

o, lo que es lo mismo:

$$g \frac{dv_j}{dx} = g \frac{dv_{j+I}}{dx}$$

con  $j = I, II, III, \dots, VII$ . Determinemos las correspondientes derivadas.

**Región I:** Primeramente, realizaremos, a partir de la ecuación (5.1), la derivada en la región I:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_m^I}{dx} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{tz} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi g}{tz}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{tz}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{tz}\right) - \\ &- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch}\left(\frac{w\pi tz}{g}\right) \cosh\left[\frac{w\pi(tz-x)}{g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{w\pi y}{g}\right) + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch}\left(\frac{q\pi tz}{g}\right) \cosh\left(\frac{q\pi x}{g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{g}\right) \end{aligned}$$

Multiplicaré por  $g$  a esta ecuación para poder simplificarla. Luego tendré cuidado de multiplicar también por  $g$  a la derivada normal en la región II, para que todo quede igual.

$$\begin{aligned} g \frac{d\varphi_m^I}{dx} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,1} g \frac{n\pi}{tz} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi g}{tz}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{tz}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi g y}{tz}\right) - \\ &- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w\pi \operatorname{csch}\left(\frac{w\pi tz}{g}\right) \cosh\left[\frac{w\pi(tz-x)}{g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{w\pi g y}{g}\right) + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q q\pi \operatorname{csch}\left(\frac{q\pi tz}{g}\right) \cosh\left(\frac{q\pi x}{g}\right) \operatorname{sen}\left(q\pi \frac{y}{g}\right) \end{aligned}$$

Antes de proseguir voy a definir unas nuevas constantes en función de las que ya tengo con la intención de simplificar aún más el formulismo:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\lambda}{g} = \frac{t+s}{g} \\ \beta &= \frac{s}{s+t} \Rightarrow 1-\beta = \frac{t}{s+t} \\ \alpha &= \frac{h}{h+g} \Rightarrow 1-\alpha = \frac{g}{h+g} \end{aligned}$$

pudiendo expresar:

$$\begin{aligned} \frac{s}{g} &= \mu\beta; \quad \frac{t}{g} = \mu(1-\beta) \\ \frac{h+g}{g} &= \frac{1}{1-\alpha}; \quad \frac{h}{g} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \frac{t}{h+g} &= \mu(1-\beta)(1-\alpha); \quad \frac{s}{h+g} = \mu\beta(1-\alpha); \quad \frac{t+s}{h+g} = \mu(1-\alpha) \end{aligned}$$

que sustituidas en la expresión de la derivada resulta:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^I}{dx} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,1} g \frac{n\pi}{tz} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \frac{y}{g} \right] - \\
 &- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w \pi \operatorname{csch} [w \pi \mu(1-\beta)z] \cosh \left[ \frac{w\pi(tz-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( w \pi \frac{y}{g} \right) + \\
 &+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q q \pi \operatorname{csch} [q\pi \mu(1-\beta)z] \cosh \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( q\pi \frac{y}{g} \right)
 \end{aligned}$$

En la frontera común CD con la región II, el valor de las abcisas en la región I para cualquier punto es  $x = tz$ , valor que sustituido en la derivada anterior nos proporciona:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=tz} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \frac{y}{g} \right] - \\
 &- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w \pi \operatorname{csch} [w \pi \mu(1-\beta)z] \operatorname{sen} \left( w \pi \frac{y}{g} \right) \\
 &+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q q \pi \coth [q\pi \mu(1-\beta)z] \operatorname{sen} \left( q \pi \frac{y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Región II:** Calculemos la derivada en la región II de un modo similar a como la hemos hallado para la región I. Primeramente, realizaremos a partir de la ecuación (5.2) la derivada en la región II:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned}$$

De igual forma que lo realizamos al calcular la derivada en la región I, multiplicaré por  $g$  a esta ecuación para poder simplificarla.

$$\begin{aligned}
g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,2} g \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi g y}{s g} \right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 g \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi g y}{h+g g} \right) - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} g \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi g y}{h+g g} \right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$  definidas previamente, en la expresión de la derivada resulta:

$$\begin{aligned}
g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{\mu\beta g} \right) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \frac{y}{g} \right] - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \frac{y}{g} \right]
\end{aligned}$$

Ahora realizaremos una traslación del origen de coordenadas de la región II para dejarlo a la misma altura que el origen de las regiones I y III con las que limita. Por tanto, la traslación  $y = y + h$  nos situará las ordenadas de los centros de coordenadas de las regiones I, II y III al mismo nivel, resultando, de esta manera que la derivada de la distribución de potencial de la región II queda:

$$\begin{aligned}
g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{\mu\beta} \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
\end{aligned}$$

En la frontera común CD con la región I, el valor de las abcisas en la región II para cualquier punto es  $x = 0$ , valor que sustituido en la derivada anterior

nos proporciona:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ ,

En la frontera común GH con la región III, el valor de las abcisas en la región II para cualquier punto es  $x = s$ , valor que sustituido en la derivada anterior nos proporciona:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=s} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 n\pi(1-\alpha) \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^2$  y  $K_n^{2'}$  vienen dados por la ecuación (5.3).

Del mismo modo realizaríamos las derivadas en las restantes regiones, teniendo que realizar un desplazamiento del origen de coordenadas en las regiones tipo ranura (regiones IV y VI) para situar los ejes de coordenadas a la misma altura que el de las regiones tipo diente con las que limitan (regiones III, V y VII). Las derivadas obtenidas se muestran a continuación.

**Región III:** A partir de la ecuación (5.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &- \sum_{l=1}^{\infty} M_l l \pi \operatorname{coth} [l \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( l \pi \frac{y}{g} \right) \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} L_m m \pi \operatorname{csch} [m \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( m \pi \frac{y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.15}$$



para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
&\quad - \sum_{l=1}^{\infty} M_l l \pi \operatorname{csch} [l \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( l \pi \frac{y}{g} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} L_m m \pi \operatorname{coth} [m \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( m \pi \frac{y}{g} \right)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Región IV:** A partir de la ecuación (5.5) obtenemos:

$$\begin{aligned}
g \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu\beta} \operatorname{csc h} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 n \pi (1-\alpha) \operatorname{csch} [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} n \pi (1-\alpha) \operatorname{coth} [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.17}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
g \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=s} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4V_0}{\mu\beta} \operatorname{csc h} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 n \pi (1-\alpha) \operatorname{coth} [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} n \pi (1-\alpha) \operatorname{csch} [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.18}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^4$  y  $K_n^{4'}$  vienen dadas por la ecuación (5.6).

**Región V:** A partir de la ecuación (5.7) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^V}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \sinh \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &\quad - \sum_{r=1}^{\infty} P_r r \pi \coth [r \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( r \pi \frac{y}{g} \right) \\
 &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} R_p p \pi \operatorname{csch} [p \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( p \pi \frac{y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^V}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \sinh \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &\quad - \sum_{r=1}^{\infty} P_r r \pi \operatorname{csch} [r \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( r \pi \frac{y}{g} \right) \\
 &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} R_p p \pi \coth [p \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( p \pi \frac{y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Región VI:** A partir de la ecuación (5.8) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \sinh \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 n \pi (1-\alpha) \operatorname{csch} [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} n \pi (1-\alpha) \coth [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
g \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \Big|_{x=s} &= - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 n\pi(1-\alpha) \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.22}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^6$  y  $K_n^{6'}$  vienen dadas por la ecuación (5.9).

**Región VII:** A partir de la ecuación (5.10) obtenemos:

$$\begin{aligned}
g \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \Big|_{x=0} &= - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \frac{y}{g} \right] - \\
&- \sum_{u=1}^{\infty} V_u u \pi \coth [u \pi \mu(1-\beta)(1-z)] \operatorname{sen} \left( u \pi \frac{y}{g} \right) - \\
&- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w \pi \operatorname{csch} [w \pi \mu(1-\beta)] (1-z) \operatorname{sen} \left( w \pi \frac{y}{g} \right)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
g \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \Big|_{x=t(1-z)} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \frac{y}{g} \right] - \\
&- \sum_{u=1}^{\infty} V_u u \pi \operatorname{csch} [u \pi \mu(1-\beta)(1-z)] \operatorname{sen} \left( u \pi \frac{y}{g} \right) - \\
&- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w \pi \coth [w \pi \mu(1-\beta)(1-z)] \operatorname{sen} \left( w \pi \frac{y}{g} \right)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Región VIII:** A partir de la ecuación (5.11) obtenemos:

$$\begin{aligned}
g \frac{d\varphi_m^{VIII}}{dx} \Big|_{x=0} &= - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \frac{y}{g} \right] + \\
&+ \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w \pi \coth [w \pi \mu(1-\beta)z] \operatorname{sen} \left( w \pi \frac{y}{g} \right) - \\
&- \sum_{q=1}^{\infty} H_q q \pi \operatorname{csch} [q \pi \mu(1-\beta)z] \operatorname{sen} \left( q \pi \frac{y}{g} \right)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

### Ecuaciones en las fronteras comunes

Una vez obtenidas las derivadas en cada región e igualando la derivada normal de la función potencial en la frontera común a dos regiones contiguas, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

**Frontera común región I y región II:** A partir de las ecuaciones (5.12) y (5.13) y aplicando que

$$\frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=tz} = \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=0}$$

o lo que es equivalente:

$$g \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=tz} = g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ w\pi \operatorname{csch}[w\pi\mu(1-\beta)z] \operatorname{sen}\left(w\pi\frac{y}{g}\right) \right\} Q_w + \\
& + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ q\pi \operatorname{coth}[q\pi\mu(1-\beta)z] \operatorname{sen}\left(q\pi\frac{y}{g}\right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi(1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right) + \frac{2nq(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \operatorname{coth}[n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen}\left[n\pi(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g}\right)\right] \left. \right\} H_q - \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi(1-\alpha)^2 \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{l\pi h}{g}\right) + \frac{2nl(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{l,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \operatorname{csch}[n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen}\left[n\pi(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g}\right)\right] \left. \right\} M_l = \\
& = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,1} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \operatorname{csch}\left[\frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \frac{y}{g}\right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{\mu\beta} \operatorname{csch}\left[\frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{\mu\beta}\left(\frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

**Frontera común región II y región III:** A partir de las ecuaciones (5.14) y (5.15) y aplicando que

$$\frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=s} = \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=0}$$

o lo que es equivalente:

$$g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=s} = g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right) + \frac{2nq(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \operatorname{csch}[n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen}\left[n\pi(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g}\right)\right] \left. \right\} H_q + \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ l\pi \operatorname{coth}[l\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen}\left(l\pi\frac{y}{g}\right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{l\pi h}{g}\right) + \frac{2nl(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{l,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \operatorname{coth}[n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen}\left[n\pi(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g}\right)\right] \left. \right\} M_l - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m\pi \operatorname{csch}[m\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen}\left(m\pi\frac{y}{g}\right) \right\} L_m = \\
& = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,2} \frac{n\pi}{\mu\beta} \operatorname{csch}\left[\frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{\mu\beta}\left(\frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch}\left[\frac{n\pi}{\mu(1-\beta)}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{\mu(1-\beta)}\frac{y}{g}\right]
\end{aligned} \tag{5.27}$$

**Frontera común región III y región IV:** A partir de las ecuaciones (5.16) y (5.17) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=t} = \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=t} = g \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ l\pi \operatorname{csch} [l\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( l\pi \frac{y}{g} \right) \right\} M_l + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m\pi \operatorname{coth} [m\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{m\pi h}{g} \right) + \frac{2nm(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{m^2-n^2(1-\alpha)^2} (1-\delta_{m,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \operatorname{coth} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} L_m - \\
& - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{r\pi h}{g} \right) + \frac{2nr(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{r^2-n^2(1-\alpha)^2} (1-\delta_{r,n(1-\alpha)}) \right] * \right. \\
& * \operatorname{csch} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} P_r = \\
& = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.28}$$

**Frontera común región IV y región V:** A partir de las ecuaciones (5.18) y (5.19) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=s} = \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=s} = g \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{m\pi h}{g}\right) + \frac{2nm(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{m^2-n^2(1-\alpha)^2} (1-\delta_{m,n(1-\alpha)}) \right] \right. \\
& \cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} L_m + \\
& + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ r\pi \operatorname{coth} [r\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( r\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{r\pi h}{g}\right) + \frac{2nr(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{r^2-n^2(1-\alpha)^2} (1-\delta_{r,n(1-\alpha)}) \right] \\
& \cdot \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} P_r - \\
& - \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ p\pi \operatorname{csch} [p\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( p\pi \frac{y}{g} \right) \right\} R_p = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right]
\end{aligned} \tag{5.29}$$

**Frontera común región V y región VI:** A partir de las ecuaciones (5.20) y (5.21) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=t} = \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=t} = g \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=0}$$



para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ r\pi \operatorname{csch} [r\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( r\pi \frac{y}{g} \right) \right\} P_r + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ p\pi \operatorname{coth} [p\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( p\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{p\pi h}{g} \right) + \frac{2np(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{p^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{p,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \operatorname{coth} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} R_p - \\
& - \sum_{u=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{u,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{u\pi h}{g} \right) + \frac{2nu(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{u^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{u,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \operatorname{csch} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} V_u = \\
& = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,4} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \frac{n\pi}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.30}$$

**Frontera común región VI y región VII:** A partir de las ecuaciones (5.22) y (5.23) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=s} = \left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=s} = g \left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{p\pi h}{g}\right) + \frac{2np(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{p^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{p,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} R_p + \\
& + \sum_{u=1}^{\infty} \left\{ u\pi \operatorname{coth} [u\pi\mu(1-\beta)(1-z)] \operatorname{sen} \left( u\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{u,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{u\pi h}{g}\right) + \frac{2nu(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{u^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{u,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} V_u - \\
& + \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ w\pi \operatorname{csch} [w\pi\mu(1-\beta)(1-z)] \operatorname{sen} \left( w\pi \frac{y}{g} \right) \right\} Q_w = \\
& = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,5} \frac{n\pi}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \frac{y}{g} \right]
\end{aligned} \tag{5.31}$$

**Frontera común región VII y región VIII:** A partir de las ecuaciones (5.24) y (5.25) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=t(1-z)} = \left. \frac{d\varphi_m^{VIII}}{dx} \right|_{x=0} = - \left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=t(1-z)} = g \left. \frac{d\varphi_m^{VIII}}{dx} \right|_{x=0} = -g \left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{u=1}^{\infty} \left\{ u\pi \operatorname{csch} [u\pi \mu(1-\beta)(1-z)] \operatorname{sen} \left( u\pi \frac{y}{g} \right) \right\} V_u - \\
& - \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ w\pi [\operatorname{coth} [w\pi \mu(1-\beta)(1-z)] + \operatorname{coth} [w\pi \mu(1-\beta)z]] \operatorname{sen} \left( w\pi \frac{y}{g} \right) \right\} Q_w + \\
& + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ q\pi \operatorname{csch} [q\pi \mu(1-\beta)z] \operatorname{sen} \left( q\pi \frac{y}{g} \right) \right\} H_q = \\
& = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,6} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)(1-z)} \frac{y}{g} \right] - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)z} \frac{y}{g} \right]
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Las 7 ecuaciones anteriores (desde (5.26) hasta (5.32)), se deben cumplir simultáneamente y a través de su resolución, en la que se emplearán métodos numéricos, obtendremos los valores de los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$ ,  $R_p$  y  $V_u$ .

Para ello, por ejemplo, elegiremos unos valores máximos para  $w$ ,  $q$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $p$  y  $u$ , como  $Q$  (puede ser el mismo valor para todas), y elegiremos  $Q$  diferentes valores para la variable  $y/g$  dentro de su rango. De esta manera tendremos  $7 \cdot Q$  ecuaciones con  $7 \cdot Q$  incógnitas (los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$ ,  $R_p$  y  $V_u$ ).

Una vez hallados los valores de los coeficientes y fijadas las dimensiones de la geometría, podemos conocer el valor del potencial escalar en cualquier punto del entrehierro de la máquina, sin más que sustituir en las ecuaciones del potencial en cada región (ecuaciones (5.1) a (5.10)) los correspondientes coeficientes, las dimensiones de la geometría y las coordenadas del punto o puntos donde se calculará el potencial magnético escalar. En las siguientes figuras, se muestra la distribución del potencial magnético escalar en el entrehierro de nuestra máquina, para valores del parámetro  $z$  de 0.25 (figura 5.15), de 0.5 (figura 5.16) y de 0.75 (figura 5.17), donde los valores de la geometría son los mismo para todas ellas y de valores  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$ .

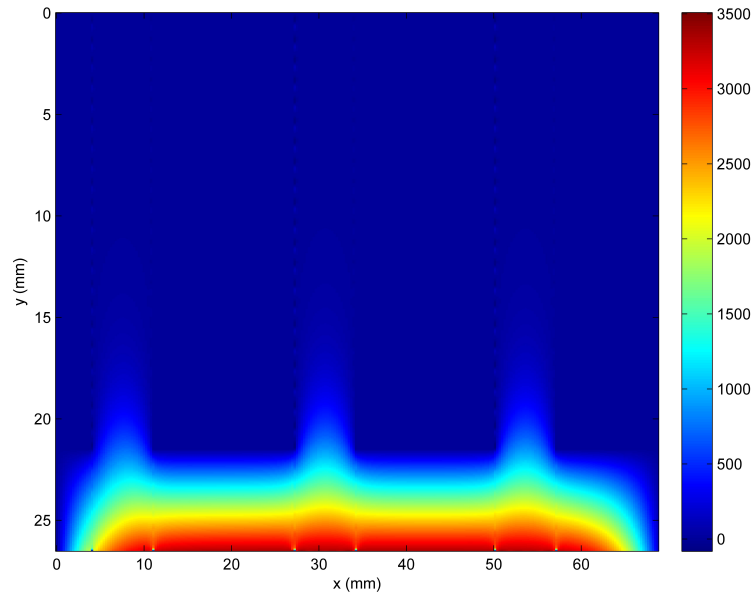


Figura 5.15: Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $z = 0.25$ .

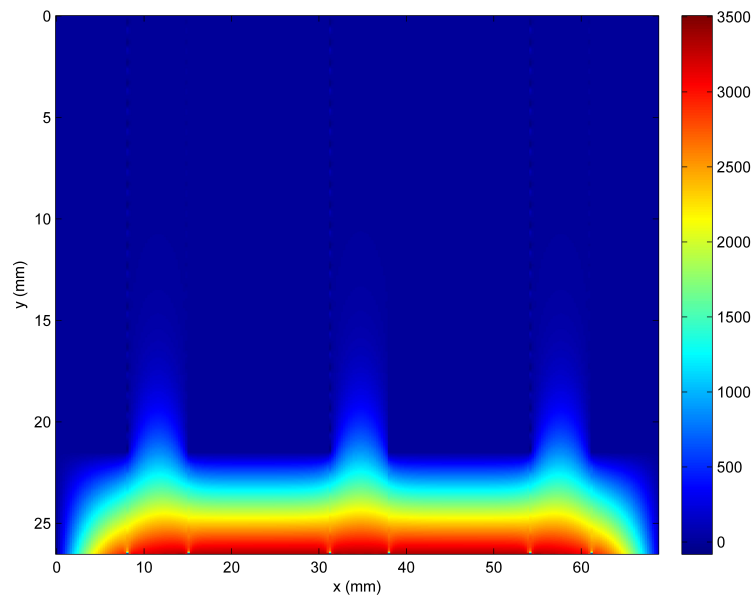


Figura 5.16: Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $z = 0.5$ .

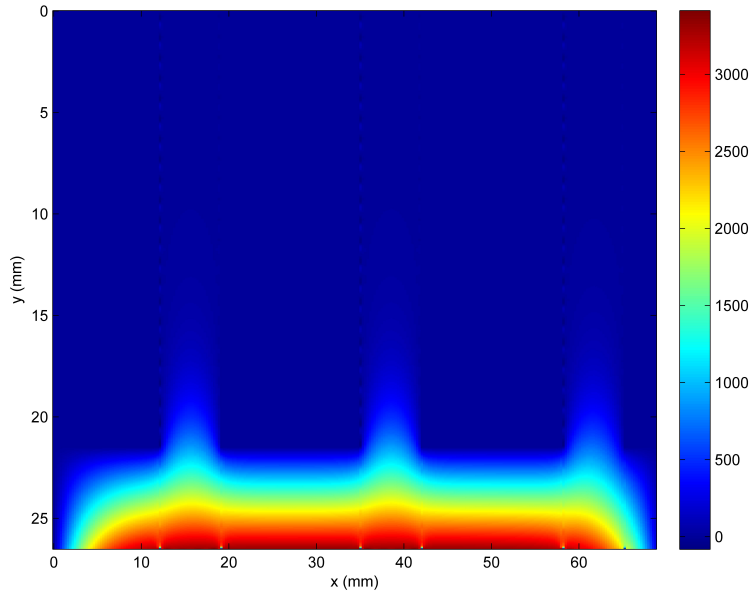


Figura 5.17: Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $z = 0.75$ .

Para ver con mayor detalle la solución proporcionada por el método expuesto, vamos a obtener la variación del potencial magnético escalar a lo largo de un polo en tres alturas del entrehierro:

- Superficie del rotor: El valor de la ordenada es  $y = g$  en las regiones tipo diente e  $y = h + g$  en las regiones tipo ranura.
- Medio del entrehierro: El valor de la ordenada será  $y = g/2$  en las regiones tipo diente e  $y = h + g/2$  en las regiones tipo ranura.
- Superficie del estator: El valor de la ordenada es  $y = 0$  en las regiones tipo diente e  $y = h$  en las regiones tipo ranura.

Tomaremos como valor de  $z$  el de 0.5 e imponiendo los valores correspondiente de la ordenada en las expresiones del potencial en cada región y variando la abscisa desde 0 hasta  $\tau_p$  obtendremos el valor del potencial magnético escalar en cada una de las alturas señaladas. La figura 5.18 muestra dichas variaciones.

A la vista de los resultados obtenidos, podemos destacar:

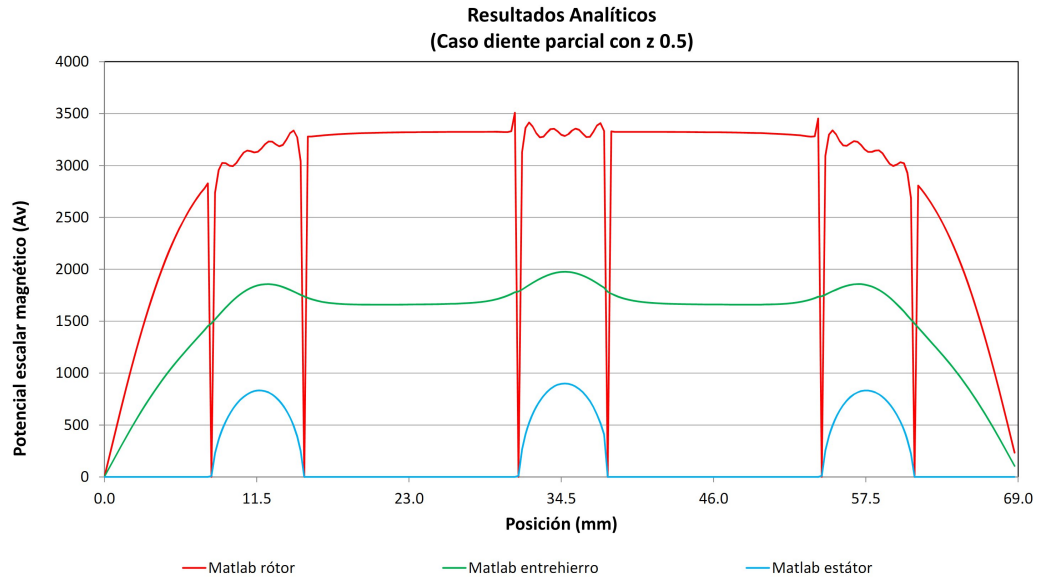


Figura 5.18: Potencial magnético escalar en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Parcial con  $z = 0.5$ .

- Igual que sucedía con la máquina lisa, una magnetización positiva origina un potencial magnético escalar positivo, y, debido a la alternancia de polos, existirá una alternancia en el signo del potencial escalar, provocando que el potencial sea cero al principio del polo y tienda de nuevo a cero al final del mismo.
- A medida que nos alejamos del rotor, el potencial magnético escalar disminuye de valor, siendo cero cuando está en contacto con el estátor.
- La presencia de las ranuras, perturba al potencial magnético escalar haciendo que éste aumente a medida que nos acercamos al centro de la ranura y disminuyendo según vamos aproximando a los extremos de la misma. Esta perturbación es debida a que las ranuras aumentan la cantidad de aire que tiene que atravesar el campo magnético, necesitando un potencial magnético mayor para lograrlo.
- La perturbación de las ranuras es mayor cuanto más próximos estamos del estátor, ya que este volumen de aire de las ranuras tiene más influencia cuanto menos aire queda por atravesar: en la superficie del rotor el aire que tiene que atravesar el flujo es el del entrehierro más el de las ranuras; a medida que nos acercamos al estátor, el aire del entrehierro

es menor y mayor peso tiene el de las ranuras sobre el global.

- En la superficie del rotor, se observan oscilaciones en las fronteras entre dos regiones, como consecuencia de las discontinuidades existentes en esas fronteras. Estas discontinuidades viene dadas por las funciones que hemos empleado para definir la banda de magnetización en las regiones que la poseen (regiones I, II, III, V, VI y VII para el caso ranura parcial) las cuales mostrábamos en la figura 5.6 para  $z = 0.5$ . En esta figura se observa cómo, en todas las funciones  $f_i$ , la aproximación que realizamos presentan discontinuidades en cero y en los extremos, consecuencia directa de realizar un desarrollo en serie de Fourier de una función impar.

Estas oscilaciones del potencial magnético escalar se van amortiguando a medida que nos alejamos del rotor, no siendo apreciables en el medio del entrehierro ni en la superficie del estator.

### 5.1.2. Ranura completa

A partir de la posición de Diente Parcial y como consecuencia del movimiento del rotor, llegamos al caso de Ranura Completa; ahora, la posición relativa de los imanes respecto el ranurado es tal que el principio del polo coincide con el comienzo de una ranura del ranurado. La geometría considerada se muestra en la figura 5.19. El problema del cálculo del potencial magnético escalar en el entrehierro se reduce al cálculo del campo en el área rayada.

En esta situación, la banda de desmagnetización es simétrica y su anchura es constante y de valor el paso de ranura, es decir,  $t + s$ , anchura suficiente para que el potencial del imán se estabilice, tal y como habíamos comprobado cuando definíamos la banda de desmagnetización (apartado 4.3.3). Por otro lado, con esta anchura de las bandas de desmagnetización, conseguimos que las discontinuidades en el polo coincidan con discontinuidades en el estator y, por lo tanto, el número de regiones que obtengamos vengan determinadas solamente por las discontinuidades del estator. En la figura 5.19 hemos resaltado las bandas de desmagnetización del imán y las distintas regiones que se originan. En la figura 5.20 hemos planteado el problema del potencial para el área rayada de la figura 5.19, donde podemos observar que se originan seis regiones por polo.

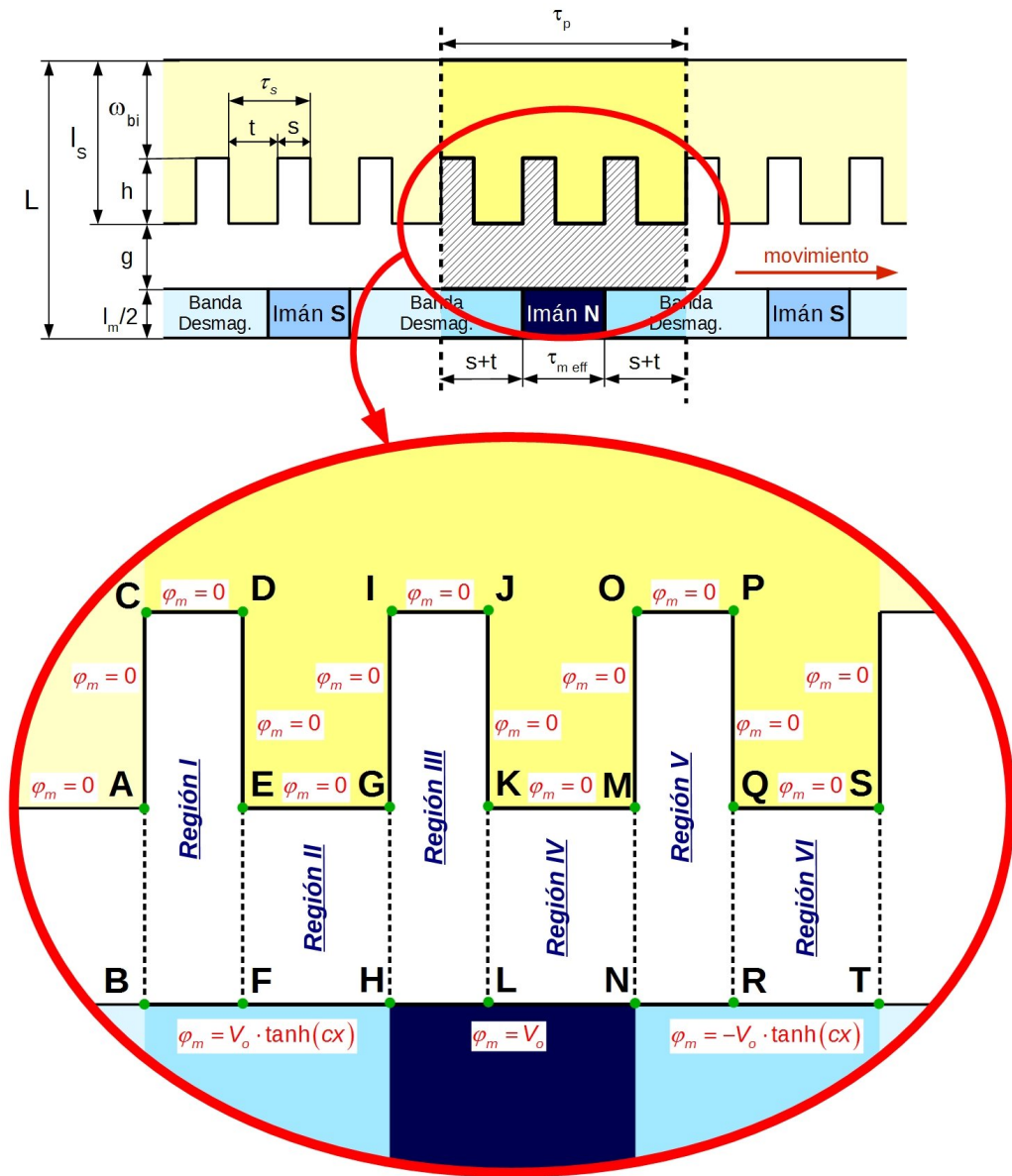


Figura 5.19: Caso Ranura Completa: El principio del polo coincide con el comienzo de una ranura del ranurado.





función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \quad x \in [-t, 0] \cup [0, t]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,2}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_3(x)$ : Definimos  $f_3(x)$  mediante la expresión:

$$f_3(x) = \begin{cases} V_o \cdot \tanh [c \cdot (-x - t - s)] & x \in [-s, 0] \\ -V_o \cdot \tanh [c \cdot (x - t - s)] & x \in [0, s] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \quad x \in [-s, 0] \cup [0, s]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,3}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_4(x)$ : Definimos  $f_4(x)$  mediante la expresión:

$$f_4(x) = \begin{cases} V_o \cdot \tanh [c \cdot (-x - t)] & x \in [-t, 0] \\ -V_o \cdot \tanh [c \cdot (x - t)] & x \in [0, t] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \quad x \in [-t, 0] \cup [0, t]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,4}$  mediante cálculo numérico.

En la figura (5.21) se muestran las funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  y  $f_4(x)$ , donde los valores de la geometría son  $V_o = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$ , donde el trazo continuo rojo muestra la función exacta y con puntos amarillos la aproximación mediante el desarrollo en serie de Fourier.

Una vez definidas las funciones  $f_i(x)$ , sólo nos resta definir las que existen en las fronteras comunes. Como se puede observar existen 6 regiones claramente diferenciadas e interconectadas a través de las fronteras comunes AB, EF, GH, KL, MN, QR, y ST. Se debe cumplir que el potencial magnético escalar y su derivada espacial deben ser continuos a través de estas fronteras. Basándonos en esta propiedad resolveremos el problema en los dos pasos ya conocidos:

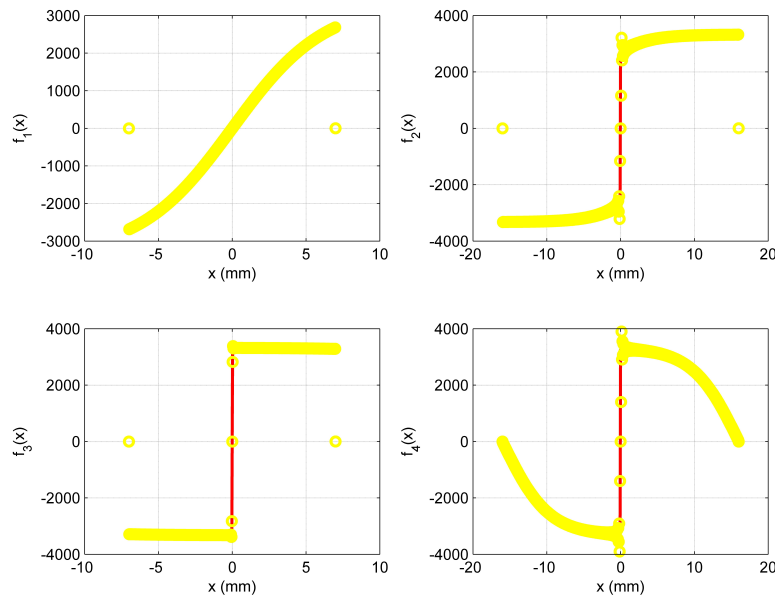


Figura 5.21: Funciones del perfil de magnetización para el caso de Ranura Completa

1. Impondremos una distribución de potencial arbitraria a lo largo de las fronteras comunes AB, EF, GH, KL, MN, QR, y ST. Estas distribuciones vendrán expresadas en forma de un desarrollo de Fourier en seno en el que los coeficientes son variables por determinar (justificación en el apéndice B). Debido a la periodicidad del problema, las distribuciones de potencial en las fronteras AB y ST serán iguales pero con signo contrario. Ahora que tenemos especificadas las condiciones de contorno en ambas regiones a cada lado de las fronteras resolveremos, por separado, la distribución de potencial en cada región.
2. Obtendremos los coeficientes del desarrollo de Fourier de la distribución de potencial en las fronteras AB (o ST), EF, GH, KL, MN y QR, igualando la derivada normal de la función potencial en ambas regiones a lo largo de cada frontera.

### Distribuciones de potencial en las fronteras comunes

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común AB es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{AB} = \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{sen} \left[ \frac{w\pi(y-h)}{g} \right]$$

donde  $Q_w$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común EF es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{EF} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(y-h)}{g} \right] \text{ para } h \leq y \leq h + g \text{ en la región I, y}$$

$$\blacksquare \varphi_m^{EF} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región II}$$

donde  $H_q$  son los coeficientes a determinar.

Estas dos fórmulas son la misma distribución excepto un desplazamiento en las ordenadas, pues en la región I tomamos el origen de coordenadas en el punto C con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia D y A, respectivamente, y en la región II tomamos el origen de coordenadas en el punto E con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia G y F.

En las otras 5 fronteras GH, KL, MN, QR y ST procederemos de forma similar. La distribución de potencial que impondremos a la frontera común GH es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{GH} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región II, y}$$

$$\blacksquare \varphi_m^{GH} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{sen} \left[ \frac{l\pi(y-h)}{g} \right] \text{ para } h \leq y \leq h + g \text{ en la región III}$$

donde  $M_l$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común KL es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{KL} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{sen} \left[ \frac{m\pi(y-h)}{g} \right] \text{ para } h \leq y \leq h + g \text{ en la región III, y}$$

$$\blacksquare \varphi_m^{KL} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región IV}$$

donde  $L_m$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común MN es de la forma:

- $\varphi_m^{MN} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región IV, y
- $\varphi_m^{MN} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{sen} \left[ \frac{r\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h+g$  en la región V

donde  $P_r$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que imponemos a la frontera común QR es de la forma:

- $\varphi_m^{QR} = \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{sen} \left[ \frac{p\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h+g$  en la región V, y
- $\varphi_m^{QR} = \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región VI

donde  $R_p$  son los coeficientes a determinar.

Si tenemos en cuenta la periodicidad del problema (periodicidad anticíclica), los coeficientes de la distribución de potencial que imponemos a la frontera común ST deben de ser iguales a los de la frontera AB pero con signo contrario. Por ello, la distribución de potencial en la frontera común ST es de la forma:

- $\varphi_m^{ST} = - \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región VI, y
- $\varphi_m^{ST} = - \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{sen} \left[ \frac{w\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h+g$  en la región VII.

donde  $Q_w$  son los coeficientes a determinar.

### Expresiones del potencial escalar

Una vez establecidas las distribuciones de potencial en las fronteras comunes a cada región, vamos a determinar la expresión del potencial en las diferentes regiones, aplicando, como en el caso anterior, el principio de superposición junto con las respuestas obtenidas en los casos estudiados en el anexo C. Estas expresiones se encuentran el apartado D.1 del apéndice D.

### Expresiones de las derivadas en las fronteras laterales

Una vez obtenidas las expresiones del potencial escalar en las seis regiones podemos obtener un conjunto de ecuaciones en función de los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$  y  $R_p$  sin más que plantear en las fronteras comunes que:

$$\frac{dv_j}{dx} = \frac{dv_{j+I}}{dx}$$

o, lo que es lo mismo:

$$g \frac{dv_j}{dx} = g \frac{dv_{j+I}}{dx}$$

con  $j = I, II, III, \dots, VI$ .

Determinemos las correspondientes derivadas, siguiendo un procedimiento similar al empleado en el caso Diente Parcial, donde introduciremos las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$  definidas en el citado caso. Igualmente y con el fin de situar los ejes de coordenadas en las regiones tipo ranura (regiones I, III y V) a la misma altura que el de las regiones tipo diente con las que limitan (regiones II, IV y VI), realizaremos una traslación del origen de coordenadas de aquellas. La traslación  $y = y + h$  nos situará las ordenadas de los centros de coordenadas de las regiones ranura al mismo nivel que el de las regiones diente. Las derivadas obtenidas se muestran en el apartado D.2 del apéndice D.

### Ecuaciones en las fronteras comunes

Una vez obtenidas las derivadas en cada región e igualando la derivada normal de la función potencial en la frontera común a dos regiones contiguas, obtenemos el sistema de ecuaciones que se muestra en el apartado D.3 del apéndice D.

Las 6 ecuaciones que forman este sistema de ecuaciones (desde (D.23) hasta (D.28)), se deben cumplir simultáneamente y a través de su resolución, en la que se emplearán métodos numéricos, obtendremos los valores de los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$  y  $R_p$ .

Para ello, por ejemplo, elegiremos unos valores máximos para  $w$ ,  $q$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $r$  y  $p$ , como  $Q$  (puede ser el mismo valor para todas), y elegiremos  $Q$  diferentes valores para la variable  $y/g$  dentro de su rango. De esta manera tendremos  $6 \cdot Q$  ecuaciones con  $6 \cdot Q$  incógnitas (los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$  y  $R_p$ ).

Una vez fijadas las dimensiones de la geometría y hallados los valores de los coeficientes, podemos conocer el valor del potencial escalar en cualquier punto del entrehierro de la máquina, sin más que sustituir en las ecuaciones del potencial en cada región (ecuaciones (D.1) a (D.9)) los correspondientes coeficientes, las dimensiones de la geometría y las coordenadas del punto o puntos donde se calculará el potencial magnético escalar. En la siguiente figura (figura 5.22), se muestra la distribución del potencial magnético escalar en el entrehierro del polo norte, donde los valores de la geometría son  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $V_0 = 3318.52Av$ .

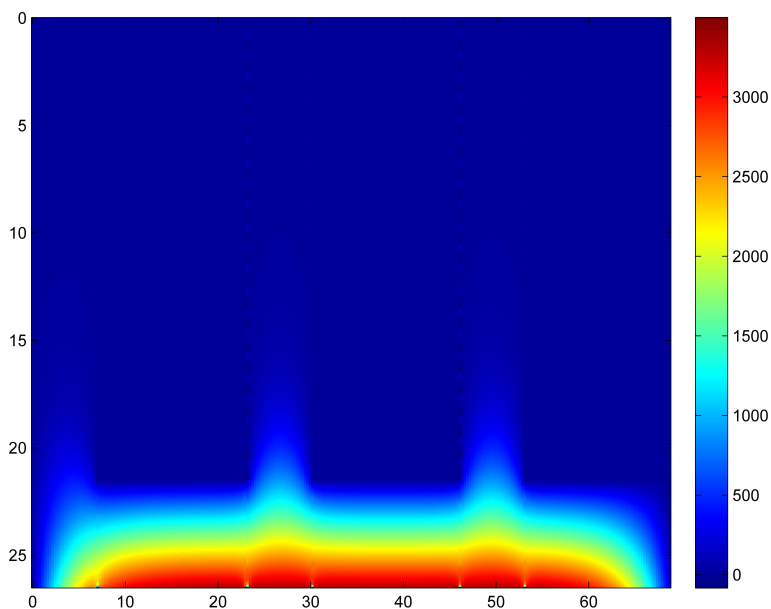


Figura 5.22: Potencial magnético escalar en el entrehierro de la máquina para el ejemplo numérico tal que  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$

De una forma análoga a la realiza para el caso Diente Parcial y para ver con mayor detalle la solución proporcionada por el método expuesto, vamos a obtener la variación del potencial magnético escalar a lo largo de un polo en las tres alturas del entrehierro ya mencionadas (superficie del rotor, medio del entrehierro y superficie del estator), las cuales se muestran en la figura 5.23.

Exceptuando el desplazamiento existente como consecuencia de ser el caso

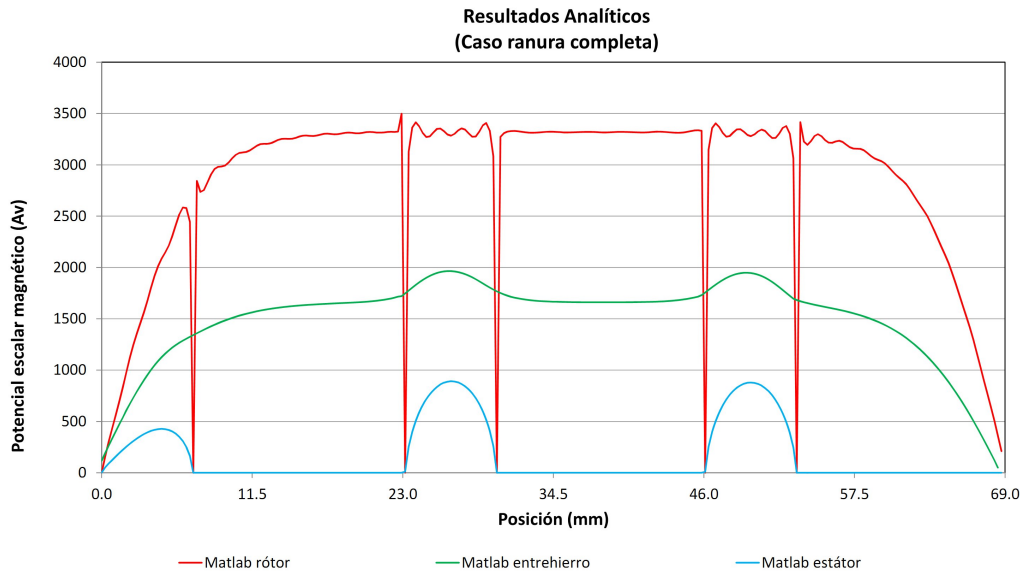


Figura 5.23: Potencial magnético escalar en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Completa.

Diente Completo, los resultados obtenidos son idénticos a los del caso Diente Parcial, pudiendo realizarse los mismos comentarios que las comentados entonces.

### 5.1.3. Ranura parcial

A partir de la posición de Ranura Completa y como consecuencia del movimiento del rotor, llegamos al caso de Ranura Parcial; ahora, la posición relativa de los imanes respecto el ranurado es tal que el principio del polo está situado debajo de una ranura del ranurado. La geometría considerada se muestra en la figura 5.24. El problema del cálculo del potencial magnético escalar en el entrehierro se reduce al cálculo del campo en el área rayada.

La situación que tenemos es similar a la vista en el caso de “Diente Parcial” (apartado 5.1.1): el principio del polo divide a la ranura en dos partes, estando una de las partes situada encima de un polo norte y la otra encima del polo sur contiguo. Al ser el paso del imán constante e igual a tres veces el paso de ranura, el que una fracción de la ranura esté en un lateral del imán implica necesariamente que la otra fracción estará en el otro lateral de ese mismo imán, tal y como podemos observar en la figura 5.24. Ya que  $s$  es el ancho de la ranura, seguiremos utilizando  $s$  para expresar la anchura de



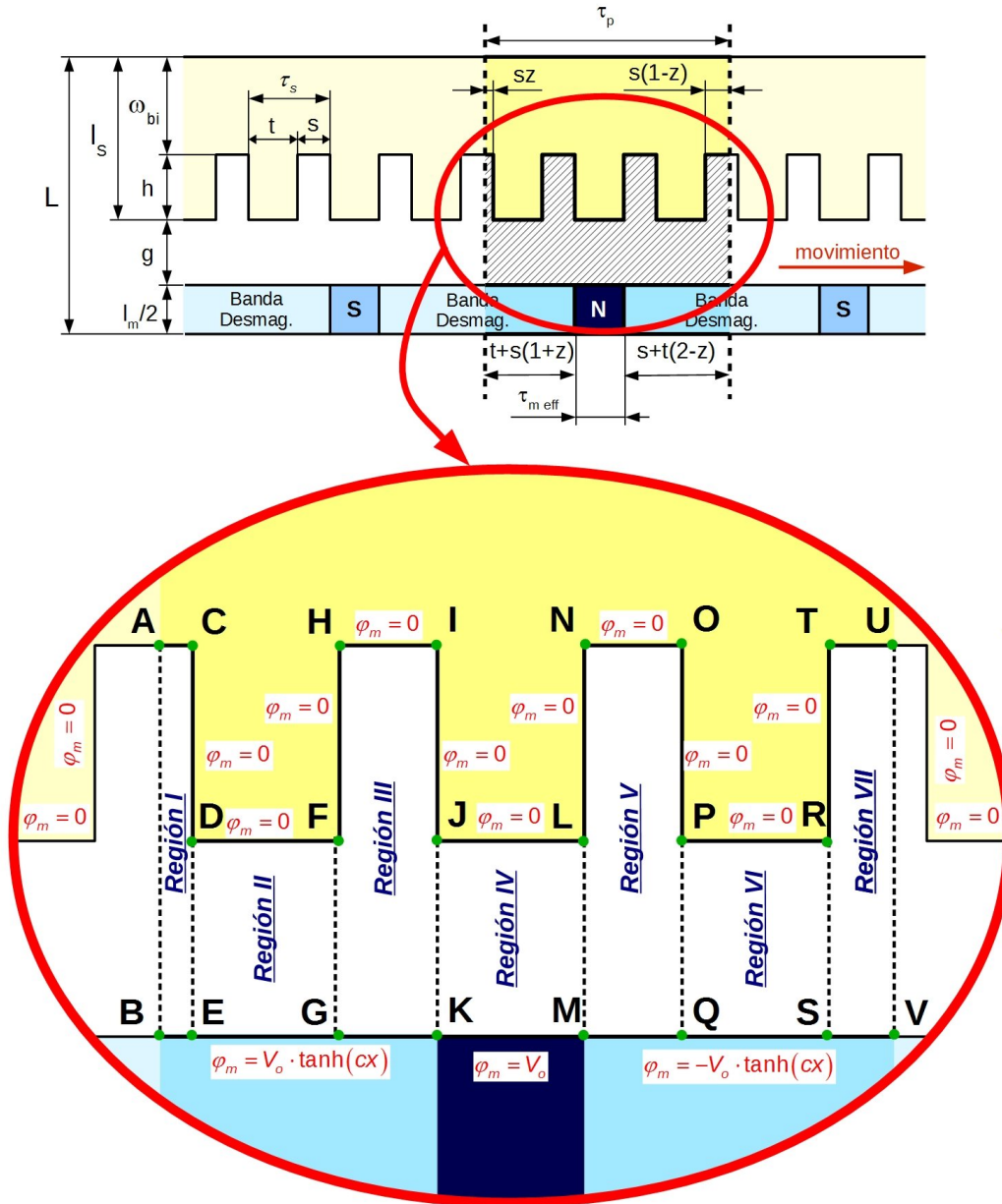


Figura 5.24: Caso Ranura Parcial: El principio del polo coincide con el comienzo de una ranura del ranurado.

cada una de las partes de la ranura junto con el parámetro  $z$  (definido en el apartado de Diente Parcial) y que varía entre 0 y 1: así  $sz$  será la anchura de una de las dos partes en que dividimos a la ranura y  $s - sz$ , es decir,  $s(1 - z)$  la anchura de la otra parte de la ranura (en la parte superior de la figura 5.24 se indican estas dimensiones).

Igualmente, aunque las geometrías que obtendríamos al tomar los valores extremos de  $z$  serían las correspondiente a "Diente Completo" ( $z = 0$ ) y "Ranura Completa" ( $z = 1$ ), no es posible estudiar estos casos a partir del de *Ranura Parcial*, ya que, como veremos más adelante, en algunas de las expresiones que vamos a obtener, los términos  $z$  y  $1 - z$  aparecen dividiendo y darían lugar a indeterminaciones al tomar  $z$  sus valores extremos. Es por ello por lo que sólo vamos a considerar los valores de  $z$  tal que  $0 < z < 1$  (los casos "Ranura Completa" y "Diente Completo" se estudian por separado en las secciones 5.1.2 y 5.1.4, respectivamente).

Del mismo modo que nos sucedía en el caso "Diente Parcial", con el fin de lograr el menor número de regiones posible, hemos hecho que la banda de desmagnetización del imán no sea simétrica y que su anchura no sea constante, si no que se pueda ajustar de tal modo, que el final de la banda coincida con una discontinuidad en el estátor (paso de ranura a diente o viceversa). De esta forma logramos que las discontinuidades en el imán coincidan con discontinuidades en el estátor y, por lo tanto, el número de regiones que obtengamos vengan determinadas solamente por las discontinuidades del estátor. En la figura 5.24 hemos resaltado las bandas de desmagnetización del imán, siendo el ancho de la banda de desmagnetización  $t + s(1 + z)$  para el lado izquierdo del imán y  $t + s(2 - z)$  para la parte derecha del imán. En ambos casos el valor mínimo de dicha banda es  $s + t$ , anchura suficiente para que el potencial del imán se estabilice, tal y como habíamos comprobado cuando definíamos la banda de desmagnetización (apartado 4.3.3).

Si consideráramos el ancho de la banda de desmagnetización constante e igual al paso de ranura, tal y como suponemos en los casos "Ranura Completa" y "Diente Completo", el número de regiones que se formarían vendrían originadas por discontinuidades en el estátor o por discontinuidades en el rotor, dando lugar a un número mayor de regiones y a una mayor complejidad en el estudio. En la figura 5.25 hemos planteado el problema del potencial para el área rayada de la figura 5.24, donde podemos observar que se originan siete regiones por polo; (si el ancho de la banda de desmagnetización fuera constante e igual al paso de ranura, obtendríamos nueve regiones por polo, igual que sucedía en el caso de Diente Parcial).

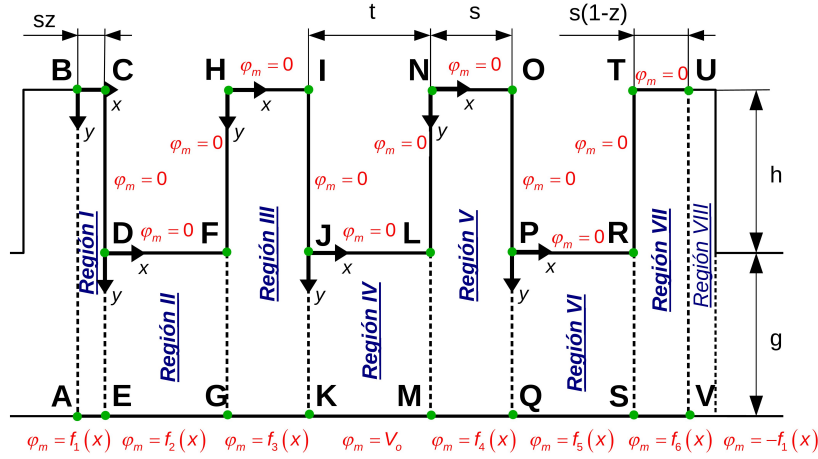


Figura 5.25: Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura 5.24

**Funciones de la banda de desmagnetización**

El esquema que vamos a seguir en este caso y en los siguientes coincide con el planteado en los casos de Diente Parcial y de Ranura Completa. Primeramente vamos a definir las funciones que representan a las bandas de desmagnetización en cada una de las regiones (funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ ,  $f_4(x)$ ,  $f_5(x)$  y  $f_6(x)$ ). En su definición emplearemos el mismo planteamiento expuesto en los casos precedentes: representar a la porción de banda de magnetización correspondiente a la región que estemos estudiando mediante una función impar para, posteriormente, expresarla mediante su desarrollo en serie de Fourier; el hecho de describirla como una función impar nos permite, empleando el caso #12 del anexo C, poder determinar la expresión del potencial magnético escalar que origina. Definamos cada una de estas funciones:

- Función  $f_1(x)$ : Definimos  $f_1(x)$  mediante la expresión:

$$f_1(x) = V_o \cdot \tanh(c \cdot x) \quad x \in [-sz, sz]$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{sz} \right) \quad x \in [-sz, sz]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,1}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_2(x)$ : Definimos  $f_2(x)$  mediante la expresión:

$$f_2(x) = \begin{cases} -V_o \cdot \tanh [c \cdot (-x + sz)] & x \in [-t, 0] \\ V_o \cdot \tanh [c \cdot (x + sz)] & x \in [0, t] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \quad x \in [-t, 0] \cup [0, t]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,2}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_3(x)$ : Definimos  $f_3(x)$  mediante la expresión:

$$f_3(x) = \begin{cases} -V_o \cdot \tanh [c \cdot (-x + sz + t)] & x \in [-s, 0] \\ V_o \cdot \tanh [c \cdot (x + sz + t)] & x \in [0, s] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \quad x \in [-s, 0] \cup [0, s]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,3}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_4(x)$ : Definimos  $f_4(x)$  mediante la expresión:

$$f_4(x) = \begin{cases} V_o \cdot \tanh \{c \cdot [-x - (s(2 - z) + t)]\} & x \in [-s, 0] \\ -V_o \cdot \tanh \{c \cdot [x - (s(2 - z) + t)]\} & x \in [0, s] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \quad x \in [-s, 0] \cup [0, s]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,4}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_5(x)$ : Definimos  $f_5(x)$  mediante la expresión:

$$f_5(x) = \begin{cases} V_o \cdot \tanh \{c \cdot [-x - (s(1 - z) + t)]\} & x \in [-t, 0] \\ -V_o \cdot \tanh \{c \cdot [x - (s(1 - z) + t)]\} & x \in [0, t] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_5(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \quad x \in [-t, 0] \cup [0, t]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,5}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_6(x)$ : Definimos  $f_6(x)$  mediante la expresión:

$$f_6(x) = \begin{cases} V_o \cdot \tanh \{c \cdot [-x - s(1 - z)]\} & x \in [-s(1 - z), 0] \\ -V_o \cdot \tanh \{c \cdot [x - s(1 - z)]\} & x \in [0, s(1 - z)] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_6(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \text{sen} \left[ \frac{n\pi x}{s(1-z)} \right] \quad x \in [-s(1-z), 0] \cup [0, s(1-z)]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,6}$  mediante cálculo numérico.

En las siguientes figuras, se muestra la funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ ,  $f_4(x)$ ,  $f_5(x)$  y  $f_6(x)$  para valores del parámetro  $z$  de 0.25 (figura 5.26), de 0.5 (figura 5.27) y de 0.75 (figura 5.28), donde los valores de la geometría son los mismo para todas ellas y de valores  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$ , donde el trazo continua rojo muestra la función exacta y con puntos amarillos la aproximación mediante el desarrollo en serie de Fourier.

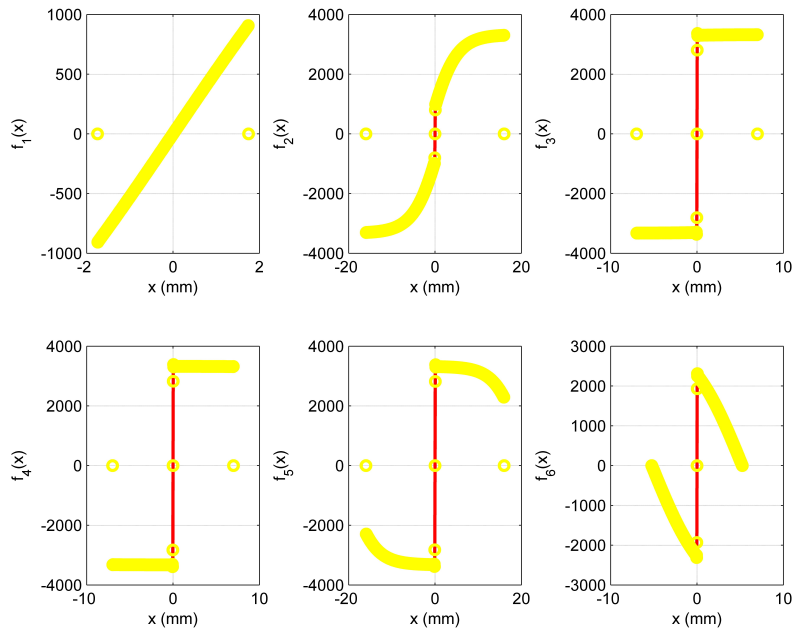


Figura 5.26: Funciones del perfil de magnetización para  $z = 0.25$

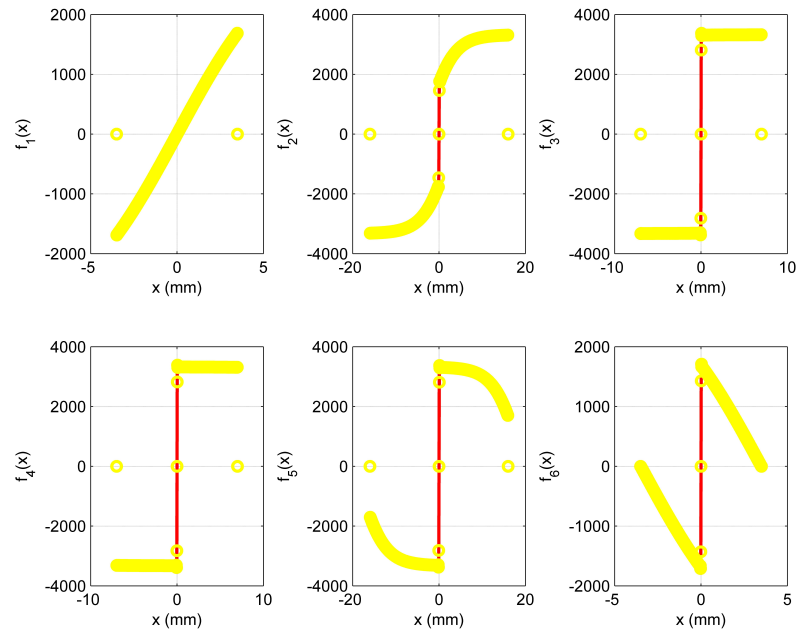


Figura 5.27: Funciones del perfil de magnetización para  $z = 0.5$

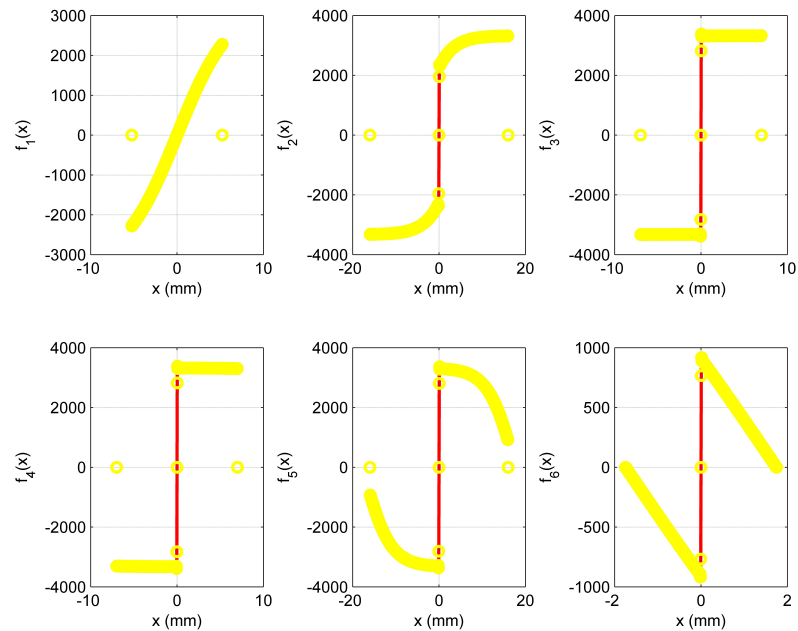


Figura 5.28: Funciones del perfil de magnetización para  $z = 0.75$

Una vez definidas las funciones  $f_i(x)$ , el paso siguientes es definir las que existen en las fronteras comunes. Ahora tenemos 7 regiones claramente diferenciadas e interconectadas a través de las fronteras comunes AB, DE, FG, JK, LM, PQ, RS y UV. Como ya sabemos, se debe cumplir que el potencial magnético escalar y su derivada espacial deben ser continuos a través de estas fronteras. Por ello, resolveremos el problema en los dos pasos ya conocidos:

1. Impondremos una distribución de potencial arbitraria a lo largo de las fronteras comunes AB, DE, FG, JK, LM, PQ, RS y UV. Estas distribuciones vendrán expresadas en forma de un desarrollo de Fourier en senos en el que los coeficientes son variables por determinar (justificación en el apéndice B). Debido a la periodicidad del problema, las distribuciones de potencial en las fronteras AB y UV serán iguales pero con signo contrario. Ahora que tenemos especificadas las condiciones de contorno en ambas regiones a cada lado de las fronteras resolveremos, por separado, la distribución de potencial en cada región.
2. Obtendremos los coeficientes del desarrollo de Fourier de la distribución de potencial en las fronteras AB (o UV), DE, FG, JK, LM, PQ y RS, igualando la derivada normal de la función potencial en ambas regiones a lo largo de cada frontera.

### Distribuciones de potencial en las fronteras comunes

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común AB es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{AB} = \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq h+g \text{ en la región I}$$

donde  $Q_w$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común DE es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{DE} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(y-h)}{g} \right] \text{ para } h \leq y \leq h+g \text{ en la región I, y}$$

$$\blacksquare \varphi_m^{DE} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región II}$$

donde  $H_q$  son los coeficientes a determinar.

Estas dos fórmulas son la misma distribución excepto un desplazamiento en las ordenadas, pues en la región I tomamos el origen de coordenadas en el punto A con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia C y B, respectivamente, y en la región II tomamos el origen de coordenadas en el punto D con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia F y E.

En las otras cinco fronteras FG, JK, LM, PQ y RS procederemos de forma similar. La distribución de potencial que impondremos a la frontera común FG es de la forma:

- $\varphi_m^{FG} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región II, y
- $\varphi_m^{FG} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{sen} \left[ \frac{l\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h + g$  en la región III

donde  $M_l$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común JK es de la forma:

- $\varphi_m^{JK} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{sen} \left[ \frac{m\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h + g$  en la región III, y
- $\varphi_m^{JK} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región IV

donde  $L_m$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común LM es de la forma:

- $\varphi_m^{LM} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región IV, y
- $\varphi_m^{LM} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{sen} \left[ \frac{r\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h + g$  en la región V

donde  $P_r$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común PQ es de la forma:

- $\varphi_m^{PQ} = \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{sen} \left[ \frac{p\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h + g$  en la región V, y



$$\blacksquare \varphi_m^{PQ} = \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región VI}$$

donde  $R_p$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común RS es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{RS} = \sum_{u=1}^{\infty} V_u \operatorname{sen} \left( \frac{u\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región VI, y}$$

$$\blacksquare \varphi_m^{RS} = \sum_{u=1}^{\infty} V_u \operatorname{sen} \left[ \frac{u\pi(y-h)}{g} \right] \text{ para } h \leq y \leq h+g \text{ en la región VII}$$

donde  $V_u$  son los coeficientes a determinar.

Si tenemos en cuenta la periodicidad del problema (periodicidad anticíclica), los coeficiente de la distribución de potencial que impondremos a la frontera común UV deben de ser iguales a los de la frontera AB pero con signo contrario. Por ello, la distribución de potencial en la frontera común UV es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{UV} = \sum_{w=1}^{\infty} (-Q_w) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq h+g \text{ en la región VII, y}$$

$$\blacksquare \varphi_m^{UV} = \sum_{w=1}^{\infty} (-Q_w) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq h+g \text{ en la región VIII}$$

donde  $Q_w$  son los coeficientes a determinar. Las distribuciones de potencial son las mismas y sin desplazamiento en las ordenadas, ya que ambos orígenes se encuentran a la misma altura (punto T para la región VII y punto U para la región VIII).

### Expresiones del potencial escalar

Una vez establecidas las distribuciones de potencial en las fronteras comunes a cada región, se determinarán la expresión del potencial en las diferentes regiones, aplicando, como en los casos anteriores, el principio de superposición junto con las respuesta obtenidas en los casos estudiados en el anexo C. Las expresiones correspondientes se recogen en el apartado E.1 del apéndice E.

### Expresiones de las derivadas en las fronteras laterales

Una vez obtenidas las expresiones del potencial escalar en las seis regiones podemos obtener un conjunto de ecuaciones en función de los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$  y  $R_p$  sin más que plantear en las fronteras comunes que:

$$\frac{dv_j}{dx} = \frac{dv_{j+I}}{dx}$$

o, lo que es lo mismo:

$$g \frac{dv_j}{dx} = g \frac{dv_{j+I}}{dx}$$

con  $j = I, II, III, \dots, VII$ .

Determinemos las correspondientes derivadas, siguiendo un procedimiento similar al empleado en los casos Diente Parcial y Ranura Completa, donde introduciremos las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$  definidas en el caso Diente Parcial. Igualmente y con el fin de situar los ejes de coordenadas en las regiones tipo ranura (regiones I, III, V y VII) a la misma altura que el de las regiones tipo diente con las que limitan (regiones II, IV y VI), realizaremos una traslación del origen de coordenadas de aquellas. La traslación  $y = y + h$  nos situará las ordenadas de los centros de coordenadas de las regiones ranura al mismo nivel que el de las regiones diente. En la frontera entre las regiones VII y VIII no realizaremos este desplazamiento ya que, al ser ambas regiones de tipo ranura, los orígenes ya están a la misma altura. Las derivadas obtenidas se muestran en el apartado E.2 del apéndice E.

### Ecuaciones en las fronteras comunes

Una vez obtenidas las derivadas en cada región, podemos plantear un sistema de ecuaciones igualando la derivada normal de la función potencial en la frontera común a dos regiones contiguas, donde las incógnitas serán los coeficientes de las distribuciones de potencial definidas en cada una de las fronteras comunes a dos regiones contiguas (coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$ ,  $R_p$  y  $V_u$ ). El sistema de ecuaciones que obtenemos es el que se refleja en el apartado E.3 del apéndice E.

Las 7 ecuaciones que forman el sistema de ecuaciones (desde (E.27) hasta (E.33)), se deben cumplir simultáneamente y a través de su resolución, en la que se emplearán métodos numéricos, obtendremos los valores de los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$ ,  $R_p$  y  $V_u$ .

Para ello, por ejemplo, elegiremos unos valores máximos para  $w$ ,  $q$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $p$  y  $u$ , como  $Q$  (puede ser el mismo valor para todas), y elegiremos  $Q$  diferentes valores para la variable  $y/g$  dentro de su rango. De esta manera tendremos  $7 \cdot Q$  ecuaciones con  $7 \cdot Q$  incógnitas (los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$ ,  $R_p$  y  $V_u$ ).

Una vez fijadas las dimensiones de la geometría y hallados los valores de los coeficientes, podemos conocer el valor del potencial escalar en cualquier punto del entrehierro de la máquina, sin más que sustituir en las ecuaciones del potencial en cada región (ecuaciones (E.1) a (E.10)) los correspondientes coeficientes, las dimensiones de la geometría y las coordenadas del punto o puntos donde se calculará el potencial magnético escalar. En las siguientes figuras, se muestra la distribución del potencial magnético escalar en el entrehierro de nuestra máquina, para valores del parámetro  $z$  de 0.25 (figura 5.29), de 0.5 (figura 5.30) y de 0.75 (figura 5.31), donde los valores de la geometría son los mismo para todas ellas y de valores  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$ .

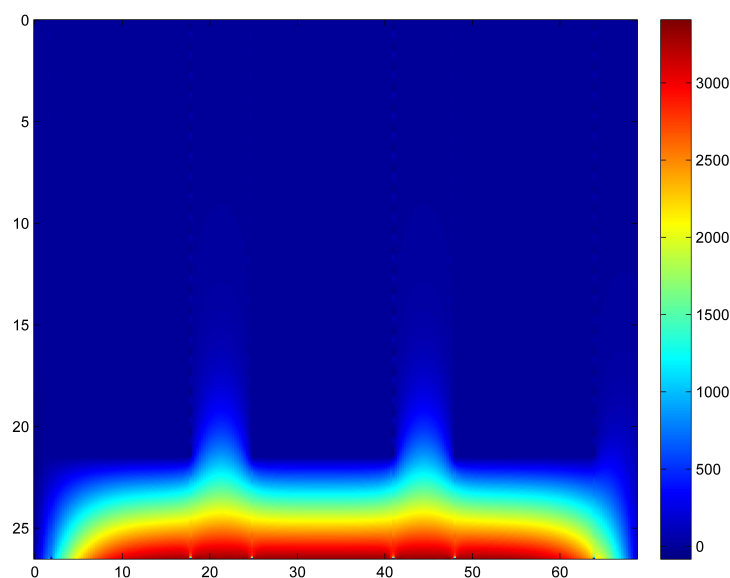


Figura 5.29: Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $z = 0.25$ .

Como último paso en el estudio del caso Ranura Parcial, vamos a obtener la variación del potencial magnético escalar a lo largo de un polo en las

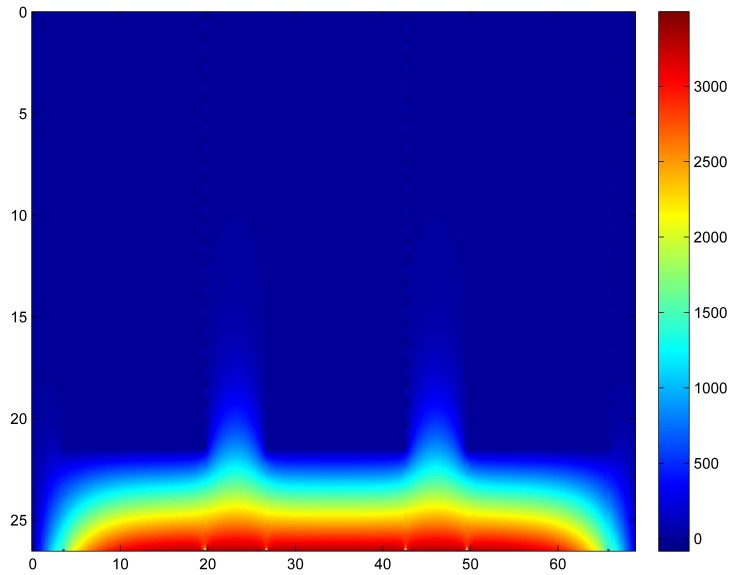


Figura 5.30: Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $z = 0.5$ .

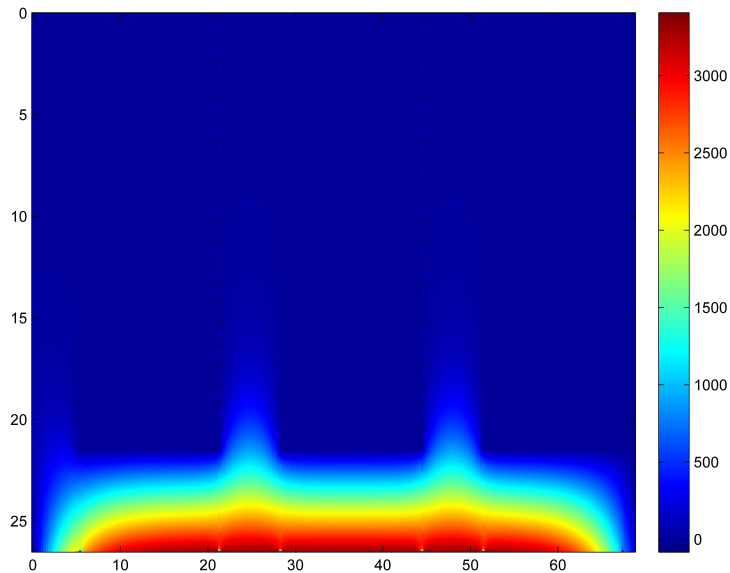


Figura 5.31: Potencial magnético escalar para el ejemplo numérico tal que  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $z = 0.75$ .

tres alturas del entrehierro ya mencionadas (superficie del rotor, medio del entrehierro y superficie del estátor) y para un valor de  $z$  de 0.5, las cuales se muestran en la figura 5.32.

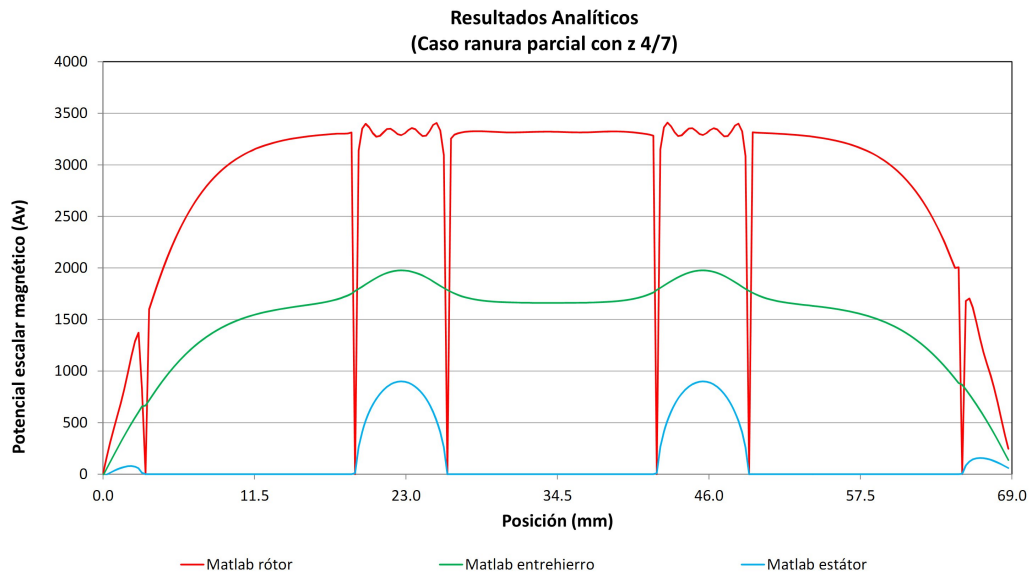


Figura 5.32: Potencial magnético escalar en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Parcial con  $z = 0.5$ .

Podríamos realizar las mismas observaciones que las comentadas en los casos de Diente Parcial y Ranura Completa, ya que, exceptuando la posición del ranurado, las curvas son similares a las de los citados casos.

#### 5.1.4. Diente completo

El último caso que vamos a considerar es el de Diente Completo; a partir de la posición de Ranura Parcial y debido al movimiento del rotor, llegamos a este caso, en el que el principio del polo coincide con el comienzo de un diente del ranurado. La geometría considerada se muestra en la figura 5.33. El problema del cálculo del potencial magnético escalar en el entrehierro se reduce al cálculo del campo en el área rayada.

Como sucedía en el caso de Ranura Completa, ahora la banda de desmagnetización también es simétrica y con una anchura constante y de valor

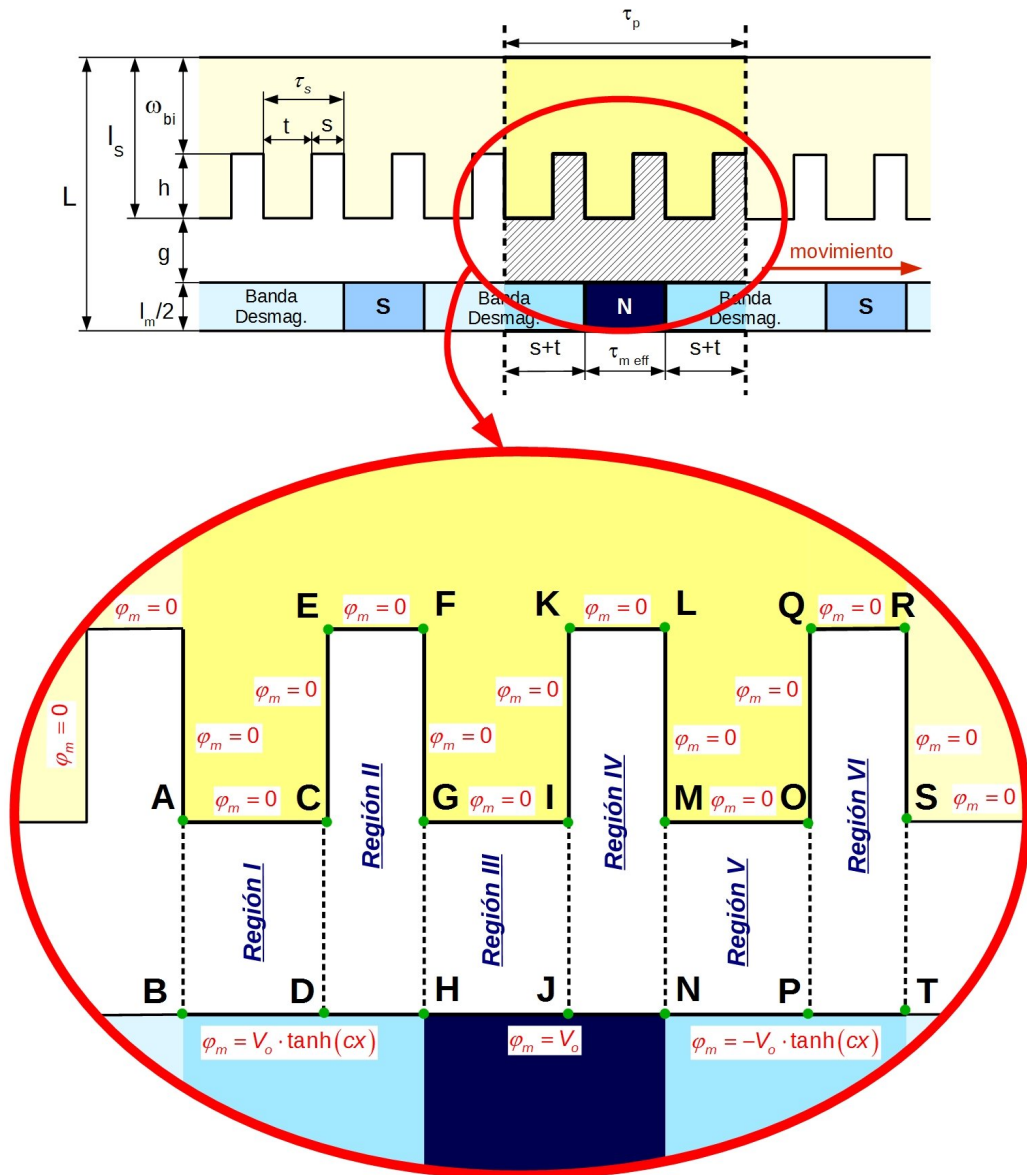


Figura 5.33: Caso Diente Completo: El principio del polo coincide con el comienzo de un diente del ranurado.

el paso de ranura, es decir,  $t + s$ . Tal y como habíamos comprobado cuando definíamos la banda de desmagnetización (apartado 4.3.3), esta anchura es suficiente para que el potencial del imán se estabilice. Además, con esta anchura de las bandas de desmagnetización, conseguimos que las discontinuidades en el polo coincidan con discontinuidades en el estátor y, por lo tanto, el número de regiones que obtengamos vengan determinadas solamente por las discontinuidades del estátor. En la figura 5.33 hemos resaltado las bandas de desmagnetización del imán y las distintas regiones que se originan. En la figura 5.34 hemos planteado el problema del potencial para el área rayada de la figura 5.33, donde podemos observar que se originan seis regiones por polo.

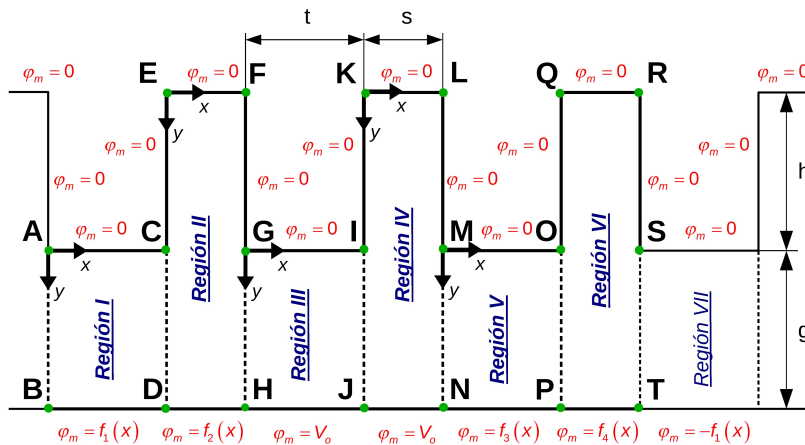


Figura 5.34: Planteamiento del problema del potencial para el área elegida en la figura 5.33

El esquema que vamos a seguir en este caso es el mismo que el planteado en los anteriores: definiremos las funciones que representan a las bandas de desmagnetización en cada región así como las que establecen la distribución de potencial en las fronteras comunes, distribuciones que viene expresadas en función de unos coeficientes desconocidos; una vez definidas, podemos calcular la potencial magnético escalar en cada región, aplicando el principio de superposición y los resultados obtenidos en los casos estudiados en el anexo C. Con el fin de obtener los valores de los coeficientes de las distribuciones de potencial de las fronteras comunes, igualaremos la derivada normal del potencial magnético escalar a ambos lados de cada frontera, obteniendo un sistema de ecuaciones de cuya resolución determinaremos los valores de dichos coeficientes. Para poder plantear este sistema de ecuaciones, necesitaremos previamente, la expresión de las derivadas del potencial en cada región.

### Funciones de la banda de desmagnetización

Vamos a definir las funciones que representan a las bandas de desmagnetización en cada una de las regiones (funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  y  $f_4(x)$ ). Como en casos anteriores, representaremos la porción de banda de magnetización correspondiente a la región que estemos estudiando mediante una función impar, para, posteriormente, expresarla mediante su desarrollo en serie de Fourier; el hecho de describirla como una función impar nos permite, empleando el caso#12 del citado anexo, poder determinar la expresión del potencial magnético escalar que origina. Definamos cada una de estas funciones:

- Función  $f_1(x)$ : Definimos  $f_1(x)$  mediante la expresión:

$$f_1(x) = V_o \cdot \tanh(c \cdot x) \quad x \in [-t, t]$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \quad x \in [-t, t]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,1}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_2(x)$ : Definimos  $f_2(x)$  mediante la expresión:

$$f_2(x) = \begin{cases} -V_o \cdot \tanh [c \cdot (-x + t)] & x \in [-s, 0] \\ V_o \cdot \tanh [c \cdot (x + t)] & x \in [0, s] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \quad x \in [-s, 0] \cup [0, s]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,2}$  mediante cálculo numérico.

- Función  $f_3(x)$ : Definimos  $f_3(x)$  mediante la expresión:

$$f_3(x) = \begin{cases} V_o \cdot \tanh [c \cdot (-x - t - s)] & x \in [-t, 0] \\ -V_o \cdot \tanh [c \cdot (x - t - s)] & x \in [0, t] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \quad x \in [-t, 0] \cup [0, t]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,3}$  mediante cálculo numérico.



- Función  $f_4(x)$ : Definimos  $f_4(x)$  mediante la expresión:

$$f_4(x) = \begin{cases} V_o \cdot \tanh [c \cdot (-x - s)] & x \in [-s, 0] \\ -V_o \cdot \tanh [c \cdot (x - s)] & x \in [0, s] \end{cases}$$

función que se puede expresar a través de su desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \quad x \in [-s, 0] \cup [0, s]$$

obteniéndose los coeficientes  $b_{n,4}$  mediante cálculo numérico.

En la figura (5.35) se muestran la funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  y  $f_4(x)$ , donde los valores de la geometría son  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$ , donde el trazo continuo rojo muestra la función exacta y con puntos amarillos la aproximación mediante el desarrollo en serie de Fourier.

