



---

**Universidad de Valladolid**  
Facultad de Ciencias

# TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas.

**Introducción a la mecánica de fluidos.**

**Autor: Emilio Pérez Pérez**

**Tutor: Javier de Frutos Baraja**

# Introducción a la Mecánica de Fluidos

Emilio Pérez Pérez

3 de febrero de 2016

*A mis padres.*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Ecuaciones del movimiento</b>	<b>6</b>
2.1. Definiciones básicas . . . . .	7
2.2. Ecuaciones del movimiento . . . . .	7
2.2.1. Ecuaciones de Euler . . . . .	8
2.2.2. Rotación y vorticidad . . . . .	25
2.2.3. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	29
2.2.4. Adaptación y simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes para el estudio de algunos flujos concretos . . . . .	33
2.2.5. Escalado de las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	34
<b>3. El análisis funcional y la mecánica de fluidos</b>	<b>37</b>
3.1. Introducción . . . . .	37
3.2. Espacios de funciones . . . . .	38
3.3. Teorema de existencia y unicidad . . . . .	43

# Capítulo 1

## Introducción

La mecánica de fluidos se ocupa de los fluidos en movimiento o en reposo. Hay una gran cantidad de aplicaciones de la mecánica de fluidos dada la cantidad de fenómenos físicos en los que está involucrada. La mecánica de fluidos se estudia tanto desde el punto de vista teórico, es decir, por medio de modelos matemáticos, como desde un punto de vista más práctico, mediante experimentos físicos. Los principales obstáculos con los que los investigadores se encuentran, son debidos a la geometría del problema que se está tratando y a la viscosidad del fluido en cuestión. La teoría general del movimiento de los fluidos es demasiado complicada para abordar geometrías arbitrarias, por lo que los problemas que se tratan para ilustrar los fenómenos suelen ser placas planas, conductos circulares y otros casos con una geometría sencilla. Los casos en que se tratan geometrías arbitrarias, se resuelven mediante métodos numéricos por medio de la llamada *mecánica de fluidos computacional*.

La viscosidad, además de la geometría, como ya se ha mencionado, es el otro obstáculo que impide resolver de manera sencilla los problemas, pues sólo puede ser despreciada en flujos idealizados. La viscosidad aumenta la dificultad de las ecuaciones básicas. A pesar de ello, se han desarrollado métodos, como el de la capa límite de Ludwig Prandtl en 1904, que han simplificado enormemente el tratamiento de los flujos viscosos. La viscosidad afecta a la estabilidad de los flujos, salvo a velocidades muy pequeñas, lo que da lugar a un fenómeno desordenado, pseudoaleatorio, llamado turbulencia. Existen tratamientos por medio de la teoría de la probabilidad para este tipo de fenómenos.

Con todo esto, a pesar de existir una teoría matemática para describir el comportamiento de los flujos de los fluidos, en muchos casos los investigadores se apoyan en la experimentación para el posterior modelado de las ecuaciones. Afortunadamente muchas veces es posible visualizar el flujo de los fluidos y existe una buena instrumentación. El análisis dimensional es un método muy utilizado y en los casos reales de la industria suelen utilizarse modelos a escala de los que se obtienen conclusiones de los casos reales.

La mecánica de fluidos tiene orígenes muy antiguos. Las civilizaciones antiguas tenían ya algunos conocimientos rudimentarios sobre el tema, con los que conseguían resolver algunos problemas que les preocupaban, por ejemplo, la navegación a vela y el regadío, claro está sin soporte matemático.

Los griegos comenzaron a dar un tratamiento matemático a los problemas. Arquímedes (285-212 a.C) formuló las leyes de flotabilidad para cuerpos no compresibles. El principio de Arquímedes es un principio físico que afirma que: *Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo, recibe un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del volumen del fluido que desaloja.* Es decir

$$E = -\rho_f g V$$

donde  $E$  es el empuje,  $\rho_f$  es la densidad del fluido,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $V$  el volumen del fluido desplazado.

Leonardo da Vinci (1452-1519) obtuvo la ecuación de la continuidad para flujos unidimensionales, de la que se hablará en el capítulo 2 de este documento. También fue un gran experimentalista y nos dejó en sus notas descripciones muy reales sobre chorros, olas, hidráulica, formación de torbellinos y diseños de cuerpos de baja y alta resistencia (cuerpos fuselados y paracaídas).

Más adelante, Edme Mariotte (1620-1648), construyó el primer túnel aerodinámico y realizó pruebas con él. Pero el impulso definitivo a esta rama llegó con Isaac Newton (1642-1727), que propuso las leyes generales del movimiento de los cuerpos, lo que es conocido en general como mecánica Newtoniana y su ley de resistencia viscosa lineal que caracteriza a una determinada clase de fluidos que hoy en día se conoce como fluidos Newtonianos. Con la introducción del cálculo diferencial por parte de Newton y Leibniz, matemáticos posteriores a ellos en el siglo XVIII (como Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Jean D'Alambert, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace) obtuvieron soluciones a muchos problemas concretos para flujos no viscosos. Utilizando las ecuaciones que proporcionaron estos matemáticos D'Alambert llegó a una paradoja famosa en mecánica de fluidos que afirma que un cuerpo inmerso en un flujo no viscoso tiene resistencia nula. Esto ocurre porque la viscosidad siempre juega un papel crucial en los modelos.

Como en esa época no se podían resolver con los métodos existentes entonces, casos de interés real con geometrías complicadas, los ingenieros rechazaron estas teorías por irreales y desarrollaron otra ciencia denominada hidráulica, que esencialmente se apoya en el empirismo. Experimentalistas como Chézy, Pitot, Borda, Weber, Francis, Hagen, Poiseuille, Darcy, Manning, Bazin y Wiesbach trabajaron con variedad de problemas, como canales abiertos, resistencia de barcos, flujos en tuberías, olas y turbinas, pero la mayoría de los datos eran utilizados sin tener en cuenta los fundamentos físicos de los flujos y ni por supuesto el análisis matemático del fenómeno.

Al final del siglo XIX comenzó la unificación entre hidráulicos e hidrodinámicos. William Froude (1810-1879) y su hijo Robert (1846-1924) desarrollaron leyes para el estudio con modelos a escala; Lord Rayleigh (1842-1919) propuso la técnica del análisis dimensional y en 1883, Osborne Reynolds (1842-1912) publicó los resultados de un experimento que pondría de manifiesto la importancia de los efectos viscosos en los modelos, a través de un parámetro adimensional conocido hoy en día como el número de Reynolds. Mientras se producían todos estos avances en hidráulica, Navier (1785-1836) y Stokes (1819-1903) desarrollaron la teoría de flujos viscosos, añadiendo los términos viscosos a las ecuaciones del movimiento desarrolladas por los matemáticos anteriores, que permanecían en el olvido.

En 1904 un ingeniero alemán llamado Ludwig Prandtl (1875-1953) publicó un artículo importante para la mecánica de fluidos que permitió simplificar parcialmente los cálculos gracias a su nuevo planteamiento de los modelos. Según Prandtl, en los flujos de fluidos poco viscosos como el aire y el agua, el dominio donde se encuentra el fluido puede dividirse en 2 regiones: una capa viscosa y delgada conocida como *capa límite*, que se concentra en las proximidades de superficies sólidas y en las interfases, donde los efectos viscosos son importantes, y una región exterior que se puede modelar matemáticamente mediante las ecuaciones de Euler y Bernoulli. La teoría de capas límites ha demostrado ser en la práctica una herramienta importante en el análisis de los flujos.

Los métodos de resolución de problemas en mecánica de fluidos, se pueden agrupar en tres clases:

1. Métodos analíticos (mecánica de fluidos analítica).

Los métodos analíticos dan un tratamiento matemático a los problemas planteados, resolviendo o analizando las ecuaciones básicas de los flujos teniendo en cuenta las condiciones de contorno que hay que imponer al flujo a tratar.

2. Métodos numéricos (mecánica de fluidos computacional).

Los métodos numéricos se emplean para hacer simulaciones en el ordenador del flujo de fluidos a través de las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos analítica. Este método se introduce por la necesidad de obtener respuestas cuantitativas a los problemas de la mecánica de fluidos.

3. Métodos experimentales (mecánica de fluidos experimental).

Este método trata con flujos a modelos a escala que permiten sacar conclusiones sobre como se comportaría el flujo en el modelo real.

Los métodos mencionados anteriormente, a pesar del desarrollo que han tenido en los últimos años, sólo han alcanzado un desarrollo suficiente para resolver parcialmente algunos de los problemas que se plantean hoy en día en los diferentes campos de

aplicación de esta rama. Los métodos analíticos son a menudo aplicables a problemas de flujo con condiciones de contorno simples. Los métodos numéricos tienen la capacidad de tratar problemas mucho más complicados. Sin embargo, especialmente en los casos de flujo turbulento con una alta vorticidad y número de Reynold grande, el cálculo numérico es todavía difícil. Las limitaciones de los métodos numéricos se deben a la limitación de almacenamiento y velocidad de proceso de los computadores. No todos los flujos permiten la construcción de un modelo experimental con el que se puedan sacar conclusiones. En estos casos es necesario acudir directamente a la abstracción matemática, plantear un modelo, analizarlo mediante los métodos que permitan hacerlo, como puede ser el cálculo numérico y posteriormente validar el modelo con datos experimentales parciales. Los tres métodos citados, son necesarios y la experiencia muestra que soluciones eficientes se obtienen combinando los tres métodos [5], [6].

# Capítulo 2

## Ecuaciones del movimiento

Expondremos a continuación, las leyes de conservación [5], [6], [10] que se utilizarán como hipótesis fundamentales para la deducción de las ecuaciones básicas. Las leyes de conservación se refieren a las leyes físicas que postulan que con el paso del tiempo en un sistema aislado ciertas magnitudes se mantienen constantes. Las principales leyes de conservación en mecánica clásica son:

- **Conservación de la energía**

El principio de conservación de la energía afirma que *la cantidad total de energía en cualquier sistema físico aislado, se mantiene constante en el tiempo*. La energía puede transformarse en otra forma de energía.

- **Conservación de la cantidad de movimiento**

El principio de conservación del movimiento afirma que *la cantidad de movimiento total en un sistema cerrado permanece constante en el tiempo*. La cantidad de movimiento se define como  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  donde  $m$  es la masa y  $\mathbf{v}$  la velocidad con  $\mathbf{p}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  (vamos a trabajar en el plano o en el espacio en todo el documento) y  $m \in \mathbb{R}$ . La cantidad de movimiento derivada respecto del tiempo proporciona la segunda ley de Newton que nos relaciona fuerza y aceleración en una ecuación, diciéndonos que una es proporcional a la otra por medio de una constante que es la masa del cuerpo (supuesto ésta constante) a considerar:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{F}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ .

- **Ley de conservación de la masa**

La ley de conservación de la masa establece que *la masa ni se crea ni se destruye*. Por tanto la cantidad de masa en un sistema aislado es constante.

## 2.1. Definiciones básicas

En esta sección aparecen definiciones que serán útiles a lo largo del documento.

