FACULTAD DE CIENCIAS.-SECCION DE EXACTAS

TESIS DOCTORAL

Teoria elemental
DE LAS
ecuaciones integrales
E
idea de sus aplicaciones.

H-11-c.

Francisco Javier Rubio Vidal.

1912

MADRID
IMPRENTA DE LOS HIJOS DE M. G. HERNÁNDEZ
Libertad, 16 duplicado, bajo.
1913

FACULTAD DE CIENCIAS.-SECCION DE EXACTAS

TESIS DOCTORAL

Teoria elemental DE LAS ecuaciones integrales E idea de sus aplicaciones.

H-11-c.

Francisco Javier Rubio Vidal.

1912

MADRID
IMPRENTA DE LOS H[illegible]JOS DE M. G. HERNÁNDEZ
Libertad, 16 duplicado, bajo.
1913

Introducción

Si bien hubo un tiempo, y no lejano, en que las teorías más elevadas del Análisis tenían solamente carácter general, por no permitir el estado de atraso de las ciencias de aplicación, el dársela, la situación ha cambiado, y son ahora las ciencias físicas las que reclaman incesantemente a la Matemática pura nuevos instrumentos de cálculo para la resolución de sus problemas.

Por esta causa, notables adelantos contemporáneos del Cálculo Infinitesimal han tenido su origen al intentar resolver algunas de dichas cuestiones.

Entre ellos hay uno, que no sólo llenó en el acto el objeto propuesto, sino que adquirió enseguida carácter doctrinal propio, fundando una teoría más general que todas las conocidas, y de tal importancia, que ha sido considerada por el insigne H. Poincaré como uno de los más notables descubrimientos matemáticos; es el de la teoría de las ecuaciones integrales.

En su acepción más general, *ecuación integral* es una ecuación funcional en que figura alguna transformada integral de la función incógnita, tal como

$$T = \int_c F\,[x\,,y\,,u\,(y)\,]\,dy,$$

que es perfectamente determinada si la función F es integrable y dado el camino c de integración; $u\ (y)$ es la función incógnita.

La forma más general de una ecuación integral de una sola variable es

$$f\left(u\,(x)\,,\frac{du}{dx}\,,\frac{d^2u}{dx^2}\cdots T_1\,,T_2\ldots\right)=o\,,$$

lamada también *ecuación integro-diferencial*, reservándose la denominación de integral para la

$$f\Big(u\,(x)\,,T_1\,,T_2\ldots\Big)=o$$

Concretándonos a estas últimas, su clasificación se basa en la naturaleza de la transformada integral; si la función F es de primer grado en $u\ (y)$ la ecuación integral se llama lineal, y de orden superior en el caso contrario.

Si los extremos del camino de integración son constantes, la ecuación integral se llama de *Fredholm*, y si por lo menos uno de ellos es variable, de *Volterra*, por haber sido estos matemáticos los fundadores de las teorías correspondientes

Por fin, las ecuaciones integrales lineales de Fredholm y Volterra, se denominan de primera, segunda o tercera especie (Hilbert), según su forma, correspondiendo a esta denominación los tipos

$$f(x) = \int_c N(x\,y)\,u(y)\,dy \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.^a$$

$$f(x) = u(x) + \int_c N(x\,y)\,u(y)\,dy \ldots\ldots\ldots \quad 2.^a$$

$$f(x) = u(x)\,\varphi(x) + \int_c N(x\,y)\,u(y)\,dy \ldots \quad 3.^a$$

Los más importantes y mejor estudiadas son las de segunda especie, no sólo por ser más comunmente aplicadas, sino por reducirse en muchos casos las de primera y tercera á una de segunda.

La primera ecuación integral resuelta fué

$$F(x) = \int_0^x \frac{u(y)\,dy}{(x-y)^2} \qquad (O < x < 1 \quad F(o) = o)$$

hallada en 1826 por el insigne y malogrado matemático noruego Niels H. Abel, al generalizar el problema de la tautocrona.

Once años más tarde, Liouville encontró otra ecuación integral al estudiar el desarrollo de una función en serie de términos que satisfaga a la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \rho^2 y = f(x),$$

en que ρ es un parámetro variable.

En 1884, el ruso N. Sonnine volvió a ocuparse del problema de Abel, inspirándose en los mismos principios de éste.

Pero los verdaderos fundadores de la teoría son Volterra y Fredholm. Los primeros trabajos de Volterra, publicados en 1896 sobre la inversión de los integrales definidas, se refieren a la ecuación integral

$$f(x) = \int_0^x N(x\,y)\,u(y)\,dy,$$

generalización de la de Abel, resuelta por un método de sucesivas aproximaciones. Volterra es el fundador de la teoría de las ecuaciones integrales de su nombre, en la que no ha cesado de trabajar, habiendo estudiado sucesivamente las ecuaciones integrales lineales, las iteradas, y las integro-diferenciales; y aplicándola ultimamente a la teoría de las funciones permutables y cuerpos integrales de las mismas.

Sus trabajos han sido secundados por Le Roux, Cesaro, Fubini, Lalesco, Lauricella, Boggio, Levi, Orlando, Pincherle, Adhemar, Picone, Sinigaglia, Horn y otros italianos en su mayoría.

Las ecuaciones integrales de Volterra guardan íntima conexión con las ecuaciones diferenciales lineales, habiendo demostrado muy fácilmente dicho sabio italiano qne una ecuación diferencial lineal puede transformarse en integral.

La aparición en 1900 de la memoria del sabio sueco I. Fredholm «*Sobre un nuevo método de resolución del problema de Dirichlet*» atrajo la atención del mundo matemático hacia la nueva teoría. En ella se resuelve la ecuación integral

$$u(x) + \int_0^1 N(x\,y)\,u(y)\,dy = f(x)$$

por un procedimiento enteramente original basado en conocimientos elementales de álgebra y de rigorismo y elegancia tales, que explican perfectamente el interés con que fueron acogidas dicha memoria, presentada en la Academia de Ciencias de Stockolmo, dos notas complementarias, presentadas a la de París, y un trabajo de conjunto publicado en el «Acta mathematica» (1903), dedicado como justo homenaje al iniciador de la teoría, su malogrado compatriota Abel.

A partir de 1903 los trabajos se multiplican y la teoría que ya formaba un cuerpo doctrinal definido, se ensancha rápidamente. La mayor parte de los matemáticos aportan su óbolo para la formación del nuevo edificio científico y algunos se dedican a ello por entero, partiendo de bases muy distintas. El profesor D. Hilbert, de Göttingen, junto con sus discípulos, toma como punto de partida la teoría de las formas cuadráticas enlazada con la de los sistemas de ecuaciones lineales de determinante simétrico, y encuentra por tal camino algunos de los teoremas de Fredholm, más multitud de propiedades nuevas.

En seis comunicaciones dirigidas a la sociedad matemática de Göttingen aparecen estos resultados, junto con gran número de aplicaciones a la Física matemática, más el importantísimo desarrollo de una función cualquiera en serie de funciones propias análogas a las series de Fourier.

Hilbert y su discípulo E. Schmidt han extendido después su método al caso disimétrico, llegando finalmente el primero al estudio sistemático del problema de trascendental interés en Física: *Resolver una ecuación diferencial cuya integral está sujeta a condiciones en los límites*.

La resolución de este problema se lleva a cabo por medio de una ecuación integral, cuyo núcleo es la función llamada por Hilbert «Parametrix», de carácteres análogos a las funciones de Green.

A Hilbert se debe también la clasificación en especies antes mencionada, y un detenido estudio de la ecuación integral de tercera especie en un caso notabilísimo (ecuación integral polar).

Por otra parte, Plemelj, B. Heywood, Goursat y T. Lalesco, tomaron como origen los sistemas ortogonales y biortogonales, llegando a resolver en toda su generalidad el problema de la formación de un núcleo, cuyas constantes propias y funciones principales son dadas, inverso del de Fredholm.

Debemos mencionar además los trabajos de Batemán sobre las ecuaciones integrales de primera especie por los notables desarrollos en serie a que conducen los de Kneser, autor de una exposición bastante completa de la teoría y sus aplicaciones, de Holmgren, Lebesgue, Schur, Dixon, Marty, Mollerup, Riesz, Weyl, miss Anna Johnson Pell, Böcher y muchos otros, mereciendo cita aparte los de Picard y Poincaré, sobre todo una magistral Memoria de este último publicada en 1910. (Acta math 33 ÷ 1), donde con sorprendente elegancia y originalidad resuelve y generaliza problemas muy elevados.

Fredholm aplicó las ecuaciones integrales a la resolución de un problema de elasticidad, y Picard mostró inmediatamente muchos problemas de Física matemática cuya solución depende de la misma teoría.

Entre las aplicaciones más interesantes, figuran en primer término los desarrollos en serie de funciones propias, la representación aproximada de una función de dos variables; la solución de los problemas de potencial, elasticidad, ondulaciones, los relativos al enfriamiento de los cuerpos (Lauricella) a las mareas (Poincaré), a los movimientos sísmicos (Fischer); las de Hilbert al problema de Riemann, al teorema de las oscilaciones de Klein, a la formación de las funciones de Fuchs y a las superficies y volúmenes de Minkowski; y muchas otras.

La exposición completa de teoría tan amplia, es muy superior a nuestras escasas fuerzas y daría inusitada extensión a una tesis doctoral; por lo que que hemos creído bastaría para responder al título de nuestro trabajo estudiar en estas cuartillas la parte más clásica de la teoría y de aplicación más inmediata, la ecuación de Fredholm de segunda especie; concretando la parte práctica al desarrollo de una función en serie análoga a las de Fourier y a la representación aproximada de una función de dos variables, ya que las demás pertenecen de hecho a las ciencias físicas y astronómicas.

PLAN

Tres son los métodos principales que podemos seguir en el estudio de la ecuación de Fredholm de segunda especie: El de Liouville, generalizado por Schmidt, el de Fredholm y el de Hilbert.

El primero da la solución de la ecuación integral en función de una serie que únicamente converge en condiciones muy limitadas, y su extensión por Schmidt adolece del defecto de no dar una expresión general de la solución; su discusión tampoco es sencilla.

El método de Hilbert, cuyos fundamentos ya hemos indicado, es largo y exige bastantes conocimientos previos no comprendidos en los programas oficiales.

El método de Fredholm conduce a una fórmula general única y su discusión es muy sencilla y elegante; razones que nos han inducido a seguirlo en este trabajo:

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, dividimos esta Memoria en tres partes:

La primera:

Resolución y discusión de la ecuación integral de Fredholm de segunda especie comprende el estudio de

1.° La ecuación integral regular de 2.ª especie.
2.° La ecuación integral singular homogénea.
3.° La ecuación integral singular de 2.ª especie.
4.° Las extensiones al caso complejo, y al de más de una variable.

La segunda:

Estudio del núcleo,

comprende:

1.° Composición y descomposición de núcleos.
2.° Estudio de los núcleos particulares más importantes.

La tercera:

Aplicaciones,

queda reducida a

1.° Desarrollos en serie de funciones propias.
2.° Representación aproximada de una función de dos variables.

Tal es el plan de la presente memoria doctoral.

PRIMERA PARTE

RESOLUCIÓN Y DISCUSIÓN DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE

La ecuación integral regular de segunda especie (*).

La ecuación integral objeto de nuestro estudio es

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b N(xy)\, u(y)\, dy \qquad (1)$$

en que $u(x)$ es la función incógnita $f(x)$ y $N(xy)$ dos funciones conocidas, sujetas a las siguientes condiciones:

1.ª La función $f(x)$ ha de ser continua, finita e integrable entre los límites finitos a y b.

2.ª La función $N(xy)$, llamada *núcleo*, debe ser limitada (**) en el cuadrado de integración

$$| N(xy) | < N, \; a \leq (x, y) \leq b,$$

(*) En todo lo que sigue supondremos conocidas las definiciones y propiedades de las funciones tratadas en la obra «Introducción al estudio de las funciones de variable compleja» del catedrático de Análisis de la Universidad Central, D. Luis Octavio de Toledo.

(**) Diremos que una función $f(x)$ es limitada en el intervalo $a \dots b$, si su módulo permanece inferior a una cantidad finita al tomar la variable un valor cualquiera comprendido en dicho intervalo; y por extensión llamaremos a la función $N(xy)$ cuyo módulo cumple idéntica condición para valores de x e y comprendidos entre a y b limitada en el cuadrado ab de lado $b-a$.

y continúa en el mismo cuadrado, salvo en puntos distribuídos de manera que no haya infinitos con una misma abscisa u ordenada, en los que puede presentar discontinuidades finitas ordinarias con cambio brusco de valor de la función en dichos puntos: en esta hipótesis, su integral será continua.

λ es un parámetro numérico, real o complejo, que nos facilitará la discusión.

Supondremos los variables reales, así como los límites y el camino de integración, reservándonos la generalización en los casos posibles.

Siguiendo el método de Fredholm, hallaremos la forma de la solución por un cálculo aproximado cuyo rigorismo ni intentamos probar, y una vez conocida aquella, demostraremos rigurosamente su exactitud y será ampliamente discutida.

Este cálculo consiste en reemplazar la infinidad continua de incógnitas a que equivale la función $u(x)$ dada por la relación (1) por un número n finito de ellas, hallar para este número el valor de $u(x)$ y pasarlo al límite $n = \infty$.

Dividamos el intervalo $a \ldots . b$ en n partes iguales

$$a \triangle x = \frac{b-a}{n}$$, y consideremos la serie de valores

$$x_1 = a + \triangle x, \; x_2 = a + 2 \triangle x, \; \ldots . \; x_n = a + n \triangle x = b.$$

La ecuación (1) ha de cumplirse para los valores $x, x_2 \ldots . x_n$ de su variable, luego

$$\left.\begin{array}{l} u(x_1) = f(x_1) + \lambda \int_a^b N(x_1\, y)\, u(y)\, dy \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u(x_n) = f(x_n) + \lambda \int_a^b N(x_n\, y)\, u(y)\, dy \end{array}\right\} (2)$$

Reemplazando la integral definida entre a y b por la suma

$$N(xx_1)\, u(x_1)\, [x_1 - a] + N(xx_2)\, u(x_2)\, [x_2 - x_1] + \ldots . + N(xx_n)\, u(x_n)\, [x_n - x_{n-1}]$$

resulta el sistema aproximado

$$\left.\begin{array}{l} u(x_1) = f(x_1) + \lambda \sum_{\beta=1}^{\beta=n} N(x_1\, x_\beta)\, u(x_\beta) \triangle x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u(x_n) = f(x_n) + \lambda \sum_{\beta=n}^{\beta=1} N(x_n\, x_\beta)\, u(x_\beta) \triangle x \end{array}\right\} (1)$$

Supondremos que los sistemas (2) y (3) son idénticos para $(n = \infty)$.

El sistema (3) de n ecuaciones con las n incógnitas $n\ (x_\alpha)$ $(x = 1, 2 \ldots . n)$ nos da por la regla de Cramer

$$u(x_\alpha) = \frac{N_{\alpha\, n}}{D_n} \qquad (4) \qquad \text{en que}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \triangle x N(x_1 x_1) & -\lambda \triangle x N(x_1 x_2) \ldots & -\lambda \triangle x N(x_1 x_n) \\ -\lambda \triangle x N(x_2 x_1) & 1 - \lambda \triangle x N(x_2 x_2) \ldots & -\lambda \triangle x N(x_2 x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda \triangle x N(x_n x_1) & -\lambda \triangle x N(x_n x_2) \ldots & 1 - \lambda \triangle x N(x_n x_n) \end{vmatrix} \quad (4)$$

y $N_{\alpha\, n}$ el numerador correspondiente.

Desarrollando D_n por las potencias de λ se obtiene

$$D_n = 1 - \lambda \triangle x \sum_{P=1}^{P=n} N(x_p x_p) + \frac{\lambda^2}{2!} \triangle x^2 \sum_{P.q=1}^{P.q=n} \begin{vmatrix} N(x_p x_p) & N(x_p x_q) \\ N(x_q x_p) & N(x_q x_q) \end{vmatrix} -$$

$$- \ldots \ldots + \frac{(-\lambda)^n}{n!} \triangle x^n \begin{vmatrix} N(x_1 x_1) & N(x_1 x_2) \ldots & N(x_1 x_n) \\ N(x_2 x_1) & N(x_1 x_2) \ldots & N(x_2 x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ N(x_n x_1) & N(x_n x_2) \ldots & N(x_n x_n) \end{vmatrix}$$

ó bien

$$D_n = 1 \lambda \triangle x \sum_{P=1}^{P=n} N(x_p x_P) + \frac{\lambda^2}{2!} \triangle x^2 \sum_{P.q=1}^{P.q=n} N\begin{pmatrix} x_P\, x_q \\ x_P\, x_q \end{pmatrix} - \ldots .$$

$$+ \frac{(-\lambda)^n}{n!} \triangle x^n N\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots . & x_n \\ x_1\, x_2 \ldots . & x_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

Si empleamos la notación de Fredholm

$$N\begin{pmatrix} x_\alpha\, x_\beta \ldots x_\mu \\ y_\alpha\, y_\beta \ldots y_\mu \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} N(x_\alpha y_\alpha) & N(x_\alpha y_\beta) \ldots . & N(x_\alpha y_\mu) \\ N(x_\beta y_\alpha) & N(x_\beta y_\beta) \ldots . & N(x_\beta y_\mu) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ N(x_\mu y_\alpha) & N(x_\mu y_\beta) \ldots . & N(x_\mu y_\mu) \end{vmatrix} \quad (5')$$

Para formar el numerador $N_{\alpha,\, n}$ observaremos que la menor complementaria de un elemento cualquiera $-\lambda \triangle x N(x_\beta x_\alpha)$ de la columna de los coeficientes de $u(x_\alpha)$ de la determinante (4′) vale tomado con su signo correspondiente

$$D_{\alpha\beta} = \lambda \triangle x \left[N(x_\alpha x_\beta) - \lambda \triangle x \sum_{P=1}^{P=n}{}^{(*)} N\begin{pmatrix} x_\alpha\, x_P \\ x_\beta\, x_P \end{pmatrix} \right.$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!} \Delta x^2 \sum_{P.q=1}^{P.q=n}{}'' N \begin{pmatrix} x_\alpha x_p x_q \\ x_\beta x_p x_q \end{pmatrix} - \ldots \Big] \quad (6)$$

Se exceptúa el término $1 - \lambda \Delta x N (x_\alpha x_\alpha)$ situado en la diagonal principal, cuya menor $D_{\alpha\alpha}$ es de la forma (4′), pero de orden $(n - 1)^{mo}$.

El desarrollo de N_{xn} por las menores complementarias de los elementos de la citada columna, será

$$N_{\alpha_n} = f(x_1) D_{\alpha 1} + f(x_2) D_{\alpha_2} + \ldots + f(x_\alpha) D_{\alpha\alpha} + \ldots$$
$$+ f(x_n) D_{\alpha n}, \text{ luego}$$

$$u(x_\alpha) = \frac{f(x_\alpha) D_{\alpha\alpha}}{D_n} + \frac{\overset{(*)}{\sum_{\beta=1}^{\beta=n}}{}' f(x_\beta) D_{\alpha\beta}}{D_n} \quad (6')$$

Al crecer n indefinidamente, los términos de la serie (5) tenderán a límites determinados, y para $n = \infty$

$$\text{lím } D_n = D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b N(x_p x_p)\, d x_p +$$
$$+ \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b N \begin{pmatrix} x_p x_q \\ x_p x_q \end{pmatrix} dx_p\, dx_q - \ldots \quad (7)$$

y asimismo

$$\lim_{n=\infty} D_{xx} = D(\lambda)$$

La serie encerrada en el paréntesis de (6) tenderá a

$$N(x_\alpha x_\beta) - \lambda \int_a^b N\begin{pmatrix} x_\alpha x_p \\ x_\beta x_p \end{pmatrix} d x_p + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b N$$
$$\begin{pmatrix} x_\alpha x_p x_q \\ x_\beta x_p x_q \end{pmatrix} dx_p\, dx_q - \ldots \quad (7')$$

Tomando los valores x_α y x_β iguales respectivamente a x e y, y pasando al límite la fórmula (6′), se halla suponiendo que para $n = \infty$ la suma se convierte en la integral definida entre a y b,

$$n(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big) f(y)\, dy \quad (8)$$

donde $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda\Big)$ y $D(\lambda)$ representan las series infinitas

(*) Indicamos por $\sum''$ la suma en que las variables de sumación no pueden tomar los valores α y β; y por $\sum'$ la suma en que la variable de sumación β no puede tomar el valor α.

$$D\binom{x}{y}\lambda = N(xy) - \lambda\int_a^b N\binom{x\,x_1}{y\,x_1}dx_1 + \frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b N\binom{x\,x_1\,x_2}{y\,x_1\,x_2}dx_1\,dx_2 - \ldots \quad (8')$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda\int_a^b N\left(x_1\,x_1\right)dx_1 + \frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b N\binom{x_1\,x_2}{x_1\,x_2}dx_1\,dx_2 - \ldots \quad (8'')$$

La fórmula (8) obtenida mediante este cálculo nada riguroso nos da la solución de la ecuación integral (1) en función de las series $D\binom{x}{y}\lambda$ y $D(\lambda)$ definidas por las relaciones (8′) y (8″).