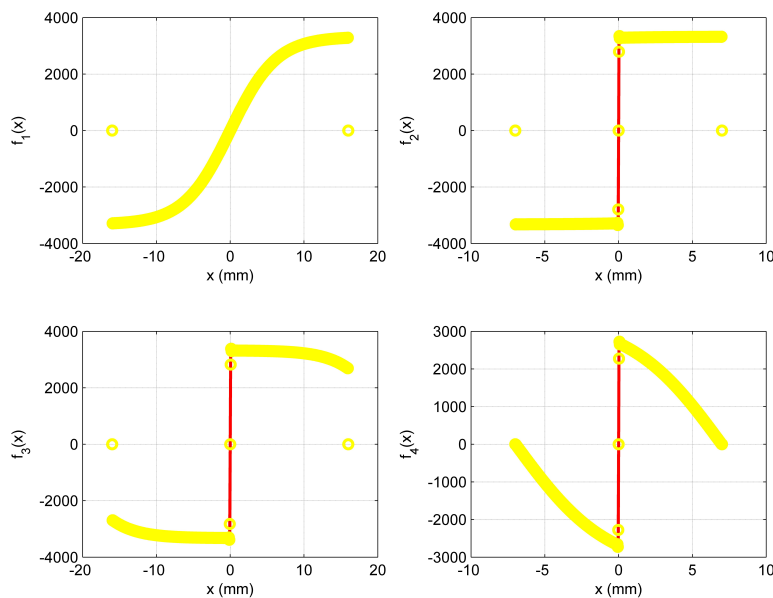


Figura 5.35: Funciones del perfil de magnetización para el caso de Diente Completo

### Distribuciones de potencial en las fronteras comunes

El siguiente paso será definir las distribuciones de potencial que existen en las fronteras comunes. Podemos ver en la figura (5.33) que existen 6 regiones cinterconectadas a través de las fronteras comunes AB, CD, GH, IJ, MN, OP y ST.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común AB es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{AB} = \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right)$$

donde  $Q_w$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común CD es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{CD} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región I, y}$$

$$\blacksquare \varphi_m^{CD} = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(y-h)}{g} \right] \text{ para } h \leq y \leq h+g \text{ en la región II}$$

donde  $H_q$  son los coeficientes a determinar.

Estas dos fórmulas son la misma distribución excepto un desplazamiento en las ordenadas, pues en la región I tomamos el origen de coordenadas en el punto A con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia C y B, respectivamente, y en la región II tomamos el origen de coordenadas en el punto E con valores positivos de abcisas y ordenadas hacia F y C.

En las siguientes cuatro fronteras GH, IJ, MN y OP procederemos de forma similar. La distribución de potencial que impondremos a la frontera común GH es de la forma:

$$\blacksquare \varphi_m^{GH} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{sen} \left[ \frac{l\pi(y-h)}{g} \right] \text{ para } h \leq y \leq h+g \text{ en la región II, y}$$

$$\blacksquare \varphi_m^{GH} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) \text{ para } 0 \leq y \leq g \text{ en la región III}$$

donde  $M_l$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común IJ es de la forma:

- $\varphi_m^{IJ} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región III, y
- $\varphi_m^{IJ} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{sen} \left[ \frac{m\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h + g$  en la región IV

donde  $L_m$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común MN es de la forma:

- $\varphi_m^{MN} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{sen} \left[ \frac{r\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h + g$  en la región IV, y
- $\varphi_m^{MN} = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región V

donde  $P_r$  son los coeficientes a determinar.

La distribución de potencial que impondremos a la frontera común OP es de la forma:

- $\varphi_m^{OP} = \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región V, y
- $\varphi_m^{OP} = \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{sen} \left[ \frac{p\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h + g$  en la región VI

donde  $R_p$  son los coeficientes a determinar.

Si tenemos en cuenta la periodicidad del problema (periodicidad anticíclica), los coeficiente de la distribución de potencial que impondremos a la frontera común ST deben de ser iguales a los de la frontera AB pero con signo contrario. Por ello, la distribución de potencial en la frontera común ST es de la forma:

- $\varphi_m^{ST} = \sum_{w=1}^{\infty} (-Q_w) \operatorname{sen} \left[ \frac{w\pi(y-h)}{g} \right]$  para  $h \leq y \leq h + g$  en la región VI, y
- $\varphi_m^{ST} = \sum_{w=1}^{\infty} (-Q_w) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right)$  para  $0 \leq y \leq g$  en la región VII

donde  $Q_w$  son los coeficientes a determinar.

### Expresiones del potencial escalar

Una vez establecidas las distribuciones de potencial en las fronteras comunes a cada región, vamos a determinar la expresión del potencial en las diferentes regiones. El apartado F.1 del apéndice F recoge estas expresiones.

### Expresiones de las derivadas en las fronteras laterales

Una vez obtenidas las expresiones del potencial escalar en las seis regiones podemos obtener un conjunto de ecuaciones en función de los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$  y  $R_p$  sin más que plantear en las fronteras comunes que:

$$\frac{d\varphi_m^j}{dx} = \frac{d\varphi_m^{j+1}}{dx}$$

o, lo que es lo mismo:

$$g \frac{d\varphi_m^j}{dx} = g \frac{d\varphi_m^{j+1}}{dx}$$

con  $j = I, II, III, IV, V$  y  $VI$ . Por ello, determinaremos las correspondientes derivadas en cada región, empleando las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  definidas en el apartado Diente Parcial. Además, debemos realizar una traslación del origen de las regiones tipo ranura (regiones II, IV y VI) para dejarlo a la misma altura que el de las regiones tipo diente (regiones I, III, V y VII). La traslación  $y = y + h$  nos situará las ordenadas de los centros de coordenadas de las regiones tipo ranura a la misma altura que el de las regiones tipo diente. Las derivadas obtenidas se muestran en el apartado F.2 del apéndice F.

### Ecuaciones en las fronteras comunes

Una vez obtenidas las derivadas en cada región e igualando la derivada normal de la función potencial en la frontera común a dos regiones contiguas, obtenemos el sistema de ecuaciones mostrado en el apartado F.3 del apéndice F.

Las 6 ecuaciones que forman el anterior sistema de ecuaciones (desde (F.23) hasta (F.28)), se deben cumplir simultáneamente y a través de su resolución, en la que se emplearán métodos numéricos, obtendremos los valores de los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$  y  $R_p$ .

Para ello, por ejemplo, elegiremos unos valores máximos para  $w$ ,  $q$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $r$  y  $p$ , como  $Q$  (puede ser el mismo valor para todas), y elegiremos  $Q$  diferentes valores para la variable  $y/g$  dentro de su rango. De esta manera tendremos

$6 \cdot Q$  ecuaciones con  $6 \cdot Q$  incógnitas (los coeficientes  $Q_w$ ,  $H_q$ ,  $M_l$ ,  $L_m$ ,  $P_r$  y  $R_p$ ).

Una vez fijadas las dimensiones de la geometría y hallados los valores de los coeficientes, podemos conocer el valor del potencial escalar en cualquier punto del entrehierro de la máquina, sin más que sustituir en las ecuaciones del potencial en cada región (ecuaciones (F.1) a (F.8)) los correspondientes coeficientes, las dimensiones de la geometría y las coordenadas del punto o puntos donde se calculará el potencial magnético escalar. En la siguiente figura (figura 5.36), se muestra la distribución del potencial magnético escalar en el entrehierro del polo norte, donde los valores de la geometría son  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $V_0 = 3318.52Av$ .

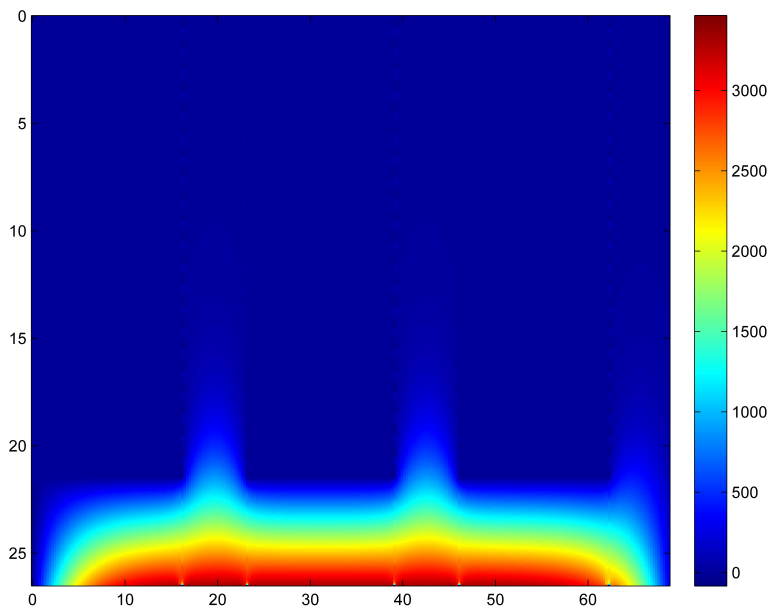


Figura 5.36: Potencial magnético escalar en el entrehierro de la máquina para el ejemplo numérico tal que  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$

Para finalizar este último caso, en la figura 5.37 mostramos la variación del potencial magnético escalar obtenida a lo largo de un polo en las tres alturas del entrehierro ya mencionadas (superficie del rotor, medio del entrehierro y superficie del estator).

Salvando la diferencia existente en la posición del ranurado, las curvas

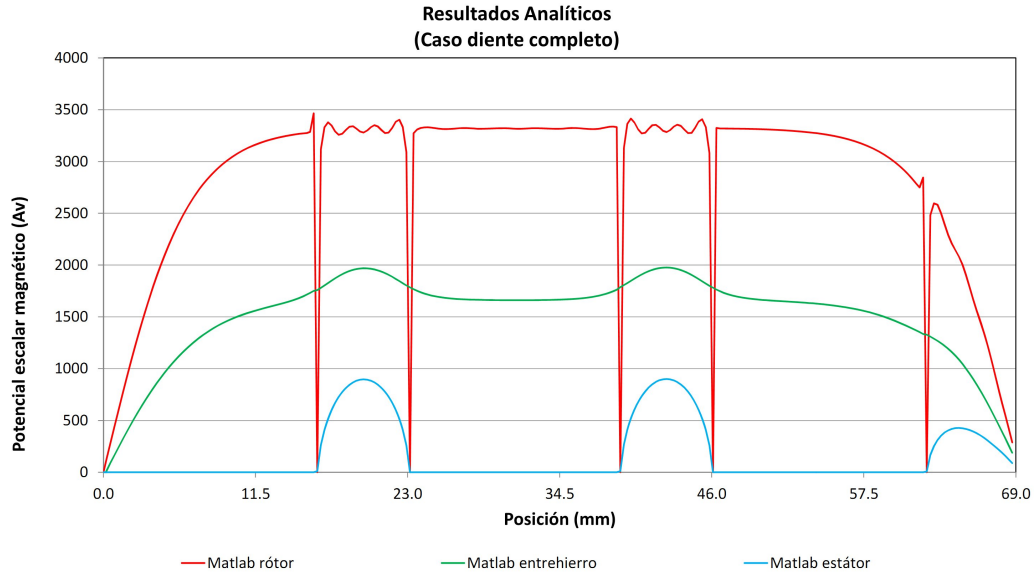


Figura 5.37: Potencial magnético escalar en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Completo.

son semejantes a las obtenidas en los casos anteriores, siendo de aplicación los comentarios realizados en estos casos.

### 5.1.5. Simulación por elementos finitos

Con el fin de validar el procedimiento seguido y los resultados hallados, vamos a obtener los valores del potencial escalar en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor que nos proporciona el programa Flux3D. Para ello, y a partir del modelo de máquina lisa con entreimán que se mostraba en la figura 4.12b), lo modificamos ajustando el valor del entrehierro al real y dibujando las ranuras en dicha geometría, dando como resultado el modelo de máquina ranurada que se muestra en la figura 5.38.

Con este modelo, procedimos a calcular la variación del potencial magnético escalar en las tres alturas fijadas, para las mismas posiciones que las analizadas en los diferentes casos, realizando la comparación de los resultados proporcionados por el Método de los Subdominios (a los que denominaremos "Matlab") con los obtenidos mediante el software Flux3D (denotados por "Flux"). Las figuras 5.39, 5.40, 5.41 y 5.42 muestran estos resultados para

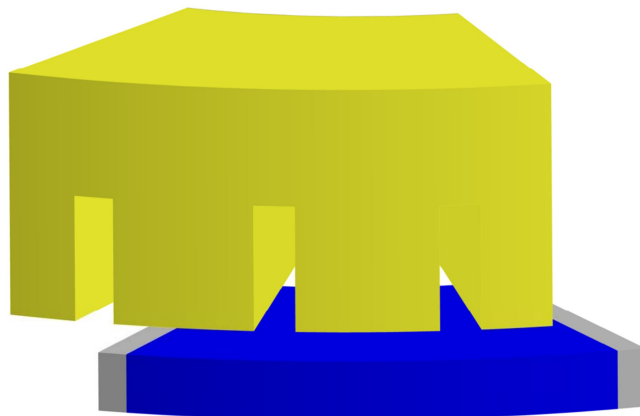


Figura 5.38: Geometría considerada en la simulación por elementos finitos para la máquina ranurada

los casos Diente Parcial, Ranura Completa, Ranura Parcial y Diente Completo, respectivamente.

A la vista de estas figuras, observamos:

- Para los cuatro casos estudiados, el ajuste existente entre los resultados analíticos y los de elementos finitos son similares, siendo la principal diferencia entre estos casos la posición del ranurado respecto del polo.
- Se observa que el ajuste entre ambos conjuntos de valores es mejor en las ranuras que en los dientes. Como consecuencia de ello y dado que en la superficie del estátor el potencial magnético escalar es nulo en los dientes y distinto de cero en las ranuras, esta superficie presenta un buen ajuste entre valores analíticos y los obtenidos por elementos finitos.
- En el medio del entrehierro, el ajuste es bueno en la zona central del polo, desviándose a medida que nos acercamos a los extremos del mismo. Por ejemplo, para una abcisa de valor  $11.5\text{ mm}$ , los valores analíticos son en torno a un  $8\%$  superiores a los de elementos finitos, mientras que en el centro del polo, abcisa  $34.5\text{ mm}$ , la desviación es inferior al  $4\%$ .
- En la superficie del rotor este ajuste es peor, ya que, por un lado, el potencial escalar presenta las oscilaciones ya comentadas en las fronteras entre regiones contiguas, y, por otro lado, los valores analíticos son

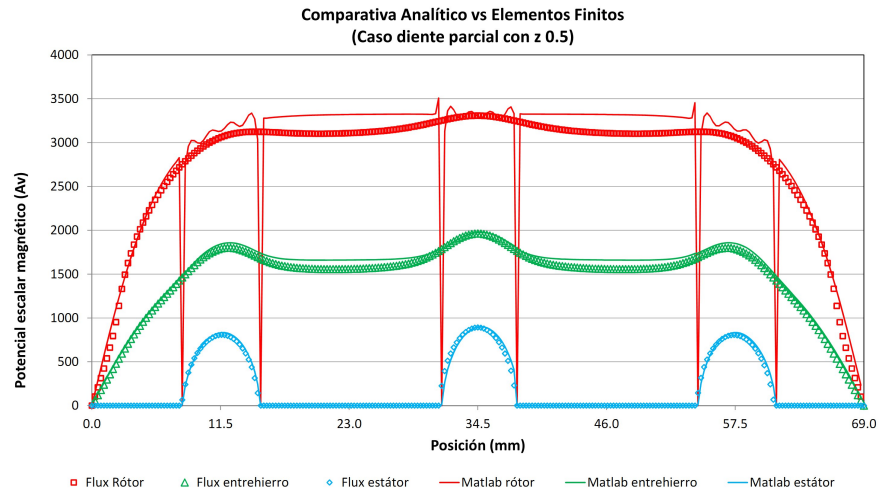


Figura 5.39: Comparativa entre los resultados proporcionados por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Parcial con  $z=0.5$

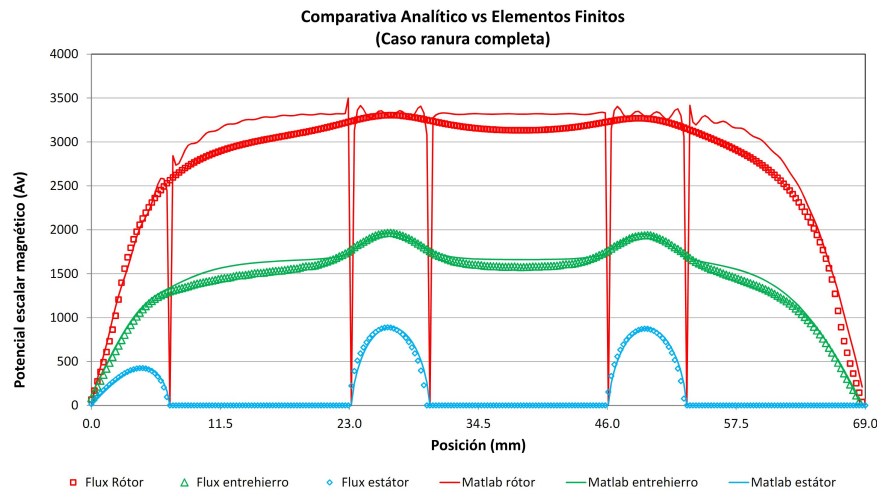


Figura 5.40: Comparativa entre los resultados proporcionados por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Completa



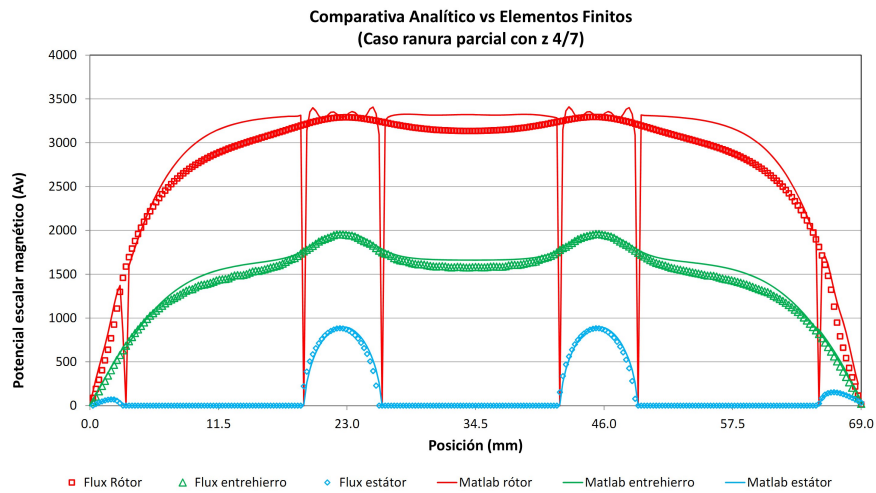


Figura 5.41: Comparativa entre los resultados proporcionados por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Parcial con  $z=0.5$

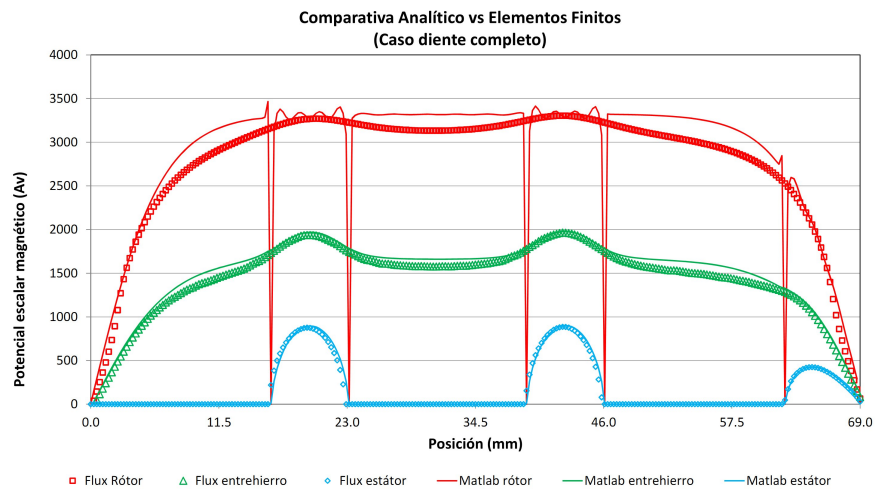


Figura 5.42: Comparativa entre los resultados proporcionados por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Completo

superiores a los de elementos finitos, aumentando esta diferencia según nos alejamos de la zona central del polo, acercándonos a los extremos.

Por todo lo expuesto podemos concluir que cuanto más nos acerquemos al estátor, mejor será el ajuste que exista entre los resultados analíticos y los obtenidos por elementos finitos.

## 5.2. Expresiones de las componentes de la inducción

Una vez que hemos determinado las expresiones del potencial magnético escalar en todas y cada una de las regiones que forman los diferentes casos, vamos a obtener la expresión de las componentes de la inducción en cada una de las regiones. Dado que estas regiones se encuentran en el entrehierro de la máquina, esto es, en el vacío, obtendremos las expresiones de la componentes de la inducción a partir de la expresión del potencial magnético escalar aplicando las relaciones (2.51) y (2.52), relaciones que nos proporcionan las componentes  $x$  e  $y$  de la inducción, respectivamente, y que reproducimos a continuación:

$$B_x = \mu_0 H_x = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}$$

para la componente  $x$ , y

$$B_y = \mu_0 H_y = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}$$

para la componente  $y$ .

Debido a que las expresiones del potencial en las diferentes regiones vienen condicionadas por la posición relativa del rotor respecto al estátor, tendremos que considerar los cuatro casos que hemos contemplado para determinar estos potenciales, donde seguiremos el mismo orden, es decir, Diente Parcial, Ranura Completa, Ranura Parcial y Diente Completo. Obtengamos dichas componentes de la inducción para cada caso.

### 5.2.1. Diente Parcial

El caso Diente Parcial está formado por siete regiones cuyos potenciales vienen dados por las expresiones (5.1) a (5.10). Las componentes  $x$  de la inducción para cada región las obtendremos sustituyendo la correspondiente

ecuación del potencial en la relación (2.51); la componente  $y$  de la inducción en cada región se hallarán reemplazando la expresión del potencial en la ecuación (2.52). Operando de este modo se han obtenido estas componentes:

### Región I

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región I:

$$\begin{aligned}
 B_x^I = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{tz} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{tz} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{tz} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \cosh \left[ \frac{w\pi(tz-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \cosh \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región I:

$$\begin{aligned}
 B_y^I = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{tz} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{tz} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) \cosh \left( \frac{n\pi y}{tz} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{w\pi(tz-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{w\pi y}{g} \right) \\
 & -\mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{q\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

### Región II

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región II:

$$\begin{aligned}
 B_x^{II} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región II:

$$\begin{aligned}
 B_y^{II} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{s} (h+g) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{cos} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{cos} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

donde las expresiones de  $K_n^2$  y  $K_n^{2'}$  vienen dadas por la ecuación (5.3).

### Región III

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región III:

$$\begin{aligned}
 B_x^{III} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{cos} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{cosh} \left[ \frac{l\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región III:

$$\begin{aligned}
 B_y^{III} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{l\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{cos} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi x}{g} \right) \operatorname{cos} \left( \frac{m\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

**Región IV**

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región IV:

$$\begin{aligned}
 B_x^{IV} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{s} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{s} \right] - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región IV:

$$\begin{aligned}
 B_y^{IV} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{s} \right] - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

donde las expresiones de  $K_n^4$  y  $K_n^{4'}$  vienen dadas por la ecuación (5.6).

**Región V**

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región V:

$$\begin{aligned}
 B_x^V = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} P_r \frac{r\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \cosh \left[ \frac{r\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{p=1}^{\infty} R_p \frac{p\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{p\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región V:

$$\begin{aligned}
 B_y^V = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} P_r \frac{r\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{r\pi(t-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{r\pi y}{g} \right) \\
 & -\mu_0 \sum_{p=1}^{\infty} R_p \frac{p\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{p\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{p\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

### Región VI

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región VI:

$$\begin{aligned}
 B_x^{VI} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región VI:

$$\begin{aligned}
 B_y^{VI} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,5} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{s}(h+g) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

donde las expresiones de  $K_n^6$  y  $K_n^{6'}$  vienen dadas por la ecuación (5.9).

## Región VII

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región VII:

$$\begin{aligned}
 B_x^{VII} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \frac{n\pi}{t(1-z)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi g}{t(1-z)} \right] \cos \left[ \frac{n\pi x}{t(1-z)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi y}{t(1-z)} \right] + \\
 & +\mu_0 \sum_{u=1}^{\infty} V_u \frac{a\pi}{g} \operatorname{csch} \left[ \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right] \cosh \left\{ \frac{u\pi[t(1-z)-x]}{g} \right\} \operatorname{sen} \left( \frac{u\pi y}{g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch} \left[ \frac{w\pi t(1-z)}{g} \right] \cosh \left( \frac{w\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región VII:

$$\begin{aligned}
 B_y^{VII} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \frac{n\pi}{t(1-z)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi g}{t(1-z)} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi x}{t(1-z)} \right] \cosh \left[ \frac{n\pi y}{t(1-z)} \right] - \\
 & -\mu_0 \sum_{u=1}^{\infty} V_u \frac{a\pi}{g} \operatorname{csch} \left[ \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right] \operatorname{senh} \left\{ \frac{u\pi[t(1-z)-x]}{g} \right\} \cos \left( \frac{u\pi y}{g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch} \left[ \frac{w\pi t(1-z)}{g} \right] \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{w\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \quad (5.46)$$

De una forma análoga a la realiza para el potencial magnético escalar y con la finalidad de ver la calidad de la solución proporcionada por el método expuesto, vamos a obtener la variación de las componentes de la inducción a lo largo de un polo en las tres alturas del entrehierro definidas en el apartado anterior (superficie del rotor, medio del entrehierro y superficie del estator). En las siguientes figuras se muestra la variación de la componente  $x$  de la inducción (figura 5.43) y la variación de la componente  $y$  de la inducción (figura 5.44) en las tres alturas mencionadas, donde los valores de la geometría son los mismo para todas ellas y de valores  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$ , siendo el valor de  $z$  igual a 0.5.

A la vista de los resultados obtenidos, podemos observar cómo los valores de ambas componentes de la inducción en la superficie del rotor presentando picos de valor muy elevado, enmascarando a los puntos restantes. Este comportamiento es una consecuencia de las oscilaciones que se observaban en la variación del potencial magnético escalar en la superficie del rotor (figura 5.18); dado que las componentes de la inducción son proporcionales al gradiente del potencial escalar en la dirección que estemos considerando, aquellas oscilaciones provocan estos picos, siendo una consecuencia del procedimiento matemático que hemos empleado para representar las bandas de

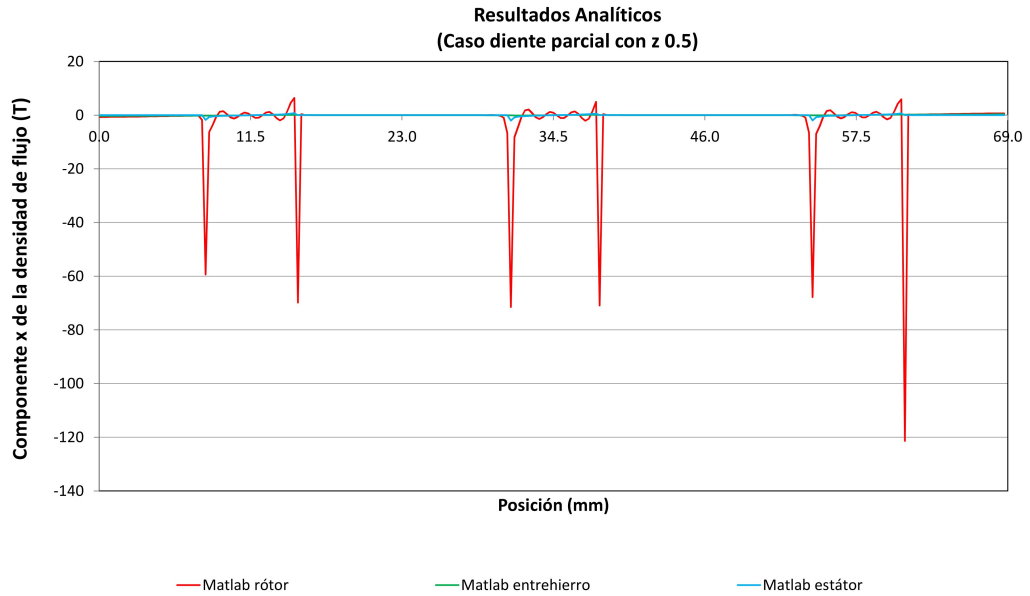


Figura 5.43: Componente  $x$  de la inducción en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estator para el caso Diente Parcial con  $z = 0.5$ .

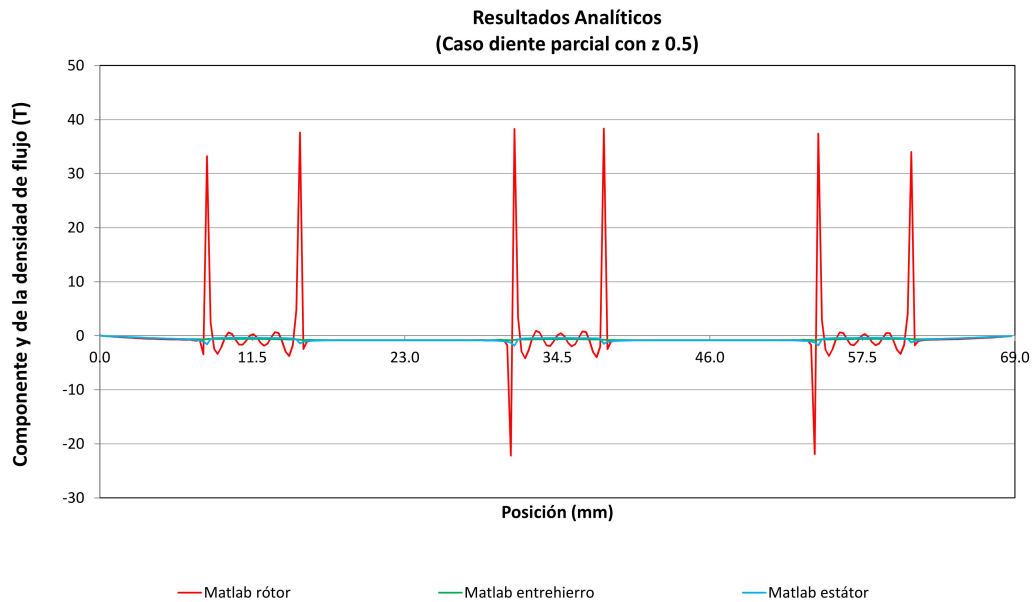


Figura 5.44: Componente  $y$  de la inducción en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estator para el caso Diente Parcial con  $z = 0.5$ .



desmagnetización en el imán y no del fenómeno físico en sí, por lo que no podremos utilizar estas componentes de la inducción, aunque sí sus expresiones matemáticas.

Ya que las oscilaciones en el potencial magnético escalar se amortiguaban a medida que nos separábamos del rotor y no eran apreciables en el medio del entrehierro ni en la superficie del estátor, cabe esperar que las componentes de la inducción en estas dos alturas tengan un comportamiento mejor. En las siguientes figuras se muestra la variación de la componente  $x$  de la inducción (figura 5.45) y la variación de la componente  $y$  de la inducción (figura 5.46) en el medio del entrehierro y en la superficie del rotor.

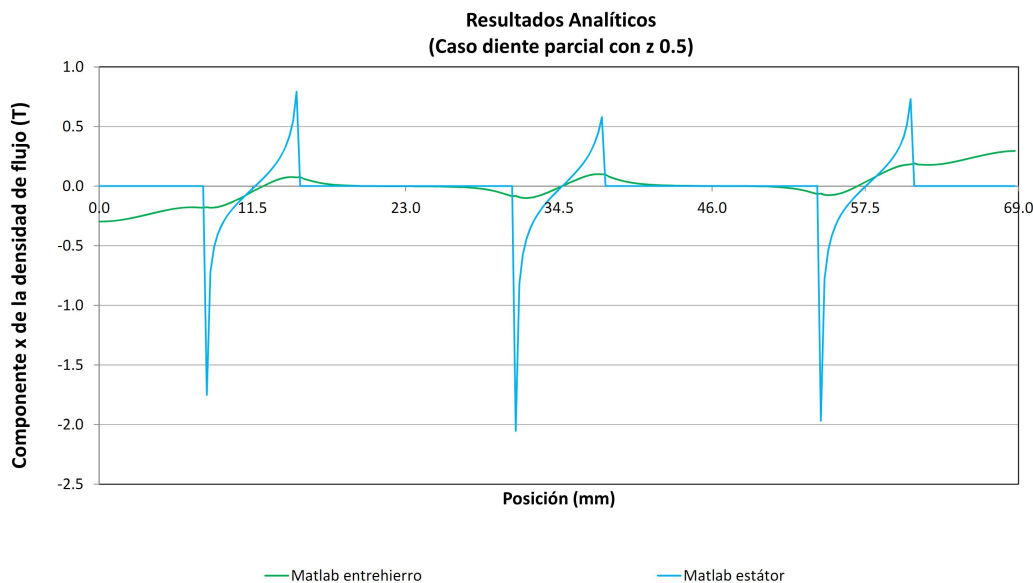


Figura 5.45: Componente  $x$  de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Parcial con  $z = 0.5$ .

El hecho de no representar la variación de las componentes de la inducción en la superficie del rotor nos permite poder apreciar las otras dos curvas, cuya aspecto es el esperado. El comportamiento del potencial magnético escalar en la superficie del rotor es similar en los diferentes casos estudiados, por lo que, las componentes de la inducción en la superficie del rotor serán similares. Debido a ello, no nos van a proporcionar ninguna información útil y no serán representadas en los distintos casos que estudiemos (ranura completa, ranura parcial y diente completo). Respecto a las componentes de la inducción en el caso que nos ocupa y a la vista de las gráficas mostradas, podemos comentar:

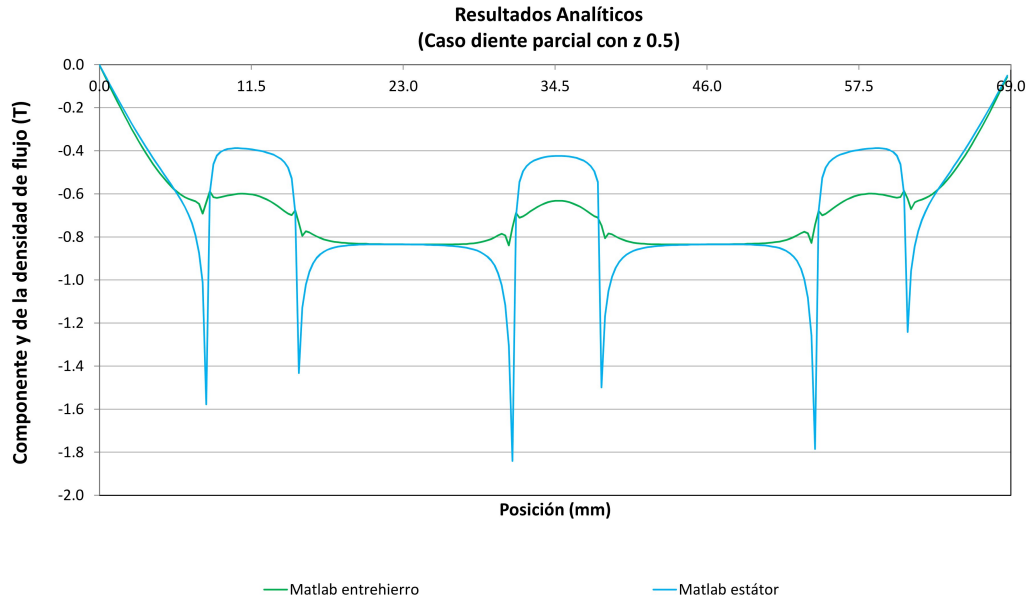


Figura 5.46: Componente  $y$  de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Parcial con  $z = 0.5$ .

- Respecto a la componente  $x$ :
  - Esta componente de la inducción presenta los valores más importantes debajo de las ranuras, siendo más acusados cuanto más próximos estamos al estátor de la máquina.
  - Su magnitud es positiva cuando, al movernos hacia valores crecientes de la variable  $x$ , el potencial escalar disminuye y negativa en caso contrario.
  
- Respecto de la componente  $y$ :
  - Como consecuencia de haber fijado el origen de coordenadas en el estátor de la máquina y mirando hacia el rotor, una magnetización positiva origina una componente  $y$  de la inducción negativa.
  - Fuera de las ranuras, la componente  $y$  de la inducción es la misma para las dos alturas visualizadas. Comparando el valor de esta componente con el que tenía en la máquina lisa, el valor absoluto es ligeramente superior en la máquina ranurada que en la máquina lisa en la zona central del polo ( $0.85 T$  en la máquina ranurada frente a  $0.75 T$  de la máquina lisa).

- Debajo de las ranuras, la componente  $y$  de la inducción es tanto mayor cuanto más próximos estamos del estátor. Esto es una consecuencia de la mayor influencia de la ranura en el potencial escalar cuanto más cerca estamos del estátor, tal y como veíamos al analizar la figura 5.18.

### 5.2.2. Ranura Completa

El caso Ranura Completa está formado por seis regiones cuyos potenciales vienen dados por las ecuaciones (D.1) a (D.9). Las componentes  $x$  e  $y$  de la inducción para cada región se han obtenido al sustituir la correspondiente ecuación del potencial en las relaciones (2.51) y (2.52), respectivamente. Estas componentes se muestran en el apartado D.4 del apéndice D.

De una forma análoga a la realizada para el caso Diente Parcial y para ver con mayor detalle la solución proporcionada por el método expuesto, vamos a obtener la variación de la componente  $x$  de la inducción (figura 5.47) y la variación de la componente  $y$  de la inducción (figura 5.48) en el medio del entrehierro y en la superficie del rotor.

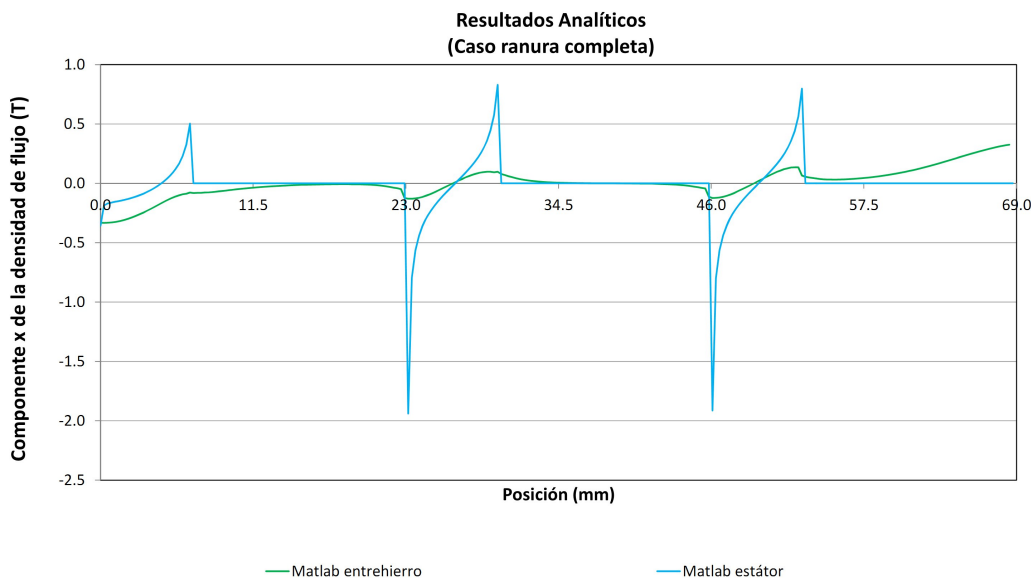


Figura 5.47: Componente  $x$  de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Completa.

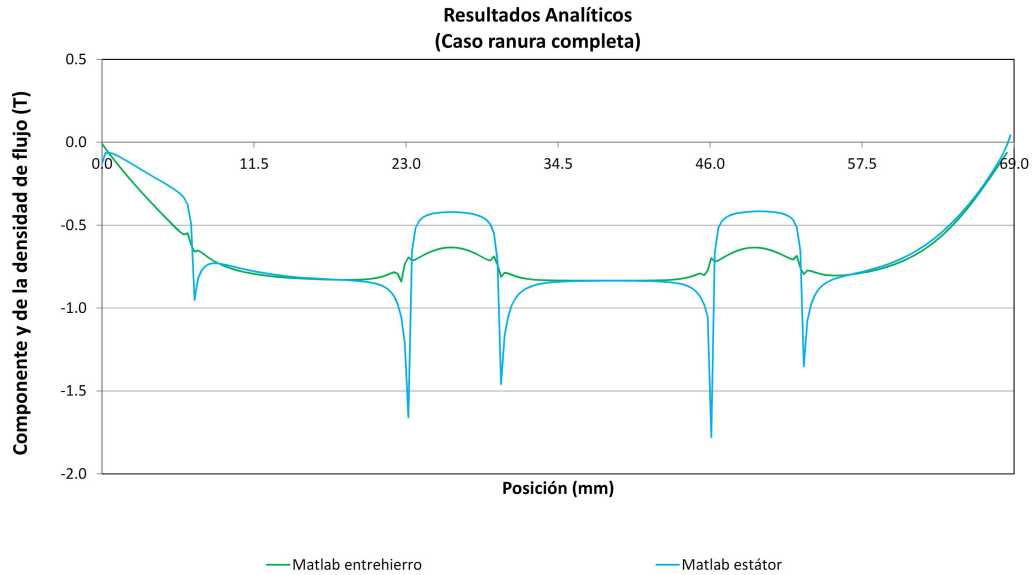


Figura 5.48: Componente  $y$  de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Completa.

Exceptuando el desplazamiento existente como consecuencia de ser el caso Diente Completo, los resultados obtenidos son idénticos a los del caso Diente Parcial, pudiendo realizarse los mismos comentarios que las comentados entonces.

### 5.2.3. Ranura Parcial

Como en el caso Diente Parcial, el caso Ranura Parcial también está formado por siete regiones cuyos potenciales vienen dados por las expresiones (E.1) a (E.10), expresiones que sustituidas en las relaciones (2.51) y (2.52) nos han proporcionado las componentes de la inducción que se detallan en el apartado E.4 del anexo E.

Como último paso en el estudio del caso Ranura Parcial, vamos a obtener a obtener la variación de las componentes de la inducción a lo largo de un polo en las dos alturas del entrehierro ya mencionadas (medio del entrehierro y superficie del estátor) y para un valor de  $z$  de 0.5, las cuales se muestran en las figuras 5.49) (componente  $x$ ) y 5.50) (componente  $y$ ).

Podríamos realizar las mismas observaciones que las comentadas en los casos de Diente Parcial y Ranura Completa, ya que, exceptuando la posición

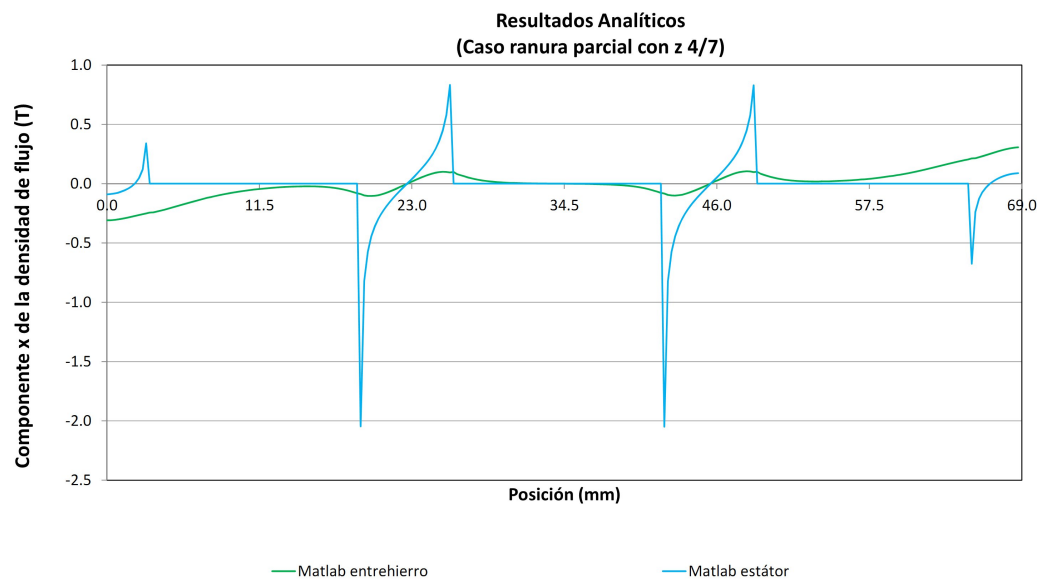


Figura 5.49: Componente  $x$  de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Parcial con  $z = 0.5$ .

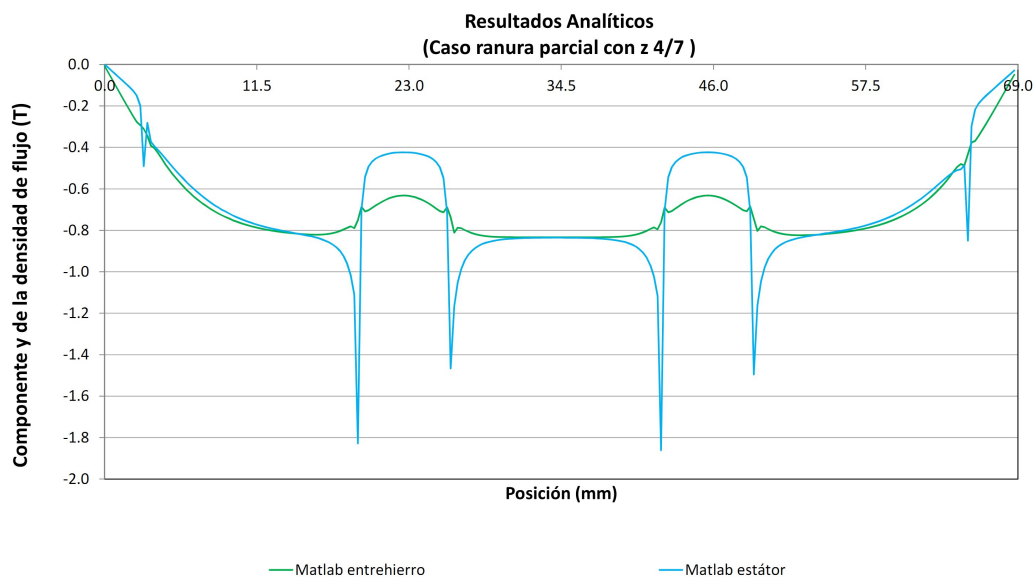


Figura 5.50: Componente  $y$  de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Ranura Parcial con  $z = 0.5$ .

del ranurado, las curvas son similares a las de los citados casos.

#### 5.2.4. Diente Completo

El caso Diente Completo, al igual que en el de Ranura Completa, está formado por seis regiones cuyos potenciales vienen expresados por las ecuaciones (F.1) a (F.8). Las componentes  $x$  e  $y$  de la inducción las obtendremos sustituyendo estas expresiones del potencial en las ecuaciones (2.51) y (2.52), respectivamente. Las componentes de la inducción en cada región se muestran en el apartado F.4 del apéndice F.

Para finalizar este último caso, en las figuras 5.51 y 5.52 mostramos, respectivamente, la variación de las componentes  $x$  e  $y$  de la inducción a lo largo de un polo en las dos alturas del entrehierro ya mencionadas (medio del entrehierro y superficie del estátor).

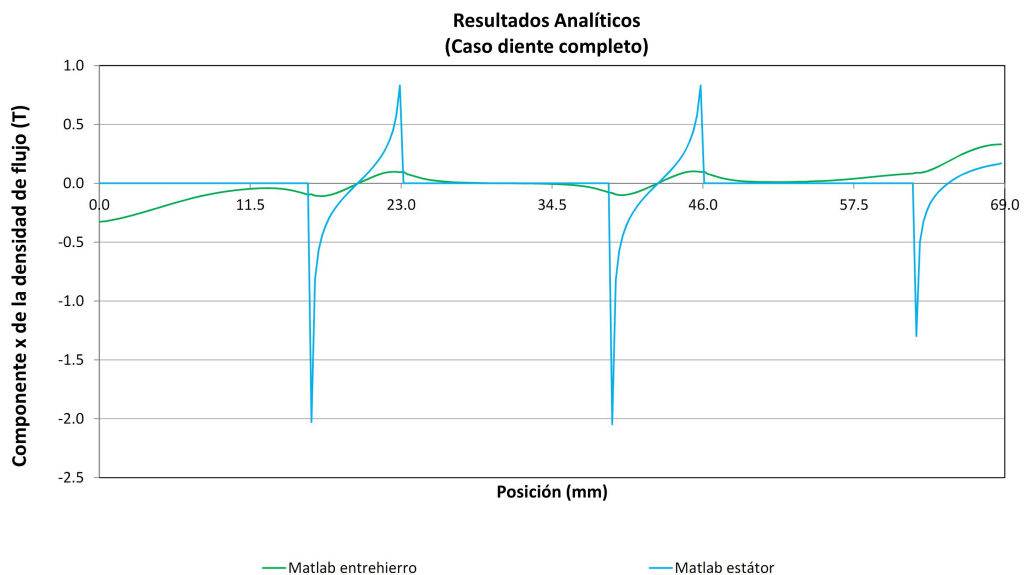


Figura 5.51: Componente  $x$  de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Completo.

Salvando la diferencia existente en la posición del ranurado, las curvas son semejantes a las obtenidas en los casos anteriores, siendo de aplicación los comentarios realizados en dichos casos.

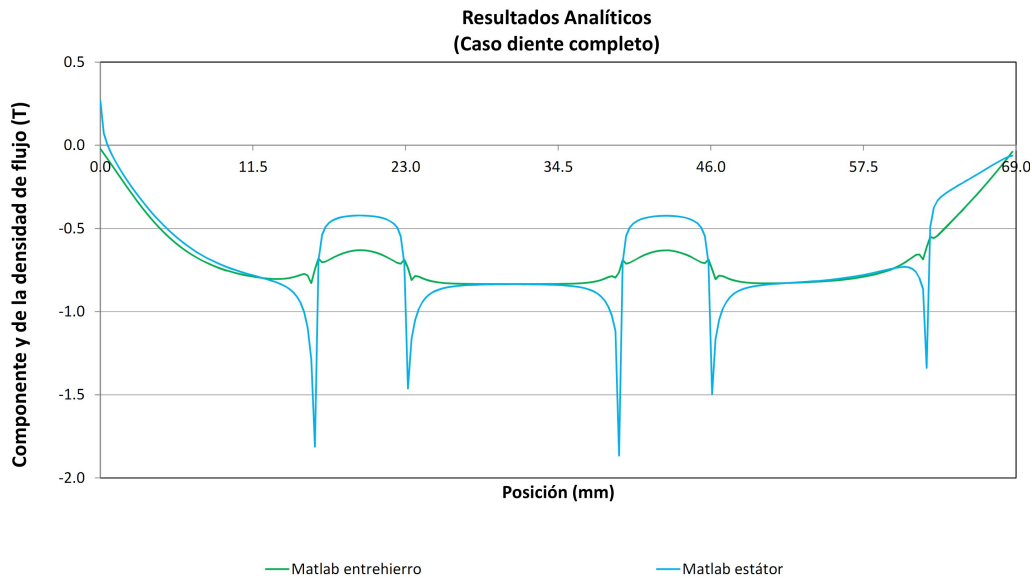


Figura 5.52: Componente  $y$  de la inducción en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor para el caso Diente Completo.

### 5.2.5. Simulación por elementos finitos

Con el fin de validar los resultados obtenidos por el método propuesto y de una forma similar a la realizada con el potencial magnético escalar, vamos a obtener las componentes de la inducción en la superficie del rotor, en el medio del entrehierro y en la superficie del estátor que nos proporciona el programa Flux3D. Para ello, y a partir del modelo de máquina ranurada que se muestra en la figura 5.38, procedimos a calcular la componentes de la inducción magnética en las tres alturas fijadas, para las mismas posiciones que las analizadas en los diferentes casos, realizando posteriormente la comparación de los resultados proporcionados por el Método de los Subdominios con los obtenidos mediante el software Flux3D, donde se ha omitido la representación de los valores analíticos en la superficie del rotor, dados los malos valores que se obtienen, tal y como se ha comentado en apartados anteriores.

Las figuras 5.53, 5.54, 5.55 y 5.56 comparan los resultados obtenidos para la componente  $x$  de la inducción en los casos Diente Parcial, Ranura Completa, Ranura Parcial y Diente Completo, respectivamente.

A la vista de estas figuras, podemos comentar:

- Para los cuatro casos estudiados, el ajuste existente entre los resultados

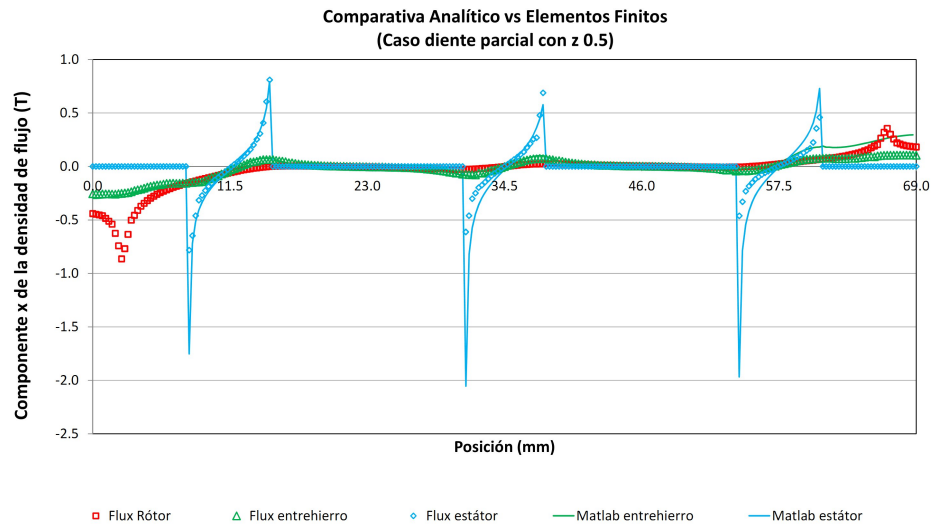


Figura 5.53: Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente  $x$  de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Parcial con  $z=0.5$

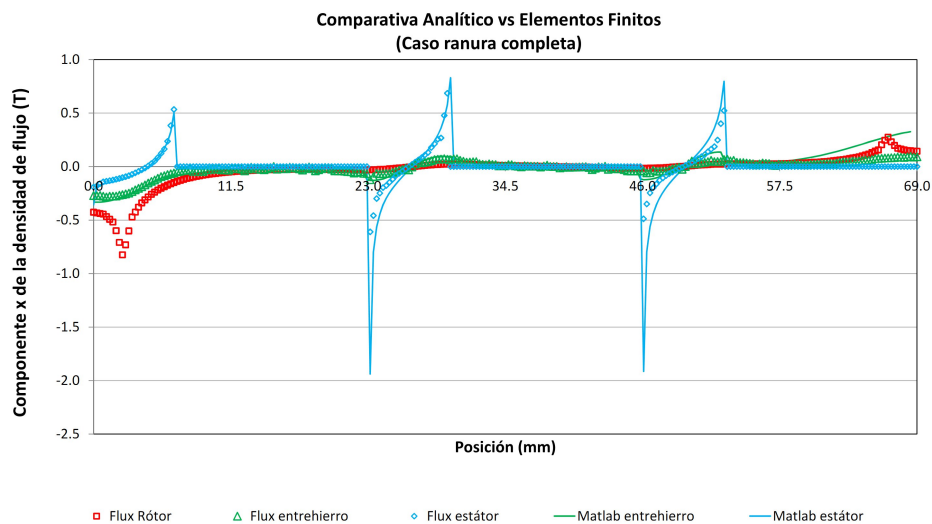


Figura 5.54: Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente  $x$  de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Completa



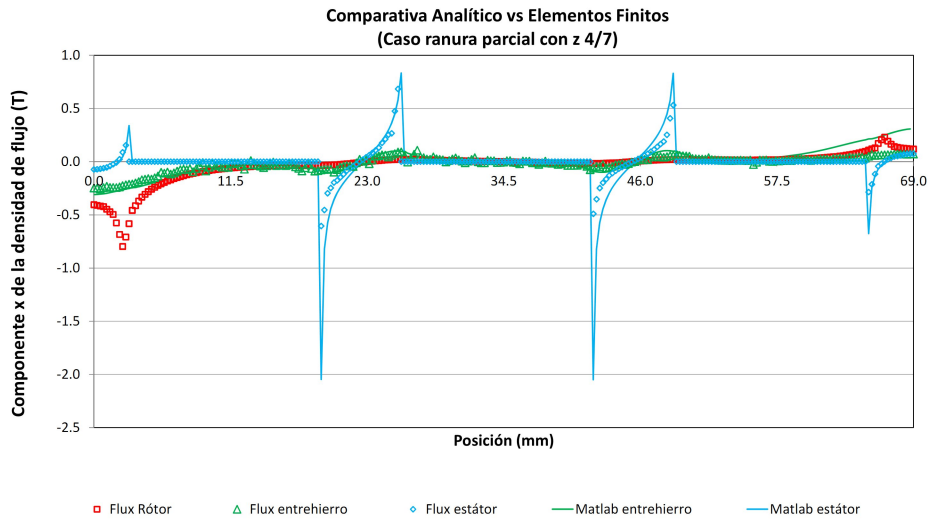


Figura 5.55: Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente  $x$  de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Parcial con  $z=0.5$

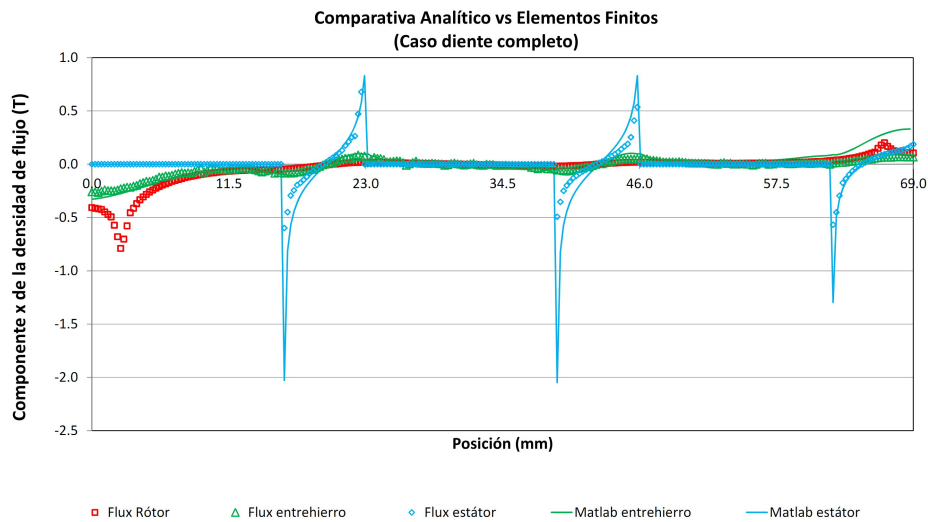


Figura 5.56: Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente  $x$  de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Completo

analíticos y los de elementos finitos son similares, siendo la principal diferencia entre estos casos la posición del ranurado respecto del polo.

- En general, la componente  $x$  de la inducción presenta un buen ajuste entre los valores analíticos y los obtenidos por elementos finitos, tanto en los dientes como en las ranuras..
- Se observa que en la superficie del estátor existe un buen ajuste entre valores analíticos y los obtenidos por elementos finitos, siendo la diferencia más importante a destacar el valor más elevado que presenta el método propuesto en la frontera diente-imán.
- En el medio del entrehierro, el ajuste es bueno en todo el polo, desviándose solamente cuando nos aproximamos al los extremos derecho del mismo.
- En la superficie del rotor, los valores analíticos no se pueden considerar como válidos para poder realizar una comparación con los obtenidos por elementos finitos.

Respecto a la componente  $y$  de la inducción, las figuras 5.57, 5.58, 5.59 y 5.60 comparan los resultados obtenidos en los casos Diente Parcial, Ranura Completa, Ranura Parcial y Diente Completo, respectivamente, donde tampoco se han representado los valores analíticos en la superficie del rotor.

A la vista de estas figuras, observamos que:

- Igual que sucedía con el potencial magnético escalar y con la componente  $x$  de la inducción, para los cuatro casos estudiados, es similar el ajuste existente entre los resultados analíticos y los de elementos finitos, siendo la principal diferencia entre estos casos la posición del ranurado respecto del polo.
- En las ranuras existe un buen ajuste entre los valores analíticos y los proporcionados por Flux3D, tanto para el medio del entrehierro como para la superficie del estátor y para todos los casos.

Se observa que en la superficie del estátor y en las proximidades de la frontera diente-ranura, el método analítico proporciona valores más elevados de la componente  $y$  de la inducción que la simulación por elementos finitos.

- En los dientes, el ajuste entre ambos conjuntos de valores es muy bueno cuando estamos en el medio del entrehierro, siendo un poco pero en la

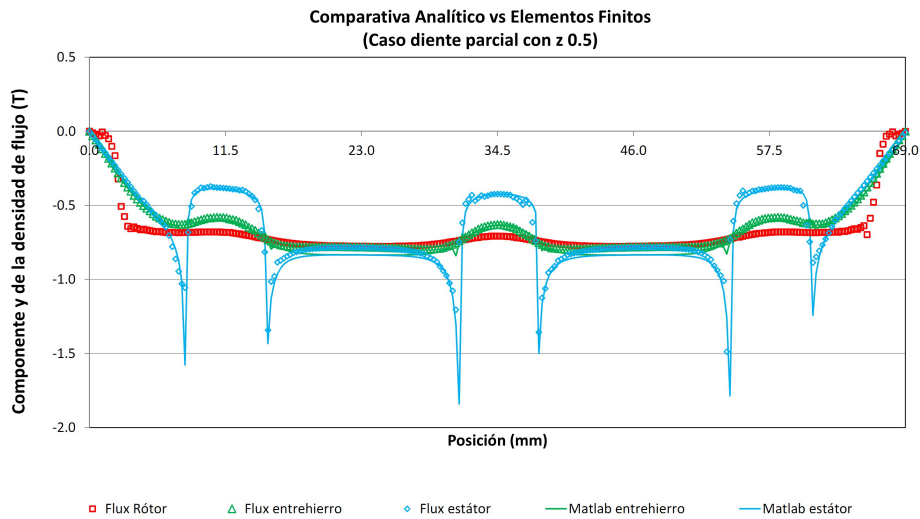


Figura 5.57: Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente  $x$  de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Parcial con  $z=0.5$

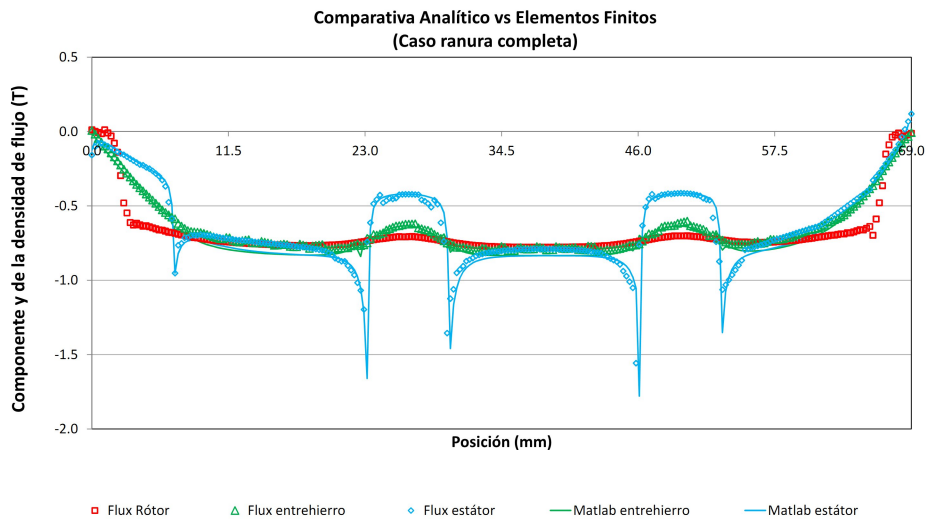


Figura 5.58: Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente  $x$  de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Completa

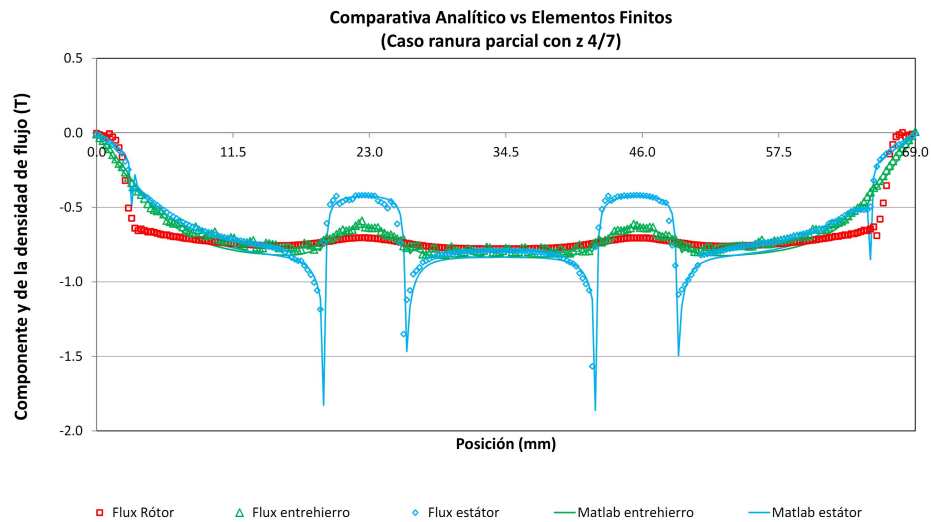


Figura 5.59: Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente  $x$  de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Ranura Parcial con  $z=0.5$

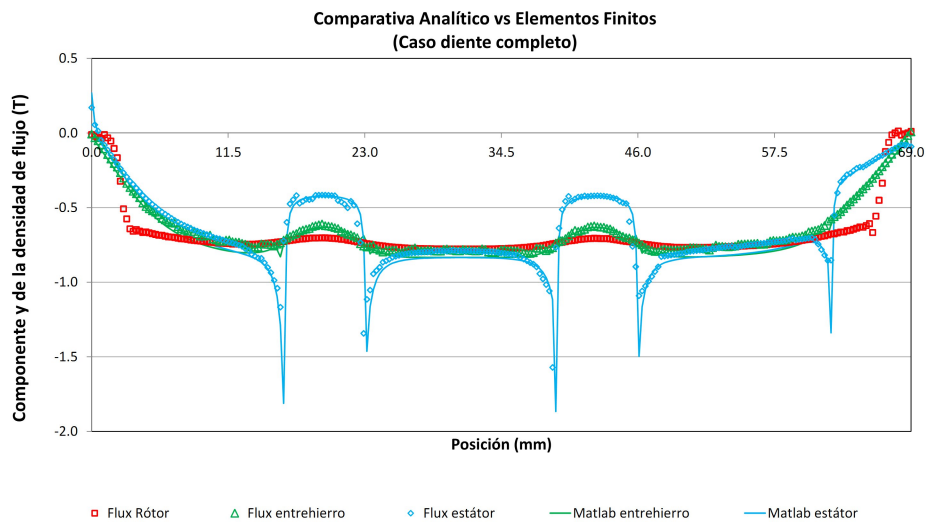


Figura 5.60: Comparativa entre los resultados proporcionados para la componente  $x$  de la inducción por el Método de los Subdominios y los obtenidos mediante Flux3D para el caso Diente Completo

superficie del estátor. En este último caso se observa que, los valores proporcionado por el método analítico son, en valor absoluto, ligeramente superiores a los de Flux3D.

- En la superficie del rotor, los valores analíticos no se pueden considerar como válidos para poder realizar una comparación con los obtenidos por elementos finitos.

### 5.3. Determinación del flujo magnético en cada región

El siguiente paso en nuestro análisis, será la determinación del flujo magnético que atraviesa el estátor de la máquina en cada región. Tal y como veíamos en el apartado 2.3.6, la expresión del flujo que atraviesa una superficie  $S$  viene dada por la expresión (2.53), la cual reproducimos a continuación:

$$\phi = \int_S \bar{B} \cdot \overline{dS}$$

donde  $\bar{B}$  representa la inducción magnética en la superficie  $S$  y  $\overline{dS}$  un elemento diferencial de superficie. En el citado apartado, habíamos establecido como flujo positivo el que entraba en el estátor procedente del rotor y como negativo en caso contrario.

Aplicaremos esta expresión y el convenio señalado en el cálculo del flujo que atraviesa la superficie del estátor. En la figura 5.61 se muestra la geometría de la máquina, donde se distinguen dos tipos de regiones: región  $t$  o región tipo diente y región  $s$  o región tipo ranura. En las primeras hallaremos el flujo que atraviesa la superficie del diente ( $S_t$ ), mientras que en las segundas calcularemos los flujos que atraviesan las tres superficies que forman la ranura ( $S_s^1$ ,  $S_s^2$  y  $S_s^3$ ) así como la superficie que forma la entrada de la ranura ( $S_s^4$ ). Vamos a obtener las expresiones generales de estos flujos.

#### ▪ Expresión del flujo en una región tipo diente:

Sea  $\phi_t$  el flujo que atraviesa una región tipo diente y  $S_t$  su superficie. En la superficie del diente la inducción magnética  $\bar{B}$  y el elemento diferencial de superficie  $\overline{dS}$  vienen dados por:

$$\bar{B} = B_x \bar{i} + B_y \bar{j}$$

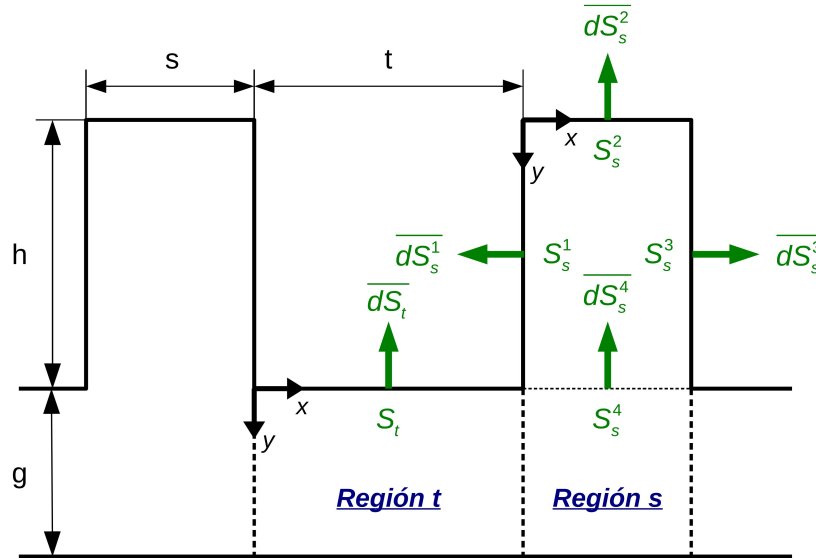


Figura 5.61: Superficies consideradas en el cálculo del flujo: Superficie  $S_t$  en la región  $t$  y superficies  $S_s^1$ ,  $S_s^2$ ,  $S_s^3$  y  $S_s^4$  en la región  $s$ .

y

$$\overline{dS} = -dS \vec{j}$$

que al sustituirlos en la expresión general del flujo (ecuación 2.53) resulta:

$$\phi_t = \int_{S_t} \overline{B} \cdot \overline{dS} = \int_{S_t} (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) \cdot (-dS \vec{j}) = - \int_{S_t} B_y dS$$

siendo la integral una integral de superficie.

Si limitamos nuestro estudio al caso de dos dimensiones, es decir, suponemos que la profundidad (tercera dimensión) vale la unidad, la integral de superficie se transforma en una integral de línea, resultando:

$$\phi_t = - \int_{x_1}^{x_2} B_y(x, y_0) dx$$

siendo  $y_0$  el valor de la ordenada correspondiente a la superficie del diente y  $x_1$  y  $x_2$  los límites inferior y superior de la abscisa en esta superficie. De acuerdo al sistema de coordenadas considerado,  $y_0 = 0$ ,

$x_1 = 0$  y  $x_2 = t$  que al reemplazarlas en la expresión anterior, nos permite obtener la expresión general del flujo por unidad de profundidad que entra en una región tipo diente de nuestra geometría:

$$\phi_t = - \int_0^t B_y(x, 0) dx \quad (5.47)$$

■ **Expresiones del flujo en una región tipo ranura:**

En las regiones ranuras vamos a calcular las expresiones del flujo en cada una de las superficies que forman la ranura (lateral izquierdo, fondo y lateral derecho) así como a la entrada de la misma.

- Expresión del flujo en la superficie lateral izquierda de la ranura:  
Denotaremos por  $\phi_s^1$  al flujo que atraviesa la superficie lateral izquierda de la ranura y por  $S_s^1$  a la superficie de este lateral izquierdo. En esta superficie, el vector inducción magnética  $\vec{B}$  y el elemento diferencial de superficie  $\vec{dS}$  vienen dados por:

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

y

$$\vec{dS}_s^1 = -dS \vec{i}$$

Si los reemplazamos en la expresión general del flujo (ecuación 2.53) obtenemos:

$$\phi_s^1 = \int_{S_s^1} \vec{B} \cdot \vec{dS}_s^1 = \int_{S_s^1} (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) \cdot (-dS \vec{i}) = - \int_{S_s^1} B_x \cdot dS$$

siendo las integrales de superficie. Al considerar que la profundidad es la unidad (dos dimensiones), aquellas se transforman en integrales de línea, obteniéndose:

$$\phi_s^1 = - \int_{y_1}^{y_2} B_x(x_0, y) dy$$

siendo  $x_0$  el valor de la abscisa correspondiente a la superficie lateral izquierda de la ranura e  $y_1$  e  $y_2$  los límites inferior y superior de la ordenada en esta superficie, cuyos valores, para el sistema de coordenadas establecido, son  $x_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$  y  $y_2 = h$ . Si

los sustituimos en la ecuación anterior, la expresión general del flujo por unidad de profundidad que atraviesa la superficie lateral izquierda de una región tipo ranura es:

$$\phi_s^1 = - \int_0^h B_x(0, y) dy \quad (5.48)$$

- Expresión del flujo en el fondo de la ranura:

Expresaremos mediante  $\phi_s^2$  el flujo que entra por el fondo de la ranura y con  $S_s^2$  a la superficie del fondo. Las expresiones de la inducción magnética  $\overline{B}$  y del elemento diferencial de superficie  $\overline{dS}$  en esta superficie son:

$$\overline{B} = B_x \overline{i} + B_y \overline{j}$$

y

$$\overline{dS}_s^2 = -dS \overline{j}$$

Por lo tanto y partiendo de la ecuación 2.53 resulta:

$$\phi_s^2 = \int_{S_s^2} \overline{B} \cdot \overline{dS}_s^2 = \int_{S_s^2} (B_x \overline{i} + B_y \overline{j}) \cdot (-dS \overline{j}) = - \int_{S_s^2} B_y dS$$

en el caso tridimensional, simplificándose para el caso bidimensional a:

$$\phi_s^2 = - \int_{x_1}^{x_2} B_y(x, y_0) dx$$

En esta superficie se cumple que  $y_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$  y  $x_2 = s$  siendo la expresión general del flujo que entra por el fondo de una región tipo ranura:

$$\phi_s^2 = - \int_0^s B_y(x, 0) dx \quad (5.49)$$

- Expresión del flujo en la superficie lateral derecha de la ranura:

Llamaremos con  $\phi_s^3$  al flujo que atraviesa la superficie lateral derecha de la ranura y con  $S_s^3$  a la superficie de este lateral derecho. En esta superficie el vector inducción magnética  $\overline{B}$  y el elemento diferencial de superficie  $\overline{dS}$  se expresan mediante:

$$\overline{B} = B_x \overline{i} + B_y \overline{j}$$



y

$$\overline{dS_s^3} = dS \bar{i}$$

que reemplazadas en la ecuación general del flujo da lugar a:

$$\phi_s^3 = \int_{S_s^3} \overline{B} \cdot \overline{dS_s^3} = \int_{S_s^3} (B_x \bar{i} + B_y \bar{j}) \cdot (dS \bar{i}) = \int_{S_s^3} B_x \cdot dS$$

reduciéndose en dos dimensiones a:

$$\phi_s^3 = \int_{y_1}^{y_2} B_x(x_0, y) dy$$

Como en la superficie  $S_s^3$  la variable  $x$  es constante y de valor  $s$  y la variable  $y$  varía entre 0 y  $h$ , la expresión general del flujo por unidad de profundidad que atraviesa la superficie lateral derecha de una región tipo ranura resulta:

$$\phi_s^3 = \int_0^h B_x(s, y) dy \quad (5.50)$$

- Expresión del flujo en la entrada de la ranura:

Simbolizaremos mediante  $\phi_s^4$  al flujo que atraviesa la entrada de la ranura y con  $S_s^4$  a la superficie de la entrada. Las expresiones de la inducción magnética  $\overline{B}$  y del elemento diferencial de superficie  $\overline{dS}$  en esta superficie son:

$$\overline{B} = B_x \bar{i} + B_y \bar{j}$$

y

$$\overline{dS_s^4} = -dS \bar{j}$$

A partir de la ecuación 2.53 llegamos a:

$$\phi_s^4 = \int_{S_s^4} \overline{B} \cdot \overline{dS_s^4} = \int_{S_s^4} (B_x \bar{i} + B_y \bar{j}) \cdot (-dS \bar{j}) = - \int_{S_s^4} B_y dS$$

en general, siendo para dos dimensiones:

$$\phi_s^4 = - \int_{x_1}^{x_2} B_y(x, y_0) dx$$

Ya que para la superficie  $S_s^4$  la variable  $x$  varía entre 0 y  $s$  y la variable  $y$  es constante y de valor  $h$ , la expresión del flujo por unidad de profundidad que entra en una región tipo ranura viene dada por:

$$\phi_s^4 = - \int_0^s B_y(x, h) dx \quad (5.51)$$

Se deberá verificar que el flujo que entra en la ranura es igual a la suma de los flujos que atraviesan las paredes de dicha ranura, es decir:

$$\phi_s^4 = \phi_s^1 + \phi_s^2 + \phi_s^3 \quad (5.52)$$

Vamos a aplicar las ecuaciones anteriores a cada región de cada caso, siguiendo el mismo orden que en apartados anteriores, esto es, Diente Parcial, Ranura Completa, Ranura Parcial y Diente Completo. Obtengamos dichos flujos.

### 5.3.1. Diente Parcial

El caso Diente Parcial, tal y como muestra la figura 5.4, está formado por siete regiones, cuatro de tipo diente (regiones I, III, V y VII) y tres de tipo ranura (regiones II, IV y VI), las cuales trataremos de forma diferente:

- En las regiones tipo diente, hallaremos el flujo que atraviesa la superficie del diente ( $\phi_t$ ) cuya expresión general viene dada por la ecuación (5.47).
- En las regiones tipo ranura calcularemos los flujos que atraviesan las tres superficies que forman la ranura ( $\phi_s^1$ ,  $\phi_s^2$  y  $\phi_s^3$ ) así como la superficie que forma la entrada de la ranura ( $\phi_s^4$ ), flujos que vienen expresados por las ecuaciones (5.48), (5.49), (5.50) y (5.51). Se deberá verificar que el flujo que entra en la ranura es igual a la suma de los flujos que atraviesan las paredes de dicha ranura ( $\phi_s^4 = \phi_s^1 + \phi_s^2 + \phi_s^3$ ).

Aplicamos las ecuaciones anteriores a cada región donde sustituiremos el subíndice por el ordinal de la región. Las expresiones del flujo en cada región se muestran a continuación:

#### Región I

Flujo que atraviesa la región I:

$$\begin{aligned} \phi_I &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),1} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{tz} \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} (Q_w + H_w) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

### Región II

Flujos que atraviesan la región II:

$$\begin{aligned} \phi_{II}^1 &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_{II}^2 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),2} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^2 + K_n^{2'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \phi_{II}^3 &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,2} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] - \\ &- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_{II}^4 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),2} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^2 + K_n^{2'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

donde las expresiones de  $K_n^2$  y  $K_n^{2'}$  vienen dadas por la ecuación (5.3).

**Región III**

Flujo que atraviesa la región III:

$$\begin{aligned} \phi_{III} = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),3} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} [M_l + L_l] \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.58)$$

**Región IV**

Flujos que atraviesan la región IV:

$$\begin{aligned} \phi_{IV}^1 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] - 1 \right\} + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_{IV}^2 = & + \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^4 + K_n^{4'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \phi_{IV}^3 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right) - 1 \right] - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_{IV}^4 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^4 + K_n^{4'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (5.62)$$

donde las expresiones de  $K_n^4$  y  $K_n^{4'}$  vienen dadas por la ecuación (5.6).

### Región V

Flujo que atraviesa la región V:

$$\begin{aligned} \phi_V = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),4} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} [P_r + R_r] \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.63)$$

### Región VI

Flujos que atraviesan la región VI:

$$\begin{aligned} \phi_{VI}^1 = & \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} \phi_{VI}^2 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),5} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^6 + K_n^{6'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \phi_{VI}^3 = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,5} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} \phi_{VI}^4 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),5} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^6 + K_n^{6'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (5.67)$$

donde las expresiones de  $K_n^6$  y  $K_n^{6'}$  vienen dadas por la ecuación (5.9).

### Región VII

Flujo que atraviesa la región VII:

$$\begin{aligned} \phi_{VII} = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),6} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t(1-z)} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{u=1}^{\infty} [V_u - Q_u] \operatorname{csch} \left[ \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (5.68)$$

A partir de las expresiones del flujo (desde la ecuación (5.53) hasta la (5.68)) y para unos valores numéricos de los parámetros, podemos obtener los valores del flujo en cada una de las superficies de cada región.

A continuación y a modo de ejemplo, se muestra en la tabla 5.1 los resultados de flujo (en mWb) obtenidos para cada región, donde los valores numéricos de los parámetros son  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $z = 1/2$ . Podemos observar como el flujo hallado en la entrada de cada ranura ( $\phi_s^4$ ) es igual a la suma de los flujos hallados en las superficies que delimitan dicha ranura ( $\phi_s^1$ ,  $\phi_s^2$  y  $\phi_s^3$ ).

### 5.3.2. Ranura Completa

El caso Ranura Completa posee seis regiones por polo (figura 5.20), tres de tipo ranura (regiones I, III y V) y tres de tipo diente (regiones II, IV y VI), las cuales trataremos de forma diferente, tal y como veíamos en el caso de Diente Parcial:

- En las regiones tipo diente, hallaremos el flujo que atraviesa la superficie del diente ( $\phi_t$ ) cuya expresión general viene dada por la ecuación (5.47).

<b>Región I:</b>	$\phi_I$	3.484						
<b>Región II:</b>	$\phi_{II}^1$	1.620	$\phi_{II}^2$	-0.093	$\phi_{II}^3$	1.723	$\phi_{II}^4$	3.250
<b>Región III:</b>	$\phi_{III}$	14.076						
<b>Región IV:</b>	$\phi_{IV}^1$	1.823	$\phi_{IV}^2$	-0.101	$\phi_{IV}^3$	1.820	$\phi_{IV}^4$	3.542
<b>Región V:</b>	$\phi_V$	14.075						
<b>Región VI:</b>	$\phi_{VI}^1$	1.726	$\phi_{VI}^2$	-0.094	$\phi_{VI}^3$	1.620	$\phi_{VI}^4$	3.252
<b>Región VII:</b>	$\phi_{VII}$	3.474						

Tabla 5.1: Flujos (en mWb) para cada región, con valores numéricos de los parámetros  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $z = 1/2$ .

- En las regiones tipo diente calcularemos los flujos que atraviesan las tres superficies que forman la ranura ( $\phi_s^1$ ,  $\phi_s^2$  y  $\phi_s^3$ ) así como la superficie que forma la entrada de la ranura ( $\phi_s^4$ ), flujos que vienen expresados por las ecuaciones (5.48), (5.49), (5.50) y (5.51). Se deberá verificar que el flujo que entra en la ranura es igual a la suma de los flujos que atraviesan las paredes de dicha ranura ( $\phi_s^4 = \phi_s^1 + \phi_s^2 + \phi_s^3$ ).

Las expresiones del flujo en cada región se recogen en el apartado D.5 del apéndice D.

A partir de las expresiones del flujo (desde la ecuación (D.41) hasta la (D.55)) y para unos valores numéricos de los parámetros podemos obtener los valores del flujo en cada una de las superficies de cada región.

A continuación y a modo de ejemplo, se muestra en la tabla 5.2 los resultados de flujo (en mWb) obtenidos para cada región del polo norte, donde los valores numéricos de los parámetros son  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$ . Podemos observar como el flujo hallado en la entrada de cada ranura ( $\phi_s^4$ ) es igual a la suma de los flujos hallados en las superficies que delimitan dicha ranura ( $\phi_s^1$ ,  $\phi_s^2$  y  $\phi_s^3$ ).

### 5.3.3. Ranura Parcial

La figura 5.25 nos muestra la geometría del caso Ranura Parcial donde podemos apreciar que hay siete regiones por polo, cuatro de tipo ranura (regiones I, III, V y VII) y tres del tipo diente (regiones II, IV y VI). Como en los dos casos anteriores, en las primeras calcularemos los flujos que atraviesan las tres superficies que forman la ranura ( $\phi_s^1$ ,  $\phi_s^2$  y  $\phi_s^3$ ) así como el que atraviesa la superficie que forma la entrada de la ranura ( $\phi_s^4$ ), mientras

<b>Región I:</b>	$\phi_I^1$	0.493	$\phi_I^2$	-0.040	$\phi_I^3$	1.030
	$\phi_I^4$	1.483				
<b>Región II:</b>	$\phi_{II}$	13.125				
<b>Región III:</b>	$\phi_{III}^1$	1.764	$\phi_{III}^2$	-0.101	$\phi_{III}^3$	1.815
	$\phi_{III}^4$	3.478				
<b>Región IV:</b>	$\phi_{IV}$	14.034				
<b>Región V:</b>	$\phi_V^1$	1.767	$\phi_V^2$	-0.101	$\phi_V^3$	1.743
	$\phi_V^4$	3.410				
<b>Región VI:</b>	$\phi_{VI}$	9.477				

Tabla 5.2: Flujos (en mWb) para cada región del polo central, con valores numéricos de los parámetros  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$

que en las segundas hallaremos el flujo que atraviesa la superficie del diente ( $\phi_t$ ). Empleando las ecuaciones (5.48), (5.49), (5.50) y (5.51) hallaremos los flujos de las regiones tipo ranura y con la relación (5.47) el de las regiones tipo diente. Como en casos anteriores, en las regiones tipo ranura se deberá cumplir que el flujo que entra en la ranura es igual a la suma de los flujos que atraviesan las paredes de dicha ranura ( $\phi_s^4 = \phi_s^1 + \phi_s^2 + \phi_s^3$ ). El apartado E.5 del anexo E recoge estas expresiones.