- **Fluido:** Un fluido es un conjunto de moléculas que se ordenan aleatoriamente y se mantienen juntas a partir de fuerzas cohesivas débiles y fuerzas que ejercen las paredes del recinto en el que se encuentre contenido.
- **Viscosidad:** La viscosidad es una medida de la resistencia del fluido al movimiento, relaciona el esfuerzo o tensión local de un fluido en movimiento con la velocidad de deformación de las subregiones pequeñas del fluido mediante un valor escalar.
- **Fluido ideal:** Un fluido ideal es un fluido que tiene las siguientes propiedades:
  - Viscosidad cero.
  - Es incompresible.
  - El flujo es laminar (flujo ordenado, estratificado y suave).
  - La viscosidad de todas las moléculas del fluido en una sección transversal es la misma.
- **Fluido homogéneo:** Es un fluido que mantiene la densidad constante en el espacio.
- **Dominio:** Un dominio en todo el documento será un abierto conexo acotado.

## 2.2. Ecuaciones del movimiento

El objetivo de la mecánica de fluidos es describir el movimiento de un fluido. Consideraremos un punto cualquiera  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  donde  $\mathcal{D}$  es un dominio de  $\mathbb{R}^3$  que se mueve parametrizado por una variable  $t \in \mathbb{R}^+$ . Comenzaremos con las hipótesis más simples para modelizar el comportamiento de los fluidos hasta alcanzar las ecuaciones de Euler para un fluido ideal y posteriormente las ecuaciones de Navier-Stokes que generalizarán las ecuaciones de Euler. Para comenzar con el tratamiento matemático, consideraremos  $\mathcal{D}$  un dominio de  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  lleno de fluido.

Consideremos una partícula de fluido representada por un punto  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{D}$ . Se trata de describir el movimiento de esa partícula.

Nuestra hipótesis sobre la modelización del *campo de velocidades dependiente del tiempo* relacionado con esta partícula será de que viene dado por  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{u}(x(t), y(t), z(t), t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t).$$

El campo  $\mathbf{u}$  es la velocidad de la partícula de fluido que está en la posición  $\mathbf{x} = (x(t), y(t), z(t))$  en un tiempo  $t \in \mathbb{R}^+$ . Supondremos que  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$  en todo el documento. Determinar este campo de velocidades en los problemas de la práctica equivale, a menudo, a resolver el problema que se está tratando.

**Hipótesis del medio continuo.** Estableceremos la hipótesis de que el fluido tiene una densidad de masa  $\rho : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $\rho$  una función regular  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ .

**Definición 2.2.1.** Si  $\mathcal{W}$  es un subdominio de  $\mathcal{D}$  la masa de fluido en  $\mathcal{W}$  en un tiempo  $t \in \mathbb{R}^+$  está definida por:

$$m(\mathcal{W}, t) = \int_{\mathcal{W}} \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2.1)$$

Supondremos que las funciones  $\mathbf{u}$  y  $\rho$  son, al menos, derivables con continuidad.

## 2.2.1. Ecuaciones de Euler

### Conservación de la masa

**Proposición 2.2.1.** Sea  $\mathcal{W}$  un subdominio fijo y acotado de  $\mathcal{D}$  y  $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$ . La variación de la masa en el subdominio a lo largo del tiempo vendrá dada por

$$\frac{d}{dt} m(\mathcal{W}, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathcal{W}} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV.$$

*Demostración.* La derivación bajo el signo integral es posible haciendo uso del teorema de derivación bajo el signo integral [9] ya que  $(\mathbf{x}, t) \mapsto \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$  existe y es continua en un conjunto de la forma  $\overline{\mathcal{W}} \times [a, b]$ , donde  $\overline{\mathcal{W}}$  es la clausura de  $\mathcal{W}$ . El teorema nos garantiza entonces que la función definida por

$$F(t) = \int_{\mathcal{W}} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

es diferenciable en  $(a, b)$  y

$$F'(t) = \int_{\mathcal{W}} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x}.$$

□

Sea  $\partial\mathcal{W}$  la frontera de  $\mathcal{W}$ , que suponemos es regular (es decir, puede ser parametrizada por funciones diferenciables a trozos y los puntos en los que no es diferenciable forman un conjunto de medida nula). Sea  $\mathbf{n}$  el vector unitario normal definido en

los puntos de  $\partial\mathcal{W}$ . El flujo de volumen a través de  $\partial\mathcal{W}$  por unidad de área es  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  (En lo que sigue  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  denota el producto escalar entre dos vectores) y el flujo de masa por unidad de área es  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . El flujo total de masa a través de  $\partial\mathcal{W}$  al que denotaremos por  $F$  es la integral de  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  sobre  $\partial\mathcal{W}$ :

$$F = \int_{\partial\mathcal{W}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

El principio de conservación de la masa puede ser establecido con más detalle como sigue: *El aumento de masa en  $\mathcal{W}$  es igual al flujo de masa que atraviesa  $\partial\mathcal{W}$  hacia el interior*, es decir

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} \rho \, dV = - \int_{\partial\mathcal{W}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA. \quad (2.2)$$

Esta es la **forma integral de la ley de la conservación de la masa**. La siguiente proposición se utilizará para obtener la forma diferencial.

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $g(x, y, z)$  una función continua en  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$  tal que*

$$\int_{\mathcal{W}} g(x, y, z) \, dV = 0 \quad \forall \mathcal{W} \subset \mathcal{D}.$$

*Entonces*

$$g(x, y, z) = 0, \quad \forall (x, y, z) \in \mathcal{D}. \quad (2.3)$$

*Demostración.* Razonamos por reducción al absurdo. Sea  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{D}$  fijo y supongamos sin pérdida de generalidad, que  $g(x_0, y_0, z_0) > 0$ . Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\forall (x, y, z) \in \mathcal{B}((x_0, y_0, z_0), \epsilon) \subset \mathcal{D}$ ,  $g(x, y, z) > 0$  ya que  $g$  es continua. Tenemos que

$$\int_{\mathcal{B}((x_0, y_0, z_0), \epsilon)} g(x, y, z) \, dV > 0. \quad (2.4)$$

Pero por hipótesis  $\int_{\mathcal{W}} g(x, y, z) \, dV = 0$ ,  $\forall \mathcal{W} \subset \mathcal{D}$ . Tomando  $\mathcal{W} = \mathcal{B}((x_0, y_0, z_0), \epsilon)$  llegamos a contradicción con (2.4), luego necesariamente

$$g(x, y, z) = 0 \quad \forall \in \mathcal{D}.$$

□

Se puede hacer uso del teorema de la divergencia en (2.2) pues hemos hecho la hipótesis de que hay regularidad suficiente, es decir, las funciones son al menos de clase  $\mathcal{C}^1$ ; con él transformaremos la integral de superficie que aparece en el segundo miembro de la ecuación en una integral de volumen. Tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} \rho \, dV = \int_{\mathcal{W}} \frac{\partial}{\partial t} \rho \, dV = - \int_{\partial\mathcal{W}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA = - \int_{\mathcal{W}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \, dV,$$

es decir

$$\int_{\mathcal{W}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = 0, \quad \forall \mathcal{W} \subset \mathcal{D}.$$

Y como esto es válido para todo  $\mathcal{W}$  fijo, aplicando (2.3), tenemos que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, t \geq 0. \quad (2.5)$$

Esta última ecuación es la **forma diferencial de la ley de la conservación de la masa**, también conocida como **ecuación de la continuidad**.

### ***Sobre la interpretación física de la divergencia***

La divergencia de un campo vectorial tiene una importante interpretación física [7]. Si  $\mathbf{F}$  es un campo de velocidades de un gas o de un fluido en general, la divergencia de  $\mathbf{F}$ ,  $\text{div}(\mathbf{F})$  representa la razón de expansión por unidad de volumen bajo el flujo del gas (o del fluido). Por ejemplo, si  $\text{div}(\mathbf{F}) < 0$  el gas (o el fluido) se está comprimiendo y si  $\text{div}(\mathbf{F}) > 0$  el gas (o el fluido) se está expandiendo. Para comprobar esto procedemos como sigue, dado  $\mathcal{D}$  un dominio que contiene al fluido y  $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$ , tomamos  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}$ ,  $\text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0))$  es la tasa de flujo neto hacia el exterior, por unidad de volumen en  $\mathbf{x}_0$ . Esto se sigue del teorema de la divergencia y el teorema del valor medio para integrales. Dado  $\epsilon_k > 0$  con  $k \in \mathbb{N}$  satisfaciendo  $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$  tomamos  $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \epsilon_k) \subset \mathbb{R}^3$ , bola de radio  $\epsilon_k$ , centrada en  $\mathbf{x}_0$ . Existe un punto  $\mathbf{y}_k \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \epsilon_k)$  tal que

$$\int_{\partial \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \epsilon_k)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \epsilon_k)} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{y}_k) m(\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \epsilon_k))$$

donde  $m(\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \epsilon_k))$  es la medida de la bola en el sentido de Lebesgue [11]. Entonces, formalmente,

$$\nabla \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m(\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \epsilon_k))} \int_{\partial \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \epsilon_k)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Si  $\text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) > 0$  consideramos  $\mathbf{x}_0$  como una **fuentes** porque hay un flujo neto hacia el exterior en un entorno de  $\mathbf{x}_0$ , si  $\text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) < 0$ ,  $\mathbf{x}_0$  se denomina **sumidero** para  $\mathbf{F}$ .

## Conservación de la cantidad de movimiento

Hemos tratado ya con el movimiento de la partícula y le hemos dado un formalismo matemático, también hemos tratado con el campo de velocidades y hemos visto como ambos están relacionados mediante el operador  $\frac{d}{dt}$ . Ahora, si derivamos el campo de velocidades respecto del tiempo obtenemos un nuevo campo que será el **vector de aceleraciones**,  $\mathbf{a} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

El campo de aceleración viene dado por:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(x(t), y(t), z(t), t)).$$

Mediante el uso de la regla de la cadena es claro que

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Usando las notaciones

$$\mathbf{u}_x = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \quad \mathbf{u}_y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \quad \mathbf{u}_z = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}, \quad \mathbf{u}_t = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

y

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)].$$

Obtenemos, recordando que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ ,

$$\mathbf{a}(t) = u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z + \mathbf{u}_t.$$

En forma más compacta podemos escribir

$$\mathbf{a}(t) = \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \tag{2.6}$$

donde

$$\partial_t \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \tag{2.7}$$

**Definición 2.2.2.** Sea  $f$  un campo escalar de clase  $C^1(\mathcal{U})$  siendo  $\mathcal{U}$  abierto de  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Se define la derivada material de  $f$  como

$$\frac{Df}{Dt}(x_1, x_2, \dots, x_m, t) = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_m, t)}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f(x_1, \dots, x_m, t)}{\partial x_1} + \dots + u_m \frac{\partial f(x_1, \dots, x_m, t)}{\partial x_m}$$

donde

$$u_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad i = 1, \dots, m.$$

**Definición 2.2.3.** Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial de clase  $C^1(\mathcal{U})$  siendo  $\mathcal{U}$  abierto de  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Se define la derivada material de  $\mathbf{F}$  como

$$\frac{D\mathbf{F}}{Dt}(x_1, \dots, x_m, t) = \left( \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial x_i} u_i, \dots, \frac{\partial F_m}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_m}{\partial x_i} u_i \right)$$

donde

$$u_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Podemos reescribir la ecuación de continuidad usando esta notación de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{u} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Es decir

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (2.8)$$

A continuación vamos a estudiar como pueden ser las fuerzas que actúan en el medio fluido que estamos tratando. Para cualquier medio continuo, las fuerzas actuando en una porción de material, son de dos formas:

1. Fuerzas de tensión o superficiales.

Las hay de dos tipos, tangenciales y normales.

2. Fuerzas externas o volumétricas.

Fuerzas externas como la gravedad o el campo magnético que ejercen una fuerza por unidad de volumen en el medio continuo.