Pasemos ahora al desarrollo riguroso del método de Fredholm.

Las funciones $D(\lambda)$ *y* $D\binom{x}{y}\lambda$.—Guiados por los resultados anteriores, formemos las series

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\triangle_n\,;\ \triangle_n = \int_a^b\int_a^b \ldots\int_a^b N\binom{x_1\,x_2\ldots x_n}{x_1\,x_2\ldots x_n}dx_1\,dx_2\ldots dx_n \quad (9)$$

$$D\binom{x}{y}\lambda = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-\lambda)_n}{n!}\triangle_n(xy)\,;\ \triangle_n(xy) = \int_a^b\int_a^b \ldots\int_a^b N\binom{x\,x_1\,x_2\ldots x}{y\,x_1\,x_2\ldots x_n}dx_1\,dx_2\ldots dx_n \quad (9)$$

Estas series son uniformemente convergentes.—Para probarlo es preciso demostrar el teorema siguiente, debido a Hadamard: *El módulo de la determinante de orden* n^{mo} $\triangle = |\,v_{11}\,v_{22}\,v_{33}\ldots v_{nn}\,|$ *cuyos elementos son todos de módulo inferior a una cantidad finita U, tiene por límite superior la expresión* $U^n\,(\sqrt{n}\,)^n$, *si sus elementos son reales; y la* $U^n\,(2\sqrt{n}\,)^n$, *si son complejos.*

Para comprobar estos resultados, es preciso anteponer algunos preliminares.

Diremos que el sistema de cantidades cualesquiera $y_1\,y_2\,y_3\ldots y_n$ ha sido deducido por medio de una *sustitución ortogonal* del sistema análogo $x_1\,x_2\ldots x_n$ cuando las y son funciones lineales de las x de la forma

$$Ir = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_r\,\rho^x\rho,$$ en que las a son coeficientes constantes,

y se verifica además la relación

$$\sum_{r=1}^{r=n} y^2{}_r = \sum_{r=1}^{r=n} x^2{}_r$$

Teorema. *Dado un conjunto de cantidades cualesquiera* x_α *(*$\alpha = 1, 2, \dots n$*) se puede siempre operar sobre él una sustitución ortogonal en que los coeficientes de una de las y sean proporcionales a magnitudes dadas* $c_1\, c_2 \dots c_n$

En efecto, el teorema es evidente para $n = 2$, pues basta hacer

$y_1 = x_1 \cos\varphi - x_2 \operatorname{sen}\varphi$, $y_2 = x_1 \operatorname{sen}\varphi + x_2 \cos\varphi$, en que $y_1^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2$, escogiendo el ángulo φ tal que

$$\frac{\cos\varphi}{c_1} = \frac{-\operatorname{sen}\varphi}{c_2}; \text{ de donde } \operatorname{tg}\varphi = -\frac{c_2}{c_1}$$

Nos falta probar que siendo cierto para $n - 1$ variables lo es para n.

Supongamos hallado el sistema

$$z_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\beta=n-1} a_{\alpha\beta} x_\beta\,,\ (\alpha = 1, 2, \dots n-1) \text{ con}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} z^2_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} x^2_\alpha \quad y \quad \frac{a_{11}}{c_1} = \frac{a_{12}}{c_2} = \dots = \frac{a_{1,n-1}}{c_{n-1}} = K.$$

Añadamos el par de variables $z_n = x_n$, con lo que

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} z^2_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x^2_\alpha\,,$$ y formemos la sustitución

$$y_1 = z_1 \cos\varphi - z_n \operatorname{sen}\varphi\,,\ y_2 = z_2\,,\ y_3 = z_3\,,\ \dots\dots$$
$$y_n = z_1 \operatorname{sen}\varphi + z_n \cos\varphi\,,$$

que es evidentemente ortogonal, y nos da

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} y^2_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} z^2_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x^2_\alpha$$

luego las y y las x forman un sistema ortogonal en que

$$y_1 = \cos\varphi \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} a_{1\alpha} x_\alpha - x_n \operatorname{sen}\varphi$$

Si escogemos el ángulo arbitrario φ tal que $-\operatorname{sen}\varphi = K c_n \cos\varphi$, resulta

$y_1 = a_{11} \cos\varphi \,.\, x_1 + a_{12} \cos\,.\,\varphi\, x_2 + \dots + K c_n \cos\varphi\,.\,x_n$; lue–

go el sistema de las cantidades y cumple las condiciones del enunciado.

Se llama *determinante* de una sustitución ortogonal a la formada por los coeficientes a de la sustitución. Su valor es ± 1, pues de las relaciones

$$y_r = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{r\rho} x_\rho , \quad \sum_{r=1}^{r=n} y_r^2 = \sum_{r=1}^{r=n} x_r^2$$

se deducen las

$$\sum_{l=1}^{l=n} a^2_{l,j} = 1 \quad \sum_{l=1}^{l=n} a_{l,j}\, a_{l,i} = o \; (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

que nos prueban que dicha determinante es ortogonal.

Pasemos ahora a la demostración del teorema de Hadamard. Supongamos primeramente que los elementos de la determinante $\triangle$ son reales.

Dividiendo cada uno de ellos por su límite superior común, resulta

$$\triangle = U^n \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} = U^n \triangle_x.$$

Los elementos $x_{\lambda\mu} = \dfrac{u_{\lambda\mu}}{U}$ de $\triangle_x$ serán todos menores que la unidad.

Operemos sobre cada una de las columnas de la determinante $\triangle_x$ una misma sustitución ortogonal

$$y_p = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{p\rho}\, x_\rho \quad \text{determinada por las condiciones}$$

$$y_{12} = y_{13} = \ldots = y_{1n} = o$$

Bastará para ello que los coeficientes $a_{1\rho}$ ($\rho = 1, 2 \ldots n$) sean proporcionales a las soluciones del sistema de $n - 1$ ecuaciones homogéneas

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{1\rho}\, x_{1\tau} = o \quad , (\tau = 2, 3 \ldots n)$$

Formando la determinante de las cantidades y, las fórmulas que nos dan éstas en función de las x, muestran que es igual al producto de las determinantes de la sustitución por las de las x, ó sea

$$\triangle_y = \pm \triangle_x$$

El módulo de la determinante Δ_x es, pues, igual al de la

$$\begin{vmatrix} y_{11} & o & \dots & o \\ y_{21} & y_{22} & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

Operando sobre la menor complementaria del elemento y_{11} la misma transformación y completando la sustitución haciendo $z_{r1} = y_{r1}$ $(r = 1, 2 \dots n)$, resulta

$$\Delta_x = \pm \Delta_y = \pm \Delta_2 \,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} z_{11} & o & o & \dots & o \\ z_{21} & z_{22} & o & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & z_{n3} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix}$$

Continuando la serie de sustituciones, tendremos finalmente

$$\Delta_x = \pm \Delta_y = \dots = \pm \Delta_t \,,\ \Delta_t = \begin{vmatrix} t_{11} & o & \dots & o \\ t_{21} & t_{22} & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{vmatrix}$$

de donde

$$\Delta_x = \pm t_{11}\, t_{22}\, t_{33} \dots t_{nn}$$

Es evidente que las x y las t forman una sustitución ortogonal, luego

$$t_{rr} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} b_{r\rho} x_\rho \sum_{r=1}^{r=n} t^2_{rr} = \sum_{r=1}^{n=n} x^2_r \,, \text{ y además}$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} b^2{}_{n\rho} = 1 \sum_{r=1}^{r=n} b_{r\rho} b_{r\tau} = o$$

Pero es evidente la relación

$$\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=n} b_{r\rho} X_\rho\right]^2 \leq \sum_{\rho=1}^{\rho=n} b^2{}_{r\rho} \cdot \sum_{\rho=1}^{\rho=n} x^2{}_\rho \,, \text{ que equivale a}$$

$$t^2{}_{rr} \leq \sum_{\rho-1}^{\rho=n} x^2{}_\rho \,, \text{ de donde } \mid t^2_{rr} \mid \leq n \,, \mid t_{rr} \mid \leq \sqrt{n} \,, \text{ y}$$

$$\Delta_t \mid = \mid \Delta\mid_x \mid \leq (\sqrt{n})^n ,$$

luego finalmente

$$\mid \Delta \mid \leq U^n (\sqrt{n})^n$$

Si los elementos de la determinante propuesta fuesen de la

forma $\alpha + i\beta$, descompondríamos aquélla en 2^n determinantes, de elementos α o β y aplicando a cada una de éstas el resultado que acabamos de hallar, tendríamos

$$|\Delta| \leq U^n (\sqrt{n})^n 2^n.$$

Fácil nos será demostrar ahora la convergencia de las series $D\begin{pmatrix} x & \lambda \\ y & \end{pmatrix}$ **y** $D(\lambda)$. **Desígnando por** N **el límite superior de** $N(xy)$, **el teorema anterior nos da inmediatamente.**

$$|\Delta_n| \angle N^n (\sqrt{n})^n (b-a)^n,$$

$$|\Delta_n(xy)| \angle N^{n+1} (\sqrt{n+1})^{n+1} (b-a)^n.$$

Los términos de las series (9) y (9′) son por tanto menores que os correspondientes de las

$$U = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\lambda^n}{n!} N^n (\sqrt{n})^n (b-a)^n,$$

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\lambda^n}{n!} N^{n+1} (\sqrt{n+1})^{n+1} (b-a)^n.$$

Pero las series U **y** V **son absolutamente convergentes, pues**

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \left[\frac{\lambda}{n} . N . \frac{(\sqrt{n})^n}{(\sqrt{n-1})^{n-1}} (b-a) \right] = o,$$

ya que

$$\lim_{n=\infty} \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}} \right)^n = \sqrt{e}\ ; \text{y}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \left[\frac{\lambda}{n} N. \frac{(\sqrt{n+1})^{n+1}}{(\sqrt{n})^n} (b-a) \right] = o.$$

Luego las series (9) y (9′) son absoluta y uniformemente convergentes, y $D\begin{pmatrix} x & \lambda \\ y & \end{pmatrix}$ **y** $D(\lambda)$ **son** ***funciones enteras*** **de** λ.

Conviene notar la rapidez de la convergencia de estas series, que facilita extraordinariamente el cálculo numérico de dichas funciones.

La función $R(x\ y\ \lambda)$ **: su desarrollo en serie. El cociente**

$$R(x\ y\ \lambda) = \frac{D\begin{pmatrix} x & \lambda \\ y & \end{pmatrix}}{D(\lambda)} \quad (10)$$

es una función determinada de x **é** y **para valores de** λ **que no anulen a** $D(\lambda)$, **y considerando** λ **variable, es una función meromorfa de** λ **como cociente de dos funciones enteras de** λ.

Clasificaremos las ecuaciones integrales en *regulares* y *sin gulares*, según que su parámetro anule o no a $D(\lambda)$.

Recordemos las series (9) y (9'). De ellas podríamos deducir el desarrollo en serie de $R(x\ y\ \lambda)$, según las potencias de λ, pero preferimos seguir un procedimiento muy elegante, debido a Poincaré, fundado en consideraciones de Análisis Combinatorio.

El término general de $D(\lambda)$ es $\frac{(-\lambda)^n}{n!}\triangle_n$, siendo $\triangle_n$ la integral de orden n^{mo} de la determinante

$$N\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} N(x_1\ x_1) & N(x_1\ x_2) & \dots & N(x_1\ x_n) \\ N(x_2\ x_1) & N(x_2\ x_2) & \dots & N(x_2\ x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N(x_n\ x_1) & N(x_n\ x_2) & \dots & N(x_n\ x_n) \end{vmatrix}$$

cuyo desarrollo constará de $n!$ términos de la forma

$\pm \Pi N(x_p\ x_q)$, indicando así el producto de n factores $N(x_p\ x_q)$, en que los subíndices p y q son cada uno una vez y sólo una iguales á los números $1, 2, \dots n$.

Si ordenamos los factores de cada término con relación a los primeros subíndices, los segundos formarán todas las permutaciones posibles con los números $1, 2, \dots n$, y la paridad de esta permutación nos determinará el signo del término en cuestión.

A cada uno de los términos del desarrollo corresponde una restitución formada con las letras $x_1, x_2, \dots x_n$; la que cambia cada una de las x_p en la x_q correspondiente.

Vamos a calcular la integral del término referente a una sustitución dada cualquiera

Distribuyamos las variables $x_1\ x_2 \dots x_n$ en a_1 ciclos de K_1 letras, a_2 de $K_2 \dots$, de tal manera que la sustitución S considerada permuta circularmente las letras de cada ciclo, y poniendo

$$N\left(x_{\alpha_1}\ x_{\alpha_2}\right) N\left(x_{\alpha_2}\ x_{\alpha_3}\right) \dots N\left(x_{\alpha_{K-1}}\ x_{\alpha_K}\right)$$
$$N\left(x_{\alpha_K}\ x_{\alpha_1}\right) = N\left(x_{\alpha_1}\ x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_K}\right),$$

tendremos

$T_5 = \pm \Pi N(x_p\ x_q) = \pm \ \Pi N\left(x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_K}\right)$, en que habrá tantos factores como ciclos se hayan formado, tomados con signo $\left\{\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\right\}$ los de número $\left\{\begin{matrix} \text{impar} \\ \text{par} \end{matrix}\right\}$ de letras.

$\triangle_n$ valdrá

$$\triangle_n = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \sum T_s\, d_{x_1}, d_{x_2} \dots d_{x_n} =$$
$$\sum \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b T_s\, d_{x_1}, d_{x_2} \dots d_{x_n} = \sum \tau_s$$

haciendo

$\tau_s = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b T_s\, d_{x_1}, d_{x_2} \dots d_{x_n}$; recordando la forma de T_s y variando convenientemente el orden de las integraciones, resulta

$$\tau_s = \Pi\left[(-1)^{K+1} n_K\right], \text{ en que } n_K =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b N\left(x_{\alpha_1}\, x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_K}\right) dx_{\alpha_1}, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_K}.$$

Las expresiones n_k serán por tanto valores numéricos dependientes tan sólo del número de letras del ciclo.

Calculemos ahora $\Delta_n = \sum \tau_s$, extendiendo la suma á todas las sustituciones posibles distintas de n letras. Debemos, pues, hallar el número de sustituciones que comprenden a_1 ciclos de K_1 letras, a_2 de K_2 .....

n letras se pueden repartir en a_1 grupos de K_1 letras, a_2 de K_2 .... de $n!$ maneras distintas, pero el número que buscamos es menor pues se obtiene la misma sustitución permutando circularmente las letras de cada grupo, lo que lo divide por $K_1^{a_1} \cdot K_2^{a_2} \ldots$; y también permutando de todas las maneras posibles los grupos de igual número de letras, que son $a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots$, luego el número pedido es

$$\frac{n!}{K_1^{a_1} K_2^{a_2} \ldots a_1!\, a_2! \ldots}$$

Por tanto

$$\Delta_n = \sum \frac{n!}{K_1^{a_1} K_2^{a_2} \ldots a_1!\, a_2! \ldots}$$

$$\left[(-1)^{K_1+1} n_{K_1}\right], \left[(-1)^{K_2+1} n_{K_2}\right]$$

$$D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \Delta_n = \sum (-\lambda)^n \left(-1\right)^{a_1 K_1 + a_2 K_2 + \ldots}$$

$$\left(-n_{K_1}\right)^{a_1} \left(-n_{K_2}\right)^{a_2} \ldots$$

pero $a_1 K_1 + a_2 K_2 + \ldots = n$, luego

$$D(\lambda) = \sum \frac{\lambda^n}{a_1!\, a_2! \ldots} \left[-\frac{n_{K_1}}{K_1}\right]^{a_1} \left[-\frac{n_{K_2}}{K_2}\right]^{a_2} \ldots =$$

$$\sum \prod \frac{1}{a!}\left[-\frac{\lambda^K n_K}{K}\right]^a =$$

$$= \prod \sum \frac{1}{a!}\left[-\frac{\lambda^K n_K}{K}\right]^a = \prod e^{-\frac{\alpha^K n_K}{K}} \quad (11), \text{ de donde}$$

2

$$\text{l. } D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^K n_K}{K} \text{ y } \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum \lambda^{K-1} n_K \quad (11')$$

fórmulas muy notables.

Apliquemos el mismo razonamiento á la serie $D\begin{pmatrix} x \\ & \lambda \\ y \end{pmatrix}$.

La determinante objeto del análisis es ahora

$$N\begin{pmatrix} x\, x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n \\ x\, x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n \end{pmatrix}$$

Empleando las notaciones anteriores acentuadas, tendremos

$$\triangle'_n = \int_a^b\int_a^b \ldots \int_a^b \sum T'_s \, dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n\,,$$

en que T'_s representará igualmente un producto de factores $N\begin{pmatrix} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} x_{\alpha_k} \end{pmatrix}$; pero entre ellos habrá en cada término uno de la forma

$$N\begin{pmatrix} x, x_{\alpha_1} & x_{\alpha_2} \ldots\ldots x_{\alpha_k} & y \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} x\; x_{\alpha_1} \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} x_{\alpha_1} & x_{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

$$\ldots\ldots N\begin{pmatrix} x_{\alpha_k} & y \end{pmatrix}$$

cuya integral respecto las variables x_{α_1} x_{α_1} .... x_{α_k} será una función de x é y, dependiente tan sólo del número de variables de integración, que llamaremos *núcleo iterado* de orden $(K+1)^{mo}$ y designaremos por $N_{k+1}(x\,y)$. Evidentemente

$$n_k = \int_a^b N_k(x\,x)\,dx \quad (12)$$

Asimismo tendremos

$$\tau'_s = \pm N_{r+1}(x\,y) \prod n'_k\,, \text{ en que } r + \sum k = n\,,$$

y también

$\tau'_s = (-1)^r N_{r+1}(xy)\, \tau'_{s'}$, designando por s' la sustitución que permuta las $n - r$ letras que figuran en los factores de $\prod n'_k$

Teniendo presente que obtendremos el mismo factor $N_{r+1}(xy)$ cualesquiera que sean las r variables de integración, pudiéndose escoger éstas entre las n de $\frac{n!}{(n-r)!}$ maneras distintas, resulta

$$\triangle'_n = \sum \tau'_s = \sum \frac{n!}{(n-r)!}(-1)^r N_{r+1}(xy)\, \triangle_{n-r}\,, \text{ y}$$

$$D\binom{x}{y}\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \Delta'_n = \sum \lambda^r N_{r+1}(xy) \frac{(-\lambda)^{n-r} \Delta_{n-r}}{(n-r)!} =$$

$$= D(\lambda) \sum \lambda^r N_{r+1}(xy);$$

De donde finalmente

$$\frac{D\binom{x}{y}\lambda)}{D(\lambda)} = R(x\,y\,\lambda) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \lambda^r N_{r+1}(xy) \qquad (13)$$

que es el desarrollo buscado; siendo los coeficientes de las potencias de λ los sucesivos núcleos iterados.

Propiedades de los núcleos iterados.—Suponiendo sucesivamente en su fórmula de definición,

$$N_{r+1}(xy) =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b N(xx_1)\, N(xx_2) \ldots N(x_r\, y)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{r1}$$

$r = 0, 1, 2, \ldots$, se obtienen las relaciones

$$\left.\begin{array}{l} N_1 x(y) = N(xy) \\ N_2(xy) = \int_a^b N(xx_1)\, N(x_1\, y)\, dx_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_r(xy) = \\ = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b N(xx_1) \ldots N(x_{r-1} y)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{r-1} \end{array}\right\} (13)'$$

Teorema.—*Los núcleos iterados son funciones continuas de* x *é* y *á partir del de segundo orden* $N_2(xy)$. La demostración es inmediata probados los siguientes lemas:

Lema 1.°.—*Si* $\varphi(xy)$ *y* $\psi(xy)$ *son dos funciones limitadas é integrables en el cuadrado* ab, *es decir, reunen las condiciones impuestas al núcleo de la ecuación integral, la función* $F(xy) = \int_a^b \varphi(xz)\, \psi(zy)\, dz$ *será continua en el cuadrado* ab.

Bastará demostrar que para valores cualesquiera de x é y comprendidos entre a y b se tendrá siempre, si $|x - x'| < \varepsilon$, $|y - y'| < \varepsilon$, siendo ε tan pequeño como se quiera $|F(x'y') - F(xy)| < \varepsilon_1$, en que ε_1 es del orden de infinitesimal ε.

Por la definición de la función F

$$F(x'y') - F(xy) = \int_a^b \varphi(x'z)\, \psi(zy')\, dz - \int_a^b \varphi(xz)\, \psi(zy)\, dz =$$

$$= \int_a^b \varphi (x'z) \left[\psi (zy') - \psi (zy) \right] dz +$$
$$+ \int_a^b \psi (zy) \left[\varphi (x'z) - \varphi (x'z) \right] dz.$$

Designado por A y B los límites superiores de las funciones φ y ψ en el cuadrado ab, se tendrá:

$$\left| F (x' y') - F (xy) \right| \leq A \int_a^b \left| \psi (zy') - \psi (z\ y) \right| dz +$$
$$+ B \int_a^b \left[\varphi (x'z) - \varphi (xz) \right] dz. \qquad (a)$$

Calculemos la integral

$$\int_a^b \left| \psi\ (zy') - \psi\ (zy) \right| dz, \qquad (b)$$

en la hipótesis de no haber en cada ordenada más que un número finito p de puntos de discontinuidad; sean sus abscisas z_1, z_2... colocadas en orden creciente.