A partir de las expresiones del flujo (desde la ecuación (E.48) hasta la (E.66)) y para unos valores numéricos de los parámetros, podemos obtener los valores del flujo en cada una de las superficies de cada región.

A continuación y a modo de ejemplo, se muestra en la tabla 5.3 los resultados de flujo (en mWb) obtenidos para cada región, donde los valores numéricos de los parámetros son  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $z = 1/2$ . Podemos observar como el flujo hallado en la entrada de cada ranura ( $\phi_s^4$ ) es igual a la suma de los flujos hallados en las superficies que delimitan dicha ranura ( $\phi_s^1$ ,  $\phi_s^2$  y  $\phi_s^3$ ).

### 5.3.4. Diente Completo

El último caso que vamos a estudiar es el de Diente Completo (figura 5.34) compuesto por tres regiones tipo diente (regiones I, III y V) y tres regiones tipo ranura (regiones II, IV y VI). Como en casos anteriores, en las de tipo diente sólo hallaremos el flujo que atraviesa la superficie del diente,  $\phi_t$ , mediante la expresión 5.47; en las regiones de tipo ranura calcularemos



<b>Región I:</b>	$\phi_I^1$	0.118	$\phi_I^2$	-0.026	$\phi_I^3$	0.331
	$\phi_I^4$	0.423				
<b>Región II:</b>	$\phi_{II}$	11.957				
<b>Región III:</b>	$\phi_{III}^1$	1.819	$\phi_{III}^2$	-0.102	$\phi_{III}^3$	1.826
	$\phi_{III}^4$	3.543				
<b>Región IV:</b>	$\phi_{IV}$	14.147				
<b>Región V:</b>	$\phi_V^1$	1.825	$\phi_V^2$	-0.101	$\phi_V^3$	1.816
	$\phi_V^4$	3.539				
<b>Región VI:</b>	$\phi_{VI}$	11.945				
<b>Región VII:</b>	$\phi_{VII}^1$	0.330	$\phi_{VII}^2$	-0.026	$\phi_{VII}^3$	0.118
	$\phi_{VII}^4$	0.422				

Tabla 5.3: Flujos (en mWb) para cada región, con valores numéricos de los parámetros  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$ ,  $h = 21.5mm$  y  $z = 1/2$ .

los flujos que atraviesan las tres superficies que forman la ranura,  $\phi_s^1$ ,  $\phi_s^2$  y  $\phi_s^3$ , y el que atraviesa la superficie que forma la entrada de la ranura  $\phi_s^4$ , para lo cual utilizaremos las ecuaciones (5.48), (5.49), (5.50) y (5.51). En estas últimos sabemos que el flujo que entra en la ranura es igual a la suma de los flujos que atraviesan las paredes de dicha ranura ( $\phi_s^4 = \phi_s^1 + \phi_s^2 + \phi_s^3$ ).

Las expresiones de los flujos en cada región se hallan determinados en el apartado F.5 del apéndice F.

A partir de las expresiones del flujo (desde la ecuación (F.41) hasta la (F.55)) y para unos valores numéricos de los parámetros podemos obtener los valores del flujo en cada una de las superficies de cada región.

A continuación y a modo de ejemplo, se muestra en la tabla 5.4 los resultados de flujo (en mWb) obtenidos para cada región del polo norte, donde los valores numéricos de los parámetros son  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$ . Podemos observar como el flujo hallado en la entrada de cada ranura ( $\phi_s^4$ ) es igual a la suma de los flujos hallados en las superficies que delimitan dicha ranura ( $\phi_s^1$ ,  $\phi_s^2$  y  $\phi_s^3$ ).

<b>Región I:</b>	$\phi_I$	9.569				
<b>Región II:</b>	$\phi_{II}^1$	1.807	$\phi_{II}^2$	-0.101	$\phi_{II}^3$	1.820
	$\phi_{II}^4$	3.526				
<b>Región III:</b>	$\phi_{III}$	14.144				
<b>Región IV:</b>	$\phi_{IV}^1$	1.726	$\phi_{IV}^2$	-0.101	$\phi_{IV}^3$	1.819
	$\phi_{IV}^4$	3.543				
<b>Región V:</b>	$\phi_V$	13.233				
<b>Región VI:</b>	$\phi_{VI}^1$	1.039	$\phi_{VI}^2$	-0.041	$\phi_{VI}^3$	0.494
	$\phi_{VI}^4$	1.492				

Tabla 5.4: Flujos (en mWb) para cada región, con valores numéricos de los parámetros  $V_0 = 3318.52Av$ ,  $s = 7mm$ ,  $t = 16mm$ ,  $g = 5mm$  y  $h = 21.5mm$

## 5.4. Flujo concatenado por una bobina

El objetivo que nos proponemos en este apartado es determinar el flujo que concatenan las bobinas de nuestra máquina. Una vez conocido este flujo, podremos observar cómo varía como consecuencia del movimiento del rotor y obtener la fuerza electromotriz inducida en dichas bobinas.

Antes de comenzar a obtener este flujo, necesitamos conocer las características del bobinado de nuestra máquina. Se trata de una máquina trifásica, con 8 polos y 24 ranuras, que posee un bobinado distribuido, de tambor y de una capa; cada estátor de la máquina alojará 12 bobinas con un paso de bobina de 3 ranuras; estas 12 bobinas se repartirán en tres grupos de cuatro bobinas las cuales se conectarán en serie, formando cada serie una fase de la máquina. En ambos estatores el procedimiento será el mismo, pudiéndose conectar en serie o en paralelo las fases homónimas de cada uno de los estatores.

Para calcular el flujo que abarca una de estas bobinas, necesitamos conocer las posiciones relativas de la bobina respecto al rotor de la máquina a medida que éste se mueve. Definimos un parámetro, al que llamamos *offset*, que nos va a proporcionar la posición del rotor respecto de una posición determinada del estátor que denominaremos inicial. Vamos a tomar como posición inicial aquella en la el principio de un polo norte de la máquina se encuentra situado en el medio de un diente del estátor, es decir, la posición inicial corresponde con el caso de Diente Parcial cuando el parámetro  $z$  vale 0.5. En la figura 5.62 se muestra esta posición inicial así como las ranuras donde van alojados los lados activos de la bobina considerada y su paso de bobina ( $\tau_c$ ). Además, en cada uno de los polos de la máquina no se han resaltado las bandas de desmagnetización de cada imán (éstas ya se han tenido

en cuenta en el cálculo del flujo que atraviesa los dientes y las ranuras del estátor en los diferentes casos considerados) sino que se han uniformizado los polos, marcando con diferente color los polos norte de los polos sur (verde oscuro para el norte y verde claro para el sur).

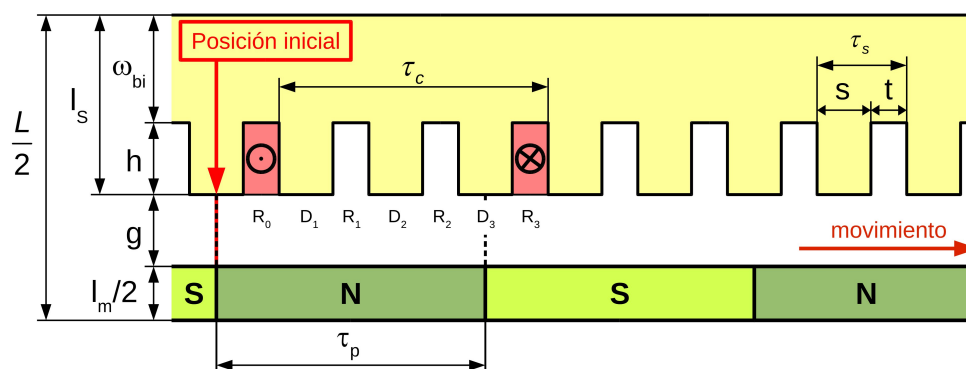


Figura 5.62: Geometría que vamos a considerar para el cálculo del flujo que concatena una bobina.

En esta figura 5.62, también aparecen resaltados tres dientes ( $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ ) y cuatro ranuras ( $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ ). El conocimiento del flujo que atraviese estos siete elementos nos permitirá calcular el que abarca la bobina, hallando los flujos en estos siete elementos a partir de los que hemos hallado en la sección (5.3) para cada una de las regiones en que dividíamos los diferentes casos considerados (diente parcial, ranura completa, ranura parcial o diente completo). De este modo el flujo de la bobina será igual a la suma de los flujos en los dientes y ranuras interiores de la bobina (dientes  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  y ranuras  $R_1$  y  $R_2$ ) más una parte del flujo que atraviesa las ranuras que alojan los lados activos de la bobina ( $R_0$  y  $R_3$ ), entendiéndose por flujo que atraviesa una ranura aquel que atraviesa la entrada de la ranura y que representábamos por  $\phi_s^4$ .

El que en las ranuras que alojan los extremos de la bobina sólo consideremos una parte del flujo que las atraviesa es debido a que no todo el flujo que entra en esas ranuras concatenará todas las espiras que forman la bobina, ya que una parte de ese flujo atravesará la superficie lateral externa de la ranura respecto de la bobina (superficie lateral izquierda para  $R_0$  y superficie lateral derecha para  $R_3$ ). Por ello, estos flujos los hallaremos a partir de la expresión (5.51) pero multiplicando a la componente de la inducción por una función de distribución, procedimiento empleado por otros autores como [79] y [125]. La figura 5.63 muestra esta función de distribución; observamos que la fun-

ción de distribución vale la unidad para puntos comprendidos entre las dos ranuras que alojan la bobina (ranuras  $R_1$  y  $R_2$  y dientes  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ ) y varía desde la unidad hasta cero para las ranuras  $R_0$  y  $R_3$ , de forma lineal según nos movemos desde la superficie lateral interna de la ranura a la superficie lateral externa.

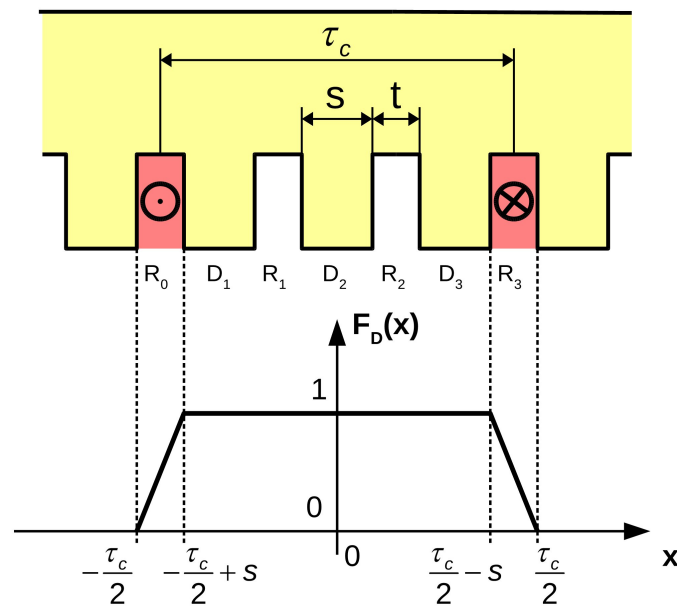


Figura 5.63: Función de distribución para una bobina

Para diferenciar los flujos obtenidos cuando la función de distribución es menor que la unidad de los hallados cuando vale la unidad, marcaremos los primeros con el superíndice “asc” o “desc” que hace referencia a que la función de distribución está en el tramo creciente (o ascendente) o en el tramo decreciente (o descendente), respectivamente. Los flujos existentes cuando la función de distribución vale la unidad coinciden con los calculados en la mencionada sección (5.3) por lo que no se marcarán con ninguna notación especial.

Las posiciones relativas que puede adoptar el rotor de la máquina respecto a la bobina a medida que éste se mueve las vamos a clasificar en lo que llamaremos *posiciones*. Vamos a estudiar las diferentes posiciones que se van a originar y las relacionaremos con los cuatro casos estudiados (diente parcial, ranura completa, ranura parcial y diente completo). Veamos estas posiciones:

## 5.4.1. Posición 1

La figura 5.64 muestra la posición 1, que se corresponde con la posición inicial; el offset es cero y, comparándola con los casos estudiados, se trata del caso diente parcial con un valor de  $z$  de 0.5 (el principio del polo coincide con el medio de un diente del ranurado). En la parte inferior del entrehierro se indica el número de la correspondiente región del caso diente parcial. Si este número es negativo, significa que estamos bajo un polo sur y, debido a la periodicidad anticíclica del problema, los valores del campo, de la inducción y del flujo serán los contrarios a si estuviéramos bajo un polo norte. En el resto de posiciones, se repetirá esta indicación.

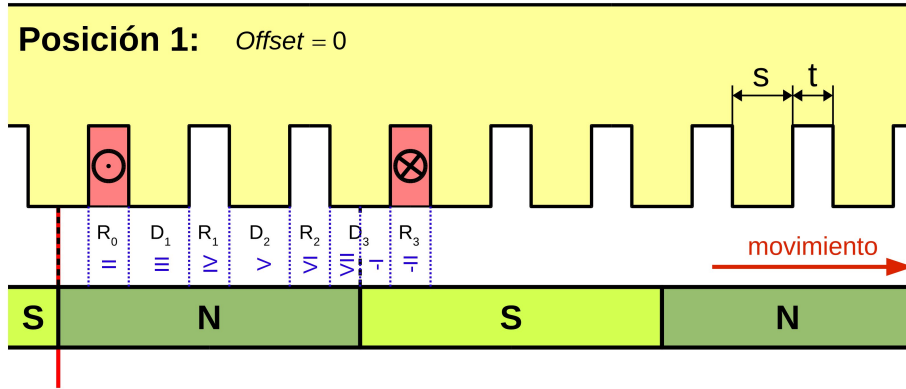


Figura 5.64: Posición 1

El flujo concatenado por la bobina en esta posición,  $\phi_{Bobina}^{S1}$ , será:

$$\phi_{Bobina}^{S1} = \phi_{R_0}^{asc} + \phi_{D_1} + \phi_{R_1} + \phi_{D_2} + \phi_{R_2} + \phi_{D_3} + \phi_{R_3}^{desc} \quad (5.69)$$

Cada uno de los flujos que atraviesan los dientes y las ranuras internos de la bobina, se pueden expresar en función de los flujos de las diferentes regiones del caso Diente Parcial (5.3.1), del modo siguiente:

$$\phi_{D_1} = \phi_{III,DP} ,$$

$$\phi_{R_1} = \phi_{IV,DP} ,$$

$$\phi_{D_2} = \phi_{V,DP} ,$$

$$\phi_{R_2} = \phi_{VI,DP}$$

y

$$\phi_{D_3} = \phi_{VII,DP} + \phi_{-I,DP} = \phi_{VII,DP} - \phi_{I,DP}$$

Respecto al flujo que atraviesa la ranura  $R_0$ , si consideráramos todo el flujo que entra por la ranura, tendríamos:

$$\phi_{R_0} = \phi_{II,DP}^4 = - \int_0^s B_y^{II}(x, h) dx$$

Si calculamos el flujo teniendo en cuenta la función de distribución, éste sería:

$$\phi_{R_0}^{asc} = \phi_{II,DP}^{asc} = - \int_0^s B_y^{II}(x, h) \cdot F_D(x) dx = - \int_0^s B_y^{II}(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx$$

donde hemos sustituido  $F_D(x)$  por su valor en el intervalo de integración. De forma análoga, vamos proceder con la ranura  $R_3$ .

La totalidad del flujo que atraviesa esta ranura será:

$$\begin{aligned} \phi_{R_3} = \phi_{-II,DP} &= - \int_0^s B_y^{-II}(x, h) dx = - \int_0^s [-B_y^{II}(x, h)] dx = \\ &= \int_0^s B_y^{-II}(x, h) dx = -\phi_{II,DP} \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta la función de distribución, resulta:

$$\begin{aligned} \phi_{R_3}^{desc} &= - \int_0^s B_y^{-II}(x, h) \cdot F_D(x) dx = \int_0^s B_y^{II}(x, h) \cdot F_D(x) dx = \\ &= -\phi_{II,DP}^{desc} = \int_0^s B_y^{II}(x, h) \cdot \left(1 - \frac{x}{s}\right) dx \end{aligned}$$

donde hemos reemplazado el valor de  $F_D(x)$  en el intervalo de integración.

Sustituyendo en la expresión (5.69) todos los flujos de dientes y ranuras, obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi_{Bobina}^{S1} &= \phi_{II,DP}^{asc} + \phi_{III,DP} + \phi_{IV,DP} + \phi_{V,DP} + \phi_{VI,DP} + \\ &+ \phi_{VII,DP} - \phi_{I,DP} - \phi_{II,DP}^{desc} \end{aligned}$$

Si en la anterior expresión, omitimos en la notación la referencia al caso Diente Parcial (subíndice  $DP$ ), el flujo que concatena la bobina en la posición 1 tiene por expresión:

$$\phi_{Bobina}^{S1} = \phi_{II}^{asc} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI} + \phi_{VII} - \phi_I - \phi_{II}^{desc} \quad (5.70)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso diente parcial. Aunque en esta expresión desconocemos los flujos  $\phi_{II}^{asc}$  y  $\phi_{II}^{desc}$ , nos será útil para establecer un patrón que nos permite hallar el flujo de la bobina cuando el offset sea superior al paso de ranura, como veremos más adelante.

Por otro lado, la suma de los flujos de las ranuras  $R_0$  y  $R_3$  es:

$$\begin{aligned}\phi_{R_0}^{asc} + \phi_{R_3}^{desc} &= - \int_0^s B_y^{II}(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx + \int_0^s B_y^{II}(x, h) \cdot \left(1 - \frac{x}{s}\right) dx = \\ &= -2 \int_0^s B_y^{II}(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx + \int_0^s B_y^{II}(x, h) dx = 2\phi_{R_0}^{asc} - \phi_{R_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi_{R_0}^{asc} + \phi_{R_3}^{desc} = 2\phi_{II,DP}^{asc} - \phi_{II,DP}\end{aligned}$$

logrando expresar la suma en función del flujo total que atraviesa la ranura  $R_0$ ,  $\phi_{II,DP}$ , ya conocido, y del flujo que concatena la bobina en la ranura  $R_0$ ,  $\phi_{II,DP}^{asc}$ .

Sustituyendo esta relación en la expresión (5.70) obtenemos:

$$\phi_{Bobina}^{S1} = 2\phi_{II,DP}^{asc} + \phi_{III,DP} + \phi_{IV,DP} + \phi_{V,DP} + \phi_{VI,DP} + \phi_{VII,DP} - \phi_{I,DP} - \phi_{II,DP}$$

Si en la expresión anterior, también omitimos en la notación la referencia al caso Diente Parcial (subíndice  $DP$ ), el flujo que concatena la bobina en la posición 1 tiene por expresión:

$$\phi_{Bobina}^{S1} = 2\phi_{II}^{asc} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI} + \phi_{VII} - \phi_I - \phi_{II} \quad (5.71)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso diente parcial y donde todos los flujos son conocidos excepto  $\phi_{II}^{asc}$ . Vamos a obtener la expresión de este flujo.

La expresión de  $\phi_{II}^{asc}$  en función de la inducción, será igual que la del flujo que entra por la entrada de la ranura (5.51 pero introduciendo la función de distribución:

$$\phi_{II}^{asc} = - \int_0^s B_y^{II}(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx$$

sustituyendo la expresión de  $B_y^{II}$ , ecuación (5.36), tenemos:

$$\begin{aligned}
\phi_{II,DP}^{asc} &= \int_0^s \left\{ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{s} (h+g) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) \right\} \cdot \frac{x}{s} dx + \\
&+ \int_0^s \left\{ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right\} \cdot \frac{x}{s} dx + \\
&+ \int_0^s \left\{ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right\} \cdot \frac{x}{s} dx = \\
&= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{s} (h+g) \right] \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) \int_0^s \frac{x}{s} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) dx + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \int_0^s \frac{x}{s} \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) dx + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \int_0^s \frac{x}{s} \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] dx
\end{aligned}$$

Realizando cada una de la integrales por partes y sustituyendo los límites de integración, resultaría:

$$\begin{aligned}
\phi_{II}^{asc} &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,2} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \operatorname{coth} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
&- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
&- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^2 - K_n^{2'}) \frac{h+g}{n\pi s} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Sustituyendo esta ecuación junto con las expresiones (5.53), (5.57), (5.58), (5.62), (5.63), (5.67) y (5.68) en la ecuación (5.71) conoceremos el valor del flujo concatenado por la bobina en esta posición.

### 5.4.2. Posición 2

La figura 5.65 muestra las posición 2; el offset es  $\frac{t}{2} - zt$  y, comparándola con los casos estudiados, se trata del caso diente parcial con un valor de  $z$



que disminuye desde 0.5 hasta 0 (para todos estos valores el principio del polo está debajo de un diente del ranurado).

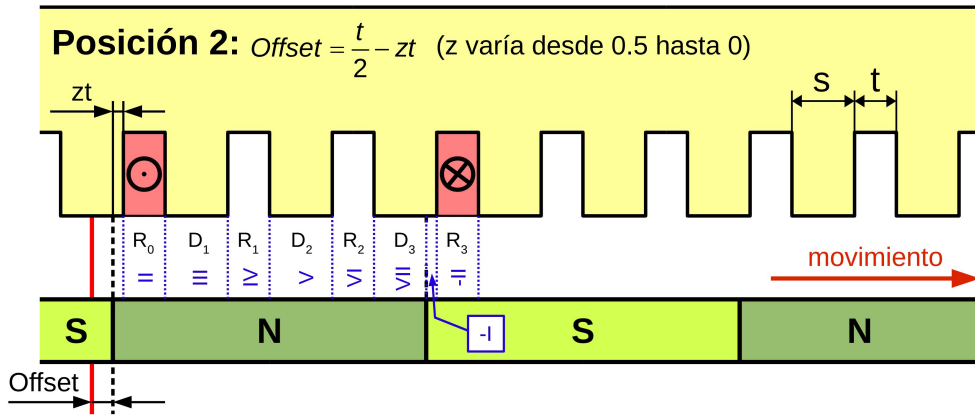


Figura 5.65: Posición 2

Esta posición es totalmente idéntica a la posición 1, excepto que ahora el parámetro  $z$  varía mientras que antes tenía un valor fijo e igual a 0.5. Por lo tanto, las expresiones que proporcionan el flujo que concatena la bobina en función de los flujos en las regiones correspondientes al caso diente parcial serán idénticas en ambas posiciones.

Así, podemos escribir que el flujo que concatena la bobina en la posición 2 es:

$$\phi_{Bobina}^{S2} = \phi_{II}^{asc} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI} + \phi_{VII} - \phi_I - \phi_{II}^{desc} \quad (5.73)$$

o bien

$$\phi_{Bobina}^{S2} = 2\phi_{II}^{asc} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI} + \phi_{VII} - \phi_I - \phi_{II} \quad (5.74)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso diente parcial y donde todos los flujos son conocidos.

### 5.4.3. Posición 3

La figura 5.66 muestra las posición 3; el offset es  $\frac{t}{2}$  y, comparándola con los casos estudiados, se trata del caso ranura completa (el principio del polo coincide con el comienzo de una ranura del ranurado).

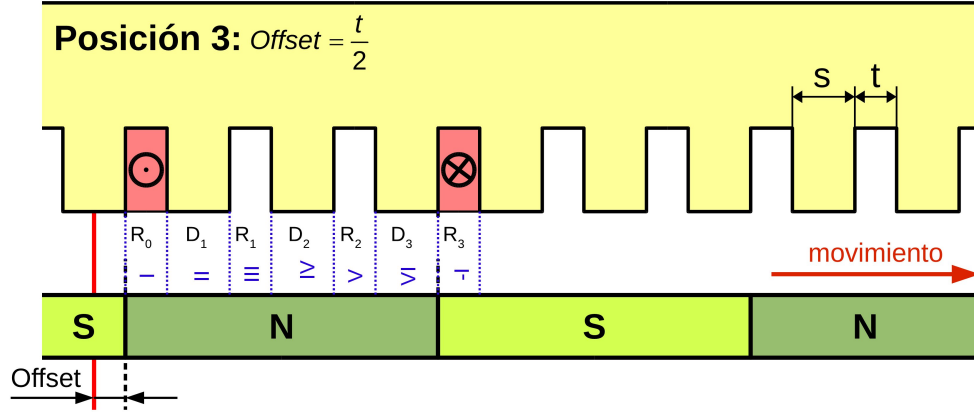


Figura 5.66: Posición 3

El flujo concatenado por la bobina en esta posición,  $\phi_{Bobina}^{S3}$ , será:

$$\phi_{Bobina}^{S3} = \phi_{R_0}^{asc} + \phi_{D_1} + \phi_{R_1} + \phi_{D_2} + \phi_{R_2} + \phi_{D_3} + \phi_{R_3}^{desc} \quad (5.75)$$

Cada uno de los flujos que atraviesan los dientes y las ranuras internos de la bobina, se pueden expresar en función de los flujos de las diferentes regiones del caso ranura completa (5.3.2), del modo siguiente:

$$\phi_{D_1} = \phi_{II,RC},$$

$$\phi_{R_1} = \phi_{III,RC},$$

$$\phi_{D_2} = \phi_{IV,RC},$$

$$\phi_{R_2} = \phi_{V,RC}$$

y

$$\phi_{D_3} = \phi_{VI,RC}$$

Respecto a los flujos que atraviesan las ranuras  $R_0$  y  $R_3$ , el planteamiento es similar al de las posiciones 1 y 2, excepto que ahora la región involucrada en las expresiones de estos flujos es la I de ranura completa en lugar de la II de diente parcial. Realizando este intercambio de notación, podemos obtener las expresiones que resultarían para esta posición a partir de las obtenidas para la posición 1:

$$\phi_{R_0}^{asc} = \phi_{I,RC}^{asc} = - \int_0^s B_y^I(x, h) \cdot F_D(x) dx = - \int_0^s B_y^I(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx$$

y

$$\begin{aligned}\phi_{R_3}^{desc} &= -\int_0^s B_y^{-I}(x, h) \cdot F_D(x) dx = \int_0^s B_y^I(x, h) \cdot F_D(x) dx = \\ &= -\phi_{I,RC}^{desc} = \int_0^s B_y^I(x, h) \cdot \left(1 - \frac{x}{s}\right) dx\end{aligned}$$

Así, la expresión del flujo de la bobina en la posición 3 es:

$$\phi_{Bobina}^{S3} = \phi_{I,RC}^{asc} + \phi_{II,RC} + \phi_{III,RC} + \phi_{IV,RC} + \phi_{V,RC} + \phi_{VI,RC} - \phi_{I,RC}^{desc}$$

y si omitimos en la notación la referencia al caso ranura completa (subíndice  $RC$ ), este flujo viene dado por:

$$\phi_{Bobina}^{S3} = \phi_I^{asc} + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI} - \phi_I^{desc} \quad (5.76)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso ranura completa. Igual que en las posiciones anteriores, esta ecuación nos servirá para poder obtener de forma recurrente el flujo de la bobina en la misma posición pero con un offset aumentando en un múltiplo del paso de ranura.

Del mismo modo, la suma de los flujos en  $R_0$  y en  $R_3$  será:

$$\phi_{R_0}^{asc} + \phi_{R_3}^{desc} = 2\phi_{I,RC}^{asc} - \phi_{I,RC}$$

y por lo tanto

$$\phi_{Bobina}^{S3} = 2\phi_{I,RC}^{asc} + \phi_{II,RC} + \phi_{III,RC} + \phi_{IV,RC} + \phi_{V,RC} + \phi_{VI,RC} - \phi_{I,RC}$$

o bien, omitiendo la referencia al caso ranura completa

$$\phi_{Bobina}^{S3} = 2\phi_I^{asc} + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI} - \phi_I \quad (5.77)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso ranura completa y donde todos los flujos son conocidos, menos  $\phi_I^{asc}$ ; dado que formalmente las expresiones de  $B_y^{II}$  para diente parcial y de  $B_y^I$  para ranura completa son iguales, podemos obtener la expresión del flujo  $\phi_I^{asc}$  en la posición 3 a partir de la del flujo  $\phi_{II}^{asc}$  en la posición 1, siendo esta expresión:

$$\begin{aligned}
\phi_I^{asc} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) + \\
& +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
& -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{1'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
& -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^1 - K_n^{1'}) \frac{h+g}{n\pi s} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{5.78}$$

Si reemplazamos en la ecuación (5.77) las expresiones (D.44), (D.45), (D.49), (D.50), (D.54), (D.55) y (5.78) obtendremos el valor del flujo que atraviesa la bobina en esta posición.

#### 5.4.4. Posición 4

La figura 5.67 muestra las posición 4; el offset es  $\frac{t}{2} + s(1-z)$  y, comparándola con los casos estudiados, se trata del caso ranura parcial con un valor de  $z$  que disminuye desde 1 hasta 0 (para todos estos valores el principio del polo está debajo de una ranura del ranurado).

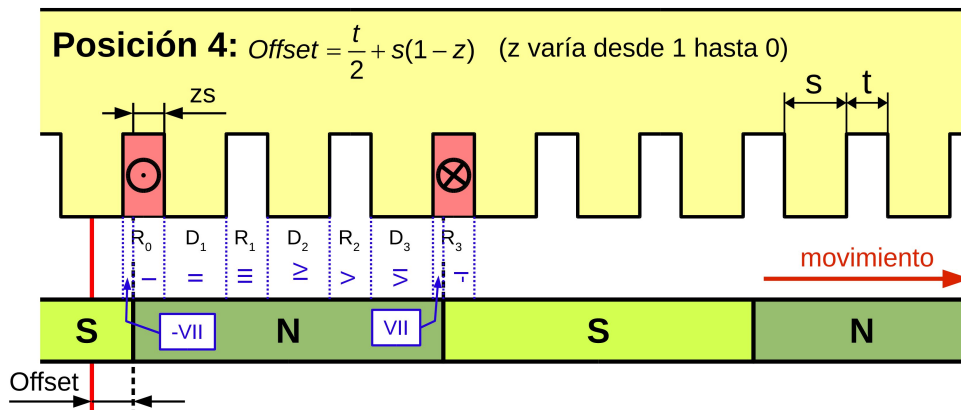


Figura 5.67: Posición 4

El flujo concatenado por la bobina en esta posición,  $\phi_{Bobina}^{S4}$ , será:

$$\phi_{Bobina}^{S4} = \phi_{R_0}^{asc} + \phi_{D_1} + \phi_{R_1} + \phi_{D_2} + \phi_{R_2} + \phi_{D_3} + \phi_{R_3}^{desc} \tag{5.79}$$

Cada uno de los flujos que atraviesan los dientes y las ranuras internos de la bobina, se pueden expresar en función de los flujos de las diferentes regiones del caso ranura parcial (5.3.3), del modo siguiente:

$$\phi_{D_1} = \phi_{II,RP},$$

$$\phi_{R_1} = \phi_{III,RP},$$

$$\phi_{D_2} = \phi_{IV,RP},$$

$$\phi_{R_2} = \phi_{V,RP}$$

y

$$\phi_{D_3} = \phi_{VI,RP}$$

Respecto al flujo que atraviesa la ranura  $R_0$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \phi_{R_0}^{asc} &= \phi_{-VII,RP}^{asc} + \phi_{I,RP}^{asc} = \\ &= \int_0^{s(1-z)} B_y^{VII}(x, h) \cdot F_D(x) dx - \int_{s(1-z)}^s B_y^I(x, h) \cdot F_D(x) dx = \\ &= \int_0^{s(1-z)} B_y^{VII}(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx - \int_{s(1-z)}^s B_y^I(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx = \\ &= \int_0^{s(1-z)} B_y^{VII}(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx - \int_0^{sz} B_y^I(x, h) \cdot \left[ (1-z) + \frac{x}{s} \right] dx \end{aligned}$$

donde hemos sustituido  $F_D(x)$  por su valor en el intervalo de integración.

De forma análoga, vamos proceder con la ranura  $R_3$ . El flujo que atraviesa esta ranura, teniendo en cuenta la función de distribución, será:

$$\begin{aligned} \phi_{R_3}^{desc} &= \phi_{VII,RP}^{desc} + \phi_{-I,RP}^{desc} = \\ &= - \int_0^{s(1-z)} B_y^{VII}(x, h) \cdot F_D(x) dx + \int_{s(1-z)}^s B_y^I(x, h) \cdot F_D(x) dx = \\ &= - \int_0^{s(1-z)} B_y^{VII}(x, h) \cdot \left( 1 - \frac{x}{s} \right) dx + \int_{s(1-z)}^s B_y^I(x, h) \cdot \left( 1 - \frac{x}{s} \right) dx = \\ &= - \int_0^{s(1-z)} B_y^{VII}(x, h) \cdot \left( 1 - \frac{x}{s} \right) dx + \int_0^{sz} B_y^I(x, h) \cdot \left( z - \frac{x}{s} \right) dx \end{aligned}$$

donde hemos reemplazado el valor de  $F_D(x)$  en el intervalo de integración.

Además, operando con las expresiones obtenidas en las ranura  $R_o$  y  $R_3$  resulta:

$$\begin{aligned}\phi_{R_0}^{asc} + \phi_{R_3}^{desc} &= (\phi_{-VII,RP}^{asc} + \phi_{I,RP}^{asc}) + (\phi_{VII,RP}^{desc} + \phi_{-I,RP}^{desc}) = \\ &= (\phi_{-VII,RP}^{asc} + \phi_{VII,RP}^{desc}) + (\phi_{I,RP}^{asc} + \phi_{-I,RP}^{desc})\end{aligned}\quad (5.80)$$

Si operamos sobre el primer par de sumandos de (5.80), queda:

$$\begin{aligned}\phi_{-VII,RP}^{asc} + \phi_{VII,RP}^{desc} &= \int_0^{s(1-z)} B_y^{VII}(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx - \int_0^{s(1-z)} B_y^{VII}(x, h) \cdot \left(1 - \frac{x}{s}\right) dx = \\ &= - \int_0^{s(1-z)} B_y^{VII}(x, h) \cdot \left(1 - 2\frac{x}{s}\right) dx = \\ &= - \int_0^{s(1-z)} B_y^{VII}(x, h) dx + \frac{2}{s} \int_0^{s(1-z)} x \cdot B_y^{VII}(x, h) dx = \\ &= \phi_{VII,RP} + \frac{2}{s} \int_0^{s(1-z)} x \cdot B_y^{VII}(x, h) dx = \phi_{VII,RP} + \phi_{s(1-z),VII}\end{aligned}$$

es decir

$$\phi_{-VII,RP}^{asc} + \phi_{VII,RP}^{desc} = \phi_{VII,RP} + \phi_{s(1-z),VII}$$

donde

$$\phi_{s(1-z)} = \frac{2}{s} \int_0^{s(1-z)} x \cdot B_y^{VII}(x, h) dx$$

Si hallamos esta última integral, reemplazando la expresión de  $B_y^{VII}$ , ecuación

(E.47), e integramos por partes, llegamos a:

$$\begin{aligned}
\phi_{s(1-z),VII} &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n b_{n,6} (1-z) \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \cosh \left[ \frac{n\pi h}{s(1-z)} \right] - \\
&\quad - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} 2K_n^{7'} (1-z) \coth \left[ \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) + \\
&\quad + \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} 2Q_w (1-z) \operatorname{csch} \left[ \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{w\pi h}{h+g} \right) + \\
&\quad + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} 2K_n^{7'} \frac{h+g}{n\pi s} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
&\quad - \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} 2Q_w \frac{h+g}{w\pi s} \cos \left( \frac{w\pi h}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Igualmente, trabajando con el segundo par de sumandos de (5.80), resulta:

$$\begin{aligned}
\phi_{I,RP}^{asc} + \phi_{-I,RP}^{desc} &= - \int_0^{sz} B_y^I(x, h) \cdot \left[ (1-z) + \frac{x}{s} \right] dx + \int_0^{sz} B_y^I(x, h) \cdot \left( z - \frac{x}{s} \right) dx = \\
&= - \int_0^{sz} B_y^I(x, h) \cdot \left[ (1-2z) + 2\frac{x}{s} \right] dx = \\
&= -(1-2z) \int_0^{sz} B_y^I(x, h) dx + \frac{2}{s} \int_0^{sz} x \cdot B_y^I(x, h) dx = \\
&= (1-2z) \phi_{I,RP} + \frac{2}{s} \int_0^{sz} x \cdot B_y^I(x, h) dx = (1-2z) \phi_{I,RP} + \phi_{sz,I}
\end{aligned}$$

es decir

$$\phi_{I,RP}^{asc} + \phi_{-I,RP}^{desc} = (1-2z) \phi_{I,RP} + \phi_{sz,I}$$

donde  $\phi_{sz,I}$  viene dado por:

$$\phi_{sz,I} = \frac{2}{s} \int_0^{sz} x \cdot B_y^I(x, h) dx$$

Si hallamos esta última integral, reemplazando la expresión de  $B_y^I$ , ecua-

ción (E.35), e integramos por partes, llegamos a:

$$\begin{aligned}
\phi_{sz,I} = & -2\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{sz} \right] \cosh \left( \frac{n\pi h}{sz} \right) + \\
& + 2\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \coth \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
& - 2\mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \cos \left( \frac{w\pi h}{h+g} \right) - \\
& - 2\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \frac{h+g}{n\pi sz} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) + \\
& + 2\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} Q_w \frac{h+g}{w\pi sz} \cos \left( \frac{w\pi h}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Sustituyendo en la expresión (5.79) todos los flujos de dientes y ranuras, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\phi_{Bobina}^{S4} = & -\phi_{VII,RP}^{asc} + \phi_{I,RP}^{asc} + \phi_{II,RP} + \phi_{III,RP} + \phi_{IV,RP} + \\
& + \phi_{V,RP} + \phi_{VI,RP} + \phi_{VII,RP}^{desc} - \phi_{I,RP}^{desc}
\end{aligned}$$

y si omitimos en la notación la referencia al caso ranura parcial (subíndice  $RP$ ), este flujo viene dado por:

$$\phi_{Bobina}^{S4} = -\phi_{VII}^{asc} + \phi_I^{asc} + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI} + \phi_{VII}^{desc} - \phi_I^{desc} \tag{5.83}$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso ranura parcial, expresión que usaremos para hallar el flujo de la bobina cuando el offset sea superior al paso de ranura, como veremos más adelante.

Recolocando los sumandos de la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
\phi_{Bobina}^{S4} = & -\phi_{VII,RP}^{asc} + \phi_{I,RP}^{asc} + \phi_{II,RP} + \phi_{III,RP} + \phi_{IV,RP} + \\
& + \phi_{V,RP} + \phi_{VI,RP} + \phi_{VII,RP}^{desc} - \phi_{I,RP}^{desc} = \\
= & \phi_{I,RP}^{asc} - \phi_{I,RP}^{desc} + \phi_{II,RP} + \phi_{III,RP} + \phi_{IV,RP} + \\
& + \phi_{V,RP} + \phi_{VI,RP} + \phi_{VII,RP}^{desc} - \phi_{VII,RP}^{asc} = \\
= & (1 - 2z) \phi_{I,RP} + \phi_{sz,I} + \phi_{II,RP} + \phi_{III,RP} + \phi_{IV,RP} + \\
& + \phi_{V,RP} + \phi_{VI,RP} + \phi_{VII,RP} + \phi_{s(1-z),VII}
\end{aligned}$$



Es decir

$$\begin{aligned} \phi_{Bobina}^{S4} = & \phi_{sz,I} + (1 - 2z) \phi_{I,RP} + \phi_{II,RP} + \phi_{III,RP} + \phi_{IV,RP} + \\ & + \phi_{V,RP} + \phi_{VI,RP} + \phi_{VII,RP} + \phi_{s(1-z),VII} \end{aligned}$$

o bien, omitiendo la referencia al caso ranura completa

$$\begin{aligned} \phi_{Bobina}^{S4} = & \phi_{sz,I} + (1 - 2z) \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \\ & + \phi_V + \phi_{VI} + \phi_{VII} + \phi_{s(1-z),VII} \end{aligned} \tag{5.84}$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso ranura parcial y donde todos los flujos son conocidos, ya que o bien se trata de los hallados en el caso ranura parcial, ecuaciones (E.51), (E.52), (E.56), (E.57), (E.61), (E.62) y (E.66), o bien son las expresiones obtenidas en este apartado, ecuaciones (5.81) y (5.82).

### 5.4.5. Posición 5

La figura 5.68 muestra la posición 5; el offset es  $\frac{t}{2} + s$  y, comparándola con los casos estudiados, se trata del caso diente completo (el principio del polo coincide con el comienzo de un diente del ranurado).

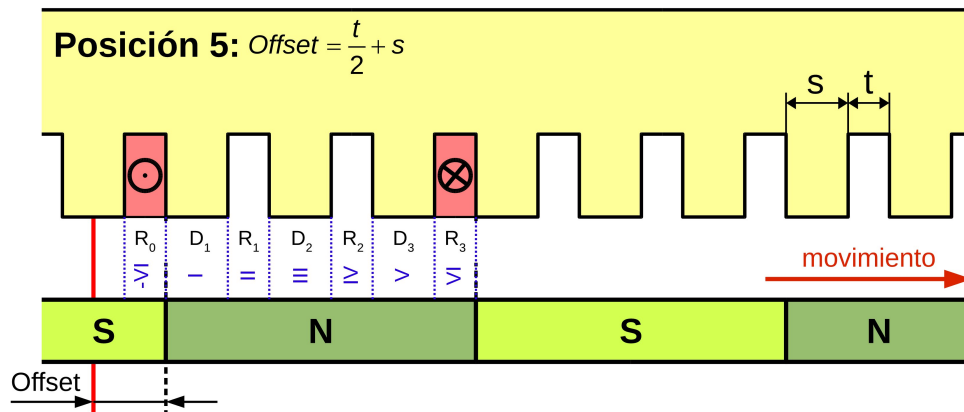


Figura 5.68: Posición 5

El flujo concatenado por la bobina en esta posición ,  $\phi_{Bobina}^{S5}$ , será:

$$\phi_{Bobina}^{S5} = \phi_{R_0}^{asc} + \phi_{D_1} + \phi_{R_1} + \phi_{D_2} + \phi_{R_2} + \phi_{D_3} + \phi_{R_3}^{desc} \tag{5.85}$$

Cada uno de los flujos que atraviesan los dientes y las ranuras internos de la bobina, se pueden expresar en función de los flujos de las diferentes regiones del caso ranura completa (5.3.2), del modo siguiente:

$$\phi_{D_1} = \phi_{I,DC},$$

$$\phi_{R_1} = \phi_{II,DC},$$

$$\phi_{D_2} = \phi_{III,DC},$$

$$\phi_{R_2} = \phi_{IV,DC},$$

y

$$\phi_{D_3} = \phi_{V,DC}$$

Respecto a los flujos que atraviesan las ranuras  $R_0$  y  $R_3$ , el planteamiento es similar al de las posiciones 1 y 2, excepto que ahora la región involucrada en las expresiones de estos flujos es la VI de diente completo en lugar de la II de diente parcial. Realizando este intercambio de notación, podemos obtener las expresiones que resultarían para esta posición a partir de las obtenidas para la posición 1:

$$\phi_{R_0}^{asc} = \phi_{-VI,DC}^{asc} = -\phi_{VI,DC}^{asc} = \int_0^s B_y^{VI}(x, h) \cdot F_D(x) dx = \int_0^s B_y^{VI}(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx$$

y

$$\phi_{R_3}^{desc} = \phi_{VI,DC}^{asc} = - \int_0^s B_y^{VI}(x, h) \cdot F_D(x) dx = - \int_0^s B_y^{VI}(x, h) \cdot \left(1 - \frac{x}{s}\right) dx$$

Así, la expresión del flujo de la bobina en la posición 5 es:

$$\phi_{Bobina}^{S5} = -\phi_{VI,DC}^{asc} + \phi_{I,DC} + \phi_{II,DC} + \phi_{III,DC} + \phi_{IV,DC} + \phi_{V,DC} + \phi_{VI,DC}^{desc}$$

y si omitimos en la notación la referencia al caso diente completo (subíndice  $DC$ ), este flujo viene dado por:

$$\phi_{Bobina}^{S5} = -\phi_{VI}^{asc} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI}^{desc} \quad (5.86)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso diente completo. Igual que en las posiciones anteriores, esta ecuación nos servirá para poder obtener de forma recurrente el flujo de la bobina en la misma posición pero con un offset aumentando en un múltiplo del paso de

ranura.

Del mismo modo, la suma de los flujos en  $R_0$  y en  $R_3$  será:

$$\phi_{R_0}^{asc} + \phi_{R_3}^{desc} = -2\phi_{VI,DC}^{asc} + \phi_{VI,DC}$$

y por lo tanto

$$\phi_{Bobina}^{S5} = -2\phi_{VI,DC}^{asc} + \phi_{I,DC} + \phi_{II,DC} + \phi_{III,DC} + \phi_{IV,DC} + \phi_{V,DC} + \phi_{VI,DC}$$

o bien, omitiendo la referencia al caso diente completo

$$\phi_{Bobina}^{S5} = -2\phi_{VI}^{asc} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI} \quad (5.87)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso diente completo y donde todos los flujos son conocidos, menos  $\phi_V I^{asc}$ ; dado que formalmente las expresiones de  $B_y^{II}$  para diente parcial y de  $B_y^{VI}$  para diente completo son formalmente iguales, podemos obtener la expresión del flujo  $\phi_V I^{asc}$  en la posición 6 a partir de la del flujo  $\phi_{II}^{asc}$  en la posición 1, obteniendo:

$$\begin{aligned} \phi_{VI}^{asc} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - \\ & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\ & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) + \\ & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^6 + K_n^{6'}) \frac{h+g}{n\pi s} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (5.88)$$

Si reemplazamos en la ecuación (5.87) las expresiones (F.41), (F.45), (F.46), (F.50), (F.51), (F.55) y (5.88) obtendremos el valor del flujo que atraviesa la bobina en esta posición.

#### 5.4.6. Posición 6

La figura 5.69 muestra la posición 6; el offset es  $t \left( \frac{3}{2} + z \right) + s$  y, comparándola con los casos estudiados, se trata del caso diente parcial con un valor de  $z$  que disminuye desde 1 hasta 0.5 (para todos estos valores el principio

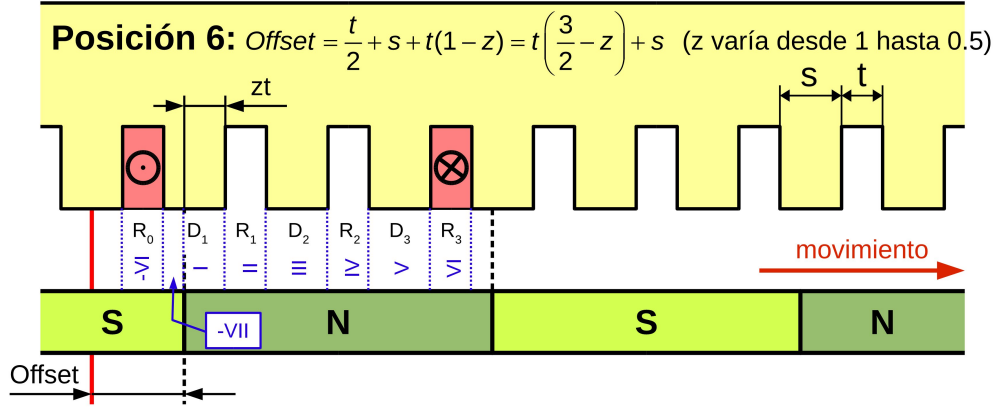


Figura 5.69: Posición 6

del polo está debajo de un diente del ranurado).

El flujo concatenado por la bobina en esta posición,  $\phi_{Bobina}^{S6}$ , será:

$$\phi_{Bobina}^{S6} = \phi_{R_0}^{asc} + \phi_{D_1} + \phi_{R_1} + \phi_{D_2} + \phi_{R_2} + \phi_{D_3} + \phi_{R_3}^{desc} \quad (5.89)$$

Cada uno de los flujos que atraviesan los dientes y las ranuras internos de la bobina, se pueden expresar en función de los flujos de las diferentes regiones del caso ranura completa (5.3.2), del modo siguiente:

$$\phi_{D_1} = \phi_{-VII,DP} + \phi_{I,DP} = -\phi_{VII,DP} + \phi_{I,DP},$$

$$\phi_{R_1} = \phi_{II,DP},$$

$$\phi_{D_2} = \phi_{III,DP},$$

$$\phi_{R_2} = \phi_{IV,DP}$$

y

$$\phi_{D_3} = \phi_{V,DP}$$

Respecto a los flujos que atraviesan las ranuras  $R_0$  y  $R_3$ , el planteamiento es similar al de la posición 2, excepto que ahora la región involucrada en las expresiones de estos flujos es la VI en lugar de la II, ambas de diente parcial. Ya que las expresiones de las magnitudes en ambas regiones son formalmente idénticas, realizando pequeños cambios, podemos obtener las ecuaciones que resultarían para esta posición a partir de las obtenidas para la posición 2. Así:

$$\phi_{R_0}^{asc} = \phi_{-VI,DP}^{asc} = -\phi_{VI,DP}^{asc} = \int_0^s B_y^{VI}(x, h) \cdot F_D(x) dx = \int_0^s B_y^{VI}(x, h) \cdot \frac{x}{s} dx$$

y

$$\phi_{R_3}^{desc} = \phi_{VI,DP}^{desc} = -\int_0^s B_y^{VI}(x, h) \cdot F_D(x) dx = -\int_0^s B_y^{VI}(x, h) \cdot \left(1 - \frac{x}{s}\right) dx$$

Por lo tanto, la expresión del flujo de la bobina en la posición 6 es:

$$\phi_{Bobina}^{S6} = -\phi_{VI,DP}^{asc} - \phi_{VII,DP} - \phi_{I,DP} + \phi_{II,DP} + \phi_{III,DP} + \phi_{IV,DP} + \phi_{V,DP} + \phi_{VI,DP}^{desc}$$

y si omitimos en la notación la referencia al caso diente parcial (subíndice  $DP$ ), este flujo viene dado por:

$$\phi_{Bobina}^{S6} = -\phi_{VI}^{asc} - \phi_{VII} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI}^{desc} \quad (5.90)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso diente parcial. Esta expresión la emplearemos más adelante.

Del mismo modo, la suma de los flujos en  $R_0$  y en  $R_3$  será:

$$\phi_{R_0}^{asc} + \phi_{R_3}^{desc} = -2\phi_{VI,DP}^{asc} + \phi_{VI,DP}$$

y por lo tanto

$$\phi_{Bobina}^{S6} = -2\phi_{VI,DP}^{asc} - \phi_{VII,DP} + \phi_{I,DP} + \phi_{II,DP} + \phi_{III,DP} + \phi_{IV,DP} + \phi_{V,DP} + \phi_{VI,DP}$$

o bien, omitiendo la referencia al caso diente parcial:

$$\phi_{Bobina}^{S6} = -2\phi_{VI}^{asc} - \phi_{VII} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI} \quad (5.91)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso diente parcial y donde todos los flujos son conocidos, menos  $\phi_{VI}^{asc}$ ; dado que formalmente las expresiones de  $B_y^I$  y de  $B_y^{VI}$ , ambas para diente parcial, son iguales, podemos obtener la expresión del flujo  $\phi_{VI}^{asc}$  en la posición 6 a partir de la del flujo  $\phi_{II}^{asc}$  en la posición 2, siendo esta expresión:

$$\begin{aligned}
\phi_{VI}^{asc} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,6} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) + \\
& +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
& -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
& -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^6 - K_n^{6'}) \frac{h+g}{n\pi s} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Sustituyendo esta ecuación junto con las expresiones (5.53), (5.57), (5.58), (5.62), (5.63), (5.67) y (5.68) obtendremos el valor del flujo que atraviesa la bobina en esta posición.

Hasta aquí, el offset ha variado desde 0 hasta el paso de ranura  $\tau_s$ . Las siguientes posiciones, se van a corresponder con las ya estudiadas pero con el offset aumentado en un paso de ranura. Por ello, podremos obtener las nuevas expresiones a partir de las deducidas hasta ahora realizando algunos cambios; para saber qué cambios tenemos que realizar sólo deberemos fijarnos en qué regiones se encuentran y se encontraban en posiciones análogas. Vamos a verlo:

#### 5.4.7. Posición 7

La figura 5.70 muestra las posición 7.

El offset es  $t \left( \frac{3}{2} - z \right) + s = \frac{t}{2} - zt + \tau_s$  es decir, el de la posición 2 más un paso de ranura, pudiéndose obtener las expresiones de la posición 7 a partir de las de la 2. Como el lugar que en la posición 2 lo ocupaba la región II ahora lo ocupa la región -VI, podremos deducir estas expresiones teniendo en cuenta las diferencias que hay entre la región II y la VI del caso diente parcial. (Este planteamiento también lo podíamos haber aplicado en la posición 6, pero hemos preferido estudiarla igual que las posiciones anteriores y así obtener todas las expresiones de la misma forma cuando el offset varía entre 0 y el paso de ranura).

Teniendo en cuenta lo expuesto, podemos escribir que el flujo que conca-

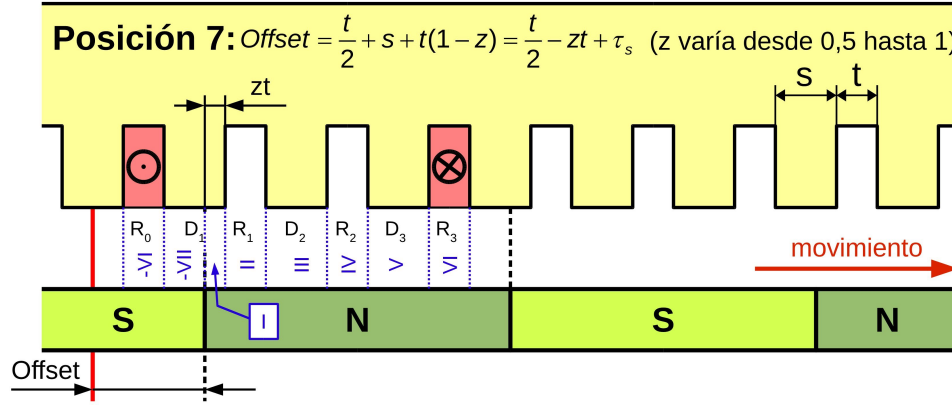


Figura 5.70: Posición 7

tena la bobina en la posición 7 es:

$$\phi_{Bobina}^{S7} = -\phi_{VI}^{asc} - \phi_{VII} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI}^{desc} \quad (5.93)$$

o bien

$$\phi_{Bobina}^{S7} = -2\phi_{VI}^{asc} - \phi_{VII} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V + \phi_{VI} \quad (5.94)$$

siendo la expresión de  $\phi_{VI}^{asc}$ :

$$\begin{aligned} \phi_{VI}^{asc} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,6} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^6 - K_n^{6'}) \frac{h+g}{n\pi s} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (5.95)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso diente parcial, siendo todos los flujos son conocidos.

#### 5.4.8. Posición 8

La figura 5.71 muestra las posición 8.

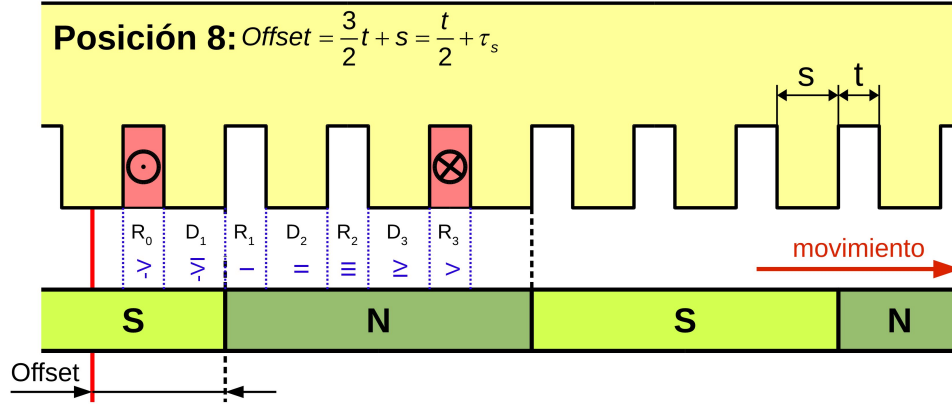


Figura 5.71: Posición 8

El offset es  $\frac{3}{2}t + s = \frac{t}{2} + \tau_s$  es decir, el de la posición 3 más un paso de ranura, pudiéndose obtener las expresiones de la posición 8 a partir de las de la 3.

Teniendo en cuenta lo expuesto, podemos escribir que el flujo que concadena la bobina en la posición 8 es:

$$\phi_{Bobina}^{S8} = -\phi_V^{asc} - \phi_{VI} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V^{desc} \quad (5.96)$$

o bien

$$\phi_{Bobina}^{S8} = -2\phi_V^{asc} - \phi_{VI} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V \quad (5.97)$$

siendo la expresión de  $\phi_V^{asc}$ :

$$\begin{aligned} \phi_V^{asc} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,3} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^5 - K_n^{5'}) \frac{h+g}{n\pi s} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (5.98)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso ranura completa y todos los flujos son conocidos.



## 5.4.9. Posición 9

La figura 5.72 muestra las posición 9.

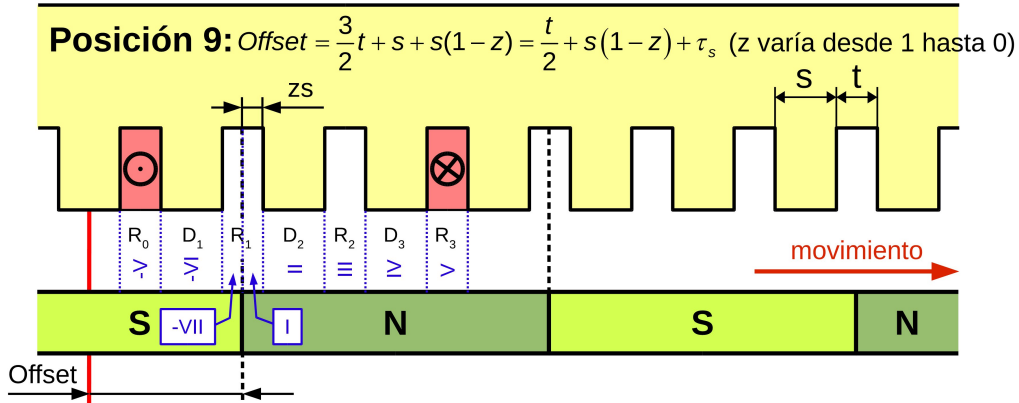


Figura 5.72: Posición 9

El offset es  $\frac{3}{2}t + s + s(1-z) = \frac{t}{2} + s(1-z) + \tau_s$  es decir, el de la posición 4 más un paso de ranura, pero ahora el planteamiento es más sencillo, ya que la ranura que está compuesta por dos regiones no es ninguna de las que alojan a la bobina, mientras que en la posición 4, ambas ranuras estaban formadas por dos regiones, lo cual complicaba el cálculo del flujo en estas ranuras. Por esta razón, vamos a deducir el flujo que concatena a la bobina en esta posición. Este flujo le podemos expresar en general por:

$$\phi_{Bobina}^{S9} = \phi_{R_0}^{asc} + \phi_{D_1} + \phi_{R_1} + \phi_{D_2} + \phi_{R_2} + \phi_{D_3} + \phi_{R_3}^{desc}$$

que, teniendo en cuenta las diferentes regiones del caso ranura parcial, es equivalente a:

$$\phi_{Bobina}^{S9} = -\phi_V^{asc} - \phi_{VI} - \phi_{VII} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V^{desc} \quad (5.99)$$

o bien

$$\phi_{Bobina}^{S9} = -2\phi_V^{asc} - \phi_{VI} - \phi_{VII} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} + \phi_V \quad (5.100)$$

La expresión de  $\phi_V^{asc}$  la podemos obtener a partir de la de ecuación de  $\phi_V^{asc}$  en la posición 8 (ecuación 5.98), ya que las expresiones de  $B_y^V$  en el caso ranura completa y ranura parcial son formalmente idénticas. De esta forma,

podemos expresar:

$$\begin{aligned}
 \phi_V^{asc} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^5 - K_n^{5'}) \frac{h+g}{n\pi s} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{5.101}$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso ranura parcial y donde todos los flujos son conocidos.

#### 5.4.10. Posición 10

La figura 5.73 muestra las posición 10.

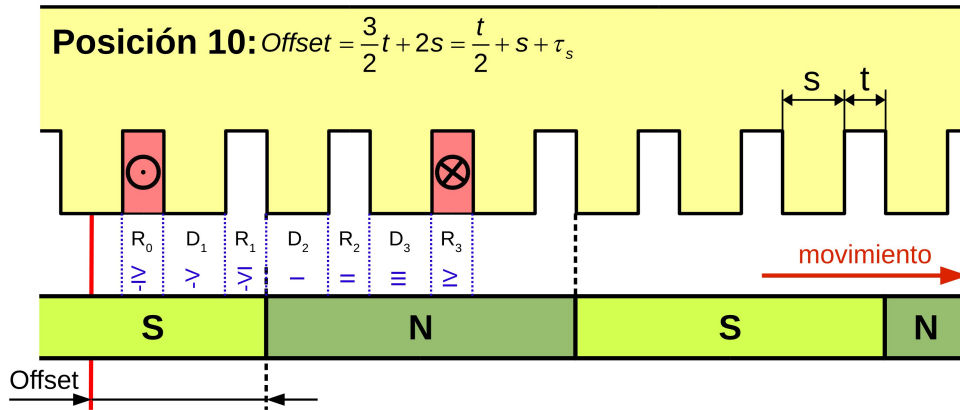


Figura 5.73: Posición 10

El offset es  $\frac{3}{2}t + 2s = \frac{t}{2} + s + \tau_s$  es decir, el de la posición 5 más un paso de ranura, pudiéndose obtener las expresiones de la posición 10 a partir de las de la 5.

Teniendo en cuenta lo expuesto, podemos escribir que el flujo que concatena la bobina en la posición 10 es:

$$\phi_{Bobina}^{S10} = -\phi_{IV}^{asc} - \phi_V - \phi_{VI} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV}^{desc} \tag{5.102}$$

o bien

$$\phi_{Bobina}^{S10} = -2\phi_{IV}^{asc} - \phi_V - \phi_{VI} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} \quad (5.103)$$

siendo la expresión de  $\phi_{IV}^{asc}$ :

$$\begin{aligned} \phi_{IV}^{asc} = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^4 - K_n^{4'}) \frac{h+g}{n\pi s} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (5.104)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso diente completo y donde todos los flujos son conocidos.

### 5.4.11. Posición 11

La figura 5.74 muestra las posición 11.

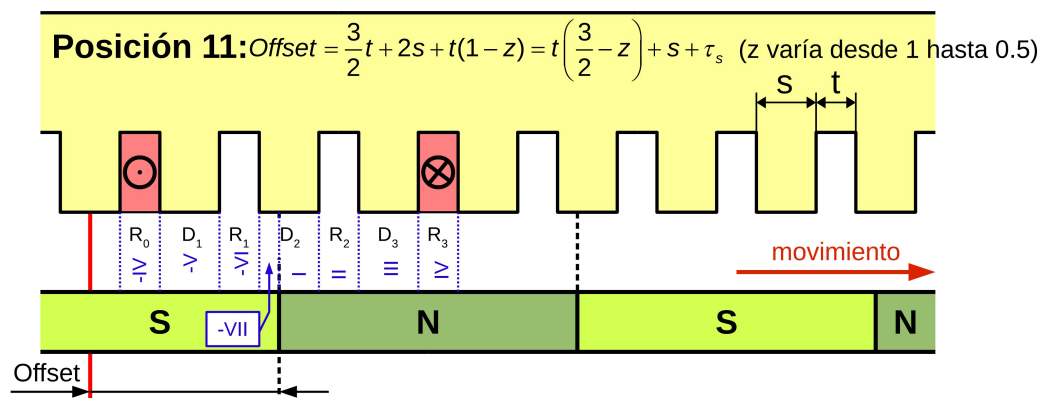


Figura 5.74: Posición 11

El offset es  $\frac{3}{2}t + 2s + t(1-z) = t\left(\frac{3}{2}-z\right) + s + \tau_s$  es decir, el de la posición 6 más un paso de ranura, pudiéndose obtener las expresiones de la posición 11 a partir de las de la 6.

Teniendo en cuenta lo expuesto, podemos escribir que el flujo que concatena la bobina en la posición 11 es:

$$\phi_{Bobina}^{S11} = -\phi_{IV}^{asc} - \phi_V - \phi_{VI} - \phi_{VII} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV}^{desc} \quad (5.105)$$

o bien

$$\phi_{Bobina}^{S11} = -2\phi_{IV}^{asc} - \phi_V - \phi_{VI} - \phi_{VII} + \phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV} \quad (5.106)$$

siendo la expresión de  $\phi_{IV}^{asc}$ :

$$\begin{aligned} \phi_{IV}^{asc} = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (K_n^4 - K_n^{4'}) \frac{h+g}{n\pi s} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (5.107)$$

donde los subíndices hacen referencia a las correspondientes regiones del caso diente parcial y donde todos los flujos son conocidos.

#### 5.4.12. Posiciones siguientes

El movimiento del rotor seguirá originando posiciones, pudiendo calcular el flujo abarcado por la bobina de una forma similar a la realizada hasta el momento. No obstante, otra alternativa es deducir la expresión del flujo concatenado por la bobina, a partir de la expresión de este flujo en las posiciones estudiadas correspondientes a caso iguales, es decir, conocida la expresión del flujo de la bobina para las posiciones estudiadas correspondientes a, por ejemplo, diente parcial, podemos intentar obtener cual sería su expresión para cualquier posición correspondiente a diente parcial. De forma análoga lo realizaríamos para los restantes casos. Vamos a comenzar con el caso diente parcial (con  $z$  variando desde 0.5 hasta 0), para proseguir con ranura completa, ranura parcial, diente completo y terminando con diente parcial (con  $z$  variando desde 1 hasta 0.5).

### Posiciones de Diente Parcial (z desde 0.5 hasta 0)

En la figura 5.75 se muestran las regiones correspondientes a los dientes y ranuras abarcados por la bobina en cada una de las posiciones estudiadas (posiciones 2 y 7) para el caso Diente Parcial, con  $z$  variando desde 0.5 hasta 0. Estas regiones se han obtenido a partir de la ecuación (5.73), para la posición 2, y de la ecuación (5.93), para la posición 7.

Posición	$\tau_s$	$R_0$	$D_1$	$R_1$	$D_2$	$R_2$	$D_3$	$R_3$
2	0	II <sup>asc</sup>	III	IV	V	VI	VII-I	-II <sup>desc</sup>
7	1	-VI <sup>asc</sup>	-VII+I	II	III	IV	V	VI <sup>desc</sup>
12	2							
17	3							
22	4							
27	5							

Figura 5.75: Regiones correspondientes a las posiciones estudiadas del caso Diente Parcial ( $z$  varía desde 0.5 hasta 0)

Observando las dos primeras filas vemos como consecuencia del incremento en el offset de un paso de ranura, las regiones que estaban en un diente o en una ranura se desplazan al próximo diente o ranura; además, las posiciones que difieren en el offset en tres pasos de ranura, debido a la periodicidad anti-cíclica del problema, las regiones son las mismas pero con el signo cambiado. De esta forma podemos completar toda la tabla hasta llegar a un incremento del offset de 5 pasos de ranura. La siguiente posición, correspondería aun incremento del offset de seis pasos de ranura, es decir, un par de polos, siendo equivalente a la primera posición (posición 2 en esta caso). La figura 5.76 muestra las regiones correspondientes a los dientes y ranuras abarcados por la bobina en todas las posiciones para el caso Diente Parcial, con  $z$  variando desde 0.5 hasta 0.

A partir de esta tabla podemos determinar el flujo que concatena la bobina para cualquier posición del caso diente parcial, con  $z$  variando desde 0.5 hasta 0.

### Posiciones de Ranura Completa

En la figura 5.77 se muestran las regiones correspondientes a los dientes y ranuras abarcados por la bobina en cada una de las posiciones estudiadas

Posición	$\tau_s$	$R_0$	$D_1$	$R_1$	$D_2$	$R_2$	$D_3$	$R_3$
2	0	$II^{asc}$	III	IV	V	VI	VII-I	$-II^{desc}$
7	1	$-VI^{asc}$	$-VII+I$	II	III	IV	V	$VI^{desc}$
12	2	$-IV^{asc}$	$-V$	$-VI$	$-VII+I$	II	III	$IV^{desc}$
17	3	$-II^{asc}$	$-III$	$-IV$	$-V$	$-VI$	$-VII+I$	$II^{desc}$
22	4	$VI^{asc}$	$VII-I$	$-II$	$-III$	$-IV$	$-V$	$-VI^{desc}$
27	5	$IV^{asc}$	V	VI	$VII-I$	II	III	$-IV^{desc}$

Figura 5.76: Regiones correspondientes a todas las posiciones del caso Diente Parcial ( $z$  varía desde 0.5 hasta 0)

(posiciones 3 y 8) para el caso ranura completa. Estas regiones se han obtenido a partir de la ecuación (5.75), para la posición 3, y de la ecuación (5.96), para la posición 8.

Posición	$\tau_s$	$R_0$	$D_1$	$R_1$	$D_2$	$R_2$	$D_3$	$R_3$
3	0	$I^{asc}$	II	III	IV	V	VI	$-I^{desc}$
8	1	$-VI^{asc}$	$-VI$	I	II	III	IV	$V^{desc}$
13	2							
18	3							
23	4							
28	5							

Figura 5.77: Regiones correspondientes a las posiciones estudiadas del caso Ranura Completa

La secuencia que se observa es la misma que en el caso anterior y se mantendrá para los casos siguientes: desplazamiento al próximo diente o ranura y periodicidad anticíclica. De esta forma podemos completar la tabla, obteniendo la que se muestra en la figura 5.78, donde se muestran las regiones correspondientes a los dientes y ranuras abarcados por la bobina en todas las posiciones para el caso Ranura Completa.

A partir de la tabla de la figura 5.78 podemos determinar el flujo que concatena la bobina para cualquier posición del caso Ranura Completa.

Posición	$\tau_s$	$R_0$	$D_1$	$R_1$	$D_2$	$R_2$	$D_3$	$R_3$
3	0	$I^{asc}$	II	III	IV	V	VI	$-I^{desc}$
8	1	$-V^{asc}$	-VI	I	II	III	IV	$V^{desc}$
13	2	$-III^{asc}$	-IV	-V	-VI	I	II	$III^{desc}$
18	3	$-I^{asc}$	-II	-III	-IV	-V	-VI	$I^{desc}$
23	4	$V^{asc}$	VI	-I	-II	-III	-IV	$-V^{desc}$
28	5	$III^{asc}$	IV	V	VI	-I	-II	$-III^{desc}$

Figura 5.78: Regiones correspondientes a todas las posiciones del caso Ranura Completa

### Posiciones de Ranura Parcial

En la figura 5.79 se muestran las regiones correspondientes a los dientes y ranuras abarcados por la bobina en las diferentes posiciones: las dos primeras filas se corresponden con las posiciones estudiadas (posiciones 4 y 9) para el caso Ranura Parcial, obtenidas a partir de la ecuación (5.79), para la posición 4, y de la ecuación (5.99), para la posición 9. Ya que la secuencia observada es la misma que en los casos anteriores, podemos completar la tabla, obteniendo las filas siguientes. A partir de esta tabla podemos determinar el flujo que concatena la bobina para cualquier posición del caso Ranura Parcial.

Posición	$\tau_s$	$R_0$	$D_1$	$R_1$	$D_2$	$R_2$	$D_3$
4	0	$-VII^{asc}+I^{asc}$	II	III	IV	V	VI
9	1	$-V^{asc}$	-VI	$-VII+I$	II	III	IV
14	2	$-III^{asc}$	-IV	-V	-VI	$-VII+I$	II
19	3	$VII^{asc}-I^{asc}$	-II	-III	-IV	-V	-VI
24	4	$V^{asc}$	VI	$VII-I$	-II	-III	-IV
29	5	$III^{asc}$	IV	V	VI	$VII-I$	-II

Figura 5.79: Regiones correspondientes a las posiciones del caso Ranura Parcial

### Posiciones de Diente Completo

En la figura 5.80 se muestran las regiones correspondientes a los dientes y ranuras abarcados por la bobina en las diferentes posiciones: las dos primeras filas se corresponden con las posiciones estudiadas (posiciones 5 y 10) para el caso Diente Completo, obtenidas a partir de la ecuación (5.85), para la posición 5, y de la ecuación (5.102), para la posición 10. La secuencia observada es la misma que en los casos anteriores, permitiéndonos obtener las filas siguientes. A partir de esta tabla podemos determinar el flujo que concatena la bobina para cualquier posición del caso Diente Completo.

Posición	$\tau_s$	$R_0$	$D_1$	$R_1$	$D_2$	$R_2$	$D_3$	$R_3$
5	0	$-VI^{asc}$	I	II	III	IV	V	$VI^{desc}$
10	1	$-IV^{asc}$	-V	-VI	I	II	III	$IV^{desc}$
15	2	$-II^{asc}$	-III	-IV	-V	-VI	I	$II^{desc}$
20	3	$VI^{asc}$	-I	-II	-III	-IV	-V	$-VI^{desc}$
25	4	$IV^{asc}$	V	VI	-I	II	III	$-IV^{desc}$
30	5	$II^{asc}$	III	IV	V	VI	-I	$-II^{desc}$

Figura 5.80: Regiones correspondientes a las posiciones del caso Diente Completo

### Posiciones de Diente Parcial (z desde 1 hasta 0.5)

En la figura 5.81 se muestran las regiones correspondientes a los dientes y ranuras abarcados por la bobina en las diferentes posiciones del caso diente parcial con z variando desde 1 hasta 0.5: las dos primeras filas se corresponden con las posiciones estudiadas (posiciones 5 y 10), obtenidas a partir de la ecuación (5.85), para la posición 5, y de la ecuación (5.102), para la posición 10. Ya que la secuencia observada es la misma que en los casos anteriores, podemos completar la tabla, obteniendo las filas siguientes. A partir de esta tabla podemos determinar el flujo que concatena la bobina para cualquier posición del caso Diente Parcial, cuando z varía desde 1 hasta 0.5.

Realmente, estas posiciones son las mismas que las de Diente Parcial con z variando desde 0.5 hasta 1 (apartado 5.4.12) ya que, por ejemplo, las regiones de las posiciones 5 y 6 son idénticas, como consecuencia de tratarse



de la misma posición. El principal motivo para considerar estas posiciones de forma diferenciada, es que hemos fijado como posición inicial cuando el comienzo del polo coincide con el centro del diente y, al considerar el movimiento del rotor hacia la derecha, necesitamos, para estudiar un paso de ranura por completo, terminar realizando un estudio de diente parcial, donde  $z$  varía desde 1 hasta 0.5.

Posición	$\tau_s$	$R_0$	$D_1$	$R_1$	$D_2$	$R_2$	$D_3$	$R_3$
6	0	$-VI^{asc}$	$-VII+I$	II	III	IV	V	$VI^{desc}$
11	1	$-IV^{asc}$	$-V$	$-VI$	$-VII+I$	II	III	$IV^{desc}$
16	2	$-II^{asc}$	$-III$	$-IV$	$-V$	$-VI$	$-VII+I$	$II^{desc}$
21	3	$VI^{asc}$	$VII-I$	$-II$	$-III$	$-IV$	$-V$	$-VI^{desc}$
26	4	$IV^{asc}$	$V$	$VI$	$VII-I$	II	III	$-IV^{desc}$
31	5	$II^{asc}$	III	IV	V	VI	$VII-I$	$-II^{desc}$

Figura 5.81: Regiones correspondientes a las posiciones del caso Diente Parcial ( $z$  desde 1 hasta 0.5)

Aplicando las expresiones correspondientes y variando el offset desde cero hasta dos veces el paso de polo (138 mm) en pasos de 1 mm, se ha calculado el flujo que concatena una bobina formada por una única espira y cuyo espesor es el del estator de nuestra máquina (60 mm). Los resultados obtenidos se muestran gráficamente en la figura 5.82. En dicha gráfica se ha resaltado el valor máximo de este flujo, valor que se origina cuando el offset del rotor es de 12 mm y que coincide con la posición 4 (ranura parcial) con  $z=0.5$ , como era de esperar.

#### 5.4.13. Simulación por elementos finitos

Con el fin de validar los resultados obtenidos por el método propuesto y de una forma similar a la realizada con el potencial magnético escalar y con las componentes de la inducción, vamos a obtener los valores del flujo magnético concatenado por una bobina con las mismas características que las considerados en la obtención de los valores analítico (paso de bobina de 3 ranuras, una única espira y los lados activos de la bobina ocupan toda la ranura).

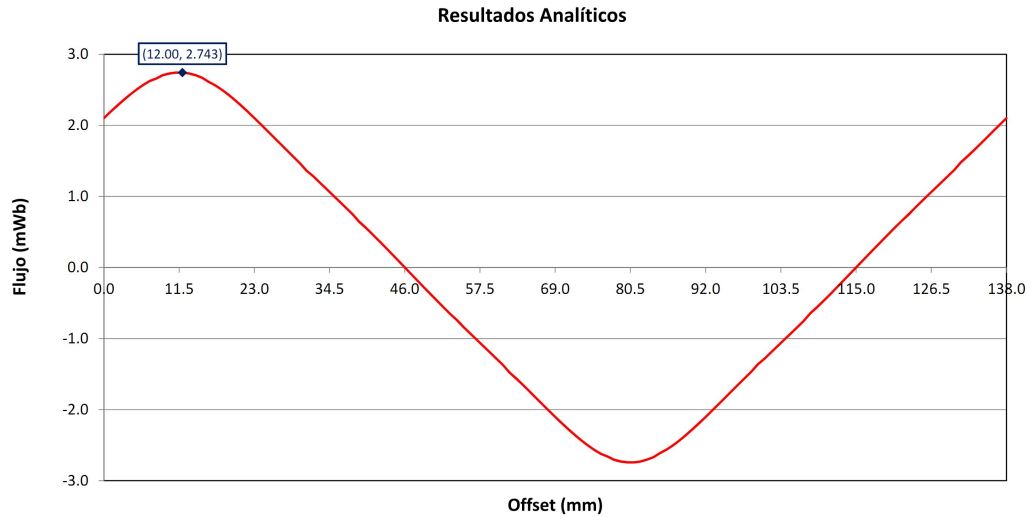


Figura 5.82: Flujo concatenado por la bobina en un par de polos en mWb

Para ello, y a partir del modelo de máquina ranurada con entreimán que se mostraba en la figura 5.38, realizamos las siguientes modificaciones:

- Dibujamos un par de polos: el hecho de colocar la bobina, hace que desaparezca la periodicidad anticíclica de un polo, aunque se mantiene la periodicidad cíclica de un par de polos.
- Dibujamos la bobina con un paso de tres ranuras, ocupando sus lados activos toda la ranura.
- En cuanto a las características físicas asignadas a la misma, impusimos que tuviera una única espira, que el material fuera cobre y con un factor de llenado (relación entre el volumen ocupado por el material conductor y el volumen ocupado por la bobina) de valor la unidad.

Estas modificaciones dan como resultado el modelo de máquina ranurada con bobina que se muestra en la figura 5.83, la cual ilustra la situación cuando el offset es igual a un paso de polo. En ella se puede apreciar el estátor ranurado (en color amarillo), la bobina (en rojo) y el rotor formado por polos norte (en azul oscuro), polos sur (en azul claro) y entreimán (en gris).

Con este modelo, realizamos un estudio magnetostático, donde variamos la posición del rotor respecto de estátor un paso de polo con incrementos de 1 mm en el radio medio. Debido a la periodicidad, sabemos que los valores de flujo del segundo paso de polo serán, en valor absoluto, iguales a los del

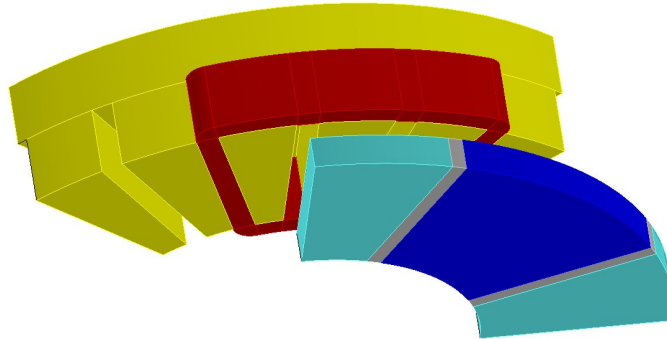


Figura 5.83: Geometría considerada en la simulación por elementos finitos para la máquina ranurada con bobina

primer paso de polo pero con signo contrario. A partir de este estudio, el software nos proporciona el flujo concatenado por dicha bobina en función de la posición del rotor respecto del estator, es decir, en función del offset. La figura 5.84 compara los resultados de flujo en la bobina obtenidos por el Método de los Subdominios y los proporcionados por Flux3D, cuando el offset varía desde cero hasta un par de polos.

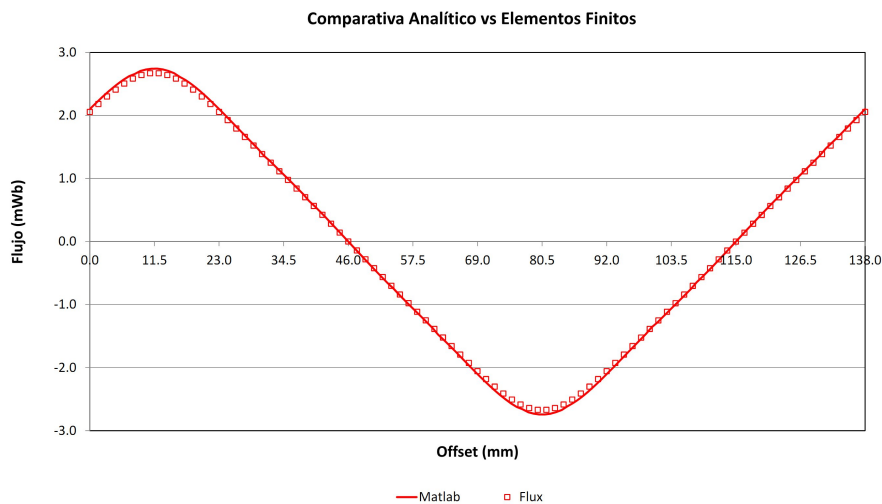


Figura 5.84: Comparativa entre los resultados proporcionados para el flujo concatenado por una bobina de paso de bobina tres ranuras por el Método de los Subdominios y los obtenidos por Elementos Finitos a lo largo de un par de polos

A la vista de esta figura, observamos:

- Existe un buen ajuste entre los valores analíticos y los obtenidos por elementos finitos.
- Sólo se observa que los valores analíticos son ligeramente superiores a los de Flux3D en las posiciones de máximo y de mínimo, siendo el porcentaje de desviación de los valores analíticos respecto a los de elementos finitos inferior al 3%.

Por lo expuesto, podemos considerar que existe un buen acuerdo entre los valores proporcionado por el Método de los Subdominios y los hallados mediante el software Flux3D.

## 5.5. Fuerza electromotriz inducida (f.e.m.i.)

Tal y como comentábamos en el capítulo dedicado a los conceptos previos (capítulo 2), la Ley de la Inducción de Faraday constituye la base del funcionamiento del generador eléctrico, al establecer que en todo circuito eléctrico que se vea sometido a una variación de flujo magnético se inducirá una fuerza electromotriz, siendo proporcional dicha fuerza electromotriz a la variación del flujo. La ecuación (2.55) expresa matemáticamente este hecho. Esta fuerza electromotriz se la denomina inducida debido al fenómeno que la origina, siendo, en los generadores eléctricos, las bobinas del circuito inductor las encargadas de experimentar esta tensión inducida.

Vamos a determinar la expresión de la fuerza electromotriz inducida (f.e.m.i.) en la bobina que estamos considerando. Para ello, partiremos de la expresión general de esta f.e.m.i., expresión que viene dada por la ecuación (2.55) y que repetimos a continuación:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (5.108)$$

pudiéndose escribir como:

$$e = -\frac{d\phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\Omega \frac{d\phi}{d\theta} \quad (5.109)$$

siendo  $\Omega$  la velocidad angular, expresada en radianes por segundo (*rad/s*). No obstante, la expresión (5.109) no nos sirve ya que nosotros conocemos la variación del flujo con el Offset  $\alpha$ , lo que es equivalente, la variación del flujo con la posición en la dirección  $x$ . Por ello y empleando que *arco* = *angulo* · *radio* podemos poner que:

$$\text{arco} = \theta \cdot R_m$$

siendo equivalente, al despreciar la curvatura de la máquina, a:

$$Offset \approx \theta \cdot R_m$$

donde hemos reemplazado el arco por el Offset, ya que éste es el espacio que recorre el rotor en la dirección  $x$  en el radio medio. Si despejamos el ángulo obtenemos:

$$\theta \approx \frac{Offset}{R_m}$$

y por lo tanto:

$$d\theta \approx \frac{1}{R_m} \cdot dOffset$$

que, sustituida en la expresión de la f.e.m.i., ecuación (5.109), resulta:

$$e = -\Omega \cdot R_m \cdot \frac{d\phi}{dOffset}$$

Como los valores que tenemos del flujo que concatena la bobina son discretos, podemos reemplazar el diferencial por el incremento, llegando a:

$$e = -\Omega \cdot R_m \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta Offset} \quad (5.110)$$

expresión que nos proporciona la f.e.m.i. en función de datos conocidos para nuestra bobina. Si expresamos  $\Omega$  en radianes por segundo ( $rad/s$ ),  $R_m$  en milímetros ( $mm$ ), la variación del flujo en miliwebers ( $mWb$ ) y la variación del Offset en milímetros ( $mm$ ) obtendremos la fuerza electromotriz inducida en milivoltios ( $mV$ ).

Hemos aplicado la expresión (5.110) a los datos de flujo concatenado por la bobina obtendios al aplicar el Método de los Subdominios, donde la velocidad nominal de giro de nuestra máquina es de 400 revoluciones por minuto (41.888 rad/s). La figura 5.85 muestra los resultados obtenidos junto con los del flujo concatenado previamente hallados.