Tomaremos como hipótesis que para cualquier movimiento de fluido existe un campo escalar

$$p : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

llamado presión tal que si  $\mathcal{S}$  es una superficie de un fluido con vector normal  $\mathbf{n}$ , la fuerza ejercida a través de la superficie  $\mathcal{S}$ , en la dirección de  $\mathbf{n}$  por unidad de área en  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  en un tiempo  $t \in \mathbb{R}^+$  es  $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$ .

Por definición la presión actúa ortogonalmente sobre la superficie  $\mathcal{S}$ . Supondremos que no hay fuerzas tangenciales, esta hipótesis da lugar a fluidos ideales, que excluyen muchos fenómenos físicos interesantes, pero sin embargo forma un elemento crucial para una teoría más completa.

Ahora vamos a modelizar las fuerzas ejercidas sobre un dominio. Como anteriormente hemos hecho definimos  $\mathcal{W}$  como una región en el fluido en un particular instante de tiempo  $t \in \mathbb{R}^+$ . La resultante de todas las fuerzas ejercidas sobre  $\mathcal{W}$  por las fuerzas en la frontera es

$$\mathcal{S}_{\partial\mathcal{W}} = - \int_{\partial\mathcal{W}} p\mathbf{n} dA = \left( - \int_{\partial\mathcal{W}} pn_1 dA, - \int_{\partial\mathcal{W}} pn_2 dA, - \int_{\partial\mathcal{W}} pn_3 dA \right),$$

donde  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ .

Ahora con vistas a usar el teorema de la divergencia y darle otra expresión a esta integral tomamos  $\mathbf{e}$  como un vector fijo en el espacio. Entonces

$$\mathbf{e} \cdot \mathcal{S}_{\partial\mathcal{W}} = - \int_{\partial\mathcal{W}} p\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_{\mathcal{W}} \nabla \cdot (p\mathbf{e}) dV = - \int_{\mathcal{W}} \nabla p \cdot \mathbf{e} dV.$$

Y así, tenemos que

$$\mathcal{S}_{\partial\mathcal{W}} = - \int_{\mathcal{W}} \nabla p dV = \left( - \int_{\mathcal{W}} \frac{\partial p}{\partial x} dV, - \int_{\mathcal{W}} \frac{\partial p}{\partial y} dV, - \int_{\mathcal{W}} \frac{\partial p}{\partial z} dV \right). \quad (2.9)$$

Tomaremos como hipótesis que la fuerza volumétrica por unidad de masa viene dada por  $\mathbf{b} : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ . La fuerza externa total sobre toda la región  $\mathcal{W}$  es

$$\mathbf{B}_{\mathcal{W}} = \int_{\mathcal{W}} \rho\mathbf{b} dV. \quad (2.10)$$

Observemos que las dimensiones del integrando son  $[\mathbf{b}][\rho] = \frac{L}{T^2} \frac{M}{L^3} = \frac{M}{T^2 L^2}$ . La fuerza total actuando sobre todo  $\mathcal{W}$  vendrá dada por (2.9) y (2.10)

$$\mathcal{S}_{\partial\mathcal{W}} + \mathbf{B}_{\mathcal{W}} = \int_{\mathcal{W}} -\nabla p + \rho\mathbf{b} dV.$$

Así, sobre cualquier porción de fluido material, la fuerza actuando por unidad de volumen es:

$$\mathbf{F} = -\nabla p + \rho\mathbf{b}. \quad (2.11)$$

Utilizando la segunda ley de Newton [10] podemos llegar a la **forma diferencial de la conservación de la cantidad de movimiento** usando (2.6)

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}, \quad (2.12)$$

observemos que en el lado izquierdo de la igualdad aparece la densidad  $\rho$  y no la masa  $m$  por ser el campo de fuerzas  $\mathbf{F}$  por unidad de volumen.

Teniendo en cuenta que

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{b},$$

la ecuación (2.12) puede reescribirse como

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{b}. \quad (2.13)$$

Usando la ecuación de la continuidad multiplicada por el campo de velocidades tenemos, despejando de la ecuación anterior,

$$\mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{u} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})$$

y sumándosela a la ecuación (2.13) nos queda

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \rho \mathbf{b}.$$

Con vistas de nuevo a usar el teorema de la divergencia [8], si  $\mathbf{e}$  es un vector fijo del espacio tenemos

$$\mathbf{e} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} - (\nabla p) \cdot \mathbf{e} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}.$$

Si  $\mathbf{e} = [1, 0, 0]$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial t}[1, 0, 0] \cdot [\rho u, \rho v, \rho w] = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})[u, v, w] \cdot [1, 0, 0] \\ &\quad - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot [1, 0, 0] - (\nabla p)[1, 0, 0] \\ &\quad + \rho[b_1, b_2, b_3] \cdot [1, 0, 0] = -\operatorname{div}(p[1, 0, 0]) \\ &\quad + \rho[u, v, w]([u, v, w] \cdot [1, 0, 0]) - \rho([u, v, w] \cdot \nabla)u \\ &\quad + \rho[b_1, b_2, b_3] \cdot [1, 0, 0] = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})u - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)u - \frac{\partial}{\partial x}p_1 + \rho b_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$  es un volumen fijo de fluido, la variación de movimiento en la dirección de  $\mathbf{e}$  en  $\mathcal{W}$  es

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{u} \, dV &= [1, 0, 0] \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{u} \, dV \\
&= - \int_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(p\mathbf{e} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})) + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} \, dV \\
&= - \int_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(p[1, 0, 0] + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot [1, 0, 0])) + \rho \mathbf{b} \cdot [1, 0, 0] \, dV \\
&= - \int_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(p\mathbf{e} + \rho \mathbf{u}u) + \rho b_1 \, dV \\
&= - \int_{\partial \mathcal{W}} (p\mathbf{e} + \rho \mathbf{u}u)\mathbf{n} \, dA + \int_{\mathcal{W}} \rho b_1 \, dV.
\end{aligned}$$

Donde en la última igualdad se ha aplicado el teorema de la divergencia. Haciendo esto mismo con los vectores  $[0, 1, 0]$  y  $[0, 0, 1]$  y sumando las tres expresiones resultantes, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{u} \, dV = - \int_{\partial \mathcal{W}} (p\mathbf{n} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) \, dA + \int_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{b} \, dV. \quad (2.14)$$

El modelado matemático que sigue a continuación va a hacer que pasemos de un punto de vista **Lagrangiano** de la mecánica de fluidos a un punto de vista **Euleriano**. Explicado de manera sencilla, la diferencia viene a ser que el primero se centra en el movimiento de partículas individuales, describiendo el movimiento de cada una individualmente y sus propiedades, y el segundo trata conjuntos de partículas, regiones de fluido que se mueven con el tiempo.

Sea  $\mathcal{D}$  un dominio donde el fluido está moviéndose. Sea  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  y escribiremos  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  para la trayectoria descrita por la partícula situada en  $t = 0$  en un punto. Haremos la hipótesis de que  $\varphi$  es suficientemente regular y para  $t \in \mathbb{R}^+$  fijo,  $\varphi$  tiene inversa regular.

Sea  $\varphi_t$  la aplicación  $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, t)$  para  $t \in \mathbb{R}^+$  fijo. Esta función lleva cada partícula de fluido desde la posición que ocupa en  $t = 0$  hasta la posición que ocupa en un tiempo  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Llamamos a  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la función de flujo. Si  $\mathcal{W}$  es un dominio en  $\mathcal{D}$ , entonces  $\varphi_t(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_t$  es el volumen  $\mathcal{W}$  moviéndose con el fluido.

**Proposición 2.2.3.** *Sea  $J$  el jacobiano de  $\varphi$ . Entonces*

$$\frac{\partial J(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = J(\mathbf{x}, t) \operatorname{div}(\mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t))). \quad (2.15)$$

*Demostración.* Vamos a escribir las componentes de  $\boldsymbol{\varphi}$  como  $\xi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\eta(\mathbf{x}, t)$  y  $\zeta(\mathbf{x}, t)$ . Debemos observar además que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.16)$$

por la definición de campo de velocidades de un fluido. Derivando  $J$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \\ &= \det\left(\frac{\partial \nabla \xi^T}{\partial t}, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) + \det\left(\nabla \xi^T, \frac{\partial \nabla \eta^T}{\partial t}, \nabla \zeta^T\right) + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \frac{\partial \nabla \zeta^T}{\partial t}\right) \\ &= \det\left(\nabla u(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t)^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla v(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t)^T, \nabla \zeta^T\right) \\ &\quad + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla w(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t)^T\right) \\ &= \det\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \nabla \xi^T + \frac{\partial u}{\partial \eta^T} \nabla \eta^T + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \nabla \zeta^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) \\ &\quad + \det\left(\nabla \xi^T, \frac{\partial v}{\partial \xi} \nabla \xi^T + \frac{\partial v}{\partial \eta} \nabla \eta^T + \frac{\partial v}{\partial \zeta} \nabla \zeta^T, \nabla \zeta^T\right) \\ &\quad + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla \xi^T \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \nabla \eta^T + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \nabla \zeta^T\right) \\ &= \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \det\left(\nabla \eta^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \det\left(\nabla \zeta^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ &\quad + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \xi^T, \nabla \zeta^T\right) \frac{\partial v}{\partial \xi} + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ &\quad + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \zeta^T, \nabla \zeta^T\right) \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla \xi^T\right) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla \eta^T\right) \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ &\quad + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ &\quad + \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \det\left(\nabla \xi^T, \nabla \eta^T, \nabla \zeta^T\right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) \\ &= J \operatorname{div}(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

□

**Proposición 2.2.4** (Teorema del transporte). *Para cualquier función  $f \in C^1(\mathbb{R}^4)$ . Si  $\rho$  es la función de densidad se tiene:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} \rho f \, dV = \int_{\mathcal{W}_t} \rho \frac{Df}{Dt} \, dV.$$

*Demostración.* Observemos que  $\varphi_t(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_t$  y  $\varphi_t$  es un difeomorfismo por hipótesis. En este primer paso usaremos el teorema de cambio de variable véase [8].

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} \rho f dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) |J| dV \quad (2.18)$$

donde  $|J|$  es el determinante jacobiano de  $(\varphi_t, t)$ . Además  $f\rho$  es integrable en  $\mathcal{W}_t$  si, sólo si  $((f\rho) \circ \varphi)|J|$  es integrable en  $\varphi^{-1}(\mathcal{W}_t) = \mathcal{W}$ .

