Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Números perfectos, multiperfectos y amigos

Autor: Diego Alonso Santamaría

Tutor: José Enrique Marcos Naveira

Resumen

"... nuevo número perfecto descubierto..."

-GIMPS (7 de enero, 2016. [25]*)*

"Un millón de nuevos pares de números amigos al día."

*-Sergei Chernykh (*20 *de diciembre,* 2015. [12]*)*

"... son números dignos de estudio por derecho propio."

-Curtis Cooper

"... estoy seguro de que habrá más de mil millones (de números amigos) en unos meses."

-Sergei Chernykh

Se están sucediendo, en tiempo presente, progresos en lo relativo a estos antiquísimos números, historia viva de las matemáticas. A lo largo de este trabajo realizaremos un recorrido por todos los avances que se han producido en estos ancestrales números, presentaremos los métodos de búsqueda utilizados y qué nivel de conocimiento se posee aún de ellos, finalizando con los principales misterios sin resolver que a día de hoy ocultan.

El trabajo relaciona estos números con resultados tan importantes como la *Hipótesis de Riemann*, el resultado matemático de doble implicación con mayor intervalo de tiempo entre la demostración de una de ellas y su recíproca (*Teorema de Euclides-Euler*) y el problema más antiguo del mundo, la existencia de números perfectos impares. De igual modo trata temas tales como el primer proyecto de computación compartida de la historia, el GIMPS (base de los hallazgos de los últimos números perfectos), o la reciente revolución en el estudio de los números amigos. El autor relaciona dos métodos de búsqueda de números multiperfectos y números amigos, mostrando la estrecha relación existente entre ambos. El autor también corrige una errata de Carmichael y Mason repetida en textos de otros tantos autores. Por último, y

de manera testimonial, se incluyen dos comunicaciones con los últimos descubridores en estas materias aportando su visión particular, Curtis Cooper y Sergei Chernykh.

Sin duda alguna, algo esconden estos números para que matemáticos de la talla de Pitágoras, Euclides, Descartes, Fermat, Mersenne, Euler, Lehmer, Carmichael, Erdös... pusieran sus ojos en ellos.

El capítulo uno presenta las funciones aritméticas σ y τ utilizadas recursivamente a lo largo de todo el trabajo. En él se presentarán algunas de sus características, teoremas que serán posteriormente usados y demás ecuaciones que las relacionan con otras funciones.

De entre todos los resultados en los que se encuentra involucrada la función σ destaca sobre ellos la *Desigualdad de Robin*, la cual relaciona directamente dicha función con la *Hipótesis de Riemann*. El capítulo dos presenta este teorema y describe su desarrollo histórico.

El tercer capítulo versa sobre los números perfectos. Se introduce brevemente el concepto de primo de Mersenne y su proyecto global de búsqueda (GIMPS) como paso obligatorio en el estudio de los números perfectos pares. Seguidamente se detalla el *Teorema de Euclides-Euler*, base de los hallazgos de números perfectos pares. El capítulo finaliza haciendo referencia a algunas de las últimas cotas halladas para los números perfectos impares, así como distintos resultados que definirían, de existir, su factorización. Como anexo, se aporta un correo de Curtis Cooper aportando una visión general del tema.

El capítulo cuatro trata los números multiperfectos. En él, se hace uso de la *Desigualdad de Robin* como forma de obtener una cota para dichos números. Se incluye una colección de métodos de búsqueda, dentro de la cual el autor corrige una errata de Carmichael y Mason ampliamente difundida. El capítulo cierra con el estudio de los dos tipos de número multiperfecto más reseñables: multiperfectos impares y multiperfectos de forma plana.

En el quinto capítulo se profundiza en el estudio de los números amigos, desde las distintas clasificaciones de sus métodos de búsqueda hasta la presentación de los nuevos descubrimientos acaecidos en la actualidad. Se adjunta un correo de Sergei Chernykh en lo relativo a sus hallazgos y proyectos futuros. El capítulo termina presentando aquellos números amigos que han sido más buscados a lo largo de la historia, y el conocimiento actual que se tiene de ellos: pares no divisibles por 3, con menor factor primo distinto, de paridad opuesta y relativamente primos.

El trabajo finaliza con la enumeración de las principales incógnitas aún sin resolver tras más de dos milenios de estudio.