Descompongamos el intervalo ab en los $2p + 1$ intervalos $a \dots z_1 - \varepsilon, z_1 - \varepsilon \dots z_1 + \varepsilon, z_1 + \varepsilon \dots z - \varepsilon_2 \dots z_{p-1} + \varepsilon \dots z_p - \varepsilon\ z_p - \varepsilon \dots z_p + \varepsilon\ z_p + \varepsilon \dots b$; la función ψ es continua en los de lugar impar y discontinua en los de lugar par; descompongamos la integral (b) en las $2p + 1$ integrales correspondientes y agrupemos separadamente las pares y los impares.

En los intervalos pares se tendrá:

$$\left| \psi\ (zy') - \psi \mid (zy) \right| < \varepsilon_2, \text{ siendo } \varepsilon_2 \text{ in-}$$

finitamente pequeño; y la parte de la integral (b) correspondiente valdrá menos que $\varepsilon_2\ (b - a)$.

Las integrales correspondientes á los intervalos discontinuos serán todos iguales y en número de P, é inferiores cada una á $2\ \varepsilon \times 2\ B$

El primer sumando de la relación (a) será por tanto inferior á $A \left[\varepsilon_2\ (b - a) + (4p\ B\ \varepsilon) \right]$, cantidad del orden infinitesimal de ε.

Como idéntico razonamiento puede seguirse para el segundo miembro, resulta por fin

$| F\ (x'y') - F\ (xy) < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon_1$, conforme con el enunciado.

Lema 2.º—Los núcleos iterados cumplen la ley recurrente,

$$N_{r+1} (xy') = \int_a^b N_r\ (xx_1)\ N\ (x_1y)\ dx_1 \qquad (14).$$

Esta ley es evidente para $r = 1$, pues

$$N_2\ (xy) = \int_a^b N_1\ (xx_1)\ N\ (x_1\ y)\ dx.$$

Demostremos que si

$$N_r\ (xy) = \int_a^b N_{r+1}\ (xx_1)\ N\ (x_1y)\ dx_1\ .$$

se verificará también

$$N_{r+1}(xy) = \int_a^b N_r(xx_r)\, N(x_r y)\, dx_r\,.$$

En efecto,

$$N_{r+1}(xy) =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b N(xx_1)\, N(x_1 x_2) \ldots N(x_r y)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_r =$$

$$= \int_a^b N(x_r y) \left[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b N(xx_1) \ldots N(x_{r-1} x_r)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{r-1} \right] dx_r =$$

$$= \int_a^b N_r(xx_r)\, N(x_r y)\, dx_r\,.$$

La combinación de estos dos lemas nos prueba sucesivamente la continuidad de los núcleos iterados de 2.°, 3.° ... orden.

Los núcleos iterados satisfacen la relación $N_{r+s}(xy) = \int_a^b N_r(xx_1)\, N_s(x_1 y)\, dx_1$ (14′), cuya demostración es análoga á la de la (14).

La función $R(x\,y\,\lambda)$ es la resolvente de la ecuación integral (1), *supuesta regular.* La integral del término general del desarrollo de $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda$ es

$$\Delta_n(xy) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b N\begin{pmatrix} xx_1\, x_2 \ldots x_n \\ yx_1\, x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\,.$$

Designando para simplificar por $(p\,q)$ el elemento $N(x_p\, x_q)$, y desarrollando la determinante por los elementos de la primera columna, se tiene, representando las menores por sus diagonales principales

$$N\begin{pmatrix} xx_1\, x_2 \ldots x_n \\ yx_1\, x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} =$$

$$(x_1 y)\ [(11)\,(22)\,(33) \ldots (nn)] - (1y)\,[(x1)\,(22)\,(33) \ldots (nn)] +$$
$$+ (2y)\,[(x1)\,(12)\,(33)] - (nn)] - \ldots$$

Cambiando convenientemente el orden de las columnas de dichas menores, obtendremos las relacines

$$\left.\begin{array}{l} [(x1)\,(22)\,(33) \ldots (nn)] = -[(x2)\,(11)\,(33) \ldots (nn)] \\ [(x1)\,(12)\,(33)\ \ldots (nn)] = \quad [(x3)\,(11)\,(22) \ldots (nn)] \\ [(x1)\,(12)\,(23) \ldots (nn)] = -[(x4)\,(11)\,(22) \ldots (nn)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

luego

$$\Delta_n(xy) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \Big[(xy)\,[(11)\,(22)\,(33) \ldots (nn)] -$$
$$- (1y)\,[(x1)\,(22)\,(33)\ \ldots (nn)] -$$

$$- (2y) \left[(x2) (11) (33) \ldots (nn) \right] \ldots \Big] dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= N(xy) \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \Big[(11) (22) \ldots (nn) \Big] dx_1 dx_2 \ldots dx_n -$$

$$- \Big[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b (1y) \Big[(x1)\, 22)\, (33) \ldots (nn) \Big] dx_1 \ldots dx_n + \ldots \Big]$$

Permutando las variables de integración x_1 y x_2 en el segundo término del paréntesis, resulta idéntico al primero, y haciendo análogo cambio en los demás se halla, puesto que son iguales y en número de n,

$$\Delta_n (xy) = N(xy)\, \Delta_n - n \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b (1y)$$

$$\Big[(1x1) (22) (33) \ldots (nn) \Big] dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n \text{, ó sea}$$

$$\Delta_n (xy) = N(xy)\, \Delta_n - n \int_a^b N(x_1 y)\, \Delta_{n-1} (xx_1)\, dx_1. \qquad (c)$$

Análogamente hubiéramos obtenido, utilizando para el desarrollo los elementos de la primera fila

$$\Delta_n (xy) = N(xy)\, \Delta_n - n \int_a^b N(xx_1)\, \Delta_{n-1} (x_1 y)\, dx_1 \qquad (c')$$

Las relaciones (c) y (c') nos expresan la ley recurrente de formación de las $\Delta_n(xy)$.

Multiplicando (c) por $\dfrac{(-\lambda)^n}{n!}$ resulta

$$\frac{(-\lambda)^n}{n!} \Delta_n (xy) =$$

$$= \frac{(-\lambda)^n}{n!} \Delta_n N(xy) + \lambda \int_a^b N(x_1 y) \frac{(-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} \Delta_{n-1} (xx_1)\, dx_1$$

Haciendo $n = 1, 2, \ldots \infty$ y sumando los resultados, se obtiene

$$D \binom{x}{y} \lambda = N(xy)\, D(\lambda) + \lambda \int_a^b N(x_1 y)\, D \binom{x}{x_1} \lambda\, dx_1, \text{ de donde}$$

$$R(xy\lambda) = N(xy) + \lambda \int_a^b N(x_1 y)\, R(xx_1 \lambda)\, dx_1 \qquad (d)$$

y

$$R(xy\lambda) = N(xy) + \lambda \int_a^b N(xx_1)\, R(x_1 y \lambda)\, dx_1 \qquad (d'),$$

deducida análogamente de (c')

De la relación (1) se deduce la

$$u(y) = f(y) + \lambda \int_a^b N(yz)\, u(z)\, dz, \text{ que multipli-}$$

cada por $\lambda R(xy\lambda)\, dy$ e integrada con respecto a y se convierte en

$$\lambda \int_a^b u(y)\, R(xy\lambda)\, dy = \lambda \int_a^b f(y)\, R(xy\lambda)\, dy +$$

$$+ \lambda \int_a^b u(z) \left[\lambda \int_a^b R(xy\lambda)\, N(yz)\, dy \right] dz, \text{ de donde}$$

simplificando

$$\lambda \int_a^b f(y)\, R(xy\lambda)\, dy = \lambda \int_a^b N(xz)\; u(z)\, dz = u(x) - f(x),$$

ó sea finalmente

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(y)\, R(xy\lambda)\, dy, \quad (15)$$

fórmula que nos da la solución de la ecuación integral regular de segunda especie en función de $R(xy\lambda)$; esta es, pues, la *función resolvente* de la ecuación propuesta.

La solución de la ecuación integral (1) por la fórmula (15) exige la convergencia de las series $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \lambda\right)$ y $D(\lambda)$, que hemos demostrado si el núcleo $N(xy)$ es limitado é integrable en el cuadrado de integración.

Si el núcleo no es limitado, es decir, adquiere valores infinitos en el cuadrado ab, las series $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \lambda\right)$ y $D(\lambda)$ dejan de ser convergentes, y el método explicado es inaplicable.

Hay un caso, sin embargo, muy frecuente en los problemas físicos, y el único hallado hasta el presente en la práctica, que por medio de un artificio sencillo se reduce al ya explicado.

Es el de un núcleo de la forma

$$N(xy) = \frac{L(xy)}{(x-y)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

en que $L(xy)$ es una función limitada é integrable: $N(xy)$ sólo se hace infinito para $x = y$.

Teorema 1.º *Sus núcleos iterados á partir del n^{mo}, siendo n el primer entero superior á $\frac{1}{1-\alpha}$, son limitados.*

En efecto

$$N_2(xy) = \int_a^b \frac{L(xx_1)}{(x-x_1)^{\alpha}} \cdot \frac{L(x_1 y)}{(x_1 - y)^{\alpha}}\, dx_1,$$

y designado por L el límite superior de la función $L(xy)$

$$|N_2(xy)| < L^2 \int_a^b \frac{dx_1}{(x-x_1)^{\alpha}(x_1-y)^{\alpha}}$$

Cambiemos la variable de integración x_1 por la z, haciendo

$$x_1 = y + (x-y)\,z,$$

lo que nos da

$dx_1 = (x - y)\, dz$, $x - x_1 = (x - y)(1 - z)$, $x_1 - y = (x - y)\, z$, $z = \dfrac{x_1 - y}{x - y}$, $b_2 = \dfrac{b - y}{x - y}$, $a_2 = \dfrac{a - y}{x - y}$,

luego

$$|N_2(xy)| < L^2 \int_{\frac{a-y}{x-y}}^{\frac{b-y}{x-y}} \frac{(x-y)\, dz}{|x-y|^{2\alpha}\, |z|^{\alpha}\, |1-z|^{\alpha}} =$$

$$= L^2 \frac{1}{|x-y|^{2\alpha-1}} \int_{\frac{a-y}{x-y}}^{\frac{b-y}{x-y}} \frac{dz}{|z|^{\alpha}\, |1-z|^{\alpha}} ,$$

de donde

$$|N_2(xy)| < \frac{L_2}{|x-y|^{2\alpha-1}} ,$$

siendo L_2 una cantidad finita.

Por el mismo procedimiento obtendremos sucesivamente

$$|N_3(xy)| < \frac{L_3}{|x-y|^{3\alpha-2}} , \ldots , \ |N_n(xy)| < \frac{L_n}{|x-y|^{n\alpha-(n-1)}} .$$

El exponente $n\alpha - (n-1)$ será negativo cuando $n > \dfrac{1}{1-\alpha}$, luego el núcleo $N_n(xy)$ será de módulo inferior á la expresión

$$L_n\, |x-y|^{n-1-n\alpha} ,$$

que ya no es infinita para $x = y$.

Luego el núcleo de orden n^mo es limitado, y con mayor razón los siguientes

Teorema 2.°—*La ecuación integral* (1) *es equivalente á la*

$$u(x) = f_n(x) + \lambda^n \int_a^b N_n(xy)\, u(y)\, dy , \qquad (e)$$

designando por $f_n(x)$ *la función conocida*

$$f_n(x) = f(x) + \sum_{K=1}^{K=n-1} \lambda^K \int_a^b N_K(xy)\, f(y)\, dy.$$

Para demostrarlo basta observar que la ecuación (*e*) se deduce de la (1) por una sustitución reiterada; en efecto, cambiando en (1) x é y por y y z, y sustituyendo el valor de $u(y)$ resulta

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b N(xy)\, f(y)\, dy + \lambda^2 \int_a^b N(xy) \times$$

$$\times \left[\int_a^b N(xz)\, u(z)\, dz \right] dy = f_2(x) + \lambda^2 \int_a^b N_2(xz)\, u(z)\, dz ,$$

y análogamente

$$u(x) = f_3(x) + \lambda^3 \int_a^b N_3(xv)\, u(v)\, dv, \; \ldots.$$

$$u(x) = f_n(x) + \lambda^n \int_a^b N_n(xy)\, u(y)\, dy.$$

Estos teoremas nos permiten resolver la ecuación integral

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{L(xy)}{x-y)^\alpha}\, u(y)\, dy \quad (f), \quad (\alpha < \frac{n-1}{n})$$

por el método explicado; pues bastará formar la que tiene por núcleo el n^{mo} iterado del de la (f) y por parámetro λ^n, y hallar la solución de esta última.

Procedimiento directo.—Se puede también en este caso hal ar la resolvente partiendo de las funciones $D\left(\frac{x}{y}\lambda\right) D(\lambda)$ por un método ingeniosísimo debido á Poincaré, del que daremos una breve idea.

Sea n el orden del primer núcleo iterado finito para $x = y$, los números $n_1, n_2 \ldots. n_{n-1}$, (12), serán infinitos, pero á partir de n_n serán todos finitos.

Recordemos la fórmula $D(\lambda) = e^{-\sum \frac{\lambda^K n_K}{K}}$ y formemos la función

$$e^{\sum_{K=1}^{K=n-1} \frac{\lambda^K n_K}{K}}$$

Es evidente que el producto

$$D(\lambda)\, e^{\sum_{K=1}^{K=n-1} \frac{\lambda^K n_K}{K}} = D_n(\lambda)$$

será una función de λ, cuyos coeficientes son todos finitos, idéntica á la deducida de $D(\lambda)$ haciendo $n_1 = n_2 = \ldots. = n_{n-1} = o$.

Escribamos la relación

$R(xy\lambda) = D_n\left(\frac{x}{y}\lambda\right) : D_n(\lambda)$, siendo $D_n\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$ una función incógnita de λ de la forma

$$D_n\left(\frac{x}{y}\lambda\right) = \sum_{P=o}^{P=\infty} F_P(xy).\, \lambda^P$$

Conocidos los coeficientes de los desarrollos de $R(xy\lambda)$ y $D_n(\lambda)$, las $F_P(xy)$ se determinan por las relaciones

$$F_0(xy) = N_1(xy),\ F_1(xy) = N_2(xy) \ldots\ldots F_n(xy) = N_{n+1}(xy) + c_n N_1(xy) \ldots \qquad (g)$$

deducidas de la

$$N_1(xy) + \lambda N_2(xy) + \ldots = \frac{F_0(xy) + \lambda F_1(xy) + \ldots}{1 + c_n \lambda^n + \ldots},$$

ya que el desarrollo de $D_n(\lambda)$ es $1 + c_n \lambda_n + \ldots$, po ser el término de menos grado de su exponente de grado n^{mo}.

Las relaciones (g) nos dicen que la función $D_n\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$ coincide con la obtenida, haciendo en el desarrollo de $D\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$, $n_K = o$, ($K = 1, 2 \ldots, n-1$); y que sus coeficientes son todos finitos.

Luego para formar la función resolvente de la ecuación integral (1) hasta aplicar la regla de Fredholm, suprimiendo en los desarrollos de $D\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$ y $D(\lambda)$ los términos en que entren factores de la forma $N\left(x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_K}\right)$, que contengan menos de n letras.

Hilbert estudió el caso $a < \frac{1}{2}$. Si $x < \frac{1}{2}$, $n = 2$, y la regla de Poincaré exige la supresión de los términos que contengan factores $N\left(x_\alpha x_\alpha\right)$, lo que equivale á sustituir por ceros los elementos de la diagonal principal de cada determinante; resultado al que llegó Hilbert siguiendo un camino muy distinto.

Para completar el razonamiento falta probar que las funciones $D_n\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$ y $D(\lambda)$ son enteras; pero nos creemos dispensados de hacerlo por la extensión del cálculo necesario.

Estudiada ya la reducción en el caso de núcleos infinitos, sólo consideraremos en lo sucesivo núcleos limitados.

Continuidad de la resolvente $R(xy\lambda)$.—El desarrollo en serie de $R(xy\lambda)$ nos muestra que la función $R(xy\lambda - N(xy)$ es continua respecto x é y como suma de funciones continuas.

La fórmula de definición de $R(xy\lambda)$, (10) nos dice además que las funciones $D\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$ y $R(xy\lambda)$ presentan las mismas discontinuidades respecto x é y, pues sólo difieren en un factor independiente de dichas variables.

Luego, en definitiva, dichas funciones ofrecen los mismos caracteres de discontinuidad que el núcleo $N(xy)$; por tanto, *la solución de la ecuación integral dada por la fórmula* (15) *es continua.*

Teorema. *Los ceros de la función* $D(\lambda)$ *son polos de la resolvente* $R(xy\lambda)$. Bastará probar que si un valor λ' de λ es raíz común de las ecuaciones $D(\lambda) = 0$, $D\left(\frac{x}{y}\lambda\right) = 0$ su grado de multiplicidad es por lo menos superior en una unidad en la primera que en la segunda.

En efecto; de las relaciones (11) y (12) se deduce

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\int_a^b R(xx\lambda)\,dx \qquad (16),$$

de donde

$$D'(\lambda) = -\int_a^b D\left(\begin{smallmatrix}x\\x\end{smallmatrix}\lambda\right) dx \qquad (16'),$$

que nos prueba el enunciado.

Es os valores del parámetro, polos de la resolvente, serán designados en lo sucesivo con el nombre de *constantes propias* del núcleo $N(xy)$.

El radio de convergencia del desarrollo en serie de $R(xy\lambda)$ es, pues, igual al módulo de la constante propia que lo tiene menor, ó en otros términos, al de la menor raíz de la ecuación $D(\lambda) = 0$.

Cálculo de las constantes propias.—Se reduce al de las raíces de la ecuación $D(\lambda) = 0$.

Teniendo en cuenta la ecuación (e), vemos que formando la función $D(\lambda)$ correspondiente al núcleo $N_n(xy)$, é igualándola á cero, las raíces de la ecuación resultante serán las n^{mas} potencias de las constantes propias; el método de Gräffe está, pues, indicado para dicho cálculo.

La solución es única.—Supongamos que además de la solución $u(x)$ dada por (15) existiese una función $u_1(x)$ tal que

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b N(xy)\,u_1(y)\,dy \qquad (\lambda)$$

De la relación (λ) se deduce

$$f(x) = u_1(x) - \lambda \int_a^b N(xy)\,u_1(y)\,dy,$$

valor que sustituído en (15) da

$$u(x) = u_1(x) - \lambda \int_a^b N(xy)\,u_1(y)\,dy +$$

$$+ \lambda \int_a^b R(xz\lambda)\left[u_1(z) - \lambda \int_a^b N(zy)\,u_1(y)\,dy\right] dz =$$

$$= u_1(x) - \lambda \int_a^b \left[N(xy) - R(xy\lambda) + \right.$$

$$\left. + \lambda \int_a^b R(xz\lambda)\,N(zy)\,dz\right] u_1(y)\,dy,$$

pero según (d) el paréntesis es nulo, luego

$$u(x) = u_1(x).$$

La ecuación asociada.—Se llama así la ecuación integral

$$v(x) = f(x) + \lambda \int_a^b N(yx)\,v(y)\,dy \qquad (17),$$

que difiere de la dada en tener permutadas as variables del núcleo.

La solución de la ecuación asociada será

$$v(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(yx\lambda)\, f(y)\, dy \qquad (17')$$

en que

$$R(yx\lambda) = \frac{D\left(\frac{y}{x}\lambda\right)}{D(\lambda)}.$$

Los núcleos $N(xy)$ y $N(yx)$ tienen, pues, las mismas constantes propias.

La ecuación homogénea regular.—Es la ecuación integral de primera especie

$$u(x) = \lambda \int_a^b N(xy)\, u(y)\, dy \qquad (18)$$

obtenida de la (1), suponiendo $f(x) = 0$. La única solución *continua* será $u(x) = 0$.

LA ECUACIÓN INTEGRAL SINGULAR HOMOGÉNEA

Si el valor del parámetro λ es constante propia del núcleo, la función resolvente se hace infinita por ser dicho valor uno de sus polos, y el método no es aplicable.

Como en el caso anterior, y solamente á título de guía, examinemos lo que ocurre en el sistema de n ecuaciones que supusimos equivalen aproximadamente á la ecuación integral al anularse su determinante.

El Algebra elemental nos dice que el sistema (3) no tendrá solución en general, salvo condiciones especiales que deben cumplir las determinantes menores; pero que el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{l} u(x_1) - \lambda \sum\limits_{\beta=1}^{\beta=n} N(x_1 x_\beta)\, u(x_\beta)\, \Delta x = 0 \\ u(x_2) - \lambda \sum\limits_{\beta=1}^{\beta=n} N(x_2 x_\beta)\, u(x_\beta)\, \Delta x = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u(x_2) - \lambda \sum\limits_{\beta=1}^{\beta=n} N(x_n x_\beta)\, u(x_\beta)\, \Delta x = 0 \end{array}\right\} (3'),$$

que equivaldrá, según nuestra hipótesis, a la ecuación integral singular homogénea, tendrá infinitas soluciones proporcionales.