En el siguiente paso usaremos el teorema de derivación bajo el signo integral y supondremos que se cumplen sus hipótesis [9]. Se justificarán al final de la demostración.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} \rho f dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) |J| dV \\ &= \int_{\mathcal{W}} \frac{d}{dt} ((\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) |J|) dV \\ &= \int_{\mathcal{W}} \frac{d}{dt} ((\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t)) |J| + \frac{d|J|}{dt} (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) dV. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \frac{D(\rho f)}{Dt}(\varphi(\mathbf{x}, t), t), \quad (2.19)$$

que será probado al final de la demostración, tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} \rho f dV \\ &= \int_{\mathcal{W}} \frac{D}{Dt} ((\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t)) |J| + \frac{d|J|}{dt} (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) dV \\ &= \int_{\mathcal{W}} \left( \left( \frac{D\rho}{Dt} f \right)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \right) |J| + \left( \left( \frac{Df}{Dt} \rho \right)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \right) |J| + \frac{d|J|}{dt} (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) dV \\ &= \int_{\mathcal{W}} \left( \frac{D\rho}{Dt} f + \frac{Df}{Dt} \rho \right) (\varphi(\mathbf{x}, t), t) |J| + \frac{d|J|}{dt} (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) dV. \end{aligned}$$

Haciendo uso de (2.15) tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} \rho f dV \\ &= \int_{\mathcal{W}} \frac{D}{Dt} (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) + (\rho f)(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \operatorname{div}(\mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t))) |J(\mathbf{x}, t)| dV. \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} \rho f dV \\
&= \int_{\mathcal{W}_t} \frac{D}{Dt}(\rho f) + (\rho f) \operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) dV \\
&= \int_{\mathcal{W}_t} \frac{D\rho}{Dt} f + \frac{Df}{Dt} \rho + (\rho f) \operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) dV \\
&= \int_{\mathcal{W}_t} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) f + \frac{Df}{Dt} \rho dV.
\end{aligned}$$

Usando ahora la ley diferencial de la conservación de la masa (2.5) tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} \rho f dV = \int_{\mathcal{W}_t} \frac{Df}{Dt} \rho dV.$$

Veamos (2.19):

Por un lado

$$\frac{D(\rho f)}{Dt}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) = \partial_t(\rho f)(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho f)(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t)$$

por definición de derivada material. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho f)}{\partial t}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) f + \rho \frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) \\
&= \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \cdot \nabla \rho \right) f + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \cdot \nabla f \right) \rho
\end{aligned}$$

haciendo uso de (2.16):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho f)}{\partial t}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) \\
&= \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \right) f + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \right) \rho \\
&= \partial_t(\rho f) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho f)(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) = \frac{D(\rho f)}{Dt}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t).
\end{aligned}$$

Lo que demuestra la equivalencia entre las dos igualdades (2.19).

Justificación del uso del teorema de derivación bajo el signo integral:

La derivación bajo el signo integral es posible haciendo uso del teorema de derivación bajo el signo integral [9], ya que  $(\mathbf{x}, t) \mapsto \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$  con  $F(\mathbf{x}, t) = (\rho f)(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) |J|$ , existe y es continua en un conjunto de la forma  $\overline{\mathcal{W}} \times [a, b]$ . Entonces el teorema nos garantiza que la función definida por

$$G(t) = \int_{\mathcal{W}} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

es diferenciable en  $(a, b)$  y

$$G'(t) = \int_{\mathcal{W}} \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x}.$$

□

**Proposición 2.2.5.** Para cualquier función  $f(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$  de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  y  $t \in \mathbb{R}$  tenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} f dV = \int_{\mathcal{W}_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}f) dV.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} f dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} f(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) |J| dV \\ &= \int_{\mathcal{W}} \frac{d}{dt} (f(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) |J|) dV \\ &= \int_{\mathcal{W}} \frac{df(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t)}{dt} |J| + \frac{d|J|}{dt} f(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) dV \\ &= \int_{\mathcal{W}} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \cdot \nabla f \right) (\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) |J| + \frac{d|J|}{dt} f(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) dV \\ &= \int_{\mathcal{W}} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \right) (\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) |J| + \operatorname{div}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t)) |J| f(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), t) dV \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos hecho uso de (2.15) y (2.16).

Deshaciendo el cambio de variable tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} f dV \\ &= \int_{\mathcal{W}_t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \right) + \operatorname{div}(\mathbf{u})f dV \\ &= \int_{\mathcal{W}_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}f) dV. \end{aligned}$$

Es decir

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} f dV = \int_{\mathcal{W}_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}f) dV.$$

Justificación del uso del teorema de derivación bajo el signo integral:

La derivación bajo el signo integral es posible haciendo uso del teorema de derivación bajo el signo integral [9], ya que  $(\mathbf{x}, t) \mapsto \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$  es continua pues  $f(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$  por hipótesis.

□

Por lo tanto, con los resultados hasta ahora obtenidos podemos establecer una equivalencia entre 3 ecuaciones de **conservación de la cantidad de movimiento**. Dos han sido ya presentadas a lo largo del capítulo en (2.12) y (2.14) y la equivalencia entre las dos ha quedado patente al llegar a la forma integral desde la forma diferencial de la ecuación como hemos visto. La tercera ecuación es

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{u} \, dV = - \int_{\mathcal{W}} \nabla p \, dV + \int_{\mathcal{W}} \rho \mathbf{b} \, dV \quad (2.20)$$

y es fácil comprobar que (2.12) y ella son equivalentes integrando en un dominio  $\mathcal{W}$  y usando el Teorema del transporte.

### ***Sobre la interpretación de la incompresibilidad***

Para comenzar el estudio de la incompresibilidad, sea  $\mathcal{D}$  un dominio lleno de fluido y calculamos el volumen de un subdominio  $\mathcal{W}$  contenido en  $\mathcal{D}$ . A lo largo de un tiempo  $t \geq 0$ , el volumen debe mantenerse constante, si el fluido es incompresible, es decir

$$m(\mathcal{W}_t) = \int_{\mathcal{W}_t} dV = \text{constante en } t.$$

Derivando respecto del tiempo y usando (2.15) tenemos

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} |J| \, dV = \int_{\mathcal{W}} \text{div}(\mathbf{u}) |J| \, dV = \int_{\mathcal{W}_t} \text{div}(\mathbf{u}) \, dV$$

y como esto es válido para cualquier  $\mathcal{W}_t$  usando (2.3) tenemos que debe ser  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ . Por tanto hemos visto que el fluido es incompresible si sólo si  $\text{div}(\mathbf{u})=0$ . Veamos que ahora que  $|J| = 1$  si sólo si  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ .

$$m(\mathcal{W}_t) = \int_{\mathcal{W}_t} dV = \int_{\mathcal{W}} |J| \, dV. \quad (2.21)$$

Como  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$  sustituyendo en (2.15) tenemos que  $\frac{dJ}{dt} = 0$ , es decir que  $J$  es constante y por lo tanto  $|J|$  también, denotemos por  $C$  a dicha constante. Sustituyendo en (2.21) tenemos que

$$m(\mathcal{W}_t) = \int_{\mathcal{W}_t} dV = \int_{\mathcal{W}} |J| \, dV = \int_{\mathcal{W}} C \, dV = m(\mathcal{W})C. \quad (2.22)$$

Ahora bien como  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$  si sólo si el flujo es incompresible, es decir  $m(\mathcal{W}_t) = m(\mathcal{W}) \forall t \in \mathbb{R}^+$ . Sustituyendo en (2.22) se obtiene  $|J| = C = 1$ .

Hemos visto que las siguientes afirmaciones son equivalentes [4]:

1. El fluido es incompresible.
2.  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ .
3.  $J \equiv 1$ .

### Conservación de la energía

Un estudio profundo sobre la última de las ecuaciones de Euler denominada ecuación de la energía está fuera de los objetivos de este trabajo. Enunciaremos las hipótesis necesarias para establecer algunas ecuaciones para flujos concretos. Para comenzar definiremos la energía total del fluido que será la suma de la energía cinética y la energía interna es decir  $E_T = E_C + E_I$ .

**Definición 2.2.4.** Dado un dominio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$  lleno de fluido con campo de velocidades  $\mathbf{u}$  y densidad  $\rho$ , la **energía cinética** en una región  $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$  es

$$E_C = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}} \rho \|\mathbf{u}\|_2^2 dV.$$

La variación de la energía cinética en cada punto del fluido a lo largo del tiempo viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_C &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_t} \rho \|\mathbf{u}\|_2^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{W}_t} \rho \frac{D \|\mathbf{u}\|_2^2}{Dt} dV = \int_{\mathcal{W}_t} \rho (\mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right)) dV. \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado (2.2.4) y el hecho de que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \|\mathbf{u}\|_2^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) + v \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2) \right. \\ &\quad \left. + w \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2) \right) = u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial t} + u \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &\quad + v \left( u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) + w \left( u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

### *El caso particular de los flujos incompresibles*

Estableciendo la hipótesis de que toda la energía es cinética y la variación de la energía cinética en un volumen de fluido es igual a la variación de la presión y fuerzas externas tenemos:

$$\frac{d}{dt}E_C = - \int_{\partial\mathcal{W}_t} p\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{W}_t} \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV.$$

Haciendo uso del teorema de la divergencia y teniendo en cuenta que  $\text{div}(p\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla p + p\text{div}(\mathbf{u})$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_C &= - \int_{\partial\mathcal{W}_t} p\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{W}_t} \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV = - \int_{\mathcal{W}_t} \text{div}(p\mathbf{u}) - \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV \\ &= - \int_{\mathcal{W}_t} \mathbf{u} \cdot \nabla p + p\text{div}(\mathbf{u}) - \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV. \end{aligned}$$

La ecuación (2.12) nos permite de manera inmediata escribir una nueva expresión de la variación de energía cinética

$$\frac{d}{dt}E_C = \int_{\mathcal{W}_t} \rho(\mathbf{u} \cdot (\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u})) dV = - \int_{\mathcal{W}_t} (\mathbf{u} \cdot \nabla p - \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) dV \quad (2.23)$$

por lo que igualando (2.2.1) y (2.23) llegamos a que necesariamente  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$  a no ser que  $p = 0$ . En conclusión, si suponemos que toda la energía del fluido es cinética entonces necesariamente el fluido ha de ser incompresible, a no ser que  $p = 0$ , como hemos mencionado.

Las *ecuaciones de Euler para un flujo incompresible* son por lo tanto

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\text{grad}(p) + \rho\mathbf{b}, \\ \frac{D\rho}{Dt} &= 0, \\ \text{div}(\mathbf{u}) &= 0. \end{aligned}$$

En  $\mathcal{D}$  y  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\partial\mathcal{D}$ .

### *El caso particular de los flujos isentrópicos*

En este apartado introduciremos las ecuaciones de flujo de Euler para *flujos isentrópicos* [4]. Este tipo de flujos se caracterizan por la existencia de una función  $\tau$  llamada *entalpía* de manera que

$$\text{grad}(\tau) = \frac{1}{\rho}\text{grad}(p).$$

La **energía interna** por unidad de masa viene dada por

$$\epsilon = \tau - \left(\frac{p}{\rho}\right).$$

La variación de energía en un volumen de fluido es igual a la variación de trabajo hecho en él. Por tanto:

$$\frac{d}{dt} E_T = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} \left(\frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}\|^2 + \rho \epsilon\right) dV = \int_{\mathcal{W}_t} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV - \int_{\partial \mathcal{W}_t} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Las **ecuaciones de Euler para un flujo iséntropico** son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla \tau + \mathbf{b}. \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

En  $\mathcal{D}$  y  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\partial \mathcal{D}$ .

**Definición 2.2.5.** Dado de fluido con campo de velocidades  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , diremos que  $\mathbf{x}$  parametrizado por una variable  $s$  es una **línea de corriente** si satisface, para cada  $t > 0$  fijo

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(s, t)).$$

Intuitivamente diremos que una línea de corriente es aquella curva que en un instante dado es tangente al vector velocidad en todo punto.

**Definición 2.2.6.** Dado un campo de velocidades  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  definiremos una **trayectoria** como la curva trazada por una partícula a medida que transcurre el tiempo. La trayectoria satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t).$$

Intuitivamente diremos que  $\mathbf{x}(t)$  es el camino recorrido realmente por una partícula. Si  $\mathbf{u}$  es independiente del tiempo, es decir  $\partial_t \mathbf{u} = 0$  líneas de corriente y trayectorias coinciden. En este caso el flujo se denominará **estacionario**. En un flujo no estacionario el patrón que siguen las líneas de corriente cambia continuamente a medida que avanza el tiempo, por lo que la trayectoria de las partículas individuales no coincide con una línea de corriente en un instante dado.