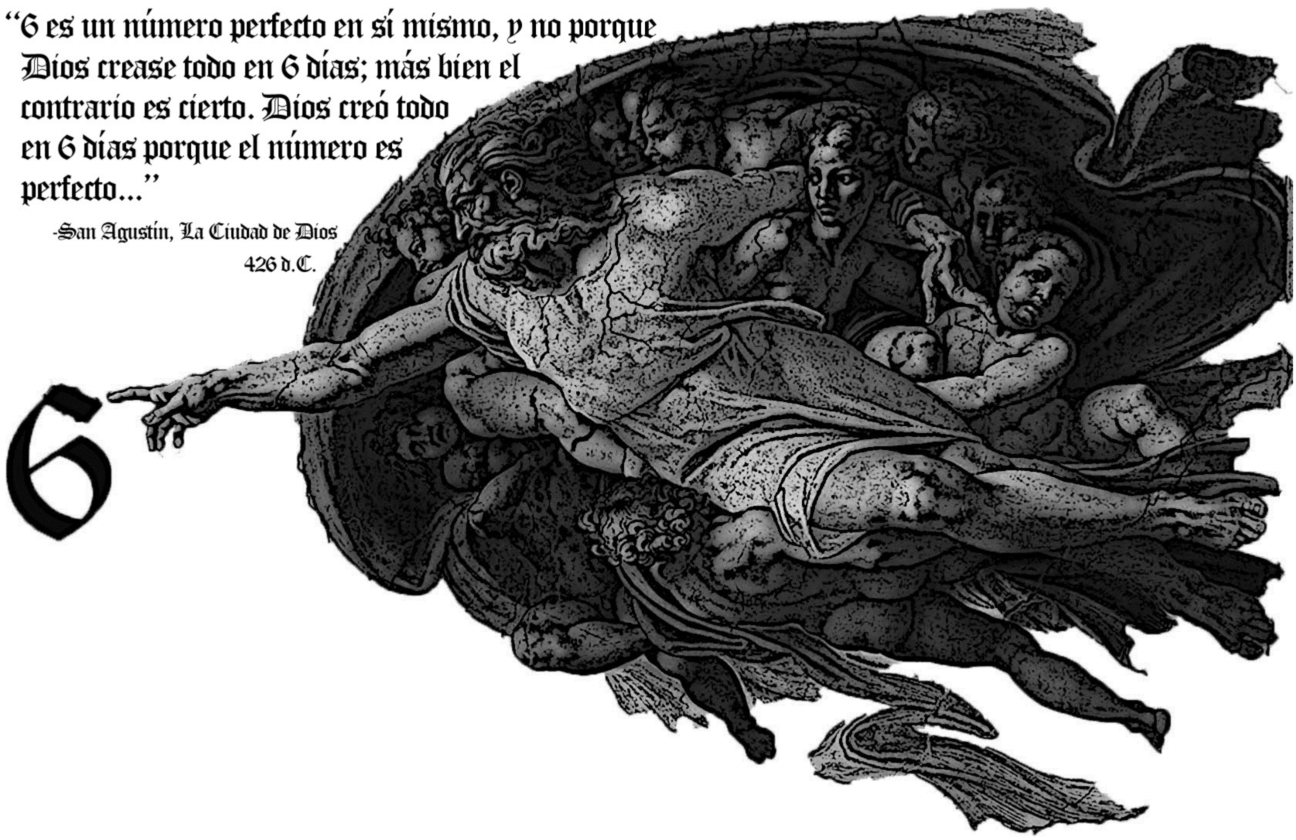
Como añadido, un anexo histórico en el cual se relatan desde los hechos más reseñables en el estudio de estos números hasta algunos resultados de la época que merecen ser detallados.

Todos los datos que se presentan han sido actualizados hasta la fecha de escritura de este trabajo.

Índice general

Índice de tablas

Prefacio



La cita de San Agustín es un fiel reflejo de la curiosidad que estos números han despertado en el ser humano a lo largo de toda su existencia. Hace ya 2500 años que se tiene constancia de los dos primeros números perfectos y fue poco después, con solo cuatro números perfectos conocidos, cuando se atrevieron a conjeturar, acertadamente, que todo número perfecto (par) termina en 6 u 8. Hablamos de una época en la que todo se encontraba supeditado a una visión teológica y los números perfectos no podían ser menos, tomando así el nombre de aquella "divina" perfección imposible de haber sido creada por el ser humano. Aquí comienza uno de los problemas sin resolver más antiguos de la humanidad, la búsqueda de un número perfecto impar.

Pasarán dos milenios hasta que el concepto de número perfecto evolucione con el descubrimiento, en 1631 y de la mano de Mersenne, de un número multiperfecto (a excepción de los perfectos ya conocidos). Algunas de las más importantes mentes matemáticas han trabajado en el hallazgo de este tipo de números, cada vez más y más grandes. Surge una nueva duda, ¿Existe un número multiperfecto impar?

Jacob regala a Esaú 220 cabras y 220 ovejas
"...doscientas cabras y veinte machos cabríos, doscientas ovejas y veinte carneros..."
como símbolo de estrecha amistad
-Génesis 32:14

El concepto de números amigos (el 220 es el menor de este tipo) siempre ha reflejado una estrecha conexión entre dos elementos, una relación reflejada en la Biblia como una profunda amistad entre dos personas. No obstante, el inicio de sus estudios vino de la mano de matemáticos árabes. Desde la creación del primer procedimiento de búsqueda en el año 850, muchos otros métodos se han sucedido. Sin embargo, recientemente un hombre ha revolucionado el conocimiento de los números amigos, pasando de conocerse apenas diez millones a más de mil millones de pares en un intervalo de seis meses.

Capítulo 1

Las funciones aritméticas $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\tau}$

En este primer capítulo definiremos las dos funciones aritméticas que serán utilizadas a lo largo de todo el trabajo, como son la función σ o *suma de divisores*, y la función τ o *número de divisores*. Para ello, primero realizaremos una breve introducción del concepto de función aritmética, pasaremos a estudiar las aplicaciones ya citadas, y acabaremos por observar las curiosas relaciones que se establecen entre ellas, así como con otras funciones importantes, y que merecen ser destacadas.