De los resultados mostrados podemos comentar:

- Las señales de la fuerza electromotriz inducida y del flujo magnético están desfasadas  $90^\circ$  como consecuencia de ser la primera proporcional a la derivada de la segunda. Por ello, cuando el flujo es máximo o mínimo la f.e.m.i. es nula y viceversa.

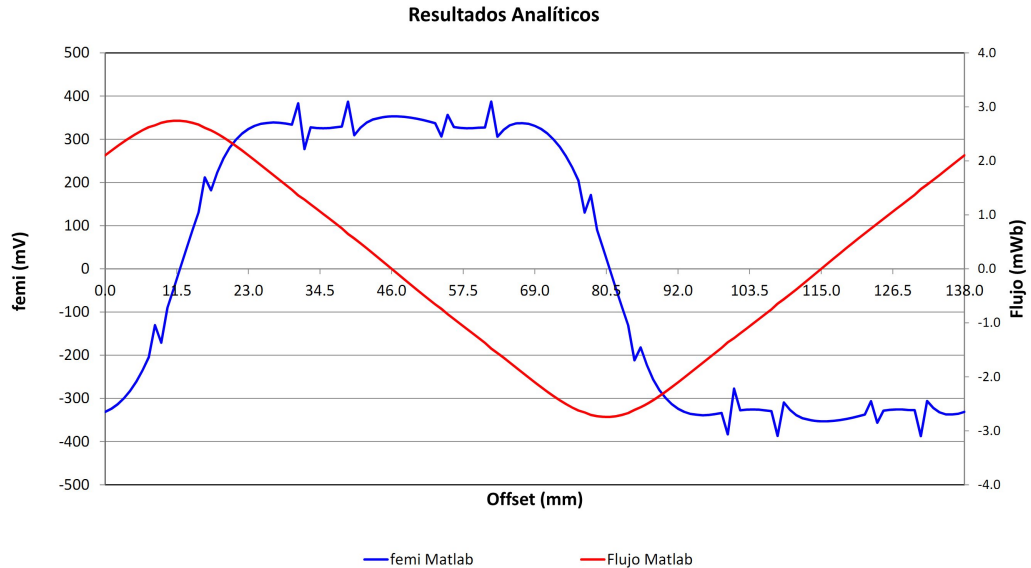


Figura 5.85: Fuerza electromotriz inducida y flujo concatenado por la bobina en un par de polos obtenidos analíticamente

- La forma de la gráfica del flujo es mucho más suave que la de la f.e.m.i., ya que aquella no presenta cambios bruscos como sí que lo hace ésta. El hecho de ser la f.e.m.i. proporcional al gradiente del flujo, origina que sea mucho más sensible a la variaciones, de tal forma que pequeñas variaciones del flujo originan cambios grandes en la fuerza electromotriz inducida.
- Estos cambios bruscos de la f.e.m.i. se originan a la entrada y a la salida de la ranura. También se apreciaban pequeños picos en las componentes de la inducción, que a su vez, condicionan el valor del flujo concatenado.
- Por último, se observa que la f.e.m.i. presenta una periodicidad anticíclica por polo.

### 5.5.1. Simulación por elementos finitos

Con el fin de validar los resultados obtenidos por el método propuesto y de una forma similar a la realizada con el potencial magnético escalar, con las componentes de la inducción y con el flujo concatenado, vamos a obtener los valores de la fuerza electromotriz inducida proporcionados por Flux3D.

Para ello, y a partir del modelo utilizado para el cálculo del flujo concatenado por la bobina (figura 5.83), modificamos la aplicación de magnetostática a transitorio magnético, asociamos la bobina mallada con la bobina de un circuito eléctrico, impusimos una velocidad de rotación al rotor de 400 r.p.m. e hicimos un estudio variando el tiempo desde 0 hasta 37.5 milisegundos, que corresponde a un periodo de la señal eléctrica generada por la máquina o, lo que es equivalente, es el tiempo necesario para que el rotor se mueva un par de polos. Como Flux3D nos proporciona la f.e.m.i. teniendo en cuenta todas las bobinas que se originan al aplicar las periodicidades y las simetrías definidas, la f.e.m.i. obtenida es la que se induce al considerar ocho bobinas de una espira conectadas en serie, siendo necesario dividirla entre ocho para poderla comparar con la hallada mediante el Método de los Subdominios. En la figura 5.86 se comparan los resultados obtenidos.

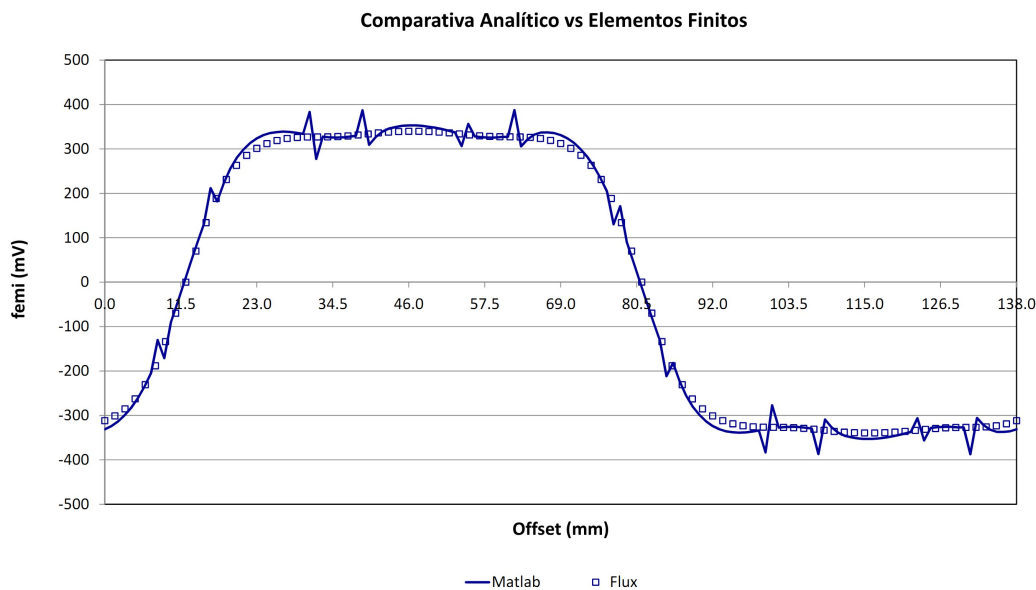


Figura 5.86: Comparación entre los valores de fuerza electromotriz inducida en un par de polos obtenidos analíticamente y mediante elementos finitos

A la vista de esta figura, podemos comentar:

- En general, existe un buen acuerdo entre los valores analíticos y los obtenidos por elementos finitos.
- La diferencia más importante a destacar entre ambos conjuntos de datos es el valor más elevado que presenta el método propuesto en las fronteras diente-imán.

Cuando comparábamos el ajuste en las componentes de la inducción (sección 5.2.5), se observaba el mismo comportamiento que el que comprobamos ahora. Ya que la inducción condiciona los valores del flujo y éstos los de la f.e.m.i., es coherente que ambos conjuntos de valores presenten comportamiento análogos.

No obstante, las diferencias existentes entre valores analíticos y valores de simulación para la f.e.m.i. son menores que las obtenidas cuando cotejábamos las componente de la inducción, lo cual apreciamos si comparamos la gráfica de la f.e.m.i. con las que obteníamos para las componente  $x$  e  $y$  de la inducción.

- A excepción de las zonas comentadas anteriormente, en el resto de los puntos el ajuste entre ambos conjuntos de valores es bueno, tanto en el interior de la ranura como en los dientes del estátor.

Por todo lo expuesto y a la vista de los resultados gráficos podemos considerar que los valores analíticos obtenidos mediante el Método de los Subdominios proporciona un buen acuerdo con los derivados de la simulación de la máquina objeto de estudio por Elementos Finitos.

## 5.6. Cálculo del Par de Reluctancia

Tal y como indicábamos en la sección 2.3.10, para geometrías extensas, como es el caso que nos ocupa, el par lo hallaremos integrando el diferencial de par a lo largo de la superficie de integración. La expresión del diferencial de par venía dada por la ecuación (2.63) ecuación que repetimos a continuación:

$$dT = r \cdot dF_t \quad (5.111)$$

siendo  $F_t$  la componente tangencial de la fuerza aplicada en nuestro dispositivo. La integral del diferencial de par nos proporcionará el par total, según la expresión:

$$T = \oint_S r \cdot dF_t \quad (5.112)$$

Como nuestra máquina funciona en vacío, no existe par electromagnético, siendo el par de reluctancia el único par presente y que es proporcionado por la expresión anterior. Por otro lado, como todos los imanes (todos los polos) tienen la misma posición relativa respecto de las ranuras del estátor, podemos hallar el par de reluctancia de la máquina como el producto del número de pares de polos por el par de reluctancia de un par de polos, donde deberemos



multiplicar por dos para tener en cuenta la simetría de la geometría. Así, podemos expresar el par de reluctancia de nuestra máquina como:

$$T_{cogg} = 2 \cdot N_p \cdot \oint_{S_{par\ polos}} r \cdot dF_t = 2 \cdot N_p \cdot T_{cogg}^{par\ polos} \quad (5.113)$$

siendo  $T_{cogg}^{par\ polos}$  el par de reluctancia de un par de polos, cuya expresión es:

$$T_{cogg}^{par\ polos} = \oint_{S_{par\ polos}} r \cdot dF_t \quad (5.114)$$

donde  $S_{par\ polos}$  es una superficie que encierra el par de polos del que vamos a calcular el par.

El primer paso que debemos dar será el de calcular la expresión de la fuerza experimentada por un par de polos para, posteriormente, determinar su componente tangencial. Dicha fuerza la hallaremos integrando el Tensor de Tensiones de Maxwell a lo largo de una superficie que rodee a nuestro dispositivo, según la ecuación (2.60). Así, podemos escribir:

$$\bar{F} = \oint_{S_{par\ polos}} \bar{T}_{MST} \cdot \bar{ds} = \oint_{S_{par\ polos}} \bar{T}_{MST} \cdot \hat{n} \cdot ds \quad (5.115)$$

En la figura 5.87 se muestra la superficie cerrada de integración  $S_{par\ polos}$  que hemos considerado para evaluar la fuerza, formada por seis superficies que describimos a continuación:

- Las superficies  $S_1$  y  $S_6$  son dos superficies anulares, paralelas a la superficie del rotor, con radios interior y exterior iguales a los del estator, con una abertura angular que abarca un par de polos, estando situadas  $S_1$  en el estator de la máquina y  $S_6$  en el entrehierro.
- Las superficies  $S_2$  y  $S_3$  son dos superficies cilíndricas, que abarcan un par de polos, con radios igual al exterior, para  $S_2$ , y al interior de la máquina, para  $S_3$ .
- Las superficies  $S_4$  y  $S_5$  son dos superficies rectangulares, cuya dimensión radial es la diferencia entre el radio exterior y el radio interior y que están separadas angularmente el doble del paso del polo.

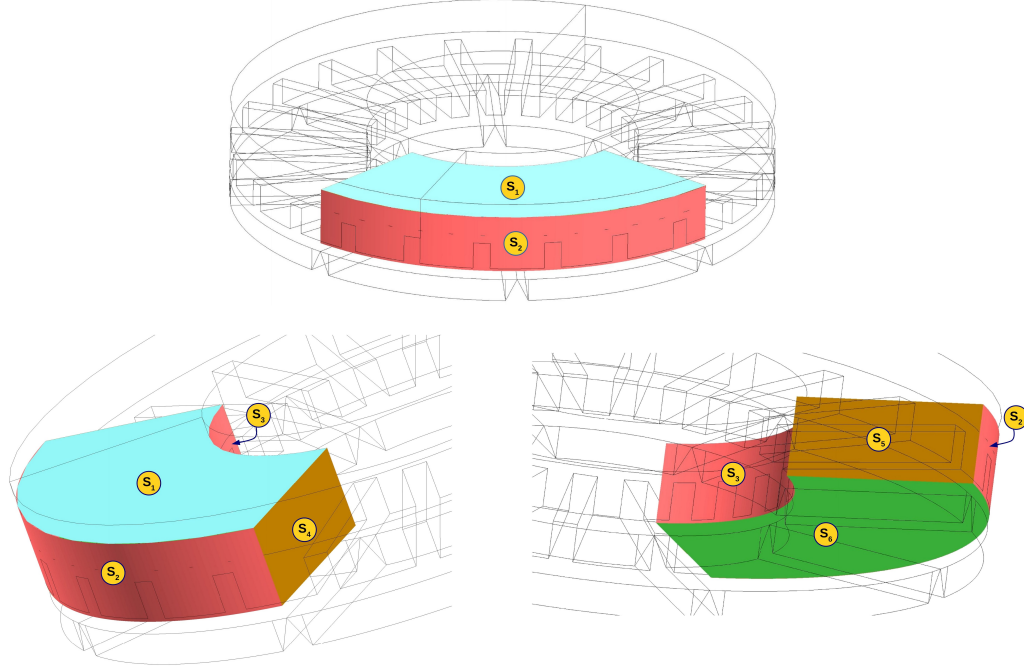


Figura 5.87: Superficie cerrada de integración que rodea a un par de polos

Por lo tanto, el cálculo de la fuerza en la superficie cerrada  $S_{par\ polos}$  lo podemos poner como la suma de las fuerzas halladas en cada una de las seis superficies, siendo la ecuación (5.115) equivalente a:

$$\begin{aligned} \bar{F} = & \int \int_{S_1} \bar{T}_{MST} \cdot \hat{n}_1 \cdot ds + \int \int_{S_2} \bar{T}_{MST} \cdot \hat{n}_2 \cdot ds + \int \int_{S_3} \bar{T}_{MST} \cdot \hat{n}_3 \cdot ds + \\ & + \int \int_{S_4} \bar{T}_{MST} \cdot \hat{n}_4 \cdot ds + \int \int_{S_5} \bar{T}_{MST} \cdot \hat{n}_5 \cdot ds + \int \int_{S_6} \bar{T}_{MST} \cdot \hat{n}_6 \cdot ds \end{aligned} \quad (5.116)$$

donde  $\hat{n}_i$  representa el vector normal a la superficie  $S_i$ . Analicemos la contribución de la integral de cada una de las superficies:

- Integral en la superficie  $S_1$ : Al considerar la permeabilidad del estátor infinita, las componentes de la inducción en este elemento son nulas, siendo nulo el tensor de tensiones de Maxwell y, en consecuencia, la integral en la superficie  $S_1$ .
- Integrales en las superficies  $S_2$  y  $S_3$ : Estamos considerando que las componentes de la inducción son independientes de la componente radial; por ello, el tensor de tensiones de Maxwell tiene el mismo valor en estas

dos superficies pero, como los vectores normales en ambas superficies tienen sentidos contrarios, la contribución total de estas dos superficies es nula.

- Integrales en las superficies  $S_4$  y  $S_5$ : Como consecuencia de la periodicidad cíclica entre puntos separados un par de polos, el tensor de tensiones de Maxwell en las superficies  $S_4$  y  $S_5$  tiene el mismo valor, siendo nula la suma de estas dos integrales ya que, igual que sucedía en el caso anterior, los vectores normales a ambas superficies tienen sentidos contrarios.
- Integral en la superficie  $S_6$ : esta integral es la única que proporciona una contribución neta a la fuerza que queremos hallar.

Por lo tanto, el cálculo de la fuerza en la superficie  $S_{par\ polos}$  queda reducido al cálculo de la fuerza en la superficie  $S_6$ , siendo equivalente la ecuación 5.116 a:

$$\bar{F} = \int \int_{S_6} \bar{T}_{MST} \cdot \hat{n}_6 \cdot ds \quad (5.117)$$

Vamos a hallar el integrando al que denominaremos  $d\bar{F}$ :

$$d\bar{F} = \bar{T}_{MST} \cdot \hat{n}_6 \cdot ds$$

En el sistema de coordenadas cartesianas establecido, la dirección  $x$  está dispuesta horizontalmente con valores positivos hacia la derecha y la dirección  $y$  está situada verticalmente y dirigida del estátor hacia el rotor. En consecuencia, si en esta ecuación sustituimos la expresión del tensor de tensiones de Maxwell en coordenadas cartesianas (ecuación 2.57) y reemplazamos el vector normal  $\hat{n}_6$  por el vector unitario en la dirección  $y$  (vector  $\hat{j}$ ), resulta:

$$\begin{aligned} d\bar{F} &= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y^2 - \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & B_z^2 - \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 \end{pmatrix} \cdot \hat{j} \cdot ds = \\ &= \frac{ds}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y^2 - \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & B_z^2 - \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{ds}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_x B_y \\ B_y^2 - \frac{1}{2}|\bar{B}|^2 \\ B_z B_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión del diferencial de fuerza que se ejerce sobre un par de polos del estátor será:

$$d\bar{F} = \frac{1}{\mu_0} \left[ B_x B_y \hat{i} + \left( B_y^2 - \frac{1}{2} |\bar{B}|^2 \right) \hat{j} + B_z B_y \hat{k} \right] ds$$

La componente tangencial de la fuerza será la componente en la dirección  $x$ , obteniéndose su diferencial a partir de la ecuación anterior:

$$dF_t = \frac{1}{\mu_0} B_x B_y ds \quad (5.118)$$

que sustituido en la ecuación que nos proporciona el par de reluctancia de un par de polos, expresión (5.114), resulta:

$$T_{cogg}^{parpolos} = \frac{1}{\mu_0} \int \int_{S_6} r B_x B_y ds$$

siendo la expresión del par de reluctancia de la máquina (ecuación 5.113):

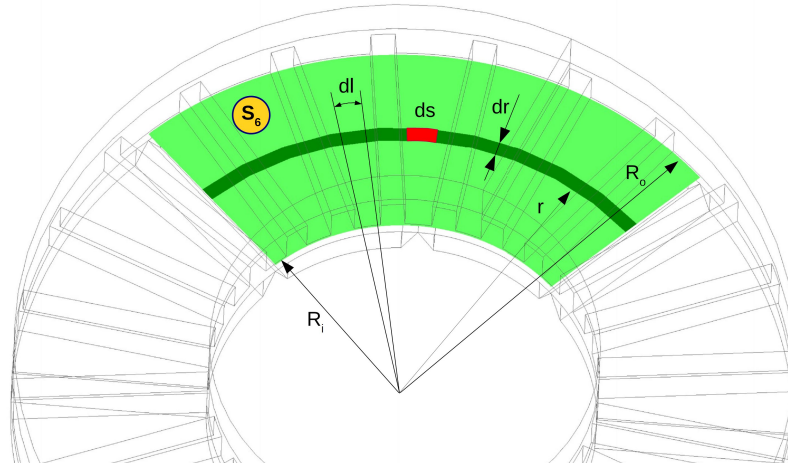
$$T_{cogg} = \frac{2 N_p}{\mu_0} \int \int_{S_6} r B_x B_y ds \quad (5.119)$$

A diferencia de lo que sucede en otras geometrías, como en las máquinas de flujo radial donde la coordenada radial tiene un valor fijo, en las máquinas de flujo axial esta componente presenta una variación, siendo el par producido por una variación continua del radio desde el radio interior,  $R_i$ , hasta el radio exterior,  $R_o$ . Por ello, en el cálculo del par tendremos que calcular estas magnitudes integrando sus correspondientes diferenciales en un radio  $r$  variando desde  $R_i$  hasta  $R_o$  [126], tal y como mostramos en la figura 5.88, donde se representa la superficie de integración  $S_6$  y los principales parámetros que emplearemos para evaluar la ecuación (5.119). De acuerdo a esta figura,  $ds = dr dl$  y al no depender las componentes de la inducción de la coordenada radial resulta:

$$T_{cogg} = \frac{2 N_p}{\mu_0} \int \int_{S_6} r B_x B_y dr dl = \frac{2 N_p}{\mu_0} \int_{R_i}^{R_o} r dr \int_l B_x B_y dl$$

siendo  $l$  el arco abarcado por un par de polos en el radio medio de la superficie  $S_6$ . Si ahora despreciamos la curvatura, podemos aproximar  $l$  por  $x$ , obteniendo:

$$T_{cogg} = \frac{N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_{-\tau_p}^{\tau_p} B_x B_y dx$$

Figura 5.88: Superficie de integración  $S_6$ 

Como consecuencia de la periodicidad anticíclica, las componentes de la inducción en dos polos contiguos tienen el mismo valor pero con signo contrario, por lo que el producto  $B_x \dot{B}_y$  tendrá la misma expresión en ambos polos, pudiendo escribir:

$$T_{cogg} = \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^{\tau_p} B_x B_y dx \quad (5.120)$$

donde las componentes de la inducción son funciones en los que la variable  $y$  tiene el mismo valor que el de la superficie  $S_6$ , estado situada esta superficie arbitrariamente en el entrehierro y paralela a la superficie del rotor.

Ya que los valores de las componentes de la inducción hallados mediante el Método de los Subdominios presentan un mejor acuerdo con los obtenidos mediante Flux3D cuanto más próximos estamos al estátor, vamos a colocar dicha superficie en las proximidades de éste, situándolo a una distancia del estátor del 20 % del valor del entrehierro. Si denotamos por  $Y$  al valor de la coordenada  $y$  de la superficie  $S_6$ ,  $Y$  valdrá  $0.2 \cdot g$  en las regiones tipo diente y  $0.2 \cdot g + h$  en las regiones tipo ranura.

Así, la expresión que nos proporciona el par de reluctancia de nuestra máquina es:

$$T_{cogg} = \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^{\tau_p} B_x(x, Y) B_y(x, Y) dx \quad (5.121)$$

A la hora de evaluar la expresión (5.121) deberemos considerar los cuatro casos obtenidos según la posición del rotor respecto del estátor, esto es, Diente Parcial, Ranura Completa, Ranura Parcial y Diente Completo. Para cada uno de los casos, el par de reluctancia lo obtendremos como la suma de los pares de reluctancia originados por cada una de las regiones que constituyen el caso que estemos considerando. De este modo, tendremos:

- Caso Diente Parcial:

$$T_{cogg,DP} = T_{cogg,DP}^I + T_{cogg,DP}^{II} + T_{cogg,DP}^{III} + T_{cogg,DP}^{IV} + T_{cogg,DP}^V + T_{cogg,DP}^{VI} + T_{cogg,DP}^{VII} \quad (5.122)$$

- Caso Ranura Completa:

$$T_{cogg,RC} = T_{cogg,RC}^I + T_{cogg,RC}^{II} + T_{cogg,RC}^{III} + T_{cogg,RC}^{IV} + T_{cogg,RC}^V + T_{cogg,RC}^{VI} \quad (5.123)$$

- Caso Diente Parcial:

$$T_{cogg,RP} = T_{cogg,RP}^I + T_{cogg,RP}^{II} + T_{cogg,RP}^{III} + T_{cogg,RP}^{IV} + T_{cogg,RP}^V + T_{cogg,RP}^{VI} + T_{cogg,RP}^{VII} \quad (5.124)$$

- Caso Diente Completo:

$$T_{cogg,DC} = T_{cogg,DC}^I + T_{cogg,DC}^{II} + T_{cogg,DC}^{III} + T_{cogg,DC}^{IV} + T_{cogg,DC}^V + T_{cogg,DC}^{VI} \quad (5.125)$$

donde el superíndice especifica la región que se trata del caso indicado por el subíndice.

Obtengamos las expresiones del par de reluctancia de cada región para los cuatro casos señalados, donde seguiremos el mismo orden de casos que en magnitudes precedentes.

### 5.6.1. Diente Parcial

El caso Diente Parcial, tal y como muestra la figura 5.4, está formado por siete regiones, siendo el par de reluctancia total igual a la suma del par de

reluctancia originado en cada región, tal y como expresábamos mediante la ecuación 5.122:

$$T_{cogg,DP} = T_{cogg,DP}^I + T_{cogg,DP}^{II} + T_{cogg,DP}^{III} + T_{cogg,DP}^{IV} + \\ + T_{cogg,DP}^V + T_{cogg,DP}^{VI} + T_{cogg,DP}^{VII}$$

Vamos a determinar la expresión del par de reluctancia en cada región:

### Región I

La expresión del par de reluctancia en esta región la obtenemos a partir de la expresión general, ecuación (5.121), particularizada para la región que nos ocupa, resultando:

$$T_{cogg,DP}^I = \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^{tz} B_x^I(x, Y) B_y^I(x, Y) dx$$

El producto de las componentes  $x$  (ecuación 5.33) e  $y$  (ecuación 5.34) de la inducción en la región I del caso Diente Parcial, es igual a:

$$B_x^I(x, Y) \cdot B_y^I(x, Y) = \mu_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,1} b_{m,1} \frac{n\pi}{tz} \frac{m\pi}{tz} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{tz} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi g}{tz} \right) \cdot \\ \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{tz} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{tz} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{tz} \right) + \\ + \mu_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} b_{n,1} Q_w \frac{n\pi}{tz} \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{tz} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \cdot \\ \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{tz} \right) \cos \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) \sinh \left[ \frac{w\pi(tz-x)}{g} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{n,1} H_q \frac{n\pi}{tz} \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi q}{tz} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \cdot \\
& \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{tz} \right) \cos \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi x}{g} \right) - \\
& -\mu_0^2 \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_w b_{n,1} \frac{w\pi}{g} \frac{n\pi}{tz} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi q}{tz} \right) \cdot \\
& \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi Y}{tz} \right) \cosh \left[ \frac{w\pi(tz-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) + \\
& -\mu_0^2 \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} Q_w Q_p \frac{w\pi}{g} \frac{p\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi tz}{g} \right) \cdot \\
& \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cos \left( \frac{p\pi Y}{g} \right) \cosh \left[ \frac{w\pi(tz-x)}{g} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{p\pi(tz-x)}{g} \right] + \\
& -\mu_0^2 \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} Q_w H_q \frac{w\pi}{g} \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \cdot \\
& \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cos \left( \frac{q\pi Y}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{w\pi(tz-x)}{g} \right] \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi x}{g} \right) + \\
& +\mu_0^2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_q b_{n,1} \frac{q\pi}{g} \frac{n\pi}{tz} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi q}{tz} \right) \cdot \\
& \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi Y}{tz} \right) \cosh \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{tz} \right) + \\
& +\mu_0^2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} H_q Q_w \frac{q\pi}{g} \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \cdot \\
& \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cos \left( \frac{w\pi Y}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{w\pi(tz-x)}{g} \right] + \\
& +\mu_0^2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} H_q H_p \frac{q\pi}{g} \frac{p\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi tz}{g} \right) \cdot \\
& \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cos \left( \frac{p\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{p\pi x}{g} \right)
\end{aligned}$$

Si ahora hallamos la integral de este producto entre los límites de integración (0 y  $tz$ ) y agrupamos términos, obtenemos que el par de reluctancia



en la región I del caso Diente Parcial es igual a:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,DP}^I &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^{tz} B_x^I(x, Y) B_y^I(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,1} b_{m,1} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{tz} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi g}{tz} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{tz} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi Y}{tz} \right) \frac{\pi}{tz} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{tz} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{tz} \right) \cos \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{tz} \frac{[\cosh \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) - (-1)^n] Q_w + [(-1)^n \cosh \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) - 1] H_w}{1 + \left( \frac{n}{w} \frac{g}{tz} \right)^2} - \\
&\quad - \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{tz} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi Y}{tz} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{w\pi}{g} \frac{[\cosh \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) - (-1)^n] Q_w - [1 - (-1)^n \cosh \left( \frac{w\pi tz}{g} \right)] H_w}{1 + \left( \frac{w}{n} \frac{tz}{g} \right)^2} - \\
&\quad - \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (Q_w Q_q - H_w H_q) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{q,w}) \frac{qw}{w^2 - q^2} \left( q + w \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - q \operatorname{cosh} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \right) \right] + \delta_{q,w} \frac{w}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) - \\
&\quad - \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (Q_w H_q - H_w Q_q) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \frac{w\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{q,w}) \frac{q^2}{w^2 - q^2} \left( \operatorname{cosh} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) - \operatorname{cosh} \left( \frac{q\pi tz}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{q,w} \cdot \frac{q\pi tz}{2g} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi tz}{g} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{5.126}$$

Procediendo de forma similar obtendremos las expresiones para las regiones restantes.

## Región II

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación 5.35) e  $y$  (ecuación 5.36) de la inducción en la región II del caso Diente Parcial, obtenemos que el par de reluctancia se puede poner como:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,DP}^{II} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^{II}(x, Y) B_y^{II}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,2} b_{m,2} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \right. \\
&\quad \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \frac{\pi}{s} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{s} \frac{[(-1)^n \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - 1] K_m^2 + [\cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - (-1)^n] K_m^{2'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{h+g}{s} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,2} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{h+g} \frac{[1 - (-1)^m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right)] K_n^2 - [\cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - (-1)^m] K_n^{2'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{s}{h+g} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^2 K_m^2 - K_n^{2'} K_m^{2'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{n}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^2 K_m^{2'} - K_n^{2'} K_m^2) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \right] \left. \right\} \tag{5.127}
\end{aligned}$$

donde las expresiones de  $K_n^2$  y  $K_n^{2'}$  vienen dadas por la ecuación (5.3).

### Región III

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación 5.37) e  $y$  (ecuación 5.38) de la inducción en la región III del caso Diente Parcial, obtenemos que el par de reluctancia se expresa mediante:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,DP}^{III} &= \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^{III}(x, Y) B_y^{III}(x, Y) dx = \\
&= 2 N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,3} b_{m,3} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi g}{t} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{t} \right) \frac{\pi}{t} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cos \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi [\cosh(\frac{l\pi t}{g}) - (-1)^n] M_l + [(-1)^n \cosh(\frac{l\pi t}{g}) - 1] L_l}{t [1 + (\frac{n}{l} \frac{g}{t})^2]} - \\
&\quad - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{l\pi [\cosh(\frac{l\pi t}{g}) - (-1)^n] M_l - [1 - (-1)^n \cosh(\frac{l\pi t}{g})] L_l}{g [1 + (\frac{l}{n} \frac{t}{g})^2]} - \\
&\quad - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (M_l M_m - L_l L_m) \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{l,m}) \frac{ml}{l^2 - m^2} \left( m + l \operatorname{senh} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \right) \right] + \delta_{l,m} \frac{l}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{l\pi t}{g} \right) - \\
&\quad - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (M_l L_m - L_l M_m) \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \frac{l\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{l,m}) \frac{m^2}{l^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{l,m} \cdot \frac{l\pi t}{2g} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{5.128}$$

### Región IV

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación 5.39) e  $y$  (ecuación 5.40) de la inducción en la región IV del caso Diente Parcial, obtenemos que el par de reluctancia tiene por expresión:

$$\begin{aligned}
 T_{cogg,DP}^{IV} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^{IV}(x, Y) B_y^{IV}(x, Y) dx = \\
 &= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V_o}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \frac{\cosh\left(\frac{n\pi s}{h+g}\right)+1}{1+\left(\frac{2k-1}{n}, \frac{h+g}{s}\right)^2} (K_n^{4'} - K_n^4) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_o}{s} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
 &\quad \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{s} \right] \frac{2k-1}{n} \cdot \frac{h+g}{s} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi s}{h+g}\right)+1}{1+\left(\frac{2k-1}{n}, \frac{h+g}{s}\right)^2} (K_n^4 - K_n^{4'}) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^4 K_m^4 - K_n^{4'} K_m^{4'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{m}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) + \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^4 K_m^{4'} - K_n^{4'} K_m^4) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{m\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right] \right\} \quad (5.129)
 \end{aligned}$$

donde las expresiones de  $K_n^4$  y  $K_n^{4'}$  vienen dadas por la ecuación (5.6).

### Región V

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación 5.41) e  $y$  (ecuación 5.42) de la inducción en la región V del caso Diente Parcial, obtenemos

que el par de reluctancia es igual a:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,DP}^V &= \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^V(x, Y) B_y^V(x, Y) dx = \\
&= 2 N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,4} b_{m,4} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi g}{t} \right) \cdot \right. \\
&\cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{t} \right) \frac{\pi}{t} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cos \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{t} \frac{[\cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - (-1)^n] P_r + [(-1)^n \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - 1] R_r}{1 + \left( \frac{n}{r} \frac{g}{t} \right)^2} - \\
&- \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{r\pi}{g} \frac{[\cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - (-1)^n] P_r - [1 - (-1)^n \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right)] R_r}{1 + \left( \frac{r}{n} \frac{t}{g} \right)^2} \quad (5.130) \\
&- \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (P_r P_p - R_r R_p) \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\cdot \cos \left( \frac{p\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{r,p}) \frac{rp}{r^2 - p^2} \left( p + r \sinh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \sinh \left( \frac{p\pi t}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - p \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \right) \right] + \delta_{r,p} \frac{r}{2} \sinh^2 \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - \\
&- \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (P_r R_p - R_r P_p) \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\cdot \cos \left( \frac{p\pi Y}{g} \right) \frac{r\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{r,p}) \frac{p^2}{r^2 - p^2} \left( \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - \cosh \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{r,p} \cdot \frac{r\pi t}{2g} \cdot \sinh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

## Región VI

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación 5.43) e  $y$  (ecuación 5.44) de la inducción en la región VI del caso Diente Parcial, obtenemos

que el par de reluctancia tiene por expresión:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,DP}^{VI} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^{VI}(x, Y) B_y^{VI}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,5} b_{m,5} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \right. \\
&\quad \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \frac{\pi}{s} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,5} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{s} \frac{[(-1)^n \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - 1] K_m^6 + [\cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - (-1)^n] K_m^{6'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{h+g}{s} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,5} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{h+g} \frac{[1 - (-1)^m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right)] K_n^6 - [\cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - (-1)^m] K_n^{6'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{s}{h+g} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^6 K_m^6 - K_n^{6'} K_m^{6'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{m}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^6 K_m^{6'} - K_n^{6'} K_m^6) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{m\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right] \left. \right\} \tag{5.131}
\end{aligned}$$

donde las expresiones de  $K_n^6$  y  $K_n^{6'}$  vienen dadas por la ecuación (5.9).

## Región VII

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación 5.45) e  $y$  (ecuación 5.46) de la inducción en la región VII del caso Diente Parcial, obtenemos que el par de reluctancia se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,DP}^{VII} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^{t(1-z)} B_x^{VII}(x, Y) B_y^{VII}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,6} b_{m,6} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t(1-z)} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi g}{t(1-z)} \right) \cdot \right. \\
&\cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{t(1-z)} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{t(1-z)} \right) \frac{\pi}{t(1-z)} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} b_{n,6} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t(1-z)} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right) \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{t(1-z)} \right) \cos \left( \frac{u\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\cdot \frac{n\pi}{t(1-z)} \frac{[\cosh(\frac{u\pi t(1-z)}{g}) - (-1)^n] V_u - [(-1)^n \cosh(\frac{u\pi t(1-z)}{g}) - 1] Q_u}{1 + [\frac{n}{u} \frac{g}{t(1-z)}]^2} - \\
&- \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \operatorname{csch} \left( \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t(1-z)} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{u\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi Y}{t(1-z)} \right) \cdot \\
&\cdot \frac{u\pi}{g} \frac{[\cosh(\frac{u\pi t(1-z)}{g}) - (-1)^n] V_u + [1 - (-1)^n \cosh(\frac{u\pi t(1-z)}{g})] Q_u}{1 + [\frac{u}{n} \frac{t(1-z)}{g}]^2} - \\
&- \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} (V_u V_w - Q_u Q_w) \operatorname{csch} \left( \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t(1-z)}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{u\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\cdot \cos \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{u,w}) \frac{uw}{u^2 - w^2} \left( w + u \operatorname{senh} \left( \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi t(1-z)}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - w \cosh \left( \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right) \cosh \left( \frac{w\pi t(1-z)}{g} \right) \right) \right] + \delta_{u,w} \frac{u}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right) + \\
&+ \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} (V_u Q_w - Q_u V_w) \operatorname{csch} \left( \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t(1-z)}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{u\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\cdot \cos \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \frac{u\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{u,w}) \frac{w^2}{u^2 - w^2} \left( \cosh \left( \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right) - \cosh \left( \frac{w\pi t(1-z)}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{u,w} \cdot \frac{u\pi t(1-z)}{2g} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{u\pi t(1-z)}{g} \right) \right] \left. \right\} \tag{5.132}
\end{aligned}$$

Una vez obtenidas las expresiones que proporcionan el par de reluctancia en todas las regiones del caso Diente Parcial, ecuaciones (5.126) a (5.132), y sustituyéndolas en la ecuación (5.122) obtendremos el par de reluctancia en este caso.

### 5.6.2. Ranura Completa

El caso Ranura Completa, tal y como muestra la figura 5.20, está formado por seis regiones, siendo el par de reluctancia total igual a la suma del par de reluctancia originado en cada región, tal y como expresábamos mediante la ecuación 5.123:

$$T_{cogg,RC} = T_{cogg,RC}^I + T_{cogg,RC}^{II} + T_{cogg,RC}^{III} + T_{cogg,RC}^{IV} + T_{cogg,RC}^V + T_{cogg,RC}^{VI}$$

Las expresiones del par de reluctancia en cada región se determinan en el apartado D.6 del apéndice D.

Una vez obtenidas las expresiones que proporcionan el par de reluctancia en todas las regiones del caso Ranura Completa, ecuaciones (D.56) a (D.61), y sustituyéndolas en la ecuación (5.123) obtendremos el par de reluctancia en este caso.

### 5.6.3. Ranura Parcial

El caso Ranura Parcial, tal y como muestra la figura 5.25, está formado por siete regiones, siendo el par de reluctancia total igual a la suma del par de reluctancia originado en cada región, tal y como expresábamos mediante la ecuación 5.124:

$$T_{cogg,RP} = T_{cogg,RP}^I + T_{cogg,RP}^{II} + T_{cogg,RP}^{III} + T_{cogg,RP}^{IV} + T_{cogg,RP}^V + T_{cogg,RP}^{VI} + T_{cogg,RP}^{VII}$$

Vamos a determinar la expresión del par de reluctancia en cada región. El apartado E.6 del apéndice E contiene estas expresiones.

Una vez obtenidas las expresiones que proporcionan el par de reluctancia en todas las regiones del caso Ranura Parcial, ecuaciones (E.67) a (E.73), y sustituyéndolas en la ecuación (5.124) obtendremos el par de reluctancia en este caso.



### 5.6.4. Diente Completo

El caso Diente Completo, tal y como muestra la figura 5.34, está formado por seis regiones, siendo el par de reluctancia total igual a la suma del par de reluctancia originado en cada región, tal y como expresábamos mediante la ecuación 5.125:

$$T_{cogg,DC} = T_{cogg,DC}^I + T_{cogg,DC}^{II} + T_{cogg,DC}^{III} + T_{cogg,DC}^{IV} + T_{cogg,DC}^V + T_{cogg,DC}^{VI}$$

Vamos a determinar la expresión del par de reluctancia en cada región, las cuales se muestran en el apartado F.6 del apéndice F.

Una vez obtenidas las expresiones que proporcionan el par de reluctancia en todas las regiones del caso Ranura Parcial, ecuaciones (F.56) a (F.61), y sustituyéndolas en la ecuación (5.125) obtendremos el par de reluctancia en este caso.

A partir de las expresiones del par de reluctancia que se origina en nuestra máquina en los diferentes casos, ecuaciones (5.122), (5.123), (5.124) y (5.125), procedimos a calcular su valor de acuerdo a la geometría de nuestra máquina en dos dimensiones (tabla 4.1). Como el par de reluctancia es una función periódica con una periodicidad igual al paso de ranura ( $\tau_s$ ), variamos el offset desde cero hasta el paso de ranura en incrementos de 1 milímetro. En la figura 5.89 se muestran los resultados obtenidos, donde se representa el par que debo aplicar para vencer su par de reluctancia; de esta forma, si el par que tengo que aplicar es positivo, la máquina presenta un par de reluctancia que debo vencer, siendo un par que tengo que contrarrestar si el par que debo aplicar es negativo.

A la vista de estos resultados podemos comentar:

- La forma de la curva del par es la esperada, presentando una periodicidad igual al paso de ranura (23 mm para el modelo en dos dimensiones).
- La posición inicial y final son posiciones estables, de tal forma que si el rotor se mueve ligeramente de estas posiciones, tiende a volver a recuperarla. Estas posiciones se corresponden con una situación donde la cantidad de material ferromagnético que “ve” el rotor es máxima, teniendo que aplicar un par para mover al rotor de esas posiciones.
- La posición intermedia (offset igual a 12.5 mm), corresponde a una posición de equilibrio inestable; es de equilibrio ya que el valor del

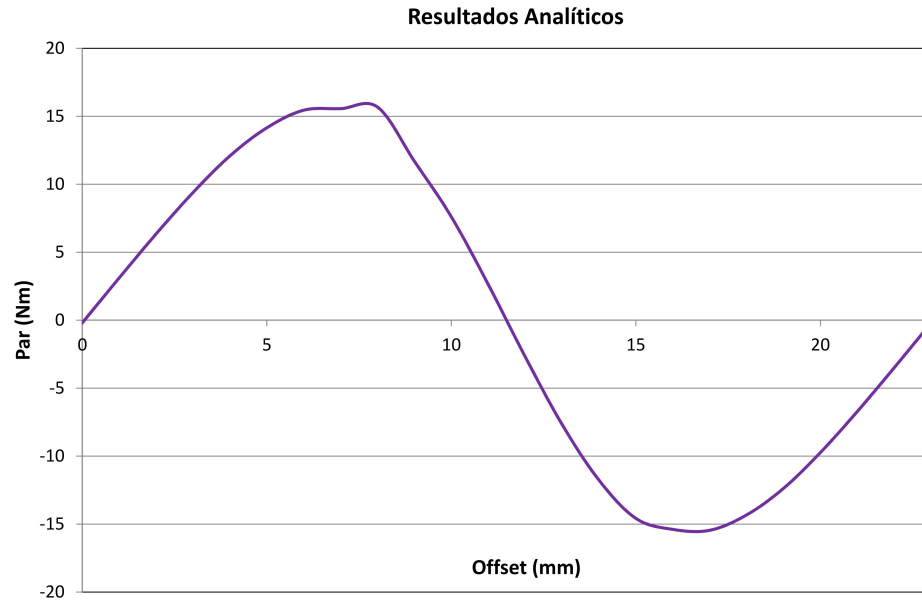


Figura 5.89: Par de reluctancia de la máquina en un paso de ranura (resultados analíticos)

par de reluctancia es nulo, pero es inestable ya que cualquier pequeña perturbación origina que el rotor se aleje de esta posición buscando las posiciones estables. Por esa razón, el par que debo aplicar tiene que contrarrestar el proporcionado por la máquina.

- Las pendientes de los tramos ascendente y descendente no son iguales, ya que estas pendientes están relacionadas con los espesores del diente y de la ranura, respectivamente. Dado que nuestra máquina, en el radio medio, posee un espesor mayor de diente que de ranura, la pendiente del tramo ascendente es menor que la del descendente.
- Si relacionamos cada tramo con los diferentes casos contemplados, podemos ver como el tramo ascendente se corresponde con el caso Diente Parcial, el descendente con el caso Ranura Parcial, el punto máximo con el caso Ranura Completa y el punto mínimo con el caso Diente Completo.
- Por último, podemos observar como la curva no posee una forma uniforme, si no que en determinados puntos presenta pequeñas oscilaciones, correspondiendo estos puntos a zonas en la proximidad de la frontera diente-ranura. Cuando analizábamos las componentes de la inducción,

observábamos que en esta frontera la componentes de la inducción presentaban picos u oscilaciones elevadas. A nuestro juicio, estas oscilaciones son las responsables de la no uniformidad de la curva del par de reluctancia.

### 5.6.5. Simulación por elementos finitos

Con el fin de validar los resultados obtenidos por el método propuesto y de una forma similar a la realizada con las restantes magnitudes (potencial magnético escalar, componentes de la inducción, flujo concatenado y fuerza electromotriz inducida), vamos a obtener los valores del par de reluctancia que nos proporciona el software Flux3D empleando el modelo de máquina que se mostraba en la figura 5.38 del apartado 5.1. En la figura 5.90 se muestran los valores proporcionados por el programa así como los obtenidos analíticamente.

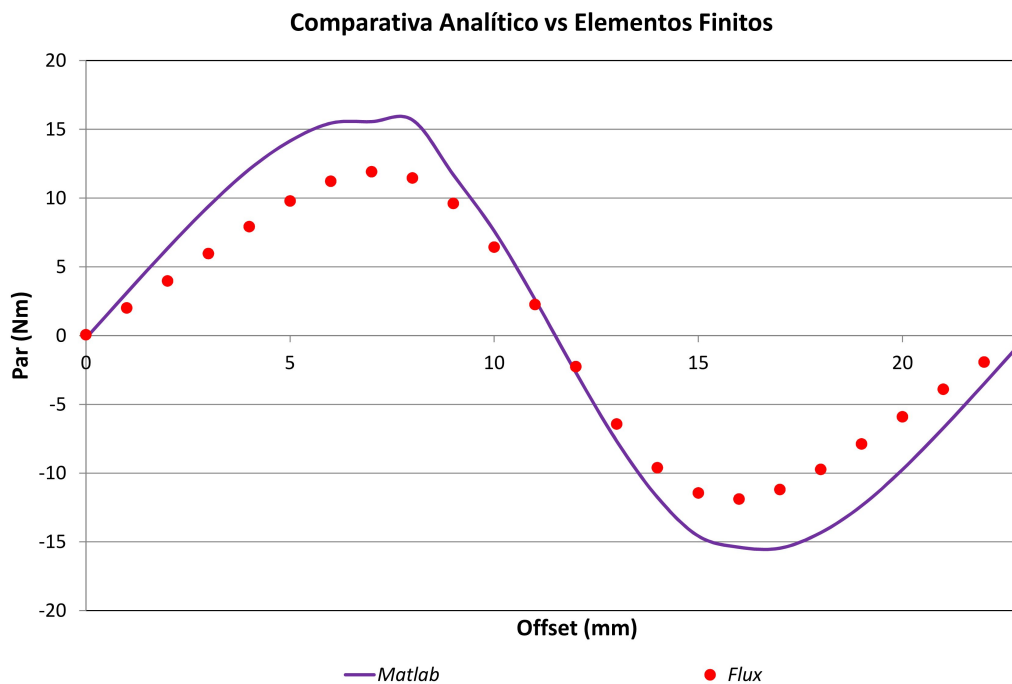


Figura 5.90: Comparación entre los valores del par de reluctancia obtenidos analíticamente y mediante elementos finitos

A la vista de esta figura, podemos realizar las siguientes observaciones:

- Ambas curvas presentan el mismo aspecto, coincidiendo las posiciones del offset que corresponde a los puntos de equilibrio estable e inestable, valor máximo y valor mínimo del par de reluctancia.
- Existe una gran diferencia entre los valores analíticos y los proporcionado por la simulación mediante elementos finitos, siendo los primeros entre un 20 y un 50 % mayores que los segundos. Para poder distinguir si estas diferencias son consecuencia de las aproximaciones empleadas para calcular el par o están relacionadas con el cálculo del la componente tangencial de la fuerza, procedimos a evaluar esta componente.

La expresión analítica de la componente tangencial de la fuerza en un par de polos la obtendremos integrando el diferencial de la fuerza tangencial, expresión (5.118), en la superficie de integración  $S_{par\ polos}$ , es decir:

$$F_t^{par\ polos} = \oiint_{S_{par\ polos}} dF_t = \int \int_{S_6} dF_t = \frac{1}{\mu_0} \int \int_{S_6} B_x B_y ds$$

La componente tangencial de la fuerza en toda la máquina la obtendremos multiplicando a la originada en un par de polos por el número de pares de polos y por el número de estátores, siendo:

$$F_t = 2 N_p F_t^{par\ polos} = \frac{2 N_p}{\mu_0} \int \int_{S_6} B_x B_y ds$$

Si sustituimos el diferencial de superficie nos queda:

$$F_t = \frac{2 N_p}{\mu_0} \int \int_{S_6} B_x B_y dr dl = \frac{2 N_p}{\mu_0} \int_{R_i}^{R_o} dr \int_l B_x B_y dl$$

Si realizamos la integral del radio y despreciamos la curvatura, resulta:

$$F_t = \frac{2 N_p (R_o - R_i)}{\mu_0} \int_{-\tau_p}^{\tau_p} B_x B_y dx = \frac{4 N_p (R_o - R_i)}{\mu_0} \int_0^{\tau_p} B_x B_y dx$$

donde hemos tenido en cuenta la periodicidad entre polos contiguos. Por lo tanto, la expresión de la componente tangencial de la fuerza viene dada por:

$$F_t = \frac{4 N_p (R_o - R_i)}{\mu_0} \int_0^{\tau_p} B_x(x, Y) B_y(x, Y) dx \quad (5.133)$$

Si comparamos la expresión que acabamos de obtener con la del par de reluctancia (ecuación (5.121)), observamos que ambas magnitudes son proporcionales, cumpliéndose que

$$T_{cogg} = \frac{R_o + R_i}{2} \cdot F_t = R_m \cdot F_t$$

siendo  $R_m$  el radio medio. Por lo tanto y ya que hemos evaluado el par de reluctancia, podemos obtener la componente tangencial de la fuerza utilizando la relación anterior.

Respecto a los resultados de esta componente obtenidos por elementos finitos, hemos procedido a calcularla empleando el software Flux3D y empleando el mismo modelo que utilizamos para calcular el par. En la figura 5.91 se muestran ambos conjuntos de valores.

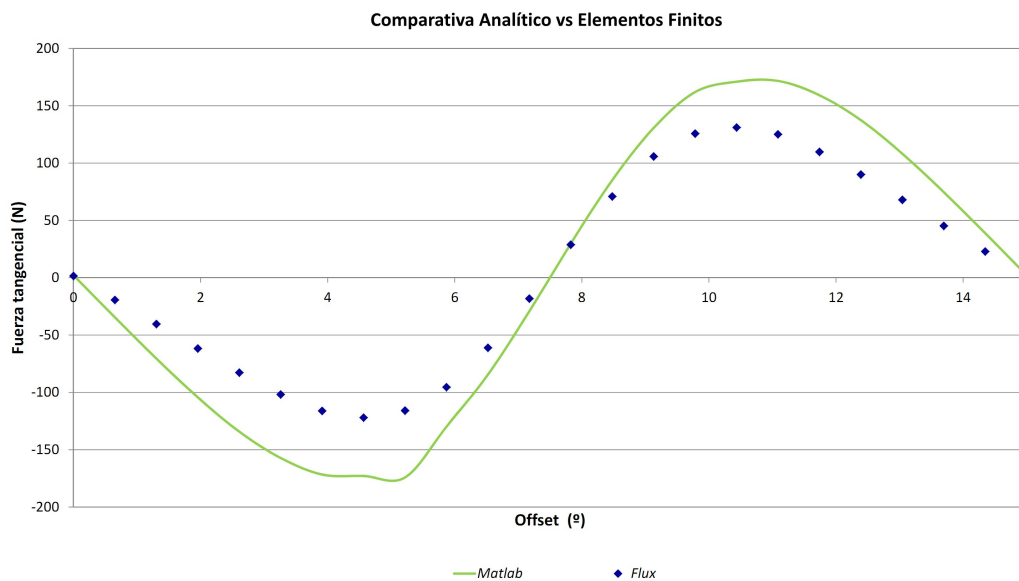


Figura 5.91: Comparación entre los valores de la componente tangencial de la fuerza obtenidos analíticamente y mediante elementos finitos

A la vista de esta representación y ya que entre los valores analíticos y los obtenidos por elementos finitos de la componente tangencia de la fuerza existen grandes diferencias, las diferencias que se observan para el par de reluctancia obtenido por ambos métodos son debidos, principalmente, a la estimación de la componente tangencial de la fuerza. Entre las posibles causas que pueden originar estas diferencias en la componente de la fuerza, apuntamos las tres siguientes:

- Existen diferencias entre las componentes de la inducción obtenidas analíticamente y las proporcionadas por el software de simulación, tal y como comprobábamos en el apartado 5.2.5.
- En la obtención del par de reluctancia y de la componente tangencial de la fuerza hemos considerado que las componentes de la inducción no varían con el radio, afirmación que no es totalmente cierta. En la siguiente figura 5.92 se muestra la variación con el radio de las componentes normal y tangencial de la inducción a lo largo de dos radios, uno situado en el centro de una ranura (marcado como “ranura”) y otro situado en el centro de un diente (marcado como “diente”), variando la componente radial desde el radio interior hasta el exterior y colocados en el entrehierro, paralelos al rotor y a una distancia del estátor de  $0.2 \cdot g$ . Podemos observar como ambas componentes varían con el radio, siendo esta variación más importante según nos acercamos a las posiciones extremas.

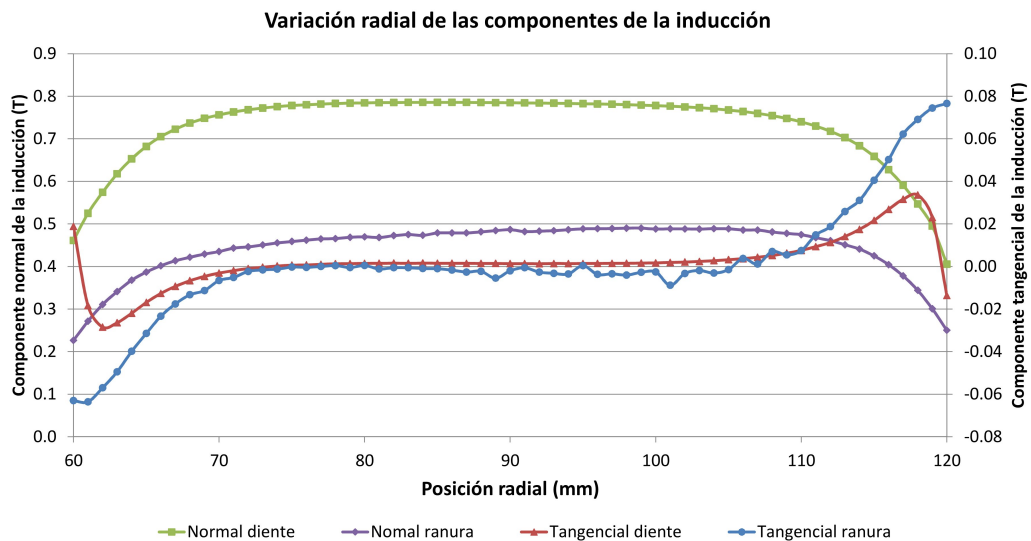


Figura 5.92: Variación con el radio de las componentes normal y tangencial de la inducción

- Cuando en las expresiones del par y de la fuerza tangencial realizamos la integral de la superficie y despreciamos la curvatura, estamos aproximando nuestra superficie de integración, reemplazando el sector de corona circular por un paralelogramo. En la figura 5.93 se muestra esta aproximación.

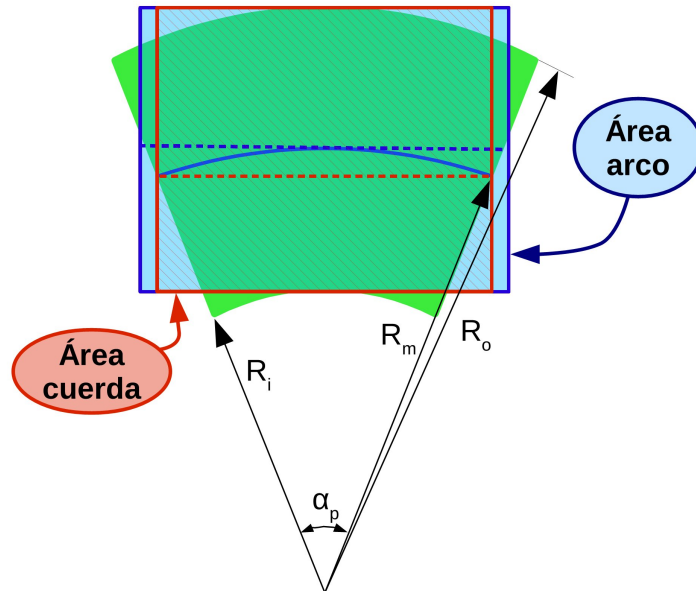


Figura 5.93: Aproximación de la superficie de integración: superficie original (en verde), paralelogramo del arco (en azul) y paralelogramo de la cuerda (en rojo)

Ahora bien, como suponemos que la anchura de ese paralelogramo se corresponde con la longitud del polo en el radio medio y no con la cuerda, estamos incrementando la superficie de integración. Dicho incremento será igual a la relación de superficies entre ambos paralelogramos, que es igual a la relación entre la longitud del arco y la longitud de la cuerda.

La longitud del arco viene dada por:

$$L_{arco} = \alpha_p \cdot R_m$$

y la de la cuerda por:

$$L_{cuerda} = 2 \cdot R_m \cdot \text{sen}(\alpha_p/2)$$

siendo la relación entre ambas:

$$\frac{L_{arco}}{L_{cuerda}} = \frac{\alpha_p}{2\text{sen}(\alpha_p/2)}$$

Como el paso de polo es de  $45^\circ$ , al sustituir resulta:

$$\frac{L_{arco}}{L_{cuerda}} = 1.0262$$

Es decir, el área sobre el que integramos la componente tangencial de la fuerza y el par de reluctancia está incrementada en un 2.62 % por polo. Si lo multiplicamos por el número de polos de la máquina y por el número de estatores, obtenemos un área de integración incrementada en un 41.88 %, es decir, estoy considerando un área que es 1.4188 veces la que debería considerar. Como la componente tangencial de la fuerza y el par de reluctancia les obtenemos integrando en ese área, al considerar un área de integración mayor obtenemos unos valores mayores. Por ello, podemos corregir los valores hallados sin más que dividir los valores hallados entre 1.4188. A estos valores les denominaremos valores “*corregidos*”. En la figura 5.94 se muestran los valores del par de reluctancia según la formulación propuesta, la formulación propuesta corrigiéndolos y el software de simulación.

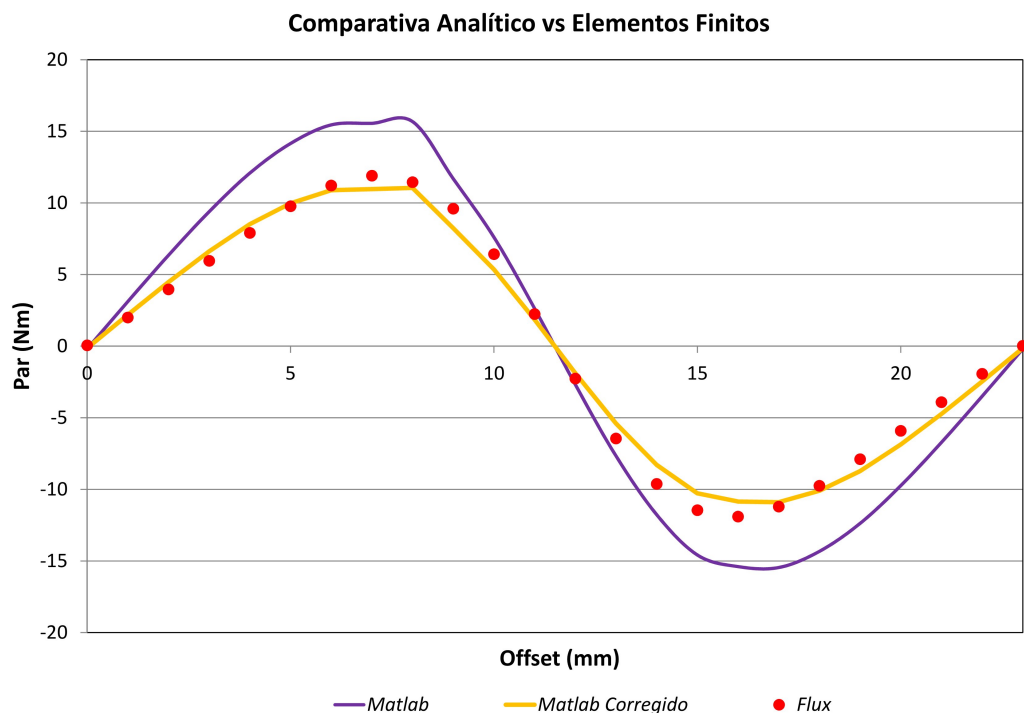


Figura 5.94: Valores del par de reluctancia hallados por la formulación propuesta, la formulación propuesta corregidos y elementos finitos.

Observando la gráfica se puede comprobar que, mediante la corrección realizada, los valores del par de reluctancia obtenidos analíticamente muestran un buen acuerdo con los hallados mediante el programa



Flux3D. Si queremos cuantificar esta mejora en el ajuste, la figura 5.95 muestra los valores de la distancia L2, expresión (4.1), y de su logaritmo neperiano existentes entre los valores analíticos y los de simulación y entre los valores analíticos corregidos y los de simulación.

	Matlab vs Flux	Matlab corregido vs Flux
Distancia L2	222.860	13.783
ln(distancia L2)	5.407	2.623

Figura 5.95: Valores de la distancia L2 y de su logaritmo neperiano existentes entre los valores analíticos y los de simulación

Para comprobar si esta corrección del par de reluctancia mejora en general los valores hallados, hemos procedido a comparar resultados analíticos sin y con corrección con valores de simulación para diferentes geometrías. A modo de ejemplo, comentamos las siguientes:

- Incremento de la anchura de la ranura: Tomando como punto de partida la geometría de nuestra máquina, hemos construido una igual con la única diferencia de haber aumentado la anchura de la ranura, pasando de 7 a 10 milímetros. En la figura 5.96 se muestran los resultados obtenidos. Se puede comprobar que la corrección del área mejora los valores analíticos, logrando un buen ajuste entre analíticos y elementos finitos.
- Incremento del entrehierro: Seguimos tomando como punto de partida nuestra máquina y ahora modificamos el espesor del entrehierro, aumentándolo de 5 a 10 milímetros. Los resultados obtenidos son los que se ilustran en la figura 5.97. Se observa como los resultados corregidos aproximan los valores del par a los de elementos finitos, pero no es tan bueno el ajuste como en los dos casos anteriores.
- Incremento de las dimensiones radiales de la máquina, manteniendo el valor del paso de polo en el radio medio: Partiendo del modelo inicial de máquina, hemos calculado una máquina donde no exista tanta diferencia entre el arco y la cuerda, intentando mantener constantes los parámetros por polo. Para ello, hemos tenido que aumentar tanto el radio interior ( $R_i = 240mm$ ) como el radio exterior ( $R_o = 300mm$ ), pero manteniendo constante la diferencia entre ambos ( $60mm$ ), hemos disminuido el paso de polo a 15

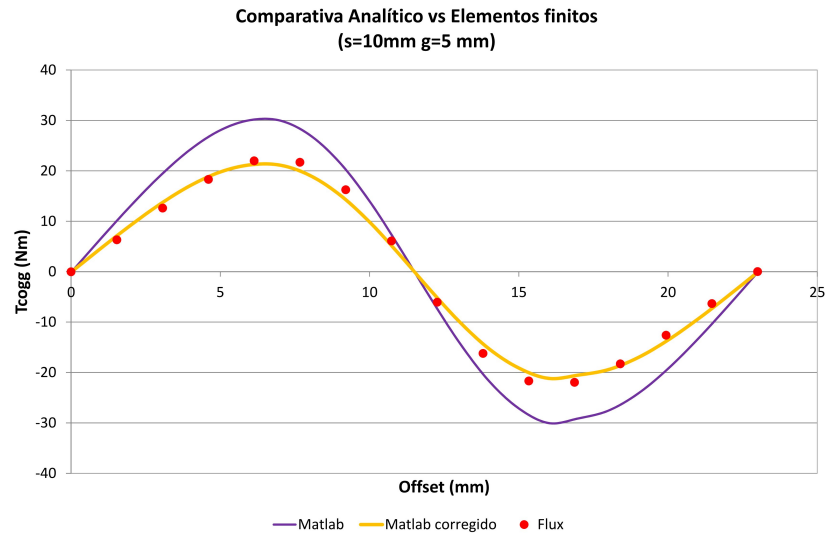


Figura 5.96: Resultados obtenidos para la geometría con incremento en la anchura de la ranura

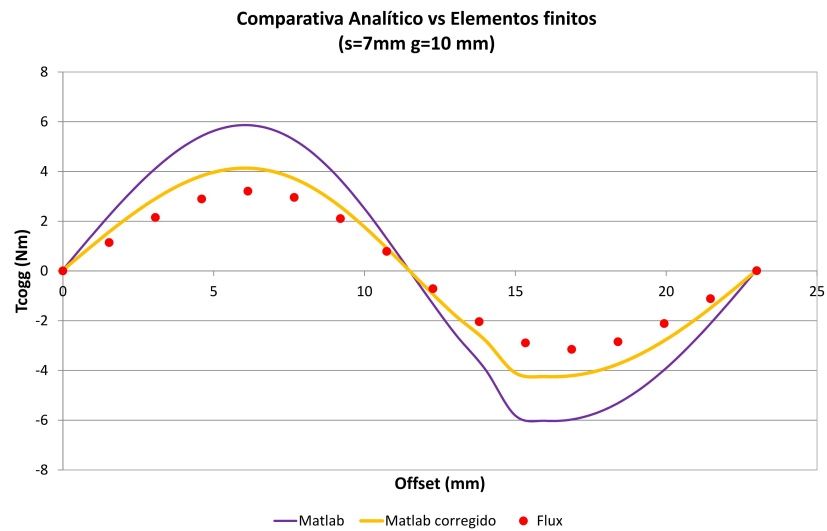


Figura 5.97: Resultados obtenidos para la geometría con incremento en el espesor del entrehierro

grados y hemos aumentado el número de polos a 24. Con ello, las dimensiones del diente y del paso de polo en el radio medio entre ambos modelos son muy similares y, como consecuencia de haber aumentado el radio, la diferencia entre el arco y la cuerda es menor.

En la figura 5.98 se muestran los resultados obtenidos. Podemos comprobar como los valores analíticos están más próximos a los valores obtenidos por simulación que en los ejemplos anteriores (sobre todo los obtenidos del estudio ranura parcial), y como la corrección los mejora en su conjunto.

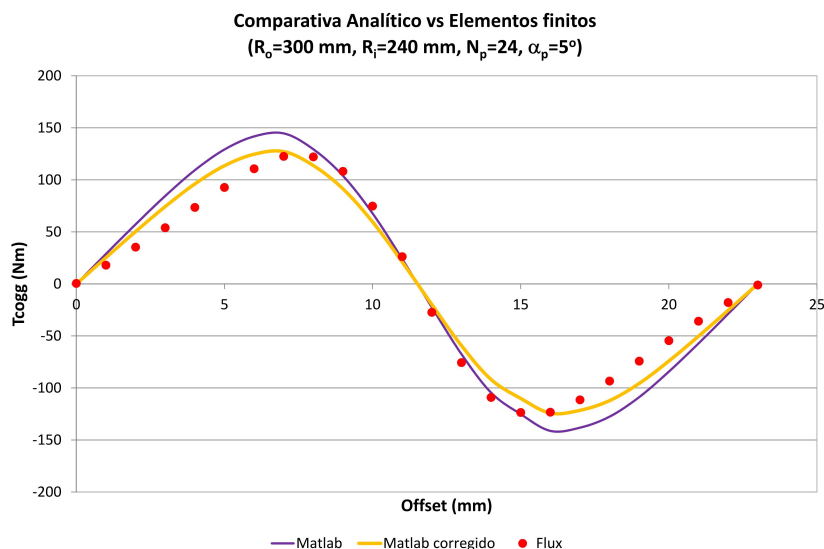


Figura 5.98: Resultados obtenidos en la geometría con incremento en las dimensiones radiales

A la vista de los ejemplos anteriores podemos comprobar como la corrección por superficie mejora en general los valores del par obtenidos analíticamente, pero sin olvidarnos de la influencia de las otras dos causas que señalábamos como origen de discrepancias entre resultados analíticos y resultados de elementos finitos.

A pesar de las diferencias existentes entre valores analíticos y valores proporcionados por el programa de elementos finitos, la dependencia observada entre los valores del par de reluctancia y los parámetros de la geometría son similares con el método analítico y con elementos finitos. A modo de ejemplo, se muestran los resultados obtenidos en tres casos:

- El primer caso lo constituyen los valores del par de reluctancia que se obtienen por ambos métodos cuando parametrizamos la abertura de la ranura (parámetro  $s$ ). En la figura 5.99 se muestran los valores del par de reluctancia analíticos y por elementos finitos cuando variamos la abertura de la ranura desde 5 hasta 10 milímetros en pasos de 1 milímetro.

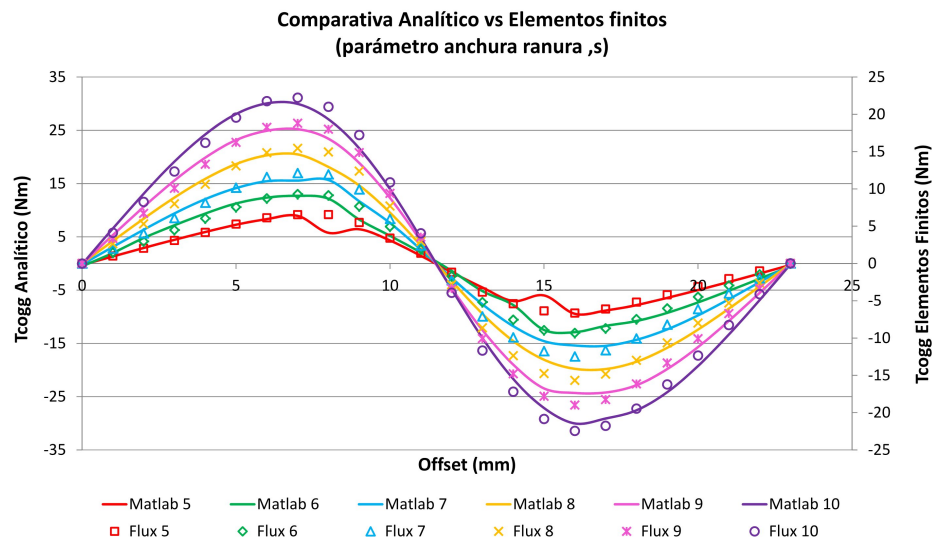


Figura 5.99: Comparativa del par de reluctancia analítico y por elementos finitos tomando  $s$  como parámetro

Podemos observar como, a mediada que la ranura es más ancha, el par de reluctancia aumenta, tanto en los resultados analíticos como en los de simulación por elementos finitos. Es decir, la dependencia del par de reluctancia con la abertura de la ranura es la misma con la formulación propuesta que con elementos finitos. No obstante los valores son diferentes, siendo mayores los analíticos que los de elementos finitos, como podemos observar al comprobar que la escala del eje vertical izquierdo es la correspondiente a los analíticos mientras que la del eje vertical derecho es la de los valores de simulación.

- En el segundo caso hemos tomado como parámetro el valores del entrehierro y lo hemos variado desde 4 hasta 10 milímetros en incrementos de 2 milímetros, calculando el correspondiente par de reluctancia. En la figura 5.100 se muestran los resultados obtenidos.

Los resultados obtenidos por ambos métodos muestran como, al aumentar el espesor del entrehierro, el par de reluctancia disminuye como

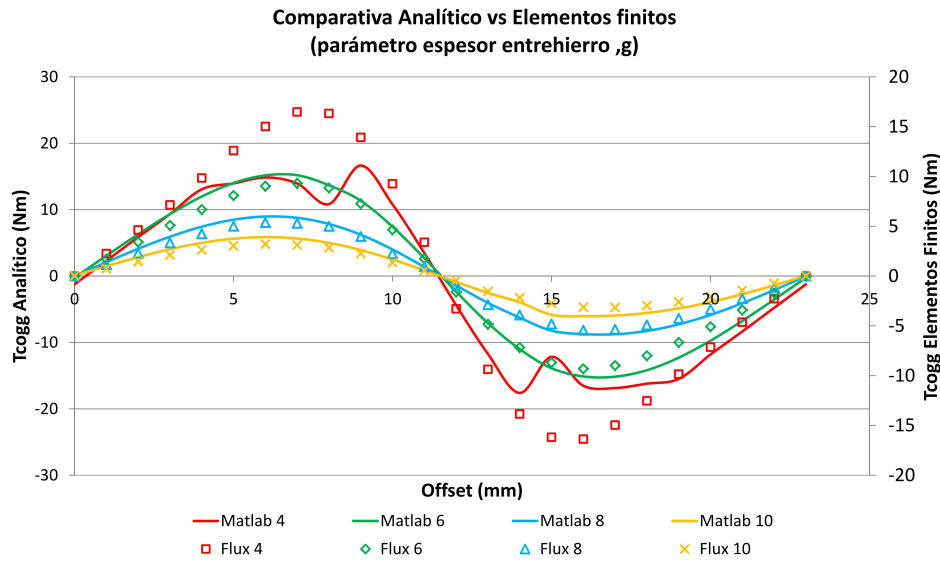


Figura 5.100: Comparativa del par de reluctancia analítico y por elementos finitos tomando  $g$  como parámetro

consecuencia de haber aumentado la reluctancia del circuito magnético de la máquina, disminuyendo con la misma proporción en el modelo analítico y en el modelo por elementos finitos.

- En el tercer caso el parámetro que hemos tomado es la profundidad de la ranura (parámetro  $h$ ) para valores de 5, 10, 15 y 21.5 milímetros. En la figura 5.101 se muestran los valores obtenidos del par de reluctancia mediante el método propuesto y por elementos finitos.

Igual que en los casos anteriores, el eje de la izquierda corresponde a la escala para los valores analíticos y el de la derecha para los de elementos finitos. Por elementos finitos, los resultados obtenidos son prácticamente iguales; este hecho viene a reforzar la idea de que, a partir de un valor de la profundidad de ranura, el que esta aumente no influye en los resultados, es decir, podemos aproximar la ranura estrecha por una ranura infinita.

En los resultados obtenidos por el método analítico, los valores del par de reluctancia se mantiene también prácticamente constantes para valores del parámetro de 5, 15 y 21.5, presentando una variación cuando la profundidad es igual a 10 milímetros. No obstante, esta variación es pequeña, en comparación con las variaciones originadas en el par de

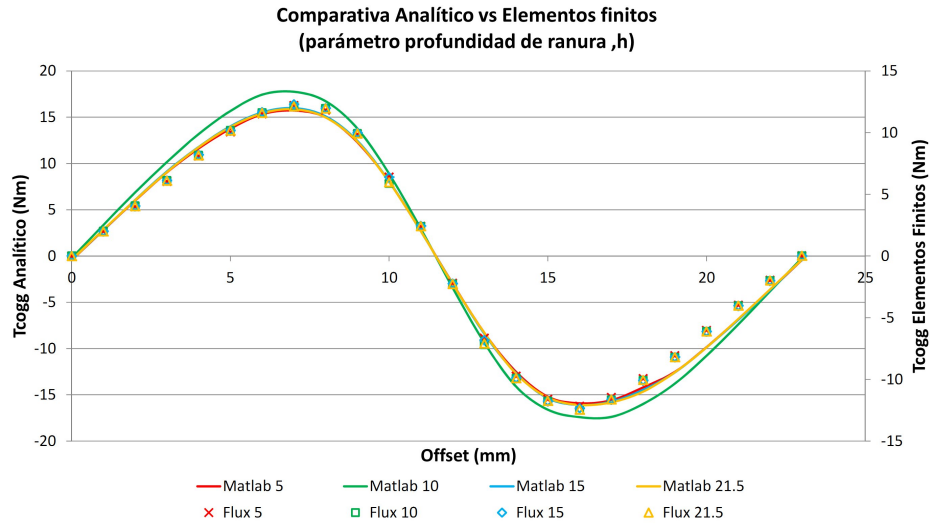


Figura 5.101: Comparativa del par de reluctancia analítico y por elementos finitos tomando  $h$  como parámetro

reluctancia como consecuencia de modificar la abertura de la ranura o el espesor del entrehierro, tal y como comprobábamos en los dos casos anteriores.

Aprovechamos este punto para comentar que los resultados analíticos se ven influenciados por el número de términos que consideremos en los sumatorios. Teóricamente, éstos se extienden hasta infinito; en la práctica tenemos que fijar un número máximo de sumandos. Ya que en las expresiones que manejamos aparecen funciones hiperbólicas y, más concretamente, senos y cosenos hiperbólicos, éstos tienden a infinitos cuando su argumento así lo hace, por lo que debemos fijar el número máximo de sumando de tal modo que las expresiones del seno y del coseno hiperbólico sean inferiores al valor máximo que podamos computar. En el caso de Matlab, este valor máximo viene dado por el parámetro *realmax* cuyo valor, para la versión de Matlab 2011a es de  $1.7977 \cdot 10^{308}$ .

En las expresiones obtenidas por el método analítico, existen términos que poseen el parámetro  $h$  en el numerador; el hecho de aumentar su valor ocasiona que disminuya el número de términos a considerar en el sumatorio correspondiente, disminuyendo la precisión del resultado obtenido. Puede que este comportamiento esté detrás de las diferencias

observadas entre los valores analíticos y los de elementos finitos cuando tomamos valores elevados de la profundidad de ranura.

A la vista de estos resultados podemos concluir que, aunque los valores del par de reluctancia analíticos no coinciden con los de elementos finitos, aquellos muestran una dependencia con la geometría de la máquina similar a la que exhiben éstos, pudiéndose emplear el método propuesto para estudiar como afectan al par de reluctancia la variación de determinados parámetros de su geometría, o en el estudio de técnicas que permitan disminuir el par de reluctancia de nuestra máquina.

Con el análisis que hemos realizado del par de reluctancia, damos por finalizado el estudio de nuestra máquina en dos dimensiones. El paso siguiente será analizarla en tres dimensiones.





# Capítulo 6

## Máquina en tres dimensiones

La última etapa en el estudio teórico de nuestra máquina es pasar del modelo en dos dimensiones hasta ahora desarrollado, a un modelo en tres dimensiones. Tal y como comentábamos en el apartado 4.1.1, el procedimiento que emplearemos para realizar esta transición, es el denominado modelo *cuasi-3D*, que consiste en considerar que la máquina está compuesta por varias máquinas de flujo axial con diferente longitud radial (varias láminas), estudiando cada una de las láminas mediante el modelo en dos dimensiones desarrollado.

El funcionamiento global de la máquina lo obtendremos como suma de las aportaciones de cada una de las láminas individuales, al considerar despreciable el flujo en la dirección radial. Este procedimiento lo vamos aplicar en el cálculo del flujo, de la fuerza electromotriz inducida y del par de reluctancia.

En la figura 6.1a) mostramos el principio del modelo cuasi-3D, donde se representa la situación para un número de láminas,  $N_{lam}$ , igual a 5, indicándose el radio interior, el radio exterior y el radio medio para la lámina 3. En la figura 6.1b) se muestra el área de integración resultante al aproximar cada uno de los sectores de corona circular (en color verde) por un paralelogramo de anchura el arco en el radio medio y de altura la diferencia entre el radio exterior y el radio interior (en color azul).

Los pasos necesarios para aplicar este modelo cuasi-3D son:

- Dividimos la máquina en  $N_{lam}$  láminas anulares en la dirección radial, todas ellas con el mismo espesor,  $e_{lam}$ . El espesor de cada lámina será igual al espesor total de la máquina dividido entre el número de láminas,

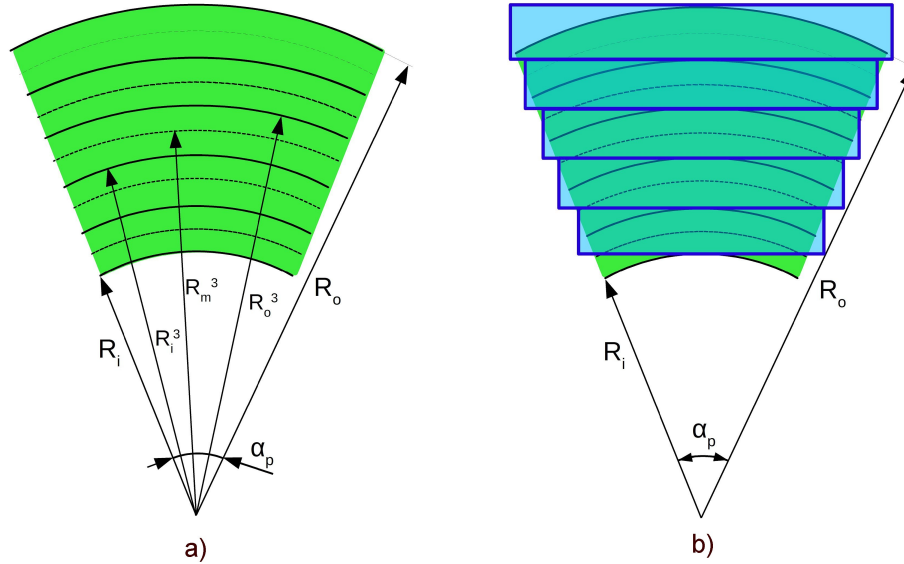


Figura 6.1: Principio del modelo cuasi-3D para 5 láminas

esto es:

$$e_{lam} = \frac{e_{maq}}{N_{lam}} = \frac{R_o - R_i}{N_{lam}}$$

donde  $e_{maq}$  es el espesor total de la máquina, igual a la diferencia entre el radio exterior ( $R_o$ ) y el radio interior ( $R_i$ ).

- Aplicamos la técnica de los subdominios a cada una de las láminas en su radio medio. Para ello, necesitamos determinar, en cada lámina, su radio interior, su radio exterior, el radio medio y el espesor del diente. Las expresiones para cada una de estas magnitudes son las siguientes, donde consideramos el orden de las láminas desde el interior hacia el exterior:

- Radio interior: El radio interior de cada lámina es igual al exterior de la anterior, excepto para la primera lámina que coincide con el radio interior de la máquina. Así:

$$R_i^{lamina\ j} = R_o^{lamina\ j-1}$$

y

$$R_i^{lamina\ 1} = R_i$$

- Radio exterior: El radio exterior de cada lámina será igual a su radio interior más el espesor de la lámina. Para la última lámina,

este radio exterior coincide con el de la máquina:

$$R_o^{lamina\ j} = R_o^{lamina\ j-1} + e_{lam}$$

y

$$R_o^{lamina\ N_{lam}} = R_o$$

- Radio medio: El radio medio de cada lámina será la semisuma de sus radios exterior e interior:

$$R_m^{lamina\ j} = \frac{R_i^{lamina\ j} + R_o^{lamina\ j}}{2}$$

- Paso de polo: El paso de polo de cada lámina será igual al arco de polo multiplicado por el radio medio de cada lámina:

$$\tau_p^{lamina\ j} = \alpha_p R_m^{lamina\ j}$$

El arco de polo sólo depende del número de polos, ya que es  $2\pi$  radianes dividido entre el número de polos de la máquina. Para el caso que nos ocupa, tenemos una máquina con 8 polos y, en consecuencia, un arco de polo de  $\pi/4$  radianes o 45 grados.

- Paso de ranura: El paso de polo de cada lámina es igual a tres veces el paso de ranura de la lámina:

$$\tau_p^{lamina\ j} = 3\tau_s^{lamina\ j}$$

- Espesor del diente: El espesor del diente de cada lámina lo hallaremos a partir del paso de ranura de la lámina:

$$\tau_s^{lamina\ j} = s + t^{lamina\ j}$$

al ser la abertura de la ranura constante para toda la máquina y para todas las láminas.

Una vez hallados estos parámetros en cada lámina, podemos aplicar la técnica de los subdominios a cada lámina trabajando en su radio medio, tal y como lo hemos aplicado en el capítulo anterior al estudiar la máquina en dos dimensiones.

Sólo tendremos que introducir un parámetro adicional relativo al desplazamiento del rotor respecto del estátor; en el modelo en dos dimensiones de la máquina, este desplazamiento lo controlamos mediante el

parámetro que denominamos *offset*, siendo éste una magnitud rectilínea y que medíamos en milímetros. Ahora y ya que la longitud del paso de polo de cada lámina aumenta a medida que la lámina es más exterior, el offset lineal ya no nos sirve, siendo necesario definir una magnitud análoga pero angular, a la que llamaremos  $\alpha_{offset}$ , la cual mediremos en grados o en radianes. Con la introducción del  $\alpha_{offset}$  logramos que todas las láminas se desplacen el mismo número de pasos.

Como en cada lámina vamos a aplicar el modelo en dos dimensiones, necesitamos traducir ese desplazamiento angular a un desplazamiento lineal, siendo la relación entre ambos el radio medio de la lámina correspondiente:

$$offset^{lamina\ j} = \alpha_{offset} R_m^{lamina\ j}$$

Una vez que hemos establecido las bases de aplicación del modelo cuasi-3D, vamos a aplicarlo en la obtención del flujo concatenado por la bobina, de la fuerza electromotriz inducida en ella y del par de reluctancia de la máquina. Para estas tres magnitudes, mostraremos los resultados obtenidos analíticamente variando el número de láminas, comparándolos con los obtenidos por elementos finitos.

## 6.1. Flujo concatenado por la bobina (3D)

En la figura 6.2 se muestran los valores del flujo concatenado por la bobina obtenidos al aplicar el modelo cuasi-3D para 1, 3, 5, 10, 20, 30 y 60 láminas y por elementos finitos.

A la vista de la gráfica podemos realizar las siguientes observaciones:

- En general, existe un buen ajuste entre los valores analíticos y los hallados por elementos finitos.
- En cuanto al modelo cuasi-3D, a partir de 3 láminas, no se aprecian diferencias al aumentar el número de láminas, siendo los resultados obtenidos para 3, 5, 10, 20, 30 y 60 láminas, exactamente iguales.
- Entre los resultados en dos dimensiones (1 lámina) y cuasi-3D (varias láminas) se observa que el modelo cuasi-3D proporciona valores máximos y mínimos del flujo ligeramente superiores (un 3.06 %).