**Teorema 2.2.1** (Teorema de Bernoulli). *En flujos estacionarios e isentrópicos y en ausencia de fuerzas externas, la función*

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|_2^2 + \theta$$

*es constante a lo largo de las líneas de corriente, donde  $\theta : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ . Lo mismo ocurre para un flujo homogéneo incompresible con  $\theta$  remplazado por  $\frac{p}{\rho_0}$ . La tesis también se cumple en presencia de una fuerza  $\mathbf{b}$  conservativa, es decir,  $\mathbf{b} = -\nabla\varphi$  para alguna función  $\varphi$ , remplazando  $\theta$  por  $\theta + \varphi$ .*

*Demostración.* De la lista de identidades vectoriales que podemos encontrar en [8] tenemos que

$$\frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{u}\|_2^2) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (2.25)$$

Debido a que el flujo es estacionario  $\partial_t \mathbf{u} = 0$ . Utilizando las ecuaciones de Euler para flujos isentrópicos (2.24) obtenemos que

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla\theta$$

y por lo tanto sustituyendo en (2.25)

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|_2^2 + \theta\right) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}).$$

Integrando entre dos puntos cualesquiera de la línea de corriente, digamos  $\mathbf{x}(s_1)$  y  $\mathbf{x}(s_2)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|_2^2 + \theta \Big|_{\mathbf{x}(s_1)}^{\mathbf{x}(s_2)} &= \int_{\mathbf{x}(s_1)}^{\mathbf{x}(s_2)} \nabla\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|_2^2 + \theta\right) \cdot \mathbf{x}'(s) \, ds \\ &= \int_{\mathbf{x}(s_1)}^{\mathbf{x}(s_2)} (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \cdot \mathbf{x}'(s) \, ds = 0. \end{aligned}$$

puesto que  $\mathbf{x}'(s) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(s))$  es ortogonal a  $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$  lo que se comprueba con un sencillo cálculo como sigue:

Calculamos primero  $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$  es decir

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_y w - \partial_z v & \partial_z u - \partial_x w & \partial_x v - \partial_y u \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= (w\partial_z u - w\partial_x w - v\partial_x v + v\partial_y u, u\partial_x v - u\partial_y u \\ &\quad - w\partial_y w + w\partial_z v, v\partial_y w - v\partial_z v - u\partial_z u + u\partial_x w). \end{aligned}$$

Y para finalizar, calculando

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} \\
&= wu\partial_z u - uw\partial_x u - uv\partial_x v + uv\partial_y u + vu\partial_x v - uv\partial_y u \\
&- vw\partial_y w + vw\partial_x v + wv\partial_y w - wv\partial_z v - uw\partial_z u + wu\partial_x w = 0.
\end{aligned}$$

□

## 2.2.2. Rotación y vorticidad

Lo primero que haremos para comenzar esta subsección es definir la vorticidad de un campo vectorial [4].

**Definición 2.2.7.** Dado un campo vectorial  $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  con campo de velocidades  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = (u, v, w)$ , se define el **campo de vorticidad** como

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{u}) = (\partial_y w - \partial_z v, \partial_z u - \partial_x w, \partial_x v - \partial_y u).$$

Lo siguiente será analizar el comportamiento del vector velocidad en cada punto del fluido mediante un desarrollo de Taylor, y veremos que un entorno pequeño de un punto, el comportamiento del fluido  $\mathbf{u}$  será la suma de movimientos rígidos (traslaciones y rotaciones con vector de rotación  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$ ) y una deformación de la que hablaremos un poco más adelante.

**Proposición 2.2.6.** Sea  $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$  y sea  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$  con  $\|\mathbf{h}\|$  suficientemente pequeño. El desarrollo de Taylor

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2)$$

puede escribirse de la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \times \mathbf{h} + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2), \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  es una matriz simétrica  $3 \times 3$  y  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{u})$ .

*Demostración.* Descomponemos el jacobiano de  $\mathbf{u}$ ,

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u & \partial_z u \\ \partial_x v & \partial_y v & \partial_z v \\ \partial_x w & \partial_y w & \partial_z w \end{bmatrix},$$

en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica de la siguiente manera

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.27)$$

donde

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$$

es la parte simétrica y

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})^T]$$

es la parte antisimétrica. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u & \partial_z u \\ \partial_x v & \partial_y v & \partial_z v \\ \partial_x w & \partial_y w & \partial_z w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_x v & \partial_x w \\ \partial_y u & \partial_y v & \partial_y w \\ \partial_z u & \partial_z v & \partial_z w \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \partial_y u - \partial_x v & \partial_z u - \partial_x w \\ \partial_x v - \partial_y u & 0 & \partial_z v - \partial_y w \\ \partial_x w - \partial_z u & \partial_y w - \partial_z v & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} \quad (2.28)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_3\omega_2 - \omega_3h_2 \\ \omega_3h_1 - \omega_1h_3 \\ h_2\omega_1 - \omega_2h_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.27) y (2.28) en el desarrollo de Taylor (2.26) se obtiene el resultado.  $\square$

### ***Sobre el comportamiento de los tensores $\mathbf{S}$ y $\mathbf{A}$ de manera local***

Como hemos visto  $\mathbf{S}$  es una matriz simétrica y por resultados conocidos de álgebra lineal [12] existe una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , digamos  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  en la cual mediante un cambio de base  $\mathbf{S}$  toma forma diagonal

$$\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix},$$

vamos a ver cómo influye este tensor en el comportamiento del fluido, para comenzar el análisis fijamos  $\mathbf{x}$  y consideramos el campo de velocidades inicial como función de  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$ , el movimiento del fluido por lo tanto estará descrito por  $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{y})$  y si eliminamos todos los términos en (2.26) excepto  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{h}$  nos queda  $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{h}$  y puesto que  $\mathbf{x}$  es fijo, es equivalente a estudiar  $\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{h}$ . Esta ecuación vectorial se puede descomponer en tres ecuaciones escalares lineales en la base en la que diagonaliza  $\mathbf{S}$ ,

$\frac{dh_i}{dt} = s_i h_i$  con  $i = 1, 2, 3$ . Ahora consideremos el paralelepípedo de aristas  $h_1, h_2, h_3$  y calculemos cómo varía su volumen a lo largo del tiempo, es decir

$$\frac{d}{dt}(h_1 h_2 h_3) = \frac{dh_1}{dt} h_2 h_3 + h_1 \frac{dh_2}{dt} h_3 + h_1 h_2 \frac{dh_3}{dt} = (s_1 + s_2 + s_3)(h_1 h_2 h_3)$$

y como

$$s_1 + s_2 + s_3 = \text{traza de } \mathbf{S} = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = \text{traza de } \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] = \text{div}(\mathbf{u}).$$

Se tiene

$$\frac{d}{dt}(h_1 h_2 h_3) = \text{div}(\mathbf{u})(h_1 h_2 h_3)$$

esto concluye que el volumen varía en proporción a la divergencia del campo de velocidades del fluido. Por esta razón el tensor  $\mathbf{S}$  se denomina **tensor de deformación** [4].

Por otra parte procediendo como antes, despreciamos todos los términos menos  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \times \mathbf{h}$  con  $\mathbf{x}$  fijo, con el objetivo de estudiar el comportamiento de este término en el campo de velocidades. Lo que nos lleva a la ecuación diferencial

$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \times \mathbf{h}$ , que como antes se puede descomponer en tres ecuaciones diferenciales lineales escalares  $\frac{dh_i}{dt} = \left(\frac{dh_1}{dt}, \frac{dh_2}{dt}, \frac{dh_3}{dt}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}$  lo cual nos conduce al sistema

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_2 h_3 - \omega_3 h_2), \\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_3 h_1 - \omega_1 h_3), \\ \frac{dh_3}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_1 h_2 - \omega_2 h_1), \end{aligned}$$

que en forma matricial adopta la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}.$$

Para resolver el sistema procedemos como sigue [13], denotando a la matriz de coeficientes como

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos sus autovalores, es decir resolvemos la ecuación

$$\det(\mathbf{W} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = 0.$$

$$\lambda_2 = i \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}}{2} = \frac{i\|\boldsymbol{\omega}\|_2}{2}.$$

$$\lambda_3 = -i \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}}{2} = -\frac{i\|\boldsymbol{\omega}\|_2}{2}.$$

Un autovector asociado a  $\lambda_1$  resulta ser

$$\mathbf{v}_1 = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Y asociados a  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$

$$\mathbf{v}_2 = (-\omega_2^2 - \omega_3^2, \omega_1\omega_2 + i\omega_3\|\boldsymbol{\omega}\|_2, \omega_1\omega_3 - i\|\boldsymbol{\omega}\|_2\omega_2).$$

$$\mathbf{v}_3 = (-\omega_2^2 - \omega_3^2, \omega_1\omega_2 - i\omega_3\|\boldsymbol{\omega}\|_2, \omega_1\omega_3 + i\|\boldsymbol{\omega}\|_2\omega_2).$$

Puesto que el sistema es real, tomaremos como sistema fundamental de soluciones

$$\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

$$\mathbf{w}_2 = \text{Re}(\mathbf{v}_2) = (-\omega_2^2 - \omega_3^2, \omega_1\omega_2, \omega_1\omega_3).$$

$$\mathbf{w}_3 = \text{Im}(\mathbf{v}_2) = (0, \omega_3\|\boldsymbol{\omega}\|_2, -\omega_2\|\boldsymbol{\omega}\|_2).$$

La matriz de paso es por tanto

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \omega_1 & -\omega_2^2 - \omega_3^2 & 0 \\ \omega_2 & \omega_1\omega_2 & \omega_3\|\boldsymbol{\omega}\|_2 \\ \omega_3 & \omega_1\omega_3 & -\omega_2\|\boldsymbol{\omega}\|_2 \end{bmatrix}.$$

La solución resulta

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t\|\boldsymbol{\omega}\|_2\frac{1}{2}) & -\sin(t\|\boldsymbol{\omega}\|_2\frac{1}{2}) \\ 0 & \sin(t\|\boldsymbol{\omega}\|_2\frac{1}{2}) & \cos(t\|\boldsymbol{\omega}\|_2\frac{1}{2}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}\mathbf{h}_0.$$

Lo que pone de manifiesto que se trata de una rotación [12].

### 2.2.3. Ecuaciones de Navier-Stokes

En esta subsección abordaremos fluidos más generales y obtendremos ecuaciones diferentes de la cantidad de movimiento. Estas nuevas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones de Navier-Stokes. Comenzaremos la deducción considerando  $\mathbb{R}^3$  lleno de fluido y un dominio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ . A diferencia de como se trataban a los fluidos ideales en los que sólo considerabamos fuerzas de presión en la dirección normal de cada punto de la frontera de  $\mathcal{D}$ , ahora incluiremos además otro tipo de fuerzas que resultan del propio movimiento del fluido. Este nuevo tipo de fuerzas vendrán representadas por un tensor de orden dos  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  con  $(\mathbf{x}, t) \mapsto \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  que recibe el nombre de *tensor de estrés de Cauchy*, sus componentes serán de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Supondremos que cada una de las componentes es una función de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ . Si denominamos  $\mathcal{S}$  a la frontera de  $\mathcal{D}$ . La hipótesis sobre las fuerzas sobre la frontera es

$$\mathbf{F} = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (2.29)$$

donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza a través de  $\mathcal{S}$  por unidad de área.