Una ***función aritmética*** f es una aplicación de valores complejos definida sobre el conjunto de los números naturales, $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{C}$. También se consideran las aplicaciones $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}$, e incluso $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}$. Nosotros utilizaremos principalmente estas últimas, aunque todos los resultados que veremos son válidos en las clases de funciones más generales que hemos indicado.

Ejemplo 1. *Las siguientes aplicaciones son ejemplo de funciones aritméticas*

$$f(n)=\sqrt{n}, \qquad \varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right), \qquad \sigma(n)=\sum_{d|n}d, \qquad \tau(n)=\sum_{d|n}1, \qquad \ldots$$

para todo n entero positivo. ■

Sea A el conjunto de las funciones aritméticas $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}$ (o bien $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}$). Sean $f,g\in A$, definimos en A la suma de la forma

$$(f+g)(n)=f(n)+g(n),$$

y el producto de Dirichlet, o de convolución, de la forma

$$(f*g)=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{ab=n}f(a)g(b)=\sum_{d|n}f\left(\frac{n}{d}\right)(d).$$

Con todo ello, $(A,+,*)$ es un dominio de integridad.

Definición 1.1. *Se dice que f es una función* ***aditiva*** *si*

$$f(mn)=f(m)+f(n)$$

cuando m y n son primos entre sí, es decir, m.c.d.$(m,n) = 1$.

Se dice que f es una función ***totalmente aditiva*** *si es aditiva para números cualesquiera m y n.*

Definición 1.2. *Se dice que f es una función* ***multiplicativa*** *si*

$$f(1) = 1, \qquad f(mn) = f(m)f(n)$$

cuando m y n son primos entre sí, es decir, m.c.d.$(m,n) = 1$.

Se dice que f es una función ***completamente multiplicativa*** *si es aditiva para números cualesquiera m y n.*

Teorema 1.3. *Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la descomposición en factores primos de un número entero positivo, y sean f y g dos funciones aritméticas tales que $f(1) = 1$ y $g(1) = 0$. Entonces:*

(a). f es multiplicativa si

$$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_k^{\alpha_k});$$

y si es multiplicativa, es completamente multiplicativa si

$$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \cdots f(p_k)^{\alpha_k}.$$

(b). g es aditiva si

$$g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}) = g(p_1^{\alpha_1}) + g(p_2^{\alpha_2}) + ... + g(p_k^{\alpha_k});$$

y si es aditiva, es completamente aditiva si

$$g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \alpha_1 g(p_1) + \alpha_2 g(p_2) + \ldots + \alpha_k g(p_k).$$

<u>`Demostración`</u>
Trivial, a partir de las definiciones.

$\square$

Teorema 1.4. *Sea n un número entero positivo. Si $f(n)$ es una función multiplicativa, entonces la función*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

también es multiplicativa.

<u>`Demostración`</u>
Sean m y n dos números enteros positivos primos entre sí. Cada divisor d de mn se puede expresar de la forma $d = ab$ con $a\,|\,m$, $b\,|\,n$, donde a y b son primos entre sí. Entonces

$$F(mn) = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{a|m} \sum_{b|n} f(ab)$$

y, puesto que f es multiplicativa,

$$\sum_{a|m}\sum_{b|n} f(ab) = \sum_{a|m} f(a) \sum_{b|n} f(b) = F(m)F(n).$$

□

Teorema 1.5. *Si f y g son funciones multiplicativas, entonces $f * g$ es multiplicativa.*

<u>Demostración</u>
Sean m y n dos números enteros positivos primos entre sí. Se tiene que

$$f * g(mn) = \sum_{d|mn} f(d) g\left(\frac{mn}{d}\right) = \sum_{\substack{a|m\\ b|n\\ ab=d}} f(ab) g\left(\frac{m}{a}\frac{n}{b}\right) = \blacktriangle$$

Nótese que se cumple que m.c.d.$(a, b) = 1$ y m.c.d.$(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}) = 1$, dado que m.c.d.$(m, n) = 1$. Además, el conjunto $\{ab,$ tal que $a \,|\, m, b \,|\, n\}$ es exactamente el conjunto de todos los divisores d de mn. Continuando con las igualdades,

$$\blacktriangle = \sum_{\substack{a|m\\ b|n}} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right) g\left(\frac{n}{b}\right) = \left[\sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right)\right] \left[\sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right)\right] = [f * g(m)][f * g(n)].$$

□

Una vez hechos los comentarios previos, describamos las funciones aritméticas σ y τ, las cuales serán la base sobre la que se construirá este trabajo:

1.1. La función $\boldsymbol{\sigma}$

Definición 1.6. *Sea n un número entero positivo. Se denota* $\boldsymbol{\sigma(n)}$ *a la suma de todos los divisores positivos de n (incluidos 1 y n), es decir,*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

También es conocida como la función ***suma de divisores****.*

Se denota ***s(n)*** *a la suma de todos los divisores propios de n, es decir,*

$$s(n) = \sigma(n) - n.$$

Nota. *Es de destacar la antigua notación, ya caída en desuso, del signo $\int$ para denotar la función σ.*

Ejemplo 2.