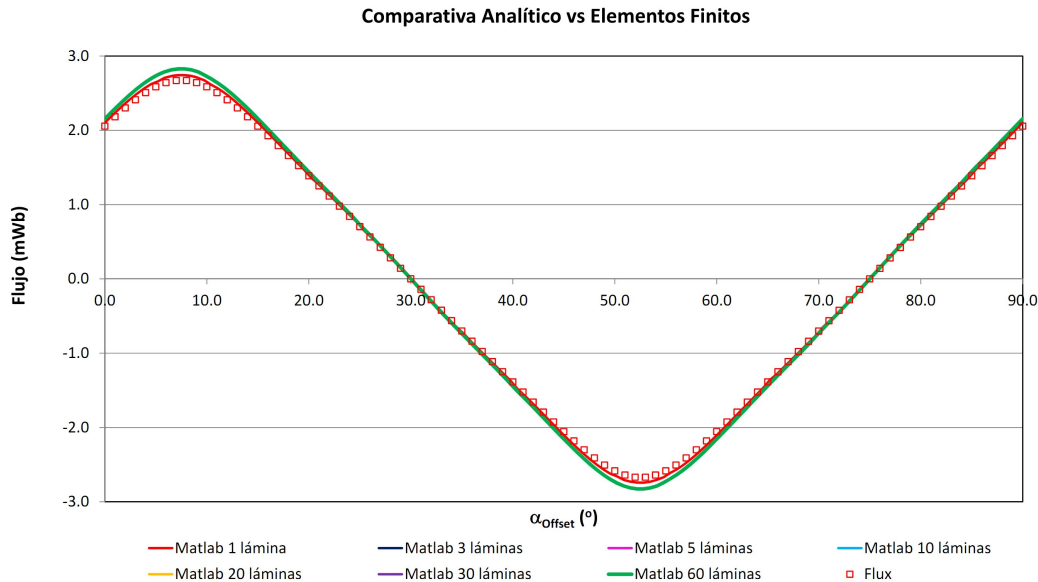


Figura 6.2: Comparación entre los valores del flujo concatenado por la bobina por el modelo cuasi-3D para diferente número de láminas y por elementos finitos

- Comparando los resultados del modelo cuasi-3D con los de Flux3D, existe un buen ajuste entre ambos conjuntos de valores, aunque los primeros presentan valores máximos y mínimos ligeramente superiores a los de simulación, del orden del 5.87%.

Podemos concluir que existe una buena concordancia entre resultados analíticos (tanto dos dimensiones como cuasi-3D) y valores de simulación, aunque parece que el modelo en dos dimensiones (1 lámina) se ajusta más a los resultados de simulación que el modelo cuasi-3D (varias láminas).

## 6.2. Fuerza electromotriz inducida (3D)

En la figura 6.3 se muestran los valores de la fuerza electromotriz inducida obtenidos al aplicar el modelo cuasi-3D para 1, 3, 5, 10, 20, 30 y 60 láminas y por elementos finitos.

Esta gráfica nos sugiere los siguientes comentarios:

- En general, existe un buen ajuste entre los valores analíticos y los hallados por elementos finitos.

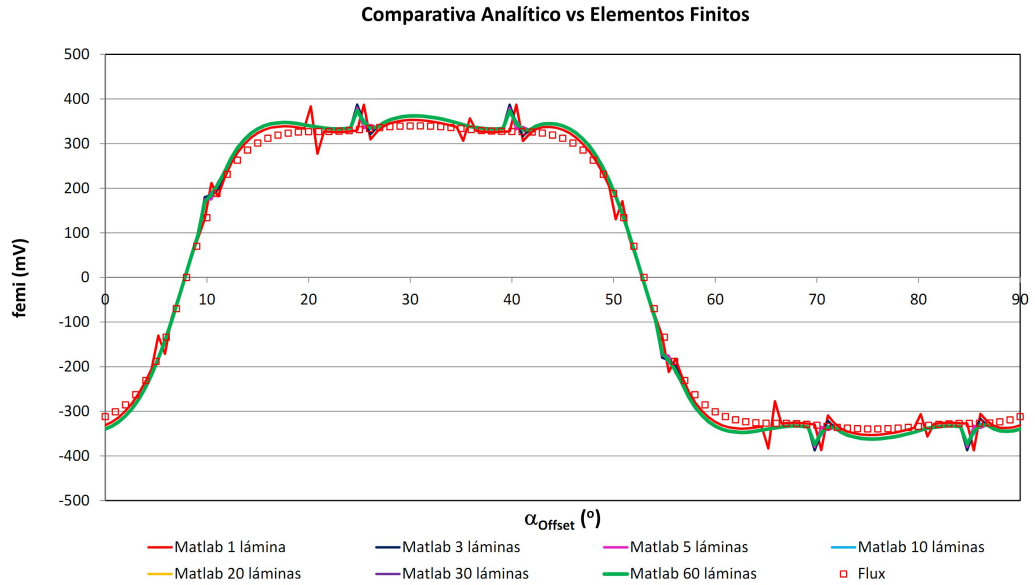


Figura 6.3: Comparación entre los valores de la fuerza electromotriz inducida obtenidos por el modelo cuasi-3D para diferente número de láminas y por elementos finitos

- En cuanto al modelo cuasi-3D, a partir de 3 láminas, no se aprecian diferencias al aumentar el número de láminas, siendo los resultados obtenidos para 3, 5, 10, 20, 30 y 60 láminas, prácticamente iguales.
- Entre los resultados en dos dimensiones (1 lámina) y cuasi-3D (varias láminas) se observa que el modelo cuasi-3D elimina la mayor parte de las oscilaciones que presentaba el modelo en dos dimensiones.
- Comparando los resultados del modelo cuasi-3D con los de Flux3D, como consecuencia de la eliminación de la mayor parte de las oscilaciones existentes en el modelo en dos dimensiones, los resultados del modelo cuasi-3D se ajustan mejor a la predicción por elementos finitos.

Podemos concluir que existe una buena concordancia entre resultados analíticos (tanto dos dimensiones como cuasi-3D) y valores de simulación, mejorándose dicha concordancia con la aplicación del modelo cuasi-3D.

### 6.3. Par de reluctancia (3D)

En la figura 6.4 se muestran los valores del par de reluctancia obtenidos al aplicar el modelo cuasi-3D para 1, 3, 5, 10, 20, 30 y 60 láminas y por

elementos finitos.

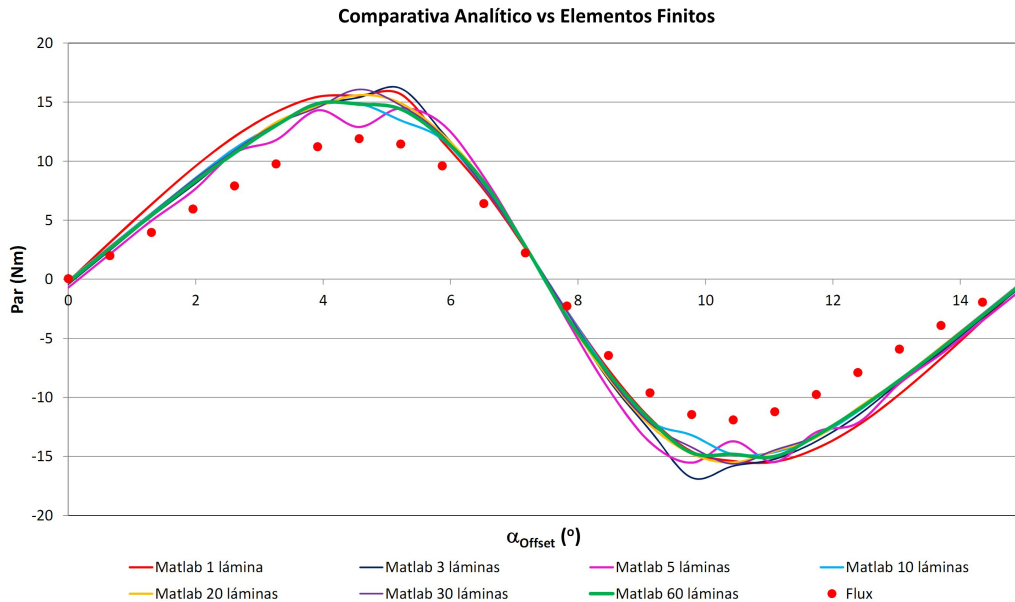


Figura 6.4: Comparación entre los valores del par de reluctancia obtenidos por el modelo cuasi-3D para diferente número de láminas y por elementos finitos

De la observación de la gráfica podemos comentar:

- Igual que sucedía con el modelo en dos dimensiones, los valores analíticos son superiores a los hallados por elementos finitos. Las causas que apuntábamos entonces para intentar justificar estas diferencias (discrepancias entre los valores analíticos y los de simulación de las componentes de la inducción, dependencia de estas componentes con la coordenada angular y incremento en la superficie de integración al emplear el arco en lugar de la cuerda) siguen siendo válidas para el modelo cuasi-3D.
- En cuanto al modelo cuasi-3D, a medida que se aumenta el número de láminas, la curva que representa el par de reluctancia es más uniforme, eliminándose oscilaciones presentes con un número reducido de láminas.
- Entre los resultados en dos dimensiones (1 lámina) y cuasi-3D (varias láminas) se observa que el modelo cuasi-3D y, en particular, con un número elevado de láminas, elimina las oscilaciones existentes en la curva del par, dando una respuesta que varía de una forma uniforme.

- Comparando los resultados del modelo cuasi-3D con los de Flux3D, como consecuencia de la eliminación de las oscilaciones existentes en el modelo en dos dimensiones, los resultados del modelo cuasi-3D con un número elevado de láminas presentan la forma que mejor se ajusta a la predicción por elementos finitos, aunque los valores numéricos no presentan buen acuerdo, tal y como hemos comentado.

Podemos concluir que, como consecuencia de aplicar el modelo cuasi-3D, se mejoran los resultados en comparación con los del modelo en dos dimensiones, aunque siguen existiendo diferencias importantes entre los valores numéricos analíticos y los de simulación por elementos finitos.

Una vez estudiada nuestra máquina en tres dimensiones, hemos procedido a construir un prototipo de la misma, sobre la que realizaremos ensayos para comprobar su funcionamiento. En el siguiente capítulo describimos el prototipo, los ensayos y los resultados obtenidos, comparándolos con los analíticos y con los de simulación.



# Capítulo 7

## Prototipo y ensayos

La última etapa que abordaremos en el estudio que estamos realizando será la obtención experimental de los principales valores de nuestra máquina y su posterior comparación con los hallados por el método analítico y mediante la simulación por elementos finitos.

Con este fin, se construyó un prototipo de máquina de flujo axial e imanes permanentes, compuesta por un rotor interno y dos estatores externos, así como un banco para realizar los correspondientes ensayos. Veamos cada uno de ellos.

### 7.1. Máquina prototipo

El rotor está formado por una estrella central en la que van insertados los imanes permanentes. La estrella central (figura 7.1a) está fabricada en acero austenítico y la componen un disco central y ocho radios de sección cuadrada uniformemente distribuidos. Por su parte los imanes son de neodimio boro, con forma de sector de corona circular de  $45^\circ$  de abertura, magnetizados axialmente y con dos rebajes lateral que permiten su inserción entre los nervios de la estrella central. Rematando el conjunto, un aro exterior cierra el rotor; el aro está fijado a los nervios de la estrella mediante tornillería en acero inoxidable (figura 7.1b).

El estátor de la máquina está compuesto de una carcasa fabricada en aluminio y un núcleo laminado de acero magnético. En el núcleo se han mecanizado las ranuras que alojarán las bobinas del devanado. El devanado es en una capa y está formado por doce bobinas con diez espiras cada una, dis-

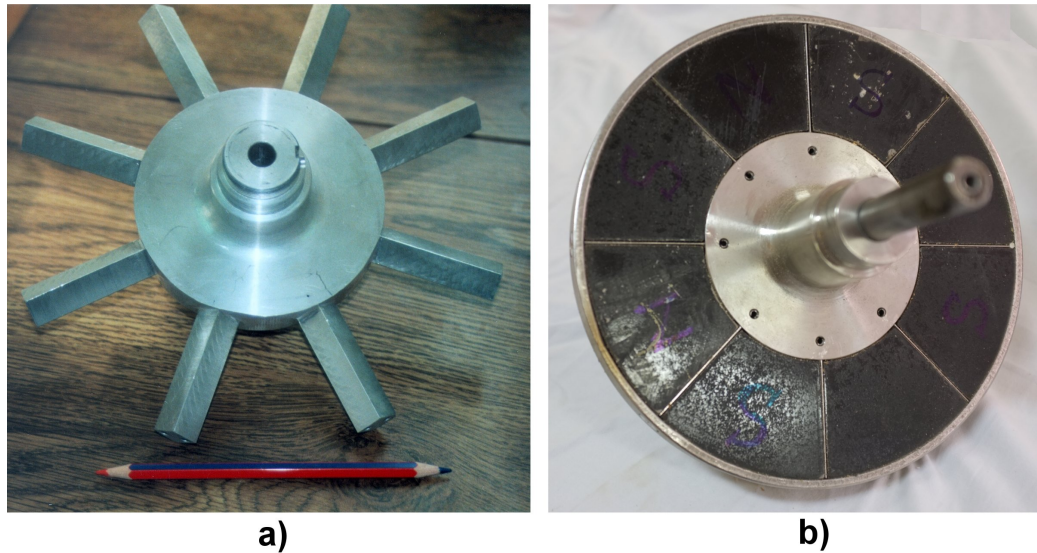


Figura 7.1: Rótor del prototipo construido: a) Estrella central. b)Rótor en su conjunto

tribuidas en tres fases, estando las bobinas de cada fase conectadas en serie. En la figura 7.2a) se muestra una vista frontal del estátor donde se aprecian las 24 ranuras radiales con las bobinas del bobinado. Para facilitar el montaje del conjunto se han dispuesto unos extractores laterales (figura 7.2b) que van fijados con tornillos en la parte exterior de la carcasa, pudiéndose retirar una vez montado el conjunto rotor-estátor.

En la figura 7.3 se muestra una vista del conjunto durante el proceso de montaje (a) y una vez finalizado dicho montaje (b). Para fijar el núcleo a la carcasa se han empleado unos puentes de acero inoxidable que van alojados en el fondo de las ranuras y se atornillan a la carcasa en el radio interior y en el exterior. En la figuras 7.3 se pueden apreciar dichos puentes.

La máquina tiene una potencia nominal de 1 kilovatio, una velocidad nominal de 400 r.p.m., una tensión eficaz de fase de 22 voltios y una corriente de fase de 17.42 amperios. La tabla 7.1 resume los principales parámetros y dimensiones del prototipo construido.

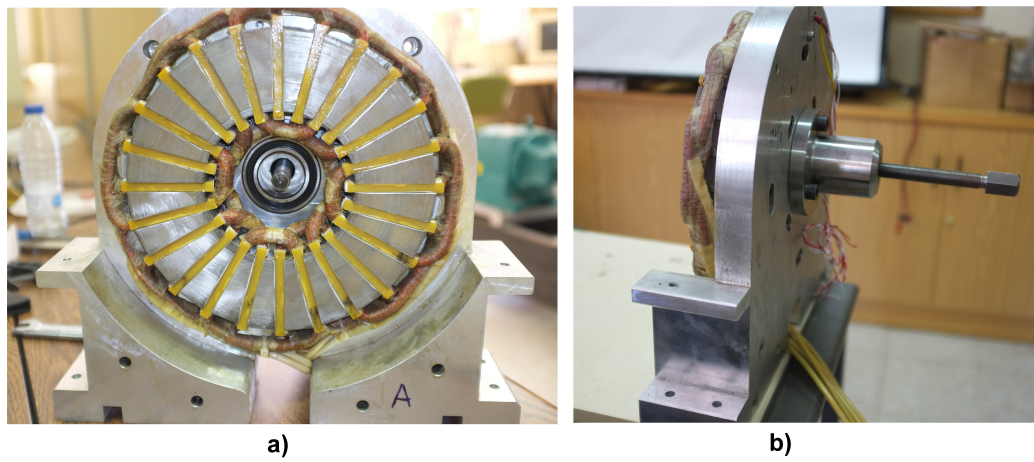


Figura 7.2: Estátor del prototipo: a)Vista frontal. b)Vista lateral

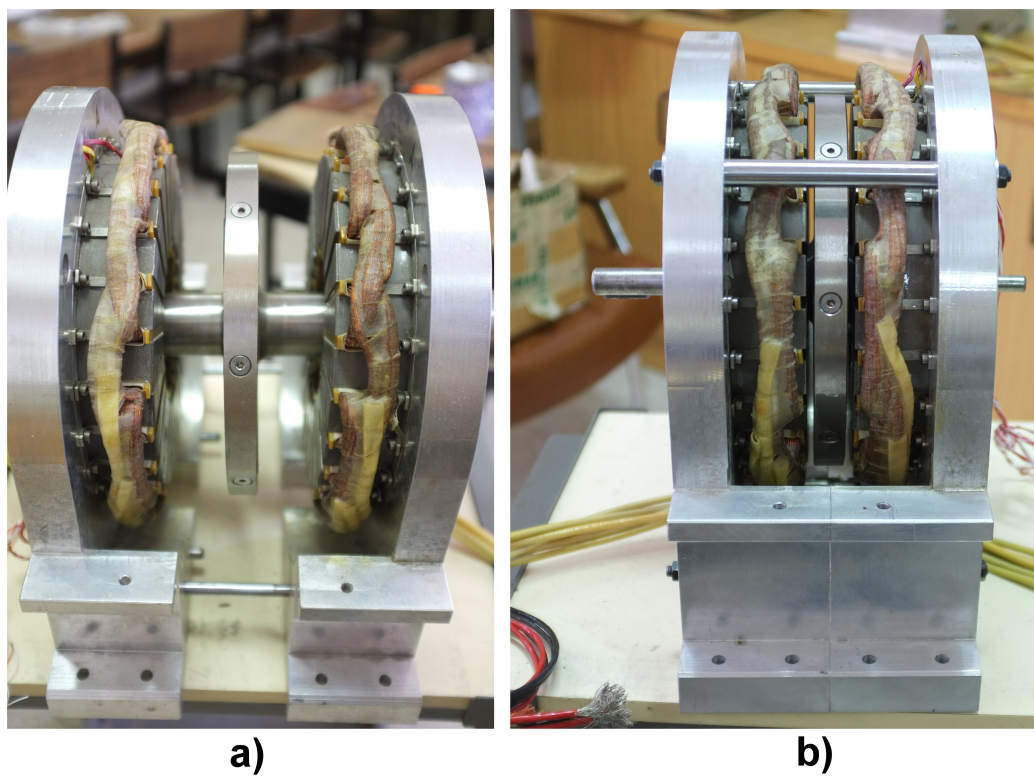


Figura 7.3: Conjunto de la máquina: a) Inicio del proceso de montaje. b) Montaje finalizado

Parámetro	Significado	Valor
$P$	Potencia nominal	1150 $W$
$n$	Velocidad nominal	400 $rpm$
$E$	Tensión de fase	22 $V$
$I_{ph}$	Corriente de fase	17.42 $A$
$T$	Par nominal	27.45 $Nm$
$N_{ph}$	Número de fases	3
$N_m$	Número de imanes	8
$l_m$	Grosor del imán	20 $mm$
$g$	Entrehierro mecánico	5 $mm$
$N_s$	Número de ranuras	24
$R_o$	Radio exterior	120 $mm$
$R_i$	Radio interior	60 $mm$
$B_r$	Campo remanente del imán	1.2 $T$
$s$	Abertura de la ranura	7 $mm$
$h$	Profundidad de la ranura	21.5 $mm$
$n_e$	Número de espiras por bobina	10
	Sección de los cables	5.22 $mm^2$

Tabla 7.1: Principales parámetros de la máquina prototipo

## 7.2. Banco de ensayos dinamométricos

El objetivo que nos fijamos fue la construcción de un banco de ensayos para máquinas eléctricas rotativas, que nos permita conocer en todo momento magnitudes como el par transmitido, velocidades de giro, rendimiento, medida de tensiones, corriente y potencias, etcétera, y de este modo caracterizar la máquina ensayada y poder mejorar, en la medida de lo posible, su diseño.

El banco de ensayos puede utilizarse en dos sentidos, un sentido (de derecha a izquierda) para ensayar un motor al que conectaremos a la red y de izquierda a derecha para ensayar el generador, en cuyo caso lo que se conectará a la red será el motor de arrastre que, en nuestro caso, hará las veces de viento.

A grandes rasgos, el banco está formado por los siguientes bloques (figura 7.4):

1. Motor de arrastre controlado por accionamiento universal capaz de controlar velocidad y par,
2. medidor de par o transductor,
3. motor o generador a ensayar,
4. carga electrónica y
5. sistema de adquisición de datos.

Veamos cada una de ellos.

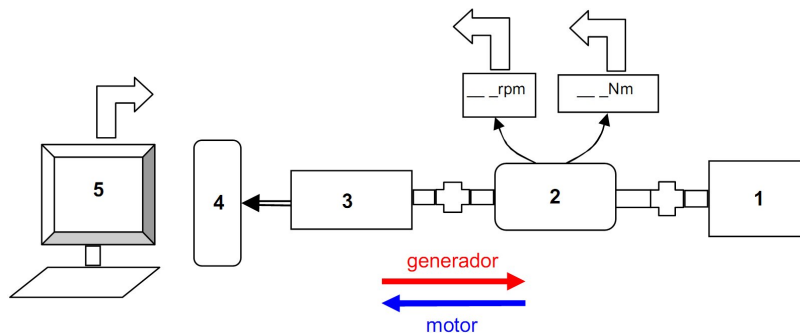


Figura 7.4: Esquema del banco de ensayos dinamométricos

### 7.2.1. Motor de arrastre controlado por un accionamiento

Emplearemos como motor de arrastre el servomotor Unimotor 190 UMD 200C (figura 7.5b) controlado por un variador UNI3403 de 22 kW de potencia (figura 7.5a).



Figura 7.5: Control Unidrive (a) y servomotor Unimotor (b)

El servomotor Unimotor es un motor síncrono trifásico "brushless" (sin escobillas) de ocho polos, construido con imanes permanentes de tierras raras que contribuyen a reducir la inercia del rotor y mejorar la respuesta dinámica del motor. Posee una fuerza contraelectromotriz senoidal, suministrando un gran par con un par de rizado mínimo.

La carcasa del motor, con múltiples aletas, está construida en aleación de aluminio y de una sola pieza lo que mejora la disipación de calor por conducción, radiación y convección. Además, la construcción monobloque, en una sola pieza, permite realizar con precisión el soporte de los cojinetes, alineando correctamente la carcasa y manteniendo uniformemente concéntrico el entrehierro.

Posee un encoder incremental (4096 ppr), que permite una conmutación integral de la realimentación de alta precisión y termistores PTC, que permiten una monitorización térmica y proporcionan protección contra las sobrecargas.

De entre las características que reúne el accionamiento Unidrive podemos subrayar las siguientes:

- Es un accionamiento universal de velocidad variable que puede operar en cinco modos: control tensión-frecuencia, control vectorial de lazo abierto, control vectorial de lazo cerrado, servo brushless AC y unidad regenerativa.
- Presenta conjuntos de parámetros de aplicación preconfigurados, denominados Macros, que permiten configurar el accionamiento en escasos minutos para una gran variedad de aplicaciones industriales.
- En cuanto a entradas y salidas, posee diferentes entradas y salidas, analógicas y digitales, programables y seleccionables en intensidad o en tensión, así como un relé programable.
- Ajuste sencillo por medio de un sistema de menús visible en una pantalla.

### 7.2.2. Medidor de par

Para la medida del par mecánico suministrado por el servomotor a nuestro generador, disponemos de un medidor dinámico de par y revoluciones de la empresa Lebow modelo 1804 (figura 7.6), con un par máximo de  $115 \text{ Nm}$ , soportando una velocidad de giro de  $27000 \text{ r.p.m.}$  Un amplificador digital de la empresa Daytronic, modelo 3278-F para excitar y registrar a este medidor y un indicador tacométrico de la empresa Graham&White, modelo MT7602 para registrar sus revoluciones. Al medir el número de revoluciones a la vez que el par, este equipo nos permite hallar la potencia mecánica aplicada a los generadores en el banco de ensayos.

### 7.2.3. Máquina a ensayar

Hemos intentado diseñar un banco de ensayos versátil y que pueda ser utilizado para ensayar diferentes tipos de máquinas, tanto motores como generadores. Para este trabajo de tesis, la máquina ensayada ha sido el prototipo descrito en el apartado anterior, la cual dispone de un encoder unido a su eje. De esta forma, podemos conocer la posición y la velocidad de giro del rotor.

### 7.2.4. Carga electrónica

Con el fin de poder variar de forma controlada las condiciones de funcionamiento de la máquina a ensayar, disponemos de una carga electrónica de



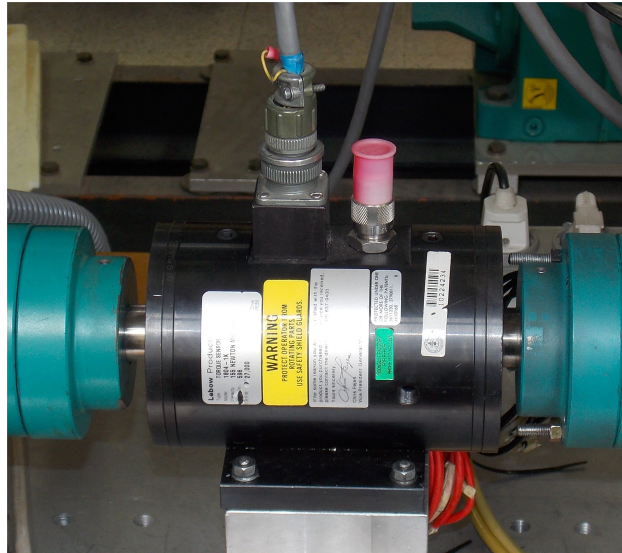


Figura 7.6: Medidor de par Lebow

continua de Agilent Technologies (figura 7.7). Consta de una unidad central (modelo N3300A) que aloja tres módulos de carga N3306A, de 600 W cada uno de ellos, con un rango en corriente de 0 a 120 amperios y en tensión de 0 a 60 voltios, dotando al conjunto de una potencia total de 1800 W.

Se puede realizar un control y una lectura de corriente, tensión y resistencia,



Figura 7.7: Carga electrónica Agilent Technologies

tanto de forma local, a través del teclado que tiene situado en el panel frontal, como de forma remota, a través de los protocolos de comunicaciones GPIB y RS232.



### 7.2.5. Sistema de adquisición de datos

Para la realización física de las medidas de tensión y de corriente generadas en el banco se dispone de un conjunto de sondas diferenciales y de sondas de corriente (con sus respectivos amplificadores).

Los datos procedentes del medidor de par, del variador, del encoder y de las correspondientes sondas de medida, son capturados por un sistema de adquisición de datos DSPACE, que consta de una tarjeta multifunción de control y adquisición de datos, un software para su visualización llamado CONTROLDESK, y MATLAB para el procesamiento de datos.

- Tarjeta controladora DS1103 PPC:

La DS 1103 PPC es una tarjeta que ha sido diseñada para reunir en un solo dispositivo todos los requerimientos para el control más moderno de pruebas y prototipos. Sus 36 canales A/D y sus 8 canales D/A proporcionan gran poder de cálculo. Se conecta a un ordenador mediante un puerto ISA de 16 bits.

Lleva incorporado un procesador RISC PowerPc a 400Mhz fabricado por Motorola para poder realizar rápidamente operaciones de coma flotante, además dispone de un interface para controlar encoders incrementales, tanto digitales como analógicos.

También cuenta con un DSP, el TMS32F240, fabricado por Texas Instruments, el cual está diseñado específicamente para el control de motores, contando con salidas PWM. Para aplicaciones en robótica, la tarjeta posee hasta 6 encoders incrementales digitales y un encoder analógico.

- Soporte de programas software:

La tarjeta y los microprocesadores que incorpora, tanto el PowerPc como el DSP se pueden programar gráficamente vía Simulink, gracias al RTI (Real-Time-Interface). El RTI transforma las simulaciones realizadas gráficamente con Simulink a código que se implementa en los procesadores de la tarjeta, los cuales ejecutan la simulación en tiempo real.

- Control Desk:

Control Desk es un programa que acompaña a la tarjeta de control que proporciona las herramientas para controlar, monitorizar y automatizar los experimentos creados en el entorno Dspace, en tiempo real, ya sea en simulaciones o en modelos con planta real.

Permite construir paneles virtuales de instrumentos totalmente configurables desde los cuales podemos tener acceso a toda la información sobre las variables y parámetros del experimento así como controlarlos en tiempo real. Estos datos pueden ser capturados para su posterior análisis con Matlab.

Para el diseño y simulación de un modelo se utiliza MATLAB/Simulink, pero desde el momento en que se implanta el modelo en el hardware, ControlDesk se encarga del control del modelo.

En la figura 7.8 se muestra una vista general del banco de ensayos, donde se destacan los elementos más importantes.

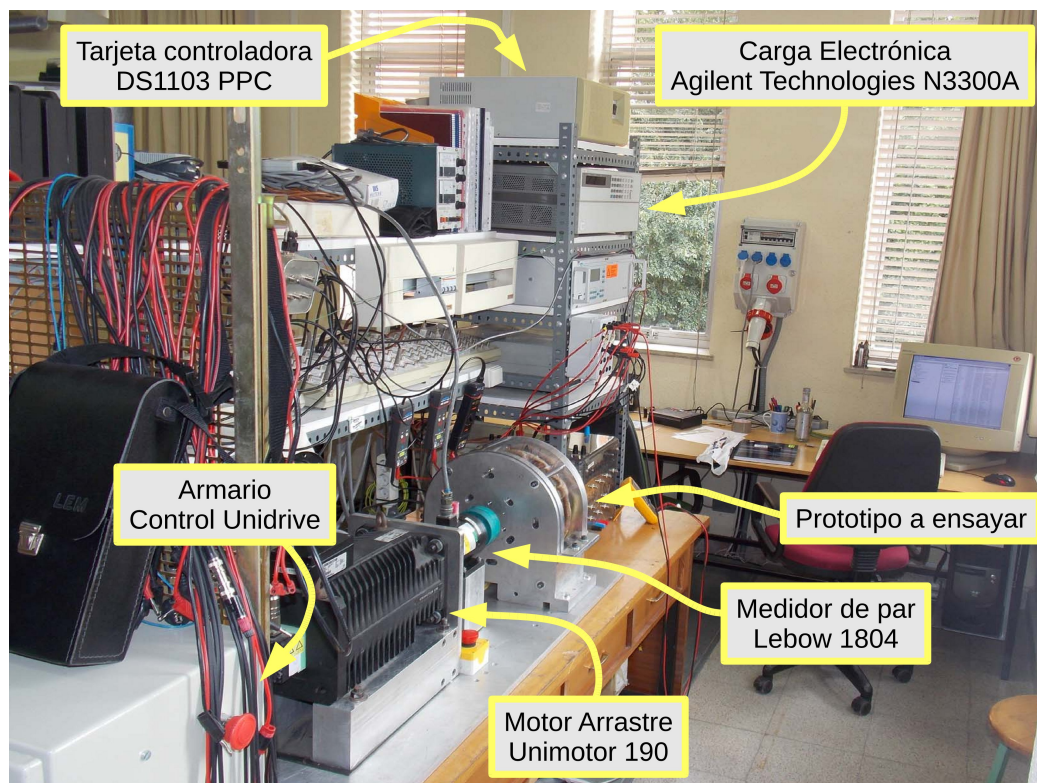


Figura 7.8: Vista general del banco de ensayos dinamométricos

## 7.3. Ensayos realizados

Una vez construido el banco, colocamos el prototipo en él y realizamos dos ensayos con el fin de medir la fuerza electromotriz inducida y el par de reluctancia. A continuación, mostramos los resultados obtenidos y los comparamos con los hallados mediante el Método de la Subdominios y por Flux3D.

### 7.3.1. Fuerza electromotriz inducida

Para realizar la medida de la fuerza electromotriz inducida, colocamos nuestra máquina en el banco de ensayos, dejamos en circuito abierto los extremos de las fases de cada uno de los estatores, hacemos girar el generador a su velocidad nominal (400 *r.p.m.*) y medimos la tensión en extremos de las tres fases de uno de los estatores. Si suponemos que las fases homónimas de cada estátor están conectadas en serie, la tensión que proporcionaría la máquina sería el doble de la que hemos medido. En la figura 7.9 se muestra la tensión que se induciría en la máquina cuando gira a su velocidad nominal, cuando las bobinas de los dos estatores estuvieran conectadas en serie.

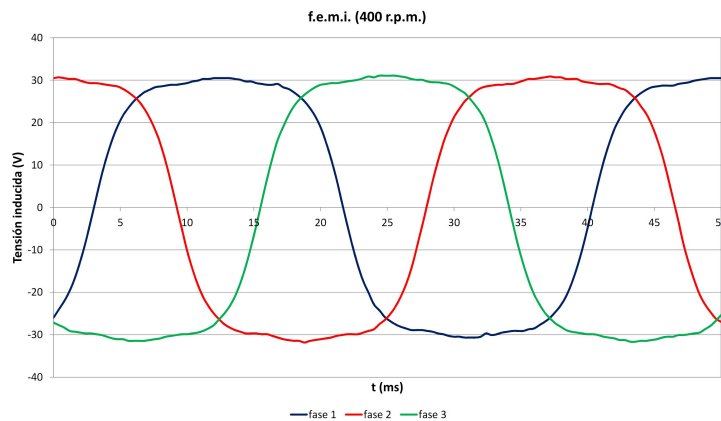


Figura 7.9: Medida de la f.e.m.i. en la máquina (estatores conectados en serie)

Se observa como las señales generadas constituyen un sistema trifásico equilibrado de tensiones (están desfasadas  $120^\circ$  entre sí y poseen la misma amplitud). El periodo de la señal es de  $37.5 \text{ ms}$  que corresponde a una frecuencia eléctrica de  $26.67 \text{ Hz}$ . Su pulsación eléctrica es  $2\pi$  veces la frecuencia, es decir,  $167.55 \text{ rad/s}$ . Si la dividimos entre el número de pares de polos ( $N_p = 4$ ), obtendremos la velocidad angular de rotación del rotor, que resulta de  $41.89 \text{ rad/s}$  o, lo que es lo mismo,  $400 \text{ r.p.m.}$ , como era de esperar.

En la figura 7.10 se compara la f.e.m.i. medida con las calculadas mediante el método propuesto y por elementos finitos. Los valores de f.e.m.i. que representamos para el método analítico, son los correspondientes a una bobina de una espira, multiplicados por el número de espiras que tiene cada bobina ( $N_e = 10$ ) y por el número de bobinas conectada en serie (ocho). Respecto a los valores representados correspondientes a la simulación por elementos finitos, sólo hemos tendido que multiplicar por el número de espiras por bobina, debido a que el programa Flux3D, al aplicar automáticamente las periodicidades y las simetrías definidas en su geometría, calcula la f.e.m.i. inducida en todo el bobinado, que hemos supuesto de una espira por bobina. Por último, respecto a los valores medidos, hemos tenido que cambiar la dependencia temporal por una dependencia con el ángulo, estando ambas magnitudes relacionadas por la velocidad de giro, que es conocida e igual a 400 *r.p.m.*

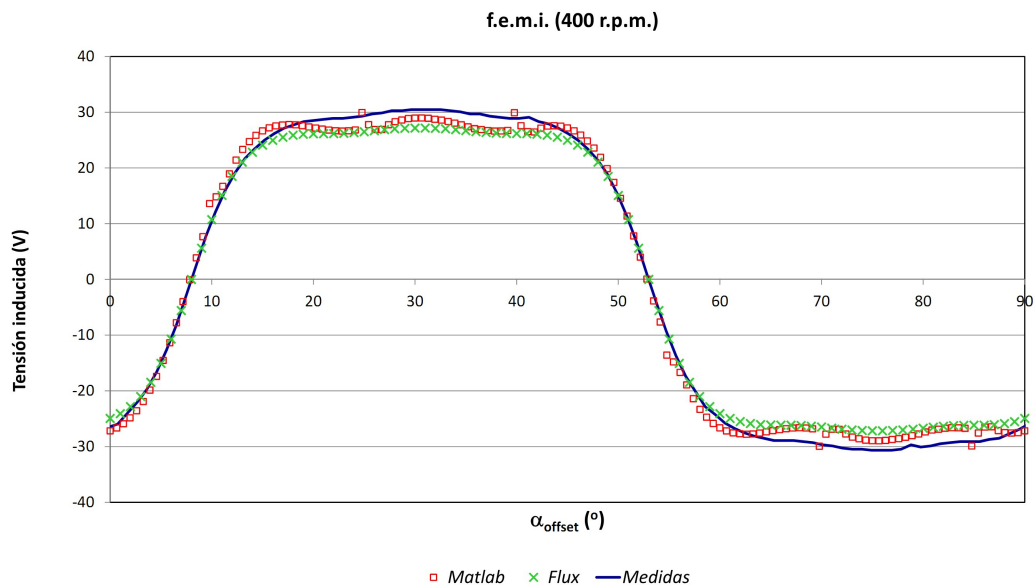


Figura 7.10: Comparación entre los valores de f.e.m.i. obtenidos por el método analítico, mediante elementos finitos y medidos en el prototipo ensayado.

A la vista de los resultados podemos observar que las tres curvas presentan un acuerdo excelente en cuanto a la curvatura de la f.e.m.i. en la zona ascendente, aunque difieren ligeramente en cuanto a la forma de la curva en la zona central de cada semiperiodo y en el valor al que tienden:

- En cuanto a la forma, la curva obtenida por el método analítico presenta pequeñas oscilaciones en esta zona central, mientras que la hallada por

elementos finitos y la obtenida en el banco de ensayos, presentan un comportamiento muy suave, creciendo ligeramente hasta alcanzar el máximo en el centro del semiperíodo para, a continuación, descender ligeramente.

- En lo referente al valor al que tienden, se ha calculado el valor rms de los tres conjuntos de datos y el porcentaje de desviación respecto al valor analítico, los cuales se muestran en la tabla 7.2. A la vista de los valores reflejados en dicha tabla, observamos que las desviaciones son pequeñas y asumibles, si consideramos las diferentes aproximaciones que hemos realizado.

Método	Valor RMS (V)	Desviación (%)
Matlab	25.16	—
Flux	23.86	-5.16 %
Medidas	25.98	3.25 %

Tabla 7.2: Valor rms de la fuerza electromotriz inducida

A la vista de los resultados hallados por los tres procedimientos (método analítico, simulación por elementos finitos y ensayo en laboratorio) podemos afirmar que existe un buen acuerdo entre ellos, validando el método empleado, la simulación programa y los ensayos realizados.

### 7.3.2. Par de reluctancia de la máquina

La medida del par de reluctancia presentado por la máquina ha sido laboriosa, como consecuencia de los valores elevados de par de reluctancia presentes en nuestra máquina.

Tal y como comentábamos en el apartado dedicado a la discusión de los resultados analíticos del par de reluctancia en dos dimensiones (apartado 5.6), un tramo ascendente en la curva de par implica un par que debo vencer, mientras que deberé contrarrestarlo si el tramo es descendente o, dicho de una forma más coloquial, tengo que hacer un par en el tramo ascendente y debo frenar a la máquina en el descendente.

La primera forma que nos planteamos para medir el par de reluctancia de nuestro prototipo fue colocarla en el banco de ensayos, dejar sus bobinas en circuito abierto y, con el servomotor, hacer girar a la máquina a una velocidad lenta. El medidor de par nos proporcionará el par realizado por el motor

de arrastre, que es igual al par de reluctancia de la máquina ensayada. La velocidad de giro que fijamos fue de  $0.5 \text{ r.p.m.}$ . El par nominal del servomotor es de  $54.9 \text{ Nm}$ , bastante superior al valor máximo del par de reluctancia de nuestra máquina. Los resultados de este ensayo no fueron satisfactorios ya que, aunque en el tramo ascendente de la curva de par, el motor de arrastre movía sin dificultad a nuestra máquina, en el tramo descendente aquel no era capaz de aguantar al rotor de nuestra máquina, precipitándose hasta la siguiente posición de equilibrio estable. La figura (7.11) muestra los valores medidos.

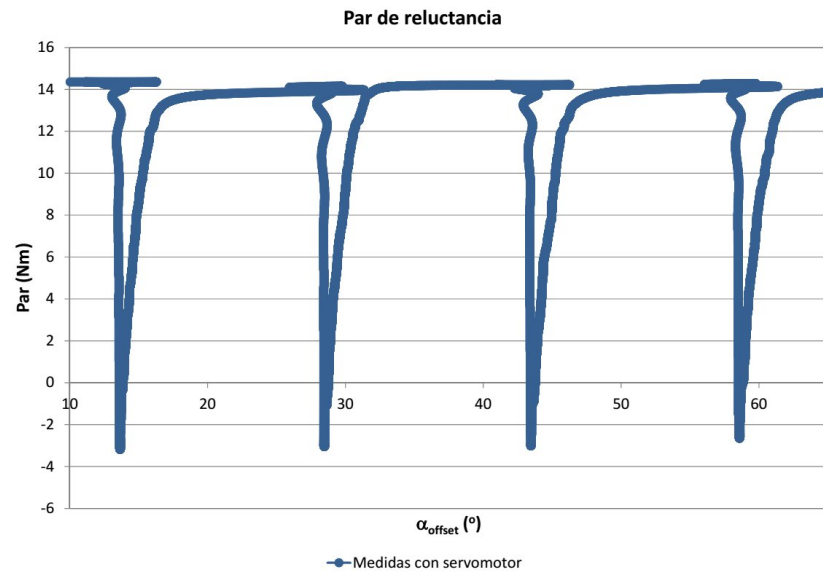


Figura 7.11: Par de reluctancia medido al mover el prototipo con el servomotor.

La segunda forma que nos planteamos para medir el par de reluctancia fue quitar el motor de arrastre y, con ayuda de una palanca, mover manualmente el eje de giro del medidor de par, el cual está unido, mediante unos acoplamientos, con el eje de nuestra máquina. Los resultados fueron similares a los anteriores aunque algo mejor: en el tramo ascendente movíamos sin dificultad el eje del conjunto pero, en el tramo descendente, el rotor de la máquina buscaba rápidamente su posición de reposo, aunque podíamos controlar algo mejor este descenso tan brusco. A fuerza de hacer ensayos fuimos mejorando los resultados aunque no lográbamos evitar unas pequeñas oscilaciones que se originaban en el tramo descendente.

Analizando el origen de estas oscilaciones, vimos que eran provocadas por los acoplamiento existentes entre el medidor de par y el eje de la máquina en ensayo. Estos acoplamiento son dentados, fabricados en acero y, para evitar la transmisión de vibraciones, poseen unos diente de caucho que van colocados entre los dientes de cada uno de los acoplamientos (figura 7.12a). Así, la unión entre dos dientes, uno de cada acoplamiento, no es directa sino que entre ellos existe un material blando que absorbe vibraciones. En un funcionamiento normal del banco, este acoplamiento elástico es ventajoso pero, en la medida del par, supone un problema ya que, aunque nosotros aguantemos el eje del medidor de par, el acoplamiento elástico permite un pequeño movimiento del rotor de nuestra máquina, el cual deforma al acoplamiento elástico y es el origen de las oscilaciones que observábamos. Para evitarlas, eliminamos los dientes de caucho y unimos rígidamente ambos acoplamientos mediante tornillería (figura 7.12b).

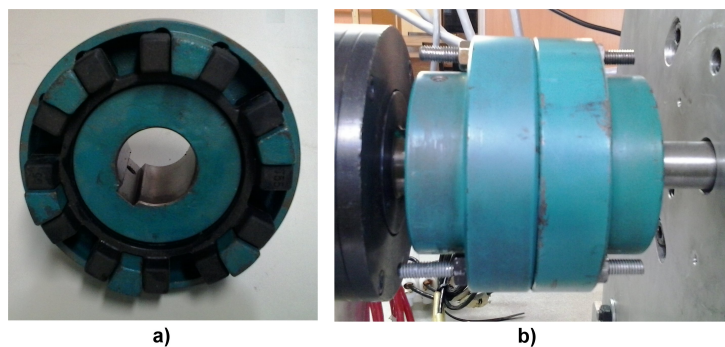


Figura 7.12: Acoplamientos del banco de ensayos: a) Acoplamiento elástico. b) Acoplamiento rígido modificado

Con esta modificación logramos mejorar los medida, ya que controlábamos mejor la posición del rotor. No obstante y a pesar de realizar numerosos ensayos, sólo conseguíamos una curva estable de par en un semiperíodo. En la figura 7.13 se muestra el montaje empleado para realizar la medida del par de reluctancia.

Los resultados obtenidos en la medida se muestran en la figura 7.14 bajo la leyenda “Medidas Totales”. Se puede apreciar como, para un semiperíodo, los resultados presentan un buen comportamiento, no siendo así en el siguiente semiperíodo. Esto es debido al proceso de medida: controlábamos el movimiento del rotor durante un recorrido del mismo pero, llegaba un momento en que la posición del rotor pegaba un pequeño salto. No obstante y si

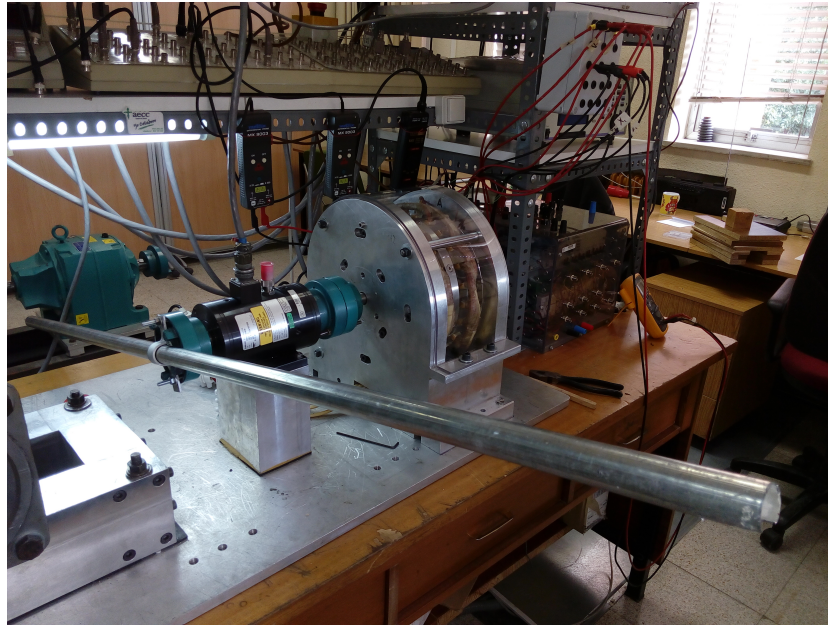


Figura 7.13: Procedimiento empleado en la medida del par de reluctancia

aplicamos la simetría que exhibe la curva teórica del par de reluctancia, con un semiperíodo es suficiente para poder realizar la representación completa de esta curva. Debido a que manejábamos muchos datos y no todos eran válidos, decidimos hacer un ajuste polinómico de orden cinco de los datos medidos en un semiperíodo que tuviera un aspecto bueno. Posteriormente, aplicando el polinomio de ajuste, calculamos los valores del par de reluctancia para posiciones prefijadas. En la figura 7.14 también se muestran los datos obtenidos al aplicar el polinomio de ajuste (leyenda “ajuste”).

A la vista de los resultados medidos y de los obtenidos por el polinomio de ajuste, detectamos ciertas anomalías que detallamos a continuación:

- La curva de par no es simétrica: el valor mínimo es, en valor absoluto, superior a  $15 Nm$  mientras que el máximo es del orden de  $13 Nm$ . La barra que utilizamos para mover el eje del conjunto está centrada y, en posición horizontal, no origina ningún par, según indicaba el medidor de par. Por ello, esta falta de simetría es consecuencia del procedimiento de medida, al ser éste manual. Pese a que realizamos numerosos ensayos, siempre observábamos esta característica.
- Los resultados mostrados corresponden a un ensayo realizado con giro en sentido decreciente, es decir, comenzábamos a medir en la posición



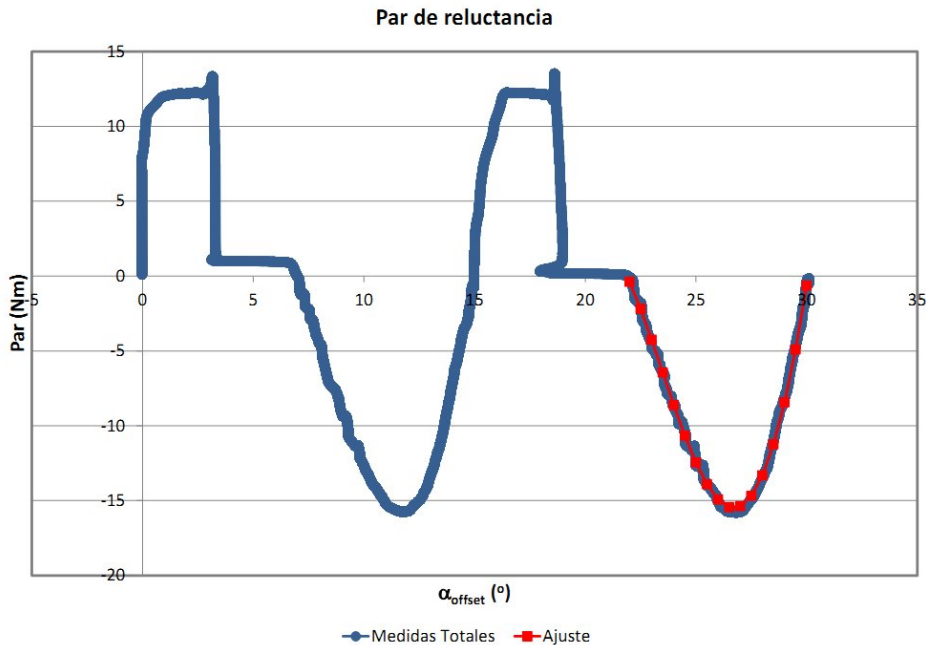


Figura 7.14: Par de reluctancia medido en el banco de ensayos: a) Valores instantáneos. b) Ajuste polinómico

de  $30^\circ$  y terminábamos en la de  $0^\circ$ . Se observa que inicialmente el par es cero y en  $15^\circ$  vuelve a ser cero, pero no es cero en la posición intermedia ( $22.5^\circ$ ) estando desplazado en torno a medio grado. Igual que antes y pese a repetir el ensayo varias veces, se seguía observando el mismo hecho.

En la figura 7.15 se compara el par de reluctancia obtenido mediante el polinomio de ajuste con los hallados mediante la técnica propuesta y por elementos finitos, donde para los valores hallados con el polinomio de ajuste hemos impuesto que el par sea nulo en la posición de  $7.5^\circ$ .

De la observación de la figura podemos apreciar que existen diferencias tanto en la forma de la curva como en los valores a los que tiende.

- Respecto a la forma de la curva, se observa que la curva medida posee una pendiente mayor en el tramo ascendente y menor en el tramo descendente que el de las curvas analítica y de elementos finitos. Ya que los valores de la pendiente ascendente y descendente están inversamente relacionados con la anchura del diente y de la ranura, respectivamente, se deduce que la máquina prototipo ve una ranura mayor que la que

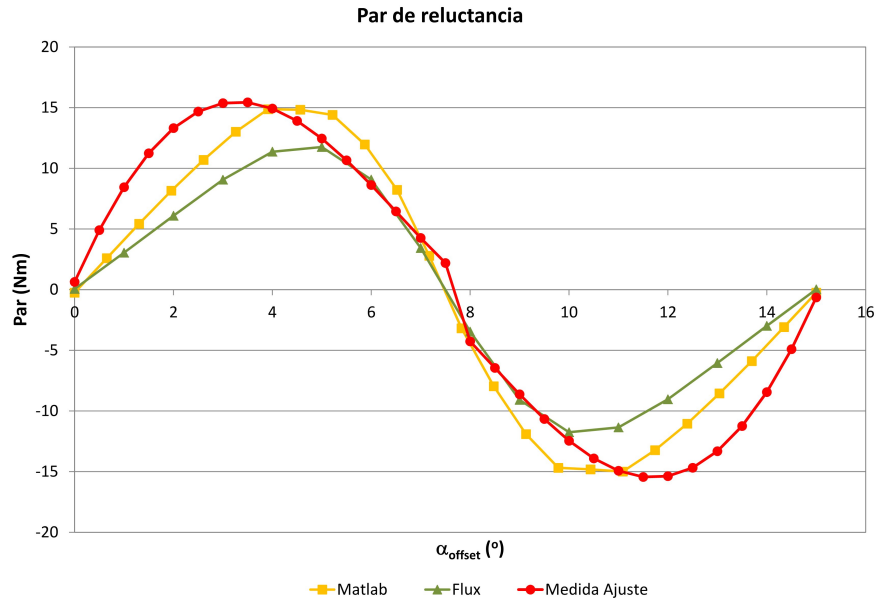


Figura 7.15: Comparación entre los valores del par de reluctancia obtenidos por el método analítico, mediante elementos finitos y medidos en el prototipo ensayado.

físicamente posee. Pensamos que la causa que origina este efecto es la saturación del diente en las zonas próximas a las ranuras.

- Respecto a los valores a los que tiende, el par medido presenta valores algo superiores a los hallados por el método propuesto (un 3.8%) y muy superiores a los obtenidos por elementos finitos (31.3%). El hecho de haber considerado en la simulación que el material magnéticamente es ideal, puede ser el motivo por el que el par hallado por elementos finitos sea muy inferior al medido. Finalmente, pensamos que el que el par hallado con el método propuesto sea próximo al medido es una mera coincidencia.

A la vista de los resultados obtenidos, creemos que el procedimiento de medida del par de reluctancia afecta a los valores obtenidos, siendo necesario buscar otro procedimiento que nos garantice unas mejores medidas y hacer que éstas no dependan de la persona que mueva la palanca, como podría ser el empleo de una multiplicadores colocada entre el medidor de par y el prototipo a ensayar, utilizar algún procedimiento mecánico que permita regular el ángulo de giro de la palanca que mueve el eje del conjunto o el empleo de muelles que permitan tener un ajuste más fino y más progresivo de la posición del eje.

# Capítulo 8

## Conclusiones y trabajo futuro

El objetivo global que nos marcamos al principio de este trabajo fue realizar un estudio del campo magnético en vacío de una máquina de flujo axial e imanes permanentes, desde tres ángulos diferentes pero complementarios:

- Desde un punto de vista teórico, utilizando una técnica analítica como es el método de los subdominios,
- desde un punto de vista computacional, mediante el empleo de un programa de simulación por elementos finitos, y
- desde un punto de vista empírico, realizando ensayos en el laboratorio a un prototipo de nuestra máquina.

En general, los tres enfoques han llegado a un acuerdo razonable en la mayoría de las magnitudes analizadas, siendo necesario pulir algunos aspectos en lo referente al par de reluctancia. Por ello pensamos que el objetivo fijado se ha cumplido de una forma satisfactoria.

### 8.1. Conclusiones

El trabajo realizado ha sido extenso, tanto física como temporalmente, pudiéndose extraer las siguientes conclusiones:

- Se han descrito los diferentes tipos de máquinas de imanes permanentes, clasificándolas de acuerdo al camino seguido por el flujo, enumerando las principales ventajas e inconvenientes de las diferentes topologías.

- Se ha realizado un repaso de las principales técnicas analíticas empleadas para el cálculo del campo magnético con condiciones de contorno, agrupándolas en tres categorías, coeficiente de permeancia, transformación conforme y método de los subdominios. Para cada una de ellas, se han enumerado las contribuciones más importantes dentro de la literatura conocida por el autor de la tesis.
- Se ha desarrollado el planteamiento general del Método de los Subdominios y se ha ilustrado su utilización aplicándolo a varios ejemplos sencillos.
- Después de realizar la descripción de la máquina objeto de estudio, se ha obtenido una geometría equivalente en dos dimensiones aplicando el modelo cuasi-3D. Con esta geometría en dos dimensiones hemos iniciado el estudio de la máquina, el cual le podemos desglosar en los siguientes puntos:

- Se ha comenzado el estudio trabajando con una máquina lisa, estando representado el efecto del ranurado a través del coeficiente de Carter. En esta máquina lisa hemos obtenido un modelo equivalente a la geometría real reemplazando los nervios oblicuos del rotor por un entreimán recto, de tal forma que ambas configuraciones originen la misma distribución del potencial magnético escalar en la superficie del rotor.

Se han obtenido las expresiones del potencial magnético escalar en las diferentes regiones de la máquina lisa mediante la resolución directa de la ecuación de Laplace y la aplicación de las condiciones de contorno del problema. Se han comparado los valores hallados con los obtenidos mediante el software de simulación Flux3D, comprobando la existencia de un buen acuerdo entre ambos conjuntos de valores.

Para esta máquina y con el fin de reflejar el comportamiento real de la máquina, se ha definido, en la superficie del imán, una banda de transición del potencial magnético escalar a la que hemos denominado “banda de desmagnetización” y que hemos modelado matemáticamente con la ayuda de la tangente hiperbólica. Empleando el Método de los Subdominios, hemos obtenido los parámetros de la banda de desmagnetización que proporcionan un buen ajuste entre valores analíticos y resultados de simulación por elementos finitos.

- Una vez estudiada la máquina lisa se ha realizado el estudio de la

máquina ranurada bidimensional. Para ello se han definido cuatro casos en función de la posición relativa del rotor respecto de las ranuras del estátor. Para cada uno de los casos se han definido las regiones o subdominios que las componen, obteniéndose las expresiones del potencial magnético escalar, componentes de la inducción y expresiones del flujo en cada una de ellas. Los resultados obtenidos se han comparado con los calculados mediante Flux3D, existiendo un buen acuerdo entre ambos.

Se ha definido una bobina de paso tres ranuras y se han obtenido las expresiones del flujo que concatena dicha bobina para todas y cada una de las posiciones relativas que puede ocupar la bobina en relación con el rotor de la máquina, obteniéndose los valores numéricos para unos datos concretos de la geometría, los cuales presentan un buen ajuste en comparación con los hallados mediante elementos finitos.

Aplicando la ley de Faraday y a partir de los valores del flujo concatenado por una bobina, se han obtenido los correspondientes valores de fuerza electromotriz inducida en la bobina. La simulación realizada por elementos finitos indica que los valores hallados poseen un buen acuerdo con los obtenidos de la simulación.

A partir del tensor de tensiones de Maxwell, se han determinado las expresiones del par de reluctancia de la máquina para cada una de las regiones de los casos considerados. De acuerdo a la geometría de nuestra máquina, se han calculado numéricamente sus valores y se han comparado con los proporcionados por el programa Flux3D. De la comparación de ambos conjuntos de valores se ha concluido que el método propuesto origina valores del par de reluctancia superiores a los de la simulación por elementos finitos. No obstante, se ha comprobado que la dependencia de este parámetro con cambios en la geometría es la misma para el método propuesto y para la simulación por elementos finitos, siendo válido nuestro método en procesos de optimización o reducción del par de reluctancia.

- Una vez estudiada la máquina ranurada en dos dimensiones y mediante la aplicación del modelo cuasi-3D, se ha estudiado la máquina en tres dimensiones. Se ha explicado los pasos del modelo cuasi-3D y se han obtenido resultados del flujo concatenado por la bobina, de la fuerza electromotriz inducida en ella y del par de reluctancia exhibido por la máquina, variando el número de láminas en que modelamos la geometría tridimensional. Se han comparado los resultados analíticos con los

resultados de simulación, observándose que, en general, el aumento del número de laminas mejora la respuesta analítica al compensar respuestas o comportamientos puntuales. Se sigue manteniendo un buen ajuste en los valores del flujo y de la fuerza electromotriz inducida y se mantienen las discrepancias en cuanto a los valores del par de reluctancia obtenidos por ambas formulaciones.

- Como punto final del estudio y con el fin de validar la formulación propuesta, se ha procedido a medir en un prototipo de laboratorio, la fuerza electromotriz inducida y el par de reluctancia, cotejando los valores medidos con los hallados por el Método de los Subdominios y por elementos finitos. Se ha obtenido un buen ajuste entre los conjuntos de datos de la fuerza electromotriz inducida y discrepancias en el par de reluctancia. Las primeras sirven para, a nuestro juicio, validar la metodología propuesta, mientras que las segundas nos indican que tanto en la formulación como en la medida del par de reluctancia se deben realizar mejoras.

## 8.2. Trabajo futuro

El trabajo realizado nos ha permitido conocer, desarrollar y apreciar el Método de los Subdominios en el estudio de máquinas eléctricas. Las dificultades encontradas, su superación, la buena concordancia entre la mayoría de los resultados obtenidos y los hallados por otras vías y la falta de un buen ajuste entre unos pocos, supone una puerta abierta a futuros trabajos de investigación. Entre los posibles trabajos que pueden ser desarrollados a partir de éste, destacamos los siguientes:

- Plantearse la posibilidad de realizar un estudio similar al presentado pero empleado un sistema de coordenadas más acorde a la geometría de la máquina, como es el sistema de coordenadas cilíndricas. Puede que el empleo del sistema de coordenadas cartesianas puede ser una de las causas que originan las discrepancias obtenidas entre los valores del par de reluctancia.
- Desarrollar alguna técnica de medida en el laboratorio que permita obtener buenos resultados en la medida del par de reluctancia. En el texto apuntábamos algunas ideas como son el empleo de una multiplicadora o de algún dispositivo mecánico que permita regular y controlar el giro del eje. Con el procedimiento que hemos presentado, la persona que realiza el ensayo puede influir en los resultados del mismo de forma decisiva.

- Aplicar el Método de los Subdominios a otras topologías de máquinas de flujo axial muy empleadas por su reducido par de reluctancia, como son las máquinas con ranuras inclinadas y las máquinas con un número no entero de ranuras por polo y por fase.
- Aplicar el Método de los Subdominios en el estudio en carga de máquinas de imanes permanentes. Sería necesario trabajar con el potencial magnético vectorial y habría que modificar el planteamiento general, ya que existirían regiones sin corrientes (las propias del entrehierro) y regiones con corrientes (las correspondientes a las ranuras).





# Apéndice A

## Publicaciones Científicas

Proceedings of the Second IASTED International Conference  
POWER AND ENERGY SYSTEMS (EuroPES)  
June 25-28, 2002, Crete, Greece

## COGGING TORQUE REDUCTION IN AN AXIAL FLUX BRUSHLESS PERMANENT MAGNET MACHINE

J.M. PÉREZ, B. ROJO, U. DOMÍNGUEZ, R. URUEÑA, J. RODRÍGUEZ, S. CAVIA, F.A. FRECHOSO  
University of Valladolid  
Francisco Mendizábal, n° 1, 47014 Valladolid  
Spain

### ABSTRACT

Cogging torque is perhaps the most annoying parasitic element in a permanent magnet machine design because it represents an undesirable output. As a result, techniques to reduce cogging torque play a prominent role in machine design. In this paper, two different methods that can be used to reduce cogging torque are discussed, both theoretically (using finite element method FEM), and empirically (measuring it in several prototypes).

### KEY WORDS

Cogging torque, permanent-magnet, finite-element method.

### 1. INTRODUCTION

The applications of a brushless machine vary from hard disk driver to a variety of industrial uses. We've designed a brushless permanent magnet generator that will be use in small wind energy applications. We have chosen an axial flux machine because of their high torque/weight ratio. The machine can have a slotless stator [1][2] or and slotted one. However, the cogging torque of the slotted machines is usually much larger than that of the conventional ones. This modifies the behaviour of the machine, since, when cogging torque is large could be difficult starting. Since we want to use the designed machine in areas with a medium or low wind speed, we need to reduce the cogging torque as much as possible.

In the process of designing a machine there is a set of equations which related the different parameters among them. With the purpose of minimizing the cogging torque, we had fixed all the parameters but the number of slots and their geometry.

### 2. COGGING TORQUE REDUCTION

A Geometry of the machine

The designed machine is a three phases one, axial flux machine, with an inner rotor and two outer stators. The rotor has 8 permanent magnets, which are axially magnetised, separated each other by non-magnetic material. The stator cores, manufactured with iron-based amorphous alloy, are slotted. Their geometry and dimensions are showed in the figure 1 and table 1, respectively.

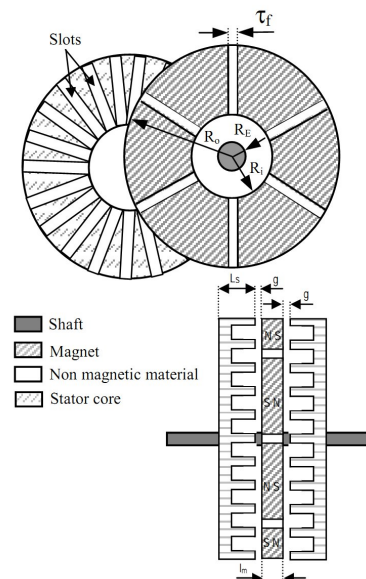


Figure 1

Table 1

Magnitude	Dimension
Shaft radius ( $R_r$ )	6 mm
Inner radius ( $R_i$ )	60 mm
Outer Radius ( $R_o$ )	120 mm
Magnet spacer width ( $L_s$ )	5 mm
Stator axial length ( $L_s$ )	30 mm
Gap ( $g$ )	5 mm
Magnet length ( $l_m$ )	20 mm

### B Cogging torque in a brushless machine

Consider the prototype machine cross section shown in figure 2. The structure shown is assumed to repeat in both directions until the both ends meet halfway around the machine, giving a finite number of magnet poles. For simplicity, only slots for one phase are shown.

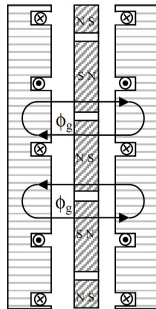


Figure 2

The torque of the machine is calculated by the rate of the coenergy. The expression of the torque for our model is as follows [3]:

$$T = \left. \frac{dW_c}{d\theta} \right|_{i=cte} = \frac{1}{2} i^2 \cdot \frac{dL}{d\theta} - \frac{1}{2} \phi_g^2 \cdot \frac{dR}{d\theta} + Ni \cdot \frac{d\phi_g}{d\theta}$$

being  $L$  the self inductance of the coils and  $i$  its current,  $\phi_g$  the air gap flux,  $N$  the number of turns and  $R$  is the air gap reluctance. In this expression, the first and second terms are the reluctance torque associated with the coils and magnets, and the last term is the alignment torque due to the mutual flux linking the magnet and the coils. The second term has a minus sign because reluctance is inversely proportional to inductance, being first and second addend equivalents in terms of torque production. Since the self-inductance is constant [3], the first term is zero, leaving only the second terms as the only reluctance torque component. This is the called cogging torque:

$$T_{cog} = -\frac{1}{2} \phi_g^2 \cdot \frac{dR}{d\theta}$$

Then if we want to reduce the cogging torque of our machine we have to make the reluctance seen by the flux gap constant with respect to position, since  $\phi_g$  cannot be reduced because it produces the desired mutual torque.

### C Analysis of prototypes

Since the cogging torque is due to the interaction between the rotor magnets and the stator slots, is possible to achieve a cogging torque reduction modifying the

inclination (skewing) or the number of slots. For this reason, we've designed the prototypes showed in table 2:

Prototype	Number slots	Inclination
Prototype 1	24	0°
Prototype 2	24	15°
Prototype 3	24	7.5°
Prototype 4	24	20°
Prototype 5	24	30°
Prototype 6	24	40°
Prototype 7	27	0°

In the prototypes 1 to 6 the number of slots is fixed and equal to 24 (1 slot per pole and phase) and the parameter we can vary is the inclination of the slots. The inclination is the angle set up by the centre of the slot and the radial direction (angle  $\alpha$  at the figure 3). We'd varied this angle from 0° to 40°. The last prototype has non-skewing slots but the number of slots has been increased in 1 slot per phase (27 in total).

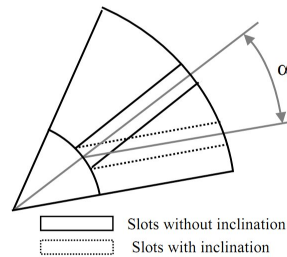


Figure 3

Each prototype has been analysed qualitatively and analytically with the 3-dimension (3D) finite element method (FEM) simulation software FLUX3D. Finally the prototypes 2, 3 and 7 have been made and their cogging torque has been measured.

Prototype 1: 24 slots and 0°

The figure 4 shows an axial view of the prototype 1, where we can appreciate the stator with 24 slots arranged radially.

We have computed the cogging torque by 3D FEM varying the angular position in 1-degree steps. We've observed that this torque is periodic with a period of 15° (15° is the angular separation between two consecutive slots).

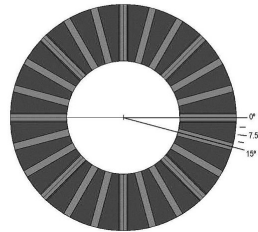


Figure 4

This cogging torque is showed in figure 5. Its amplitude is about 10,44Nm, which is very long, since the machine nominal torque is 14Nm. We can also see that there are positions of no torque ( $0^\circ$ ,  $7.5^\circ$  and  $15^\circ$ ), one positive torque interval (from  $7.5^\circ$  to  $15^\circ$ ) and another negative torque interval (from  $0^\circ$  to  $7.5^\circ$ ).

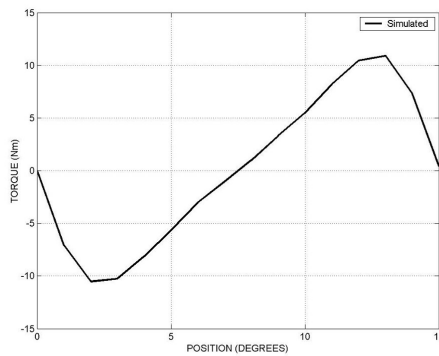


Figure 5

At the  $0^\circ$  position (figure 6, where we've brought out a magnet) there is no torque because the rotor is aligned with a maximum amount of stator teeth and the reluctance seen by each magnet flux is minimized. This position is called aligned position. If the rotor is displaced to either side of the aligned position the reluctance increases because more air appears in the flux path between the magnet and the stator. This increase in reluctance generates a restoring torque (a negative one) that tends to return the rotor towards the  $0^\circ$  position. Therefore the  $0^\circ$

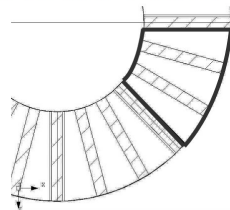


Figure 6

position is a position of stable equilibrium.

At the  $7.5^\circ$  position (figure 7) there is no torque because the magnetic reluctance of the flux path is at its highest. If the rotor is displaced to either side of this position, a torque that tends to displace it even further appears. Then, this position is an unstable equilibrium one.

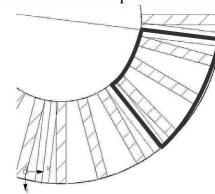


Figure 7

At the  $15^\circ$  position (figure 8) we have another position of minimum reluctance (a stable position). This position is equivalent the  $0^\circ$  one, since the cogging torque curve period was  $15^\circ$ .

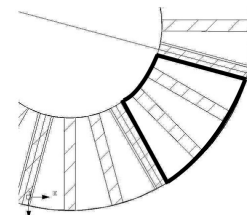


Figure 8

Another method of analyse the cogging torque is by looking at the flux density. The following figure (figure 9) represent the stator flux density in the  $0^\circ$ ,  $7.5^\circ$  and  $15^\circ$  positions. If we focus on the brought out magnet, in the  $0^\circ$  and  $15^\circ$  positions, the highest flux density is in front of the central area, tending the magnet to remain in this position. However, in the  $7.5^\circ$  position the highest flux densities are in the area between magnets. If the magnet (the rotor) is displaced to either side, it tends to displace still further, to receive this high flux density frontally.

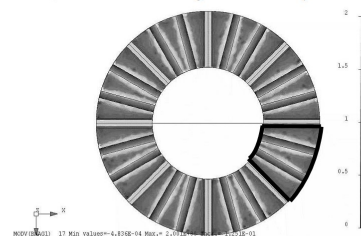


Figure 9

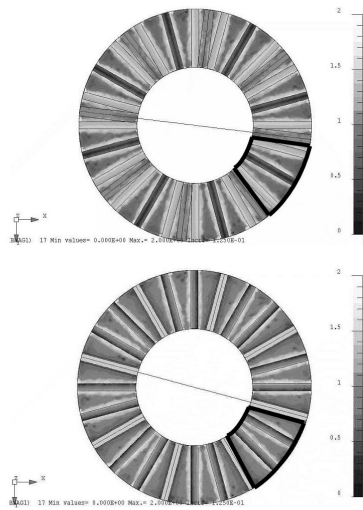


Figure 9 (cont.)

Prototype 2: 24 slots and 15°

The most common method of reducing the cogging torque is to skew the slots [4], making  $\frac{dR}{d\theta}$  zero over each magnet face. Figure 10 shows the geometry of the prototype 2, where we have skewed the slots over one tooth pitch, being the tooth pitch the angular difference between two consecutive slots. The rationale for the skewing techniques is that as the magnet moves with respect to the slot, the component of R change position, but the resulting total remains unchanged [3].

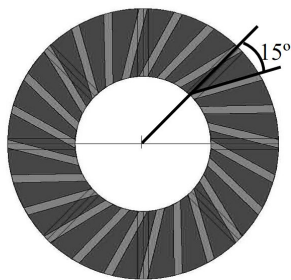


Figure 10

The resulting cogging torque of this prototype has been obtained with FLUX 3D and it's showed in figure 11. Certainly the skewing reduces the cogging torque (now its amplitude is about 4.04 Nm, the 39% of the cogging

torque of the prototype 1), but this reduction is lower than the expected one, because this cogging torque is about the 13% of the nominal torque (14 Nm).

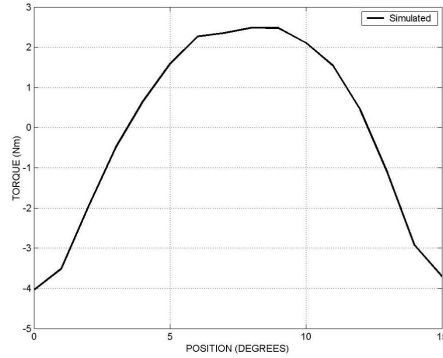


Figure 11

We can observe that there are positions of no torque (3.5° and 12.5), one positive torque interval and negative torque intervals. The reduction in the cogging torque is due to the fact that if the rotor is displaced to either side, there is a slot which goes in and another one which goes out. This situation didn't happen in the prototype 1, where when a slot went in there was not another that going out.

Prototype 3, 4, 5 and 6 (24 slots and 7.5°, 20°, 30° and 40°)

We've checked how the skewing angle influences the cogging torque by simulating their behaviour with 3D FEM. Figures 12 to 15 show the cogging torque obtained with the prototypes 3, 4, 5 and 6.

Prototype 3: 24 slots and 7.5°:

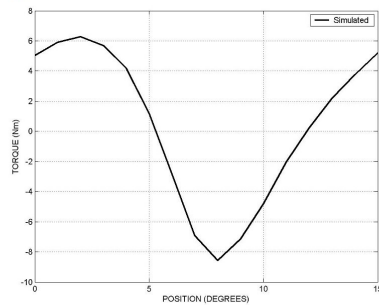


Figure 12



Prototype 4: 24 slots and 20°:

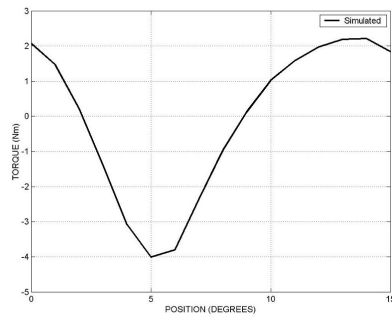


Figure 13

Prototype 5: 24 slots and 30°:

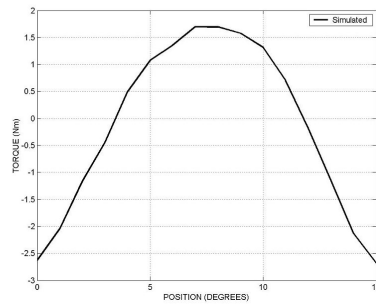


Figure 14

Prototype 6: 24 slots and 40°:

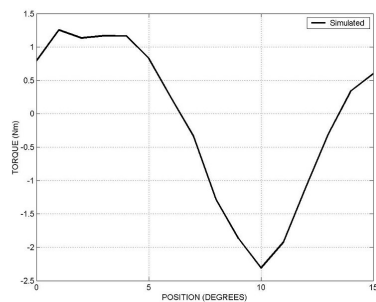


Figure 15

We can observe that the cogging torque decreases when the skew angle varies from 0° to 15°, but for greater angles the decrease of cogging torque is small. In addition, the manufacture cost and ohmic losses increase as the skew angle increases. Moreover, in prototypes 1 to

6 every rotor magnet is at the same relative position with respect to the stator teeth. Therefore, total cogging torque is equal to the algebraic sum of that produced by each magnet. Then, if we want to reduce the total cogging torque, we have to reduce the cogging torque of each magnet.

Prototype 7: 27 slots and 0°

Another method of reducing the net cogging torque is making the contribution of each magnet out of phase with the others. This was done in prototype 7.

The geometry and the cogging torque obtained from 3D FEM are illustrated in figures 16 and 17. Now, the amplitude of the cogging torque is 0.24 Nm (about a 97.70% less than the obtained with the prototype 1). This large reduction is due to the fact that adjacent magnets are aligned differently with the stator teeth, meaning that the cogging torque produced by adjacent magnets are out of phase.

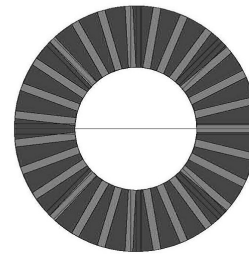


Figure 16

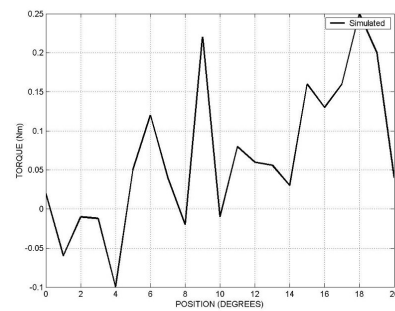


Figure 17

The arrows in figure 18 indicate the cogging torque direction produced by each magnet.

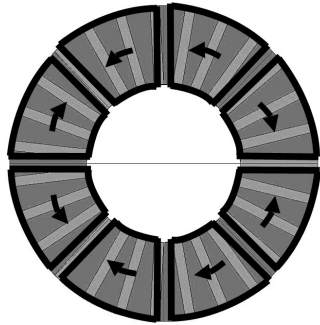


Figure 18

#### D Measurements

Prototypes 2, 3 and 7 have been constructed and their cogging torques has been measured, using a torque-angle measurement system. This system consists of a Lebow 11 Nm torque transducer, a Hohner count per revolution incremental optical encoder and a Dspace data acquisition equipment to control the experiment system. Angle accuracy is  $\pm 0.072$  degrees and torque accuracy is  $\pm 0.03$  Nm. The cogging torque produced by prototypes 2, 3 and 7 is shown in figure 19.

As we can see in these figures, empirical measurements of cogging torque in the three prototypes studied reproduced the theoretically predicted behaviour.

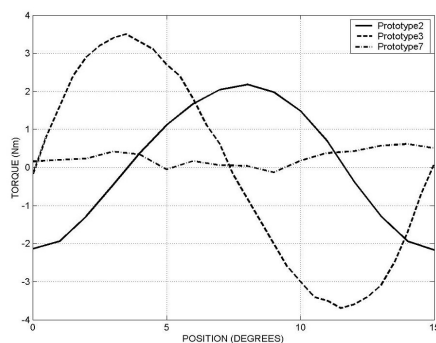


Figure 19

### 3.- CONCLUSIONS

This paper analyses, both theoretically and experimentally, the reduction of the cogging torque in an axial flux machine through the modification of the slot skew angle or the number of slots. We've observed that,

although both techniques achieved a cogging torque reduction, the modification of the slots skew angle is less effective than the modification of the number of slots: The first method gives a reduction of 65% of prototype1 while the second one gives a reduction great than the 97%. Moreover, we have demonstrated that the behaviour of the constructed prototypes follows the prediction of the 3D FEM software.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by grant 1FD97-1067 of the European Commission, Comisi3n Interministerial de Ciencia y Tecnologia (CICYT), and Iberdrola S.A.

Special thanks to Honeywell International Inc for the stator cores.

R.U., J.R. and S.C. are fellows of the European Commission.

#### REFERENCES

- [1] E. Spooner, B. J. Chalmers, "TORUS", a toroidal-stator, permanent-magnet machine for small-scale power generation, *Proc. Int. Conf. Elect. Machines, MIT*. Cambridge, USA, 1990, Vol. III, pp. 1053-1058.
- [2] F. Caricchi, F. Crescimbeni, E. Fideli, G. Noia, Design and Construction of a Wheel-Directly-Coupled Axial-Flux PM Motor Prototype for EVs, *Proceedings of IEEE-IAS Annual Meeting*, 1994, Vol. 1, pp. 646-651.
- [3] D. C. Hanselman, *Brushless Permanent-Magnet Motor Design* (Mc Graw Hill, 1994)
- [4] S. R. Prina, *The Analysis and Design of Brushless DC Motors* (Ph. D. Thesis, University of New Hampshire, Durham, NH. 1990)

## 2D analytical calculation of the no-load induced EMF in an axial flux slotted permanent magnet machine

J. M. Pérez García<sup>1</sup>, Member, IEEE, F. A. Frechoso Escudero<sup>1</sup>, Member, IEEE

<sup>1</sup>Departament of Electrical Engineering, University of Valladolid, Valladolid, 47014, Spain

Three analytical methods are proposed and compared in order to obtain the induced electromotive force (EMF) in an axial flux slotted permanent magnet machine under no-load conditions. Each method solves the Laplace equation via magnetic scalar potential and takes into account the slotting of the machine: the first method considers directly the slots solving the Laplace equation in the gap of an slotted machine; the second and third methods, by means of a two-dimensional approximation of the magnet geometry, takes into consideration the influence of the slots. Once the magnetic scalar potential is defined, other parameters, such as the magnetic flux density, the magnetic flux crossing any given area and the induced EMF are computed. Finally, results issued from the proposed models are compared with those stemming from a 3D finite element method (FEM) simulation.

**Index Terms**— Analytical modeling, axial flux, finite element methods, magnetic scalar potential, permanent magnet machines.

### I. INTRODUCTION

The axial flux permanent magnet (AFPM) machine is an attractive alternative to the radial flux permanent magnet machines due to its pancake shape, compact construction and high power density. AFPM machines are suitable for electrical vehicles, pumps, fans, etc. Since a large number of poles can be accommodated, these machines are ideal for low speed applications, as wind generators. The low speed generator does not require step-up gearbox in power transmission between the turbine and the generator, improving the reliability of the system and reducing the maintenance costs.

The knowledge of the flux density waveform is essential for the prediction of the motor performance. While numerical methods for field computation such as finite-element method provide an accurate method to determine the flux density distributions in electrical machines, they are time-consuming and do not provide enough insight as compared with analytical solutions. Analytical methods allow to obtain the expression of the flux density waveform by means of solving the Laplace or Poisson equation in the studied region ([1]-[6]), using current sheets to model the magnets and the armature current ([7]-[9]) or employing magnetic circuit theory ([10]-[14]). If the studied machine is an slotted one, the effects of the slots can be taken into account directly in the studied geometry ([1], [6], [7]) or can be obtained starting from the expression of a slotless machine introducing the Carter's coefficient ([15]) or a permeance coefficient ([10]-[14], [16]).

In this paper, three methods are proposed and compared in order to obtain the induced electromotive force (EMF) in an axial flux slotted permanent magnet machine under no-load conditions. Each method solves the Laplace equation via magnetic scalar potential and takes into account the slotting of the machine.

An axial flux machine with three phases, eight poles, and 24 slots was chosen. The inner rotor has 8 permanent magnets surface mounted, which are axially magnetised. The two outer slotted stator cores have an infinite permeability (which implies that the cores surface are equipotential). Its geometry

is showed in the figure 1a.

### FIG. 1 HERE

Looking radially inwards onto the machine and ignoring curvature, allows the machine to be represented as shown in figure 1b, where the x-coordinate represents the circumferential direction and the y-coordinate the axial direction. This model assumes the radial direction to be infinite. By symmetry, only a half of the geometry is studied.

### II. ANALYTICAL MODELS

The two-dimensional Laplace equation for the magnetic scalar potential,  $v$ , is:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

The most general solution can be written as:

$$v = \sum_n (A_n \cos \beta_n x \cosh \beta_n y + B_n \cos \beta_n x \sinh \beta_n y + C_n \sin \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \sin \beta_n x \sinh \beta_n y) \quad (2)$$

where the constants  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  and  $\beta_n$  can be determined by imposing appropriate boundary conditions.

Once the magnetic scalar potential is defined, other parameters, such as the magnetic flux crossing any given area or the induced EMF can then be computed.

#### A. 1st method: Fourier series method

This method is based on considering interconnected rectangular regions, where the solution can be obtained by applying the superposition theorem and defining several simpler problems (figure 2 shows the studied geometry and the corresponding field problem). In the common boundary to two regions (boundary CD, e.g.) the magnetic scalar potential and its spatial derivative must be continuous across the boundary [17]. The problem is solved in two steps:



a) Assume an arbitrary potential distribution along the boundaries (AB, CD, GH, IJ, MO, PQ, TU and VW) in terms of some unknown Fourier coefficients. Solve the field equations in the regions.

b) Obtain the unknown coefficients by matching the normal derivate of the potential function along each boundary.

### FIG. 2 HERE

The expression of the magnetic scalar potential in the region III,  $v_{III}$ , is showed as an example:

$$v_{III} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot V_0}{(2k-1)\pi} \frac{\text{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{t} \right]}{\text{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right]} \text{sen} \left( \frac{(2k-1)\pi x}{t} \right) + \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{\text{senh} \left( \frac{l\pi(t-x)}{g} \right)}{\text{senh} \left( \frac{l\pi t}{g} \right)} \text{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} L_m \frac{\text{senh} \left( \frac{m\pi x}{g} \right)}{\text{senh} \left( \frac{m\pi t}{g} \right)} \text{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) \quad (3)$$

where the coefficients  $M_l$  and  $L_m$  are calculated numerically.