Fundados en estas consideraciones estudiemos, primeramente la ecuación integral

$$u(x) = \lambda' \int_a^b N(xy)\, u(y)\, dy \qquad (19)$$

en que λ' es una constante propia del núcleo $N(xy)$.

Las funciones $D\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$ – son las definidas por las series

$$\left.\begin{array}{l} D_K\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\lambda\right) = D_K\left(\begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_K \\ y_1\, y_2 \ldots y_K \end{matrix}\lambda\right) = N\left(\begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_K \\ y_1\, y_2 \ldots y_K \end{matrix}\right) - \\ \quad - \lambda \int_a^b N\left(\begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_K\, x_{K+1} \\ y_1\, y_2 \ldots y_K\, x_{K+1} \end{matrix}\right) dx_{K+1} + \ldots \\ + \dfrac{(-\lambda)^n}{n!} \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b N\left(\begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_K\, x_{K+1} \ldots x_{K+n} \\ y_1\, y_2 \ldots y_K\, x_{K+1} \ldots x_{K+n} \end{matrix}\right) \\ \quad dx_{K+1} \ldots dx_{K+n} + \ldots,\; K = 1, 2 \ldots \end{array}\right\} (20)$$

La evidente analogía que guardan estas funciones con la $D\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$ nos muestra que son funciones enteras de λ para valores de las variables x_α, y_α $(\alpha = 1, 2 \ldots K)$ comprendidos entre a y b, y continuas respecto éstas, siéndolo $N(x\,y)$; en general, presentarán las mismas discontinuidades que éste.

De la fórmula (20) se deduce

$$\int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b D_K\left(\begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\lambda\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_K =$$

$$\int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b N\left(\begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_K \\ x_1\, x_2 \ldots x_K \end{matrix}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_K - \ldots$$

de donde

$$\int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b D_K\left(\begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\lambda\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_K = (-1)^K D^{(K)}(\lambda) \qquad (20')$$

relación de la que es un caso particular la ya hallada

$$\int_a^b D\left(\begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\lambda\right) = -D'(\lambda).$$

Siguiendo la misma marcha empleada con la serie $D\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$ al demostrar que la función $R(x\ y\ \lambda)$ era la resolvente de la ecuación integral, resulta tomando igualmente el término L^{mo} de $D_K\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$ y desarrollando su determinante respecto los elementos de su primera fila

$$\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b N \begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \cdots x_K \; x_{K+1} \cdots x_{K+n} \\ y_1 \; y_2 \cdots y_K \; x_{K+1} \cdots x_{K+n} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \, dx_{K+1} \cdots dx_{K+n} = \sum_{l=1}^{l=K} (-1)^{l+1} N(x_1 \, y_l) \times$$

$$\left. \begin{aligned} & \times \int_a^b \cdots \int_a^b N \begin{pmatrix} x_2 \; x_3 \cdots \cdots \cdots x_K \; x_{K+1} \ldots x_{K+n} \\ y_1 \; y_2 \cdots y_{l-1} \; y_{l+1} \ldots x_K \; x_{K+1} \ldots x_{K+n} \end{pmatrix} dx_{K+1} \ldots dx_{K+n} + \\ & \qquad + \sum_{l=1}^{l=n} (-1)^{K+l+1} \int_a^b N(x_1 \, x_{K+l}) \times \\ & \times \left[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b N \begin{pmatrix} x_2 \; x_3 \ldots x_K \; x \; {+1} \ldots x_{K+l} \; x_{K+l+1} \ldots x_{K+n} \\ y_1 \; y_2 \ldots y_{K-1} \; y_K \ldots x_{K+l-1} \; x_{K+l+1} \ldots x_{K+n} \end{pmatrix} \times \right. \\ & \left. \times \, dx_{K+1} \, dx_{K+2} \ldots dx_{K+l-1} \, dx_{K+l+1} \ldots dx_{K+n} \right] dx_{K+l} \end{aligned} \right\} ,$$

cambiando convenientemente las variables de integración y el orden de las filas, se ve también que el valor del paréntesis de la segunda suma es independiente de l, y por tanto los n sumandos son iguales; luego multiplicando la igualdad así obtenida por $\frac{(-\lambda)^n}{n!}$, haciendo $n = 0, 1, 2,$ y sumando los resultados, queda finalmente

$$\left. \begin{aligned} & D_K \begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \ldots x_K \\ y_1 \; x_2 \ldots y_K \end{pmatrix} \lambda = \sum_{l=1}^{l=K} (-1)^{l+1} N(x_1 \, x_l) \times \\ & \qquad \times D_{K-1} \begin{pmatrix} x_2 \; x_3 \cdots \cdots \cdots y_K \\ y_1 \; y_2 \cdots y_{l-1} \; y_{l+1} \cdots y_K \end{pmatrix} \lambda + \\ & + \lambda \int_a^b N(x_1 \, y) \, D_K \begin{pmatrix} y \;\; x_2 \; x_3 \cdots x_K \\ y_1 \; y_2 \; y_3 \cdots y_K \end{pmatrix} \lambda \, dy \;\; , \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

y en general, desarrollando por los elementos de la fila m^{ma} $(m = 1, 2 \ldots K)$,

$$\left. \begin{aligned} & D_K \begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \cdots x_K \\ y_1 \; y_2 \cdots y_K \end{pmatrix} \lambda = \sum_{l=1}^{l=K} (-1)^{l+m} N(x_m \, y_l) \times \\ & \qquad \times D_{K-1} \begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \cdots x_{m-1} \; x_{m+1} \cdots x_K \\ y_1 \; y_2 \cdots y_{l-1} \; y_{l+1} \cdots y_K \end{pmatrix} \lambda + \\ & + \lambda \int_a^b N(x_m \, y) \, D_K \begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \cdots x_{m-1} \; y \; x_{m+1} \cdots x_K \\ y_1 \; y_2 \cdots \cdots \cdots \cdots y_K \end{pmatrix} \lambda \, dy \end{aligned} \right\} \quad (21')$$

Utilizando las columnas primera y m^{ma} hubiéramos obtenido

$$\left.\begin{aligned} D_K\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_K \\ y_1\, y_2 \ldots y_K \end{pmatrix}\lambda\Bigg) &= \sum_{l=1}^{l=K} (-1)^{l+1} N\,(x_l\, y_1) \\ & D_{K-1}\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_{l-1}\, x_{l+1} \ldots x_K \\ y_2\, y_3 \ldots\ldots\ldots\ldots y_K \end{pmatrix}\lambda\Bigg) + \\ + \lambda \int_a^b N\,(xy_1)\, & D_K\begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_K \\ x\;\; y_2\, y_3 \ldots y_K \end{pmatrix}\lambda\Bigg)\, dx \end{aligned}\right\} (21''),$$

y

$$\left.\begin{aligned} D_K\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_K \\ y_1\, y_2 \ldots y_K \end{pmatrix}\lambda\Bigg) &= \sum_{l=1}^{l=K} (-1)^{l+m} N\,(x_l\, y_m) \\ & D_{K-1}\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_{l-1}\;\; x^{l+1} \ldots x_K \\ y_1\, y_2 \ldots y_{m-1}\;\; y_{m+1} \ldots y_K \end{pmatrix}\lambda\Bigg) + \\ + \lambda \int_a^b N\,(xy_m)\, & D_K\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_K \\ y_1\, y_2 \ldots y_{m-1}\, x\, y_{m+1} \ldots y_K \end{pmatrix}\lambda\Bigg)\, dx \end{aligned}\right\} (21''').$$

Teorema. *El número de soluciones linealmente independientes de la ecuación integral singular homogénea*

$$u\,(x) = \lambda' \int_a^b N\,(xy)\, u\,(y)\, dy\,,$$

es igual al subíndice de la primera función $D_K \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\lambda\right)$ *no idénticamente nula para* $\lambda = \lambda'$.

Dividiremos su demostración en cuatro partes.

1.ª *Las funciones* $D_K \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\lambda\right)$, $(K = 1, 2 \ldots)$ *no son todas idénticamente nulas para* $\lambda = \lambda'$.

En efecto, $D\,(\lambda)$ no es idénticamente nula, pues $D\,(o) = 1$, luego el valor λ' no puede anular a todas sus derivadas. Si $D^{(K)}\,(\lambda)$ es la primera que no se anula, la relación (20′) prueba que $D_K \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\lambda'\right)$ no es idénticamente nula.

2.ª *Las funciones*

$$u_m\,(x) = D_K \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\, x\, x_{m+1}\; x_K \\ y_1\, y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_K \end{pmatrix}\lambda'\Bigg) \quad (m = 1, 2, \ldots K)$$

satisfacen la ecuación (19).

Pues la relación (21′) nos da, si

$$D_{K-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda'\Bigg) = 0,\; D_K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda'\Bigg) \neq 0, \text{ haciendo } x_m = x$$

$$D_K \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\; x\; x_{m+1} \ldots x_K \\ y_1\, y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_K \end{pmatrix}\lambda'\Bigg) =$$

$$= \lambda' \int_a^b N(xy)\, D_K \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_{m-1}\; y\; x_{m+1} \ldots x_K \\ y_1\, y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_K \end{pmatrix} dy,$$

o sea

$$u_m(x) = \lambda' \int_b^a N(xy)\, u_m(y)\, dy.$$

No siendo la función $D_K \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \lambda \right)$ idénticamente nula para $\lambda = \lambda'$, podemos reemplazar las variables x_l, y_l por valores numéricos arbitrarios $r_l\, s_l$ ($l = 1, 2 \ldots K$) sujetos únicamente a la condición

$$D_K \begin{pmatrix} r_1\, r_2 \ldots r_K \\ s_1\, s_2 \ldots s_K \end{pmatrix} \lambda \neq 0.$$

3.ª *Las K soluciones $u_m(x)$, ($m = 1, 2 \ldots K$, son linealmente independientes.*

Bastará probar que la existencia de la identidad

$$\sum_{m=1}^{m=K} c_m\, u_m(x) = 0, \text{ exige } c_1 = c_2 = \ldots = c_K = 0.$$

En efecto, cambiando la variable x por una cualquiera de las cantidades r_l, se obtiene si $l \neq m$, $u_m(r_l) = 0$, pues todos los términos del desarrollo en serie de la función $D_K \left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix} \lambda' \right)$ tienen sus determinantes, nulas por tener dos filas iguales.

Tomemos ahora la identidad supuesta $\sum_{m=1}^{m=K} c_m\, u_m(x) = 0$, y cambiemos en ella sucesivamente x por $r_1\, r_2 \ldots r_K$; con lo que se hallarán las relaciones

$$c_m\, u_m(r_m) = 0, \ (m = 1, 2 \ldots K), \text{ que equivalen a las}$$
$$c_1 = c_2 = \ldots c_K = 0.$$

Es evidente que también serán soluciones de (19) los productos de las funciones $u_m(x)$ por factores numéricos y sus combinaciones lineales; en particular tomaremos como soluciones linealmente independientes de la ecuación (19) las K funciones

$$\varphi_m(x) = \frac{u_m(x)}{u_m(r_m)}, \ (m = 1, 2 \ldots K).$$

4.ª *Toda solución $U(x)$ de la ecuación (19) puede expresarse linealmente en función de las K soluciones $\varphi_m(x)$.*

En efecto, la función $U(x)$ verificará las identidades

$$\left.\begin{aligned} U(x) - \lambda' \int_a^b N(xy)\, U(y)\, dy = 0 \\ \lambda' \int_a^b \left[U(y) - \lambda' \int_a^b N(yz)\, U(z)\, dz \right] F(xy)\, dy = 0. \end{aligned}\right\} \quad (i)$$

siendo $F(xy)$ una función continua limitada cualquiera.

De ellas se deduce

$$U(x) - \lambda' \int_a^b N(xy)\, U(y)\, dy - \lambda' \int_a^b F(xy)\, U(y)\, dy +$$
$$+ \lambda'^2 \int_a^b \int_a^b F(xy)\, N(yz)\, U(z)\, dz\, dy = 0\,,$$

o bien

$$U(x) - \lambda' \int_a^b U(y) \left[N(xy) + F(xy) - \lambda' \int_a^b F(xz) N(zy)\, dz \right] dy = 0,$$

luego $U(x)$ es también solución de la ecuación integral homogénea

$$U(x) = \lambda' \int_a^b M(xy)\, U(y)\, dy \qquad (j)$$

cuyo núcleo es

$$M(xy) = N(xy) + F(xy) - \lambda' \int_a^b F(xz)\, N(zy)\, dz \; . \qquad (j')$$

Reemplacemos en la fórmula (21″) K por $K+1$, l por $l+1$, λ por λ', $x_1\ y_1$ por $x\ y$, x por t, y las variables $x_\alpha\ y_\alpha$ ($\alpha = 2, 3 \ldots K+1$) por los números $r_\beta\ s_\beta$ ($\beta = 1, 2 \ldots K$); y resultará, separando el primer sumando de la suma y pasando al primer miembro el segundo término,

$$D_{K+1}\begin{pmatrix} x & r_1 & r_2 & r_K \\ y & s_1 & s_2 & s_K \end{pmatrix}\lambda' - \lambda' \int_a^b N(t\,y)\, D_{K+1}\begin{pmatrix} x & r_1 & r_2 & \ldots & r_K \\ t & s_1 & s_2 & \ldots & s_K \end{pmatrix}\lambda'\, dt =$$
$$= N(xy)\, D_K\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_K \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_K \end{pmatrix}\lambda' -$$
$$- \sum_{l=1}^{l=K} N(r_l\, y)\, D_K\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_{l-1} & x & r_{l+1} & \ldots & r_K \\ s_1 & s_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & s_K \end{pmatrix}\lambda' ,$$

o bien

$$\frac{D_{K+1}\begin{pmatrix} x & r_1 & r_2 & \ldots & r_K \\ y & s_1 & s_2 & \ldots & s_K \end{pmatrix}\lambda'}{D_K\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_K \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_K \end{pmatrix}\lambda'} -$$
$$- \lambda' \int_a^b \frac{D_{K+1}\begin{pmatrix} x & r_1 & r_2 & \ldots & r_K \\ t & s_1 & s_2 & \ldots & s_K \end{pmatrix}\lambda'}{D_K\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_K \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_K \end{pmatrix}\lambda'}\, N(ty)\, dt =$$
$$= N(xy) - \sum_{l=1}^{l=K} N(r_l\, y)\, \varphi_l(x)\, . \qquad (K)$$

Tomarlo como $F(xy)$ la función

$$\frac{D_{K+1}\begin{pmatrix} x\ r_1\ r_2 \ldots r_K \\ y\ s_1\ s_2 \ldots s_K \end{pmatrix}\lambda'}{D_K\begin{pmatrix} 1\ 2 \ldots r_K \\ s_1\ s_2 \ldots s_K \end{pmatrix}\lambda'}$$

la relación (K) se convierte en

$$F(xy) - \lambda' \int_a^b F(xt)\, N(ty)\, dt = N(xy) -$$

$$- \sum_{1=1}^{1=K} N(x_1 y)\, \varphi_1(x) \qquad (K')$$

que sustituido en (j') da

$$M(xy) = \sum_{1=1}^{1=K} N(r_1 y)\, \varphi_1(x)$$

luego

$$U(x) = \lambda' \sum_{1=1}^{1=K} \varphi_1(x) \int_a^b N(r_1 y)\, U(y)\, dy,$$

que nos prueba que $U(x)$ es función lineal de las soluciones $\varphi_m(x)$ $(m = 1, 2 \ldots K)$ con los coeficientes numéricos

$$c_1 = \int_a^b N(r_1 y)\, U(y)\, dy.$$

Así pues, la ecuación integral singular homogénea tiene infinitas soluciones continuas distintas, funciones lineales de las K soluciones $\varphi_m(x)$; estas K funciones linealmente independientes se llaman *funciones propias* del núcleo $N(xy)$ referentes a la constante propia λ'.

Esto nos permite averiguar en la práctica si un número dado es o no constante propio del núcleo, sin necesidad de formar y resolver la ecuación $D(\lambda) = 0$ pues basta examinar (lo que en muchos casos es fácil) si la ecuación homogénea correspondiente admite o no solución. El número K recibe el nombre de *índice* de la constante propia λ'.

La ecuación homogénea asociada.—La simetría de las funciones $D_K\left(\frac{x}{y}\lambda\right)$ nos prueba que la ecuación integral

$$\upsilon(x) = \lambda' \int_a^b N(yx)\, \upsilon(y)\, dy \qquad (22),$$

admitirá en las mismas hipótesis anteriores K soluciones linealmente independientes $\varphi_m(x)$, $(m = 1, 2 \ldots K)$ definidas por las relaciones

$$\psi_m(x) = \frac{D_K \begin{pmatrix} r_1 \, r_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r_K \\ s_1 \, s_2 \ldots \; s_{m-1} x \; x_{m+1} \ldots s_K \end{pmatrix} \lambda'}{D_K \begin{pmatrix} r_1 \, r_2 \ldots r_K \\ s_1 \, s_2 \ldots s_K \end{pmatrix} \lambda'}. \qquad (22')$$

Teorema.—*Las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ funciones propias respectivamente de los núcleos $N(xy)$ y $N(yx)$ referentes a las constantes propias distintas λ' y λ'' son ortogonales* (*).

En efecto, de las relaciones

$$\varphi(x) = \lambda' \int_a^b N(xy)\, \varphi(y)\, dy, \quad \psi(x) = \lambda'' \int_a^b N(yx)\, \psi(y)\, dy,$$

se deduce

$$(\lambda' - \lambda'') \int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx =$$

$$= \lambda' \lambda'' \left[\int_a^b \int_a^b \psi(x)\, N(xy)\, \varphi(y)\, dx\, dy - \right.$$

$$\left. - \int_a^b \int_a^b \varphi(x)\, N(yx)\, \psi(y)\, dx dy \right],$$

pero el paréntesis es nulo por ser sus dos términos iguales, luego

$$\text{ya que } \lambda' - \lambda'' \neq 0, \int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = 0.$$

LA ECUACIÓN INTEGRAL SINGULAR DE SEGUNDA ESPECIE

Ya hemos indicado que en este caso la fórmula resolvente (15) es inaplicable por ser infinita $R(x\, y\, \lambda)$. Visto además que el sistema aproximado (3) tiene solución si cumple ciertas condiciones, hallemos las necesarias para la existencia de una función continua $u(x)$ solución de la ecuación

$$u(x) - \lambda' \int_a^b N(xy)\, u(y)\, dy = f(x) \qquad (23)$$

Multiplicando esta relación por una cualquiera de las soluciones $\psi_i(x)$ de la ecuación integral (22) e integrando respecto a x resulta

$$\int_a^b f(x)\, \psi_1(x)\, dx = \int_a^b u(x)\, \psi_1(x)\, dx -$$

$$- \lambda' \int_a^b \int_a^b N(xy)\, \psi_1(x)\, u(y)\, dy\, dx, \quad \text{ó bien}$$

(*) Dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ se llaman ortogonales en el intervalo ab si

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,\psi_1(x)\,dx = \int_a^b u(x)\Big[\psi_1(x) - \\ - \lambda' \int_a^b N(yx)\,\psi_1(y)\,dy\Big]\,dx = 0. \qquad (23')$$

Como la función $\psi_l(x)$ es una cualquiera de las K funciones propias del núcleo $N(yx)$ referentes a la constante propia λ', vemos que para que exista una solución $u(x)$ de la ecuación (23), la función conocida $f(x)$ debe ser ortogonal a las K soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada (22); o sea

$$\int_a^b f(x)\,\psi_m(x)\,dx = 0\,, \qquad (m = 1, 2, \ldots K). \qquad (24)$$

Si estas condiciones se cumplen, es evidente que la ecuación (23) admitirá además infinitas soluciones continuas de la forma

$$u(x) + \sum_{l=1}^{l=K} c_l\,\psi_l(x)\,,$$

siendo las c_l cantidades cualesquiera.

Teorema.—*Si la función $f(x)$ cumple las condiciones (24) la función*

$$\frac{D_{K+1}\begin{pmatrix} x\, r_1\, r_2 \ldots r_K \\ y\, s_1\, s_2 \ldots s_K \end{pmatrix}\lambda'}{D_K\begin{pmatrix} r_1\, r_2 \ldots\ldots r_K \\ s_1\, s_2 \ldots\ldots s_K \end{pmatrix}\lambda'}$$

es la resolvente de la ecuación integral singular de segunda especie (23).