$\sigma(9) = 1 + 3 + 9 = 13$ $\qquad$ $s(9) = 1 + 3 = 4$

$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$ $\qquad$ $s(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$ ■

Proposición 1.7. *La función σ es multiplicativa.*

Demostración

Sean m y n dos números enteros positivos. Observemos que si m y n son primos entre sí, entonces todo divisor d de mn ha de ser de la forma $d = d_1 d_2$, donde d_1 y d_2 son divisores de m y n respectivamente. De igual manera, cada pareja de divisores de m y n nos da un divisor de mn. Entonces, y atendiendo a la propiedad multiplicativa de la función identidad, se sigue que

$$\sigma(mn) = \sum_{d|mn} d = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} d_1 d_2 = \left(\sum_{d_1|m} d_1\right)\left(\sum_{d_2|n} d_2\right) = \sigma(m)\sigma(n).$$

□

Ejemplo 3.

$$\sigma(9 \cdot 10) = \sigma(90) = 234 = 13 \cdot 18 = \sigma(9)\sigma(10)$$ ■

Sin embargo, la función σ no es *completamente multiplicativa*, es decir, no es multiplicativa para números que no sean primos entre sí:

Ejemplo 4.

$$\sigma(9 \cdot 12) = \sigma(108) = 280 \neq 364 = 13 \cdot 28 = \sigma(9)\sigma(12)$$ ■

Teorema 1.8. *Sea $n > 1$ un número entero positivo, y sea*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

su descomposición en factores primos, entonces

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Demostración

Puesto que la función σ es multiplicativa, se tiene que

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \cdots \sigma(p_k^{\alpha_k}). \tag{1.1}$$

Para la potencia de un primo p^α, sus divisores son $1, p, p^2, \cdots, p^\alpha$. Por tanto,

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha,$$

lo cual es una serie geométrica de razón p. Multiplicando la serie por p

$$p \cdot \sigma(p^\alpha) = p + p^2 + p^3 + \ldots + p^{\alpha+1},$$

restándole la serie original

$$p \cdot \sigma(p^\alpha) - \sigma(p^\alpha) = p^{\alpha+1} - 1$$

y despejando, obtenemos

$$\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}.$$

Aplicando esto en la ecuación (1.1) obtenemos el resultado pedido.

□

De este teorema se desprenden dos casos triviales que, debido a su continuo uso en futuras demostraciones, pasamos a destacar:

- Si $n = 2^k$,
$$\sigma(n) = \frac{2^{k+1}-1}{2-1} = 2^{k+1}-1. \tag{1.2}$$
- Si n es primo,
$$\sigma(n) = \frac{n^2-1}{n-1} = n+1. \tag{1.3}$$

A continuación, detallaremos algunas propiedades de la función σ de las que haremos uso a lo largo del trabajo:

Teorema 1.9. *Si $m|n$, entonces*
$$\frac{\sigma(m)}{m} \leq \frac{\sigma(n)}{n}.$$

<u>`Demostración`</u>
Partiendo de la definición de la función σ, se cumple que
$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d} = n\sum_{d|n}\frac{1}{d}.$$
Por tanto, si m es un divisor de n, se tiene que
$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n}\frac{1}{d} \geqslant \sum_{d|m}\frac{1}{d} = \frac{\sigma(m)}{m}.$$

□

Teorema 1.10. *Para todo número entero positivo $n \geqslant 2$ se cumple que*
$$1+n \leqslant \sigma(n) \leqslant n(1+\ln(n)).$$

<u>`Demostración`</u>
La primera desigualdad, $1+n \leqslant \sigma(n)$, es obvia pues cualquier número $n \geqslant 2$ es, al menos, divisible por sí mismo y la unidad.
Probemos la segunda desigualdad:
$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n}\frac{n}{d} = n\sum_{d|n}\frac{1}{d} \leqslant n\sum_{1<d<n}\frac{1}{d}.$$
Ahora, acotando el sumatorio final por una integral:
$$\sum_{1<d<n}\frac{1}{d} < 1 + \sum_{2<d<n}\frac{1}{d} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1+\log(n).$$

□

Teorema 1.11. *Sean d y p números enteros positivos, y sea p un número primo. Entonces $d+1 \,|\, n+1$ si y solo si $\sigma(p^d) \,|\, \sigma(p^n)$.*

Demostración

Es claro que $\sigma(p^d) \,|\, \sigma(p^n)$ es equivalente a probar que $p^{d+1}-1 \,|\, p^{n+1}-1$.

Como $(d+1)k = n+1$ para algún entero k, entonces

$$p^{n+1}-1 = p^{(d+1)k}-1 = (p^{d+1}-1)(p^{(d+1)(k-1)} + p^{(d+1)(k-2)} + \ldots 1),$$

por lo que la primera implicación queda probada.