### B. 2nd method: magnetization profile in an even air-gap + modified gap

This method obtains the analytical expressions for the flux density distributions in the air-gap and in the magnets, solving the Laplace and Poisson equation respectively via the magnetic scalar potential, by taking into account the symmetry conditions, the boundary conditions and the magnetization profile [4]. The magnetization distribution is represented (figure 3) by its Fourier series expansion, as follows:

$$M_y = \frac{B_r}{\mu_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\beta_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{yn} \sin(\beta_n x) \quad (4)$$

### FIG. 3 HERE

The expression of the magnetic scalar potential is:

$$v_g(x, y) = \sum_n \frac{K_{yn}}{\Delta_4 \beta_n} \cdot \sin(\beta_n x) \cdot \sinh[\beta_n(l_s - y)] \quad (5)$$

in the air gap, and

$$v_m(x, y) = \sum_n \frac{K_{yn}}{\Delta_4 \beta_n} \cdot \frac{\sinh(\beta_n g)}{\cosh\left(\beta_n \frac{l_m}{2}\right)} \cdot \sin(\beta_n x) \cdot \cosh(\beta_n y) \quad (6)$$

in the magnet, where

$$l_s = g + \frac{l_m}{2} \quad (7)$$

$$\Delta_4 = \cosh(\beta_n g) + \mu_r \cdot \sinh(\beta_n g) \cdot \text{tgh}\left(\beta_n \frac{l_m}{2}\right) \quad (7)$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{\tau_p} \quad (8)$$

and

$$K_{yn} = \begin{cases} 0 & n \text{ odd} \\ \frac{B_r}{\mu_0} \cdot \frac{4}{n\pi} \cdot \cos(n\pi) & n \text{ even} \end{cases} \quad (9)$$

being  $B_r$  the remanence,  $\mu_r$  the relative recoil permeability,  $\mu_0$  the vacuum recoil permeability and  $\tau_p$  the pole pitch.

The effect of slotting on the field produces by the magnets is incorporated by evaluating the above expression (5), (6) and (7) with the air-gap modified so as to take into account that the magnetic field over the slot must travel further to reach the stator. The magnet flux lines have a semicircular paths in the slots with radii equal to the shortest distance to the tooth edges as shown in Fig. 4 [18].

The expression of the air-gap modified is:

$$g(x) = \begin{cases} g & \text{under the teeth} \\ g + \frac{\pi}{2} \cdot r & \text{under the slot} \end{cases} \quad (10)$$

### FIG. 4 HERE

### C. 3rd method: magnetic scalar potential in an even air-gap + modified gap

In this third method, we have considered an even air-gap with fixed magnetic scalar potential in the magnet surface ( $+V_0$  in the north face and  $-V_0$  in the south face) and null in the stator surface in an slotless geometry. The expression of the magnetic scalar potential in the air-gap is:

$$v_g(x, y) = \sum_n \frac{P_n}{\sinh(\beta_n g)} \cdot \sin(\beta_n x) \cdot \sinh[\beta_n(l_s - y)] \quad (11)$$

with

$$P_n = \begin{cases} 0 & n \text{ odd} \\ -\frac{4 \cdot V_0}{\tau_p \cdot \beta_n} & n \text{ even} \end{cases} \quad (12)$$

The magnetic scalar potential in the slotted geometry is obtained evaluating (11) with the modified gap expressed by (10).

### III. RESULTS:

First and third methods needs the value of the scalar magnetic potential over the magnet surface ( $V_0$ ) so that to be evaluated. We have set this quantity as the average of the magnet scalar magnetic potential calculated by the second method.

In order to compare the proposed methods, we have calculated the flux linkage and the induced EMF in a coil with an span of 3 slots. The numerical values of the main parameters are given in Table 1.

### TABLE 1 HERE

Fig. 5 and fig. 6 shows the flux linkage and the induced EMF, respectively, obtained with each method versus the "offset", which is the displacement of the rotor with respect to the stator.

### FIG. 5 HERE

### FIG. 6 HERE

DU-03

3

## IV. FINITE ELEMENT METHOD SIMULATIONS

In order to verify the analytical results obtained by the previous calculations, some 3D FEM simulations have been made with FLUX3D software. Fig. 7 shows a comparison between the scalar magnetic potential over the magnet surface for the three analytical proposed methods and the FEM. Fig. 8 represents the stator flux density obtained from the three analytical proposed methods and from the FEM.

FIG. 7 HERE

FIG. 8 HERE

## V. CONCLUSIONS:

Three different analytical methods are proposed and compared. The difficulty of first method increases with the number of interconnected regions, although the technique is quite straightforward. In order to overcome this difficult, another two methods in which the slotting effect is represented through a modified gap are proposed. The flux linkage and the induced EMF calculated by these three methods did not show significant differences. Moreover, a good agreement between these analytical results and simulations obtained with 3D FEM software was also found.

## REFERENCES:

- [1] J. Azzouzi, G. Barakat and B. Dakyi, "Analytical modeling of an axial flux permanent magnet synchronous generator for wind energy application", IEEE International Conference in Electric Machines and Drives, May 2005 Page(s):1255 - 1260.
- [2] E. P. Furlani, "A method for predicting the field in permanent magnet axial field motors", IEEE Trans. Magn., vol 28, no. 5, pp. 2061-2066, 1992.
- [3] E. P. Furlani and M. A. Knewton, "A three-dimensional field solution for permanent magnet axial field motors", IEEE Trans. Magn., vol 33, no. 3, pp. 2322-2325, May 1997.
- [4] Z. Q. Zhu, D. Howe, E. Bolte and B. Ackermann, "Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, part I: open-circuit field", IEEE Trans. Magn., vol 29, no. 1, pp. 124-135, January 1993.
- [5] Z. Q. Zhu, D. Howe and C. C. Chan, "Improved analytical model for predicting the magnetic field distribution in brushless permanent-magnet machines", IEEE Trans. Magn., vol 38, no. 1, pp. 229-238, January 2002.
- [6] Z. Q. Zhu, D. Howe and Z. P. Xia, "Prediction of open-circuit airgap field distribution in brushless machines having an inset permanent magnet rotor topology", IEEE Trans. Magn., vol 30, no. 1, pp. 98-107, January 1994.
- [7] F. Marignetti, G. Tomassi and J. R. Bumby, "Electromagnetic modelling of permanent magnet axial flux motors and generators" COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, vol 25, no. 2, pp. 510-522, 2006.
- [8] N. Boules, "Prediction of no-load flux density distribution in permanent magnet machines" IEEE Trans. Ind. Appl., vol IA-21, no. 4, pp. 663-643, May/June 1985.
- [9] J. R. Bumby, R. Martin, M. A. Mueller, E. Spooner, N. L. Brown and B. J. Chalmers, "Electromagnetic design of axial-flux permanent magnet machines", Electric Power Applications, IEE Proceedings, vol. 151, issue 2, pp. 151-160, March 2004.
- [10] Z. Q. Zhu and D. Howe, "Analytical prediction of the cogging torque in radial-field permanent magnet brushless motors", IEEE Trans. Magn., vol 28, no. 2, pp. 1371-1374, March 1992.
- [11] G. Barakat, T. -El-meslouhi and B. Dakyo, "Analysis of the cogging torque behavior of a two-phase axial flux permanent magnet synchronous machine", IEEE Trans. Magn., vol 37, no. 4, pp. 2803-2805, July 2001.

- [12] Z. Q. Zhu and D. Howe, "Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, part III: effect of stator slotting", IEEE Trans. Magn., vol 29, no. 1, pp. 143-151, January 1993.
- [13] A. B. Proca, A. Keyhani, A. El-Antaby, W. Lu and M. Dai, "Analytical model for permanent magnet motors with surface mounted magnets", IEEE Trans. Energy Conversion, vol 18, no. 3, pp. 386-391, September 2003.
- [14] X. Wang, Y. Yang and D. Fu, "Study of cogging torque in surface-mounted permanent magnet motors with energy method", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 267, pp. 80-85, 2003.
- [15] Q. Gu, H. Zhong and Q. Hao, "Three-dimensional field computation for permanent magnet electric machines with finite axial magnet length" Electrical Engineering 86, pp. 35-43, 2003.
- [16] X. Wang, Q. Li, S. Wang and Q. Li, "Analytical calculation of air-gap magnetic field distribution and instantaneous characteristics of brushless DC motors", IEEE Trans. Energy Conversion, vol 18, no. 3, pp. 424-432, September 2003.
- [17] H. A. Toliyat and G. B. Kliman, "Handbook of electrical motors". New York, Marcel Dekker Inc, 2004.
- [18] D. C. Hanselman, "Brushless permanent magnet motor design". Rhode Island, The Writers' Collective, 2003.

Manuscript received March 3, 2008. Corresponding author: J. M. Pérez (e-mail: julian@sid.eup.uva.es; phone: +34 983423686; al fax: +34 983423490).



**J.M. Pérez García** was born in Valladolid, Spain, in 1965. He received a B. Sc. degree in Phys. Sci. in 1989, M. Sc. degree in Electrical Engineering in 1991 all from Valladolid University. In 1990 he joined the Esc.Univ. Politécnica, University of Valladolid, and is now Associate Professor in its Electrical Engineering Dept. He is currently pursuing the Ph.D. degree.



**F.A. Frechoso Escudero** was born in Valladolid, Spain, in 1967. He received a B. Sc. degree in Phys. Sci. in 1990, M. Sc. degree in Optics in 1991 and Ph. D. degree in Electrical Eng. in 1996 all from Valladolid University. In 1990 he joined the Esc.Univ. Politécnica, University of Valladolid, and is now Associate Professor in its Electrical Engineering Dept.

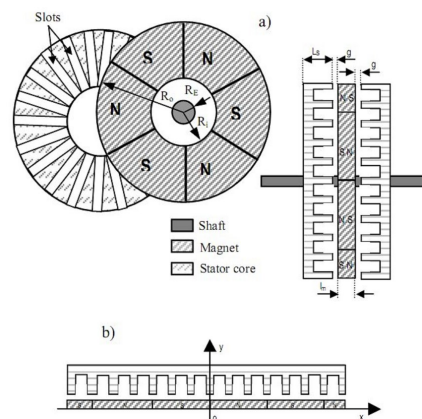


Fig. 1. a) Geometry of the studied machine. b) Representation of the studied machine: the x-coordinate represents the circumferential direction and the y-coordinate the axial direction.

DU-03

4

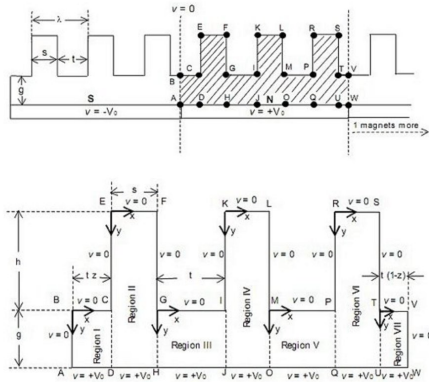


Fig. 2. Studied geometry and the corresponding field problem

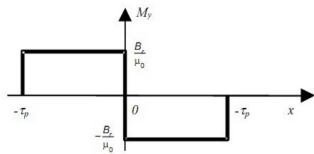


Fig. 3. Magnetization profile of permanent magnets.

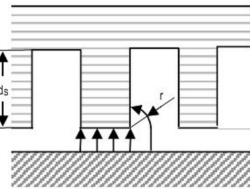


Fig. 4. Approximation of the flux line paths in a slot.

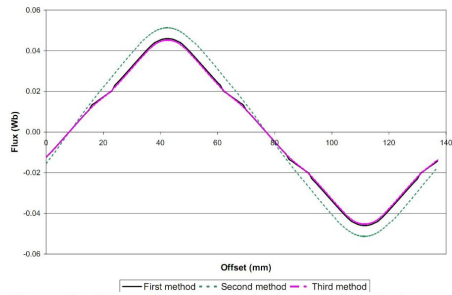


Fig. 5. Flux linkage (in webers) obtained with each method versus the displacement of the rotor with respect to the stator (in millimetres).

TABLE I  
NUMERICAL VALUES OF THE MAIN PARAMETERS

Parameter	Symbol	Value
Magnet remanence	$B_r$	1 T
Magnet recoil permeability	$\mu_r$	1.1
Number of pairs of poles	$2p$	8
Number of slots	$n_s$	24
Magnet axial length	$l_m$	20 mm
Airgap length	$g$	5 mm
Slot opening	$t$	7 mm
Teeth width	$t$	16 mm
Slot depth	$d_s$	21.5 mm
Pole pitch	$\tau_p$	69 mm
Magnet scalar magnetic potential (evaluated)	$V_0$	3170.43 A

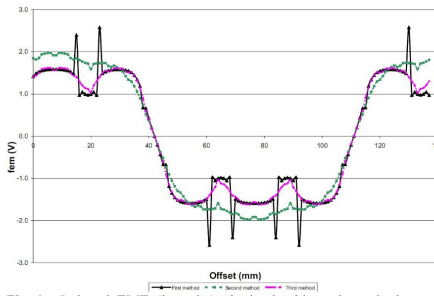


Fig. 6. Induced EMF (in volts) obtained with each method versus the displacement of the rotor with respect to the stator (in millimetres).

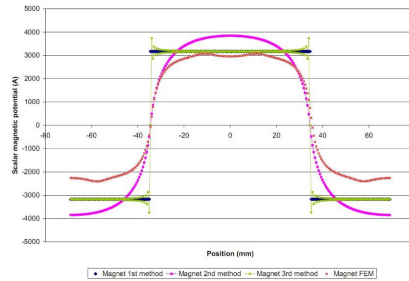


Fig. 7. Scalar magnetic potential over the magnet surface (in amperes) versus the position (in millimetres)

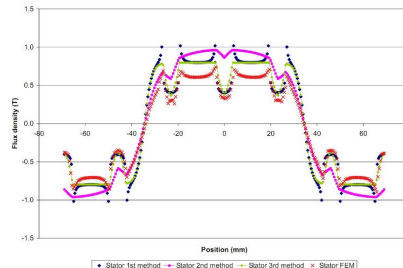



Fig. 8. Flux density over the stator surface (in webers) versus the position (in millimetres)



 <p>European Association for the Development of Renewable Energies, Environment and Power Quality (EA4EPQ)</p>	<p>International Conference on Renewable Energies and Power Quality (ICREPO'12) Santiago de Compostela (Spain), 28th to 30th March, 2012</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## 2D Analytical Calculation of the Open Circuit Electromagnetic Field Distribution in an Axial Flux Slotted Permanent Magnet Machine using Fourier Analysis.

J. M. Pérez García<sup>1</sup> and F. A. Frechoso Escudero<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Electrical Engineering  
E.I.I., University of Valladolid

Escuela de Ingenierías Industriales, C/ Francisco Mendizábal, n°1, 47014 Valladolid (Spain)  
Phone number:+0034 983 4236866 , Fax number +0034 983 423490, e-mail: [julian@eii.uva.es](mailto:julian@eii.uva.es), [frechoso@eis.uva.es](mailto:frechoso@eis.uva.es)

**Abstract.** The paper presents an analytical method in order to obtain the electromagnetic field distribution in an axial flux slotted permanent magnet machine under no-load conditions. The method solves the Laplace equation in the gap of an slotted machine via magnetic scalar potential. Once the magnetic scalar potential is defined, the magnetic flux density components are computed. Results issued from the proposed model are compared with those stemming from a 3D finite-element method (FEM) simulation. In addition to permanent magnet machines, this technique can be applied to any 2D geometry with the restriction that the geometry should consist of rectangular regions.

### Key words

Analytical modelling, axial flux, Fourier analysis, magnetic scalar potential, permanent magnet machines.

### 1. Introduction

The axial flux permanent magnet (AFPM) machine is an attractive alternative to the radial flux permanent magnet machines due to its pancake shape, compact construction and high power density. AFPM machines are suitable for electrical vehicles, pumps, fans, etc. Since a large number of poles can be accommodated, this machines are ideal for low speed applications, as wind generators. The low speed generator does not require step-up gearbox in power transmission between the turbine and the generator, improving the reliability of the system and reducing the maintenance costs.

The knowledge of the flux density waveform is essential for the prediction of the motor performance. While numerical methods for field computation such as finite-element method provide an accurate method to determine the flux density distributions in electrical machines, they are time-consuming and do not provide enough insight as compared with analytical solutions. Analytical methods allow to obtain the expression of the flux density waveform by means of solving the Laplace or Poisson equation in the studied region via the magnetic scalar potential ([1]-[4], [7]) or the magnetic vector potential ([5], [6], [8]-[10]), using current sheets to model the magnets and the armature current ([7], [8]), employing magnetic

circuit theory ([9]) or applying conformal mapping ([9]-[11]). If the studied machine is an slotted one, the effects of the slots can be taken into account directly in the studied geometry ([4]-[6], [9]-[11]) or can be obtained starting from the expression of an slotless machine an introducing the Carter's coefficient ([1], [7]) or a permeance coefficient ([3]).

In this paper, we proposed a method which solves de Laplace's equation in the air gap of the machine via the scalar potential, using Fourier series and a set of boundary conditions, and taking into account the slotting of the machine. Once the magnetic scalar potential is defined, the magnetic flux density components are computed.

### 2. Description of the method

The method, which we call Fourier series method, was pointed by Hague [17] who calculated the magnetic field of linear currents in an air-gap with concentric circular cylindrical boundaries. Later, Nene [18] applies this technique to calculate the magnetic scalar potential distribution in rectangular regions with at least one known not null boundary condition. If there are known not null potential distributions on more than one boundary, the solution is obtained by applying the superposition theorem, by defining several simpler problems. With interconnected regions, the problem becomes increasingly difficult, although the technique is quite straightforward.

We applied this technique to an axial flux machine with three phases, eight poles and 24 slots. The inner rotor has 8 permanent magnets surface mounted, which are axially magnetised. The two outer slotted stator cores have an infinite permeability (which implies that the cores surface are equipotential). Its geometry is showed in the figure 1a, where  $l_m$  is the magnet axial length,  $L$  is the stator core axial length and  $g$  is the gap thickness.

Looking radially inwards onto the machine and ignoring curvature, allows the machine to be represented as shown in figure 1b, where the x-coordinate represents the

circumferential direction and the y-coordinate the axial direction. This model assumes the radial direction to be infinite. By symmetry, only a half of the geometry is studied.

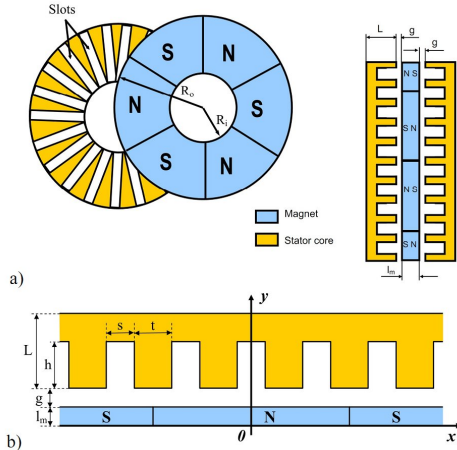


Fig. 1. Studied geometry. a) Three dimensions geometry. b) Simplified model in two dimensions.

We will apply the method of Fourier Series simplified geometry in two dimensions, in order to find the distribution of the scalar potential in the gap of the machine, considering the machine open circuit, ie, under no load conditions.

As discussed below, we need to know the value of the scalar magnetic potential on the surface of the magnets. To determine this value, we will study a slotless machine, in which the effect of the slots have been taken into account using the Carter's coefficient [1], [11], and then approach the study of the slotted machine. The Carter's coefficient is a factor that specifies how much an air gap must be increased analytically to take into account the presence of slots. [20] provides several analytical expressions for Carter's coefficient.

3. Slotless machine

Figure 2 shows the two dimensional geometry of the slotless machine. This two dimensional geometry can be reduced further by exploiting the symmetries than results from the repeating magnetic structure. Specifically, the field is symmetric about the vertical centre line of each pole and about the horizontal centre line of the magnets. The dashed line encloses this reduced geometry.

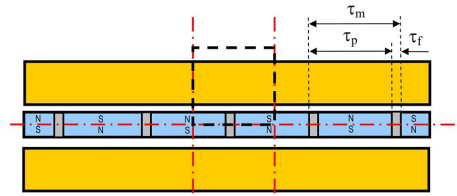


Fig. 2. Geometry of the slotless machine. The dashed line contains the reduced geometry.

Figure 3 shows the reduced geometry that reflects this geometry along with a cartesian reference frame that is used for the analysis below. In this figure,  $\tau_m$  is the magnet width,  $\tau_f$  the magnet spacer width and  $\tau_p$  is the magnetic pole pitch.

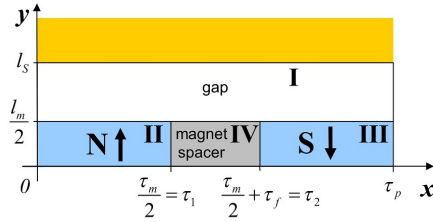


Fig. 3. Reduced two-dimensional geometry with reference frame.

The airgap/magnet regions are subdivided into four homogeneous sub-regions designated I, II, III and IV in figure 3. However, to simplify the analysis, sub-regions II, III and IV are combined by assuming that the magnet spacer is occupied by permanent magnet material but the magnet is fully magnetized only in sub-regions II and III and unmagnetized in sub-region IV. The corresponding cartesian component of magnetization,  $M_y$ , is shown in figure 4 and the new reduced geometry is shown in figure 5.

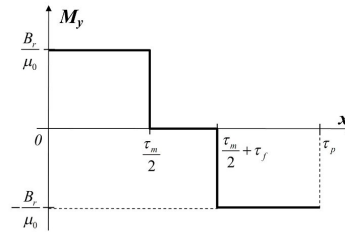


Fig. 4. Magnetization distribution.

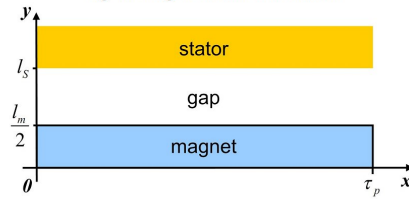


Fig. 5. New reduced geometry with magnetization distribution. The magnetization distribution along the x-direction can be expanded into Fourier series

$$M_y = \sum_{n=1}^{\infty} K_{ym} \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau_p}\right) \tag{1}$$

where

$$K_{ym} = \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ \frac{4}{n\pi} \frac{B_r}{\mu_0} \sin\left(\frac{n\pi\alpha_m}{2}\right) & n \text{ odd} \end{cases} \tag{2}$$

with  $B_r$  represents the remanence of the magnet and  $\alpha_m$  is the magnet fraction and is defined as:

$$\alpha_m = \tau_m / \tau_p \quad (3)$$

The magnetostatic field equations for current-free regions are:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad (4)$$

and

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5)$$

where  $\vec{H}$  is the magnetic field strength and  $\vec{B}$  is the magnetic flux density. The two fields are coupled by:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (6)$$

in the airgap region and

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (7)$$

in the permanent magnet region, where  $\vec{M}$  is the magnetization vector ( $\vec{M} = \pm M_y \vec{j}$ ),  $\mu_r$  the relative permeability of the magnet and  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  T m/A is the permeability of free space. Equation (4) allows us to define a scalar magnetic potential,  $v$ , such us:

$$\vec{H} = -\nabla v \quad (8)$$

Magnetic field strength vector  $\vec{H}$  components are deduced from  $v$  by:

$$H_x = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad H_y = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (9)$$

Substituting equations (8) and (6) or (7) in (5), reduces the magnetostatic Maxwell equation to a Laplace or Poisson equation, given by:

$$\nabla^2 v_i = 0 \quad (10)$$

in the airgap region, and

$$\nabla^2 v_{ii} = \frac{\nabla \cdot \vec{M}}{\mu_r} \quad (11)$$

in the magnet region. As the magnet poles possess only the  $y$ -direction magnetization, the divergence of the magnetization vector is zero. Therefore, the scalar potential in both regions,  $v_i$ ,  $i = I, II$ , satisfies:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

Solving equation (12) by the method of separation of variables [19], we obtain the general solution in region I:

$$v_I = \sum_n (A_n^I \cos \beta_n^I x \cosh \beta_n^I y + B_n^I \cos \beta_n^I x \sinh \beta_n^I y + C_n^I \sin \beta_n^I x \cosh \beta_n^I y + D_n^I \sin \beta_n^I x \sinh \beta_n^I y) \quad (13)$$

and in region II:

$$v_{II} = \sum_n (A_n^{II} \cos \beta_n^{II} x \cosh \beta_n^{II} y + B_n^{II} \cos \beta_n^{II} x \sinh \beta_n^{II} y + C_n^{II} \sin \beta_n^{II} x \cosh \beta_n^{II} y + D_n^{II} \sin \beta_n^{II} x \sinh \beta_n^{II} y) \quad (14)$$

where the constants  $A_n^I$ ,  $B_n^I$ ,  $C_n^I$ ,  $D_n^I$ ,  $A_n^{II}$ ,  $B_n^{II}$ ,  $C_n^{II}$ ,  $D_n^{II}$  and  $\beta_n^{II}$  can be determined by imposing appropriate boundary conditions. These boundary conditions are:

A. *Region I:*

- The normal component of the field is zero along the symmetry line defined by the  $y$ -axis.
- The normal component of the field is zero along the symmetry line defined by  $x = \tau_p$ .
- The tangential field is zero along the upper boundary defined by  $y = l_s$ .

B. *Region II:*

- The normal component of the field is zero along the symmetry line defined by the  $y$ -axis.
- The normal component of the field is zero along the symmetry line defined by  $x = \tau_p$ .
- The tangential field is zero along the symmetry line defined by  $x$ -axis.

C. *Region I-Region II interface: The normal component of  $\vec{B}$  and the tangential component of  $\vec{H}$  must be continuous.*

Solving the system of equations resulting from applying the boundary conditions detailed above, we determine the constants  $A_n^I$ ,  $B_n^I$ , ...,  $D_n^{II}$  and  $\beta_n^{II}$ , which substituted in the corresponding equations (13) and (14), provide us with the expression of the scalar potential in region I:

$$v_I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{ym}}{\beta_n} \frac{\sinh(\beta_n l_m / 2)}{\sinh(\beta_n l_s)} \cdot \cos(\beta_n x) \cdot \sinh[\beta_n (l_s - y)] \quad (15)$$

and region II:

$$v_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{ym}}{\beta_n} \frac{\sinh(\beta_n g)}{\sinh(\beta_n l_s)} \cdot \cos(\beta_n x) \cdot \sinh(\beta_n y) \quad (16)$$

The expressions of the magnetic field strength components and the magnetic flux density components can be obtained using the equations (9) and (6).

In order to verify the expressions obtained by the previous calculations, some 3D FEM simulations have been made with FLUX3D software. The numerical values of the main parameters are given in Table 1. Fig. 6 shows a comparison between the scalar magnetic potential over the magnet surface for the analytical proposed method and the FEM versus the magnet spacer width. It can be seen that there are a very good agreement between the analytical results and simulations obtained with 3D FEM software. We can also observe that in all cases, even when there is no separation between the magnets, the potential on the surface of the magnet changes smoothly between a magnet and another, not being an instantaneous change. The value reaches the scalar potential in the center of the magnet,  $V_0$ , is equal to  $3284A \cdot v$ .

Table 1.-Numerical values of the main parameters

Parameter	Symbol	Value
Magnet remanence	$B_r$	1.2 T
Magnet recoil permeability	$\mu_r$	1.05
Magnet axial length	$l_m$	20 mm
Airgap length	$g$	5 mm
Slot opening	$s$	7 mm
Teeth width	$t$	16 mm
Slot depth	$d_s$	21.5 mm
Pole pitch	$\tau_p$	69 mm
Slot pitch	$\tau_s$	23 mm



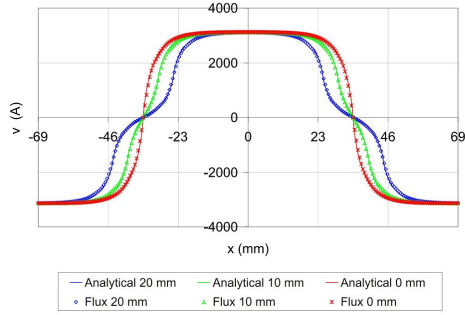


Fig. 6. Comparison between the scalar magnetic potential over the magnet surface for the analytical proposed method and the FEM versus the magnet spacer width.

#### 4. Slotted machine:

Once you know the value of the scalar potential on the surface of the magnet, we are able to apply the Fourier series method to the slot machine shown in Figure 1b, in order to obtain the distribution of magnetic scalar potential in the air, ie in the gap and the slots. To apply the method we have to divide the study area into rectangular regions interconnected and, by applying the superposition principle, obtain the potential in each region as a sum of potentials generated by each of its boundary conditions. This requires knowing the potential in all boundaries delimiting each rectangular region.

When we study the slotted machine we have to take into account the relative position of the edge of the magnet on the stator. Therefore, we will distinguish four situations:

- Partial tooth: the edge of the magnet is in front of a tooth of the machine
- Full slot: the edge of the magnet faces the beginning of a slot
- Partial slot: the edge of the magnet is in front of a slot machine
- Full tooth: the edge of the magnet faces the beginning of a tooth

##### A. Partial tooth:

In this situation, the edge of the magnet is in front of a tooth of the machine (fig. 7). If we consider a machine pole, we can divide the region under study in seven rectangular regions. Known stator scalar potential ( $v=0$ ) and the magnet surface scalar potential ( $v=V_0$ ), we must only know the potential of the common borders to adjacent regions in order to calculate the potential in each of the seven regions. Since two adjacent regions (ie regions III and IV) have a common boundary (IJ), the scalar potential and its spatial derivatives must be continuous across the boundary.

The problem is therefore, solved in two steps [18]:

- Assume an arbitrary potential distribution along the boundaries (AB, CD, .... VW) in terms of some unknown Fourier coefficients. Solve the field equations in each region.
- Obtain the unknown coefficients by matching the normal derivate of the potential function along each boundary (AB, CD, .... VW).

Figure 8 shows the corresponding field problem.

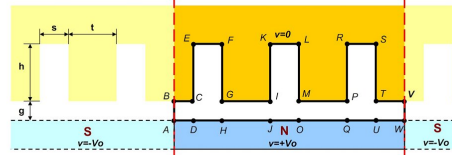


Fig. 7. Studied geometry corresponding to a machine pole for the situation of partial tooth.

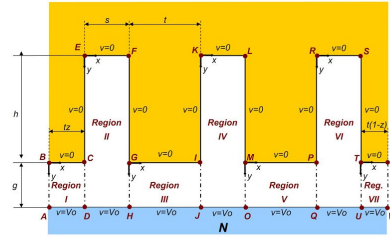


Fig. 8. Field problem corresponding to the geometry shown in fig. 7. See Table 1 for the values of the geometric parameters.

As an example, we show the expressions obtained for the scalar potential in the region III. With the  $x$ - $y$  coordinates system fixed at G as shown, let the potential across GH assumed to be given by:

$$v_{GH} = \sum_{l=1}^{\infty} M_l \sin \frac{l\pi y}{g} \quad \text{for } 0 \leq y \leq g \quad (17)$$

and let the potential across IJ assumed to be given by:

$$v_{IJ} = \sum_{m=1}^{\infty} L_m \sin \frac{m\pi y}{g} \quad \text{for } 0 \leq y \leq g \quad (18)$$

being the constants  $M_l$  and  $L_m$  the unknown Fourier coefficients. The expression of the magnetic scalar potential in the region III,  $v_{III}$ , results:

$$v_{III} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot V_0}{(2k-1)\pi} \frac{\sinh \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{t} \right]}{\sinh \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right]} \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{t} \right] + \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{\sinh \left[ \frac{l\pi(t-x)}{g} \right]}{\sinh \left( \frac{l\pi t}{g} \right)} \sin \left( \frac{l\pi y}{g} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} L_m \frac{\sinh \left( \frac{m\pi x}{g} \right)}{\sinh \left( \frac{m\pi t}{g} \right)} \sin \left( \frac{m\pi y}{g} \right) \quad (9)$$

Following the principle of superposition, the expression of this potential has three terms: the potential due to the magnet and the potential caused by GH and IJ boundaries.

The expressions of the magnetic flux density components in region III can be obtained using equations (6) and (9).

Applying this procedure to all regions, we get the expression of the scalar potential in each one of them. The determination of the unknown Fourier coefficients is

performed by matching the normal derivatives of the potential function on both sides of each boundary. Equating these derivatives in a number of values of  $y$ , we obtain a system of equations whose solution gives us the Fourier coefficients of the potential distributions of each of the boundaries.

The method is applied similarly to the three remaining cases (full slot, partial slot and full tooth).

**B. Full slot:**

Figure 9 shows the field problem for the case of full slot. The region corresponding to a pole is divided into 6 rectangular regions interconnected.

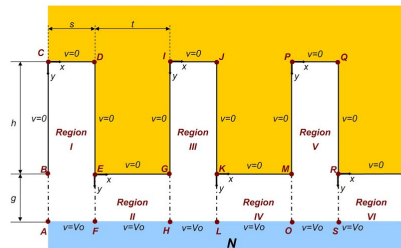


Fig 9. Field problem corresponding to a machine pole for the situation of full slot.

**C. Partial slot:**

Figure 10 shows the field problem for the case of partial slot. The region corresponding to a pole is divided into 7 rectangular regions interconnected.

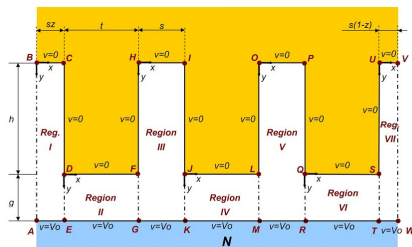


Fig 10. Field problem corresponding to a machine pole for the situation of partial slot.

**D. Full teeth:**

Figure 11 shows the field problem for the case of full teeth. The region corresponding to a pole is divided into 6 rectangular regions interconnected.

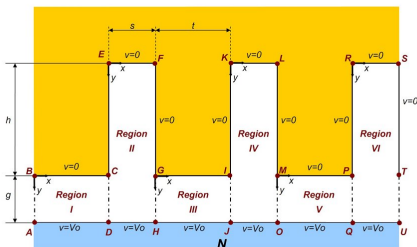


Fig 11. Field problem corresponding to a machine pole for the situation of full teeth.

**E. Motion:**

In the field problem for partial slot and partial tooth (Figs. 8 and 10), we have introduced the parameter  $z$ , which allows us to easily implement motion in the tangential direction. In both figures, if we vary  $z$  from 1 to 0, the rotor will move to the right (if the movement is to the left, the variation of  $z$  is from 0 to 1). We define the offset as the displacement between the initial position (center of the tooth) and the left edge of the magnet. Table 2 shows the offset's expressions for each case. After about a pitch slot ( $\tau_s = t + s$ ), the field values in the next pitch slot can be deduced from the field values of the preceding pitch slot.

Table 2.- Offset's expressions

Case	Offset	Range of $z$
Partial teeth	$Offset = (t/2) - z \cdot t$	$0 \leq z < 0.5$
Full slot	$Offset = t/2$	-----
Partial slot	$Offset = (t/2) + s(1-z)$	$0 < z < 1$
Full teeth	$Offset = (t/2) + s$	-----
Partial teeth	$Offset = (t/2) + s + t(1-z)$	$0.5 < z < 1$

**5. Results and Comparison with Finite Element Method Analysis.**

In order to verify the expressions obtained by the previous calculations, some 3D FEM simulations have been made with FLUX3D software. The numerical values of the main parameters are given in Table 1. Fig. 12 shows a comparison between the scalar magnetic potential at the top of the gap, at the middle of the gap and over the magnet surface for the analytical proposed method and the FEM analysis.

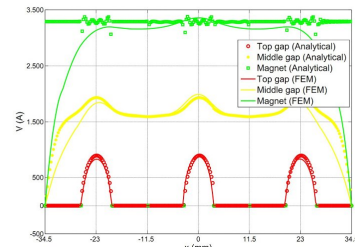


Fig. 12. Magnetic scalar potential at the top of the gap (red), in the middle of the gap (yellow) and over the magnet (green)

Figure 13 compares analytically predicted and finite-element-calculated open-circuit distributions of the tangential ( $x$  component) and normal ( $y$ -component) magnetic flux density components at the top of the gap.

In view of the results shown, it can be seen that there are differences between the values found by analytical and FEM, mainly caused by imposing the potential on the surface of the magnet is uniform and equal to  $V_0$ . In section 2, studying the smooth machine, we obtained that the potential on the surface of the magnet in the vicinity of the edges smoothly tended towards zero. To implement this trend, we represent the surface potential of the magnet by hyperbolic tangent function, which will allow us to smoothly reduce the value of  $V_0$  in the neighborhood of the edges of the magnet.



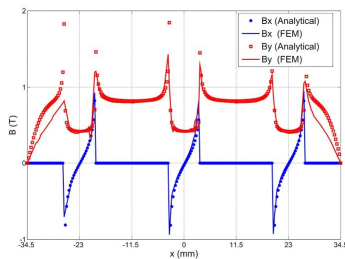


Fig. 13. Magnetic flux density at the top of the gap.

Fig. 14 shows a comparison between the scalar magnetic potential at the top of the gap, at the middle of the gap and over the magnet surface for the analytical proposed method and the FEM analysis using hyperbolic tangent function. Figure 15 compares the analytically and FEM magnetic flux density components at the top of the gap with hyperbolic tangent function.

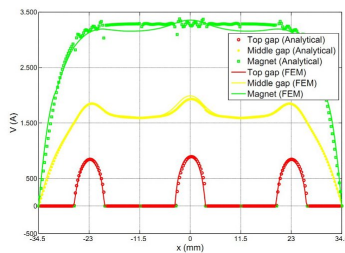


Fig. 14. Magnetic scalar potential with hyperbolic tangent function at the top of the gap (red), in the middle of the gap (yellow) and over the magnet (green)

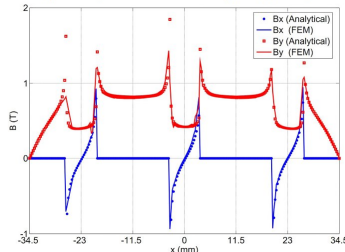


Fig. 15. Magnetic field components at the top of the gap with hyperbolic tangent function.

## 6. Conclusion

A general analytical model for the analysis of an axial flux permanent magnet machine with slots at no load was presented. The proposed method solves the Laplace equation in the gap of an slotted machine via magnetic scalar potential in an interconnected rectangular regions. Having found the scalar potential, we obtain the components of the flux density. The analytical results obtained by the model were compared with those obtained by FEM. The use of the hyperbolic tangent profile allows us to model the potential at the surface of the magnet and improve results. Once the magnetic scalar potential is defined, other parameters, such as the magnetic flux

crossing any given area, the induced electromagnetic force or the cogging torque could be computed. In addition to permanent magnet machines, this technique can be applied to any 2D geometry with the restriction that the geometry should consist of rectangular regions.

## References

- [1] G. Qishan and G. Hongzhan, "Effect of Slotting in Pm Electric Machines", *Electric Machines & Power Systems*, Volume 10, Issue 4, pp. 273-284, 1985.
- [2] E. P. Furlani, "A method for predicting the field in permanent magnet axial field motors", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 5, pp. 2061-2066, 1992.
- [3] Zhu, Z.Q.; Howe, D.; , "Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet DC motors. III. Effect of stator slotting," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.29, no.1, pp.143-151, Jan 1993
- [4] Liu, Z.J.; Li, J.T.; , "Analytical Solution of Air-Gap Field in Permanent-Magnet Motors Taking Into Account the Effect of Pole Transition Over Slots," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.43, no.10, pp.3872-3883, Oct. 2007
- [5] Gysen, B.L.J.; Meessen, K.J.; Paulides, J.J.H.; Lomonova, E.A.; , "General Formulation of the Electromagnetic Field Distribution in Machines and Devices Using Fourier Analysis," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.46, no.1, pp.39-52, Jan. 2010
- [6] Bellara, A.; Amara, Y.; Barakat, G.; Reghem, P.; , "Analytical modelling of the magnetic field in axial flux permanent magnet machines with semi-closed slots at no load," *Electrical Machines (ICEM), 2010 XIX International Conference on* , vol., no., pp.1-6, 6-8 Sept. 2010
- [7] N. Boules, "Prediction of no-load flux density distribution in permanent magnet machines" *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. IA-21, no. 4, pp. 663-643, May/June 1985.
- [8] J. R. Bumby, R. Martin, M. A. Mueller, E. Spooner, N. L. Brown and B. J. Chalmers, "Electromagnetic design of axial-flux permanent magnet machines", *Electric Power Applications, IEE Proceedings*, vol. 151, issue 2, pp. 151-160, March 2004.
- [9] Krop, D.C.J.; Lomonova, E.A.; Vandenput, A.J.A.; , "Application of Schwarz-Christoffel Mapping to Permanent-Magnet Linear Motor Analysis," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.44, no.3, pp.352-359, March 2008
- [10] Gysen, B.L.J.; Lomonova, E.A.; Paulides, J.J.H.; Vandenput, A.J.A.; , "Analytical and Numerical Techniques for Solving Laplace and Poisson Equations in a Tubular Permanent Magnet Actuator: Part II. Schwarz-Christoffel Mapping," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.44, no.7, pp.1761-1767, July 2008
- [11] Boughrara, K.; Zarko, D.; Ibtouen, R.; Touhami, O.; Rezzoug, A.; , "Magnetic Field Analysis of Inset and Surface-Mounted Permanent-Magnet Synchronous Motors Using Schwarz-Christoffel Transformation," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.45, no.8, pp.3166-3178, Aug. 2009
- [12] B. Hague, "The principles of Electromagnetism Applied to Electrical Machines", Dover Publications Inc., New York (1962).
- [13] R. H. Engelmann and W. H. Middendorf, "Handbook of electrical motors". Marcel Dekker Inc, New York (1995) pp. 17-20.
- [14] R. Haberman, "Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno", Prentice Hall (2000).
- [15] D. C. Hanselman, "Brushless permanent magnet motor design". Rhode Island, The Writers' Collective, 2003.



# Apéndice B

## Distribución de potenciales en las fronteras comunes

La aplicación del Método de los Subdominios en regiones interconectadas, requiere de la definición de la distribución de potencial arbitraria que impon-dremos a lo largo de las fronteras comunes a estas regiones. Esta distribución de potencial vendrá definida como una suma infinita de funciones seno, de la forma:

$$f(x) = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi x}{L} \right) \quad (\text{B.1})$$

para  $0 \leq x \leq L$  donde los coeficientes  $H_q$  son incógnitas a determinar. En este apéndice, vamos a justificar que la forma de esta distribución de potenciales arbitraria es totalmente genérica, no condicionando ni imponiendo ninguna restricción a la forma que puede tener esta distribución de potenciales. Para ello, será necesario establecer algunos conceptos relativos a series de Fourier, siguiendo en esta tarea el libro de Richard Haberman [107].

### B.1. Series de Fourier

Una función que se expresa como suma de funciones seno, es un caso especial de series de Fourier. En general, la serie de Fourier de  $f(x)$  en el intervalo  $-L \leq x \leq L$  se define como la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{b} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b} \right) \right] + a_0 \quad (\text{B.2})$$

donde los coeficientes están dados por:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx
 \end{aligned}
 \tag{B.3}$$

Tenemos que distinguir entre la función  $f(x)$  y la serie de Fourier, ya que la serie puede no converger y si converge, puede que no converja a  $f(x)$ . Si converge a  $f(x)$ , la ecuación (B.3) nos proporciona la forma de calcular los coeficientes de la serie.

Para que la serie converja a  $f(x)$  se tiene que cumplir que la función  $f(x)$  sea suave a trozos en el intervalo  $[-L, L]$ ; una función es *suave a trozos* en un intervalo, si el intervalo se puede dividir en subintervalos, tales que en cada uno de ellos la función sea continua y su derivada  $df/dx$  sea también continua. Así, la función  $f(x)$  puede no ser continua en el intervalo, pero el único tipo de discontinuidad permitida es un número finito de discontinuidades salto. Una función  $f(x)$  tiene una discontinuidad de salto en un punto, si existen tanto el límite por la derecha como el límite por la izquierda y son distintos.

Todas las funciones que aparecen en una serie de Fourier son periódicas con periodo  $2L$ . Por lo tanto, la serie de Fourier de  $f(x)$  en el intervalo  $-L \leq x \leq L$  es periódica con periodo  $2L$ . La función  $f(x)$  no es necesariamente periódica, por lo que necesitaríamos, en caso de no serlo, una extensión periódica de  $f(x)$ ; para contruirla dibujamos  $f(x)$  en el intervalo  $-L \leq x \leq L$  y después repetimos ese mismo patrón con periodo  $2L$  trasladando el dibujo original. La figura B.1 muestra la función  $f(x) = \frac{3}{2}x$  (en trazo discontinuo para  $|x| \geq L$ ) y su extensión periódica.

El **teorema de la convergencia de las series de Fourier** establece que *si una función  $f(x)$  es suave a trozos en el intervalo  $-L \leq x \leq L$ , entonces la serie de Fourier de  $f(x)$  converge a la extensión periódica de  $f(x)$ , donde la extensión periódica es continua, y a la media de los límites laterales, donde la extensión periódica tiene una discontinuidad de salto.*

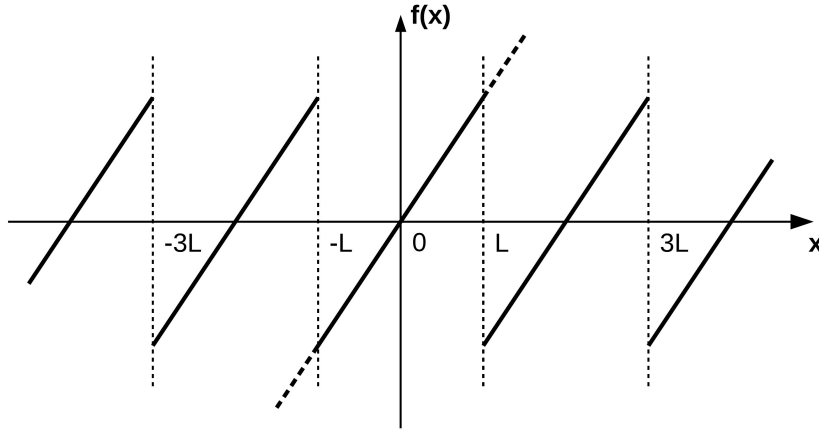


Figura B.1: Extensión periódica de  $f(x) = \frac{3}{2}x$

Para representar que la serie de Fourier de una función  $f(x)$  es la serie infinita emplearemos la notación

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (\text{B.4})$$

donde el símbolo  $\sim$  se lee “su serie de Fourier es”.

## B.2. Serie de Fourier de senos

Una **función impar** es una función con la propiedad  $f(x) = -f(-x)$ . Si, con ayuda de (B.3), calculamos los coeficientes  $a_0$  y  $a_n$  de la serie de Fourier de una función impar, obtenemos que ambos son cero, por lo tanto la serie de Fourier de una función impar sólo posee términos en seno:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (\text{B.5})$$

Además, la fórmula que permite calcular los coeficientes  $b_n$  se simplifica, resultando:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (\text{B.6})$$

El problema es que sólo ocasionalmente nos encontraremos con una función impar de la que tengamos que calcular su serie de Fourier, pero frecuentemente aparecerán series de senos en el contexto de la resolución de ecuaciones diferenciales por el método de separación de variables, como es el caso que nos ocupa.

Aquí, hemos impuesto una distribución de potenciales en el intervalo  $[-0, L]$  de la forma dada por (B.1), que repetimos por claridad:

$$f(x) = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi x}{L} \right) \quad (\text{B.7})$$

Aunque las ecuaciones (B.7) y (B.5) tiene la misma forma, existen diferencias importantes entre ambas: en (B.5) sabemos que  $f(x)$  es una función impar definida para  $-L \leq x \leq L$ , mientras que en (B.7),  $f(x)$  sólo está definida en el intervalo  $0 \leq x \leq L$  y no tiene necesariamente que ser impar.

Esto último no constituye ningún impedimento, ya que, si solamente conocemos  $f(x)$  para  $0 \leq x \leq L$ , podemos extenderla como una función impar, obteniendo otra función llamada **extensión impar de  $f(x)$** : La extensión impar de  $f(x)$  está definida para  $-L \leq x \leq L$  y podemos aplicar el teorema de convergencia de series de Fourier, si la extensión impar de  $f(x)$  es suave a trozos, lo cual requiere que la función  $f(x)$  sea suave a trozos en el intervalo  $[0, L]$ .

Más aún, como la extensión impar de  $f(x)$  es impar, su serie de Fourier sólo tiene senos:

$$\text{extensión impar de } f(x) \sim \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi x}{L} \right), \quad -L \leq x \leq L$$

donde los  $B_n$  se obtendrán a partir de (B.6), resultando

$$H_q = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi x}{L} \right) dx \quad (\text{B.8})$$

Nosotros estamos interesados solamente en lo que ocurre entre  $x = 0$  y  $x = L$ . En ese intervalo,  $f(x)$  y su extensión impar son idénticas por lo que

$$f(x) \sim \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi x}{L} \right), \quad 0 \leq x \leq L \quad (\text{B.9})$$

donde los  $H_q$  están dados por B.8.

A la serie dada por (B.9) la llamaremos **serie de Fourier de senos de  $f(x)$** . En la figura B.2 se muestra la función  $f(x)$  (definida para  $0 \leq x \leq L$ ) y su extensión impar (definida para  $-L \leq x \leq L$ ).

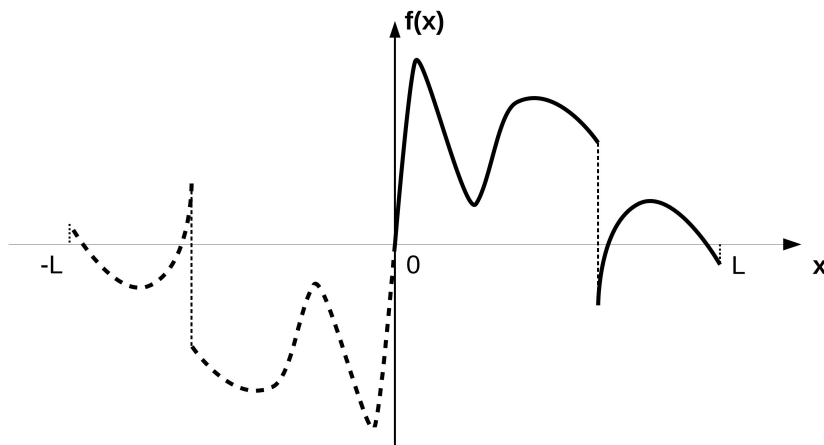


Figura B.2: Función  $f(x)$  y su extensión impar

Por todo lo expuesto y sin ninguna pérdida de generalidad, queda justificado que, en las fronteras comunes entre regiones adyacentes, la variación de su potencial magnético escalar vendrá expresado por una suma infinita de funciones seno de la forma:

$$f(y) = \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{b} \right)$$

donde los coeficientes  $H_q$  son incógnitas a determinar.





# Apéndice C

## Cálculo del campo en una región rectangular con diferentes condiciones de contorno

En varios capítulos de la memoria de este trabajo de tesis vamos a necesitar la expresión del potencial escalar en una región rectangular, para diferentes condiciones de contorno; en lugar de ir obteniendo las diferentes expresiones del potencial escalar según se van necesitando, preferimos concentrar en un sólo apartado (este anexo) todos estos cálculos.

El potencial escalar sigue cumpliendo la ecuación de Laplace y, por lo tanto, una solución general de esta ecuación será la que obteníamos en el apartado 3.1 (ecuación 3.1) y que reproducimos a continuación:

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\beta_n x) \cosh(\beta_n y) + B_n \cos(\beta_n x) \sinh(\beta_n y) + C_n \sin(\beta_n x) \cosh(\beta_n y) + D_n \sin(\beta_n x) \sinh(\beta_n y)] \quad (\text{C.1})$$

Debemos determinar los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  y  $\beta_n$  mediante la aplicación de las condiciones de contorno del problema. Veamos diferentes casos:

### Caso#1: Potencial uniforme

Resolvamos el problema de hallar el campo en una región rectangular en cuyo perímetro el potencial es nulo excepto en un lado donde es constante y de valor  $V_o$ . Sea  $y = b$  este lado (figura C.1).

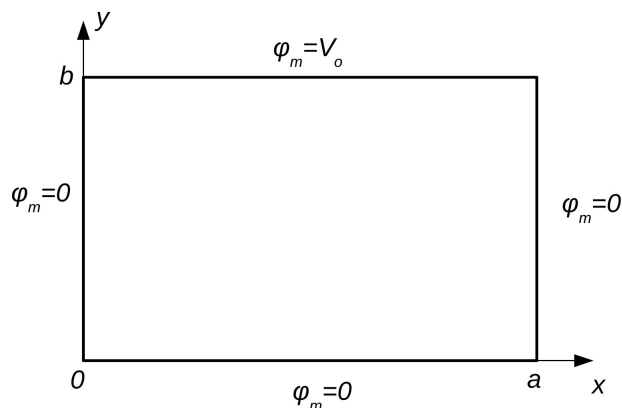


Figura C.1: Región rectangular con potencial uniforme en el lado superior

Esta situación coincide con la considerada en el Ejemplo 1 del capítulo 3 y, lógicamente, su solución coincidirá con la obtenida en dicho ejemplo, solución que reescribimos a continuación:

$$\varphi_m(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_0}{(2k+1)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{a} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{a} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{a} \right] \quad (\text{C.2})$$

**Caso#2: Potencial simétrico en  $x = 0$**

Resolvamos la distribución de potenciales en una fracción de una región rectangular que hemos dividido simétricamente. Uno de los lados exteriores se mantiene a un potencial  $\varphi_m = V_0$ , los otros dos lados se mantienen a cero y del lado interior, eje de simetría, no sabemos nada, salvo que, obviamente,  $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  por la simetría (figura C.2).

Primeramente plantearemos las condiciones de contorno:

- $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$  y
- $\varphi_m = V_0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .

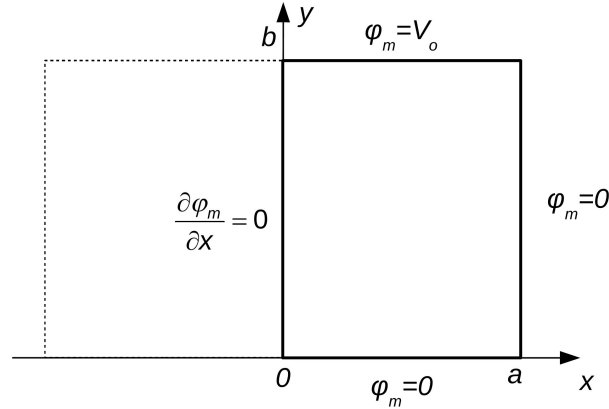


Figura C.2: Fracción de la región rectangular con simetría en  $x = 0$

- $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .

La expresión del potencial escalar viene dada por:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n (A_n \cos \beta_n x \cosh \beta_n y + B_n \cos \beta_n x \sinh \beta_n y + C_n \sin \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \sin \beta_n x \sinh \beta_n y)$$

Si derivamos la anterior ecuación, obtenemos:

$$\frac{\partial\varphi_m(x, y)}{\partial x} = \sum_n (-A_n \beta_n \sin \beta_n x \cosh \beta_n y - B_n \beta_n \sin \beta_n x \sinh \beta_n y + C_n \beta_n \cos \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \beta_n \cos \beta_n x \sinh \beta_n y)$$

que, al sustituir la condición de contorno, llegamos a:

$$\left. \frac{\partial\varphi_m(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 = \sum_n (C_n \beta_n \cosh \beta_n y + D_n \beta_n \sinh \beta_n y)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que  $C_n = 0$  y  $D_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n (A_n \cos \beta_n x \cosh \beta_n y + B_n \cos \beta_n x \sinh \beta_n y)$$

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos dos valores en la solución proporcionada por aplicación de la anterior condición de contorno llegamos a que:

$$\varphi_m(x, 0) = 0 = \sum_n (A_n \cos \beta_n x)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  y  $x$ , la única posibilidad es que  $A_n = 0$ , quedando la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n B_n \cos \beta_n x \sinh \beta_n y$$

- $v = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(a, y) = 0 = \sum_n B_n \cos \beta_n a \sinh \beta_n y$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que el  $\cos \beta_n a = 0$ , o, lo que es lo mismo, que  $\beta_n a = m(\pi/2)$  (donde  $m$  es cualquier número entero). La solución quedará como:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n B_n \cos \left( \frac{n\pi x}{2a} \right) \sinh \left( \frac{n\pi y}{2a} \right)$$

en donde hemos sustituido  $m$  por  $n$  ya que con cualquier entero se satisface la solución encontrada.

- $\varphi_m = V_0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(x, b) = V_0 = \sum_n B_n \cos \left( \frac{n\pi x}{2a} \right) \sinh \left( \frac{n\pi b}{2a} \right)$$

Para poder extraer algo de información de esta condición recurriremos al desarrollo en serie de Fourier de una distribución rectangular  $\varphi_m = V_0$  para  $0 \leq x \leq a$ , y en el que el límite por la izquierda de  $x = 0$  cumple que  $\partial v / \partial x = 0$  y el límite por la derecha de  $x = a$  es cero. Este desarrollo viene dado por:

$$\varphi_m(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_0 (-1)^k}{(2k+1)} \cos \left[ (2k+1) \frac{\pi x}{2a} \right]$$

El desarrollo debe ser igual a la fórmula anterior, por lo que identificando ambas (y eliminando los términos pares pues el desarrollo en serie de Fourier nos los tiene) tenemos que:

$$B_n \sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{2a} \right] = \frac{4 V_0 (-1)^k}{\pi (2k+1)}$$

es decir

$$B_n = \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{(2k+1)} \frac{(-1)^k}{\sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{2a} \right]}$$

Así que sustituyendo este valor en la solución de la condición de contorno anterior obtenemos la solución final para la distribución del potencial en el interior de la región rectangular en función de  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} \varphi_m(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_0 (-1)^k}{(2k+1)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{2a} \right] \cdot \\ \cdot \sinh \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{2a} \right] \cdot \cos \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

### Caso#3: Potencial simétrico en $x = a$

Resolvamos otro ejemplo similar al anterior, donde la región rectangular también la hemos dividido simétricamente, pero el eje de simetría está en  $x = a$  en vez de en  $x = 0$  (figura C.3).

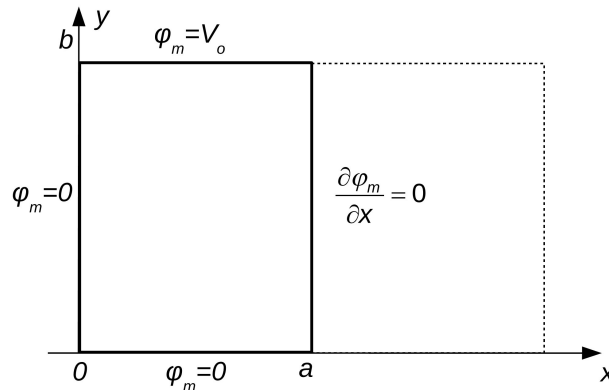


Figura C.3: Fracción de la región rectangular con simetría en  $x = a$

Primeramente plantearemos las condiciones de contorno:

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\partial \varphi_m / \partial x = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$  y
- $\varphi_m = V_0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .

Sustituiremos estas condiciones de contorno en el modelo general de solución para obtener los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  y  $\beta_n$ .

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución general llegamos a que

$$\varphi_m(0, y) = 0 = \sum_n (A_n \cosh \beta_n y + B_n \sinh \beta_n y)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que  $A_n = 0$  y  $B_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n (C_n \sin \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \sin \beta_n x \sinh \beta_n y)$$

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos dos valores en la solución obtenida por aplicación de la anterior condición de contorno llegamos a que:

$$\varphi_m(x, 0) = 0 = \sum_n (C_n \sin \beta_n x)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  y  $x$ , la única posibilidad es que  $C_n = 0$ , quedando la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n D_n \sin \beta_n x \sinh \beta_n y$$

- $\partial \varphi_m / \partial x = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ . Primeramente derivaremos respecto a  $x$  la ecuación de la solución que nos resultó de la aplicación de las condiciones de contorno anteriores y luego sustituiremos los valores de contorno llegando a:

$$\frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial x} = \sum_n D_n \beta_n \cos \beta_n x \sinh \beta_n y$$

e imponiendo la condición de contorno resulta:

$$\left. \frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 = \sum_n D_n \beta_n \cos \beta_n a \sinh \beta_n y$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que el  $\cos \beta_n a = 0$ , o, lo que es lo mismo,

que  $\beta_n a = m(\pi/2)$  (donde  $m$  es cualquier número entero). La solución quedará como:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n D_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{2a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{2a} \right)$$

en donde hemos sustituido  $m$  por  $n$  ya que con cualquier entero se satisface la solución encontrada.

- $\varphi_m = V_0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(x, b) = V_0 = \sum_n D_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{2a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi b}{2a} \right)$$

Para poder extraer algo de información de esta condición recurriremos al desarrollo en serie de Fourier de una distribución rectangular  $\varphi_m = V_0$  para  $0 \leq x \leq a$ , y en el que el límite por la derecha de  $x = a$  cumple que  $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  y el límite por la izquierda de  $x = 0$  es cero. Este desarrollo viene dado por:

$$\varphi_m(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_0}{(2k+1)} \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \right]$$

El desarrollo debe ser igual a la fórmula anterior, por lo que identificando ambas (y eliminando los términos pares pues el desarrollo en serie de Fourier nos los tiene) tenemos que:

$$D_n \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{2a} \right] = \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{(2k+1)}$$

es decir

$$D_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{V_0}{(2k+1)} \cdot \frac{1}{\operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{2a} \right]} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{V_0}{(2k+1)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{2a} \right]$$

Así que sustituyendo este valor en la solución de la condición de contorno anterior obtenemos la solución final para la distribución del potencial escalar en el interior de la región rectangular en función de  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} \varphi_m(x, y) = & \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_0}{(2k+1)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k+1)\pi b}{2a} \right] \cdot \\ & \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k+1)\pi y}{2a} \right] \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

**Caso#4: Potencial dependiente de la posición en  $x = a$**

Resolvamos un ejemplo distinto a los anteriores al cambiar el potencial constante al que sometíamos a uno de los lados por un potencial función de su posición en la región; además esta función la representaremos por su desarrollo en serie de Fourier. En la región rectangular mantendremos uno de los lados externos a un potencial  $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)y$  para  $0 \leq y \leq b$  y los otros tres lados se mantienen a potencial cero (figura C.4).

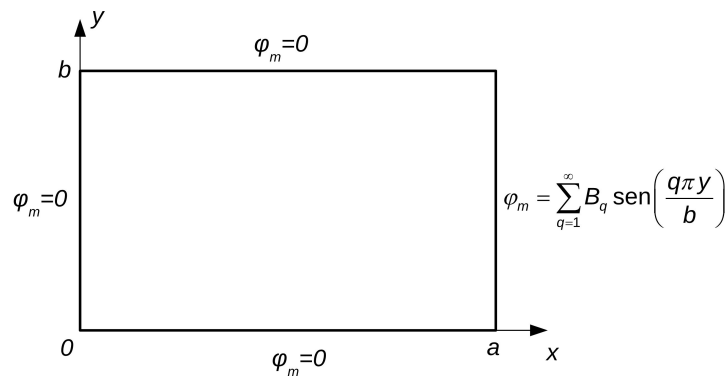


Figura C.4: Región rectangular donde el potencial del lado  $x = a$  varía con la posición

En este caso las condiciones de contorno son:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .

Si cambiamos la variable  $x$  por la variable  $y$  nos quedará:

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = b$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)x$  en  $y = a$  para cualquier valor de  $x$ .



Sustituiremos estas condiciones de contorno en el modelo general de solución para obtener los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  y  $\beta_n$ .

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución general llegamos a que

$$\varphi_m(0, y) = 0 = \sum_n (A_n \cosh \beta_n y + B_n \sinh \beta_n y)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que  $A_n = 0$  y  $B_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n (C_n \sen \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \sen \beta_n x \sinh \beta_n y)$$

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos dos valores en la solución obtenida al aplicar la anterior condición de contorno llegamos a que:

$$\varphi_m(x, 0) = 0 = \sum_n (C_n \sen \beta_n x)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  y  $x$ , la única posibilidad es que  $C_n = 0$ , quedando la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n D_n \sen \beta_n x \sinh \beta_n y$$

- $v = 0$  en  $x = b$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(b, y) = 0 = \sum_n D_n \sen \beta_n b \sinh \beta_n y$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que el  $\sen \beta_n b = 0$ , o, lo que es lo mismo, que  $\beta_n b = m\pi$  (donde  $m$  es cualquier número entero). La solución quedará como:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n D_n \sen \left( \frac{n\pi x}{b} \right) \sinh \left( \frac{n\pi y}{b} \right)$$

en donde hemos sustituido  $m$  por  $n$  ya que con cualquier entero se satisface la solución encontrada.

- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)x$  en  $y = a$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(x, a) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)x = \sum_n D_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \text{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$$

Por lo que identificando términos llegamos a que:

$$D_n = \frac{B_q}{\text{senh}\left(\frac{q\pi a}{b}\right)} = B_q \cdot \text{csch}\left(\frac{q\pi a}{b}\right)$$

Así que sustituyendo este valor en la solución de la condición de contorno anterior obtenemos:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \text{csch}\left(\frac{q\pi a}{b}\right) \cdot \text{senh}\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{q\pi x}{b}\right)$$

y volviendo a intercambiar la variable  $x$  por la  $y$ , tendremos la solución final:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \text{csch}\left(\frac{q\pi a}{b}\right) \cdot \text{senh}\left(\frac{q\pi x}{b}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (\text{C.5})$$

### Caso#5: Potencial dependiente de la posición en $x = 0$

Resolvamos otro ejemplo similar al anterior, donde sometemos uno de los lados a un potencial que varía con la posición, el cual expresamos por su desarrollo en serie de Fourier ( $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)y$  para  $0 \leq y \leq b$ ), mientras que los tres lados restantes se mantienen a potencial cero, pero ahora el lado del potencial variable está en  $x = 0$  (figura C.5).

En este caso las condiciones de contorno son:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .

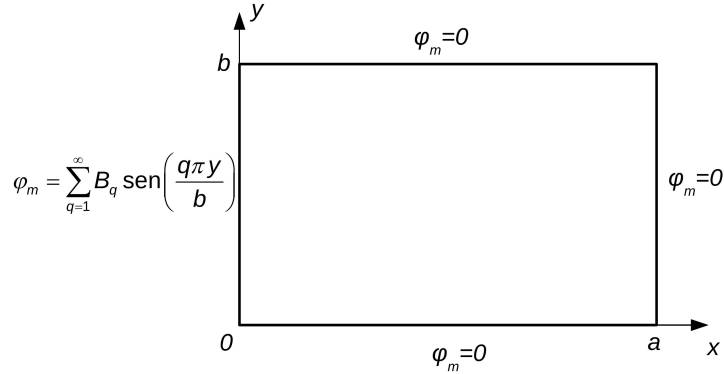


Figura C.5: Región rectangular donde el potencial del lado  $x = 0$  varía con la posición

Si cambiamos la variable  $x$  por la variable  $a - x$  nos quedará:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .

condiciones de contorno idénticas a las del caso anterior. Por lo tanto, la expresión del potencial escalar será igual a la obtenida en este caso (ecuación C.5), es decir:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{q\pi a}{b}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{q\pi x}{b}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$$

y volviendo a intercambiar la variable  $x$  por la  $a - x$ , tendremos la solución final:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{q\pi a}{b}\right) \cdot \operatorname{senh}\left[\frac{q\pi(a-x)}{b}\right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (\text{C.6})$$

### Caso#6: Potencial dependiente de la posición en $x = a$ con anchura doble

Resolvamos otro ejemplo similar al caso#4, donde consideramos una región rectangular donde el lado  $x = a$  se somete a un potencial variable

con la posición y el cual expresamos por su desarrollo en serie de Fourier ( $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)y$ ) y los otros tres lados se mantienen a potencial cero, pero ahora la anchura de la región es  $2a$  (figura C.6).

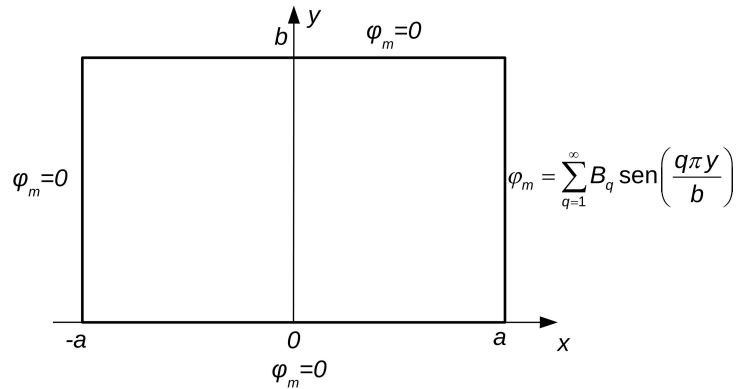


Figura C.6: Región rectangular de anchura  $2a$  donde el potencial del lado  $x = a$  varía con la posición

En este caso las condiciones de contorno son:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = -a$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .

Si sustituimos la variable  $x$  por  $x - a$ , las condiciones de contorno serán:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = 2a$  para cualquier valor de  $y$ .

Si ahora, reemplazamos la constante  $2a$  por  $a$ , las nuevas condiciones de contorno que resultan son:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .

que coinciden con las condiciones de contorno del caso#4. Por lo tanto, la expresión del potencial escalar será la correspondiente a la ecuación (C.5):

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{q\pi a}{b}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{q\pi x}{b}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$$

Si deshacemos los cambios introducidos, es decir, sustituimos la constante  $a$  por  $2a$  y la variable  $x$  por  $x + a$ , obtendremos la expresión del potencial escalar de este caso, siendo dicha expresión:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{2q\pi a}{b}\right) \cdot \operatorname{senh}\left[\frac{q\pi(x+a)}{b}\right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (\text{C.7})$$

### Caso#7: Potencial dependiente de la posición en $x = -a$ con anchura doble

Resolvamos un caso similar al anterior, pero ahora el lado en el que el potencial varía con la posición es  $x = -a$  (figura C.7).

Las condiciones de contorno son:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = -a$  para cualquier valor de  $y$ .

Si sustituimos la variable  $x$  por  $-x$ , las condiciones de contorno serán:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = -a$  para cualquier valor de  $y$ .

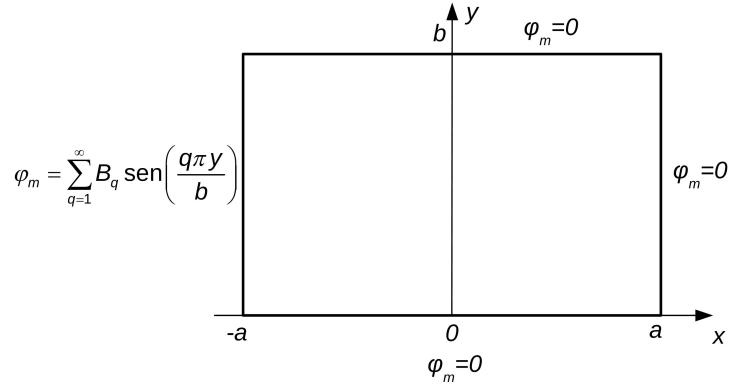


Figura C.7: Región rectangular de anchura  $2a$  donde el potencial del lado  $x = -a$  varía con la posición

- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .

que coinciden con las condiciones de contorno del caso#6. Por lo tanto, la expresión del potencial escalar será la correspondiente a la ecuación (C.7):

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{2q\pi a}{b}\right) \cdot \operatorname{senh}\left[\frac{q\pi(x+a)}{b}\right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$$

Si deshacemos el cambio introducido, sustituyendo la variable  $x$  por  $-x$ , obtendremos la expresión del potencial escalar de este caso, siendo dicha expresión:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{2q\pi a}{b}\right) \cdot \operatorname{senh}\left[\frac{q\pi(a-x)}{b}\right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (\text{C.8})$$

**Caso#8: Potencial con simetría en  $x = 0$  y dependiente de la posición en  $x = a$**

Resolvamos la distribución de potenciales en una fracción de una región rectangular que hemos dividido simétricamente, donde sometemos uno de los lados a un potencial que varía con la posición, el cual expresamos por su desarrollo en serie de Fourier ( $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen}(q\pi/b)y$  para  $0 \leq y \leq b$ ), los

otros dos lados se mantienen a cero y del lado interior, eje de simetría, no sabemos nada, salvo que, obviamente,  $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  por la simetría (figura C.8).

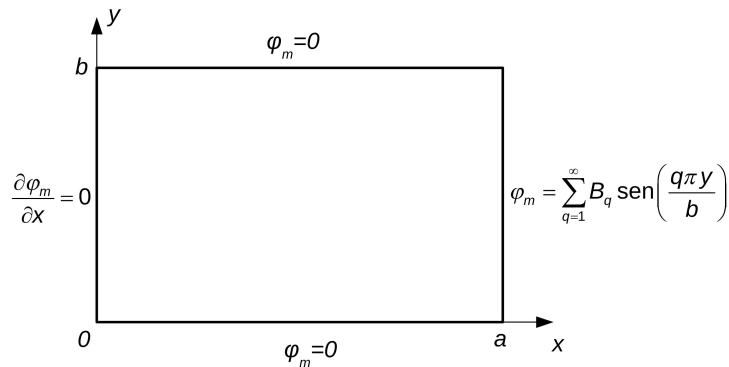


Figura C.8: Fracción de la región rectangular con simetría en  $x = 0$  y potencial dependiente de la posición en  $x = a$

Primeramente plantearemos las condiciones de contorno:

- $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .

Si cambiamos la variable  $x$  por la variable  $y$  nos quedará:

- $\partial\varphi_m/\partial y = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)x$  en  $y = a$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $x = b$  para cualquier valor de  $y$ .

Sustituiremos estas condiciones de contorno en el modelo general de solución para obtener los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  y  $\beta_n$ .

- $\partial\varphi_m/\partial y = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ .

La expresión del potencial escalar viene dada por:

$$\begin{aligned}\varphi_m(x, y) = & \sum_n (A_n \cos \beta_n x \cosh \beta_n y + B_n \cos \beta_n x \sinh \beta_n y + \\ & + C_n \sin \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \sin \beta_n x \sinh \beta_n y)\end{aligned}$$

Si derivamos la anterior ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_m(x, y)}{\partial y} = & \sum_n (A_n \beta_n \cos \beta_n x \sinh \beta_n y + B_n \beta_n \cos \beta_n x \cosh \beta_n y + \\ & + C_n \beta_n \sin \beta_n x \sinh \beta_n y + D_n \beta_n \sin \beta_n x \cosh \beta_n y)\end{aligned}$$

que, al sustituir la condición de contorno, llegamos a:

$$\left. \frac{\partial\varphi_m(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 = \sum_n (B_n \beta_n \cos \beta_n x + D_n \beta_n \sin \beta_n x)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  y  $x$ , la única posibilidad es que  $B_n = 0$  y  $D_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n (A_n \cos \beta_n x \cosh \beta_n y + C_n \sin \beta_n x \cosh \beta_n y)$$

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la solución proporcionada por aplicación de la anterior condición de contorno llegamos a que:

$$\varphi_m(0, y) = 0 = \sum_n (A_n \cosh \beta_n y)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que  $A_n = 0$ , quedando la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n C_n \sin \beta_n x \cosh \beta_n y$$

- $\varphi_m = 0$  en  $x = b$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(b, y) = 0 = \sum_n C_n \sin \beta_n b \cosh \beta_n y$$



y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que el  $\text{sen}\beta_n b = 0$ , o, lo que es lo mismo, que  $\beta_n b = m\pi$  (donde  $m$  es cualquier número entero). La solución quedará como:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cosh\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

en donde hemos sustituido  $m$  por  $n$  ya que con cualquier entero se satisface la solución encontrada.

- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)x$  en  $y = a$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(x, a) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)x = \sum_n C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$$

Por lo que identificando términos llegamos a que:

$$C_q = \frac{B_q}{\cosh\left(\frac{q\pi a}{b}\right)} = B_q \cdot \text{sech}\left(\frac{q\pi a}{b}\right)$$

Así que sustituyendo este valor en la solución de la condición de contorno anterior obtenemos:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \text{sech}\left(\frac{q\pi a}{b}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{q\pi x}{b}\right) \cdot \cosh\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$$

y volviendo a intercambiar la variable  $x$  por la  $y$ , tendremos la solución final:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \text{sech}\left(\frac{q\pi a}{b}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \cdot \cosh\left(\frac{q\pi x}{b}\right) \quad (\text{C.9})$$

### Caso#9: Potencial dependiente de la posición en $x = 0$ y con simetría en $x = a$

Resolvamos un caso similar al anterior pero donde hemos intercambiado las condiciones de  $x = 0$  y de  $x = a$ , es decir, tenemos un potencial en  $x = 0$  que varía con la posición, el cual seguimos expresando por su desarrollo en serie de Fourier ( $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen}(q\pi/b)y$  para  $0 \leq y \leq b$ ), un eje de simetría en  $x = a$  y los otros dos lados se mantienen a cero. Debido a la

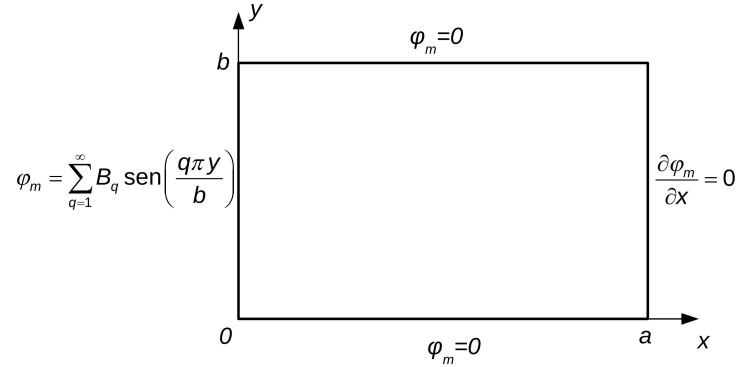


Figura C.9: Fracción de la región rectangular con un potencial dependiente de la posición en  $x = 0$  y simetría en  $x = a$

condición del eje de simetría, sabemos que  $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  en  $x = a$  (figura C.9).

Primeramente plantearemos las condiciones de contorno:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ ,

Si cambiamos la variable  $x$  por la variable  $a - x$  nos quedará:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen}(q\pi/b)y$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ ,

condiciones de contorno idénticas a las del caso anterior. Por lo tanto, la expresión del potencial escalar será igual a la obtenida en este caso (ecuación C.9), es decir:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \operatorname{sech}\left(\frac{q\pi a}{b}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \cdot \cosh\left(\frac{q\pi x}{b}\right)$$

y volviendo a intercambiar la variable  $x$  por la  $a - x$ , tendremos la solución final:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \cdot \operatorname{sech} \left( \frac{q\pi a}{b} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{b} \right) \cdot \cosh \left[ \frac{q\pi (a - x)}{b} \right] \quad (\text{C.10})$$

**Caso#10: Potencial con simetría en  $x = 0$  y con dos funciones en  $x = a$**

Resolvamos otro ejemplo distinto a los anteriores al dividir uno de los lados del contorno en dos partes y aplicar a cada una de las partes una función de potencial distinta, esto es, haremos  $\varphi_m = 1$  para  $0 \leq y \leq b$  y  $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(y-b)}{c} \right]$  para  $b \leq y \leq b + c$ , los otros dos lados se mantienen a cero y del lado interior, eje de simetría, no sabemos nada, salvo que  $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  por la simetría (figura C.10).

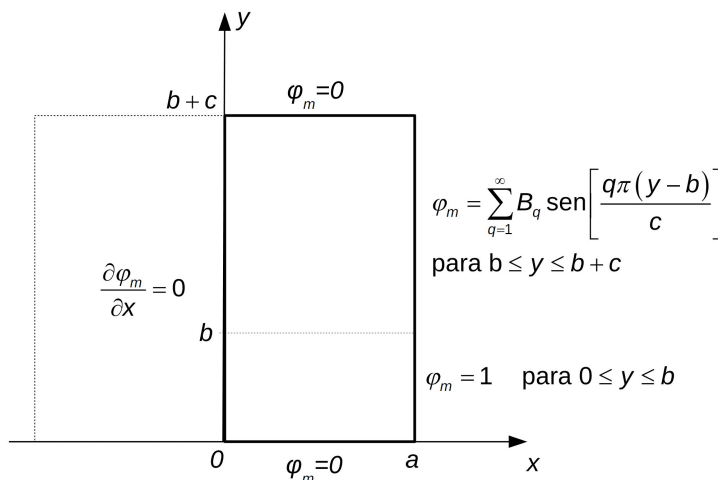


Figura C.10: Región rectangular en la que se divide uno de los lados en dos partes y se aplica a cada una de las partes una función de potencial distinta. Además, se mantienen otros dos lados a potencial cero y el cuarto lado es un eje de simetría.

En este caso las condiciones de contorno son:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ ,

- $\varphi_m = 0$  en  $y = b + c$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = [1 - \theta(y - b)] + \theta(y - b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen} \left[ \frac{q\pi(y-b)}{c} \right]$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ , donde  $\theta(y - b)$  es la función escalón de Heaviside y cuya definición es:

$$\theta(y - b) = \begin{cases} 1 & y > b \\ 0 & y < b \end{cases}$$

Si cambiamos la variable  $x$  por la variable  $y$  nos quedará:

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ ,
- $\partial\varphi_m/\partial y = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $x = b + c$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = [1 - \theta(x - b)] + \theta(x - b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right]$  en  $y = a$  para cualquier valor de  $x$ .

Sustituiremos estas condiciones de contorno en el modelo general de solución para obtener los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  y  $\beta_n$ .

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución general llegamos a que:

$$0 = \sum_n (A_n \cosh \beta_n y + B_n \text{senh} \beta_n y)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor  $\beta_n$  y  $y$ , la única posibilidad es que  $A_n = 0$  y  $B_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n (C_n \text{sen} \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \text{sen} \beta_n x \text{senh} \beta_n y)$$

- $\partial\varphi_m/\partial y = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ . Si derivamos la anterior ecuación, obtenemos:

$$\frac{\partial\varphi_m(x, y)}{\partial y} = \sum_n (C_n \beta_n \text{sen} \beta_n x \text{senh} \beta_n y + D_n \beta_n \text{sen} \beta_n x \cosh \beta_n y)$$

que, al sustituir la condición de contorno, llegamos a:

$$\left. \frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 = \sum_n D_n \beta_n \operatorname{sen} \beta_n x$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  y  $x$ , la única posibilidad es que  $D_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n C_n \operatorname{sen} \beta_n x \cosh \beta_n y$$

- $\varphi_m = 0$  en  $x = b + c$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(b + c, y) = \sum_n C_n \operatorname{sen} [\beta_n (b + c)] \cosh \beta_n y$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que el  $\operatorname{sen}[\beta_n(b + c)] = 0$ , o, lo que es lo mismo, que  $\beta_n(b + c) = m\pi$  (donde  $m$  es cualquier número entero). La solución quedará como:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n C_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b + c} \right) \cosh \left( \frac{n\pi y}{b + c} \right)$$

en donde hemos sustituido  $m$  por  $n$  ya que con cualquier entero se satisface la solución encontrada.