Hemos de probar la relación análoga a (15)

$$u(x) = f(x) + \lambda' \int_a^b \frac{D_{K+1}\begin{pmatrix} x\, r_1\, r_2 \ldots r_K \\ y\, s_1\, s_2 \ldots s_K \end{pmatrix}\lambda'}{D_K\begin{pmatrix} r_1\, r_2 \ldots\ldots r_K \\ s_1\, s_2 \ldots\ldots s_K \end{pmatrix}\lambda'}\, f(y)\,dy\,. \qquad (25)$$

En efecto, cambiando en (25) las variables x, y en y, z, y sustituyendo en (23) resulta

$$f(x) + \lambda' \int_a^b f(y)\left[\frac{D_{K+1}\begin{pmatrix} x\, r_1\, r_2 \ldots r_K \\ y\, s_1\, s_2 \ldots s_K \end{pmatrix}\lambda'}{D_K\begin{pmatrix} r_1\, r_2 \ldots\ldots r_K \\ s_1\, s_2 \ldots\ldots s_K \end{pmatrix}\lambda'} - N(xy) - \right.$$

$$\left. - \lambda' \int_a^b N(xz)\,\frac{D_{K+1}\begin{pmatrix} z\, r_1\, r_2 \ldots r_K \\ y\, s_1\, s_2 \ldots s_K \end{pmatrix}\lambda'}{D_K\begin{pmatrix} r_1\, r_2 \ldots\ldots r_K \\ s_1\, s_2 \ldots\ldots r_K \end{pmatrix}\lambda'}\,dz\right]dy = f(x) \quad (25)$$

Pero por la relación (K) el paréntesis vale

$$- \sum_{l=1}^{l=K} N(x\, r_l)\, \psi_l(y)\,.$$

luego (25') se reduce a la identidad $f(x) = f(x)$, por convertirse segundo término del primer miembro en

$$\lambda' \sum_{l=1}^{l=K} N(x r_l) \int_a^b f(y)\, \psi_l(y)\, dy\,,$$

resultado nulo por cumplir $f(x)$ las condiciones (24).

La forma general de las soluciones continuas de (23) en dicho caso será

$$u(x) = f(x) + \lambda' \int_a^b \frac{D_{K+1}\begin{pmatrix} x\, r_1\, r_2 \dots r_K \\ y\, s_1\, s_2 \dots s_K \end{pmatrix} \lambda'}{D_K \begin{pmatrix} r_1\, r_2 \dots r_K \\ s_1\, s_2 \dots r_K \end{pmatrix} \lambda'} f(y)\, dy +$$

$$+ \sum_{l=1}^{l=K} c_l\, \psi_l(x)\,. \quad (26)$$

Limite superior de K. —Se puede hallar fácimente sin recurrir á las funciones $D_K\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \lambda\right)$.

De las relaciones (20) y (20') se deducen las

$$\int_a^b D_1\left(\begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\, \lambda'\right) dx = - D'(\lambda'),$$

$$\int_a^b D_2\left(\begin{matrix} x\, x_1 \\ x\, y_1 \end{matrix}\, \lambda'\right) = - D'_1\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\, \lambda'\right), \dots\dots$$

Sean $l_1, l_2, \dots, l_K$ los grados de multiplicidad del cero λ' en las funciones $D(\lambda)$, $D_1\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \lambda'\right) \dots \dots D_K\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \lambda'\right)$, y m el del polo λ' de la resolvente: se tendrá

$$m = l - l_1\,, \quad l \geq l_1 + 1 \geq l_2 + 2 \geq \dots \geq l_{K-1} + K - 1 \geq K\,,$$

de donde $K \leq l_1 - 1$, y por fin $K < l + m - 1$. (27) Si λ' es raíz simple de la ecuación $D(\lambda) = o$. $K = 1$.

CASO COMPLEJO

Consideremos el caso de ser las variables y los límites de integración complejos; tomemos un cierto camino ab como hilo de integración.

Un ligero examen del método de Fredholm nos muestra que las fórmulas obtenidas son aplicables en este caso, efectuando todas las integraciones a lo largo del mismo hilo ab; pues la segunda parte del teorema de Hadamard nos asegura la convergencia de las series $D\left(\frac{x}{y}\,\lambda\right)$ y $D(\lambda)$.

El teorema de Cauchy, relativo a la integral de una función de variable compleja, nos dice que si la función $N(xy)$ es entera, la solución $u(x)$ de la ecuación integral es independiente del camino de integración seguido de a a b.

Si la función $N(xy)$ no es entera, la solución $u(x)$ deja de ser uniforme, resultado comprobado recientemente por Picard en algunos casos sencillos.

CASO DE VARIAS VARIABLES

Las formas de ecuaciones integrales dadas en la Introducción son susceptibles de extensión inmediata al caso en que la función incógnita depende de más de una variable.

El caso en que u depende de dos variables es muy común en Física. La ecuación integral lineal de segunda especie correspondiente es

$$u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda \iint_{(R)} N(x_1, x_2, y_1, y_2)\, u(y_1, y_2)\, d(y_1 y_2), \quad (l)$$

extendidas las integrales a la región (R), cuyos puntos tienen por coordenadas y_1, y_2 y en las que se suponen limitadas e integrables las funciones f y N.

Podemos considerar $u(x_1, x_2)$ y $f(x_1, x_2)$ como funciones del punto $X(x_1, x_2)$ y a $N(x_1\ x_2\ y_1, y_2)$ como función de los puntos $X(x_1, x_2)$ e $Y(y_1\, y_2)$ y la ecuación (l) tomará la forma

$$u(X) = f(X) + \lambda \iint_{(R)} N(XY)\, u(Y)\, du_y \quad (l'),$$

designando por du_y un elemento areolar de la región (R).

Llamaremos a la ecuación (l') *ecuación integral puntual*.

Dicha ecuación se resuelve de igual modo que la (l); únicamente en el caso de que el núcleo se haga infinito al coincidir los puntos X e Y hay alguna variación.

J. Plemelj ha demostrado que si el núcleo es de la forma $\frac{L(XY)}{XY^{\alpha}}$, $(\alpha < 2)$, la ecuación integral es reductible por el procedimiento ya conocido otra de núcleo finito; y que si $\alpha = 1$, caso frecuentísimo en los problemas de potencial, el núcleo iterado de segundo orden se hace infinito como $log.\ XY$ y el de tercer orden ya se conserva finito.

SEGUNDA PARTE

ESTUDIO DEL NÚCLEO

Composición y descomposición de núcleos.

Sistemas ortogonales y biortogonales.—Diremos que las funciones continuas en el intervalo $a \ldots b$, $\varphi_1(x)\ \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots$ forman un *sistema ortogonal* si, siendo ortogonales dos a dos, cumplen además las condiciones

$$\int_a^b \varphi_K^2(x)\,dx = 1 \quad (K = 1, 2 \ldots)$$

y llamaremos por analogía *sistema biortogonal* al formado por los dos grupos de funciones

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots$$
$$\psi_1(x),\ \psi_2(x) \ldots \psi_n(x) \ldots$$

tales que

$$\int_a^b \varphi_K(x)\,\psi_l(x)\,dx = 0,\ K \neq l,\ y \int_a^b \varphi_K^2(x)\,dx =$$
$$\int_a^b \psi_l^2(x)\,dx = 1 \quad (K, l = 1, 2, \ldots)$$

El número de funciones puede ser en ambos casos finito o infinito. Estos sistemas se llaman completos si no existe otra función o par de funciones que satisface las condiciones de definición, e incompletos en caso contrario.

Teorema 1.º—*Las funciones de un sistema ortogonal son linealmente independientes.*—En efecto, la existencia de la identidad

$$\sum_{K=1}^{K=n} c_K\,\varphi_K(x) = 0,$$ o su equivalente

$$\int_a^b \varphi_K(x) \sum_{K=1}^{K=n} c_K\,\varphi_K(x)\,dx = 0 \text{ exige } c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

La misma demostración prueba que las funciones de cada grupo de un sistema biortogonal son linealmente independientes.

Teorema 2.º—*Dado un sistema de funciones continuas en el intervalo $a \ldots b$ y no idénticamente nulas, linealmente independientes $f_1(x)\ f_2(x) \ldots$, siempre puede deducirse de él otro ortogonal cuyas funciones $\varphi_1(x)\ \varphi_2(x) \ldots$ se expresen linealmente por las del primero.*

En efecto, el sistema

$$\varphi_1(x) = \frac{f_1(x)}{\sqrt{\int_a^b f_1^2(y)\,dy}}, \ \ldots\ldots \varphi_n(x) =$$

$$= \frac{f_n(x) - \varphi_1(x) \int_a^b f_n(z)\, \varphi_1(z)\, dz}{\sqrt{\int_a^b \left[f_n(y) - \varphi_1(y) \int_a^b f_n(z)\, \varphi_1(z)\, dz \right]^2 dy}}, \quad (n = 2, 3 \ldots)$$

es ortogonal, como se comprueba fácilmente.

Para probar que siempre es posible formarlo, basta observar que, en las hipótesis hechas, ninguna de las expresiones numéricas de denominadores puede ser nula; ya que si

$$\int_a^b \left[f_n(y) - \varphi_1(y) \int_a^b f_n(z)\, \varphi_1(z)\, dz \right]^2 dy = 0$$

se tendría $f_n(y) - \varphi_1(y) \int_a^b f_n(z)\, \varphi_1(z)\, dz = 0$, ó sea

$$f_n(y) - \frac{\int_a^b f_n(z)\, \varphi_1(z)\, dz}{\sqrt{\int_a^b f_1^2(y)\, dy}}\, f_1(y) = 0,$$

y las funciones f_1 y f_n no serían independientes.

La extensión del sistema biortogonal se hace sin dificultad.

Teorema 3.° (Desigualdad de Bessel.)—*Dados un sistema ortogonal* $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x)$, *y una función continua* $f(x)$ *tal que* $\int_a^b f^2(x)\, dx$ *tenga un valor finito, se cumple siempre la relación*

$$\sum_{K=1}^{K=n} \left[\int_a^b f(x)\, \varphi_K(x)\, dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\, dx. \qquad (28)$$

En efecto,

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{K=1}^{K=n} \varphi_K(x) \int_a^b f(y)\, \varphi_K(y)\, dy \right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\, dx - \sum_{K=1}^{K=n} \left[\int_a^b f(x)\, \varphi_K(x)\, dx \right]^2.$$

El primer miembro es positivo o nulo, luego (28).

Corolario. (Desigualdad de Schwarz.)—*Dadas dos funciones* $\varphi(x)$ *y* $\psi(x)$ *continuas e integrables*, se tiene

$$\left[\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx \right]^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x)\, dx. \int_a^b \psi^2(x)\, dx. \quad (28')$$

Pues la función $\pi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\, dx}}$ constituye un sistema ortogonal en que $n = 1$ y por

$$(28) \qquad \left[\int_a^b \psi(x)\,\pi(x)\,dx\right]^2 \leq \int_a^b \psi^2(x)\,dx\,,$$

o sea $\left[\int_a^b \psi(x) \dfrac{\varphi(dx)}{\sqrt{\int_a^b \varphi^2 \lambda(x)\,d^2x}}\,dx\right]^2 \leq \int_a^b \psi^2(x)\,dx$, de donde (28′).

Núcleos ortogonales.—Dos núcleos $P(xy)$ y $Q(xy)$ se llaman *ortogonales* si cumplen las relaciones

$$\int_a^b P(xz)\,Q(zy)\,dz = o, \int_a^b Q(xy)\,P\,zy = o. \quad (29)$$

Cada uno de los núcleos P y Q es ortogonal a todos los iterados del otro. En virtud de la ley de formación de los núcleos iterados bastará probar que

$$\int_a^b P(xz)\,Q_2(zy)\,dz = o.$$

En efecto,

$$\int_a^b P(xz)\,Q_2(zy)\,dz =$$

$$= \int_a^b P(xz)\left[\int_a^b Q(zu)\,Q(uy)\,du\right]dy =$$

$$= \int_a^b Q(uy)\left[\int_a^b P(xz)\,Q(zu)\,dz\right]du = o.$$

Cada uno de los núcleos P y Q es ortogonal a la resolvente del otro, ó sea

$$\int_a^b P(xz)\,R_Q(z\,y\,\lambda)\,dz = \int_a^b Q(xz)\,R_P(z\,y\,\lambda)\,dz = o. \quad (29')$$

Esta proposición es consecuencia inmediata de la anterior.

Si dados los núcleos $P(xy)$ y $Q(xy)$ ortogonales, formamos el núcleo suma $N(xy) = P(xy) + Q(xy)$, se verifican las relaciones

$$D_N(\lambda) = D_P(\lambda) \times D_Q(\lambda) \qquad (30),$$

$$R_N(xy\lambda) = R_P(xy\lambda) + R_Q(xy\lambda) \qquad (31)$$

Tomemos las series

$$l.\,D_P(\lambda) = \sum_n (-1)^{n-1} \frac{p_n\,\lambda^n}{n}\,,\ l.\,D_Q(\lambda) =$$

$$= \sum_n (-1)^{n-1} \frac{q_n\,\lambda^n}{n}\,,$$

en que

$$P_K = \int_a^b P_K(xx)\,dx, \quad q_K = \int_a^b Q_K(xx)\,dx.$$

Sumándolas

$$1.\ D_P(\lambda) + 1\,D_Q(\lambda) = \sum_n (-1)^{n-1} \frac{(P_n + q_n)\,\lambda^n}{n}.$$

Pero siendo P y Q ortogonales, se tiene

$$\int_a^b N_1(xx)\,dx = \int_a^b P_1(xx)\,dx + \int_a^b Q_1(xx)\,dx.$$

. . . .

. . . .

$$\int_a^b N_n(xx)\,dx = \int_a^b \int_a^b N(xx_1)\,N_{n-1}(x_1 x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \Big[P(xx_1) + Q(xx_1) \Big] \Big[P_{n-1}(x_1 x) +$$

$$+ Q_{n-1}(x_1 x) \Big] dx_1\,dx = \int_a^b P_n(xx)\,dx + \int_a^b Q_n(xx)\,dx,$$

o sea $P_n + q_n = n_n$ ($n = 1, 2 \ldots\ldots$) y por tanto

$$1.\ D_P(\lambda) + 1.\ D_Q(\lambda) = \sum_n (-1)^{n-1} \frac{n_n\,\lambda^n}{n} = 1.\ D_N(\lambda),$$

de donde $D_N(\lambda) = D_P(\lambda) \times D_Q(\lambda)$. (30)

De las relaciones análogas a la (d)

$$R_P(xy\lambda) = P(xy) + \lambda \int_a^b P(xz)\,R_P(zy\lambda)\,dz$$

$$R_Q(xy\lambda) = Q(xy) + \lambda \int_a^b Q(xz)\,Q_Q(zy\lambda)\,dz$$

se deduce

$$R_P(xy\lambda) + R_Q(xy\lambda) = N(xy) + $$

$$+ \lambda \int_a^b \Big[P(xz)\,R_P(zy\lambda) + Q(xz)\,R_Q(zy\lambda)\,dz \Big],$$

y agregando al segundo miembro la expresión nula

$$\lambda \int_a^b \Big[P(xz)\,R_Q(zy\lambda) + Q(xz)\,R_P(zy\lambda) \Big]\,dz,$$ queda

$$R_P(xy\lambda) + R_Q(xy\lambda) = N(xy) + \int_a^b N(xz)\Big[R_P(zy\lambda) +$$

$$+ R_Q(zy\lambda)\Big]dz,$$

luego la función $R_P(xy\lambda) + R_Q(xy\lambda)$ es la resolvente del núcleo $N(xy)$, o sea

$$R_N(xy\lambda) = R_P(xy\lambda) + R_Q(xy\lambda) \qquad (31).$$

De estas relaciones se deduce que la resolvente de $N(xy)$ tendrá como polos los de las resolventes de $P(xy)$ $Q(xy)$; o sea que las constantes propias de los núcleos P y Q lo son del N. *Las funciones propias de los núcleos P y Q son asimismo funciones propias del núcleo suma N.*

En efecto, si $u_p(x) = \lambda'_p \int_a^b P(xy)\, u_p(y)\, dy$, (m) multiplicando por $Q(zx)$ e integrando resulta

$$\int_a^b u_p(x)\, Q(zx)\, dx = \lambda'_p \int_a^b Q(zx)\, P(xy)\, u_p(y)\, dx dy = 0,$$

de donde

$$u_p(x) = \lambda' \int_a^b P(xy)\, u_p(y)\, dy +$$

$$+ \lambda'_p \int_a^b Q(xy)\, u_p(y)\, dy = \lambda'_p \int_a^b N(xy)\, u_p(y)\, dy.$$

Recíprocamente, *si $u(y)$ es función propia del núcleo suma $N(xy)$, es de la forma $u_p\, u(x) + u_Q(x)$, siendo u_p y u_Q funciones propias de los núcleos* P y Q.

Escribamos la identidad

$$c.\, u(x) = c.\, u_p(x) + c\Big[u(x) - u_p(x)\Big],$$

en que c es un factor indeterminado y

$$u_p(x) = \lambda'_p \int_a^b P(xy)\, u(y)\, dy; \text{ se tendrá}$$

$$c\Big[u(x) - u_p(x)\Big] = c.\, \lambda'_p \int_a^b Q(xy)\, u(y)\, dy =$$

$$= \lambda'_Q \int_a^b Q(xy)\, u(y)\, dy \quad (m'),$$

aprovechando la indeterminación de c.

De (m') se deduce fácilmente

$$\int_a^b P(xy)\, c. \left[u(y) - u_p(y) \right] dy =$$

$$= \lambda'_Q \int_a^b \left[\int_a^b P(xy)\, Q(yz)\, dy \right] u(z)\, dz = o$$

de donde

$$u_p(x) - \lambda'_p \int_a^b P(xy)\, u_p(y)\, dy =$$

$$= \lambda'_p \int_a^b P(xy) \left[u(y) - u_p(y) \right] dy = o\,,$$

que prueba es $u_p(x)$ función propia del núcleo $P(xy)$.

Un razonamiento análogo nos probaría que $u(x) - u_p(\lambda)$ lo es del núcleo $Q(xy)$.

Siendo evidente la extensión al caso de un núcleo suma de tres, cuatro o más núcleos, ortogonales dos a dos, podemos considerar demostrado el siguiente teorema, resumen y generalización de cuanto llevamos expuesto:

El núcleo N (xy) *suma de los* $P_{(1)}(yx)$, $P_{(2)}(xy)$ ... , *ortogonales dos a dos y en número cualquiera, goza de las siguientes propiedades:*

Su resolvente es la suma de los resolventes de los sumandos.

Tiene por constantes propias las de aquéllos.

Sus funciones propias son combinaciones lineales las de los núcleos correspondientes.

Descomposición del núcleo N (xy) *en núcleos parciales ortogonales, correspondientes a sus distintas constantes propias.*

Sean λ_1, λ_2 ... las constantes propias del núcleo $N(xy)$, polos de su resolvente $R(xy\lambda)$ de grados m_1, m_2 ... Según un teorema fundamental en la teoría de las funciones meromorfas, podemos escribir, y que la función $R(x\, y\, \lambda)$ lo es en toda la extensión del plan

$$R(xy\,\lambda) = \frac{\pi_{m_1}(xy)}{(\lambda_1 - \lambda)^{m_1}} + \frac{\pi_{m_1 - 1}(xy)}{(\lambda_1 - \lambda)^{m_1 - 1}} + \dots + \frac{\pi_1(xy)}{\lambda_1 - \lambda} +$$

$$+ R_1(x\, y\, \lambda) = \varphi_1(x\, y\, \lambda) + R_1(x\, y\, \lambda), \quad (n)$$

siendo $R_1(xy\lambda)$ otra función meromorfa de λ con los mismos polos que $R(xy\lambda)$ menos el λ_1. Llamaremos a $\varphi_1(xy\lambda)$ resolvente parcial correspondiente al polo λ_1.

Haciendo en (n) $\lambda = o$ resulta $R(xyo) = \varphi_1(xy\,o) + R_1(xyo)$ pero $R(xyo) = N(xy)$, y designando por $\upsilon_1(xy) + N_{(1)}(xy)$ las funciones $\varphi_1(xy\, o)$ y $R_1(xy\, o)$ queda

$$R(xy) = \upsilon_1(xy) + N_{(1)}(xy) \quad (n') \qquad \text{, en que}$$

$$\upsilon_1(xy) = \frac{\pi_{m_1}(xy)}{\lambda_1^{m_1}} + \ldots + \frac{\pi_1(xy)}{\lambda_1}.$$

Llamaremos a la función $\upsilon_1(xy)$ *núcleo parcial* correspondiente a la constante propia λ_1. Dicho núcleo es función continua de las variables xy si lo es $N(xy)$, y en general presenta las mismas discontinuidades que éste.

En efecto, las funciones $\pi_{m1-\alpha}(xy)$, $(\alpha = 0, 1, 2 \cdots m_1 - 1)$, gozan de la misma propiedad, pues

$\pi_{m1-\alpha}(xy) = -R\lambda_1\left[R(xy\lambda)(\lambda_1 - \lambda)^{m1-\alpha-1}\right]$, indicando así el residuo de la función $R(xy\lambda)(\lambda_1 - \lambda)^{m_1-\alpha-1}$ para el polo $\lambda = \lambda_1$; y la resolvente $R(xy\lambda)$ es continua a lo largo del contorno de integración, si lo es $N(xy)$. Siendo las funciones $\pi(xy)$ en número limitado m_1 su suma será también función continua de x e y.