Veamos el recíproco. Supongamos que $d+1 \nmid n+1$, entonces

$$n+1 = (r+1)(d+1) + s$$

con $r \geq 0$ y $1 \leq s < d+1$.
Por otro lado, existe un número natural k tal que

$$(1+p+\ldots+p^d)k = (1+p+\ldots+p^{r(d+1)+d}) + p^{r(d+1)+d+1} + \ldots + p^n.$$

No obstante, como se cumple la igualdad

$$(1+p+\ldots+p^d)(1+p^{d+1}+p^{2(d+1)}+\ldots+p^{r(d+1)}) = (1+p+p^2+\ldots+p^{r(d+1)+d})$$

entonces existe un número natural m tal que

$$(1+p+\ldots+p^d)m = p^{r(d+1)+d+1}+\ldots+p^n = p^{(r+1)(d+1)}(1+p+p^2+\ldots+p^{n-(r+1)(d+1)}).$$

Por tanto, dado que $p \nmid (1+p+\ldots p^d)$, se sigue que

$$1+p+\ldots+p^d \mid 1+p+\ldots+p^{n-(r+1)(d+1)}$$

luego

$$n-(r+1)(d+1) \geq d,$$

y por consiguiente

$$s \geq d+1,$$

lo cual es una contradicción, y en conclusión $d+1 \,|\, n+1$.

$\square$

Definición 1.12. *Sea n un número entero positivo. Se denota $\boldsymbol{\sigma_k(n)}$ a la suma de las potencias k-ésimas de todos los divisores positivos de n (incluidos 1 y n), es decir,*

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Nota. *En consecuencia, la función σ antes descrita, Definición 1.6, es un caso particular de este tipo de funciones, para $k=1$. Es decir, $\sigma(n) = \sigma_1(n)$.*
De igual modo, para el caso $k=0$ no es otra que la función τ que será descrita en la siguiente sección, Definición 1.14. Es decir, $\tau(n) = \sigma_0(n)$.

Teorema 1.13. *Sea $n > 1$ un número entero positivo y sea*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

su descomposición en factores primos, entonces

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{(\alpha_i+1)k} - 1}{p_i^k - 1}.$$

<u>Demostración</u>
Este teorema es una generalización del *Teorema* 1.8, y su demostración se realiza, por tanto, de una manera similar.

□

1.2. La función $\boldsymbol{\tau}$

Definición 1.14. *Sea n un número entero positivo. Se denota $\boldsymbol{\tau(n)}$ al número de divisores positivos de n (incluidos 1 y n), es decir,*

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

*También es conocida como la función **número de divisores**.*

Nota. *En algunos libros, la función número de divisores, $\tau(n)$, también es conocida con la notación $\boldsymbol{d(n)}$.*
De igual modo, cabe destacar que no debe confundirse dicha función con la función τ de Ramanujan, conceptos totalmente diferentes.

Ejemplo 5.

$$\tau(9) = 3$$
$$\tau(12) = 6$$

■

Proposición 1.15. *La función τ es multiplicativa.*

<u>Demostración</u>
Sean m y n dos números enteros positivos. Observemos que si m y n son primos entre sí, entonces todo divisor d de mn ha de ser de la forma $d = d_1 d_2$, donde d_1 y d_2 son divisores de m y n respectivamente. De igual manera, cada pareja de divisores de m y n nos da un divisor de mn. Entonces, y atendiendo a la propiedad multiplicativa de la función identidad,

$$\tau(mn) = \sum_{d|mn} 1 = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} 1 = \left(\sum_{d_1|m} 1\right)\left(\sum_{d_2|n} 1\right) = \tau(m)\tau(n).$$

□

Ejemplo 6.

$$\tau(9 \cdot 10) = \tau(90) = 12 = 3 \cdot 4 = \tau(9)\tau(10)$$ ■

Sin embargo, la función τ no es *completamente multiplicativa*, es decir, no es multiplicativa para números que no sean primos entre sí. Veámoslo:

Ejemplo 7.

$$\tau(9 \cdot 12) = \tau(108) = 12 \neq 18 = 3 \cdot 6 = \tau(9)\tau(12)$$ ■

Teorema 1.16. *Sea $n > 1$ un número entero positivo y sea*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

su descomposición en factores primos, entonces

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

<u>Demostración</u>
Es claro que todos los divisores d de n son de la forma

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \text{ con } 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i \text{ para todo } i = 1, 2, ..., k$$

por tanto, contar tales divisores es equivalente a enumerar las r-uplas de enteros $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ con $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ para todo $i = 1, 2, ..., k$; dando como resultado

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

□

Existen dos casos triviales de este teorema que serán recurrentemente usados en sucesivas demostraciones:

- Si $n = p^k$ con p primo,
$$\tau(n) = k + 1.$$
- Si n es primo,
$$\tau(n) = 2.$$

Corolario 1.17. *El producto de todos los divisores positivos de n es $n^{\tau(n)/2}$.*

<u>Demostración</u>
Sean $d_1, d_2, ..., d_{\tau(n)}$ los divisores de n, con $d_1 < d_2 < ... < d_{\tau(n)}$.
Puesto que

$$\begin{aligned} n &= d_1 d_{\tau(n)} \\ n &= d_2 d_{\tau(n)-1} \\ &\cdots \\ n &= d_{\tau(n)-1} d_2 \\ n &= d_{\tau(n)} d_1. \end{aligned}$$

Multiplicando todas las igualdades, se tiene que

$$n^{\tau(n)} = (d_1 \cdot d_2 \cdots d_{\tau(n)})^2,$$

o lo que es lo mismo,

$$n^{\tau(n)/2} = d_1 \cdot d_2 \cdots d_{\tau(n)}.$$

□

Ejemplo 8. *El producto de los divisores de* 16 *es*

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 = 1024 = 4^5 = 16^{5/2} = 16^{\tau(16)/2}$$ ■

1.3. Relaciones entre Funciones Aritméticas

En esta sección presentaremos algunas de las relaciones que se establecen entre las funciones σ, τ y demás funciones aritméticas. La mayoría de las ecuaciones detalladas se encuentran recogidas, aunque no probadas, en el reputado libro de L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers* [16].