- $\varphi_m = [1 - \theta(x - b)] + \theta(x - b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right]$  en  $y = a$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} [1 - \theta(x - b)] + \theta(x - b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x - b)}{c} \right] &= \\ &= \sum_n C_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b + c} \right) \cosh \left( \frac{n\pi a}{b + c} \right) \end{aligned}$$

Como podemos observar no podemos identificar términos como en los ejemplos anteriores por lo que para obtener los coeficientes  $C_n$  de la serie de Fourier habrá que aplicar su definición:

$$C_n \cosh \left( \frac{n\pi a}{b + c} \right) = \frac{2}{b + c} \int_0^{b+c} \left\{ [1 - \theta(x - b)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\theta(x-b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] \left. \right\} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) dx = \\
& = \frac{2}{b+c} \int_0^b \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) dx + \frac{2}{b+c} \int_b^{b+c} \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) dx
\end{aligned}$$

Para acometer la resolución de esta integral se ha dividido en dos, resolviendo a continuación cada una de ellas por separado. La primera integral es:

$$\frac{2}{b+c} \int_0^b \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) dx = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi\alpha)]$$

donde

$$\alpha = \frac{b}{b+c}$$

y

$$1 - \alpha = \frac{c}{b+c}$$

En la segunda integral tenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{b+c} \int_b^{b+c} \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) dx = \\
& = \sum_{q=1}^{\infty} \int_b^{b+c} B_q \frac{2}{b+c} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] dx = \\
& = \sum_{q=1}^{\infty} \int_b^{b+c} B_q \frac{2}{b+c} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] dx = \\
& = \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{1/\alpha} 2B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz
\end{aligned}$$

donde se ha cambiado  $x$  por  $bz$ , además de emplear el término  $\alpha$ . La integral resultante la resolveremos integrando por partes dos veces consecutivas. Haciendo primeramente:

$$u = 2B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] \Rightarrow du = 2B_q \frac{q\pi b}{c} \cos \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz$$

y

$$dv = \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) dz \Rightarrow v = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi\alpha z)$$

resultando:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz &= \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{-2 B_q}{n\pi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] \cos(n\pi\alpha z) \Big|_1^{1/\alpha} + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} \frac{2qb B_q}{nc} \cos(n\pi\alpha z) \cos \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz \end{aligned}$$

Haciendo por segunda vez:

$$u = \frac{2qb B_q}{nc} \cos \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] \Rightarrow du = \frac{-2 q^2 b^2 \pi B_q}{n c^2} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz$$

y

$$dv = \cos(n\pi\alpha z) dz \Rightarrow v = \frac{1}{n\pi\alpha} \operatorname{sen}(n\pi\alpha z)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz &= \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{-2 B_q}{n\pi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] \cos(n\pi\alpha z) \Big|_1^{1/\alpha} + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2qb B_q}{n^2 \pi \alpha c} \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \cos \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] \Big|_1^{1/\alpha} + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q^2 b^2}{n^2 c^2 \alpha^2} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz \end{aligned}$$

Reuniendo las dos integrales en el lado izquierdo de la ecuación y sacando factor común, queda:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{q^2 b^2}{n^2 c^2 \alpha^2} \right) \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz = \\ & = \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{-2 B_q}{n\pi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] \cos(n\pi\alpha z) \Big|_1^{1/\alpha} \right\} + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{2qb B_q}{n^2 \pi \alpha c} \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \cos \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] \Big|_1^{1/\alpha} \right\} \end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\frac{b}{\alpha c} = \frac{1}{1-\alpha}$$

queda:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz = \\ & = \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 - \left[ \frac{q}{n(1-\alpha)} \right]^2} \frac{-2 B_q}{n\pi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] \cos(n\pi\alpha z) \Big|_1^{1/\alpha} \right\} + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 - \left[ \frac{q}{n(1-\alpha)} \right]^2} \frac{2q B_q}{n^2 \pi (1-\alpha)} \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \cos \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] \Big|_1^{1/\alpha} \right\} \end{aligned}$$

Integral válida siempre que  $q \neq n(1-\alpha)$ . Quedando finalmente, en los límites de integración impuestos:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz = \\ & = \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 - \left[ \frac{q}{n(1-\alpha)} \right]^2} \frac{-2q B_q}{n^2 \pi (1-\alpha)} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \right\} = \\ & = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{q B_q}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} \right] \end{aligned}$$



Introduciendo la condición  $q \neq n(1 - \alpha)$  en la solución, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz &= \\ &= \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} \right] B_q \end{aligned}$$

siendo  $\delta_{q,n(1-\alpha)}$  la función delta de Kronecker, de manera que

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Si se cumpliera que  $q = n(1-\alpha)$  tendríamos una indeterminación y para resolver la integral no nos queda más remedio que volver al comienzo y hacer  $q/(1-\alpha) = n$ . Además utilizaremos que  $b/c = \alpha/(1-\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz &= \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} [n\pi\alpha(z-1)] dz \end{aligned}$$

Integral que podemos resolver utilizando la relación

$$\operatorname{sen} \left( \frac{A+B}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{B-A}{2} \right) = \frac{1}{2} (\cos A - \cos B)$$

sin más que hacer  $A = n\pi\alpha$  y  $B = n\pi\alpha(2z-1)$ . Quedando, por tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz &= \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} B_q \alpha \{ \cos(n\pi\alpha) - \cos[n\pi\alpha(2z-1)] \} dz = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} B_q \alpha z \cos(n\pi\alpha) \Big|_1^{1/\alpha} - \frac{B_q}{2n\pi} \operatorname{sen}[n\pi\alpha(2z-1)] \Big|_1^{1/\alpha} \end{aligned}$$

Al operar entre los límites de integración obtenemos:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q=1}^{\infty} (1 - \alpha) B_q \cos(n\pi\alpha) + \frac{B_q}{2n\pi} \{ \text{sen}(n\pi\alpha) - \text{sen}[n\pi(2 - \alpha)] \} = \\
&= \sum_{q=1}^{\infty} (1 - \alpha) B_q \cos(n\pi\alpha) = \sum_{q=1}^{\infty} (1 - \alpha) B_q \cos\left(q\pi \frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) = \\
&= \sum_{q=1}^{\infty} (1 - \alpha) B_q \cos\left(\frac{q\pi b}{c}\right)
\end{aligned}$$

ya que:

$$\text{sen}(n\pi\alpha) = -\text{sen}[\pi(n - n\alpha - n)] = -\text{sen}[\pi(q - n)] = 0 \quad \forall q, n \in N$$

$$\text{sen}[n\pi(2 - \alpha)] = \text{sen}[\pi(n - n\alpha + n)] = -\text{sen}[\pi(q + n)] = 0 \quad \forall q, n \in N$$

Finalmente, introduciendo la condición  $q = n(1 - \alpha)$  en la solución, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \text{sen}(n\pi\alpha z) \text{sen}\left[\frac{q\pi b(z - 1)}{c}\right] dz = \\
&= \sum_{q=1}^{\infty} (1 - \alpha) B_q \delta_{q, n(1 - \alpha)} \cos\left(\frac{q\pi b}{c}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución de esta integral sea cual sea el valor de  $q$  será la suma de ambas, es decir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{\infty} \int_1^{1/\alpha} 2 B_q \alpha \text{sen}(n\pi\alpha z) \text{sen}\left[\frac{q\pi b(z - 1)}{c}\right] dz = \\
&= \frac{2(1 - \alpha)}{\pi} \text{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1 - \delta_{q, n(1 - \alpha)})}{q^2 - n^2(1 - \alpha)^2} B_q + \\
&+ \sum_{q=1}^{\infty} (1 - \alpha) B_q \delta_{q, n(1 - \alpha)} \cos\left(\frac{q\pi b}{c}\right) \quad (C.11)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión que nos proporciona los coeficientes  $C_n$  de la serie de Fourier será:

$$C_n = \text{sech}\left(\frac{n\pi a}{b + c}\right) \left[ \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi\alpha)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} B_q + \\
& + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) B_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi b}{c}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, la expresión del potencial escalar en el interior de la región, habiendo deshecho el cambio de  $x$  por  $y$ , viene dada por:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \operatorname{sech}\left(\frac{n\pi a}{b+c}\right) \cdot \cosh\left(\frac{n\pi x}{b+c}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b+c}\right) \quad (\text{C.12})$$

donde:

$$\begin{aligned}
K_n = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi\alpha)] + \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} B_q + \\
+ \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) B_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi b}{c}\right) \quad (\text{C.13})
\end{aligned}$$

### Caso#11 Potencial con dos funciones en $x = 0$ y con simetría en $x = a$

Resolvamos un caso similar al anterior pero donde hemos intercambiado las condiciones de  $x = 0$  y de  $x = a$  y hemos anulado el valor unitario del potencial en el lado con dos funciones, es decir, dividimos uno de los lados del contorno (el de  $x = 0$ ) en dos partes y aplicar a cada una de las partes una función de potencial distinta, esto es, haremos  $\varphi_m = 0$  para  $0 \leq y \leq b$  y  $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen}\left[\frac{q\pi(y-b)}{c}\right]$  para  $b \leq y \leq b+c$ , los otros dos lados se mantienen a cero y el lado exterior (el de  $x = a$ ) es el eje de simetría, cumpliéndose que  $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  por la simetría (figura C.11).

En este caso las condiciones de contorno son:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = \theta(y-b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen}\left[\frac{q\pi(y-b)}{c}\right]$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ , donde  $\theta(y-b)$  es la función escalón de Heaviside,
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b+c$  para cualquier valor de  $x$ ,  $y$

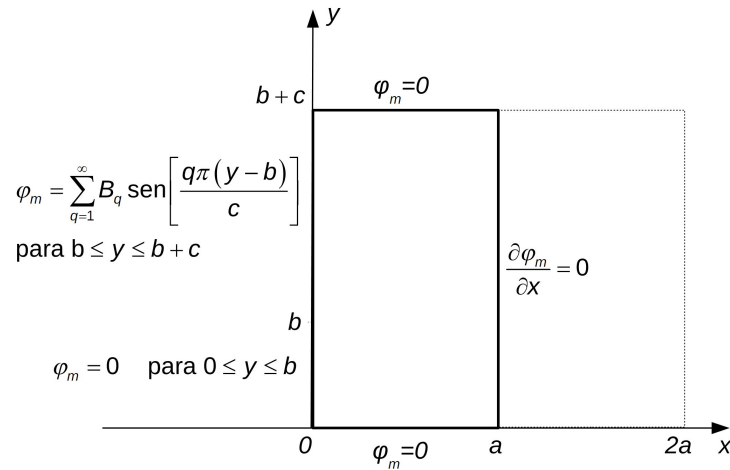


Figura C.11: Región rectangular en la que se divide el lado de  $x = 0$  en dos partes y se aplica a cada una de las partes una función de potencial distinta. Además, se mantienen otros dos lados a potencial cero y el cuarto lado (el de  $x = a$ ) es un eje de simetría.

- $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .

Si cambiamos la variable  $x$  por la variable  $a - x$  nos quedará:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\partial\varphi_m/\partial x = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b + c$  para cualquier valor de  $x$ , y
- $\varphi_m = \theta(y - b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(y-b)}{c} \right]$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ , donde  $\theta(y - b)$  es la función escalón de Heaviside.

Si ahora cambiamos la variable  $x$  por la variable  $y$  nos quedará:

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ ,
- $\partial\varphi_m/\partial y = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $x = b + c$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = \theta(x - b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right]$  en  $y = a$  para cualquier valor de  $x$ .

Sustituiremos estas condiciones de contorno en el modelo general de solución para obtener los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  y  $\beta_n$ .

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución general llegamos a que:

$$0 = \sum_n (A_n \cosh \beta_n y + B_n \sinh \beta_n y)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor  $\beta_n$  y  $y$ , la única posibilidad es que  $A_n = 0$  y  $B_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n (C_n \sen \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \sen \beta_n x \sinh \beta_n y)$$

- $\partial \varphi_m / \partial y = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ . Si derivamos la anterior ecuación, obtenemos:

$$\frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial y} = \sum_n (C_n \beta_n \sen \beta_n x \sinh \beta_n y + D_n \beta_n \sen \beta_n x \cosh \beta_n y)$$

que, al sustituir la condición de contorno, llegamos a:

$$\left. \frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 = \sum_n D_n \beta_n \sen \beta_n x$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  y  $x$ , la única posibilidad es que  $D_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n C_n \sen \beta_n x \cosh \beta_n y$$

- $\varphi_m = 0$  en  $x = b + c$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(b + c, y) = \sum_n C_n \sen [\beta_n (b + c)] \cosh \beta_n y$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que el  $\sen[\beta_n(b + c)] = 0$ , o, lo que es lo mismo,

que  $\beta_n(b+c) = m\pi$  (donde  $m$  es cualquier número entero). La solución quedará como:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n C_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) \cosh \left( \frac{n\pi y}{b+c} \right)$$

en donde hemos sustituido  $m$  por  $n$  ya que con cualquier entero se satisface la solución encontrada.

- $\varphi_m = \theta(x-b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right]$  en  $y = a$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\theta(x-b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] = \sum_n C_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) \cosh \left( \frac{n\pi a}{b+c} \right)$$

Como podemos observar no podemos identificar términos como en los ejemplos anteriores por lo que para obtener los coeficientes  $C_n$  de la serie de Fourier habrá que aplicar su definición:

$$\begin{aligned} C_n \cosh \left( \frac{n\pi a}{b+c} \right) &= \\ &= \frac{2}{b+c} \int_0^{b+c} \theta(x-b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) dx = \\ &= \frac{2}{b+c} \int_b^{b+c} \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) dx = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_b^{b+c} B_q \frac{2}{b+c} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] dx = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{1/\alpha} 2B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz = \end{aligned}$$

donde se ha cambiado  $x$  por  $bz$ , además de emplear el término  $\alpha$ . Esta integral ya la hemos calculado en el caso anterior y su valor viene dado por la ecuación (C.11). Sustituyendo esta ecuación, obtenemos:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{1/\alpha} 2B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz =$$

$$= \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2-n^2(1-\alpha)^2} B_q + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) B_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi b}{c}\right)$$

Por lo tanto la expresión que nos proporciona los coeficientes  $C_n$  de la serie de Fourier será:

$$C_n = \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{b+c}\right) \left[ \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2-n^2(1-\alpha)^2} B_q + \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) B_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi b}{c}\right) \right]$$

siendo la expresión del potencial escalar en el interior de la región

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n K_n \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{b+c}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{b+c}\right) \cdot \cosh\left(\frac{n\pi y}{b+c}\right)$$

Si deshacemos el cambio de haber sustituido  $x$  por  $y$ , resulta:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n K_n \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{b+c}\right) \cdot \cosh\left(\frac{n\pi x}{b+c}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b+c}\right)$$

Finalmente, la expresión del potencial escalar en el interior de la región, habiendo deshecho el cambio de  $x$  por  $a-x$ , viene dada por:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n K_n \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{b+c}\right) \cdot \cosh\left[\frac{n\pi(a-x)}{b+c}\right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b+c}\right) \quad (\text{C.14})$$

donde:

$$K_n = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2-n^2(1-\alpha)^2} B_q + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) B_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi b}{c}\right) \quad (\text{C.15})$$

**Caso#12 Potencial con dos funciones en  $x = a$**

Resolvamos otro ejemplo similar al anterior pero en el que hemos eliminado la condición de simetría que teníamos en  $x = 0$ . Es decir, dividimos uno de los lados del contorno (el de  $x = a$ ) en dos partes y se aplica a cada una de las partes una función de potencial distinta, esto es, haremos  $\varphi_m = 0$  para  $0 \leq y \leq b$  y  $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen} \left[ \frac{q\pi(y-b)}{c} \right]$  para  $b \leq y \leq b+c$  y mantenemos los otros tres lados a potencial cero (figura C.12).

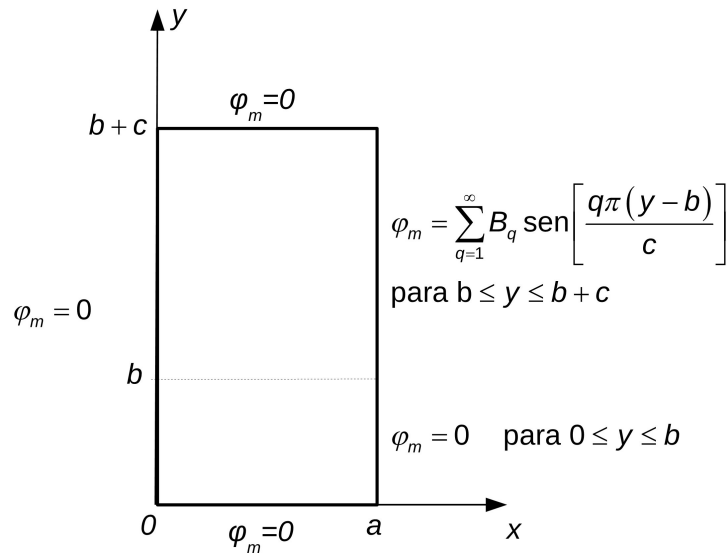


Figura C.12: Región rectangular en la que se divide uno de los lados en dos partes y se aplica a cada una de las partes una función de potencial distinta. Además, se mantienen los otros tres lados a potencial cero.

En este caso las condiciones de contorno son:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b + c$  para cualquier valor de  $x$ .
- $\varphi_m = \theta(y - b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen} \left[ \frac{q\pi(y-b)}{c} \right]$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ , donde  $\theta(y - b)$  es la función escalón de Heaviside.

Si cambiamos la variable  $x$  por la variable  $y$  nos quedará:



- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $x = b + c$  para cualquier valor de  $y$ .
- $\varphi_m = \theta(x - b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right]$  en  $y = a$  para cualquier valor de  $x$ .

Sustituiremos estas condiciones de contorno en el modelo general de solución para obtener los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  y  $\beta_n$ .

- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución general llegamos a que:

$$0 = \sum_n (A_n \cosh \beta_n y + B_n \text{senh} \beta_n y)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor  $\beta_n$  y  $y$ , la única posibilidad es que  $A_n = 0$  y  $B_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n (C_n \text{sen} \beta_n x \cosh \beta_n y + D_n \text{sen} \beta_n x \text{senh} \beta_n y)$$

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(x, 0) = 0 = \sum_n C_n \text{sen} \beta_n x$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  y  $x$ , la única posibilidad es que  $C_n = 0$ , quedando la solución restringida a:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n D_n \text{sen} \beta_n x \text{senh} \beta_n y$$

- $\varphi_m = 0$  en  $x = b + c$  para cualquier valor de  $y$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\varphi_m(b + c, y) = \sum_n D_n \text{sen} [\beta_n (b + c)] \text{senh} \beta_n y$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que el  $\text{sen}[\beta_n(b + c)] = 0$ , o, lo que es lo mismo,

que  $\beta_n(b+c) = m\pi$  (donde  $m$  es cualquier número entero). La solución quedará como:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_n D_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{b+c} \right)$$

en donde hemos sustituido  $m$  por  $n$  ya que con cualquier entero se satisface la solución encontrada.

- $\varphi_m = \theta(x-b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right]$  en  $y = a$  para cualquier valor de  $x$ . Sustituyendo estos dos valores en la fórmula de la solución anterior tenemos que:

$$\theta(x-b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] = \sum_n D_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi a}{b+c} \right)$$

Igual que sucedía en el caso anterior, no podemos identificar términos como en los ejemplos anteriores, por lo que para obtener los coeficientes  $D_n$  de la serie de Fourier habrá que aplicar su definición:

$$\begin{aligned} D_n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi a}{b+c} \right) &= \frac{2}{b+c} \int_0^{b+c} \theta(x-b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) dx = \\ &= \frac{2}{b+c} \int_b^{b+c} \sum_{q=1}^{\infty} B_q \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) dx \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_b^{b+c} B_q \frac{2}{b+c} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] dx = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_b^{b+c} B_q \frac{2}{b+c} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi(x-b)}{c} \right] dx = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{1/\alpha} 2B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz = \end{aligned}$$

donde se ha cambiado  $x$  por  $bz$ , además de emplear el término  $\alpha$ . Esta integral ya la hemos calculado en casos anteriores y su valor viene dado

por la ecuación (C.11). Sustituyendo esta ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{1/\alpha} 2B_q \alpha \operatorname{sen}(n\pi\alpha z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi b(z-1)}{c} \right] dz = \\ & = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} B_q + \\ & \quad + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) B_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{q\pi b}{c} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión que nos proporciona los coeficientes  $D_n$  de la serie de Fourier será:

$$\begin{aligned} D_n = \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi a}{b+c} \right) & \left[ \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} B_q + \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) B_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{q\pi b}{c} \right) \right] \end{aligned}$$

Finalmente, la expresión del potencial escalar en el interior de la región, habiendo deshecho el cambio de  $x$  por  $y$ , viene dada por:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi a}{b+c} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{b+c} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b+c} \right) \quad (\text{C.16})$$

donde:

$$\begin{aligned} K_n = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) & \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} B_q + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) B_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{q\pi b}{c} \right) \quad (\text{C.17}) \end{aligned}$$

### Caso#13 Potencial con dos funciones en $x = 0$

Resolvamos un caso similar al anterior pero donde hemos intercambiado las condiciones de  $x = 0$  y de  $x = a$ , es decir, dividimos uno de los lados del contorno (ahora el de  $x = 0$ ) en dos partes y se aplica a cada una de

las partes una función de potencial distinta, esto es, haremos  $\varphi_m = 0$  para  $0 \leq y \leq b$  y  $\varphi_m = \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen} \left[ \frac{q\pi(y-b)}{c} \right]$  para  $b \leq y \leq b+c$  y mantenemos los otros tres lados a potencial cero (figura C.13).

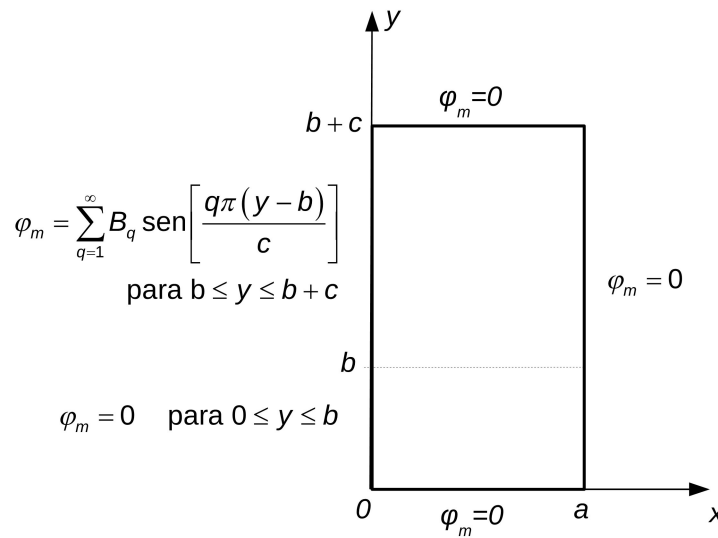


Figura C.13: Región rectangular en la que se divide uno de los lados en dos partes y se aplica a cada una de las partes una función de potencial distinta. Además, se mantienen los otros tres lados a potencial cero.

En este caso las condiciones de contorno son:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = \theta(y-b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen} \left[ \frac{q\pi(y-b)}{c} \right]$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ , donde  $\theta(y-b)$  es la función escalón de Heaviside,
- $\varphi_m = 0$  en  $y = b+c$  para cualquier valor de  $x$ , y
- $\varphi_m = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ .

Si cambiamos la variable  $x$  por la variable  $a-x$  nos quedará:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = \theta(y-b) \cdot \sum_{q=1}^{\infty} B_q \text{sen} \left[ \frac{q\pi(y-b)}{c} \right]$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ , donde  $\theta(y-b)$  es la función escalón de Heaviside,

- $\varphi_m = 0$  en  $y = b + c$  para cualquier valor de  $x$ ,  $y$
- $\varphi_m = 0$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $y$ .

condiciones de contorno idénticas a las del caso anterior. Por lo tanto, la expresión del potencial escalar será igual a la obtenida en este caso (ecuación C.14), es decir:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{b+c}\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi x}{b+c}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b+c}\right)$$

y volviendo a intercambiar la variable  $x$  por  $a - x$ , tendremos la solución final:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi a}{b+c}\right) \cdot \sinh\left[\frac{n\pi(a-x)}{b+c}\right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b+c}\right) \quad (\text{C.18})$$

donde  $K_n$  viene dado por la expresión (C.17).

#### Caso#14: Potencial función impar

Vamos a resolver un caso diferente a los anteriores, donde consideramos la región rectangular en la que el potencial en un lado varía de acuerdo a una función cualquiera con la única condición de ser una función impar en el intervalo considerado, estando los lados restantes a potencial nulo (figura C.14).

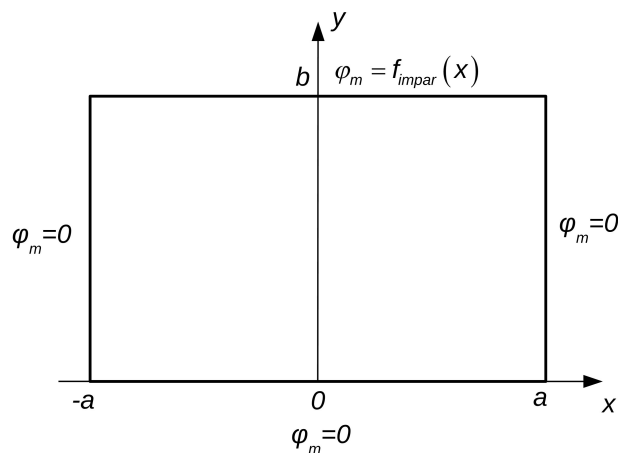


Figura C.14: Región rectangular con variación del potencial proporcional a una función arbitraria impar

Las condiciones de contorno son:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ ,
- $\varphi_m = 0$  en  $x = -a$  para cualquier valor de  $y$  y
- $\varphi_m = f_{\text{impar}}(x)$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ .

Apliquemos dichas condiciones de contorno:

- $\varphi_m = 0$  en  $y = 0$  para cualquier valor de  $x$ :

$$0 = \sum_n (A_n \cos \beta_n x + C_n \text{sen} \beta_n x)$$

y como la igualdad se tiene que cumplir para cualquier valor de  $\beta_n$  e  $y$ , la única posibilidad es que  $A_n = 0$  y  $C_n = 0$ , quedando, en nuestro caso, la solución restringida a:

$$\varphi_m = \sum_n (B_n \cos \beta_n x + D_n \text{sen} \beta_n x) \text{senh} \beta_n y$$

- $\varphi_m = 0$  en  $x = a$  para cualquier valor de  $y$ :

$$0 = \sum_n (B_n \cos \beta_n a + D_n \text{sen} \beta_n a) \text{senh} \beta_n y$$

debiéndose cumplir que:

$$B_n \cos \beta_n a + D_n \text{sen} \beta_n a = 0 \quad (\text{C.19})$$

- $v = 0$  en  $x = -a$  para cualquier valor de  $y$ :

$$0 = \sum_n (B_n \cos \beta_n a - D_n \text{sen} \beta_n a) \text{senh} \beta_n y$$

verificándose que:

$$B_n \cos \beta_n a - D_n \text{sen} \beta_n a = 0 \quad (\text{C.20})$$

Si resolvemos el sistema formado por las ecuaciones C.19 y C.20 obtenemos dos soluciones:

$$B_n = 0 \text{ y } \text{sen} \beta_n a = 0$$

o

$$D_n = 0 \text{ y } \cos \beta_n a = 0$$

Consideramos la primera de las soluciones, siendo  $B_n = 0$  y  $\beta_n = n\pi/a$  y quedando la expresión del potencial de la forma:

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{a} \right)$$

- $\varphi_m = f_{\text{impar}}(x)$  en  $y = b$  para cualquier valor de  $x$ :

Para poder extraer algo de información de esta condición recurriremos al desarrollo en serie de Fourier de la función  $f_{\text{impar}}(x)$  para  $-a \leq x \leq a$  y en el que el límite por la izquierda y por derecha en  $x = -a$  y en  $x = a$ , es cero en ambos casos. Este desarrollo sólo posee términos en *seno*, al tratarse de una función impar, viniendo dado dicho desarrollo por:

$$f_{\text{impar}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right)$$

donde los coeficientes  $b_n$  se calculan de acuerdo a la expresión:

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f_{\text{impar}}(x) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \cdot dx \quad (\text{C.21})$$

los cuales serán evaluados numéricamente.

El desarrollo en serie de Fourier debe ser igual a la fórmula anterior, por lo que identificando ambas tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) &= \sum_n D_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi b}{a} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow D_n &= \frac{b_n}{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi b}{a} \right)} = b_n \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi b}{a} \right) \end{aligned}$$

Así que sustituyendo este valor en la solución de la condición de contorno anterior obtenemos la solución final para la distribución del potencial escalar en el interior de la zona rectangular en función de  $x$  e  $y$ :

$$\varphi_m(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi b}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{a} \right) \quad (\text{C.22})$$

calculando los coeficientes  $b_n$  a través de la expresión C.21.

En la figura C.15 se muestra la distribución del potencial escalar en la zona de estudio, cuando la función es la tangente hiperbólica ( $f_{impar}(x) = V_o \cdot \tanh(cx)$ ), siendo los valores numéricos de los parámetros  $a = 5mm$ ,  $b = 5mm$ ,  $c = 1$  y  $V_o = 1Av$ . Podemos observar como el potencial escalar es nulo en  $x = -a$ ,  $x = a$  y en  $y = 0$ , mientras que en  $y = b$  varía de acuerdo a la tangente hiperbólica.

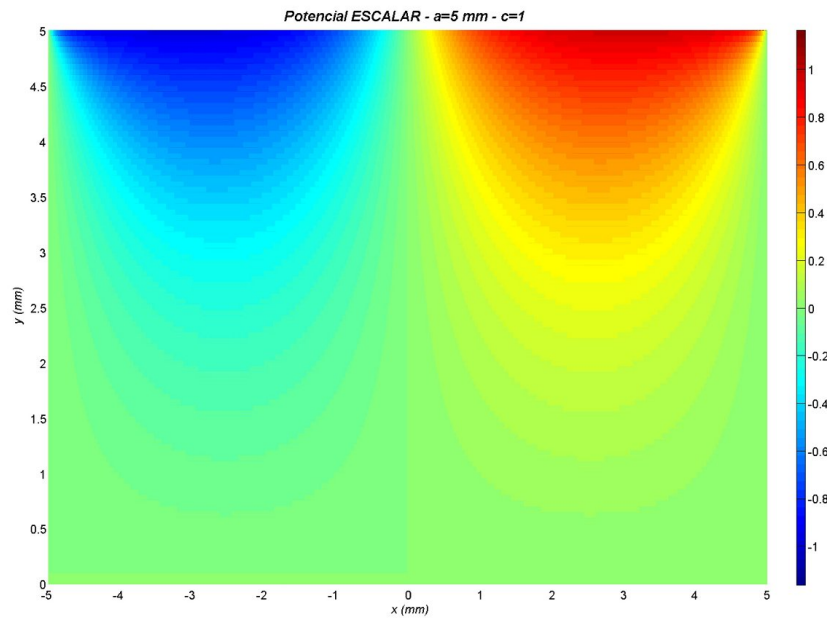


Figura C.15: Potencial escalar con  $f_{impar}(x) = V_o \cdot \tanh(cx)$ ,  $a = 5mm$ ,  $b = 5mm$ ,  $c = 1$  y  $V_o = 1Av$ .



# Apéndice D

## Expresiones del caso Ranura Completa

En este apéndice se recogen, para el caso Ranura Completa, las expresiones del potencial magnético escalar en cada región, de las derivadas del potencial magnético escalar en las fronteras laterales, de las ecuaciones en las fronteras laterales y de las componentes de la inducción, del flujo y del par de reluctancia en cada región. Estas expresiones son:

### D.1. Expresiones del potencial magnético escalar en cada región

Las expresiones del potencial magnético escalar en cada región del caso Ranura Completa son las siguientes:

**Región I:** La figura D.1 muestra la región I. El potencial en esta región, lo obtenemos a partir de las expresiones de potencial obtenidas en el caso#10, en el caso#11 y en el caso#12. Por lo tanto su potencial será:

$$\begin{aligned} \varphi_m^I = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{1'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

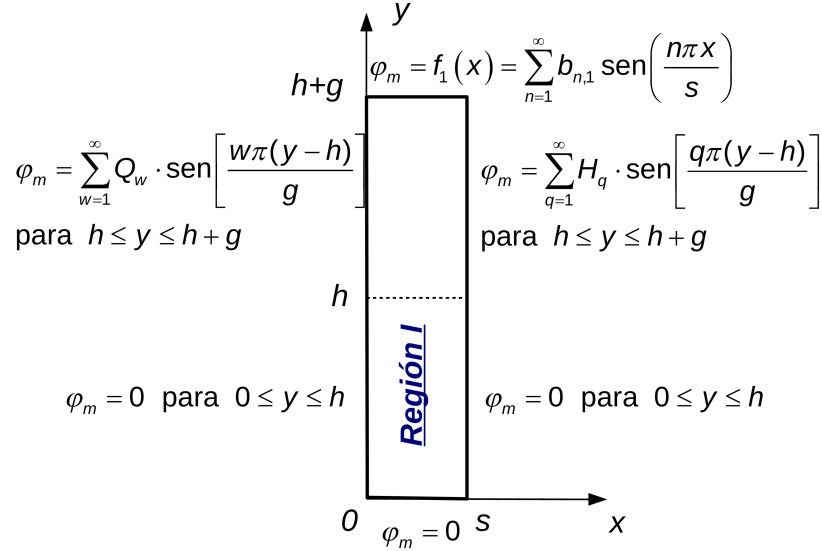


Figura D.1: Región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#10, del caso#11 y del caso#12.

donde:

$$\begin{aligned}
 K_n^1 &= \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2-n^2(1-\alpha)^2} H_q + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) H_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right) \\
 K_n^{1'} &= \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{w=1}^{\infty} \frac{w(1-\delta_{w,n(1-\alpha)})}{w^2-n^2(1-\alpha)^2} Q_w + \sum_{w=1}^{\infty} (1-\alpha) Q_w \delta_{w,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{w\pi h}{g}\right)
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

**Región II:** El potencial en la región II (figura D.2) lo obtendremos por superposición del caso#4, del caso#5 y del caso#12, resultando:

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^{II} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi g}{t}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{t}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{t}\right) + \\
 &+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{csch}\left(\frac{q\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{q\pi(t-x)}{g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{g}\right) + \\
 &+ \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{csch}\left(\frac{l\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{l\pi x}{g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi y}{g}\right)
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

**Región III:** La figura D.3 muestra la región III. El potencial en esta región, lo obtenemos por superposición de los casos #1, #10 y #11. La expresión

## D.1 Expresiones del potencial magnético escalar en cada región 131

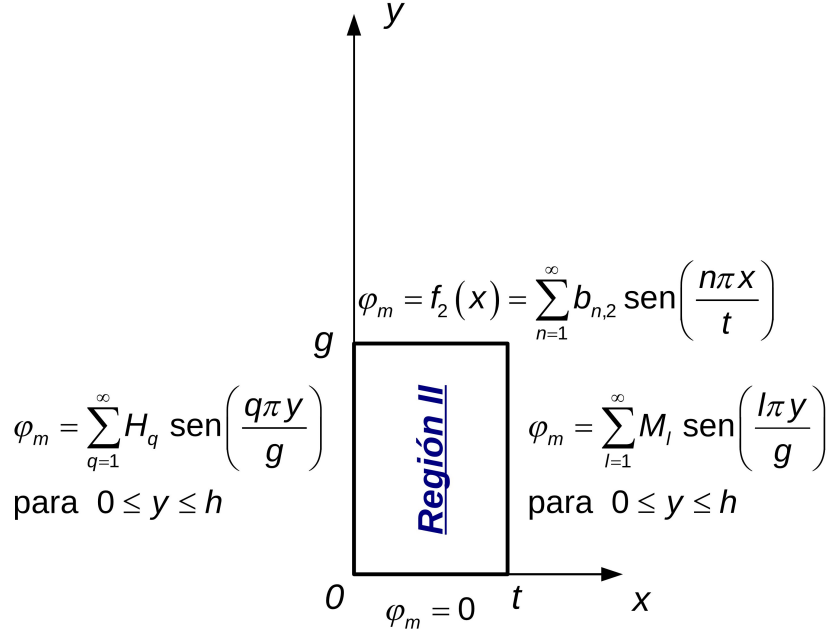


Figura D.2: Región II. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de los casos #4, #5 y #12.

del potencial será entonces:

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^{III} = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch}\left[\frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s}\right] \operatorname{sen}\left[\frac{(2k-1)\pi x}{s}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{(2k-1)\pi y}{s}\right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi s}{h+g}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{h+g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{h+g}\right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi s}{h+g}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi(s-x)}{h+g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{h+g}\right)
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 K_n^3 = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(1-\delta_{m,n(1-\alpha)})}{m^2-n^2(1-\alpha)^2} L_m + \sum_{m=1}^{\infty} (1-\alpha) L_m \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{m\pi h}{g}\right) \\
 K_n^{3'} = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l(1-\delta_{l,n(1-\alpha)})}{l^2-n^2(1-\alpha)^2} M_l + \sum_{l=1}^{\infty} (1-\alpha) M_l \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{l\pi h}{g}\right)
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

**Región IV:** El potencial en la región IV lo obtenemos por superposición de los casos #1, #4 y #5, llegando a:

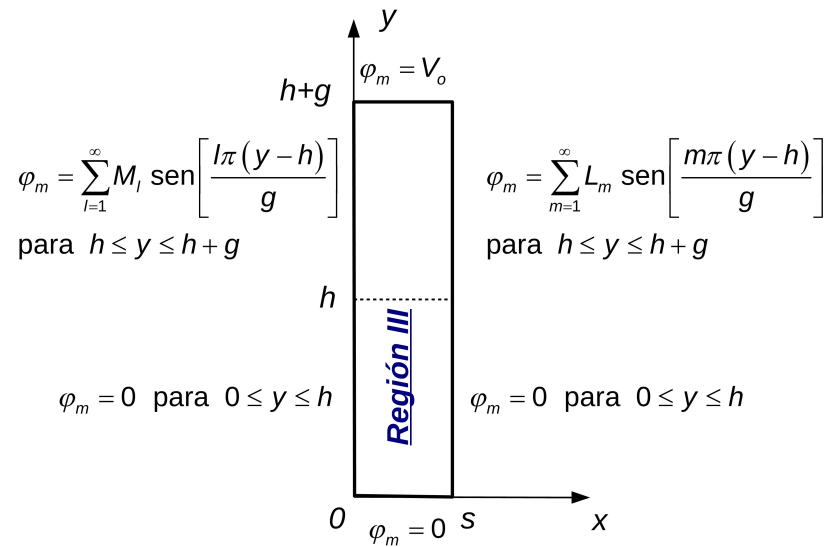


Figura D.3: Región III. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#1, del caso#10 y del caso#11.

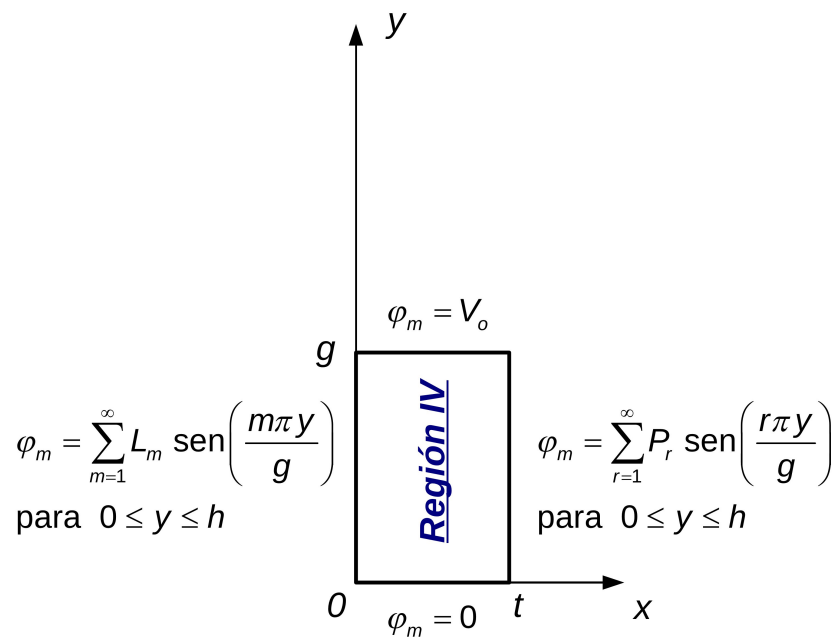


Figura D.4: Región IV. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#1, del caso#4 y del caso#5.

## D.1 Expresiones del potencial magnético escalar en cada región 133

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^{IV} = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csc} h \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{t} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{t} \right] + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{m\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) + \\
 & + \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{r\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

**Región V:** El potencial en la región V (figura D.5) lo obtendremos a partir de la expresión del potencial de la región I del caso actual, resultando:

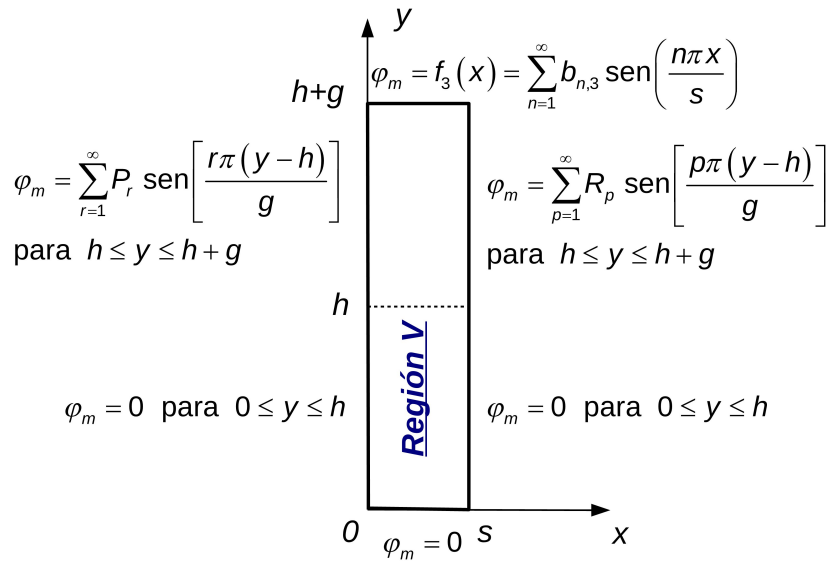


Figura D.5: Región V. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la región I del caso actual.

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^V = & \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

donde:

$$K_n^5 = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(1-\delta_{p,n(1-\alpha)})}{p^2-n^2(1-\alpha)^2} R_p + \sum_{p=1}^{\infty} (1-\alpha) R_p \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{p\pi h}{g}\right)$$

$$K_n^{5'} = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r(1-\delta_{r,n(1-\alpha)})}{r^2-n^2(1-\alpha)^2} P_r + \sum_{r=1}^{\infty} (1-\alpha) P_r \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{r\pi h}{g}\right)$$
(D.8)

**Región VI:** El potencial en la región VI (figura D.6) lo obtendremos a partir de la expresión del potencial de la región II del caso actual, siendo su expresión:

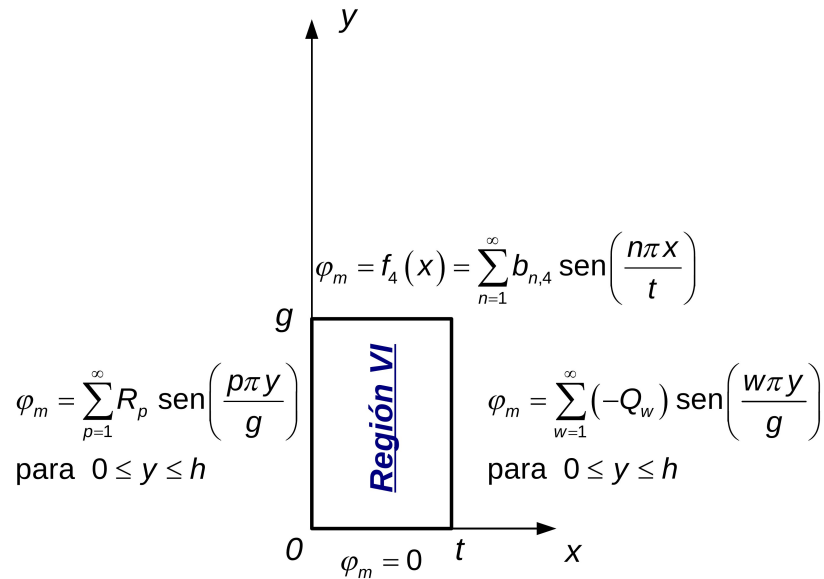


Figura D.6: Región VI. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la región II del caso actual.

$$\varphi_m^{VI} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csc} h\left(\frac{n\pi g}{t}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{t}\right) \operatorname{sen} h\left(\frac{n\pi y}{t}\right) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{csch}\left(\frac{p\pi t}{g}\right) \operatorname{sen} h\left[\frac{p\pi(t-x)}{g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi y}{g}\right) -$$

$$- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch}\left(\frac{w\pi t}{g}\right) \operatorname{sen} h\left(\frac{w\pi x}{g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{w\pi y}{g}\right)$$
(D.9)

**Región VII:** Una vez halladas las expresiones del potencial escalar en las regiones situadas bajo el polo norte (regiones I a VI) podemos obtener el potencial escalar en cualquier otra región sin más que considerar la periodicidad anticíclica del problema; por ello, la expresión del potencial escalar en la región VII será idéntica a la de la región I pero con signo contrario:

$$\begin{aligned} \varphi_m^{VII} = -\varphi_m^I = & - \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{1'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (D.10)$$

donde las expresiones de  $K_n^1$  y  $K_n^{1'}$  vienen dados por la ecuación (D.2).

## D.2. Expresiones de las derivadas en las fronteras laterales

Las expresiones de las derivadas en las fronteras laterales para el caso Ranura Completa son las siguientes:

**Derivada en la región I:** A partir de la ecuación (D.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} g \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=s} = & \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 n\pi (1-\alpha) \cdot \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{1'} n\pi (1-\alpha) \cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (D.11)$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^1$  y  $K_n^{1'}$  vienen dadas por la ecuación (D.2).

**Derivadas en la región II:** A partir de la ecuación (D.3) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &- \sum_{q=1}^{\infty} H_q q \pi \coth [q\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) + \\
 &+ \sum_{l=1}^{\infty} M_l l \pi \operatorname{csch} [l\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=t} &= - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &- \sum_{q=1}^{\infty} H_q q \pi \operatorname{csch} [q\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) + \\
 &+ \sum_{l=1}^{\infty} M_l l \pi \coth [l\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Derivadas en la región III:** A partir de la ecuación (D.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{+4V_0}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} n\pi(1-\alpha) \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .



$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=s} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{+4V_0}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 n\pi(1-\alpha) \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^3$  y  $K_n^{3'}$  vienen dadas por la ecuación (D.5).

**Derivadas en la región IV:** A partir de la ecuación (D.6) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{+4V_0}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta) g} \right] - \\
 &- \sum_{m=1}^{\infty} L_m m \pi \coth [m \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi y}{g} \right) + \\
 &+ \sum_{r=1}^{\infty} P_r r \pi \operatorname{csch} [r \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{r \pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.16}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{+4V_0}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta) g} \right] - \\
 &- \sum_{m=1}^{\infty} L_m m \pi \operatorname{csch} [m \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi y}{g} \right) + \\
 &+ \sum_{r=1}^{\infty} P_r r \pi \coth [r \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{r \pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Derivadas en la región V:** A partir de la ecuación (D.7) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^V}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{D.18}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^V}{dx} \Big|_{x=s} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 n\pi(1-\alpha) \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^5$  y  $K_n^{5'}$  vienen dadas por la ecuación (D.8).

**Derivadas en la región VI:** A partir de la ecuación (D.9) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &- \sum_{p=1}^{\infty} R_p p \pi \operatorname{coth} [p\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) - \\
 &- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w \pi \operatorname{csch} [w\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &- \sum_{p=1}^{\infty} R_p p \pi \operatorname{csch} [p\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) - \\
 &- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w \pi \operatorname{coth} [w\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Derivada en la región VII:** A partir de la ecuación (D.10) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \Big|_{x=0} &= -g \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=0} = \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \cdot n\pi (1-\alpha) \cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{1'} \cdot n\pi (1-\alpha) \cdot \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{D.22}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^1$  y  $K_n^{1'}$  vienen dadas por la ecuación (D.2).

### D.3. Expresiones de las ecuaciones en las fronteras comunes

Las expresiones de las ecuaciones en las fronteras comunes para el caso Ranura Completa son las siguientes:

**Frontera común región I y región II:** A partir de las ecuaciones (D.11) y (D.12) y aplicando que

$$\frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=s} = \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=0}$$

o lo que es equivalente

$$g \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=s} = g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} & - \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{w,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{w\pi h}{g}\right) + \frac{2nw(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{w^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{w,n(1-\alpha)}) \right] \right. \\ & \cdot \text{cosech} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \Big\} Q_w + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ q\pi \text{cotgh} [q\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right) + \frac{2nq(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\ & \cdot \text{cotgh} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \Big\} H_q - \\ & - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ l\pi \text{cosech} [l\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) \right\} M_l = \\ & = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \text{csc h} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] \end{aligned} \tag{D.23}$$

**Frontera común región II y región III:** A partir de las ecuaciones (D.13) y (D.14) y aplicando que

$$\frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=t} = \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=0}$$

o lo que es equivalente

$$g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=t} = g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ q\pi \operatorname{cosech} [q\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) \right\} H_q + \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ l\pi \operatorname{cotgh} [l\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{l\pi h}{g} \right) + \frac{2nl(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{l,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
 & \cdot \operatorname{cotgh} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} M_l - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{m\pi h}{g} \right) + \frac{2nm(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{m^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{m,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
 & \cdot \operatorname{cosech} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} L_m = \\
 & = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csc h} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{+4V_0}{\mu\beta} \operatorname{csc h} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{D.24}$$

**Frontera común región III y región IV:** A partir de las ecuaciones (D.15) y (D.16) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=s} = \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=s} = g \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{l\pi h}{g}\right) + \frac{2nl(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{l,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \text{cosech} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} M_l + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m\pi \text{cotgh} [m\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{m\pi h}{g}\right) + \frac{2nm(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{m^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{m,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \text{cotgh} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} L_m - \\
& - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ r\pi \text{cosech} [r\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right) \right\} P_r = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{+4V_0}{\mu\beta} \text{cosech} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \text{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{+4V_0}{\mu(1-\beta)} \text{cosech} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \text{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right]
\end{aligned} \tag{D.25}$$

**Frontera común región IV y región V:** A partir de las ecuaciones (D.17) y (D.18) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=t} = \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=t} = g \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m\pi \operatorname{cosech} [m\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) \right\} L_m + \\
 & + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ r\pi \operatorname{cotgh} [r\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{r\pi h}{g} \right) + \frac{2nr(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{r^2-n^2(1-\alpha)^2} (1-\delta_{r,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
 & \cdot \operatorname{cotgh} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} P_r - \\
 & - \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{p\pi h}{g} \right) + \frac{2np(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{p^2-n^2(1-\alpha)^2} (1-\delta_{p,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
 & \cdot \operatorname{cosech} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} R_p = \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{+4V_0}{\mu(1-\beta)} \operatorname{cosech} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta) g} \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{D.26}$$

**Frontera común región V y región VI:** A partir de las ecuaciones (D.19) y (D.20) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=s} = \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente

$$g \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=s} = g \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{r\pi h}{g}\right) + \frac{2nr(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{r^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{r,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \text{cosech} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} P_r + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ p\pi \text{cotgh} [p\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{p\pi h}{g}\right) + \frac{2np(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{p^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{p,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \text{cotgh} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} R_p + \\
& + \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ w\pi \text{cosech} [w\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right) \right\} Q_w = \\
& = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right]
\end{aligned} \tag{D.27}$$

**Frontera común región VI y región VII:** A partir de las ecuaciones (D.21) y (D.22) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=t} = \left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=0} = - \left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=t} = g \left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=0} = -g \left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=0}$$



para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ p\pi \operatorname{cosech} [p\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) \right\} R_p + \\
 & + \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ w\pi \operatorname{cotgh} [w\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{w,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{w\pi h}{g} \right) + \frac{2nw(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{w^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{w,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
 & \cdot \operatorname{cotgh} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} Q_w - \\
 & - \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{q\pi h}{g} \right) + \frac{2nq(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
 & \cdot \operatorname{cosech} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} H_q = \\
 & = + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{D.28}$$

## D.4. Expresiones de las componentes de la inducción en cada región

Las expresiones de las componentes de la inducción en cada región del caso Ranura Completa son las siguientes:

**Región I**

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región I:

$$\begin{aligned}
 B_x^I = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{1'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.29}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región I:

$$\begin{aligned}
 B_y^I = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \cosh \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{1'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.30}$$

donde las expresiones de  $K_n^1$  y  $K_n^{1'}$  vienen dadas por la ecuación (D.2).

**Región II**

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región II:

$$\begin{aligned}
 B_x^{II} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \cosh \left[ \frac{q\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{l\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.31}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región II:

$$\begin{aligned}
 B_y^{II} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{q\pi(t-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{q\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{l\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{l\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.32}$$

### Región III

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región III:

$$\begin{aligned}
 B_x^{III} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{s} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{s} \right] - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.33}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región III:

$$\begin{aligned}
 B_y^{III} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{s} \right] \operatorname{cosh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{s} \right] - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.34}$$

donde las expresiones de  $K_n^3$  y  $K_n^{3'}$  vienen dadas por la ecuación (D.5).

## Región IV

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región IV:

$$\begin{aligned}
 B_x^{IV} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{t} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{t} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{t} \right] + \\
 & +\mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \cosh \left[ \frac{m\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} P_r \frac{r\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{r\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.35}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región IV:

$$\begin{aligned}
 B_y^{IV} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{t} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{t} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{t} \right] - \\
 & -\mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{m\pi(t-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{m\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} P_r \frac{r\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{r\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{r\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.36}$$

## Región V

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región V:

$$\begin{aligned}
 B_x^V = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{D.37}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región V:

$$\begin{aligned}
B_y^V &= -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
&\quad -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
&\quad -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{D.38}$$

donde las expresiones de  $K_n^5$  y  $K_n^{5'}$  vienen dadas por la ecuación (D.8).

### Región VI

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región VI:

$$\begin{aligned}
B_x^{VI} &= -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\
&\quad +\mu_0 \sum_{p=1}^{\infty} R_p \frac{p\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{cosh} \left[ \frac{p\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) + \\
&\quad +\mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{w\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right)
\end{aligned} \tag{D.39}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región VI:

$$\begin{aligned}
B_y^{VI} &= -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) - \\
&\quad -\mu_0 \sum_{p=1}^{\infty} R_p \frac{p\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{p\pi(t-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{p\pi y}{g} \right) + \\
&\quad +\mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{w\pi y}{g} \right)
\end{aligned} \tag{D.40}$$

## D.5. Expresiones del flujo en cada región

Las expresiones del flujo en cada región del caso Ranura Completa son las siguientes:

## Región I

Flujos que atraviesan la región I:

$$\begin{aligned}
\phi_I^1 &= +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \\
&- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{1'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \\
\phi_I^2 &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^1 + K_n^{1'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{D.41}$$

El primer sumando es nulo para los términos pares, pudiendo expresarlo de la forma:

$$\begin{aligned}
\phi_I^2 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),1} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^1 + K_n^{1'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \\
\phi_I^3 &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] - \\
&- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{1'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right]
\end{aligned} \tag{D.42}$$

$$\begin{aligned}
\phi_I^4 &= +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{n\pi h}{s} \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^1 + K_n^{1'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{D.43}$$

que, al ser nulos los términos pares del primer sumando, podemos expresarlo de la forma:

$$\begin{aligned} \phi_I^4 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),1} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^1 + K_n^{1'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

donde la expresión de  $K_n^1$  viene dada por la ecuación (D.2).

## Región II

Flujo que atraviesa la región II:

$$\begin{aligned} \phi_{II} = & \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] b_{n,2} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) + \\ & + \mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - 1 \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

Eliminando los términos pares del primer sumando y agrupando el segundo y el tercer sumando en uno único, obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi_{II} = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),2} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} [H_q + M_l] \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

## Región III

Flujos que atraviesan la región III:

$$\begin{aligned} \phi_{III}^1 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] - 1 \right\} + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \end{aligned} \quad (\text{D.46})$$

$$\begin{aligned} & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \\ \phi_{III}^2 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] + \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

$$+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^3 + K_n^{3'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_{III}^3 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] - 1 \right\} - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

$$+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_{III}^4 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

$$+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^3 + K_n^{3'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right)$$

donde las expresiones de  $K_n^3$  y  $K_n^{3'}$  vienen dadas por la ecuación (D.5).

#### Región IV

Flujo que atraviesa la región IV:

$$\begin{aligned} \phi_{IV} = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} [P_r + L_r] \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$



**Región V**

Flujos que atraviesan la región V:

$$\begin{aligned} \phi_V^1 = & \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \csc h \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \end{aligned} \quad (D.51)$$

$$\begin{aligned} & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \\ \phi_V^2 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k+1),3} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^5 + K_n^{5'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (D.52)$$

$$\begin{aligned} \phi_V^3 = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,3} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \end{aligned} \quad (D.53)$$

$$\begin{aligned} & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \\ \phi_V^4 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),3} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^5 + K_n^{5'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (D.54)$$

donde las expresiones de  $K_n^5$  y  $K_n^{5'}$  vienen dadas por la ecuación (D.8).

**Región VI**

Flujo que atraviesa la región VI:

$$\begin{aligned} \phi_{VI} = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),4} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} [R_p - Q_p] \csc h \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{p\pi t}{g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (D.55)$$

## D.6. Expresiones del par de reluctancia en cada región

El caso Ranura Completa está formado por seis regiones, siendo el par de reluctancia total igual a la suma del par de reluctancia originado en cada región, tal y como expresábamos mediante la ecuación 5.123:

$$T_{cogg,RC} = T_{cogg,RC}^I + T_{cogg,RC}^{II} + T_{cogg,RC}^{III} + T_{cogg,RC}^{IV} + \\ + T_{cogg,RC}^V + T_{cogg,RC}^{VI}$$

Las expresiones del par de reluctancia en cada región del caso Ranura Completa son las siguientes:

### Región I

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación D.29) e  $y$  (ecuación D.30) de la inducción en la región I del caso Ranura Completa, obtenemos que el par de reluctancia es igual a:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RC}^I &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^I(x, Y) B_y^I(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,1} b_{m,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \right. \\
&\quad \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \frac{\pi}{s} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{s} \frac{[(-1)^n \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - 1] K_m^1 + [\cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - (-1)^n] K_m^{1'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{h+g}{s} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,1} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{h+g} \frac{[1 - (-1)^m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right)] K_n^1 - [\cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - (-1)^m] K_n^{1'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{s}{h+g} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^1 K_m^1 - K_n^{1'} K_m^{1'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \sinh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \sinh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{m}{2} \sinh^2 \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^1 K_m^{1'} - K_n^{1'} K_m^1) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{m\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \sinh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{D.56}$$

donde las expresiones de  $K_n^1$  y  $K_n^{1'}$  vienen dadas por la ecuación (D.2).

## Región II

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación D.31) e  $y$  (ecuación D.32) de la inducción en la región II del caso Ranura Completa, obtenemos que el par de reluctancia se puede poner como:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RC}^{II} &= \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^{II}(x, Y) B_y^{II}(x, Y) dx = \\
&= 2 N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,2} b_{m,2} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi g}{t} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{t} \right) \frac{\pi}{t} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cos \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{t} \frac{[\cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - (-1)^n] H_q + [(-1)^n \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - 1] M_q}{1 + \left( \frac{n}{q} \frac{g}{t} \right)^2} - \\
&\quad - \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{q\pi}{g} \frac{[\cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - (-1)^n] H_q - [1 - (-1)^n \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right)] M_q}{1 + \left( \frac{q}{n} \frac{t}{g} \right)^2} - \\
&\quad - \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (H_q H_l - M_q M_l) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{l,q}) \frac{lq}{q^2 - l^2} \left( l + q \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - l \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \right) \right] + \delta_{l,q} \frac{q}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - \\
&\quad - \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (H_q M_l - M_q H_l) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \frac{q\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{l,q}) \frac{l^2}{q^2 - l^2} \left( \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{l,q} \cdot \frac{l\pi t}{2g} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \right] \left. \right\} \tag{D.57}
\end{aligned}$$

## Región III

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación D.33) e  $y$  (ecuación D.34) de la inducción en la región III del caso Ranura Completa, obtenemos que el par de reluctancia se expresa mediante:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RC}^{III} &= \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^{III}(x, Y) B_y^{III}(x, Y) dx = \\
&= 2 N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V_o}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \frac{\cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + 1}{1 + \left( \frac{2k-1}{n} \cdot \frac{h+g}{s} \right)^2} (K_n^{3'} - K_n^3) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_o}{s} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{s} \right] \frac{2k-1}{n} \cdot \frac{h+g}{s} \frac{\cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + 1}{1 + \left( \frac{2k-1}{n} \cdot \frac{h+g}{s} \right)^2} (K_n^3 - K_n^{3'}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^3 K_m^3 - K_n^{3'} K_m^{3'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{m}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^3 K_m^{3'} - K_n^{3'} K_m^3) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{m\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \right] \left. \right\} \tag{D.58}
\end{aligned}$$

donde las expresiones de  $K_n^3$  y  $K_n^{3'}$  vienen dadas por la ecuación (D.5).

### Región IV

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación D.35) e  $y$  (ecuación D.36) de la inducción en la región IV del caso Ranura Completa, obtenemos que el par de reluctancia tiene por expresión:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RC}^{IV} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^{IV}(x, Y) B_y^{IV}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4V_o}{t} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{t} \right] \cos \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \frac{\cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) + 1}{1 + \left( \frac{2k-1}{m} \cdot \frac{g}{t} \right)^2} (L_m - P_m) - \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_o}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{t} \right] \frac{2k-1}{m} \cdot \frac{g}{t} \cdot \frac{1 + \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right)}{1 + \left( \frac{2k-1}{m} \cdot \frac{g}{t} \right)^2} (L_m - P_m) - \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (L_m L_r - P_m P_r) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{m,r}) \frac{mr}{m^2 - r^2} \left( r + m \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - r \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \right) \right] + \delta_{r,m} \frac{m}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{m\pi t}{g} \right) - \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (L_m P_r - P_m L_r) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \frac{m\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{m,r}) \frac{r^2}{m^2 - r^2} \left( \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) - \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{m,r} \cdot \frac{r\pi t}{2g} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \right] \left. \right\} \tag{D.59}
\end{aligned}$$

### Región V

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación D.37) e  $y$  (ecuación D.38) de la inducción en la región V del caso Ranura Completa, obtenemos que el par de reluctancia es igual a:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RC}^V &= \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^V(x, Y) B_y^V(x, Y) dx = \\
&= 2 N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,3} b_{m,3} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \right. \\
&\quad \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \frac{\pi}{s} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{s} \frac{[(-1)^n \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - 1] K_m^5 + [\cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - (-1)^n] K_m^{5'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{h+g}{s} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,3} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{h+g} \frac{[1 - (-1)^m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right)] K_n^5 - [\cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - (-1)^m] K_n^{5'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{s}{h+g} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^5 K_m^5 - K_n^{5'} K_m^{5'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \sinh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \sinh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{m}{2} \sinh^2 \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^5 K_m^{5'} - K_n^{5'} K_m^5) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{m\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \sinh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \right] \left. \right\} \tag{D.60}
\end{aligned}$$

donde las expresiones de  $K_n^5$  y  $K_n^{5'}$  vienen dadas por la ecuación (D.8).

## Región VI

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación D.39) e  $y$  (ecuación D.40) de la inducción en la región VI del caso Ranura Completa, obtenemos que el par de reluctancia tiene por expresión:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RC}^{VI} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^{VI}(x, Y) B_y^{VI}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,4} b_{m,4} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi g}{t}\right) \operatorname{csch}\left(\frac{m\pi g}{t}\right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi Y}{t}\right) \cosh\left(\frac{m\pi Y}{t}\right) \frac{\pi}{t} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi g}{t}\right) \operatorname{csch}\left(\frac{p\pi t}{g}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi Y}{t}\right) \cos\left(\frac{p\pi Y}{g}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi [\cosh(\frac{p\pi t}{g}) - (-1)^n] R_p - [(-1)^n \cosh(\frac{p\pi t}{g}) - 1] Q_p}{1 + (\frac{n}{p} \frac{g}{t})^2} - \\
&\quad - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch}\left(\frac{p\pi t}{g}\right) \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi g}{t}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi Y}{g}\right) \cosh\left(\frac{n\pi Y}{t}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{p\pi [\cosh(\frac{p\pi t}{g}) - (-1)^n] R_p + [1 - (-1)^n \cosh(\frac{p\pi t}{g})] Q_p}{1 + (\frac{p}{n} \frac{t}{g})^2} - \\
&\quad - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} (R_p R_w - Q_p Q_w) \operatorname{csch}\left(\frac{p\pi t}{g}\right) \operatorname{csch}\left(\frac{w\pi t}{g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi Y}{g}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos\left(\frac{w\pi Y}{g}\right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{p,w}) \frac{pw}{p^2 - w^2} \left( w + p \operatorname{senh}\left(\frac{p\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{w\pi t}{g}\right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - w \cosh\left(\frac{p\pi t}{g}\right) \cosh\left(\frac{w\pi t}{g}\right) \right) \right] + \delta_{p,w} \frac{p}{2} \operatorname{senh}^2\left(\frac{p\pi t}{g}\right) + \\
&\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} (R_p Q_w - Q_p R_w) \operatorname{csch}\left(\frac{p\pi t}{g}\right) \operatorname{csch}\left(\frac{w\pi t}{g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi Y}{g}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos\left(\frac{w\pi Y}{g}\right) \frac{p\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{p,w}) \frac{w^2}{p^2 - w^2} \left( \cosh\left(\frac{p\pi t}{g}\right) - \cosh\left(\frac{w\pi t}{g}\right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{p,w} \cdot \frac{p\pi t}{2g} \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{p\pi t}{g}\right) \right] \left. \right\} \tag{D.61}
\end{aligned}$$



# Apéndice E

## Expresiones del caso Ranura Parcial

En este apéndice se recogen, para el caso Ranura Parcial, las expresiones del potencial magnético escalar en cada región, de las derivadas del potencial magnético escalar en las fronteras laterales, de las ecuaciones en las fronteras laterales y de las componentes de la inducción, del flujo y del par de reluctancia en cada región. Estas expresiones son:

### E.1. Expresiones del potencial magnético escalar en cada región

Las expresiones del potencial magnético escalar en cada región del caso Ranura Parcial son las siguientes:

**Región I:** La figura E.1 muestra la región I. El potencial en esta región, lo obtenemos a partir de las expresiones de potencial obtenidas en el caso#5, en el caso#10 y en el caso#12. Por lo tanto su potencial será:

$$\begin{aligned} \varphi_m^I = & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{sz} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{sz} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{sz} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\ & + \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{w\pi(sz-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

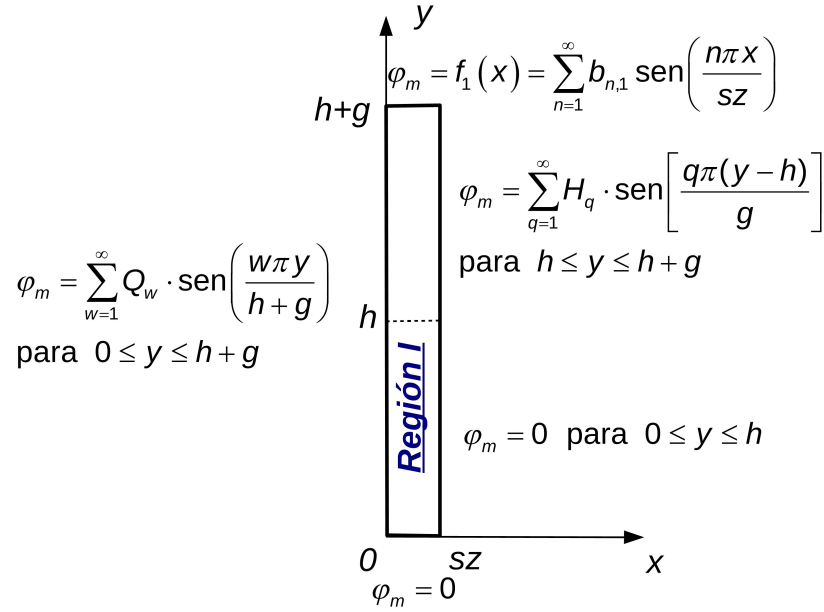


Figura E.1: Región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#5, del caso#10 y del caso#12.

donde:

$$K_n^1 = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} H_q + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) H_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right) \quad (\text{E.2})$$

**Región II:** El potencial en la región II (figura E.2) lo obtendremos por superposición del caso#4, del caso#5 y del caso#12, resultando:

$$\begin{aligned} \varphi_m^{\text{II}} = & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi g}{t}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{t}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{t}\right) + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{csch}\left(\frac{q\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{q\pi(t-x)}{g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{g}\right) + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{csch}\left(\frac{l\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{l\pi x}{g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi y}{g}\right) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

**Región III:** La figura E.3 muestra la región III. El potencial en esta región, lo obtenemos a partir de la expresión del potencial de la región I del caso actual. La expresión del potencial será entonces:

## E.1 Expresiones del potencial magnético escalar en cada región 463

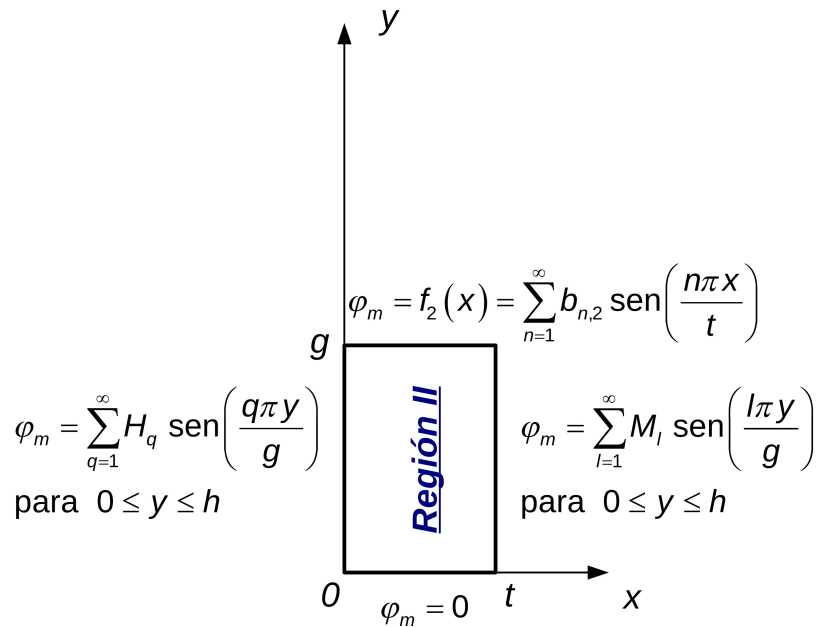


Figura E.2: Región II. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de los casos #4, #5 y #12.

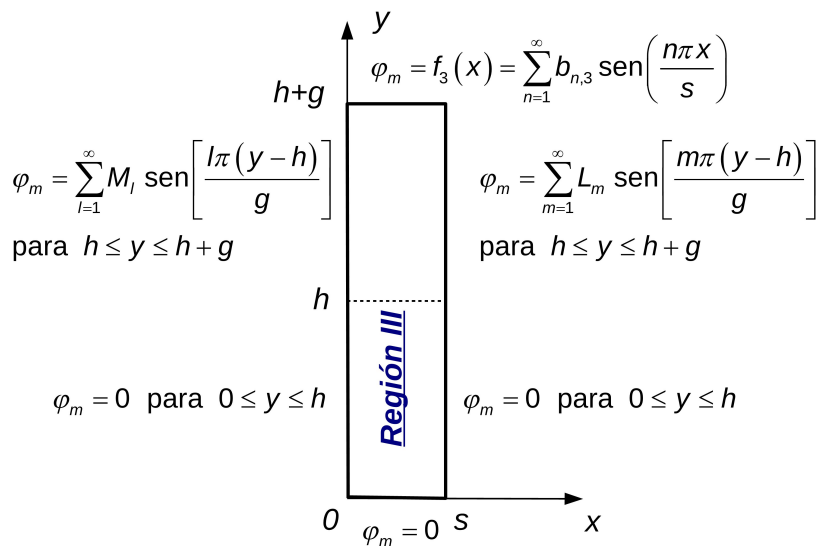


Figura E.3: Región III. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la expresión del potencial de la región I del caso actual.

$$\begin{aligned}
\varphi_m^{III} = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{E.4}$$

donde:

$$\begin{aligned}
K_n^3 = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(1-\delta_{m,n(1-\alpha)})}{m^2-n^2(1-\alpha)^2} L_m + \sum_{m=1}^{\infty} (1-\alpha) L_m \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{m\pi h}{g} \right) \\
K_n^{3'} = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l(1-\delta_{l,n(1-\alpha)})}{l^2-n^2(1-\alpha)^2} M_l + \sum_{l=1}^{\infty} (1-\alpha) M_l \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{l\pi h}{g} \right)
\end{aligned} \tag{E.5}$$

**Región IV:** El potencial en la región IV lo obtenemos por superposición de los casos #1, #4 y #5, llegando a:

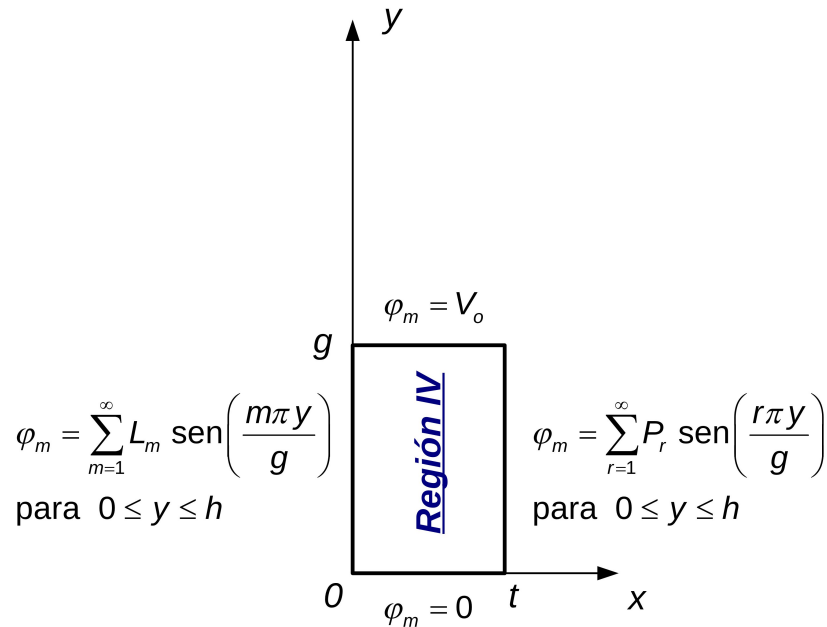


Figura E.4: Región IV. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del caso#1, del caso#4 y del caso#5.

## E.1 Expresiones del potencial magnético escalar en cada región 465

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^{IV} = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{t} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{t} \right] + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{m\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) + \\
 & + \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{r\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.6}$$

**Región V:** El potencial en la región V (figura E.5) lo obtendremos a partir de la expresión del potencial de la región I del caso actual, resultando:

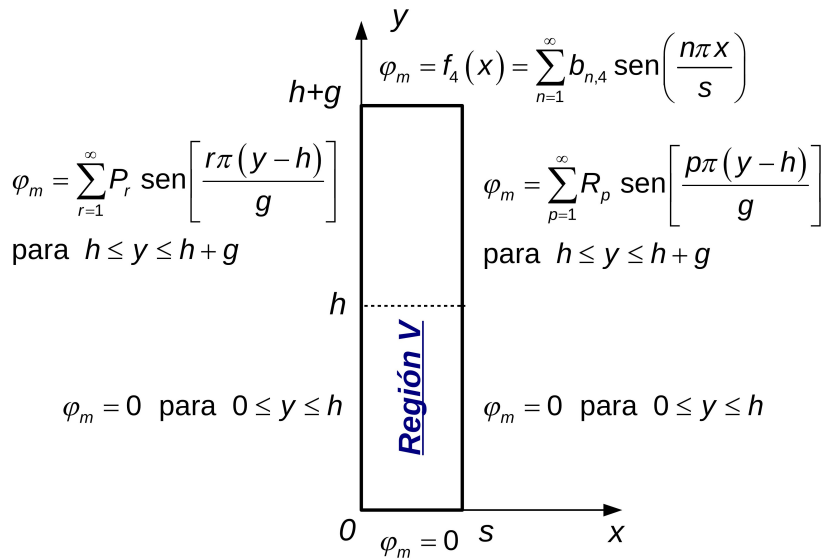


Figura E.5: Región V. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la región I del caso actual.

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^V = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

donde:

$$K_n^5 = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(1-\delta_{p,n(1-\alpha)})}{p^2-n^2(1-\alpha)^2} R_p + \sum_{p=1}^{\infty} (1-\alpha) R_p \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{p\pi h}{g}\right)$$

$$K_n^{5'} = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r(1-\delta_{r,n(1-\alpha)})}{r^2-n^2(1-\alpha)^2} P_r + \sum_{r=1}^{\infty} (1-\alpha) P_r \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{r\pi h}{g}\right)$$

(E.8)

**Región VI:** El potencial en la región VI (figura E.6) lo obtendremos a partir de la expresión del potencial de la región II del caso actual, siendo su expresión:

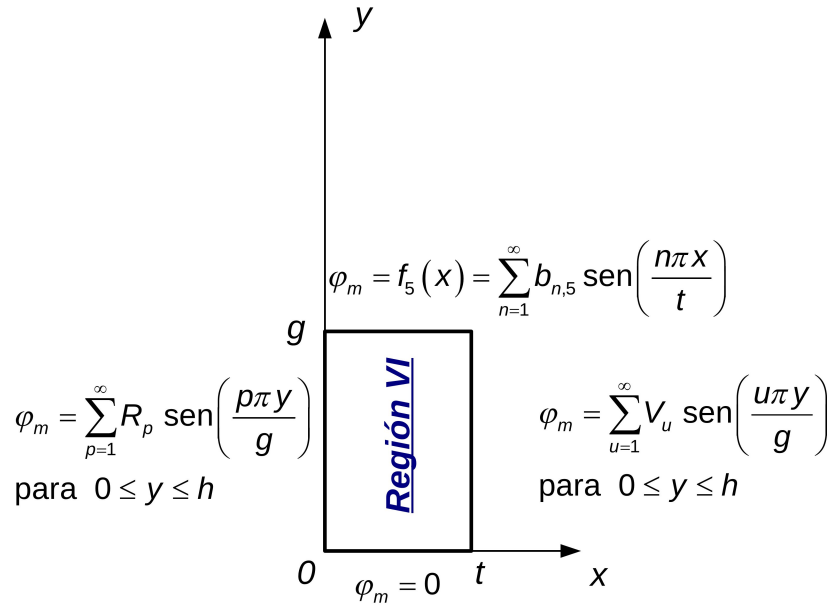


Figura E.6: Región VI. El potencial en esta región lo obtenemos a partir del potencial de la región II del caso actual.

$$\varphi_m^{VI} = + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi g}{t}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{t}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{t}\right) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{csch}\left(\frac{p\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{p\pi(t-x)}{g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi y}{g}\right) +$$

$$+ \sum_{u=1}^{\infty} V_u \operatorname{csch}\left(\frac{u\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{u\pi x}{g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{u\pi y}{g}\right)$$

(E.9)

## E.1 Expresiones del potencial magnético escalar en cada región 467

**Región VII:** El potencial en la región VII (figura E.7) lo obtendremos por superposición del caso#4, del caso#11 y del caso#12, llegando a:

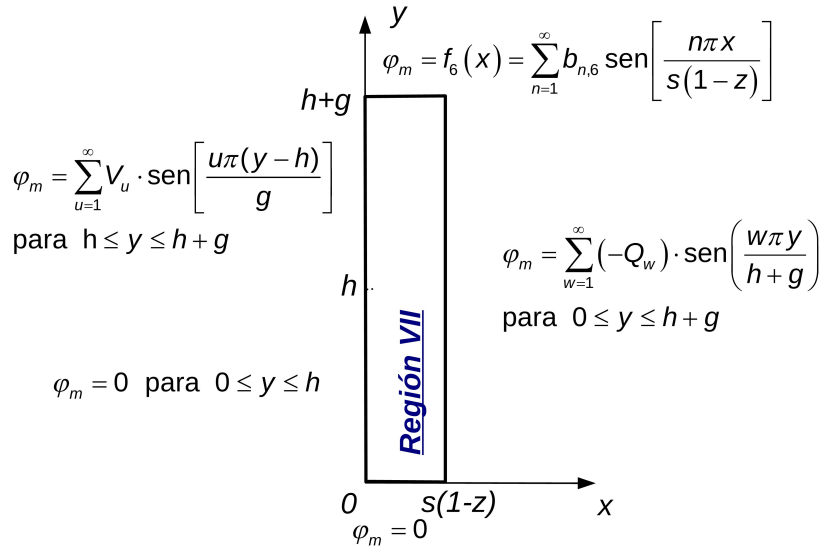


Figura E.7: Región VII. El potencial en esta región lo obtenemos por superposición del caso#4, del caso#11 y del caso#12.

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^{VII} = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,6} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi x}{s(1-z)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi y}{s(1-z)} \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{\gamma'} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s(1-z)-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 & - \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left[ \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right] \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.10}$$

donde:

$$K_n^{\gamma'} = \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{u=1}^{\infty} \frac{u(1-\delta_{u,n(1-\alpha)})}{u^2 - n^2(1-\alpha)^2} V_u + \sum_{u=1}^{\infty} (1-\alpha) V_u \delta_{u,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{u\pi h}{g} \right) \tag{E.11}$$

**Región VIII:** Una vez halladas las expresiones del potencial escalar en las regiones situadas bajo el polo norte (regiones I a VII) podemos obtener el potencial escalar en cualquier otra región sin más que considerar la periodicidad anticíclica del problema; por ello, la expresión del potencial escalar en

la región VIII será idéntica a la de la región I pero con signo contrario:

$$\begin{aligned} \varphi_m^{VIII} = & - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{sz} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{sz} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{sz} \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\ & - \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{w\pi(sz-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

donde la expresión de  $K_n^1$  viene dada por la ecuación (E.2).

## E.2. Expresiones de las derivadas en las fronteras laterales

Las expresiones de las derivadas en las fronteras laterales para el caso Ranura Parcial son las siguientes:

**Derivada en la región I:** A partir de la ecuación (E.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} g \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=sz} = & \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta z} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta z(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta z} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \cdot n\pi(1-\alpha) \cdot \coth [n\pi\mu\beta z(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\ & - \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [w\pi\mu\beta z(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ w\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde la expresión de  $K_n^1$  viene dada por la ecuación (E.2).

**Derivadas en la región II:** A partir de la ecuación (E.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=0} = & \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\ & - \sum_{q=1}^{\infty} H_q q\pi \coth [q\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} M_l l\pi \operatorname{csch} [l\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$



para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &\quad - \sum_{q=1}^{\infty} H_q q \pi \operatorname{csch} [q \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} M_l l \pi \operatorname{coth} [l \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.15}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Derivadas en la región III:** A partir de la ecuación (E.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \cdot n\pi(1-\alpha) \cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \cdot n\pi(1-\alpha) \cdot \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{E.16}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=s} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 n\pi(1-\alpha) \cdot \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} n\pi(1-\alpha) \cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{E.17}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^3$  y  $K_n^{3'}$  vienen dadas por la ecuación (E.5).

**Derivadas en la región IV:** A partir de la ecuación (E.6) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] - \\
 &- \sum_{m=1}^{\infty} L_m m \pi \coth [m\pi \mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) \\
 &+ \sum_{r=1}^{\infty} P_r r \pi \operatorname{csch} [r \pi \mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.18}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4V_0}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] - \\
 &- \sum_{m=1}^{\infty} L_m m \pi \operatorname{csch} [m \pi \mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) + \\
 &+ \sum_{r=1}^{\infty} P_r r \pi \coth [r \pi \mu(1-\beta)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.19}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Derivadas en la región V:** A partir de la ecuación (E.7) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^V}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \cdot n\pi (1-\alpha) \cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \cdot n\pi (1-\alpha) \cdot \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{E.20}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^V}{dx} \Big|_{x=s} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 n\pi (1-\alpha) \cdot \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} n\pi (1-\alpha) \cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{E.21}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^5$  y  $K_n^{5'}$  vienen dadas por la ecuación (E.8).

**Derivadas en la región VI:** A partir de la ecuación (E.9) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &- \sum_{p=1}^{\infty} R_p p \pi \operatorname{coth} [p\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) + \\
 &+ \sum_{u=1}^{\infty} V_u u \pi \operatorname{csch} [u\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{u\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.22}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &- \sum_{p=1}^{\infty} R_p p \pi \operatorname{csch} [p\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) + \\
 &+ \sum_{u=1}^{\infty} V_u u \pi \operatorname{coth} [u\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{u\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.23}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Derivadas en la región VII;** A partir de la ecuación (E.10) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^7 \cdot n\pi(1-\alpha) \cdot \coth [n\pi\mu\beta(1-z)(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [w\pi\mu\beta(1-z)(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ w\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{E.24}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VIII}}{dx} \Big|_{x=s(1-z)} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)(1-\alpha)} \frac{y}{h+g} \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^7 \cdot n\pi(1-\alpha) \cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-z)(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 &- \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w\pi(1-\alpha) \coth [w\pi\mu\beta(1-z)(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.25}$$

para valores de  $y/(h+g)$  tal que  $0 \leq y/(h+g) \leq 1$ , donde la expresión de  $K_n^7$  viene dada por la ecuación (E.11).

**Derivada en la región VIII:** A partir de la ecuación (E.12) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VIII}}{dx} \Big|_{x=0} &= - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta z} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta z(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta z(1-\alpha)} \frac{y}{h+g} \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \cdot n\pi(1-\alpha) \cdot \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta z(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 &+ \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w\pi(1-\alpha) \coth [w\pi\mu\beta z(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.26}$$

para valores de  $y/(h+g)$  tal que  $0 \leq y/(h+g) \leq 1$ , donde la expresión de  $K_n^1$  viene dada por la ecuación (E.2).