De las fórmulas (d) (d') se deduce fácilmente

$$R(xy\lambda) - N(xy) = (\lambda - \lambda_1)\int_a^b N(zy)\,R(xz\lambda)\,dz +$$

$$+ \lambda_1 \int_a^b N(zy)\,R(xz\lambda)\,dz =$$

$$= (\lambda - \lambda_1)\int_a^b N(xz)\,R(xy\lambda)\,dz + \lambda_1\int_a^b N(xz)\,R(zy\lambda)\,dz.$$

Sustituyendo por $R(xy\lambda)$ el desarrollo (n) e igualando los coeficientes de las mismas potencias de $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda}$ en los tres miembros, se halla el sistema

$$(o)\quad \left|\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\pi_{m_1}(xy) = \lambda_1\int_a^b N(xz)\,\pi_{m_1}(zy)\,dz = \\
= \lambda_1\int_a^b N(zy)\,\pi_{m_1}(xz)\,dz
\end{array}\right\}\text{, grado } m_1 \\
\left.\begin{array}{l}
\pi_{m_1-1}(xy) = \lambda_1\int_a^b N(xz)\,\pi_{m_1}(zy)\,dz - \\
- \int_a^b N(xz)\,\pi_{m_1}(zy)\,dz = \\
= \lambda_1\int_a^b N(zy)\,\pi_{m_1-1}(xz)\,dz - \\
- \int_a^b N(zy)\,\pi_{m_1}(xz)\,dz
\end{array}\right\} \quad m_1 - 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}
\pi_1(xy) &= \lambda_1 \int_a^b N(xz)\,\pi_1(zy)\,dz - \\
&- \int_a^b N(xz)\,\pi_2(zy)\,dz = \\
&= \lambda_1 \int_a^b N(zy)\,\pi_1(xz)\,dz - \\
&- \int_a^b N(zy)\,\pi_2(xz)\,dz.
\end{aligned}\right\} \quad 1$$

o) $$\left.\begin{aligned}
R_1(xy\lambda) &- N(xy) = \\
&= \lambda \int_a^b N(xz)\,R_1(zy\lambda)\,dz - \\
&- \int_a^b N(bz)\,\pi_1(zy)\,dz = \\
&= \lambda \int_a^b N(zy)\,R_1(xz\lambda)\,dz - \\
&- \int_a^b N(zy)\,\pi_1(xz)\,dz
\end{aligned}\right\} \quad \upsilon$$

o bien

$$\left|\begin{aligned}
&\int_a^b N(xz)\,\pi_{m_1}(zy)\,dz = \int_a^b N(zy)\,\pi_{m_1}(xz)\,dz = \frac{\pi_{m_1}(dz)}{\lambda_1} \\
&\int_a^b N(xz)\,\pi_{m_1-1}(zy)\,dz = \int_a^b N(zy)\,\pi_{m_1-1}(xz)\,dz = \\
&= \frac{\pi_{m_1-1}(xy)}{\lambda_1} + \frac{\pi_{m_1}(xy)}{\lambda_1 z} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

(o') $$\left|\begin{aligned}
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\int_a^b N(xz)\,\pi_1(zy)\,dz = \int_a^b N(zy)\,\pi_1(xz)\,dz = \\
&= \sum_{l=1}^{l=m_1} \frac{\pi_l(xy)}{\lambda_1^{\,l}} = \nu_1(xy) \\
&\lambda \int_a^b N(xz)\,R_1(zy)\,\lambda\,dz = \lambda \int_a^b N(zy)\,R_1(xz\lambda)\,dz = - \\
&- N(xy) + R_1(xy\lambda) + \nu_1(xy) = R_1(xy\lambda) - N_{(1)}(xy)
\end{aligned}\right\}$$

Las relaciones (d) y (d') pueden escribirse

$$\begin{aligned}
R(xy\lambda) - N(xy) &= \lambda \int_a^b N(zy)\,R(xz\lambda)\,dz = \\
&= \lambda \int_a^b N(xz)\,R(zy\lambda)\,dz,
\end{aligned}$$

de donde

$$\int_a^b R(xy\lambda)\,\pi_{m_1}(yt)\,dy = \int_a^b N(xy)\,\pi_{m_1}(yt)\,dy =$$

$$= \lambda \int_a^b R(xzy)\left[\int_a^b N(zy)\,\pi_{m_1}(yt)\,dy\right] =$$

$$= \lambda \int_a^b R(zy\lambda)\left[\int_a^b N(xt)\,\pi_{m_1}(xt)\,dx\right] dz,$$

que se transforma en virtud de la 1.ª de (o′) en

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int_a^b R(xz\lambda)\,\pi_{m_1}(zy)\,dz = \int_a^b R(zy\lambda)\,\pi_{m_1}(xz)\,dz = \frac{\pi_{m_1}(xy)}{\lambda_1 - \lambda}, \\
\text{y análogamente} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\displaystyle\int_a^b R(xz\lambda)\,\pi_1(zy)\,dz = \int_a^b R(zy\lambda)\,\pi_1(xz)\,dz = \rho_1(xy\lambda)
\end{array}\right\}(P)$$

Sustituyendo en las ecuaciones del sistema (P) la función R por su desarrollo (n), e igualando los coeficientes de las potencias iguales de $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda}$, resulta una serie de relaciones que vienen englobadas en las

$$(q)\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\int_a^b \pi_p(xz)\,\pi_q(zy)\,dz = \\
\displaystyle= \int_a^b \pi_p(xz\,\pi_p(zy)\,dz = \begin{cases} o, \text{ si } p+q > m_1 + 1 \\ \pi_{p+q-1} \text{ si } p+q \leq m_1 - 1 \end{cases} \\
\displaystyle\int_a^b \pi_p(xz)\,R_1(zy\lambda)\,dz = \int_a^b \pi_p(zy)\,R_1(xz\lambda)\,dz = o, \text{ para} \\
\text{todos los valores de P.}
\end{array}\right.$$

Las fórmulas (q) nos permiten demostrar las siguientes propiedades:

1.ª *La resolvente parcial* $\rho_1(xy\lambda)$ *es ortogonal al resto* $R_1(xy\lambda)$ *para todo valor de* λ *que no sea constante propia del núcleo* $N(xy)$, *o sea*

$$\int_a^b \rho_1(xz\lambda)\,R_1(zy\lambda)\,dz = \int_a^b \rho_1(zy\lambda)\,R_1(xz\lambda)\,dz = o \qquad (q')$$

Basta sustituir ρ^1 por su desarrollo (n) y tener en cuenta la 2.ª de las relaciones (q).

2.ª *El núcleo parcial* $\upsilon_1(xy)$ *es ortogonal al resto* $N_{(1)}(xy)$; proposición evidente haciendo en (q'), $\lambda = o$.

3.ª *Los núcleos* $\upsilon_1(xy)$ *y* $N_{(1)}(xy)$ *tienen por resolventes las funciones* $\rho_1(xy\lambda)$ *y* $R_1(xy\lambda)$. En efecto, combinando la relación análoga a (q')

$$\int_a^b \upsilon_1(xz)\, R_1(zy\lambda)\, dz = \int_a^b \upsilon_1(zy)\, R_1(xz\lambda)\, dz = 0$$

con la última del grupo (σ') resulta

$$\rho_1(xy\lambda) - \nu_1(x\,) = \lambda \int_a^b \upsilon_1(xz)\, \rho_1(zy\lambda)\, dz =$$
$$= \lambda \int_a^b \upsilon_1(zy)\, \rho_1(xz\lambda)\, dz : \quad (r)$$

y de (n) y (d)

$$R_1(xy\lambda - N_{(1)}(xy) = \lambda \int_a^b N_{(1)}(xz)\, R_1(xz\lambda)\, dz =$$
$$= \lambda \int_a^b N_{(1)}(zy)\, R_1(xz\lambda)\, dz . \quad (r^1)$$

Esta propiedad nos muestra que puede separarse del núcleo $N(xy)$ el núcleo parcial $\upsilon_1(xy)$ correspondiente al polo λ_1 y efectuar su estudio con entera independencia.

La fórmula (n) y toda la teoría expuesta son de generalización inmediata, pues podemos descomponer la función $R_1(xy\lambda)$ en dos partes, una relativa al polo λ_2, y otra que sólo admite los $\lambda_3, \lambda_4 \cdots$, y hallar análogamente el núcleo parcial $\upsilon_2(xy)$; ... . Tendremos, pues, en general

$$N(xy) = \upsilon_1(xy) + \upsilon_2(xy) + \ldots,\ R(xy\lambda) = \rho_1(xy\lambda) + \rho_2(xy\lambda) + \ldots$$

Los núcleos parciales son ortogonales dos a dos: Por ejemplo, $\upsilon_1(xy)$ y $\upsilon_2(xy)$ son ortogonales. En efecto, podemos escribir

$$N(xy) = \upsilon_1(xy) + N_{(1)}(xy) = \upsilon_1(xy) + \upsilon_2(xy) + N_{(1,2)}(xy)$$
$$N(xy) = \upsilon_2(xy) + N_{(2)}(xy)\,;\quad N_{(2)}(xy) = \upsilon_1(xy) + N_{(1,2)}(xy).$$

La primera igualdad nos manifiesta que $\upsilon_1(xy)$ es ortogonal a $\upsilon_2(xy) + N_{(1,2)}(xy)$, y la tercera que también lo es a $N_{(1,2)}(xy)$; luego $\upsilon_1(xy)$ y $\upsilon_2(xy)$ son ortogonales.

En estos teoremas referentes a la composición y descomposición de núcleos, expuestos únicamente para completar el estudio general del núcleo $N(xy)$ se basa el método de solución, extensión del de Hilbert, seguido por Goursat y B. Heywood, y perfeccionado el pasado año por el matemático romano T. Lalesco.

Pasemos ahora a examinar distintos casos particulares.

NÚCLEO BILINEAL

Llamamos así al núcleo

$$N(xy) = \sum_{P=1}^{P=n} a_P(x)\, b_P(y) \qquad (s)$$

La ecuación integral (1) será en este caso

$$(32) \qquad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{P=1}^{P=n} a_P(x)\, b_P(y)\, u(y)\, dy,$$

o bien

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{P=1}^{P=n} a_P(x) \int_a^b b_P(y)\, u(y)\, dy$$

Las integrales

$$\int_a^b b_P(y)\, u(y)\, dy = c_P \; ; (P = 1\ 2 \ldots n) \qquad (s')$$

son coeficientes constantes, luego la solución será

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{P=1}^{P=n} c_P.\, a_P(x) \qquad (s'')$$

faltando solamente hallar los valores de las cantidades c_P.

Para ello sustituyamos en las relaciones (5) el valor (s'') de $u(x)$ y tendremos el sistema

$$\int_a^b b_P(y) f(y)\, dy + \lambda \int_a^b b_P(y)\, a_1(y)\, dy.\, c_1 + \ldots +$$

$$+ \lambda \int_a^b b_P(y)\, a_n(y).\, c_n = c_P \; ; (P = 1, 2, \ldots, n)$$

de n ecuaciones con n incógnitas, análogo al (3).

Su determinante es

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda(11) & -\lambda(12) & \ldots & -\lambda(1n) \\ -\lambda(21) & -\lambda(22) & \ldots & -\lambda(2n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda(n1) & -\lambda(n2) & \ldots & 1 - \lambda(nn) \end{vmatrix}, \text{ designando por}$$

el símbolo (pq) la integral $\int_a^b b_P(y)\, a_q(y)\, dy$.

Una discusión análoga a la efectuada en el caso general, fundada como aquélla en la teoría de los sistemas de ecuaciones de primer grado, nos conduce a los siguientes resultados:

La ecuación integral regular (32) tendrá una solución continua única.

La ecuación integral singular (32) carecerá en general de solución.

La ecuación integral singular homogénea

$$u(x) = \lambda' \int_a^b \sum_{P=1}^{P=n} a_p(x)\, b_p(y)\, u(y)\, dy \qquad (32'),$$

admitirá un cierto número de soluciones linealmente independientes continuas, más infinitas combinaciones lineales de las mismas.

Este caso particular que hemos resuelto sin acudir a la solución de Fredholm ha servido de base a E. Schmidt para su método de resolución. Se fuuda éste en la sustitución del núcleo general de la ecuación integral por uno bilineal que lo *represente aproximadamente* en menos de una cantidad tan pequeña como se quiera (*).

NÚCLEO SIMÉTRICO

Este caso, estudiado por completo por Hilbert y Schmidt, es muy importante no sólo por presentarse en gran número de problemas, sino porque a él pueden reducirse la mayor parte de los núcleos disimétricos hallados en las aplicaciones.

Se llama *simétrico* el núcleo $S(yx) = S(xy)$.

La ecuación general (1) coincide en este caso con su asociada.

Propiedades del núcleo simétrico $S(xy)$:

1.ª *Los núcleos iterados son todos simétricos.* Esta proposición es evidente.

2.ª *Los núcleos iterados son todos distintos de cero.* En efecto, supongamos que $S_m(xy) \equiv 0$, la ley de su formación nos da $S_{m+1}(xy) \equiv S_{m+2}(xy) \equiv \cdots \equiv 0$.

Sea $S_{2n}(xy)$ el primer núcleo iterado de orden par idénticamente nulo, que podrá ser S_m o S_{m+1}. La fórmula (14') da

$$S_{2n}(xy) = \int_a^b [S_n(zy)]^2 \, dz \,, \quad \text{luego} \quad S_n \equiv 0 \,,$$

$$n = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \cdots \text{ m par.} \\ \dfrac{m+1}{2} & \cdots \text{ m impar.} \end{cases}$$

Reiterando el razonamiento llegaríamos á la conclusión absurda $S(xy) \equiv 0$.

3.ª *Todo núcleo simétrico tiene a lo menos una constante propia.* Este enunciado equivale al ; *La resolvente de un núcleo simétrico tiene siempre un polo;* y al ; *En el caso simétrico hay siempre un valor de* λ *que anula a* $D(\lambda)$.

Bastará para demostrarlo probar que la serie

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \lambda^r \int_a^b S_{r+1}(xx) \, dx = - \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} \qquad (33),$$

tiene un radio de convergencia finito, pues siendo $D(\lambda)$ y su primera derivada funciones enteras el λ el valor finito que haga divergente la serie (33) será un cero de $D(\lambda)$.

(*) Se llama *aproximación* la integral doble entre a y b respecto a x e y del cuadrado de la diferencia entre la función propuesta y su valor aproximado.

En efecto, la serie (33) equivale a la $\sum_{r=0}^{r=\infty} \lambda_r S_{r+1}$ (33'), recordando (12). Aplicando la desigualdad de Schwarz se halla

$$\left[\int_a^b \int_a^b S_{n-1}(xy)\, S_{n+1}\, xy)\, dx\, dy\right]^2 \leq$$

$$\leq \int_a^b \int_a^b \left[S_{n-1}(xy)\right]^2 dx\, dy . \int_a^b \int_a^b \left[S_{n+1}(xy)\right]^2 dx\, dx$$

o sea $S_{2n} \leq S_{2n-2}\, S_{2n+2}$, de donde $\frac{S_{2n+2}}{S_{2n}} \lambda^2 \geq \frac{S_4}{S_2} \lambda^2$, luego para $(\lambda) > \sqrt{\frac{S_2}{S_4}}$ valor perfectamente finito, $\frac{S_{2n+2}}{S_{2n}} \lambda^2 > 1$; el primer miembro de esta desigualdad es la razón de los dos términos generales consecutivos de lugar par de la serie (33'); lo que nos dice que el término general no tiende a cero para el valor de λ de módulo finito $\sqrt{\frac{S_2}{S_4}}$, este valor hace, pues, a la serie divergente, y $D(\lambda)$ se anula por lo menos una vez.

Corolarios.— *Un núcleo simétrico tiene a lo menos una función propia. Dos funciones propias de un núcleo simétrico correspondientes a constantes propias distintas son ortogonales.* Pues las funciones φ y ψ del caso general coinciden.

4.ª *Todas sus constantes propias son reales.*—En efecto, si una de ellas fuese compleja de la forma $\lambda' + i\,\lambda''$ tendríamos, designando por $u_1(x) + i\,u_2(x)$ una de sus funciones propias correspondientes

$$u_1(x) + i\,u_2(x) = (\lambda' + i\,\lambda'') \int_a^b S(xy)\, u_1(y) + i\,u_2(y)\big]\, dy,$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} u_1(x) &= \lambda' \int_a^b S(xy)\, u_1(y)\, dy - \lambda'' \int_a^b S(xy)\, u_2(y)\, dy \\ u_2(x) &= \lambda'' \int_a^b S(xy)\, u_1(y)\, dy + \lambda' \int_a^b S(xy)\, u_2(y)\, dy \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$u_1(x) - i\,u_2(x) = (\lambda' - i\,\lambda'') \int_a^b S(xy) \left[u_1(y) - i\,u_2(y)\right] dy,$$

y siendo por esta última igualdad $u_1(x) + i\,u_2(x)$ función propia de $S(xy)$ correspondiente a la constante propia $\varphi' - i\,\lambda''$ se tendría

$$\int_a^b \left[u_1(x) + i\,u_2(x)\right] \left[u_1(x) - i\,u_2(x)\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[u_1^2(x) + u_2^2(x)\right] dx = 0,$$

y por tanto $u_1(x) = u_2(x) = o$. El núcleo $S(xy)$ no tiene, pues, constantes propias imaginarias.

5.ª *Las constantes propias de un núcleo simétrico son polos simples de su resolvente.* Sea λ_1 una constante propia; para demostrar que es polo simple bastará probar que el núcleo parcial $\sigma_1(xy)$ correspondiente se reduce a $\dfrac{\pi_1(xy)}{\lambda_1}$, o sea que $\pi_m(xy) = o$, si $m > 1$.

Tomemos las fórmulas análogas a las dos primeras del sistema (o).

$$\pi_{m-1}(xy) = \lambda_1 \int_a^b S(xz)\, \pi_{m-1}(zy)\, dz -$$

$$-\int_a^b S(xz)\, \pi_m(zy)\, dz$$

$$\pi_m(xy) = \lambda_1 \int_a^b S(xz)\, \pi_m(zy)\, dz.$$

De ellas se obtiene fácilmente la

$$\lambda_1 \int_a^b \int_a^b S(xz)\, \pi_m(zy)\, \pi_{m-1}(zy)\, dxdy -$$

$$\lambda_1 \int_a^b \int_a^b S(xz)\, \pi_{m-1}(zy)\, \pi_m(xy)\, dzdx +$$

$$+\int_a^b \pi_m(xy) \left[\int_a^b S(xz)\, \pi_m(zy)\, dz \right] dx = o.$$

Los dos primeros términos se destruyen por tener el mismo valor, y queda $\int_a^b \pi_m(xy) . \dfrac{\pi_m(xy)}{\lambda_1} dx = o$, lo que exige $\pi_m(xy) = o$.

Extendiendo la noción de función propia llamaremos sistema de funciones propias correspondientes al polo λ' a cualquier sistema de K funciones linealmente independiente deducido del de las funciones φ_{m_1} $(m = 1, 2, \cdots K)$ por combinaciones lineales. Formando, pues, para cada constante propia del núcleo un sistema ortogonal de funciones propias, tendremos en virtud de un corolario de la propiedad 3.ª: *Todas las funciones propias de un núcleo simétrico forman un sistema ortogonal.*

La relación (27) que limita el número de funciones propias correspondientes a un polo se reduce a $K < l$ (*).

También se puede hallar fácilmente otro límite superior de K. Pues formando las funciones propias correspondientes al polo λ_1 un sistema ortogonal, la desigualdad de Bessel nos da

(*) D. Hilbert ha llegado a probar la igualdad de los números K y l.

$$\int_a^b S^2(xy)\,dy \geq \sum_{m=1}^{m=K}\left[\int_a^b S(xy)\,\varphi_m(y)\,dy\right]^2 \quad \text{o bien}$$

$$\int_a^b S^2(xy)\,dy \geq \frac{1}{\lambda_1^2}\sum_{m=1}^{m=K}\left[\varphi_m(\varphi)\right]^2,$$

de donde

$$\int_a^b\int_a^b S^2(xy)\,dx\,dy \geq \frac{K}{\lambda_1^2}\text{; luego}$$

$$K \leq \lambda_1^2 \int_a^b\int_a^b S^2(xy)\,dxdy\,.$$

6.ª *Si* λ_1, $\lambda_2 \cdots \lambda_n \cdots$ *son las constantes propias del núcleo* S (xy), *sus potencias* m^{mas} λ_1^m, $\lambda_2^m \cdots \lambda_n^m \cdots$ *serán todas y las únicas constantes propias del núcleo iterado* S_m (xy); *ambos núcleos tienen las mismas funciones propias.* Este teorema resulta evidente, demostrados el siguiente y su recíproco:

Si $u_1(x)$ *es una función propia del núcleo* S (xy) *correspondiente al polo* λ_1, *también lo es del* S_m (xy) *correspondiente al polo* λ_1^m. En efecto, de

$$u_1(x) = \lambda_1 \int_a^b S(xy)\,u_1(y)\,dy\,, \qquad \text{se deducen}$$

inmediatamente, por sustitución reiterada,

$$u_1(x) = \lambda_1^2 \int_a^b S_2(xy)\,u_1(y)\,dy\,, \ldots\ldots u_1(x) =$$

$$= \lambda_1^m \int_a^b S_m(xy)\,u_1(y)\,dy\,.$$

Recíprocamente, *si* u *es una constante propia del núcleo* S_m (xy), *los valores reales de* $\sqrt[m]{\mu}$ *son constantes propias del* S (xy). En efecto, por hipótesis

$$u_1(x) = \mu \int_a^b S_m(xy)\,u_1(y)\,dy. \quad (t)$$

Sean v_ν ($\nu = 1, 2 \cdots m$) las raíces m^{mas} de μ, formemos la función

$$v_\nu(x) = \frac{1}{m}\left[u_1(x) + \lambda_\nu \int_a^b S_1(xy)\,u_1(y)\,dy + \cdots\cdots + \right.$$

$$\left. + \lambda_\nu^{m-1}\int S_{m-1}(xy)\,u_1(y)\,dy \right] \quad (t')$$

de donde $\sum_{\nu=1}^{\nu=m} v_\nu(x) = u_1(x)$, pues los coeficientes de las integrales resultan ser las funciones simétricas simples de las raices de la ecuación $\lambda_\nu^m = \mu$.