Teorema 1.18 (Cesàro)**.** *Sea n un número entero positivo. Se cumple que*

$$S_n + \sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) = n^2$$

donde S_n es la suma de los residuos obtenidos de dividir n por cada entero menor que n.

<u>`Demostración`</u>
Para cada número entero k con $1 \leq k \leq n$ podemos escribir n de la forma

$$n = q_k \cdot k + r_k \qquad \text{con } 1 \leq k \leq n,\ q_k \text{ y } r_k \text{ enteros positivos,}$$

con lo que se tiene que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} r_k \qquad \text{y} \qquad n^2 = \sum_{k=1}^{n} n = \sum_{k=1}^{n} (q_k \cdot k + r_k)$$

luego

$$n^2 - S_n = \sum_{k=1}^{n} q_k \cdot k = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \cdot k. \tag{1.4}$$

Por otro lado

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|k} d = \sum_{d=1}^{n} d \cdot \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

obteniendo así el resultado de la ecuación (1.4).

□

Teorema 1.19. *Sea n un número entero positivo. Se cumple que*

$$\sigma_{-1}(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}.$$

Demostración
Sean $d_1, d_2, \ldots, d_{\tau(n)}$ los divisores de n. Se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma_{-1}(n) &= \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{\tau(n)}} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \ldots + \frac{n}{d_{\tau(n)}}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(d_{\tau(n)} + d_{\tau(n)-1} + \ldots + d_1\right) = \frac{\sigma(n)}{n}.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.20. *Sea n un número entero positivo. Se cumple que*

$$\frac{n^2}{2} < \varphi(n)\sigma(n) \leqslant n^2.$$

Demostración
Sea $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \cdot$ la descomposición en factores primos de un número entero positivo.

$$\varphi(n)\sigma(n) = \left(n\prod_{i=1}^{r}\frac{p_i - 1}{p_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{r}\frac{p_i^{\alpha_i} - 1}{p_i - 1}\right) = n\prod_{i=1}^{r}\left(p_i^{\alpha_i} - \frac{1}{p_i}\right).$$

Por un lado se tiene la desigualdad

$$\prod_{i=1}^{r}\left(p_i^{\alpha_i} - \frac{1}{p_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} = n,$$

y por otro lado

$$\prod_{i=1}^{r}\left(p_i^{\alpha_i} - \frac{1}{p_i}\right) > \prod_{i=1}^{r}\left(p_i^{\alpha_i} - \frac{p_i^{\alpha_i}}{p_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) > \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

obteniendo así las desigualdades buscadas.

□

Teorema 1.21. *(Liouville) Sea n un número entero positivo. Se cumple que*

$$\sum_{d|n}\tau(d)^3 = \sigma(n)^2.$$

Demostración
Para comenzar, notemos que ambos lados de la ecuación definen funciones multiplicativas al ser tanto $\sigma(n)^2$ como $\tau(d)^3$ producto de funciones multiplicativas y, por el *Teorema* 1.4, también la función $\sum_{d|n}\tau(d)^3$.
Es suficiente probar el teorema para cada potencia de un número primo p^k. Calculando,

$$\sum_{d|p^k}\tau(p^k)^3 = \tau(1)^3 + \tau(p)^3 + \tau(p^2)^3 + \ldots + \tau(p^k)^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 \tag{1.5}$$

y

$$\sigma(p^k)^2 = (1 + 2 + \ldots + (k+1))^2 . \tag{1.6}$$

Puesto que para cualquier entero positivo n se cumple la famosa identidad

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2,$$

de las igualdades (1.5) y (1.6) se concluye la demostración.

□

Teorema 1.22 (Liouville). *Sea n un número entero positivo. Se cumple que*

$$\sum_{d|n} \sigma(d) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} \tau(d).$$

<u>Demostración</u>

Para comenzar, notemos que ambos lados de la ecuación definen funciones multiplicativas. Es suficiente probar el teorema para cada potencia de un número primo p^s.

Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{d|p^s} \sigma(d) &= \sum_{k=0}^{s} \sigma(p^k) = \sum_{k=0}^{s} \frac{p^{k+1}-1}{p-1} = -\frac{s+1}{p-1} + \frac{1}{p-1} \cdot \sum_{k=0}^{s} p^{k+1} \\
&= -\frac{s+1}{p-1} + \frac{1}{p-1} \cdot \frac{p^{s+2}-p}{p-1} = -\frac{s+1}{p-1} + \frac{p^{s+2}-p}{(p-1)^2} = \blacktriangle
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{d|p^s} \frac{p^s}{d} \tau(d) &= \sum_{k=0}^{s} p^{s-k} \cdot \tau(p^k) = \sum_{k=0}^{s} p^{s-k} \cdot (k+1) = \sum_{k=0}^{s} p^{s-k} + p^s \cdot \sum_{k=0}^{s} p^{-k} \cdot k \\
&= \frac{p^{-1}-p^s}{p^{-1}-1} + p^s \cdot \left(\frac{1-s\cdot p^{-s}}{p-1} + \frac{1-p^{1-s}}{(p-1)^2} \right) = \frac{p^{s+1}-1}{p-1} + \frac{p^s-s}{p-1} + \frac{p^s-p}{(p-1)^2} \\
&= -\frac{1+s}{p-1} + \frac{p^{s+1}+p^s}{p-1} + \frac{p^s-p}{(p-1)^2} = -\frac{1+s}{p-1} + \frac{p^{s+2}-p^s+p^s-p}{(p-1)^2} \\
&= -\frac{1+s}{p-1} + \frac{p^{s+2}-p}{(p-1)^2} = \blacktriangle
\end{aligned}$$

con lo que se tiene la igualdad.

□

Teorema 1.23 (Hammond). *Sea n un número entero positivo. Se cumple que*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} \tau(d) \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

<u>`Demostración`</u>
Puesto que φ y τ son funciones multiplicativas, aplicando el *Teorema* 1.5 $\varphi * \tau$ es multiplicativa. Por el *Teorema* 1.3 basta verificar la igualdad para cada potencia de un número primo p^s.

$$\begin{aligned}
\sum_{d|p^s} \tau(d)\varphi\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{k=0}^{s} \tau(p^k)\varphi(p^{s-k}) = \sum_{k=0}^{s}(k+1)\varphi(p^{s-k}) = (s+1) + \sum_{k=0}^{s-1}(k+1)p^{s-k-1}(p-1) \\
&= (s+1) + (p-1)p^{s-1}\sum_{k=0}^{s-1}(k+1)p^{-k} = s+1+p^{s-1}\left(p - sp^{-s+1} + \frac{p^{-s+2}-p}{1-p}\right) \\
&= s+1+p^s - s + \frac{p-p^s}{1-p} = p^s+1+\frac{p^s-p}{p-1} = \frac{p^{s+1}-p^s+p-1+p^s-p}{p-1} \\
&= \frac{p^{s+1}-1}{p-1} = \sigma(p^s).
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.24 (Cesàro)**.** *Sea n un número entero positivo. Se cumple que*

$$\sigma(n) = \sum_{j=1}^{n} \tau(\text{m.c.d.}(n,j)).$$

<u>`Demostración`</u>
Nótese que

$$\sum_{j=1}^{n} \tau(\text{m.c.d.}(n,j)) = \sum_{d|n}\left(\sum_{\text{m.c.d.}(n,j)=d} \tau(\text{m.c.d.}(n,j))\right) = \sum_{d|n}\tau(d)\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

por lo que el resultado es equivalente al teorema anterior.

□

Finalizamos la sección con una serie de más relaciones entre las funciones σ y τ, como muestra de la gran cantidad de ecuaciones que aún dejamos por señalar. La mayoría de estas relaciones, y muchas otras, se encuentran recogidas en el ya citado libro de Dickson [16], y sus demostraciones se desarrollan de manera similar a las ya expuestas.

Teorema 1.25. *Sea n un número entero positivo. Se cumple que*

$$\sum_{d|n} d\sigma(d) = \sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^2\sigma(d). \qquad \sum_{d|n}\sigma(d) = \sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)\tau(d).$$

$$\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)\sigma(d) = \sum_{d|n} d\tau(d). \qquad \sum_{ad=n}\sigma(a)\sigma(d) = \sum_{ad=n} a\tau(a)\tau(d).$$

$$\sum_{d|n}\tau(d^2) = \tau^2(n). \qquad \sum_{d|n}\tau(d^2)\tau(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n}\tau^2(n).$$

$$\sum_{ad=n}\sigma(a)\tau(d^2) = \sum_{ad=n} a\tau^2(d). \qquad \sum_{ad=n}\sigma_2(a)\varphi(d) = n\sigma(n).$$

$$\sum_{ad=n} a\sigma_2(d) = \sum_{ad=n} a^2\sigma(d). \qquad \sum_{j=1}^{n}\sigma(\text{m.c.d.}(j,n)) = n\tau(n).$$

Capítulo 2

Desigualdad de Robin

De todos los resultados en los que se encuentra involucrada la función σ, destaca sobre ellos la *Desigualdad de Robin*, la cual relaciona directamente dicha aplicación con la *Hipótesis de Riemann*, el problema más famoso de las matemáticas.