Observemos que mientras que la fuerza de presión actúa en la dirección del vector normal,  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  no actúa en general en esa dirección. El punto más destacado de las hipótesis es que estamos suponiendo que la fuerza es lineal en  $\mathbf{n}$ , esta hipótesis está justificada por el siguiente teorema [14], una demostración se puede encontrar en [17].

**Teorema 2.2.2** (Teorema de Cauchy). *Existe un único tensor de orden dos, independiente de  $\mathbf{n}$  de forma que el vector de fuerzas de tensión en un punto, que denotaremos  $\mathbf{T}_n$  es lineal en  $\mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{T}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  y el subíndice nos indica que la fuerza se produce a través del plano perpendicular a  $\mathbf{n}$ .*

Supondremos que  $\boldsymbol{\sigma}$  cumple las siguientes propiedades:

1.  $\boldsymbol{\sigma}$  depende linealmente del gradiente de velocidad de  $\mathbf{u}$  es decir,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  está relacionado con  $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$  por una transformación lineal en cada punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ .
2.  $\boldsymbol{\sigma}$  es invariante bajo transformaciones de sólido rígido, esto es, si  $\mathbf{U}$  es una matriz ortogonal, entonces

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}^{-1}) = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{U}^{-1}.$$

3.  $\boldsymbol{\sigma}$  es simétrico. Esta propiedad es una consecuencia de la ley de conservación del momento angular véase [15].

Ahora estableceremos una relación lineal entre  $\boldsymbol{\sigma}$  y la parte simétrica de  $\nabla \mathbf{u}$ , la parte antisimétrica no entrará en consideración pues por defición las fuerzas de estrés sólo afectan a los fluidos que cambian de forma, y la parte antisimétrica induce una rotación. Las fuerzas de tensión en un punto de la frontera del dominio que consideremos quedan completamente determinadas por el tensor de estrés de Cauchy. Escribiremos a partir de ahora

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Interpretamos los elementos diagonales como fuerzas normales. El resto de elementos son fuerzas tangenciales. Como hemos dicho en la propiedad 3. el tensor de estrés de Cauchy es simétrico por lo que sólo tiene 6 componentes independientes.

Como  $\boldsymbol{\sigma}$  depende linealmente del gradiente de velocidades y en particular de su parte simétrica  $\mathbf{S}$  necesitamos un tensor [19] de orden 4 para relacionar todos los elementos de  $\boldsymbol{\sigma}$  con los de  $\mathbf{S}$ , es decir,

$$\sigma_{ij} = K_{ijmn} s_{mn}.$$

Donde  $K_{ijmn}$  es un tensor de orden 4 con 81 elementos puesto que  $i, j, m, n \in \{1, 2, 3\}$ .

En un medio isotrópico, es decir, aquel en el que sus propiedades físicas son iguales en cualquier dirección en torno a un punto cualquiera del fluido, el tensor  $K_{ijmn}$  adopta la forma

$$K_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu \delta_{im} \delta_{jn} + \gamma \delta_{in} \delta_{jm}$$

donde  $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$  son parámetros que dependen del estado termodinámico en cada punto y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Esta expresión para el tensor de orden 4 en un medio isotrópico puede encontrarse deducida en [17]. Por la propiedad 3. sabemos que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  por lo tanto tenemos de forma inmediata que también se cumple  $K_{ijmn} = K_{jimn}$ . Y esto se cumple si  $\gamma = \mu$ , por lo que sólo tenemos dos constantes libres  $\mu$  y  $\lambda$ . Por lo tanto

$$\sigma_{ij} = 2\mu s_{ij} + \lambda(s_{11} + s_{22} + s_{33})\delta_{ij}.$$

Como ya hemos visto en la sección (2.2.2)  $\text{div}(\mathbf{u}) = s_{11} + s_{22} + s_{33}$  por lo que en forma compacta tenemos

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{div}(\mathbf{u}))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad y

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}.$$

Introduciendo un nuevo parámetro  $\zeta$  tal que  $\lambda = \zeta - \frac{2}{3}\mu$  tenemos que

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{div}(\mathbf{u}))\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} = \zeta\text{div}(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{D} - \frac{1}{3}\text{div}(\mathbf{u})\mathbf{I}).$$

El parámetro  $\mu$  se llama *primer coeficiente de viscosidad* y  $\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  recibe el nombre de *segundo coeficiente de viscosidad* [4]. Ahora por comodidad en los siguientes cálculos, se identificarán las variables  $x, y, z$  con  $x_1, x_2, x_3$  respectivamente y las componentes de  $\mathbf{u}$  serán  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ .

Tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \delta_{ij}\lambda\text{div}(\mathbf{u}) + 2\mu s_{ij} = \delta_{ij}\text{div}(\mathbf{u})\lambda + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \sum_{j=1}^3 \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \text{div}(\mathbf{u})}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

y puesto que la delta de Kronecker es no nula cuando  $i = j$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \text{div}(\mathbf{u})}{\partial x_j} \delta_{ij} = \frac{\partial \text{div}(\mathbf{u})}{\partial x_i}. \quad (2.31)$$

Por otra parte

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \text{div}(\mathbf{u})}{\partial x_i}, \quad (2.32)$$

donde hemos usado el teorema de Schwarz [2] para permutar el orden de las derivadas.

Usando (2.31) y (2.32) en (2.30)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \operatorname{div}(\mathbf{u})}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}.$$

En forma compacta podemos escribir

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} = (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div}(\mathbf{u})) + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (2.33)$$

Haciendo uso de (2.20), considerando únicamente fuerzas en la frontera con la hipótesis de que las fuerzas son de la forma (2.29), para cualquier dominio en movimiento  $\mathcal{W}_t$  se cumple que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}_t} \rho \mathbf{u} \, dV = - \int_{\partial \mathcal{W}_t} (p \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dA.$$

Por el Teorema del transporte (2.2.4) tenemos que

$$\int_{\mathcal{W}_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, dV = - \int_{\partial \mathcal{W}_t} (p \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dA. \quad (2.34)$$

Por otra parte haciendo uso del Teorema de la divergencia en el segundo miembro de la igualdad tenemos

$$- \int_{\mathcal{W}_t} (p \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dA = - \int_{\mathcal{W}_t} \nabla p \, dV + \int_{\mathcal{W}_t} \nabla \boldsymbol{\sigma} \, dA, \quad (2.35)$$

y combinando (2.34) , (2.35) y (2.33) llegamos a

$$\int_{\mathcal{W}_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, dV = \int_{\mathcal{W}_t} -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div}(\mathbf{u})) + \mu \Delta \mathbf{u} \, dV,$$

agrupando los términos en uno de los lados de la igualdad tenemos que

$$\int_{\mathcal{W}_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p - (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div}(\mathbf{u})) - \mu \Delta \mathbf{u} \, dV = 0,$$

y aplicando (2.3) llegamos a que

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div}(\mathbf{u})) + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (2.36)$$

las ecuaciones (2.36) reciben el nombre de ecuaciones de ***ecuaciones de Navier-Stokes***.

## 2.2.4. Adaptación y simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes para el estudio de algunos flujos concretos

En esta sección se ha usado como libro de referencia [18].

La versión más general de las ecuaciones de Navier-Stokes es como sigue

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right) + \nabla p = \nabla(\operatorname{div}(\mathbf{u}))(\lambda + \mu) + \mu\Delta\mathbf{u} + f.$$

Esta ecuación, con adecuadas condiciones de contorno, modela un flujo compresible en el que el campo de velocidades  $\mathbf{u}$  del fluido, el campo de presiones  $p$ , la densidad en cada punto  $\rho$  y el campo de fuerzas externas  $f$  dependen del espacio y el tiempo. Es habitual usar versiones más simplificadas de estas ecuaciones para facilitar su uso.

### *Flujos homogéneos e incompresibles*

En el caso de flujos incompresibles y homogéneos  $\rho = \rho_0 = \text{constante}$ , las ecuaciones de Navier y Stokes adoptan una forma más simplificada que es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\nabla p' + \nu\Delta\mathbf{u}, \text{ en } \mathcal{D}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0, \text{ en } \mathcal{D}, \end{aligned}$$

donde  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$  y se le denomina *coeficiente de viscosidad dinámica*,  $p' = \frac{p}{\rho_0}$  y donde  $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$  es la condición de incompresibilidad. Estas ecuaciones son complementadas con condiciones frontera. Una condición natural es la de **no deslizamiento** en la frontera es decir en los puntos de  $\partial\mathcal{D}$  se tiene que  $\mathbf{u} = 0$ . Otra posible condición es que la frontera del dominio se mueva siguiendo unos valores proporcionados por un campo de velocidades conocido digamos  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  sobre  $\partial\mathcal{D}$ .

### *Linearización de las ecuaciones de Navier y Stokes*

Para linealizar las ecuaciones de Navier-Stokes se elimina el término no lineal  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  lo que nos proporciona el sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= f, \text{ en } \mathcal{D}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0, \text{ en } \mathcal{D}, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ en } \partial\mathcal{D}, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \text{ en } \mathcal{D}. \end{aligned}$$

para un flujo incompresible. A este sistema se le denomina **sistema no estacionario de Stokes**.

Se pueden obtener sistemas para otros casos especiales. Por ejemplo, si  $\mathbf{u}$ ,  $f$  y  $p$  son independientes de  $t$  se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= f, \text{ en } \mathcal{D}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0, \text{ en } \mathcal{D}, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{D}. \end{aligned}$$

al que se le denomina **sistema estacionario de Stokes** para un flujo incompresible.

Y si omitimos el término  $\partial_t\mathbf{u} = 0$  en el sistema inicial:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= f \text{ en } \mathcal{D}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0 \text{ en } \mathcal{D}, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{D}. \end{aligned}$$

obtenemos el denominado **sistema estacionario de Navier-Stokes** que es no lineal y de nuevo para un flujo incompresible.

## 2.2.5. Escalado de las ecuaciones de Navier-Stokes

En esta sección se ha usado como libro de referencia [20].

Para comenzar a hablar del escalado hablaremos de las unidades de los sistemas de unidades que se dividen en dos grandes grupos:

1. Unidades fundamentales.
2. Unidades derivadas.

**Definición 2.2.8.** *Un sistema fundamental de unidades es aquel que es suficiente para medir todas las propiedades físicas de un fenómeno físico y es el menor posible con esta propiedad.*

**Definición 2.2.9.** *Cantidades que son independientes del sistema fundamental de unidades que se elija son llamadas **adimensionales**.*

Al modelar fenómenos físicos es conveniente tratar con unidades adimensionales en las ecuaciones. Esto se debe a que el número de parámetros en el problema disminuye si uno pasa de su forma dimensional a su forma adimensional. Además en su forma adimensional es mucho más fácil observar la relevancia de los diferentes términos que aparecen en la ecuación.

Trataremos las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso de un flujo incompresible y homogéneo. Al escribirlas en forma adimensional aparecerá un nuevo parámetro llamado **número de Reynolds** que es relevante para caracterizar los efectos viscosos.

Para un problema dado que involucre el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes, sean  $L$  una longitud característica y  $U$  una velocidad característica. Estos valores se elegirán dependiendo del problema que se esté tratando y son números reales. La elección de  $L$  y  $U$  nos proporciona inmediatamente una escala de tiempo  $T = L/U$ .