De la relación (ι') se deduce

$$\lambda_\nu \int_a^b S(xy)\, \upsilon_\nu(y)\, dy = \frac{1}{m}\Big[\lambda_\nu \int_a^b S(xy)\, u_1(y)\, dy +$$

$$\lambda_\nu^2 \int_a^b S_2(xy)\, u_1(y)\, dy + \ldots\ldots + \lambda_\nu^m \int_a^b S_m(xy)\, u_2(y)\, dy\Big],$$

que se convierte, recordando las (t) y (t') en

$$\upsilon_\nu(x) = \lambda_\nu \int_a^b S(xy)\, \upsilon_\nu(y)\, dy. \qquad (\iota'')$$

Luego las funciones $\upsilon_\nu(x)$ correspondientes a valores reales de λ_ν son funciones propias del núcleo $S(xy)$ y por tanto $u_1(x)$ también lo será. Si m es par el núcleo $S(xy)$ tendrá dos constantes propias iguales y de signo contrario por cada una que tenga $S_m(xy)$; y una sola si m es impar.

Cálculo de las constantes propias de un núcleo simétrico.— Las simplificaciones a que da lugar la simetría del núcleo permiten resolver este problema por un procedimiento directo de aproximaciones sucesivas.

El núcleo iterado de segundo orden $S_2(xy)$ tendrá todas sus constantes propias positivas; sean éstas colocadas en orden creciente $\mu_1, \mu_2 \cdots$. Designemos por $K_1, K_2 \cdots$ sus respectivos grados de multiplicidad como raices de la ecuación $D(\mu) = o$; ésta será de la forma

$$D(\mu) = \mu - \mu_1)^{K_1}\, (\mu - \mu_2\, K_2 \ldots\ldots \qquad (u)$$

La fórmula

$$-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \int_a^b R(xx\lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_a^b \lambda^n N_{n+1}(xx)\, dx$$

es ahora

$$-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mu_n S_{2n+2}.$$

Derivando logarítmicamente la relación (u) resulta

$$\frac{D'(\mu)}{D(\mu)} = \frac{K_1}{\mu - \mu_1} + \frac{K_2}{\mu - \mu_2} + \ldots,$$

luego

$$-\sum_{n=0}^{n=\infty} \mu^n S_{2n+2} = \frac{K_1}{\mu - \mu_1} + \frac{K_2}{\mu - \mu_2} + \ldots,$$

La expresión $-\sum_{n=0}^{n=\infty} \mu^n S_{2n+2} - \frac{K_1}{\mu - \mu_1}$, será finita para $\mu < \mu_1 + \alpha$, siendo α una cantidad suficientemente pequeña.

Teniendo en cuenta que

$$-\frac{1}{\mu-\mu_1} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2} \cdot \mu + \cdots\cdots$$

se halla

$$-\sum_{n=0}^{n=\infty} \mu^n S_{2n+2} - \frac{K_1}{\mu-\mu_1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[-S_{2n+2} + \frac{K_1}{\mu_1^{n+1}} \right] \mu^n,$$

serie que será convergente para $\mu = \mu_1 + \alpha$, luego su término general tenderá a cero

$$\mu_1 - \alpha)^n \left[-S_{2n+2} + \frac{K_1}{\mu_1^{n+1}} \right] = \beta_n, \ \lim_{n=\infty} \beta_n = o.$$

Despejando S_{2n+2} se halla

$$S_{2n+2} = \frac{K_1}{\mu_1^{n+1}} - \frac{\beta_n}{(\mu_1+\alpha)^n} = \frac{K_1}{\mu_1^{n+1}} \left[1 - \frac{\beta_n}{K_1} \left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\alpha} \right)^n \mu_1 \right] =$$

$$= \frac{K_1}{\mu_1^{n+1}} [1 - \Upsilon_n], \ (u')$$

en que $\lim_{n=\infty} \Upsilon n = o$. Dando en (u') a n sucesivamente los valores $2n-1$ y $n-1$ resultan las relaciones

$$S_{4n} = \frac{K_1}{\mu_1^{2n}} [1 - \Upsilon_{2n-1}], \ S_{2n} = \frac{K_1}{\mu_1^{n}} [1 - \gamma_{n-1}],$$

de donde

$$\mu_1^n = \frac{S_{2n}}{S_{4n}} \cdot \frac{1 - \Upsilon_{2n-1}}{1 - \Upsilon_{n-1}} = \frac{S_{2n}}{S_{4n}} \cdot [1 - \Upsilon] \lim_{n=\infty} \Upsilon = o,$$

que nos da para μ_1 la serie de valores aproximados

$$\sqrt{\frac{S_4}{S_8}}, \ \sqrt[3]{\frac{S_6}{S_{12}}}, \ \sqrt[n]{\frac{S_{2n}}{S_{4n}}}, \cdots\cdots$$

Hallado μ_1, de la relación (u') se deduce $K_1 = \lim_{n=\infty} \left[S_{2n+2} \mu^{n+1} \right]$ que nos permite calcular el grado de multiplicidad K_1 de μ_1 por aproximaciones sucesivas.

Para calcular μ_2 consideraremos análogamente que la serie

$$-\sum_{n=0}^{n=\infty} S_{2n+2} \mu^n - \frac{K_1}{\mu - \mu_1} - \frac{K_2}{\mu - \mu_2}$$

es finita para el valor $\mu = \mu_2 + \alpha'$ siendo α' suficientemente pequeña; y siguiendo idéntica marcha llegaremos a las fórmulas

$$\mu_2 = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{S_{2n} - \dfrac{K_1}{\mu_1^{\,n}}}{S_{4n} - \dfrac{K_1}{\mu_1^{\,2n}}}},$$

$$K_2 = \lim_{n-\infty} \left[\left(S_{2n+2} - \frac{K_1}{\mu_1^{\,n+1}} \right) \mu_2^{\,n+1} \right];$$

y finalmente en general

$$\mu_p = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{S_{2n} - \dfrac{K_1}{\mu_1^{\,n}} - \dfrac{K_2}{\mu_2^{\,n}} - \dots - \dfrac{K_{p-1}}{\mu^n_{\ p-1}}}{S_{4n} - \dfrac{K_1}{\mu_1^{\,2n}} - \dfrac{K_2}{\mu_2^{\,2n}} - \dots - \dfrac{K_{p-1}}{\mu^{2n}_{\ p-1}}}},$$

$$K_p = \lim_{n=\infty} \left[\left(S_{2n+2} - \frac{K_1}{\mu_1^{\,n+1}} - \dots - \frac{K_{p-1}}{\mu^{n+1}_{p-1}} \right) \mu_p^{\,n+1} \right],$$

Las raíces cuadradas de los valores hallados $\mu_1 \cdots \mu_p$ serán las constantes propias del núcleo $S\,(xy)$.

Desarrollo del núcleo simétrico en serie de sus funciones propias.—Sean éstas φ_{K}, $(K=1, 2 \dots n)$ que forman un sistema ortogonal. Escribamos la relación

$$S\,(xy) = \sum_{K=1}^{K=n} c_K\, \varphi_K\,(x),$$

de donde

$$c_K = \int_a^b (xy)\, \varphi_K\,(x)\, dx = \frac{\varphi_K\,(y)}{\lambda_K},\ (K = 1\ 2 \dots n)$$

y por tanto

$$S\,(xy) = \sum_{K=1}^{K=n} \frac{\varphi_K\,(x)\, \varphi_K\,(y)}{\lambda_K}, \qquad (34)$$

que es el desarrollo buscado.

El número n puede ser finito o infinito; la serie será, pues, limitada o ilimitada; vamos a demostrar que si tiene un número finito de términos o es uniformemente convergente representa el núcleo $S\,(xy)$, probando que en ambos casos la función $F\,(xy)$ definida por la igualdad,

$$(x)\quad F\,(xy) = S\,(xy) - \sum_{K=1}^{K=n} \frac{\varphi_K\,(x)\, \varphi_K\,(y)}{\lambda_K} \text{ es idénticamente nula.}$$

En efecto, $F(xy)$ es simétrica y ortogonal a todas las funciones propias de $S(xy)$, como se deduce fácilmente de (x); luego no siendo idénticamente nula, podría, tomada como núcleo, admitir una función propia ψ correspondiente a una constante propia tal que

$\psi(x) = \eta \int_a^b F(xy)\,\psi(y)\,dy$, (x'), de donde $\int_a^b \psi(x)\,\varphi_K(x)\,dx =$ $= 0$, $(K = 1, 2, \ldots n)$ (x'') y combinando (x') y (x'') $\psi(x) =$ $= \eta \int_a^b S(xy)\,\psi(y)\,dy$, luego $\psi(x)$ es solución de la ecuación *integral* homogénea $u(x) = \eta \int_a^b S(xy)\,u(y)\,dy$, y por tanto se expresa linealmente en función de un cierto número P de funciones propias φ_q

$\psi(x) = \sum_{r=1}^{r=P} a_r \varphi_{q1}(x)$, de donde $\int_a^b \psi(x)\,\psi_{qr}(x)\,dx = a_r =$ $= 0$, $(r = 1, 2 \ldots p)$, luego $\psi(x) = 0$, y $F(xy) = 0$.

Observación.—En el desarrollo (34) hay tantos términos como funciones propias tiene $S(xy)$, de modo que cada constante propia figura como denominador un número de veces igual a su índice, o sea a su grado de multiplicidad como cero de $D(\lambda)$.

Las propiedades explicadas de los núcleos iterados nos conducen inmediatamente al desarrollo general

$$S_n(xy) = \sum_K \frac{\varphi_K(x)\,\varphi_K(y)}{\lambda_K^n}, \quad (35)$$ cuya convergencia absoluta y uniforme en el cuadrado ab ha sido demostrada por Kowalewski para $n \geq 2$. Nos abstenemos de dar dicha demostración por fundarse en conocimientos no explicados aquí, y no necesitar para las aplicaciones contenidas en este trabajo más que asegurar la convergencia de la serie $S_4(xy) = \sum_K \frac{\varphi_K(x)\,\varphi_K(y)}{\lambda_K^n}$, que es fácilmente demostrable. Observemos además que con ello quedará probada la convergencia absoluta y uniforme del desarrollo (35) para $n > 4$.

Solución de la ecuación integral regular de segunda especie de núcleo simétrico representable por la serie de sus funciones propias (34).—La fórmula (15) que da la solución en el caso general, es susceptible de simplificación si el núcleo es simétrico.

Calculemos las series $D(\lambda)$ y $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \lambda\right)$ teniendo en cuenta las propiedades del núcleo $S(xy)$.

La determinante del término general $D(\lambda)$, es ahora $\delta_n = | S(x_1 x_1)\ S(x_2 x_2) \dots S(x_n x_n) |$. (36) o bien $d_n = | \varphi_{11}\, \varphi_{22} \dots \varphi_{nn} |$,

$$\text{en que } \varphi_{pq} = S(x_p x_q) = \sum_K \frac{\varphi_K(x_p)\, \varphi_K(x_q)}{\lambda_K}$$

Al calcular la integral

$$\Delta_n = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \delta_n \, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \sum \pm \varphi_{11}\, \varphi_{22} \dots \varphi_{nn}\, dx_1\, dx_2\, dx_n$$

podemos descomponer, la integral de cada término del desarrollo de δ_n en un producto de integrales de la forma

$$\int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \varphi_{p_1 p_2}\, \varphi_{p_2 p_3} \dots \varphi_{p_{r-1} p_r}\, \varphi_{p_r p_1}\, dx_{p_1}\, dx_{p_2} \dots dx_{p_r}.$$

en que los subíndices de las φ_{pq} forman ciclos de un cierto número de letras, como ya hicimos al obtener el desarrollo en serie de la función $R(x\ y\ \lambda)$. El valor de cada uno de estos factores, dependiente tan sólo del número r, será ahora $\sum_K \frac{1}{\lambda_K^r}$.

Para demostrarlo basta sustituir por cada φ_{pq} su desarrollo (36') y tener en cuenta que las funciones φ_K forman un sistema ortogonal. En particular si $r = 1$

$$\int_a^b \varphi_{pp}\, dx_p = \sum_K \int_a^b \frac{\varphi_K^2(x_p)}{\lambda_K}\, dx_p = \sum_K \frac{1}{\lambda_K}.$$

La integral del término principal de Δ_n será, pues,

$$\int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \varphi_{11}\, \varphi_{22} \dots \varphi_{nn}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \left[\sum_K \frac{1}{\lambda_K} \right]^n;$$

y la de un término que contenga a_1 ciclos de una letra, a_2 de dos....

$$\left[\sum_K \frac{1}{\lambda_K} \right]^{a_1} \left[\sum_K \frac{1}{\lambda_K^2} \right]^{a_2} \dots,$$

verificándose la relación $a_1 + 2\, a_2 + \dots = n$.

Tomando todos los términos del desarrollo de δn con su signo correspondiente e integrándolos al desarrollar las Σ resultantes y efectuar la reducción, queda únicamente el último término del desarrollo de la integral de la diagonal principal, que es

$$\sum \frac{n!}{\lambda_{l_1} \lambda_{l_2} \cdots \lambda_{l_n}} \quad (36''),$$

en que los subíndices $l_1\ l_2 \ldots l_n$, forman una de las $\binom{K}{n}$ combinaciones de orden n^{mo} de los números $1, 2 \ldots K$ (*).

Luego $\Delta_n = \sum \frac{n!}{\lambda_{l_1} \lambda_{l_2} \cdots \lambda_{l_n}}$, de donde

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!} 1! \sum_K \frac{1}{\lambda_K} + \cdots +$$

$$+ \frac{(-\lambda)^n}{\lambda!} n! \sum \frac{1}{\lambda_{l_1} \lambda_{l_2} \cdots \lambda_{l_n}} + \cdots$$

o sea

$$D(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_K}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \cdots =$$

$$= \prod_K \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_K}\right), \quad (37)$$

fórmula en que aparecen explícitos los ceros de $D(\lambda)$.

Calculemos análogamente $D\left(\frac{x}{y} \lambda\right)$. Se vé inmediatamente que desarrollando la determinante de su término general

$$\frac{(-\lambda)^n}{n!} \Delta_n (xy), \quad \text{por los elementos de}$$

su primera fila se reduce dicha determinante a $S(xy) \cdot d_n$, pues las menores de los restantes elementos de la primera fila son nulas por tener dos columnas iguales. Se exceptúa el segundo término $-\lambda\, \Delta_1 (xy)$ que vale

(*) Consideramos demostrado este aserto, a lo menos intuitivamente, para n cualquiera, por haberlo comprobado para $n=2, 3, 4, 5$ y 6, y depender de la ley de desarrollo de una determinante y de la fórmula de Leibnitz, ambas enteramente generales; además, se ve directamente que el término (36'') es el único del desarrollo total que no tiene semejante.

La única demostración directa del caso general que conocemos, dada recientemente por Proszynski nos parece harto obscura y discutible.

$$-\lambda \int_a^b S\begin{pmatrix} x & x_1 \\ y & x_1 \end{pmatrix} dx_1 = -\lambda S(xy)\,\delta_1 + \lambda S_2(xy) = -$$

$$-\sum_K \frac{\varphi_K(x)\,\varphi_K(y)}{\lambda_K} \sum_K \frac{1}{\lambda_K} +$$

$$+\lambda \sum_K \frac{\varphi_K(x)\,\varphi_K(y)}{\lambda_K^2} = -\lambda \sum_l{}' \frac{1}{\lambda_l} \sum_K \frac{\varphi_K(x)\,\varphi_K(y)}{\lambda_K};$$

en que, como en otra ocasión $\sum'$ indica que l toma todos los valores menos el K.

El desarrollo de $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\lambda\right)$ será por tanto

$$D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\lambda\right) = \sum \frac{\varphi_K(x)\,\varphi_K(y)}{\lambda_K} - \lambda \sum_l{}' \frac{1}{\lambda_l} \sum_K \frac{\varphi_K(x)\,\varphi_K(y)}{\lambda_K} + \ldots +$$

$$+ (-\lambda)^n \sum \frac{1}{\lambda_{l_1}\lambda_{l_2}\ldots\lambda_{l_n}} \sum_K \frac{\varphi_K(x)\,\varphi_K(y)}{\lambda_K} + \ldots\ldots =$$

$$= \sum_K \prod_K{}' \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\right) \frac{\varphi_K(x)\,\varphi_K(y)}{\lambda_K}, \qquad (38)$$

en que $\prod_l{}'$ indica falta en el producto el factor $1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_K}$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula (15) resulta

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda \sum_K \prod_l{}' \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\right) \frac{\varphi_K(x)}{\lambda_K} \int_a^b \varphi_K(y)\, f(y)\, dy}{\prod_l \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\right)}$$

y simplificando

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_K \frac{\varphi_K(x)}{\lambda_K - \lambda} \int_a^b \varphi_K(y)\, f(y)\, dy, \qquad (39)$$

que es el llamado desarrollo de Schmidt, de gran aplicación en los problemas de resonancia, y que comprobaremos en la tercera parte como ejemplo del importantísimo problema: *Desarrollo de una función que cumple ciertas condiciones según las funciones propias de un núcleo simétrico.*

Casos particulares.—Un núcleo simétrico se llama *completo* si lo es su sistema ortogonal de funciones propias, o sea si

$\int_a^b \varphi_K(x)\, f(x)\, dx \mp 0$ $(K = 1, 2 \cdots)$, siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $a \cdots b$ cualquiera.

Un núcleo simétrico completo $S\,(xy)$ cumple la relación (40) $\int_a^b S\,(xy)\, f\,(y)\, dy \neq o$, que se deduce fácilmente de las K relaciones de definición. Dicho núcleo tiene infinitas constantes propias, pues su sistema ortogonal consta necesariamente de un número infinito de funciones.

Núcleo simétrico *definido* es el que cumple la relación análoga a (40)

$$\int_a^b \int_a^b S\,(xy)\, f\,(x)\, f\,(y)\, dx\, dy \neq o. \qquad (41)$$

Dicho núcleo es evidententemente completo.

Sus constantes propias son todas del mismo signo.—En efecto, si hubiese dos λ_m y λ_n de signo contrario, tomando $f\,(x) = a_m\, \varphi_m\,(x) + a_n\, \varphi_n\,(x)$ resultaría

$$\int_a^b \int_a^b S\,(xy)\, f(x)\, f\,(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_a^b \frac{a_m^2\, \varphi_m^2\,(x)}{\lambda_m}\, dx + \int_a^b \frac{a_n^2\, \varphi_n^2\,(x)}{\lambda_n}\, dx =$$

$$= \frac{a_m^2}{\lambda_m} + \frac{a_n^2}{\lambda_n},$$ (42), y escogiendo a_m y a_n tales que

$$\frac{a_m^2}{\lambda_m} + \frac{a_n^2}{\lambda_n} = o,$$ el núcleo no sería definido.

Si $\int_a^b \int_a^b S\,(xy)\, f\,(x)\, f\,(y)\, dx\, dy > o$, el núcleo se llama *positivo*, por serlo todas sus constantes propias, como se deduce fácilmente de (42); y *negativo* en el caso contrario.

Los núcleos iterados de un núcleo simétrico completo son definidos, y los de orden par son positivos, propiedades ambas de comprobación inmediata.

NÚCLEO PSEUDO-SIMÉTRICO (*)

Llamaremos así al núcleo $P\,(xy) = -P\,(yx)$. (43)

Los núcleos pseudo-simétricos gozan de las siguientes propiedades, cuyas demostraciones no damos por su analogía con las correspondientes en el caso simétrico.

Los núcleos iterados de orden par son simétricos.

Sus constantes propias son todas imaginarias puras y polos de primer orden de la función resolvente.

(*) Simétrico *alabeado*, según Lalesco. Nuestra denominación está de acuerdo con la de las determinantes de los términos de las series $D\left(\frac{x}{y}\, \lambda\right)$ y $D\,(\lambda)$, que son en este caso pseudosimétricas.

Tienen por lo menos dos constantes propias. Pues una vez probado que el núcleo $P(xy)$ admite la constante propia $i\lambda'$ con la función propia $\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$, es evidente admite la $-i\lambda'$ con la función propia $\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)$.

TERCERA PARTE

APLICACIONES

Desarrollos en serie de funciones propias.

Uno de los problemas más importantes del Análisis, es la representación analítica de las funciones por medio de series.

A los distintos procedimientos existentes, válidos únicamente para porciones restringidas del plano de representación, o aplicables tan sólo a funciones que cumplan ciertas condiciones, como son la representación por series trigonométricas de Fourier, de funciones de Bessel, de funciones esféricas ···, debemos añadir otro, más amplio que todos ellos, basado en la teoría de las ecuaciones integrales.