### E.3. Expresiones de las ecuaciones en las fronteras comunes

Las expresiones de las ecuaciones en las fronteras comunes para el caso Ranura Parcial son las siguientes:

**Frontera común región I y región II:** A partir de las ecuaciones (E.13) y (E.14) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=sz} = \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=0}$$

o, si multiplicamos por  $g$ :

$$g \left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=sz} = g \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} & - \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ w\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [w\pi\mu\beta z(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ w\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} Q_w + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ q\pi \operatorname{coth} [q\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( q\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi(1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{q\pi h}{g} \right) + \frac{2nq(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \\ & \cdot \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta z(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} H_q - \\ & - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ l\pi \operatorname{csch} [n\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( l\pi \frac{y}{g} \right) \right\} M_l = \\ & = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu\beta z} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta z(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta z} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] \end{aligned} \tag{E.27}$$

**Frontera común región II y región III:** A partir de las ecuaciones (E.15) y (E.16) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=t} = \left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \right|_{x=t} = g \left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} & - \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ q\pi \operatorname{csch} [q\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( q\pi \frac{y}{g} \right) \right\} H_q + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ l\pi \operatorname{coth} [l\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( l\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{l\pi h}{g} \right) + \frac{2nl(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{l,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\ & \cdot \operatorname{coth} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} M_l - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{m\pi h}{g} \right) + \frac{2nm(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{m^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{m,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\ & \cdot \operatorname{csch} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} L_m = \\ & = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] \end{aligned} \tag{E.28}$$

**Frontera común región III y región IV:** A partir de las ecuaciones (E.17) y (E.18) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=s} = \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=0}$$

resultando, al multiplicar por  $g$ :

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=s} = g \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} & - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{l\pi h}{g}\right) + \frac{2nl(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{l,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\ & \cdot \text{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \Big\} M_l + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m\pi \coth [m\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( m\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{m\pi h}{g}\right) + \frac{2nm(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{m^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{m,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\ & \cdot \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \Big\} L_m - \\ & - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ r\pi \text{csch} [r\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( r\pi \frac{y}{g} \right) \right\} P_r = \\ & = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,3} \frac{n\pi}{\mu\beta} \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu(1-\beta)} \text{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \text{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] \end{aligned} \tag{E.29}$$

**Frontera común región IV y región V:** A partir de las ecuaciones (E.19) y (E.20) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=t} = \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=0}$$

es decir:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=t} = g \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m\pi \operatorname{csch} [m\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) \right\} L_m + \\
& + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ r\pi \operatorname{coth} [r\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{r\pi h}{g} \right) + \frac{2nr(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{r^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{r,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \operatorname{coth} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} P_r - \\
& - \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{p\pi h}{g} \right) + \frac{2np(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{p^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{p,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \operatorname{csch} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} R_p = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{+4V_0}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
\end{aligned} \tag{E.30}$$

**Frontera común región V y región VI:** A partir de las ecuaciones (E.21) y (E.22) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=s} = \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=0}$$

o lo que es equivalente

$$g \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=s} = g \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=0}$$



para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{r\pi h}{g}\right) + \frac{2nr(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{r^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{r,n(1-\alpha)}) \right] \right. \\
 & \cdot \text{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} P_r + \\
 & + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ p\pi \coth [p\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{p\pi h}{g}\right) + \frac{2np(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{p^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{p,n(1-\alpha)}) \right] \\
 & \cdot \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} R_p - \\
 & - \sum_{u=1}^{\infty} \left\{ u\pi \text{csch} [u\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( \frac{u\pi y}{g} \right) \right\} V_u = \\
 & = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right]
 \end{aligned} \tag{E.31}$$

**Frontera común región VI y región VII:** A partir de las ecuaciones (E.23) y (E.24) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=t} = \left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=0}$$

o bien:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=t} = g \left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ p\pi \operatorname{csch} [p\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( p\pi \frac{y}{g} \right) \right\} R_p + \\
& + \sum_{u=1}^{\infty} \left\{ u\pi \operatorname{coth} [u\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( u\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{u,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{u\pi h}{g} \right) + \frac{2nu(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{u^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{u,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \operatorname{coth} [n\pi \mu \beta (1-z)(1-\alpha)] \cdot \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} V_u + \\
& + \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ w\pi (1-\alpha) \operatorname{csch} [w\pi \mu \beta (1-z)(1-\alpha)] \cdot \right. \\
& \cdot \operatorname{sen} \left[ w\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} Q_w = \\
& = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right]
\end{aligned} \tag{E.32}$$

**Frontera común región VII y región VIII:** A partir de las ecuaciones (E.25) y (E.26) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=s(1-z)} = \left. \frac{d\varphi_m^{VIII}}{dx} \right|_{x=0} = - \left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=0}$$

que equivale a:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=s(1-z)} = g \left. \frac{d\varphi_m^{VIII}}{dx} \right|_{x=0} = -g \left. \frac{d\varphi_m^I}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/(h+g) \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{u=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{u,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{u\pi h}{g}\right) + \frac{2nu(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{u^2-n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{u,n(1-\alpha)}) \right] \right. \\
 & \cdot \text{csch} \left[ n\pi\mu\beta(1-z)(1-\alpha) \right] \text{sen} \left[ n\pi\frac{y}{h+g} \right] \left. \right\} V_u - \\
 & - \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ w\pi(1-\alpha) [\text{coth}(w\pi\mu\beta(1-z)(1-\alpha)) + \text{coth}(w\pi\mu\beta z(1-\alpha))] \right. \\
 & \cdot \text{sen} \left( w\pi\frac{y}{h+g} \right) \left. \right\} Q_w + \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right) + \frac{2nq(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{q^2-n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \right. \\
 & \cdot \text{csch} \left[ n\pi\mu\beta z(1-\alpha) \right] \text{sen} \left( n\pi\frac{y}{h+g} \right) \left. \right\} H_q = \\
 & = - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)} \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)(1-\alpha)} \right] \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-z)(1-\alpha)} \frac{y}{h+g} \right] - \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{\mu\beta z} \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta z(1-\alpha)} \right] \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta z(1-\alpha)} \frac{y}{h+g} \right]
 \end{aligned} \tag{E.33}$$

## E.4. Expresiones de las componentes de la inducción en cada región

Las expresiones de las componentes de la inducción en cada región del caso Ranura Parcial son las siguientes:

**Región I**

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región I:

$$\begin{aligned}
 B_x^I = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{sz} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{sz} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{sz} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{sz} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{w\pi(sz-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.34}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región I:

$$\begin{aligned}
 B_y^I = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{sz} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{sz} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{sz} \right) \cosh \left( \frac{n\pi y}{sz} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{w\pi(sz-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.35}$$

donde la expresión de  $K_n^1$  viene dada por la ecuación (E.2).

**Región II**

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región II:

$$\begin{aligned}
 B_x^{II} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \cosh \left[ \frac{q\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{l\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.36}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región II:

$$\begin{aligned}
 B_y^{II} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{q\pi(t-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{q\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{l\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{l\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.37}$$

### Región III

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región III:

$$\begin{aligned}
 B_x^{III} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.38}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región III:

$$\begin{aligned}
 B_y^{III} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.39}$$

donde las expresiones de  $K_n^3$  y  $K_n^{3'}$  vienen dadas por la ecuación (E.5).

## Región IV

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región IV:

$$\begin{aligned}
 B_x^{IV} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{t} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{t} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{t} \right] + \\
 & +\mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{cosh} \left[ \frac{m\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} P_r \frac{r\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{r\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.40}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región IV:

$$\begin{aligned}
 B_y^{IV} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{t} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{t} \right] \operatorname{cosh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{t} \right] - \\
 & -\mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{m\pi(t-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{m\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} P_r \frac{r\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{r\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{r\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.41}$$

## Región V

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región V:

$$\begin{aligned}
 B_x^V = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.42}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región V:

$$\begin{aligned}
 B_y^V = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.43}$$

donde las expresiones de  $K_n^{5'}$  y  $K_n^{5'}$  vienen dadas por la ecuación (E.8).

### Región VI

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región VI:

$$\begin{aligned}
 B_x^{VI} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{p=1}^{\infty} R_p \frac{p\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{cosh} \left[ \frac{p\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{u=1}^{\infty} V_u \frac{u\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{u\pi t}{g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{u\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{u\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.44}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región VI:

$$\begin{aligned}
 B_y^{VI} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{p=1}^{\infty} R_p \frac{p\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{p\pi(t-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{p\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{u=1}^{\infty} V_u \frac{u\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{u\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{u\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{u\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{E.45}$$

**Región VII**

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región VII:

$$\begin{aligned}
B_x^{VII} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \frac{n\pi}{s(1-z)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \cos \left[ \frac{n\pi x}{s(1-z)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi y}{s(1-z)} \right] + \\
& + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{7'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right] \cosh \left[ \frac{n\pi(s(1-z)-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
& + \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left[ \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right] \cosh \left( \frac{w\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{E.46}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región VII:

$$\begin{aligned}
B_y^{VII} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \frac{n\pi}{s(1-z)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi x}{s(1-z)} \right] \cosh \left[ \frac{n\pi y}{s(1-z)} \right] - \\
& - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{7'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s(1-z)-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
& + \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left[ \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right] \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{w\pi y}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{E.47}$$

donde la expresión de  $K_n^7$  viene dada por la ecuación (E.11).

**E.5. Expresiones del flujo en cada región**

Las expresiones del flujo en cada región del caso Ranura Parcial son las siguientes:

**Región I**

Flujos que atraviesan la región I:

$$\begin{aligned}
\phi_I^1 = & \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{sz} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{sz} \right) - 1 \right] + \\
& + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \\
& - \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \coth \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{w\pi h}{h+g} \right) \right]
\end{aligned} \tag{E.48}$$



$$\begin{aligned}
\phi_I^2 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),1} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{sz} \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) - 1 \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{E.49}$$

$$\begin{aligned}
\phi_I^3 &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{sz} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{sz} \right) - 1 \right] - \\
&- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \coth \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{w\pi h}{h+g} \right) \right]
\end{aligned} \tag{E.50}$$

$$\begin{aligned}
\phi_I^4 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),1} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{sz} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{sz} \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) + \\
&+ \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{w\pi h}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{E.51}$$

donde la expresión de  $K_n^1$  viene dada por la ecuación (E.2).

## Región II

Flujo que atraviesa la región II:

$$\begin{aligned}
\phi_{II} &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),2} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} [H_q + M_q] \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{E.52}$$

**Región III**

Flujos que atraviesan la región III:

$$\begin{aligned} \phi_{III}^1 &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \\ &- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.53})$$

$$\begin{aligned} \phi_{III}^2 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),3} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^3 + K_n^{3'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{E.54})$$

$$\begin{aligned} \phi_{III}^3 &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,3} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] - \\ &- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^3 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{3'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.55})$$

$$\begin{aligned} \phi_{III}^4 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),3} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^3 + K_n^{3'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

donde las expresiones de  $K_n^3$  y  $K_n^{3'}$  vienen dadas por la ecuación (E.5).

**Región IV**

Flujo que atraviesan la región IV:

$$\begin{aligned}
\phi_{IV} &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} [L_m + P_m] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{E.57}$$

### Región V

Flujos que atraviesa la región V:

$$\begin{aligned}
\phi_V^1 &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] -
\end{aligned} \tag{E.58}$$

$$- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
\phi_V^2 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),4} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^5 + K_n^{5'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{E.59}$$

$$\begin{aligned}
\phi_V^3 &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] - \\
&- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^5 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] +
\end{aligned} \tag{E.60}$$

$$+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{5'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
\phi_V^4 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),4} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^5 + K_n^{5'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{E.61}$$

donde las expresiones de  $K_n^5$  y  $K_n^{5'}$  vienen dadas por la ecuación (E.8).

**Región VI**

Flujo que atraviesan la región VI:

$$\begin{aligned} \phi_{VI} = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),5} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{u=1}^{\infty} [R_p + V_p] \operatorname{csch} \left( \frac{u\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{u\pi t}{g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{E.62})$$

**Región VII**

Flujos que atraviesan la región VII:

$$\begin{aligned} \phi_{VII}^1 = & \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,6} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{n\pi h}{s(1-z)} \right] - 1 \right\} - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{7'} \coth \left[ \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right] \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \\ & - \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left[ \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right] \left[ 1 - \cos \left( \frac{w\pi h}{h+g} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.63})$$

$$\begin{aligned} \phi_{VII}^2 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),6} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{7'} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right] - 1 \right\} - \\ & - \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left[ \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.64})$$

$$\begin{aligned} \phi_{VII}^3 = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,6} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{n\pi h}{s(1-z)} \right] - 1 \right\} + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{7'} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right] \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \coth \left[ \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right] \left[ 1 - \cos \left( \frac{w\pi h}{h+g} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.65})$$

$$\begin{aligned}
\phi_{VII}^4 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),6} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s(1-z)} \right] + \\
& + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{7'} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right] - 1 \right\} \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) - \\
& - \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left[ \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right] - 1 \right\} \cos \left( \frac{w\pi h}{h+g} \right)
\end{aligned} \quad (\text{E.66})$$

donde la expresión de  $K_n^{7'}$  viene dada por la ecuación (E.11).

## E.6. Expresiones del par de reluctancia en cada región

El caso Ranura Parcial está formado por siete regiones, siendo el par de reluctancia total igual a la suma del par de reluctancia originado en cada región, tal y como expresábamos mediante la ecuación 5.124:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RP} = & T_{cogg,RP}^I + T_{cogg,RP}^{II} + T_{cogg,RP}^{III} + T_{cogg,RP}^{IV} + \\
& + T_{cogg,RP}^V + T_{cogg,RP}^{VI} + T_{cogg,RP}^{VII}
\end{aligned}$$

Las expresiones del par de reluctancia en cada región del caso Ranura Parcial son las siguientes:

### Región I

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación E.34) e  $y$  (ecuación E.35) de la inducción en la región I del caso Ranura Parcial, obtenemos que el par de reluctancia es igual a:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RP}^I &= \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^{sz} B_x^I(x, Y) B_y^I(x, Y) dx = \\
&= 2 N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,1} b_{m,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{sz} \right] \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{sz} \right] \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{sz} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi Y}{sz} \right) \frac{\pi}{sz} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{sz} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi sz}{h+g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{sz} \right) \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{sz} \frac{[(-1)^n \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - 1] K_m^1 + [\operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi sz}{h+g} \right) - (-1)^n] Q_m}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{h+g}{sz} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,1} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{sz} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi Y}{sz} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{h+g} \frac{[1 - (-1)^m \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right)] K_n^1 - [\operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) - (-1)^m] Q_n}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{sz}{h+g} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} (K_n^1 K_w^1 - Q_n Q_w) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{w\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{n,w}) \frac{nw}{n^2 - w^2} \left( w + n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - w \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{n,w} \frac{w}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} (K_n^1 Q_w - Q_n K_w^1) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{w\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{n,w}) \frac{w^2}{n^2 - w^2} \left( \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi sz}{h+g} \right) - \operatorname{cosh} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{n,w} \cdot \frac{w\pi}{h+g} \cdot \frac{sz}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi sz}{h+g} \right) \right] \left. \right\} \tag{E.67}
\end{aligned}$$

donde la expresión de  $K_n^1$  viene dada por la ecuación (E.2).

## Región II

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación E.36) e  $y$  (ecuación E.37) de la inducción en la región II del caso Ranura Parcial, obtenemos que el par de reluctancia se puede poner como:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RP}^{II} &= \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^{II}(x, Y) B_y^{II}(x, Y) dx = \\
&= 2 N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,2} b_{m,2} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi g}{t} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{t} \right) \frac{\pi}{t} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cos \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{t} \frac{[\cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - (-1)^n] H_q + [(-1)^n \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - 1] M_q}{1 + \left( \frac{n}{q} \frac{g}{t} \right)^2} - \\
&\quad - \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{q\pi}{g} \frac{[\cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - (-1)^n] H_q - [1 - (-1)^n \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right)] M_q}{1 + \left( \frac{q}{n} \frac{t}{g} \right)^2} - \\
&\quad - \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (H_q H_l - M_q M_l) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{l,q}) \frac{lq}{q^2 - l^2} \left( l + q \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - l \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \right] + \delta_{l,q} \frac{q}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - \\
&\quad - \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (H_q M_l - M_q H_l) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \frac{q\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{l,q}) \frac{l^2}{q^2 - l^2} \left( \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{l,q} \cdot \frac{l\pi t}{2g} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \right] \left. \right\} \tag{E.68}
\end{aligned}$$

## Región III

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación E.38) e  $y$  (ecuación E.39) de la inducción en la región III del caso Ranura Parcial, obtenemos que el par de reluctancia se expresa mediante:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RP}^{III} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^{III}(x, Y) B_y^{III}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,3} b_{m,3} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \frac{\pi}{s} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{s} \frac{[(-1)^n \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - 1] K_m^3 + [\operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - (-1)^n] K_m^{3'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{h+g}{s} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,3} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{h+g} \frac{[1 - (-1)^m \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right)] K_n^3 - [\operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - (-1)^m] K_n^{3'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{s}{h+g} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^3 K_m^3 - K_n^{3'} K_m^{3'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{m}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^3 K_m^{3'} - K_n^{3'} K_m^3) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{m\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{E.69}$$



donde las expresiones de  $K_n^3$  y  $K_n^{3'}$  vienen dadas por la ecuación (E.5).

### Región IV

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación E.40) e  $y$  (ecuación E.41) de la inducción en la región IV del caso Ranura Parcial, obtenemos que el par de reluctancia tiene por expresión:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RP}^{IV} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^{IV}(x, Y) B_y^{IV}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4V_o}{t} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \sinh \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{t} \right] \cos \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \frac{\cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) + 1}{1 + \left( \frac{2k-1}{m} \cdot \frac{g}{t} \right)^2} (L_m - P_m) - \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_o}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{t} \right] \frac{2k-1}{m} \cdot \frac{g}{t} \cdot \frac{1 + \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right)}{1 + \left( \frac{2k-1}{m} \cdot \frac{g}{t} \right)^2} (L_m - P_m) - \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (L_m L_r - P_m P_r) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{m,r}) \frac{mr}{m^2 - r^2} \left( r + m \sinh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \sinh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - r \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \right) \right] + \delta_{r,m} \frac{m}{2} \sinh^2 \left( \frac{m\pi t}{g} \right) - \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (L_m P_r - P_m L_r) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \frac{m\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{m,r}) \frac{r^2}{m^2 - r^2} \left( \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) - \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{m,r} \cdot \frac{r\pi t}{2g} \cdot \sinh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \right] \left. \right\} \tag{E.70}
\end{aligned}$$

### Región V

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación E.42) e  $y$  (ecuación E.43) de la inducción en la región V del caso Ranura Parcial,

obtenemos que el par de reluctancia es igual a:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RP}^V &= \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^V(x, Y) B_y^V(x, Y) dx = \\
&= 2 N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,4} b_{m,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \frac{\pi}{s} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{s} \frac{[(-1)^n \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - 1] K_m^5 + [\operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - (-1)^n] K_m^{5'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{h+g}{s} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,4} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{h+g} \frac{[1 - (-1)^m \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right)] K_n^5 - [\operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - (-1)^m] K_n^{5'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{s}{h+g} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^5 K_m^5 - K_n^{5'} K_m^{5'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{m}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^5 K_m^{5'} - K_n^{5'} K_m^5) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{m\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \right] \left. \right\} \tag{E.71}
\end{aligned}$$

donde las expresiones de  $K_n^5$  y  $K_n^{5'}$  vienen dadas por la ecuación (E.8).

## Región VI

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación E.44) e  $y$  (ecuación E.45) de la inducción en la región VI del caso Ranura Parcial, obtenemos que el par de reluctancia tiene por expresión:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RP}^{VI} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^{VI}(x, Y) B_y^{VI}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,5} b_{m,5} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi g}{t} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{t} \right) \frac{\pi}{t} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} b_{n,5} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cos \left( \frac{p\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi [\cosh(\frac{p\pi t}{g}) - (-1)^n] R_p + [(-1)^n \cosh(\frac{p\pi t}{g}) - 1] V_p}{t [1 + (\frac{n}{p} \frac{g}{t})^2]} - \\
&\quad - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,5} \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{p\pi [\cosh(\frac{p\pi t}{g}) - (-1)^n] R_p - [1 - (-1)^n \cosh(\frac{p\pi t}{g})] V_p}{g [1 + (\frac{p}{n} \frac{t}{g})^2]} \quad (E.72) \\
&\quad - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} (R_p R_u - V_p V_u) \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{u\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{u\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{p,u}) \frac{pu}{p^2 - u^2} \left( u + p \operatorname{senh} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{u\pi t}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - u \cosh \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{u\pi t}{g} \right) \right) \right] + \delta_{p,u} \frac{p}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{p\pi t}{g} \right) - \\
&\quad - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} (R_p V_u - V_p R_u) \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{u\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{u\pi Y}{g} \right) \frac{p\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{p,u}) \frac{u^2}{p^2 - u^2} \left( \cosh \left( \frac{p\pi t}{g} \right) - \cosh \left( \frac{u\pi t}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{p,u} \cdot \frac{p\pi t}{2g} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

## Región VII

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación E.46) e  $y$  (ecuación E.47) de la inducción en la región VII del caso Ranura Parcial, obtenemos que el par de reluctancia se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,RP}^{VII} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^{s(1-z)} B_x^{VII}(x, Y) B_y^{VII}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,6} b_{m,6} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{s(1-z)} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi Y}{s(1-z)} \right) \frac{\pi}{s(1-z)} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,6} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s(1-z)}{h+g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{s(1-z)} \right) \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{s(1-z)} \frac{[(-1)^n \cosh \left( \frac{m\pi s(1-z)}{h+g} \right) - 1] Q_m - [\cosh \left( \frac{m\pi s(1-z)}{h+g} \right) - (-1)^n] K_m^{\prime}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{h+g}{s(1-z)} \right)^2} - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,6} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s(1-z)} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{m\pi Y}{s(1-z)} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{h+g} \frac{[1 - (-1)^m \cosh \left( \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right)] Q_n + [\cosh \left( \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right) - (-1)^m] K_n^{\prime}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{s(1-z)}{h+g} \right)^2} + \\
&\quad + \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (Q_w Q_n - K_w^{\prime} K_n^{\prime}) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ \left( 1 - \delta_{n,w} \right) \frac{nw}{w^2 - n^2} \left( n + w \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - n \operatorname{cosh} \left( \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{n,w} \frac{w}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right) - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} (Q_n K_w^{\prime} - K_n^{\prime} Q_w) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{w\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ \left( 1 - \delta_{n,w} \right) \frac{w^2}{n^2 - w^2} \left( \cosh \left( \frac{n\pi s(1-z)}{h+g} \right) - \cosh \left( \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{n,w} \cdot \frac{w\pi}{h+g} \cdot \frac{s(1-z)}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi s(1-z)}{h+g} \right) \right] \left. \right\} \tag{E.73}
\end{aligned}$$

donde la expresión de  $K_n^{\prime}$  viene dada por la ecuación (E.11).

# Apéndice F

## Expresiones del caso Diente Completo

En este apéndice se recogen, para el caso Diente Completo, las expresiones del potencial magnético escalar en cada región, de las derivadas del potencial magnético escalar en las fronteras laterales, de las ecuaciones en las fronteras laterales y de las componentes de la inducción, del flujo y del par de reluctancia en cada región. Estas expresiones son:

### F.1. Expresiones del potencial magnético escalar en cada región

Las expresiones del potencial magnético escalar en cada región del caso Diente Completo son las siguientes:

**Región I:** La figura F.1 muestra la región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la expresión del potencial obtenida en la región I del caso Diente Parcial. Por lo tanto su potencial será:

$$\begin{aligned}\varphi_m^I &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\ &+ \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{w\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right) + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right)\end{aligned}\tag{F.1}$$

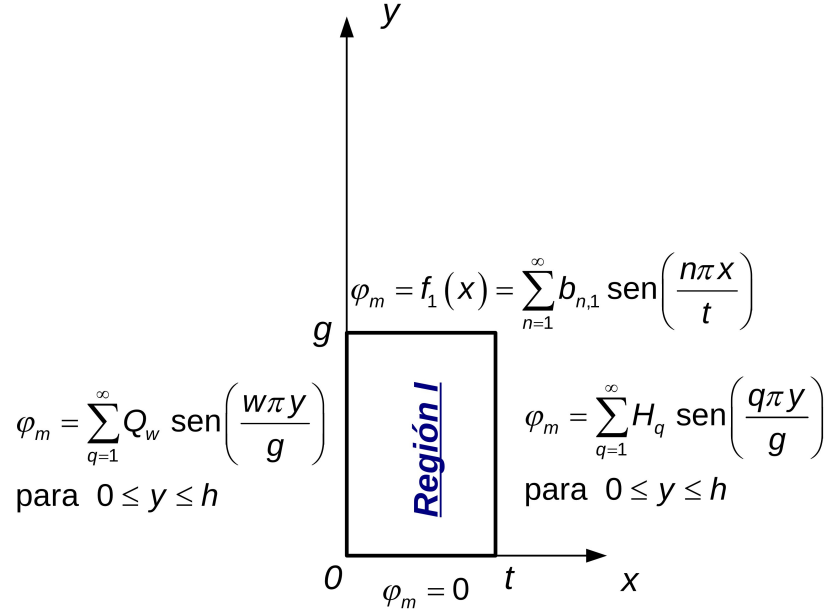


Figura F.1: Región I. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región I del caso Diente Parcial.

**Región II:** El potencial en la región II (figura F.2) lo obtenemos a partir de la expresión del potencial obtenida en la Región II del caso Diente Parcial, resultando:

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^{II} = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch}\left[\frac{n\pi(h+g)}{s}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{s}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{s}\right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi s}{h+g}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{h+g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{h+g}\right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi s}{h+g}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi(s-x)}{h+g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{h+g}\right)
 \end{aligned} \tag{F.2}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 K_n^2 = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l(1-\delta_{l,n(1-\alpha)})}{l^2-n^2(1-\alpha)^2} M_l + \sum_{l=1}^{\infty} (1-\alpha) M_l \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{l\pi h}{g}\right) \\
 K_n^{2'} = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q(1-\delta_{q,n(1-\alpha)})}{q^2-n^2(1-\alpha)^2} H_q + \sum_{q=1}^{\infty} (1-\alpha) H_q \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right)
 \end{aligned} \tag{F.3}$$

## F.1 Expresiones del potencial magnético escalar en cada región 499

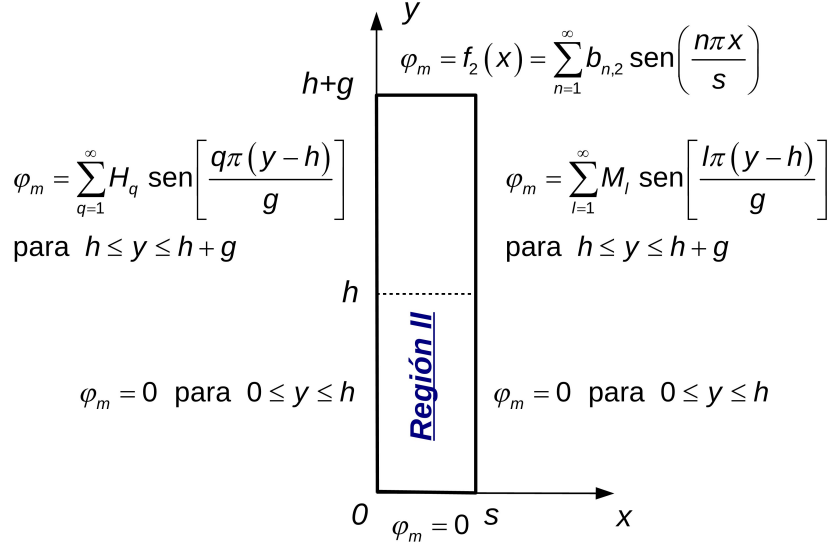


Figura F.2: Región II. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región II del caso Diente Parcial.

**Región III:** La figura F.3 muestra la región III. El potencial en esta región, lo obtenemos a partir de la expresión del potencial de la Región IV del caso Ranura Completa. La expresión del potencial será entonces:

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^{III} = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch}\left[\frac{(2k-1)\pi g}{t}\right] \operatorname{sen}\left[\frac{(2k-1)\pi x}{t}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{(2k-1)\pi y}{t}\right] + \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} M_l \operatorname{csch}\left(\frac{l\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{l\pi(t-x)}{g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi y}{g}\right) + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} L_m \operatorname{csch}\left(\frac{m\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi x}{g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{g}\right)
 \end{aligned} \tag{F.4}$$

**Región IV:** El potencial en la región IV (figura F.4) lo obtenemos a partir de la expresión del potencial de la Región IV del caso Diente Parcial, llegando a:

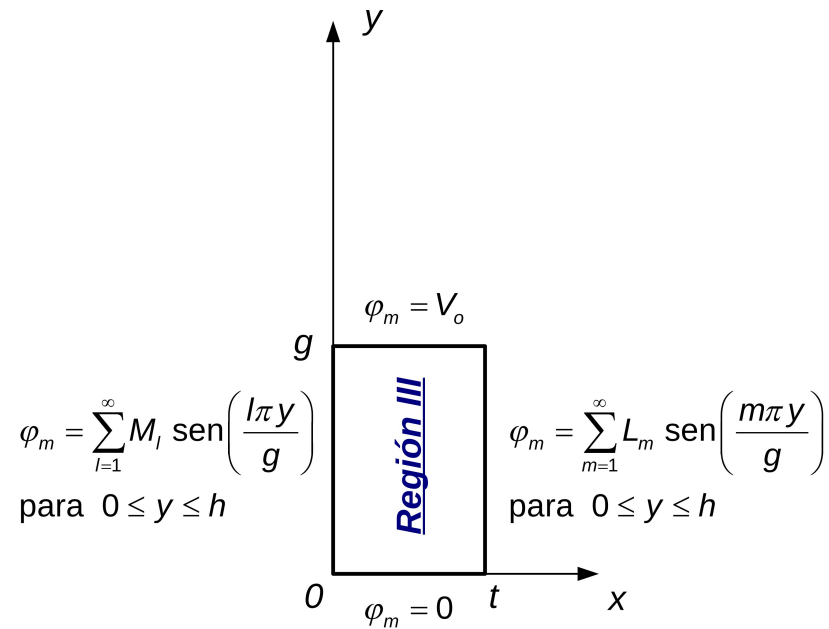


Figura F.3: Región III. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región IV del caso Ranura Completa.

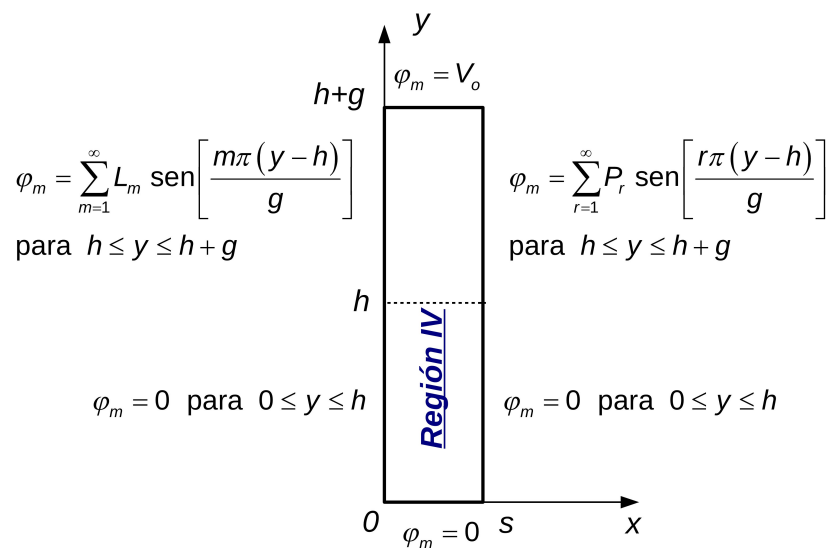


Figura F.4: Región IV. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región IV del caso Diente Parcial.



## F.1 Expresiones del potencial magnético escalar en cada región 501

$$\begin{aligned}
\varphi_m^{IV} = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{s} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{s} \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{F.5}$$

donde:

$$\begin{aligned}
K_n^4 = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r(1-\delta_{r,n(1-\alpha)})}{r^2-n^2(1-\alpha)^2} P_r + \sum_{r=1}^{\infty} (1-\alpha) P_r \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{r\pi h}{g} \right) \\
K_n^{4'} = & \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(1-\delta_{m,n(1-\alpha)})}{m^2-n^2(1-\alpha)^2} L_m + \sum_{m=1}^{\infty} (1-\alpha) L_m \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{m\pi h}{g} \right)
\end{aligned} \tag{F.6}$$

**Región V:** El potencial en la región V (figura F.5) lo obtenemos a partir de la expresión del potencial de la Región I del caso actual, resultando:

$$\begin{aligned}
\varphi_m^V = & \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\
& + \sum_{r=1}^{\infty} P_r \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{r\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right) + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} R_p \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{p\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right)
\end{aligned} \tag{F.7}$$

**Región VI:** El potencial en la región VI (figura F.6) lo obtendremos a partir de la expresión del potencial de la Región II del caso actual, siendo su expresión:

$$\begin{aligned}
\varphi_m^{VI} = & \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{F.8}$$

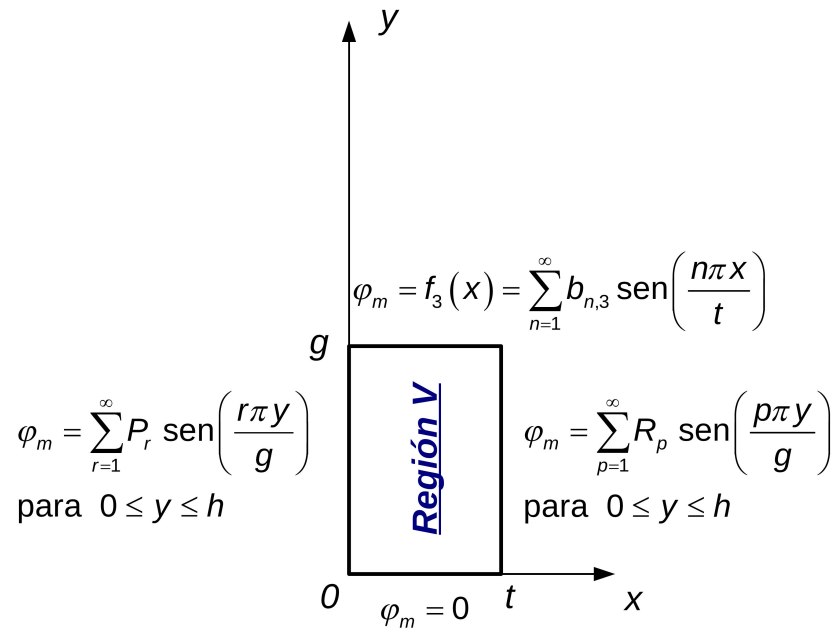


Figura F.5: Región V. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región I del caso actual.

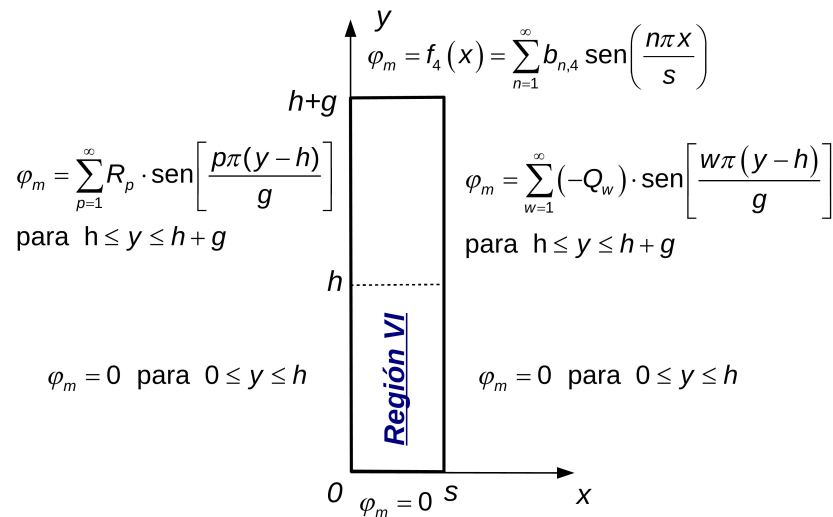


Figura F.6: Región VI. El potencial en esta región lo obtenemos a partir de la Región II del caso actual.

donde:

$$\begin{aligned}
 K_n^6 &= \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{w=1}^{\infty} \frac{w(1-\delta_{w,n(1-\alpha)})}{w^2-n^2(1-\alpha)^2} Q_w + \sum_{w=1}^{\infty} (1-\alpha) Q_w \delta_{w,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{w\pi h}{g}\right) \\
 K_n^{6'} &= \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi\alpha) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(1-\delta_{p,n(1-\alpha)})}{p^2-n^2(1-\alpha)^2} R_p + \sum_{p=1}^{\infty} (1-\alpha) R_p \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{p\pi h}{g}\right)
 \end{aligned}
 \tag{F.9}$$

**Región VII:** Debido a la periodicidad anticíclica del problema, la expresión del potencial escalar en la región VII será idéntica a la de la región I pero con signo contrario, resultando:

$$\begin{aligned}
 \varphi_m^{VII} &= -\varphi_m^I = -\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi g}{t}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{t}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{t}\right) - \\
 &\quad - \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \operatorname{csch}\left(\frac{w\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left[\frac{w\pi(t-x)}{g}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{w\pi y}{g}\right) - \\
 &\quad - \sum_{q=1}^{\infty} H_q \operatorname{csch}\left(\frac{q\pi t}{g}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{q\pi x}{g}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{g}\right)
 \end{aligned}
 \tag{F.10}$$

## F.2. Expresiones de las derivadas en las fronteras laterales

Las expresiones de las derivadas en las fronteras laterales para el caso Diente Completo son las siguientes:

**Derivada en la región I:** A partir de la ecuación (F.1) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch}\left[\frac{n\pi}{\mu(1-\beta)}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g}\right] - \\
 &\quad - \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w \pi \operatorname{csch}[w \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen}\left(\frac{w \pi y}{g}\right) \\
 &\quad + \sum_{q=1}^{\infty} H_q q \pi \operatorname{coth}[q \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen}\left(\frac{q \pi y}{g}\right)
 \end{aligned}
 \tag{F.11}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Derivadas en la región II:** A partir de la ecuación (F.2) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{F.12}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=s} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 n\pi(1-\alpha) \operatorname{coth} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{F.13}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^2$  y  $K_n^{2'}$  vienen dadas por la ecuación (F.3).

**Derivadas en la región III:** A partir de la ecuación (F.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] - \\
 &- \sum_{l=1}^{\infty} M_l l \pi \operatorname{coth} [l\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right) \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} L_m m \pi \operatorname{csch} [m\pi\mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.14}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4V_0}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} h \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] - \\
 &\quad - \sum_{l=1}^{\infty} M_l l \pi \operatorname{csch} [l \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{l \pi y}{g} \right) + \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} L_m m \pi \operatorname{coth} [l \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.15}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Derivadas en la región IV:** A partir de la ecuación (F.5) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu\beta} \operatorname{csc} h \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 n \pi (1-\alpha) \operatorname{csch} [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} n \pi (1-\alpha) \operatorname{coth} [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{F.16}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \Big|_{x=s} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4V_0}{\mu\beta} \operatorname{csc} h \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 n \pi (1-\alpha) \operatorname{coth} [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} n \pi (1-\alpha) \operatorname{csch} [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{F.17}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^4$  y  $K_n^{4'}$  vienen dadas por la ecuación (F.6).

**Derivadas en la región V:** A partir de la ecuación (F.7) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^V}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &\quad - \sum_{r=1}^{\infty} P_r r \pi \coth [r \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{r \pi y}{g} \right) \\
 &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} R_p p \pi \operatorname{csch} [p \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{p \pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.18}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^V}{dx} \Big|_{x=t} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} (-1)^n \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] - \\
 &\quad - \sum_{r=1}^{\infty} P_r r \pi \operatorname{csch} [r \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{r \pi y}{g} \right) \\
 &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} R_p p \pi \coth [p \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{p \pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.19}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

**Derivadas en la región VI:** A partir de la ecuación (F.8) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \Big|_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 n \pi (1-\alpha) \operatorname{csch} [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} n \pi (1-\alpha) \coth [n \pi \mu \beta (1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n \pi (1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{F.20}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \Big|_{x=s} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\mu\beta} \cdot \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 n\pi(1-\alpha) \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} n\pi(1-\alpha) \operatorname{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{F.21}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , donde las expresiones de  $K_n^6$  y  $K_n^{6'}$  vienen dadas por la ecuación (F.9).

**Derivada en la región VII:** A partir de la ecuación (F.10) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \Big|_{x=0} &= - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] + \\
 &+ \sum_{w=1}^{\infty} Q_w w \pi \coth [w \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{w \pi y}{g} \right) - \\
 &- \sum_{q=1}^{\infty} H_q q \pi \operatorname{csc} h [q \pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( \frac{q \pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.22}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ .

### F.3. Expresiones de las ecuaciones en las fronteras comunes

Las expresiones de las ecuaciones en las fronteras comunes para el caso Diente Completo son las siguientes:

**Frontera común región I y región II:** A partir de las ecuaciones (F.11) y (F.12) y aplicando que

$$\frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=t} = \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=0}$$

que equivale a:

$$g \frac{d\varphi_m^I}{dx} \Big|_{x=t} = g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} & - \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ w\pi \operatorname{csch} [w\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( w\pi \frac{y}{g} \right) \right\} Q_w + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ q\pi \operatorname{coth} [q\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( q\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{q\pi h}{g} \right) + \frac{2nq(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\ & \cdot \operatorname{coth} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} H_q - \\ & - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{l\pi h}{g} \right) + \frac{2nl(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{l,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\ & \cdot \operatorname{csch} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} M_l = \\ & = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,1} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] \end{aligned} \tag{F.23}$$

**Frontera común región II y región III:** A partir de las ecuaciones (F.13) y (F.14) y aplicando que

$$\frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=s} = \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=0}$$

que equivale a:

$$g \frac{d\varphi_m^{II}}{dx} \Big|_{x=s} = g \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \Big|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:



$$\begin{aligned}
 & - \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{q,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{q\pi h}{g}\right) + \frac{2nq(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{q^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{q,n(1-\alpha)}) \right] \right. \\
 & \cdot \text{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \Big\} H_q + \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ l\pi \coth [l\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( l\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{l,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{l\pi h}{g}\right) + \frac{2nl(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{l^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{l,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
 & \cdot \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \Big\} M_l - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m\pi \text{csch} [m\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( m\pi \frac{y}{g} \right) \right\} L_m = \\
 & = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,2} \frac{n\pi}{\mu\beta} \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu(1-\beta)} \text{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \text{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right]
 \end{aligned} \tag{F.24}$$

**Frontera común región III y región IV:** A partir de las ecuaciones (F.15) y (F.16) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=t} = \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=0}$$

que equivale a:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{III}}{dx} \right|_{x=t} = g \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ l\pi \operatorname{csch} [l\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( l\pi \frac{y}{g} \right) \right\} M_l + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m\pi \operatorname{coth} [m\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{m\pi h}{g} \right) + \frac{2nm(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{m^2-n^2(1-\alpha)^2} (1-\delta_{m,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \operatorname{coth} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} L_m - \\
& - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{r\pi h}{g} \right) + \frac{2nr(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{r^2-n^2(1-\alpha)^2} (1-\delta_{r,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \operatorname{csch} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} P_r = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{\mu(1-\beta)g} \right] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right]
\end{aligned} \tag{F.25}$$

**Frontera común región IV y región V:** A partir de las ecuaciones (F.17) y (F.18) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=s} = \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=0}$$

que equivale a:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{IV}}{dx} \right|_{x=s} = g \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{m,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{m\pi h}{g}\right) + \frac{2nm(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{m^2-n^2(1-\alpha)^2} (1-\delta_{m,n(1-\alpha)}) \right] \right. \\
 & \cdot \text{csch}[n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen}\left[n\pi(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g}\right)\right] \left. \right\} L_m + \\
 & + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ r\pi \coth[r\pi\mu(1-\beta)] \text{sen}\left(r\pi\frac{y}{g}\right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{r,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{r\pi h}{g}\right) + \frac{2nr(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{r^2-n^2(1-\alpha)^2} (1-\delta_{r,n(1-\alpha)}) \right] \\
 & \cdot \coth[n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen}\left[n\pi(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g}\right)\right] \left. \right\} P_r - \\
 & - \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ p\pi \text{csch}[p\pi\mu(1-\beta)] \text{sen}\left(p\pi\frac{y}{g}\right) \right\} R_p = \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{\mu\beta} \text{csch}\left[\frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta(1-\alpha)}\right] \text{senh}\left[\frac{(2k-1)\pi}{\mu\beta}\left(\frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \text{csch}\left[\frac{n\pi}{\mu(1-\beta)}\right] \text{senh}\left[\frac{n\pi}{\mu(1-\beta)}\frac{y}{g}\right]
 \end{aligned} \tag{F.26}$$

**Frontera común región V y región VI:** A partir de las ecuaciones (F.19) y (F.20) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=t} = \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=0}$$

que equivale a:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^V}{dx} \right|_{x=t} = g \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ r\pi \operatorname{csch} [r\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( r\pi \frac{y}{g} \right) \right\} P_r + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ p\pi \operatorname{coth} [p\pi \mu(1-\beta)] \operatorname{sen} \left( p\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{p\pi h}{g} \right) + \frac{2np(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{p^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{p,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \\
& \cdot \operatorname{coth} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} R_p + \\
& + \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{w,n(1-\alpha)} \cos \left( \frac{w\pi h}{g} \right) + \frac{2nw(1-\alpha)^2 \operatorname{sen}(n\pi\alpha)}{w^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{w,n(1-\alpha)}) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \operatorname{csch} [n\pi \mu \beta(1-\alpha)] \operatorname{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\} Q_w = \\
& = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,3} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{\mu\beta} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]
\end{aligned} \tag{F.27}$$

**Frontera común región VI y región VII:** A partir de las ecuaciones (F.21) y (F.22) y aplicando que

$$\left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=s} = \left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=0}$$

que equivale a:

$$g \left. \frac{d\varphi_m^{VI}}{dx} \right|_{x=s} = g \left. \frac{d\varphi_m^{VII}}{dx} \right|_{x=0}$$

para valores de  $y/g$  tal que  $0 \leq y/g \leq 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{p,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{p\pi h}{g}\right) + \frac{2np(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{p^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{p,n(1-\alpha)}) \right] \right. \\
 & \cdot \text{csch} [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} R_p + \\
 & - \sum_{w=1}^{\infty} \left\{ w\pi \coth [w\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( w\pi \frac{y}{g} \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\pi (1-\alpha)^2 \delta_{w,n(1-\alpha)} \cos\left(\frac{w\pi h}{g}\right) + \frac{2nw(1-\alpha)^2 \text{sen}(n\pi\alpha)}{w^2 - n^2(1-\alpha)^2} (1 - \delta_{w,n(1-\alpha)}) \right] \\
 & \cdot \coth [n\pi\mu\beta(1-\alpha)] \text{sen} \left[ n\pi(1-\alpha) \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{y}{g} \right) \right] \left. \right\} Q_w + \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ q\pi \text{csch} [q\pi\mu(1-\beta)] \text{sen} \left( q\pi \frac{y}{g} \right) \right\} H_q = \\
 & = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,4} \frac{n\pi}{\mu\beta} \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta(1-\alpha)} \right] \cdot \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu\beta} \left( \frac{y}{g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] - \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \text{csch} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \right] \text{senh} \left[ \frac{n\pi}{\mu(1-\beta)} \frac{y}{g} \right]
 \end{aligned} \tag{F.28}$$

## F.4. Expresiones de las componentes de la inducción en cada región

Las expresiones de las componentes de la inducción en cada región del caso Diente Completo son las siguientes:

### Región I

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región I:

$$\begin{aligned}
B_x^I &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\
&+ \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \cosh \left[ \frac{w\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi y}{g} \right) - \\
&- \mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi y}{g} \right)
\end{aligned} \tag{F.29}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región I:

$$\begin{aligned}
B_y^I &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \cosh \left( \frac{n\pi y}{t} \right) - \\
&- \mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} Q_w \frac{w\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{w\pi(t-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{w\pi y}{g} \right) - \\
&- \mu_0 \sum_{q=1}^{\infty} H_q \frac{q\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{q\pi y}{g} \right)
\end{aligned} \tag{F.30}$$

## Región II

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región II:

$$\begin{aligned}
B_x^{II} &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
&- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
&+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{F.31}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región II:

$$\begin{aligned}
B_y^{II} &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \cosh \left( \frac{n\pi y}{s} \right) - \\
&- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
&- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{F.32}$$

donde las expresiones de  $K_n^2$  y  $K_n^{2'}$  vienen dadas por la ecuación (F.3).

**Región III**

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región III:

$$\begin{aligned}
 B_x^{III} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{t} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{t} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{t} \right] + \\
 & +\mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cosh \left[ \frac{l\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.33}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región III:

$$\begin{aligned}
 B_y^{III} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{t} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{t} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{t} \right] - \\
 & -\mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} M_l \frac{l\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{l\pi(t-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{l\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} L_m \frac{m\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{m\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.34}$$

**Región IV**

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región IV:

$$\begin{aligned}
 B_x^{IV} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{s} \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{s} \right] - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.35}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región IV:

$$\begin{aligned}
 B_y^{IV} = & -\mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{(2k-1)\pi x}{s} \right] \operatorname{cosh} \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{s} \right] - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.36}$$

donde las expresiones de  $K_n^4$  y  $K_n^{4'}$  vienen dadas por la ecuación (F.6).

### Región V

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región V:

$$\begin{aligned}
 B_x^V = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) + \\
 & +\mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} P_r \frac{r\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{cosh} \left[ \frac{r\pi(t-x)}{g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi y}{g} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{p=1}^{\infty} R_p \frac{p\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{p\pi x}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{p\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.37}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región V:

$$\begin{aligned}
 B_y^V = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \frac{n\pi}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{t} \right) \operatorname{cosh} \left( \frac{n\pi y}{t} \right) - \\
 & -\mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} P_r \frac{r\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{r\pi(t-x)}{g} \right] \cos \left( \frac{r\pi y}{g} \right) \\
 & -\mu_0 \sum_{p=1}^{\infty} R_p \frac{p\pi}{g} \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{p\pi x}{g} \right) \cos \left( \frac{p\pi y}{g} \right)
 \end{aligned} \tag{F.38}$$



**Región VI**

Componente  $x$  de la inducción magnética en la región VI:

$$\begin{aligned}
B_x^{VI} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi y}{s} \right) + \\
& +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) + \\
& +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{F.39}$$

Componente  $y$  de la inducción magnética en la región VI:

$$\begin{aligned}
B_y^{VI} = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \frac{n\pi}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi}{s} (h+g) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{s} \right) \cosh \left( \frac{n\pi y}{s} \right) + \\
& +\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{h+g} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right) - \\
& -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \frac{n\pi}{h+g} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left[ \frac{n\pi(s-x)}{h+g} \right] \cos \left( \frac{n\pi y}{h+g} \right)
\end{aligned} \tag{F.40}$$

donde las expresiones de  $K_n^6$  y  $K_n^{6'}$  vienen dadas por la ecuación (F.9).

**F.5. Expresiones del flujo en cada región**

Las expresiones del flujo en cada región del caso Diente Completo son las siguientes:

**Región I**

Flujo que atraviesa la región I:

$$\begin{aligned}
\phi_I = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),1} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\
& +\mu_0 \sum_{w=1}^{\infty} (Q_w + H_w) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{w\pi t}{g} \right) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{F.41}$$

**Región II**

Flujos que atraviesan la región II:

$$\begin{aligned} \phi_{II}^1 &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \\ &- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.42})$$

$$\begin{aligned} \phi_{II}^2 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),2} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^2 + K_n^{2'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.43})$$

$$\begin{aligned} \phi_{II}^3 &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,2} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] - \\ &- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^2 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{2'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.44})$$

$$\begin{aligned} \phi_{II}^4 &= \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),2} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\ &+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^2 + K_n^{2'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.45})$$

donde las expresiones de  $K_n^2$  y  $K_n^{2'}$  vienen dadas por la ecuación (F.3).

**Región III**

Flujo que atraviesa la región III:

$$\begin{aligned} \phi_{III} = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{l=1}^{\infty} [M_l + L_l] \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.46})$$

### Región IV

Flujos que atraviesan la región IV:

$$\begin{aligned} \phi_{IV}^1 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] - 1 \right\} + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.47})$$

$$\begin{aligned} \phi_{IV}^2 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^4 + K_n^{4'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.48})$$

$$\begin{aligned} \phi_{IV}^3 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \left\{ \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] - 1 \right\} - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^4 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{4'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.49})$$

$$\begin{aligned} \phi_{IV}^4 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8V_0}{(2k-1)\pi} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^4 + K_n^{4'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.50})$$

donde las expresiones de  $K_n^4$  y  $K_n^{4'}$  vienen dadas por la ecuación (F.6).

**Región V**

Flujo que atraviesa la región V:

$$\begin{aligned} \phi_V = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),3} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{r=1}^{\infty} [P_r + R_r] \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.51})$$

**Región VI**

Flujos que atraviesan la región VI:

$$\begin{aligned} \phi_{VI}^1 = & \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] - \\ & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] - \end{aligned} \quad (\text{F.52})$$

$$\begin{aligned} & - \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] \\ \phi_{VI}^2 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),4} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] - \end{aligned} \quad (\text{F.53})$$

$$- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^6 - K_n^{6'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_{VI}^3 = & -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{n,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \left[ \cosh \left( \frac{n\pi h}{s} \right) - 1 \right] + \\ & + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^6 \coth \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right] + \end{aligned} \quad (\text{F.54})$$

$$+ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{6'} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_{VI}^4 = & \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2b_{(2k-1),4} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi h}{s} \right] - \end{aligned} \quad (\text{F.55})$$

$$- \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [K_n^6 - K_n^{6'}] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \left[ \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - 1 \right] \cos \left( \frac{n\pi h}{h+g} \right)$$

donde las expresiones de  $K_n^6$  y  $K_n^{6'}$  vienen dadas por la ecuación (F.9).

## F.6. Expresiones del par de reluctancia en cada región

El caso Diente Completo está formado por seis regiones, siendo el par de reluctancia total igual a la suma del par de reluctancia originado en cada región, tal y como expresábamos mediante la ecuación 5.125:

$$T_{cogg,DC} = T_{cogg,DC}^I + T_{cogg,DC}^{II} + T_{cogg,DC}^{III} + T_{cogg,DC}^{IV} + T_{cogg,DC}^V + T_{cogg,DC}^{VI}$$

Las expresiones del par de reluctancia en cada región del caso Diente Completo son las siguientes:

### Región I

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación F.29) e  $y$  (ecuación F.30) de la inducción en la región I del caso Diente Completo, obtenemos que el par de reluctancia es igual a:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,DC}^I &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^I(x, Y) B_y^I(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,1} b_{m,1} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi g}{t} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{t} \right) \frac{\pi}{t} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cos \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi}{t} \frac{[\cosh(\frac{w\pi t}{g}) - (-1)^n] Q_w + [(-1)^n \cosh(\frac{w\pi t}{g}) - 1] H_w}{1 + (\frac{n}{w} \frac{g}{t})^2} - \\
&\quad - \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{w\pi}{g} \frac{[\cosh(\frac{w\pi t}{g}) - (-1)^n] Q_w - [1 - (-1)^n \cosh(\frac{w\pi t}{g})] H_w}{1 + (\frac{n}{w} \frac{g}{t})^2} \quad (F.56) \\
&\quad - \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (Q_w Q_q - H_w H_q) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{q,w}) \frac{qw}{w^2 - q^2} \left( q + w \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - q \cosh \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \right) \right] + \delta_{q,w} \frac{w}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{w\pi t}{g} \right) - \\
&\quad - \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (Q_w H_q - H_w Q_q) \operatorname{csch} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{w\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{q\pi Y}{g} \right) \frac{w\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{q,w}) \frac{q^2}{w^2 - q^2} \left( \cosh \left( \frac{w\pi t}{g} \right) - \cosh \left( \frac{q\pi t}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{q,w} \cdot \frac{q\pi t}{2g} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{w\pi t}{g} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

## Región II

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación F.31) e  $y$  (ecuación F.32) de la inducción en la región II del caso Diente Completo,

obtenemos que el par de reluctancia se puede poner como:

$$\begin{aligned}
 T_{cogg,DC}^{II} &= \frac{2 N_p (R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^{II}(x, Y) B_y^{II}(x, Y) dx = \\
 &= 2 N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,2} b_{m,2} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \frac{\pi}{s} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,2} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \cdot \sinh \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{n\pi}{s} \frac{[(-1)^n \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - 1] K_m^2 + [\cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - (-1)^n] K_m^{2'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{h+g}{s} \right)^2} + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,2} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{n\pi}{h+g} \frac{[1 - (-1)^m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right)] K_n^2 - [\cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - (-1)^m] K_n^{2'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{s}{h+g} \right)^2} + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^2 K_m^2 - K_n^{2'} K_m^{2'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{m}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^2 K_m^{2'} - K_n^{2'} K_m^2) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{n\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \right] \left. \right\} \tag{F.57}
 \end{aligned}$$

donde las expresiones de  $K_n^2$  y  $K_n^{2'}$  vienen dadas por la ecuación (F.3).

### Región III

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación F.33) e  $y$  (ecuación F.34) de la inducción en la región III del caso Diente Completo, obtenemos que el par de reluctancia se expresa mediante:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,DC}^{III} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^{III}(x, Y) B_y^{III}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4V_o}{t} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{t} \right] \cos \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \frac{\cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) + 1}{1 + \left( \frac{2k-1}{l} \cdot \frac{g}{t} \right)^2} (M_l - L_l) - \\
&\quad - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_o}{t} \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi g}{t} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{t} \right] \frac{2k-1}{l} \cdot \frac{g}{t} \cdot \frac{1 + \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right)}{1 + \left( \frac{2k-1}{l} \cdot \frac{g}{t} \right)^2} (M_l - L_l) - \\
&\quad - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (M_l M_m - L_l L_m) \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{l,m}) \frac{lm}{l^2 - m^2} \left( m + l \operatorname{senh} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \right) \right] + \delta_{l,m} \frac{l}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{l\pi t}{g} \right) - \\
&\quad - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (M_l L_m - L_l M_m) \operatorname{csch} \left( \frac{l\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{l\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{g} \right) \frac{l\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{l,m}) \frac{m^2}{l^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{l\pi t}{g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{l,m} \cdot \frac{m\pi t}{2g} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi t}{g} \right) \right] \left. \right\} \tag{F.58}
\end{aligned}$$

### Región IV

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación F.35) e  $y$  (ecuación F.36) de la inducción en la región IV del caso Diente Completo, obtenemos que el par de reluctancia tiene por expresión:



$$\begin{aligned}
T_{cogg,DC}^{IV} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^{IV}(x, Y) B_y^{IV}(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V_o}{s} \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{s} \right] \cos \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \frac{\cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + 1}{1 + \left( \frac{2k-1}{n} \cdot \frac{h+g}{s} \right)^2} (K_n^{4'} - K_n^4) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_o}{s} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{(2k-1)\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cosh \left[ \frac{(2k-1)\pi Y}{s} \right] \frac{2k-1}{n} \cdot \frac{h+g}{s} \frac{\cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) + 1}{1 + \left( \frac{2k-1}{n} \cdot \frac{h+g}{s} \right)^2} (K_n^4 - K_n^{4'}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^4 K_m^4 - K_n^{4'} K_m^{4'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{m}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^4 K_m^{4'} - K_n^{4'} K_m^4) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{m\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right] \left. \right\} \tag{F.59}
\end{aligned}$$

donde las expresiones de  $K_n^4$  y  $K_n^{4'}$  vienen dadas por la ecuación (F.6).

## Región V

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación F.37) e  $y$  (ecuación F.38) de la inducción en la región V del caso Diente Completo, obtenemos que el par de reluctancia es igual a:

$$\begin{aligned}
T_{cogg,DC}^V &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^t B_x^V(x, Y) B_y^V(x, Y) dx = \\
&= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,3} b_{m,3} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi g}{t} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{t} \right) \frac{\pi}{t} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cos \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n\pi [\cosh(\frac{r\pi t}{g}) - (-1)^n] P_r + [(-1)^n \cosh(\frac{r\pi t}{g}) - 1] R_r}{t \cdot 1 + (\frac{n}{r} \frac{g}{t})^2} - \\
&\quad - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,3} \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi g}{t} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \cosh \left( \frac{n\pi Y}{t} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{r\pi [\cosh(\frac{r\pi t}{g}) - (-1)^n] P_r - [1 - (-1)^n \cosh(\frac{r\pi t}{g})] R_r}{g \cdot 1 + (\frac{r}{n} \frac{t}{g})^2} \quad (F.60) \\
&\quad - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (P_r P_p - R_r R_p) \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{p\pi Y}{g} \right) \frac{\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{r,p}) \frac{rp}{r^2 - p^2} \left( p + r \operatorname{senh} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - p \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \cosh \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \right) \right] + \delta_{r,p} \frac{r}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - \\
&\quad - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (P_r R_p - R_r P_p) \operatorname{csch} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{r\pi Y}{g} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \cos \left( \frac{p\pi Y}{g} \right) \frac{r\pi}{g} \left[ (1 - \delta_{r,p}) \frac{p^2}{r^2 - p^2} \left( \cosh \left( \frac{r\pi t}{g} \right) - \cosh \left( \frac{p\pi t}{g} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{r,p} \cdot \frac{r\pi t}{2g} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{r\pi t}{g} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

## Región VI

A partir de las expresiones de las componentes  $x$  (ecuación F.39) e  $y$  (ecuación F.40) de la inducción en la región VI del caso Diente Completo,

obtenemos que el par de reluctancia tiene por expresión:

$$\begin{aligned}
 T_{cogg,DC}^{VI} &= \frac{2N_p(R_o^2 - R_i^2)}{\mu_0} \int_0^s B_x^{VI}(x, Y) B_y^{VI}(x, Y) dx = \\
 &= 2N_p \mu_0 (R_o^2 - R_i^2) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,4} b_{m,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \frac{\pi}{s} \frac{m^2 n}{m^2 - n^2} [1 - (-1)^{m+n}] \cdot (1 - \delta_{m,n}) - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,4} \operatorname{csch} \left[ \frac{n\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi Y}{s} \right) \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{n\pi}{s} \frac{[(-1)^n \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - 1] K_n^6 - [\cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - (-1)^n] K_m^{6'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{h+g}{s} \right)^2} + \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,4} \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left[ \frac{m\pi(h+g)}{s} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi Y}{s} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{n\pi}{h+g} \frac{[1 - (-1)^m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right)] K_n^6 + [\cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - (-1)^m] K_n^{6'}}{1 + \left( \frac{n}{m} \frac{s}{h+g} \right)^2} + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^6 K_m^6 - K_n^{6'} K_m^{6'}) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{mn}{n^2 - m^2} \left( m + n \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - m \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) \right] + \delta_{m,n} \frac{m}{2} \operatorname{senh}^2 \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_n^6 K_m^{6'} - K_n^{6'} K_m^6) \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) \operatorname{csch} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi Y}{h+g} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \cos \left( \frac{m\pi Y}{h+g} \right) \frac{n\pi}{h+g} \left[ (1 - \delta_{m,n}) \frac{m^2}{n^2 - m^2} \left( \cosh \left( \frac{n\pi s}{h+g} \right) - \cosh \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{m,n} \cdot \frac{m\pi}{h+g} \cdot \frac{s}{2} \cdot \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi s}{h+g} \right) \right] \left. \right\} \tag{F.61}
 \end{aligned}$$

donde las expresiones de  $K_n^6$  y  $K_n^{6'}$  vienen dadas por la ecuación (F.9).



# Bibliografía

- [1] D. Bang, H. Polinder, G. Shrestha, and J. Ferreira, "Comparison of direct-drive and geared generator concepts for wind turbines.," *EWEC 2008, Belgium*, 2008.
- [2] J. F. Gieras, R.-J. Wang, and J. M. Kamper, *Axial flux permanent magnet brushless machines*. Kluwer Academic Publisher, 2004.
- [3] F. Caricchi, F. Crescimbin, and E. Santini, "Axial flux electromagnetic differential induction motor," in *Proc. Seventh Int Electrical Machines and Drives Conf. (Conf. Publ. No. 412)*, pp. 1–5, 1995.
- [4] F. Caricchi, F. Crescimbin, E. Fedeli, and G. Noioa, "Design and construction of a wheel-directly-coupled axial-flux pm motor prototype for evs," in *Proc. Conf Industry Applications Society Annual Meeting Record of the 1994 IEEE*, pp. 254–261, 1994.
- [5] F. Profumo, Z. Zhang, and A. Tenconi, "Axial flux machines drives: a new viable solution for electric cars," in *Proc. IEEE IECON 22nd Int Industrial Electronics, Control, and Instrumentation Conf*, vol. 1, pp. 34–40, 1996.
- [6] M. Dubois, H. Polinder, and Ferreira, "Axial and radial-flux permanent magnet generators for direct-drive turbines," in *European Wind Energy Conference, Copenhagen, Denmark*, 2001.
- [7] A. Cavagnino, M. Lazzari, F. Profumo, and A. Tenconi, "A comparison between the axial flux and the radial flux structures for pm synchronous motors," vol. 38, no. 6, pp. 1517–1524, 2002.
- [8] D. Bang, S. Ani, H. Polinder, J.-Y. Lee, S. Moon, and D.-H. Koo, "Design of portable axial flux permanent magnet machines for human power generation," in *Proc. Int Electrical Machines and Systems (ICEMS) Conf*, pp. 414–417, 2010.

- [9] S. O. Ani, D. Bang, H. Polinder, J. Y. Lee, S. R. Moon, and D. H. Koo, "Human powered axial flux permanent magnet machines: Review and comparison," in *Proc. IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, pp. 4165–4170, 2010.
- [10] E. Spooner, B. J. Chalmers, M. M. El-Missiry, W. Wei, and A. C. Renfrew, "Motoring performance of the toroidal permanent-magnet machine 'torus'," in *Proc. Fifth Int Electrical Machines and Drives Conf. (Conf. Publ. No. 341)*, pp. 36–40, 1991.
- [11] E. Spooner and B. J. Chalmers, "'torus': a slotless, toroidal-stator, permanent-magnet generator," *IEE Proceedings B Electric Power Applications*, vol. 139, no. 6, pp. 497–506, 1992.
- [12] W. Wu, E. Spooner, and B. J. Chalmers, "Design of slotless torus generators with reduced voltage regulation," *IEE Proceedings -Electric Power Applications*, vol. 142, no. 5, pp. 337–343, 1995.
- [13] F. Caricchi, F. Crescimbin, and O. Honorati, "Modular, axial-flux, permanent-magnet motor for ship propulsion drives," in *Proc. IEEE Int. Electric Machines and Drives Conf. Record*, 1997.
- [14] F. Caricchi, B. J. Chalmers, F. Crescimbin, and E. Spooner, "Advances in the design of torus machines," in *Proc. Int Power Electronic Drives and Energy Systems for Industrial Growth Conf*, vol. 2, pp. 516–522, 1998.
- [15] K. Sitapati and R. Krishnan, "Performance comparisons of radial and axial field, permanent-magnet, brushless machines," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. 37, pp. 1219–1226, Sep 2001.
- [16] M. Dubois, H. Polinder, and J. Ferreira, "Influence of air gap thickness in tfpm generators for wind turbine application," in *IEEE Young Researches Symposium In Electrical Power Engineering*, 2002.
- [17] M. Dubois, H. Polinder, and J. Ferreira, "Comparasion of generator topologies for direct-drive wind turbines," in *Proc. Nordic Countries Power and Industrial Electronic Conference (NORPIE), Aalborg, Denmark.*, 2000.
- [18] N. Tesla, "Electro-magnetic motors," 1889.
- [19] T. Davenport, "Improvement in propelling machinery by magnetism and electro-magnetism," 1837.

- 
- [20] R. J. Parker, *Advances in Permanent Magnetism*. John Wiley and Sons, Inc., 1990.
- [21] D. C. Hanselman, *Brushless Permanent-Magnet Motor Design*. McGraw-Hill Education - Europe, 1<sup>st</sup> ed., February 1994.
- [22] B. Hague, *Electromagnetic problems in electrical engineering: An elementary treatise on the application of the principles of electromagnetism to the theory of the magnetic field and of the mechanical forces in electrical machinery and apparatus*. Dover Publications London, H. Milford,, 1929.
- [23] E. Mishkin, "Theory of the squirrel-cage induction machine derived direct from maxwell field equations," *Q J Mechanics Appl Math*, vol. 7, pp. 472–487, 1954.
- [24] J. Eastham and J. Alwash, "Transverse-flux tubular motors," *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, vol. 119, pp. 1709–1718, December 1972.
- [25] S. Williamson, "The anisotropic layer theory of induction machines and induction devices," *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 17, pp. 69–94, 1976.
- [26] A. Hughes and T. J. E. Miller, "Analysis of fields and inductances in air-cored and iron-cored synchronous machines," *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, vol. 124, pp. 121–126, February 1977.
- [27] N. Boules, "Two-dimensional field analysis of cylindrical machines with permanent magnet excitation," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. IA-20, pp. 1267–1277, Sept 1984.
- [28] N. Boules, "Prediction of no-load flux density distribution in permanent magnet machines," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. IA-21, pp. 633–643, May 1985.
- [29] G. Qishan and G. Hongzhan, "Effect of slotting in pm electric machines," *Electric Machines & Power Systems*, vol. 10, pp. 273–284, 1985.
- [30] F. Carter, "Note on air-gap and interpolar induction," *Electrical Engineers, Journal of the Institution of*, vol. 29, pp. 925–933, July 1900.
- [31] F. Carter, "Air gap induction," *Electrical World and Engineer*, vol. 38, pp. 884–888, November 1901.

- 
- [32] F. Carter, "The magnetic field of the dynamo-electric machine," *Electrical Engineers, Journal of the Institution of*, vol. 64, pp. 1115–1138, November 1926.
- [33] Z. Deng, I. Boldea, and S. Nasar, "Fields in permanent magnet linear synchronous machines," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 22, pp. 107–112, Mar 1986.
- [34] Z. Deng, I. Boldea, and S. Nasar, "Forces and parameters of permanent magnet linear synchronous machines," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 23, pp. 305–309, Jan 1987.
- [35] F. Marignetti, G. Tomassi, and J. R. Bumby, "Electromagnetic modelling of permanent magnet axial flux motors and generators," *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 25, no. 2, pp. 510–522, 2006.
- [36] S. Nasar and G. Xiong, "Determination of the field of a permanent-magnet disk machine using the concept of magnetic charge," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 24, pp. 2038–2044, May 1988.
- [37] G. Xiong and S. Nasar, "Analysis of fields and forces in a permanent magnet linear synchronous machine based on the concept of magnetic charge," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 25, pp. 2713–2719, May 1989.
- [38] E. Furlani, "Field analysis and optimization of ndfeb axial field permanent magnet motors," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 33, pp. 3883–3885, Sep 1997.
- [39] E. Furlani and M. A. Knewton, "A three-dimensional field solution for permanent-magnet axial-field motors," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 33, pp. 2322–2325, May 1997.
- [40] A. Koski and J.-T. Eriksson, "Predicting the performance of a permanent magnet synchronous motor by analytical and numerical methods," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 28, pp. 935–938, Jan 1992.
- [41] C. Mi, M. Filippa, W. Liu, and R. Ma, "Analytical method for predicting the air-gap flux of interior-type permanent-magnet machines," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 40, pp. 50–58, Jan 2004.
- [42] L. Zhu, S. Z. Jiang, Z. Zhu, and C. Chan, "Analytical modeling of open-circuit air-gap field distributions in multisegment and multilayer



- interior permanent-magnet machines,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 3121–3130, Aug 2009.
- [43] Y. Guo, H. Lin, P. Jin, J. Yan, J. Wang, and Z. Jia, “Analytical modeling of air-gap field distributions in permanent magnet embedded salient pole wind generator,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 49, pp. 5756–5760, Dec 2013.
- [44] E. Furlani, “A method for predicting the field in permanent-magnetic axial-field motors,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 28, pp. 2061–2066, Sep 1992.
- [45] E. Furlani, “Computing the field in permanent-magnet axial-field motors,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 30, pp. 3660–3663, Sep 1994.
- [46] Z. Zhu and D. Howe, “Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors. ii. armature-reaction field,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 136–142, Jan 1993.
- [47] Z. Zhu and D. Howe, “Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors. iii. effect of stator slotting,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 143–151, Jan 1993.
- [48] Z. Zhu, D. Howe, E. Bolte, and B. Ackermann, “Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors. i. open-circuit field,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 124–135, Jan 1993.
- [49] Z. Zhu and D. Howe, “Instantaneous magnetic field distribution in permanent magnet brushless dc motors. iv. magnetic field on load,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 152–158, Jan 1993.
- [50] Z. Zhu, D. Howe, and C. Chan, “Improved analytical model for predicting the magnetic field distribution in brushless permanent-magnet machines,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 38, pp. 229–238, Jan 2002.
- [51] J. Wang, G. Jewell, and D. Howe, “A general framework for the analysis and design of tubular linear permanent magnet machines,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 35, pp. 1986–2000, May 1999.
- [52] J. Wang, D. Howe, and G. Jewell, “Fringing in tubular permanent-magnet machines: Part i. magnetic field distribution, flux linkage, and

- thrust force,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 39, pp. 3507–3516, Nov 2003.
- [53] J. Wang, D. Howe, and G. Jewell, “Fringing in tubular permanent-magnet machines: part ii. cogging force and its minimization,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 39, pp. 3517–3522, Nov 2003.
- [54] J. Wang and D. Howe, “Design optimization of radially magnetized, iron-cored, tubular permanent-magnet machines and drive systems,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 40, pp. 3262–3277, Sept 2004.
- [55] J. Bumby, R. Martin, M. Mueller, E. Spooner, N. Brown, and B. Chalmers, “Electromagnetic design of axial-flux permanent magnet machines,” *Electric Power Applications, IEE Proceedings -*, vol. 151, pp. 151–160, Mar 2004.
- [56] P. Virtic, P. Pisek, T. Marcic, M. Hadziselimovic, and B. Stumberger, “Analytical analysis of magnetic field and back electromotive force calculation of an axial-flux permanent magnet synchronous generator with coreless stator,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 4333–4336, Nov 2008.
- [57] P. Virtic, P. Pisek, M. Hadziselimovic, T. Marcic, and B. Stumberger, “Torque analysis of an axial flux permanent magnet synchronous machine by using analytical magnetic field calculation,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 1036–1039, March 2009.
- [58] J.-Y. Choi, S.-H. Lee, K.-J. Ko, and S.-M. Jang, “Improved analytical model for electromagnetic analysis of axial flux machines with double-sided permanent magnet rotor and coreless stator windings,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 2760–2763, Oct 2011.
- [59] D. Zarko, D. Ban, and T. Lipo, “Analytical calculation of magnetic field distribution in the slotted air gap of a surface permanent-magnet motor using complex relative air-gap permeance,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 42, pp. 1828–1837, July 2006.
- [60] D. Zarko, D. Ban, and T. Lipo, “Analytical solution for electromagnetic torque in surface permanent-magnet motors using conformal mapping,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 2943–2954, July 2009.
- [61] P. Jin, S. Fang, H. Lin, Z. Zhu, Y. Huang, and X. Wang, “Analytical magnetic field analysis and prediction of cogging force and torque

- of a linear and rotary permanent magnet actuator,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 3004–3007, Oct 2011.
- [62] D. C. J. Krop, E. Lomonova, and A. J. A. Vandenput, “Application of schwarz-christoffel mapping to permanent-magnet linear motor analysis,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 352–359, March 2008.
- [63] B. L. J. Gysen, E. Lomonova, J. J. H. Paulides, and A. J. A. Vandenput, “Analytical and numerical techniques for solving laplace and poisson equations in a tubular permanent-magnet actuator: Part i. semi-analytical framework,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 1751–1760, July 2008.
- [64] B. L. J. Gysen, E. Lomonova, J. J. H. Paulides, and A. J. A. Vandenput, “Analytical and numerical techniques for solving laplace and poisson equations in a tubular permanent magnet actuator: Part ii. schwarz-christoffel mapping,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 1761–1767, July 2008.
- [65] K. Boughrara, D. Zarko, R. Ibtouen, O. Touhami, and A. Rezzoug, “Magnetic field analysis of inset and surface-mounted permanent-magnet synchronous motors using schwarz-christoffel transformation,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 3166–3178, Aug 2009.
- [66] K. Boughrara, R. Ibtouen, D. Zarko, O. Touhami, and A. Rezzoug, “Magnetic field analysis of external rotor permanent-magnet synchronous motors using conformal mapping,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 3684–3693, Sept 2010.
- [67] D. Lin, S. Ho, and W. Fu, “Analytical prediction of cogging torque in surface-mounted permanent-magnet motors,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 3296–3302, Sept 2009.
- [68] D. Lin, P. Zhou, C. Lu, and S. Lin, “Analytical prediction of cogging torque for spoke type permanent magnet machines,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 1035–1038, Feb 2012.
- [69] A. Rahideh and T. Korakianitis, “Analytical magnetic field distribution of slotless brushless machines with inset permanent magnets,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 1763–1774, June 2011.

- [70] A. Rahideh and T. Korakianitis, “Analytical armature reaction field distribution of slotless brushless machines with inset permanent magnets,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 2178–2191, July 2012.
- [71] A. Rahideh and T. Korakianitis, “Analytical magnetic field calculation of slotted brushless permanent-magnet machines with surface inset magnets,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 2633–2649, Oct 2012.
- [72] A. Rahideh, M. Mardaneh, and T. Korakianitis, “Analytical 2-d calculations of torque, inductance, and back-emf for brushless slotless machines with surface inset magnets,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 49, pp. 4873–4884, Aug 2013.
- [73] A. Rahideh and T. Korakianitis, “Analytical open-circuit magnetic field distribution of slotless brushless permanent-magnet machines with rotor eccentricity,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 4791–4808, Dec 2011.
- [74] Y. Huang, B. Ge, J. Dong, H. Lin, J. Zhu, and Y. Guo, “3-d analytical modeling of no-load magnetic field of ironless axial flux permanent magnet machine,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 2929–2932, Nov 2012.
- [75] S.-Y. Sung, J.-H. Jeong, Y.-S. Park, J.-Y. Choi, and S.-M. Jang, “Improved analytical modeling of axial flux machine with a double-sided permanent magnet rotor and slotless stator based on an analytical method,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 2945–2948, Nov 2012.
- [76] Z. Liu and J. Li, “Analytical solution of air-gap field in permanent-magnet motors taking into account the effect of pole transition over slots,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 43, pp. 3872–3883, Oct 2007.
- [77] Z. Liu and J. Li, “Accurate prediction of magnetic field and magnetic forces in permanent magnet motors using an analytical solution,” *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, vol. 23, pp. 717–726, Sept 2008.
- [78] F. Dubas and C. Espanet, “Analytical solution of the magnetic field in permanent-magnet motors taking into account slotting effect: No-

- load vector potential and flux density calculation,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 2097–2109, May 2009.
- [79] A. Bellara, Y. Amara, G. Barakat, and B. Dakyo, “Two-dimensional exact analytical solution of armature reaction field in slotted surface mounted pm radial flux synchronous machines,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 4534–4538, Oct 2009.
- [80] Z. Zhu, L. J. Wu, and Z. Xia, “An accurate subdomain model for magnetic field computation in slotted surface-mounted permanent-magnet machines,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 1100–1115, April 2010.
- [81] T. Lubin, S. Mezani, and A. Rezzoug, “2-d exact analytical model for surface-mounted permanent-magnet motors with semi-closed slots,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 479–492, Feb 2011.
- [82] T. Lubin, S. Mezani, and A. Rezzoug, “Two-dimensional analytical calculation of magnetic field and electromagnetic torque for surface-inset permanent-magnet motors,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 2080–2091, June 2012.
- [83] L. J. Wu, Z. Zhu, D. Staton, M. Popescu, and D. Hawkins, “Subdomain model for predicting armature reaction field of surface-mounted permanent-magnet machines accounting for tooth-tips,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 812–822, April 2011.
- [84] L. J. Wu, Z. Zhu, D. Staton, M. Popescu, and D. Hawkins, “An improved subdomain model for predicting magnetic field of surface-mounted permanent magnet machines accounting for tooth-tips,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 1693–1704, June 2011.
- [85] L. J. Wu, Z. Zhu, D. Staton, M. Popescu, and D. Hawkins, “Analytical model for predicting magnet loss of surface-mounted permanent magnet machines accounting for slotting effect and load,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 107–117, Jan 2012.
- [86] L. J. Wu, Z. Zhu, D. Staton, M. Popescu, and D. Hawkins, “Analytical modeling and analysis of open-circuit magnet loss in surface-mounted permanent-magnet machines,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 1234–1247, March 2012.

- [87] J. Fu and C. Zhu, "Subdomain model for predicting magnetic field in slotted surface mounted permanent-magnet machines with rotor eccentricity," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 1906–1917, May 2012.
- [88] K. Boughrara, R. Ibtouen, and T. Lubin, "Analytical prediction of magnetic field in parallel double excitation and spoke-type permanent-magnet machines accounting for tooth-tips and shape of polar pieces," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 2121–2137, July 2012.
- [89] B. L. J. Gysen, K. Meessen, J. J. H. Paulides, and E. Lomonova, "Semi-analytical calculation of the armature reaction in slotted tubular permanent magnet actuators," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 3213–3216, Nov 2008.
- [90] Y. Amara and G. Barakat, "Analytical modeling of magnetic field in surface mounted permanent-magnet tubular linear machines," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 3870–3884, Nov 2010.
- [91] Y. Amara, G. Barakat, and P. Reghem, "Armature reaction magnetic field of tubular linear surface-inset permanent-magnet machines," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 805–811, April 2011.
- [92] O. d. l. Barriere, H. Ben Ahmed, M. Gabsi, and M. LoBue, "Two-dimensional analytical airgap field model of an inset permanent magnet synchronous machine, taking into account the slotting effect," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 49, pp. 1423–1435, April 2013.
- [93] A. Bellara, Y. Amara, G. Barakat, and P. Reghem, "Analytical modelling of the magnetic field in axial flux permanent magnet machines with semi-closed slots at no load," in *Electrical Machines (ICEM), 2010 XIX International Conference on*, pp. 1–6, Sept 2010.
- [94] H. Tiegna, A. Bellara, Y. Amara, and G. Barakat, "Analytical modeling of the open-circuit magnetic field in axial flux permanent-magnet machines with semi-closed slots," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 1212–1226, March 2012.
- [95] H. Tiegna, Y. Amara, and G. Barakat, "Study of cogging torque in axial flux permanent magnet machines using an analytical model," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 50, pp. 845–848, Feb 2014.

- 
- [96] H. Tiegna, Y. Amara, and G. Barakat, "A new quasi-3-d analytical model of axial flux permanent magnet machines," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 50, pp. 817–820, Feb 2014.
- [97] B. L. J. Gysen, E. Ilhan, K. Meessen, J. J. H. Paulides, and E. Lomonova, "Modeling of flux switching permanent magnet machines with fourier analysis," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 1499–1502, June 2010.
- [98] K. Boughrara, T. Lubin, and R. Ibtouen, "General subdomain model for predicting magnetic field in internal and external rotor multiphase flux-switching machines topologies," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 49, pp. 5310–5325, Oct 2013.
- [99] B. L. J. Gysen, K. Meessen, J. J. H. Paulides, and E. Lomonova, "General formulation of the electromagnetic field distribution in machines and devices using fourier analysis," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 39–52, Jan 2010.
- [100] H. Bali, Y. Amara, G. Barakat, R. Ibtouen, and M. Gabsi, "Analytical modeling of open circuit magnetic field in wound field and series double excitation synchronous machines," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 3802–3815, Oct 2010.
- [101] E. Ilhan, B. L. J. Gysen, J. J. H. Paulides, and E. Lomonova, "Analytical hybrid model for flux switching permanent magnet machines," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 1762–1765, June 2010.
- [102] A. Hemeida and P. Sergeant, "Analytical modeling of surface pmsm using a combined solution of maxwell's equations and magnetic equivalent circuit (mec)," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, 2014.
- [103] T. Lubin, S. Mezani, and A. Rezzoug, "Exact analytical method for magnetic field computation in the air gap of cylindrical electrical machines considering slotting effects," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 1092–1099, April 2010.
- [104] O. Barriere, S. Hlioui, H. Ben Ahmed, M. Gabsi, and M. LoBue, "Three-dimensional analytical modeling of a permanent-magnet linear actuator with circular magnets," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 3608–3616, Sept 2010.

- [105] A. Egea, G. Almandoz, J. Poza, G. Ugalde, and A. Escalada, "Axial-flux-machine modeling with the combination of fem-2-d and analytical tools," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 1318–1326, July 2012.
- [106] E. P. Furlani, *Permanent Magnet and Electromechanical Devices: Materials, Analysis, and Applications*. Academic Press, primera ed., septiembre 2001.
- [107] R. Haberman, *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno*. Pearson Educaci?n S.A., tercera ed., 2007.
- [108] Rodriguez-Pozueta, "Constitucion de las maquinas electricas," apuntes, Universidad de Cantabria Departamento de Ingenier?a El?ctrica, 2010.
- [109] D. C. Hanselman, *Brushless Permanent Magnet Motor Design*. The Writers' Collective, second edition ed., January 2003.
- [110] J. T. M. Hendershot, *Design of brushless permanent-magnet motors*. Magna Physics Publications, 1994.
- [111] J. L. Coulomb, "A methodology for the determination of global electro-mechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 19, pp. 2514–2519, Nov 1983.
- [112] E. Freeman and R. Ashen, "Force calculation in magnetic field problems using virtual work with only one solution," in *Electrical Machines and Drives, 1993. Sixth International Conference on (Conf. Publ. No. 376)*, pp. 318–322, Sep 1993.
- [113] J. S. Salon, *Finite Element Analysis of Electrical Machines*. SPRINGER INTERNATIONAL EDITION (SIE), 1995.
- [114] A. Benhama, A. Williamson, and A. Reece, "Force and torque computation from 2-d and 3-d finite element field solutions," *Electric Power Applications, IEE Proceedings -*, vol. 146, pp. 25–31, Jan 1999.
- [115] W. Zhu, S. Pekarek, B. Fahimi, and B. Deken, "Investigation of force generation in a permanent magnet synchronous machine," *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, vol. 22, pp. 557–565, Sept 2007.
- [116] D. Zarko, D. Ban, and T. Lipo, "Analytical solution for cogging torque in surface permanent-magnet motors using conformal mapping," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 52–65, Jan 2008.



- [117] M. Amrhein and P. Krein, "Force calculation in 3-d magnetic equivalent circuit networks with a maxwell stress tensor," *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, vol. 24, pp. 587–593, Sept 2009.
- [118] L. Chang, A. Eastham, and G. Dawson, "Permanent magnet synchronous motor: finite element torque calculations," in *Industry Applications Society Annual Meeting, 1989., Conference Record of the 1989 IEEE*, pp. 69–73 vol.1, Oct 1989.
- [119] J. Guemes, A. Iraolagoitia, M. Donsion, and P. Fernandez, "Analysis of permanent magnet synchronous motors with integer-slot and fractional-slot windings," in *MELECON 2010 - 2010 15th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference*, pp. 1499–1504, April 2010.
- [120] R. H. Engelmann and W. H. Muddendorf, *Handbook of Electric Motors*. Marcel Dekker Inc., 1995.
- [121] Y. N. Zhilichev, "Three-dimensional analytic model of permanent magnet axial flux machine," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 34, pp. 3897–3901, Nov 1998.
- [122] J. Azzouzi, G. Barakat, and B. Dakyo, "Quasi-3-d analytical modeling of the magnetic field of an axial flux permanent-magnet synchronous machine," *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, vol. 20, pp. 746–752, Dec 2005.
- [123] A. Parviainen, M. Niemela, and J. Pyrhonen, "Modeling of axial flux permanent-magnet machines," vol. 40, no. 5, pp. 1333–1340, 2004.
- [124] A. Parviainen, *Design of axial-flux permanent-magnet low-speed machines and performance comparison between radial and axial-flux machines*. Ph.d. dissertation, Lappeenranta University of Technology, Finland., 2005.
- [125] A. Bellara, H. Bali, R. Belfkira, Y. Amara, and G. Barakat, "Analytical prediction of open-circuit eddy-current loss in series double excitation synchronous machines," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 2261–2268, Sept 2011.
- [126] F. Sahin, *Design and development of a high-speed axial-flux permanent machine*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2001.