Ahora podemos escribir las variables  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  y  $t$  escaladas con estos nuevos parámetros, de forma que nuestras variables adimensionales serán:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U} \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L} \quad t' = \frac{t}{T}.$$

Comenzaremos por la primera componente del sistema no estacionario de Stokes con  $f = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right].$$

Usando los cambios de variable tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(u'U)}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + u'U \frac{\partial(u'U)}{\partial x} \frac{\partial x'}{\partial x} + v'U \frac{\partial(u'U)}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + w'U \frac{\partial(u'U)}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u'U}{\partial(Lx')^2} + \frac{\partial^2 u'U}{\partial(Uy')^2} + \frac{\partial^2 u'U}{\partial(Uz')^2} \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Usando

$$\frac{1}{T} = \frac{dt'}{dt}, \quad \frac{1}{L} = \frac{dx'}{dx}, \quad \frac{1}{L} = \frac{dy'}{dy}, \quad \frac{1}{L} = \frac{dz'}{dz}.$$

Sustituyendo estos cambios en (2.37) tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{du'U}{dt' T} + \frac{U^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{U^2}{L} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{U^2}{L} w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ & = -\frac{1}{\rho_0 T} \frac{\partial p}{\partial x'} + \nu \frac{U}{L^2} \left[ \frac{\partial^2 u'}{\partial(x')^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial(y')^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial(z')^2} \right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{1}{T} = \frac{U}{L}$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{U^2}{L} \right] \left[ \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right] \\ & = - \left[ \frac{U^2}{L} \right] \frac{\partial(p/\rho_0 U^2)}{\partial x'} + \left[ \frac{U}{L^2} \right] \nu \left[ \frac{\partial^2 u'}{\partial(x')^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial(y')^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial(z')^2} \right]. \end{aligned}$$

De la misma forma tratamos la segunda y tercera componentes. Si combinamos las 3 componentes y dividimos por  $U^2/L$  obtenemos que

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \frac{\nu}{LU} \Delta' \mathbf{u}' \quad (2.38)$$

donde  $p' = p/(\rho_0 U^2)$  y  $\nabla'$   $\Delta'$  denotan el gradiente y el Laplaciano respecto de las nuevas variables  $(x', y', z')$ .

La condición de incompresibilidad sigue siendo  $\text{div}(\mathbf{u}') = 0$  donde de nuevo, se considera la divergencia con respecto a  $\mathbf{x}'$ .

Las ecuaciones (2.38) junto con la condición de incompresibilidad es el sistema no estacionario de Navier-Stokes en variables adimensionales. Definimos el número de Reynolds como la cantidad adimensional:

$$R = \frac{LU}{\nu}.$$

Dos flujos con la misma geometría y mismo número de Reynolds se llaman **flujos similares**. Es decir, si  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  son dos flujos sobre los dominios  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  respectivamente, que están relacionados por un factor de escala  $\lambda$  de manera que  $L_1 = \lambda L_2$ . Sean  $U_1$  y  $U_2$  los valores de las velocidades características para cada flujo y  $\nu_1$  y  $\nu_2$  las viscosidades. Entonces si  $R_1 = R_2$ , es decir,

$$\frac{L_1 U_1}{\nu_1} = \frac{L_2 U_2}{\nu_2},$$

las variables adimensionales  $\mathbf{u}'_1$  y  $\mathbf{u}'_2$  satisfacen exactamente la misma ecuación en los mismos dominios. Esto quiere decir que  $\mathbf{u}_1$  puede ser obtenido mediante un adecuado escalado en  $\mathbf{u}_2$ , cuando esto ocurre se dice que  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  son similares.

# Capítulo 3

## El análisis funcional y la mecánica de fluidos

### 3.1. Introducción

En el capítulo anterior se han desarrollado las ecuaciones de Euler del movimiento para fluidos ideales y las ecuaciones de Navier-Stokes que difieren de las primeras en la consideración de los efectos viscosos del fluido. El tratamiento matemático que se ha presentado hasta el momento únicamente ha necesitado el uso del análisis matemático elemental. A la hora de estudiar la existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, el uso análisis matemático elemental es insuficiente. Para el caso de dimensión tres este es un problema todavía abierto. El objetivo de este capítulo es presentar la teoría y resultados necesarios para el análisis de las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión dos. No se profundizará en las demostraciones, pero todos los elementos matemáticos que se utilicen estarán definidos rigurosamente a lo largo del capítulo.

#### Notación

A lo largo del capítulo se utilizarán las siguientes notaciones:

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  representará un elemento de  $\mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

El símbolo  $D^\alpha$  representará la derivada parcial de orden  $|\alpha|$  definida por

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$|\mathbf{x}| := (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| := \left( \sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 3.2. Espacios de funciones

En este capítulo se han consultado como libros de referencia [18], [21], [22].

En esta sección expondremos las herramientas básicas del análisis funcional clásico que se utilizarán para desarrollar la teoría necesaria a lo largo del capítulo. En todo el capítulo,  $\Omega$  será un dominio de  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  representa el espacio de todas las funciones

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x}),$$

de manera que  $D^\alpha u$  existe y es continua en  $\Omega$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^\alpha$  con  $0 \leq |\alpha| \leq k$ .

**Definición 3.2.2.** Se define  $\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$  como el espacio de funciones con derivadas continuas de todos los ordenes en  $\Omega$ .

**Definición 3.2.3.** Sea  $\overline{M}$  la clausura de un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  con  $n = 2$  o  $n = 3$ . Entonces

$$\text{sop}(u) := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

es el soporte de la función continua  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 3.2.4.** Si  $k \in \mathbb{N}$  o  $k = \infty$  entonces

$$\mathcal{C}_0^k(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) : \text{sop}(u) \text{ es compacto, } \text{sop}(u) \subset \Omega\}.$$

**Definición 3.2.5.** Se define  $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$  como el espacio de todas las restricciones  $u|_{\overline{\Omega}}$  a  $\overline{\Omega}$  de las funciones  $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ .

Aquí  $|\alpha| \leq k$  es reemplazado por  $|\alpha| < \infty$  si  $k = \infty$

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} := \sup_{|\alpha| \leq k, \mathbf{x} \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(\mathbf{x})|$$

donde  $|\alpha| \leq k$  se reemplaza por  $|\alpha| < \infty$  si  $k = \infty$ .

**Definición 3.2.6.** Se define el conjunto de las funciones de soporte compacto contenido en la clausura de un dominio de  $\mathbb{R}$  como

$$\mathcal{C}_0^k(\overline{\Omega}) := \{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) : \text{sop}(u) \text{ compacto, } \text{sop}(u) \subset \overline{\Omega}\}.$$

**Definición 3.2.7.** Se dice que una función  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función **Lipschitz** si existe  $L > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{\Omega}$ ,

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Si  $u$  es Lipschitz, se tiene que:

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})} := \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})| + \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

es finito.  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})}$  es una norma del espacio de funciones Lipschitz.

**Definición 3.2.8.** Los espacios presentados en las definiciones anteriores se generalizan a campos vectoriales  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$  con  $m \in \mathbb{N}$  de manera natural como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^k(\Omega)^m &:= \{(u_1, \dots, u_m) : u_j \in \mathcal{C}^k(\Omega), j = 1, \dots, m\}, \\ \mathcal{C}_0^k(\Omega)^m &:= \{(u_1, \dots, u_m) : u_j \in \mathcal{C}_0^k(\Omega), j = 1, \dots, m\}, \\ \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})^m &:= \{(u_1, \dots, u_m) : u_j \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}), j = 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Se define la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})^m} := \sup_{j=1, \dots, m} \|u_j\|_{\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})}.$$

Se definen los espacios

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0^k(\bar{\Omega})^m &:= \{(u_1, \dots, u_m) : u_j \in \mathcal{C}_0^k(\bar{\Omega}), j = 1, \dots, m\}, \\ \mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})^m &:= \{(u_1, \dots, u_m) : u_j \in \mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega}), j = 1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

y la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})^m} := \sup_{j=1, \dots, m} \|u_j\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\bar{\Omega})}.$$

**Definición 3.2.9.** Sea  $n \geq 2$  definimos el espacio de funciones con divergencia nula o solenoidal por

$$\mathcal{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0\}.$$

Para estudiar flujos no estacionarios, es decir, dependientes del tiempo, necesitaremos los espacios siguientes.

**Definición 3.2.10.** Se define

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega); (0, T)) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \times (0, T))^n : \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0\}$$

donde  $T$  es un número real positivo.

Si  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega); (0, T))$  para cada  $t \in [0, T]$  fijo,  $\mathbf{u}(t)$  representará el campo vectorial

$$\mathbf{u}(t) := \mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega).$$

Y análogamente para otros espacios de regularidad diferente.

### **Espacios de Lebesgue**

Sea  $\Omega$  un dominio y sea  $1 \leq q \leq \infty$ .  $L^q(\Omega)$  denota el espacio de Banach de todas las clases de funciones medibles  $u$  en el sentido de Lebesgue de variable real definidas en  $\Omega$  con norma finita

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{1/q}.$$

Para  $q = 2$  es conocido el resultado de que  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle u, v \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Estos espacios se generalizan a campos vectoriales de manera natural  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  como sigue:

$$L^q(\Omega)^n := \{(u_1, \dots, u_n); u_j \in L^q(\Omega), j = 1, \dots, n\}$$

que es un espacio de Banach con la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{L^q(\Omega)^n} := \left( \sum_{j=1}^n \|u_j\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Para  $q = 2$ ,  $L^2(\Omega)^n$  es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} := \sum_{j=1}^n \langle u_j, v_j \rangle_{\Omega}.$$

Escribiremos

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

para  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in L^2(\Omega)^n$ , con  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$ .

**Definición 3.2.11.** Se define el producto escalar entre dos funciones  $L^2(\Omega \times [0, T])^n$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega, T} := \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} dt < \infty.$$

$L^\infty(\Omega)^n$  es el espacio de Banach de todas las funciones medibles  $\mathbf{u}$  con supremo esencial finito

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{j=1 \dots n} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |u_j(\mathbf{x})| < \infty.$$

**Definición 3.2.12.** Diremos que  $\mathbf{u} \in L^q_{loc}(\Omega)^n$  si solo si  $\mathbf{u} \in L^q(\mathcal{B})^n$  para cada bola abierta  $\mathcal{B} \subset \Omega$  con  $\overline{\mathcal{B}} \subset \Omega$ .

**Definición 3.2.13.** La completión del espacio de funciones  $\mathbf{u} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega) \cap L^2(\Omega)^n$ , respecto a la norma

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left( \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \infty$$

se denota por  $L^2_\sigma(\Omega)$ .

**Definición 3.2.14.** Se define el espacio de las funciones  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in L^p(L^q(\Omega), [0, T])^n$  con  $p, q > 0$  tales que

$$\|\mathbf{u}\|_{p,q,T} = \left( \int_0^T \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega)}^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

**Definición 3.2.15.** Se define el espacio de funciones  $\mathbf{u} \in L^\infty(L^2_\sigma(\Omega); [0, T])^n$  tales que

$$\|\mathbf{u}\|_{\infty,2,T} = \sup_{t \in [0, T]} \left( \int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \infty.$$

Una función  $\mathbf{u} \in L^p_{loc}(L^q(\Omega), [0, T])^n$  si sólo si  $\varphi \mathbf{u} \in L^p(L^q(\Omega); [0, T])^n$   $\forall \varphi \in C^\infty_0([0, T])$ .