Este método de representación no es tampoco enteramente general; pero las series a que conduce son siempre uniformemente convergentes, y la función propuesta debe cumplir únicamente la condición expresada por el teorema siguiente: *Toda función* F (x) *transformada integral lineal de núcleo simétrico* S (xy) *de una función continua cualquiera* f (x), *es decir, tal que* $F(x) = \int_a^b S(xy)\, f(y)\, dy$, (45) *es desarrollable en serie absoluta y uniformemente convergente de las funciones propias del núcleo* S (xy), *de forma análoga á las series de Fourier.*

Para demostrarlo es preciso anteponer los siguientes lemas:

Lema 1° *La serie ilimitada del núcleo iterado de cuarto orden* $S_4(xy)$ *converge siempre absoluta y uniformemente.* En efecto, tomando m términos del resto de dicha serie, se tiene

$$R_n(m) = \sum_{K=n}^{K=n+m} \frac{\varphi_K^2(x)}{\lambda_K^2} \cdot \frac{\varphi_K^2(y)}{\lambda_K^2} \leq$$

$$\leq \sum_{K=n}^{K+n=m} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left[\frac{\varphi_K^2(x)}{\lambda_K^2} + \frac{\varphi_K^2(y)}{\lambda_K^2} \right] \qquad (A)$$

Colocadas las constantes propias en orden creciente, λ_n será la menor de las que figuran en la suma (A), y por tanto

$$\left[R_n(m) \leq \right] \frac{1}{2\lambda_n^2} \left[\sum_{K=m}^{K=n+m} \frac{\varphi_K^2(x)}{\lambda_K^2} + \sum_{R=n}^{K=n+m} \frac{\varphi_K^2(y)}{\lambda_K^2} \right].$$

Pero por la desigualdad de Bessel

$$\int_a^b S_2\,(xy)\,dy \leq \sum_{K=m}^{K=n+m} \frac{\lambda_K^2(x)}{\lambda_K^2}\,,\ \text{luego}$$

$$R_n\,(m) \leq \frac{1}{\lambda_n^2} \int_a^b S^2\,(xy)\,dx. \qquad (B)$$

La relación (B) prueba que $R_m\,(m)$ tiende á cero, independientemente del número m de términos que la forman, al crecer n indefinidamente; la proposición está demostrada.

Lema 2.° *Toda función ortogonal de núcleo* S (xy), *lo es también á sus funciones propias.*—Es decir si

$$\int_a^b S\,(xy)\,f\,(y)\,dy = o,\ \text{se tiene} \int_a^b \lambda_K\,(y)\,f\,(y)dy = o\,(K = 1, 2. \ .)$$

En efecto,

$$\int_a^b \varphi_K\,(y)\,f(y)\,dy = \lambda_K \int_a^b \varphi_K\,(x) \left[\int_a^b S(xy)\,\varphi_K(y)\,dy\right]dx = o.$$

Recíproco. *Una función* f (x) *ortogonal a todas las funciones propias del núcleo* S (xy), *lo es a éste.* En efecto, $f\,(x)$ es ortogonal a $S_4\,(xy)$, pues

$$\int_a^b\int_a^b S_4\,(xy)\,f\,(x)\,f\,(y)\,dx\,dy =$$

$$= \sum_K \int_a^b\int_a^b \varphi_K\,(x)\,\varphi_K\,(y)\,f\,(y)\,f\,(x)\,dx\,dy = o\,, \qquad (\varphi)$$

ya

$$S_2\,(xy) \qquad \text{ya que} \qquad S_4\,(xy) = \int_a^b S_2\,(xz)\,S_2\,(zy)\,dz,$$

y por tanto (C) da

$$\int_a^b \left[\int_a^b S_2\,(xz)\,f\,(x)\,dx\right]^2 dz = o,$$

de donde

$$\int_a^b S_2\,(xy)\,f\,(x)\,dx = o;$$

pero

$$S_2\,(xy) = \int_a^b S\,(xz)\,S\,(yz)\,dz,$$

luego finalmente

$$\int_a^b S\,(xy)\,f\,(x)\,dx = o.$$

Pasemos ahora a demostrar el teorema principal. El desarrollo de $F(x)$ en serie lineal de las funciones propias φ_K será, si existe, de la forma

$$\sum_K \varphi_K(x) \int_a^b F(y)\, \varphi_K(y)\, dy \qquad (44)$$

Dividiremos la demostración en dos partes: 1.ª *La serie* (44) *es absoluta y uniformemente convergente*. En efecto,

$$\sum_K \varphi_K(x) \int_a^b \varphi_K(y)\, F(y)\, dy =$$

$$= \sum_K \int_a^b \frac{S(xz)\, \varphi_K(z)\, dz}{\lambda_V} \int_a^b \varphi_K(y) \left[\int_a^b S(yt)\, f(t)\, dt \right] dy =$$

$$= \sum_K \int_a^b S(xz)\, \varphi_K(z)\, dz \int_a^b f(t)\, \varphi_K(t)\, dt; \qquad (D)$$

bastará, pues, probar la convergencia absoluta y uniforme de la serie (D).

Tomando m términos de su resto se tiene, empleando una notación ya conocida,

$$R_n(m) = \int_a^b \left[\sum_{K=n}^{K=n+m} \varphi_K(y) \int_a^b f(t)\, \varphi_K(t)\, dt \right]$$

$$\left[\sum_{K=n}^{K=n+m} \varphi_K(y) \int_a^b S(xz)\, \varphi_K(z)\, dz \right] dy$$

elevado al cuadrado y aplicando la desigualdad de Schwarz

$$\left[R_n(m)^2 \right] \leq \underbrace{\int_a^b \left[\sum_{K=n}^{K=n+m} \varphi_K(y) \int S(t)\, \varphi_K(t)\, dt \right]^2 dy}_{\alpha} \cdot$$

$$\underbrace{\int_a^b \left[\sum_{K=n}^{K=n+m} \varphi_K(y) \int_a^b S(xz)\, \varphi_K(z)\, dz \right]^2 dy}_{\beta} \qquad (E)$$

Pero

$$\alpha = \sum_{K=n}^{K=n+m} \left[\int_a^b f(t)\, \varphi_K(t)\, dt \right]^2, \text{ y } \beta =$$

$$= \sum_{K=n}^{K=n+m} \left[\int_a^b S(xz)\, \varphi_K(x)\, dz \right]^2 \leq \int_a^b S^2(xz)\, dz$$

luego

$$\left[R_n(m) \right]^2 \leq \left[\sum_{K=n}^{K=n+m} \left[\int_a^b f(t)\, \varphi_K(t)\, dt \right]^2 \right] \cdot$$

$$\int_a^b S^2(xz)\, dz \qquad (E')$$

Mas la serie

$$\sum_{K} \left[\int_{a}^{b} f(t)\, \varphi_K(t)\, dt \right]^2$$

es convergente, según la desigualdad de Bessel, y el segundo factor de (E') es finito, luego $\lim\limits_{n=\infty} R_n(m) = 0$.

Las series (D) y (44) convergen, pues, absoluta y uniformemente.

2.ª *La serie* (44) *representa la función dada* $F(x)$. Bastará probar que la función $F_1(x)$ definida por la igualdad

$$F_1(x) = F(x) - \sum_{K} \varphi_K(x) \int_{a}^{b} F(y)\, \varphi_K(y)\, dy \qquad (F)$$

es idénticamente nula; en efecto, de (F) se deduce

$$\int_{a}^{b} F_1(x)\, \varphi_l(x)\, dx = \int_{a}^{b} F(x)\, \varphi_l(x) -$$

$$\sum_{K} \int_{a}^{b} \varphi_K(x)\, \varphi_l(x)\, dx \int_{a}^{b} F(y)\, \varphi_K(y)\, dy =$$

$$= 0 \quad (l = 1, 2 \ldots) \quad (G)$$

y por el recíproco del segundo lema $\int_{a}^{b} F_1(x)\, S(xy)\, dx = 0 \; (G')$

Multiplicando la igualdad (F) por $F_1(x)$ e integrando, resulta, teniendo en cuenta (G) y (G') $\int_{a}^{b} F_1^2(x)\, dx = 0$ (H).

Siendo, pues, la función $F_1(x)$ idénticamente nula, queda completamente probado el desarrollo

$$F(x) = \sum_{K} \varphi_K(x) \int_{a}^{b} F(y)\, \varphi_K(y)\, dy \qquad (45')$$

que puede darse también bajo la forma, deducida de (D)

$$F(x) = \sum_{K} \frac{\varphi_K(x)}{\lambda_K} \int_{a}^{b} f(x)\, \varphi_K(x)\, dx \qquad (45'')$$

Ejemplo: *Desarrollo de la solución de la ecuación integral regular* $u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} S(xy)\, u(y)\, dy$ (46), *según las funcianes propias de su núcleo*. Escribiendo la ecuación (46) en la forma $u(x) = f(x) + F(x)$, vemos que el desarrollo es posible por cumplir la función $F(x) = \lambda \int_{a}^{b} S(xy)\, u(y)\, dy$ (I) la condición (45).

Tomando la forma (45′) tendremos

$$u(x) = f(x) + \sum_{K} \varphi_K(x) \int_a^b F(y)\, \varphi_K(y)\, dy \qquad (I')$$

Para determinar los coeficientes

$$\int_a^b F(y)\, \varphi_K(y)\, dy \quad (K = 1, 2 \ldots) .$$

multipliquemos la relación deducida de (I)

$$F(x) = \lambda \int_a^b S(xy) \left[f(y) + F(y) \right] dy, \text{ por } \varphi_K(y)$$

e integremos, resulta

$$\int_a^b F(x)\, \varphi_K(x)\, dx = \int_a^b F(y)\, \varphi_K(y)\, dy =$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_K} \int_a^b f(y)\, \varphi_K(y)\, dy + \frac{\lambda}{\lambda_K} \int_a^b F(y)\, \varphi_K(y)\, dy,$$

de donde

$$\int_a^b F(y)\, \varphi_K(y)\, dy = \frac{\lambda}{\lambda_K - \lambda} \int_a^b f(y)\, \varphi_K(y)\, dy \quad (K = 1, 2 \ldots)$$

valores que sustituídos en (I′) dan

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{K} \frac{\varphi_K(x)}{\lambda_K - \lambda} \int_a^b f(y)\, \varphi_K(y)\, dy \qquad (47)$$

resultando ya hallado anteriormente por un procedimiento directo.

El desarrollo (47) deja de ser válido si el parametro λ es igual a una de las constantes propias λ' del núcleo $S(xy)$, en cuyo caso, recordando la teoria expuesta en la primera parte, es fácil ver que sólo habrá solución si $f(x)$ es ortogonal a las l funciones propias correspondientes a λ' y su forma general será si dichas l funciones son

$$\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2} \ldots, \varphi_{n+l} .$$

$$\left. \begin{aligned} u(x) = f(x) + c_1 \varphi_{n+1}(x) + c_2 \varphi_{n+2}(x) + \ldots + \\ c_l \varphi_{n+l}(x) + \sum_{\substack{K = n+l+1 \ldots \\ K = 1, 2, \ldots n}} \frac{\lambda}{\lambda_K - \lambda} \int_a^b f(y)\, \varphi_K(y)\, dy \end{aligned} \right\} (48)$$

dependiente de l constantes arbitrarias.

Este método de representación es extensible al caso en que la función propuesta sea transformada integral lineal de núcleo disimétrico de una función dada continua cualquiera.

Consideremos un núcleo $N(xy)$ limitado e integrable, llamaremos a $N(xy)$ y a $N(yx)$ *forma directa é inversa* del mismo.
Formemos los núcleos evidentemente simétricos

$$\underline{S}(xy) = \int_a^b N(xz)\, N(yz)\, dz \quad \bar{S}(xy) = \int_a^b N(zx)\, N(zy)\, dz, \quad (49)$$

que designaremos respectivamente con los nombres de *núcleo derivado simétrico directo e inverso* del $N(xy)$. Sean las constantes propias del núcleo $\underline{S}(xy)$ $\mu_1\, \mu_2 \ldots$, y sus funciones propias $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \ldots$, tendremos

$$\varphi_K(x) = \mu_K \int_a^b \underline{S}(xy)\, \varphi_K(y)\, dy \quad (K = 1, 2 \ldots) \quad (J)$$

Definamos un sistema de funciones $\psi_1(x)$, $\psi_2(x) \ldots$, por las relaciones

$$\psi_K(x) = \sqrt{\mu_K} \int_a^b N(yx)\, \psi_K(y)\, dy \quad (K = 1, 2, \ldots) \quad (J')$$

Combinando los sistemas (J) y (J') y acordando la fórmula (49) de definición del núcleo $\underline{S}(xy)$ resulta

$$\varphi_K(x) = \sqrt{\mu_K} \int_a^b N(xy)\, \varphi_K(y)\, dy \quad (K = 1, 2, \ldots) \quad (K)$$

y de (J) y (K)

$$\psi_K(x) = \mu_K \int_a^b \bar{S}(xy)\, \psi_K(y)\, dy \quad (K = 1, 2, \ldots) \quad (K')$$

Las funcionns $\psi_K(x)$ definidas por las relaciones (3') son, pues, las funciones propias del núcleo derivado simétrico inverso $\bar{S}(xy)$ correspondientes a las mismas constantes propias μ_K. *Sus cantidades* μ_K $(K = 1, 2 \ldots)$ *son positivas*. En efecto de las relaciones (J) se deduce

$$\int_a^b \varphi_K^2(x)\, dx = \mu_K \int_a^b \left[\int_a^b N(xz)\, \varphi_K(x)\, dx \right]^2 dz, \quad (K=1, 2 \ldots)$$

de donde

$$\mu_K = \frac{\int_a^b \varphi_K^2(x)\, dx}{\int_a^b \left[\int_a^b N(xz)\, \varphi_K(x)\, dx \right]^2 dz}$$

cantidad positiva.

Teorema. *Toda función continua* F (xy) *transformada integral lineal de la forma* $\left\{ \begin{matrix} directa \\ inversa \end{matrix} \right\}$ *del núcleo* N (xy), *es desarrollable en serie absoluta y uniformemente convergente de las funciones propias del núcleo derivado simétrico* $\left\{ \begin{matrix} directo \\ inverso \end{matrix} \right\}$ *del* N (xy), *de forma análoga a las series de Fourier*. La demostración de este doble teorema, basado en un lema idéntico al segundo del teorema anterior, es la misma que la de éste, por lo cual juzgamos innecesario el presentarla.

Asimismo el desarrollo del núcleo $N(xy)$ es $N(xy) =$

$$= \sum_{K} \frac{\varphi_K(x)\,\psi_K(y)}{\lambda_K} \qquad (50)$$

REPRESENTACIÓN APROXIMADA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Una función $F(xy)$ de dos variables, limitada e integrable, puede ser desarrollada de infinitas maneras en serie de la forma $\sum_{P} a_P(x)\, b_P(y)$ (L), pues basta escoger un sistema ortogonal cualquiera $b_P(y)$ $(P = 1, 2 \ldots)$ y desarrollar $F(xy)$ en serie lineal de las funciones que lo forman.

Ya definimos, al estudiar el núcleo bilineal, la aproximación en este problema; tratamos ahora de averiguar qué funciones representan más aproximadamente la dada, limitando los desarrollos (L) a sus m primeros términos. *Estas funciones son las propias de los núcleos derivados simétricos de la función dada, tomada por núcleo.*

En efecto, recordando el desarrollo (50) bastará que probemos la relación

$$\int_a^b\!\int_a^b \left[F(xy) - \sum_{K=1}^{K=m} \frac{\varphi_K(x)\,\psi_K(y)}{\sqrt{\mu_K}}\right]^2 dx\, d \leq$$

$$\leq \underbrace{\int_a^b\!\int_a^b \left[F(xy) - \sum_{K=1}^{K=m} a_K(x)\, b_K(y)\right]^2 dx\, dy}_{\gamma} \qquad (51),$$

siendo $a_K(x)$, $b_K(y)$ $(K = 1, 2 \cdots)$ funciones linealmente independientes cualesquiera, y formando las b_K un sistema ortogonal. La relación (51) equivale a la

$$\gamma \geq \int_a^b\!\int_a^b F^2(xy)\, dx\, dy - \sum_{K=1}^{K=m} \frac{15}{\mu_K}, \qquad (M)$$

hemos de probar esta última. Desarrollando su primer miembro resulta

$$\gamma = \int_a^b\!\int_a^b F^2(xy)\, dx\, dy + \int_a^b \sum_{K=1}^{K=m} a_K^2(x)\, dx -$$

$$- 2\int_a^b\!\int_a^b F(xy) \sum_{K=1}^{K=n} a_K(x)\, b_K(y)\, dx\, dy =$$

$$\left.\begin{aligned}
&= \int_a^b \int_a^b F^2(xy)\,dx\,dy + \\
&+ \sum_{K=1}^{K=m} \int_a^b \left[a_K(x) - \int_a^b F(xy)\, b_K(y)\, dy \right]^2 dx - \\
&- \sum_{K=1}^{K=m} \int_a^b \left[\int_a^b F(xy)\, b_K(y)\, dy \right]^2 dx
\end{aligned}\right\} \text{(N)}$$

Comparando las relaciones (M) y (N) se ve que aquélla equivale a la

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{K=1}^{K=m} \frac{1}{\mu_K} \geq \sum_{K=1}^{K=m} \int_a^b \left[\int_a^b F(xy)\, \lambda_K(y)\, dy \right]^2 dx - \\
&- \sum_{K=1}^{K=m} \int_a^b \left[a_K(x) - \int_a^b F(xy)\, b_K(y)\, dy \right]^2 dx ,
\end{aligned}\right\} \text{(O)}$$

que se verificará si

$$\sum_{K=1}^{K=m} \frac{1}{\mu_K} \geq \sum_{K=1}^{K=m} \int_a^b \left[\int_a^b F(xy)\, b_K(y)\, dy \right]^2 dx . \qquad \text{(P)}$$

De la igualdad $F(xy) = \sum\limits_K \dfrac{\varphi_K(x)\, \psi_K(y)}{\sqrt{\mu_K}}$, se deduce fácilmente

$$\int_a^b \left[\int_a^b F(xy)\, b_K(y)\, dy \right]^2 dx =$$

$$= \sum_K \frac{1}{\mu_K} \left[\int_a^b b_K(y)\, b_K(y)\, dy \right]^2 \qquad \text{(Q)}$$

o sea

$$\left.\begin{aligned}
&\int_a^b \left[\int_a^b F(xy)\, b_K(y)\, dy \right]^2 dx = \frac{1}{\mu_m} - \\
&- \sum_K \left[\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_K} \right] \left[\int_a^b b_K(y)\, \psi_K(y)\, dy \right] - \\
&- \left[1 - \sum_K \left[\int_a^b b_K(y)\, \psi_K(y)\, dy \right]^2 \right] \frac{1}{\mu_m}
\end{aligned}\right\}$$

El último paréntesis es nulo y el segundo término positivo, luego

$$\int_a^b \left[\int_a^b F(xy)\, b_K(y)\, dy\right]^2 dx \leq \frac{1}{\mu_m} \sum_{K=m}^{K=1} \left[\frac{1}{\mu_K} - \frac{1}{\mu_m}\right]$$

$$\left[\int_a^b b_K(y)\,\psi_K(y)\, dy\right]^2. \qquad (R)$$

La fórmula (P) quedará probada, si demostramos la

$$\sum_{K=1}^{K=m} \frac{1}{\mu_K} \geq \sum_{K=1}^{K=m} \left[\frac{1}{\mu_m} + \sum_{K=1}^{K=m} \left[\frac{1}{\mu_K} - \frac{1}{\mu_m}\right]\right.$$

$$\left.\left[\int_a^b b_K(y)\,\psi_K(y)\, dy\right]^2\right],$$

o su equivalente

$$\sum_{K=1}^{K=m}\left[\frac{1}{\mu_K} - \frac{1}{\mu_m}\right]\left[1 - \sum_{K=1}^{K=m}\left[\int_a^b b_K(y)\,\psi_K(y)\, dy\right]^2\right] \geq 0 \quad (S)$$

relación evidente, pues $\mu_K \leq \mu_m$ y

$$\sum_{K=1}^{K=m}\left[\int_a^b b_K(y)\,\psi_K(y)\, dy\right]^2 \leq \sum_K \left[\int_b^b b_K(y)\,\psi_K(y)\, dy\right]^1 = 1$$

Queda, pues, demostrado que las funciones propias de los núcleos derivados simétricos de la función dada, son las que la representan más aproximadamente, fijado el número de términos que toman del desarrollo (L.)

CONCLUSION

Al terminar este t.abajo, que contiene los fundamentos de la *Teoría de las ecuaciones integrales*, me veo muy distanciado del fin propuesto, por lo que debo solicitar de nuevo la benevolencia del Tribunal, necesaria para con estas mal pergeñadas cuartillas verificar con éxito el grado de Doctor.

FIN

Verificado el ejercicio a que se refiere esta Memoria el día 26 de Diciembre de 1912, obtuvo la calificación de SOBRESALIENTE.

TRIBUNAL

Presidente.	D.	José A. Irueste.
Vocal.......	D.	José de Castro Pulido.
"	D.	Eduardo León.
"	D.	Cecilio Jiménez Rueda.
Secretario..	D.	Martín Pastells.