### ***Espacios de Sobolev***

La teoría de Navier-Stokes desde el punto de vista del análisis funcional se formula usando estos espacios.

**Definición 3.2.16.** Sea  $k, n \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq q < \infty$ . El espacio de Sobolev  $W^{k,q}(\Omega)^n$  está definido como el espacio de todas las  $\mathbf{u} \in L^q(\Omega)^n$  tales que

$$D^\alpha \mathbf{u} \in L^q(\Omega)^n \text{ para todo } |\alpha| \leq k.$$

donde  $D^\alpha \mathbf{u}$  se entiende en el sentido de las distribuciones.

La norma en  $W^{k,q}(\Omega)^n$  está definida por

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{k,q}(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_q^q \right)^{1/q}$$

si  $1 \leq q < \infty$ , y por

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sup_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_\infty$$

si  $q = \infty$ .

Estableceremos, por convenio que  $W^{0,q}(\Omega)^n := L^q(\Omega)^n$  si  $k = 0$ . En los casos  $k = 1, 2$  usamos la notación

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &:= (D_j \mathbf{u})_{j=1}^n. \\ \nabla^2 \mathbf{u} &:= (D_j D_i \mathbf{u})_{j,i=1}^n. \\ \|\nabla \mathbf{u}\|_q &:= \left( \sum_{j=1}^n \|D_j \mathbf{u}\|_q^q \right)^{1/q}. \\ \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_q &:= \left( \sum_{j,i=1}^n \|D_j D_i \mathbf{u}\|_q^q \right)^{1/q} \text{ si } 1 \leq q < \infty. \\ \|\nabla \mathbf{u}\|_\infty &:= \sup_{j=1,\dots,n} \|D_j \mathbf{u}\|_\infty. \\ \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_\infty &:= \sup_{j,i=1,\dots,n} \|D_j D_i \mathbf{u}\|_\infty. \end{aligned}$$

El espacio de Sobolev  $W^{k,2}(\Omega)^n$  es un espacio de Hilbert con el producto interno,

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v} \rangle, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^{k,2}(\Omega)^n.$$

Principalmente usaremos el espacio de Hilbert  $W^{1,2}(\Omega)^n$  con el producto escalar

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle := \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \nabla u_i \nabla v_i \, dx$$

El subespacio

$$W_0^{k,q}(\Omega)^n \subset W^{k,q}(\Omega)^n$$

está definido como la clausura del espacio de las funciones  $C_0^\infty(\Omega)^n$  en la norma  $\|\cdot\|_{k,q}$ .

**Definición 3.2.17.** La completación del espacio de funciones  $\mathbf{u} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)^n$  con respecto a la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_2^2 \right)^{1/2} < \infty$$

se denota por  $W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$ .

**Definición 3.2.18.** Se define el espacio de funciones  $\mathbf{u} \in L^2(W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega), [0, T])$

$$\left( \int_0^T \left( \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_2^2 \right)^{1/2} dt \right)^{1/2} < \infty.$$

### 3.3. Teorema de existencia y unicidad

Una vez mostrado el marco teórico en el que nos vamos a mover, esta sección expondrá las definiciones y resultados necesarios para enunciar el teorema de existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión 2.

**Definición 3.3.1.** (*Solución débil*)

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio cualquiera con  $n = 2, 3$ .

Sea  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \operatorname{div}(\mathbf{F})$  con  $\mathbf{f}_0 \in L^1_{loc}(L^2(\Omega)^n; (0, T))$ ,  $\mathbf{F} \in L^1_{loc}(L^2(\Omega)^{n^2}; (0, T))$ ,  $\operatorname{div}$  se entiende en el sentido de las distribuciones.

Entonces

$$\mathbf{u} \in L^\infty_{loc}(L^2_\sigma(\Omega); [0, T]) \cap L^2_{loc}(W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega); [0, T]) \quad (3.1)$$

es una **solución débil** del sistema de Navier-Stokes

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  con datos  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{u}_0$ , si sólo si

$$-\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_t \rangle_{\Omega, T} + \nu \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle_{\Omega, T} + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega, T} = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}(0) \rangle_\Omega + \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{v} \rangle_{\Omega, T} - \langle \mathbf{F}, \nabla \mathbf{v} \rangle_{\Omega, T}$$

se satisface para todo  $\mathbf{v} \in L^2(W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega); [0, T])$ .

Si  $\mathbf{u}$  es una solución débil y  $p$  es tal que

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$$

se satisface en el sentido de las distribuciones en  $\Omega \times (0, T)$ , entonces  $p$  se denomina presión asociada a  $\mathbf{u}$ .

**Definición 3.3.2.** Se dice que una solución débil  $\mathbf{u}$  de (3.1) es débilmente continua si

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &: [0, T) \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{w} \rangle_\Omega \end{aligned}$$

es continua para cada  $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)^n$  fijo.

**Teorema 3.3.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio cualquiera con  $n = 2, 3$ , sea  $0 < T \leq \infty$ ,  $\mathbf{u}_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ , y  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \operatorname{div}(\mathbf{F})$  con

$$\mathbf{f}_0 \in L^1_{loc}(L^2(\Omega)^n; [0, T]), \mathbf{F} \in L^2_{loc}(L^2(\Omega)^{n^2}; [0, T]).$$

Entonces existe una solución débil

$$\mathbf{u} \in L^\infty_{loc}(L^2_\sigma(\Omega); [0, T]) \cap L^2_{loc}(W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega); [0, T])$$

del sistema de Navier-Stokes

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Satisfaciendo las siguientes propiedades:

1.  $\mathbf{u}$  es débilmente continua y  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ .

2.

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2 d\tau \leq$$

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_0\|_2^2 + \int_0^t \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{u} \rangle_\Omega d\tau - \int_0^t \langle \mathbf{F}, \nabla \mathbf{u} \rangle_\Omega d\tau$$

para todo  $t$  con  $0 \leq t < T$ .

3.

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|_{2,\infty;T'}^2 + \nu\|\nabla \mathbf{u}\|_{2,2;T'}^2 \leq 2\|\mathbf{u}_0\|_2^2 + \frac{4}{\nu}\|\mathbf{F}\|_{2,2;T'}^2 + 8\|\mathbf{f}_0\|_{2,1;T'}^2$$

para todo  $T'$  con  $0 \leq T' < T$ .

**Teorema 3.3.2.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio cualquiera, sea  $0 < T \leq \infty$ ,  $\mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \operatorname{div}(\mathbf{F})$  con

$$\mathbf{f}_0 \in L_{loc}^1(L^2(\Omega)^2; [0, T]), \quad \mathbf{F} \in L_{loc}^2(L^2(\Omega)^4; [0, T])$$

y sean

$$\mathbf{u}, \mathbf{w} \in L_{loc}^\infty(L_\sigma^2(\Omega); [0, T]) \cap L_{loc}^2(W_{0,\sigma}^{1,2}; [0, T])$$

dos soluciones débiles del sistema de Navier-Stokes

$$\mathbf{u}_t - \nu\Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Entonces  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$  en  $[0, T)$ .

**Definición 3.3.3.** (Solución fuerte) Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio cualquiera con  $n = 2, 3$ , sea  $0 < T \leq \infty$ ,  $\mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \operatorname{div}(\mathbf{F})$  con

$$\mathbf{f}_0 \in L_{loc}^1(L^2(\Omega)^n; [0, T]), \quad \mathbf{F} \in L_{loc}^2(L^2(\Omega)^{n^2}; [0, T])$$

y sea

$$\mathbf{u} \in L_{loc}^\infty(L_\sigma^2(\Omega); [0, T]) \cap L_{loc}^2(W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega); [0, T])$$

una solución débil del sistema de Navier-Stokes

$$\mathbf{u}_t - \nu\Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Entonces  $\mathbf{u}$  es una **solución fuerte** de este sistema con datos iniciales  $\mathbf{f}, \mathbf{u}_0$  si sólo si se satisface la condición de Serrin:

$$\mathbf{u} \in L_{loc}^s(L^q(\Omega)^n; [0, T]),$$

donde  $n < q < \infty$ ,  $2 < s < \infty$ ,  $\frac{n}{q} + \frac{2}{s} \leq 1$ .

**Teorema 3.3.3.** (De existencia y unicidad en el plano) Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio cualquiera de  $\mathbb{R}^2$ , sea  $0 < T < \infty$ ,  $\mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$ , y sea  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \text{div}(\mathbf{F})$  con

$$\mathbf{f}_0 \in L_{loc}^1(L^2(\Omega)^2; [0, T]), \mathbf{F} \in L_{loc}^2(L^2(\Omega)^4; [0, T])$$

Entonces existe una única solución débil

$$\mathbf{u} \in L_{loc}^\infty(L_\sigma^2(\Omega); [0, T]) \cap L_{loc}^2(W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega); [0, T])$$

del sistema de Navier-Stokes

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{div}(\mathbf{u}) = 0$$

$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  con  $\mathbf{f}, \mathbf{u}_0$  como datos,

de manera que  $\mathbf{u}$  satisface la condición de Serrin

$$\mathbf{u} \in L_{loc}^4(L^4(\Omega)^2; [0, T])$$

y es por lo tanto una solución fuerte del sistema de Navier-Stokes.

# Bibliografía

- [1] Tom M. Apostol. "CALCULUS I", Reverté, (1990).
- [2] Tom M. Apostol. "CALCULUS II", Reverté, (1990).
- [3] Tom M. Apostol. "Análisis Matemático", Reverté, (2009).
- [4] Alexandre J. Chorin, Jerrold E. Marsden. "A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics", Springer, (1998).
- [5] Franz Durst. "Fluid Mechanics, An Introduction to the Theory of fluid Flows", Springer, (2008).
- [6] Frank M. White, "Mecánica de Fluidos", Mc Graw Hill, Sexta Edición (2008).
- [7] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba "Cálculo Vectorial", Pearson Addison Wesley, Quinta Edición (2004).
- [8] Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil, Luis A. Tristán Vega. "Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en varias variables", THOMSON (2005).
- [9] Daniel Azagra, "Cálculo Integral", Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.
- [10] Raymond A. Serway, John W. Jewett, Jr. "Física para ciencias e ingeniería", CENGAGE Learning, Vol. 1 (2010).
- [11] W.Rudin "Análisis Real y Complejo" McGraw-Hill (1987).
- [12] Luis Miguel Merino Gonzalez, Evangelina Santos Alaez. "Álgebra lineal con métodos elementales" Paraninfo (2006).
- [13] Lawrence Perko "Differential Equations and Dynamical Systems" Springer (2000)
- [14] Fridtjov Irgens "Continuum Mechanics" Springer (2008).
- [15] Eduardo W.V. Chaves "Notes on Continuum Mechanics" Springer Netherlands (2013)
- [16] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen, David R Dowling "Fluid Mechanics, Fifth Edition" Academic Press (2012).

- [17] Rutherford Aris "Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics" Prentice-Hall
- [18] Hermann Sohr "The Navier-Stokes Equations An Elementary Functional Analytic Approach" Birkh'aufer Basel (2001)
- [19] Ruíz-Tolosa Castillo "From vectors to tensors" Springer (2005)
- [20] Barenblatt G.I "Scaling" Cambridge Texts in Applied Mathematics (2003).
- [21] W.Rudin "Análisis funcional" Reverté (1979)
- [22] Kosaku Yosida "Functional Analysis" Springer-Verlag, Heidelberg, (1980).