Recordemos que dicha conjetura es asumida como cierta por la gran mayoría de la comunidad matemática. No obstante, quedaría en entredicho de encontrar un número que no cumpliese el resultado de Robin. [10] [59]

Definición 2.1. *Sea s un número complejo con $Re(s) > 1$. Se denota $\boldsymbol{\zeta(s)}$ a la serie infinita*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Dicha funcíon es conocida como la ***función zeta de Riemann****.*

La función zeta de Riemann se aleja del objetivo de este trabajo pero conviene destacar, una vez más, las relaciones que guarda con las funciones τ y σ ya conocidas:

Teorema 2.2. *Dado $s > k+1$ y $k \geq 0$, se tiene que*

$$\zeta(s)\zeta(s-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s}.$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\zeta(s)\zeta(s-k) &= \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^s}\right)\left(\sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2^{s-k}}\right) \\
&= \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^s}\right)\left(\sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{n_2^k}{n_2^s}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 = n} \frac{n_2^k}{n_1^s n_2^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s}.
\end{aligned}$$

□

De dicho teorema se desprenden dos casos específicos:

Corolario 2.3. *Dado $s > 2$, se tiene que*

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s}.$$

Corolario 2.4. *Dado $s > 1$, se tiene que*

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}.$$

Demostración

$$\zeta(s)\zeta(s) = \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^s}\right)\left(\sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 = n} \frac{1}{n_1^s n_2^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}.$$

□

La función zeta de Riemann se anula en los números pares negativos $s = -2, -4, -6, \ldots$; son conocidos como los **ceros triviales** de la función. Aparte de estos ceros, la función $\zeta(s)$ también se anula en otros valores complejos comprendidos entre $0 < Re(s) < 1$, los cuales son denominados **ceros no triviales**. Es en este punto donde entra en juego la *Hipótesis de Riemann* postulada en 1859 [57]:

Conjetura 2.5 (Hipótesis de Riemann)**.** *La parte real de todo cero no trivial de la función zeta de Riemann es*

$$Re(s) = \frac{1}{2}.$$

Expliquemos cómo se produjeron los acontecimientos para que esta función de variable compleja se relacionase con la función σ.
Era el año 1913 cuando Thomas Gronwall publica su hallazgo del orden máximo de σ [27]:

Teorema 2.6 (Gronwall)**.** *La función*

$$G(n) = \frac{\sigma(n)}{n \log\log n} \qquad \text{con } n > 1$$

satisface que

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n \log\log n} = e^{\gamma} = 1{,}78107\ldots$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

Srinivasa Ramanujan, famoso matemático indio, probó pocos años más tarde, en 1915, una desigualdad asintótica para la función G de Gronwall asumiendo como cierta la *Hipótesis de Riemann*. Pese a ello, debido a la escasez de papel durante la Primera Guerra Mundial, no fue hasta 1997 [54] cuando fue publicada la segunda parte de su tesis, en la cual se encontraba la susodicha desigualdad [9] [13]:

Teorema 2.7 (Ramanujan)**.** *Si la Hipótesis de Riemann es cierta, entonces*

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n, \qquad \text{para todo } n \text{ suficientemente grande,}$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni, $e^{\gamma} = 1{,}78107\ldots$.

En 1984, sin tener noticia alguna del teorema de Ramanujan, Guy Robin probó un resultado más fuerte que el de su predecesor [9] [59]:

Teorema 2.8 (Robin)**.** *La Hipótesis de Riemann es cierta si y solo si*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \leq e^{\gamma} n \log\log n, \qquad \textit{para todo } n \geq 5041$$

donde γ *es la constante de Euler-Mascheroni,* $e^{\gamma} = 1{,}78107\ldots$.

El resultado es conocido como la *Desigualdad de Robin*, y la dificultad de su demostración escapa tanto de la dirección del trabajo como del propio nivel del autor. A pesar de ello, sí que podemos aclarar la razón de ser de $n > 5040 = 7!$, y es que la desigualdad resulta ser falsa para los siguientes números:

Tabla 2.1: Números que no cumplen la Desigualdad [10]

No.	Factorización	$\sigma(n)$	$G(n)^*$
3	3	4	14.177
4	2^2	7	5.357
5	5	6	2.521
6	$2 \cdot 3$	12	3.429
8	2^3	15	2.561
9	3^2	13	1.834
10	$2 \cdot 5$	18	2.158
12	$2^2 \cdot 3$	28	2.563
16	2^4	31	1.899
18	$2 \cdot 3^2$	39	2.041
20	$2^2 \cdot 5$	42	1.913
24	$2^3 \cdot 3$	60	2.162
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	72	1.960
36	$2^2 \cdot 3^2$	91	1.980
48	$2^4 \cdot 3$	124	1.908
60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	168	1.986
72	$2^3 \cdot 3^2$	195	1.863
84	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	224	1.791
120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	360	1.915
180	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	546	1.841
240	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	744	1.822
360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	1170	1.833
720	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	2418	1.782
840	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	2880	1.797
2520	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	9360	1.804
5040	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	19344	1.790

$^*G(n) = \sigma(n)/(n \log\log n)$.

La belleza de la fórmula reside en su naturaleza escueta, sencilla y elegante, siendo una mera suma finita sin necesidad de acudir a series ni al análisis complejo. Es por ello que merece ser citada en esta sección aparte, atribuyéndole la importancia que se merece.

La *Desigualdad de Robin* volverá a ser posteriormente tratada en el *Capítulo* 4.2, donde será aplicada en el estudio de los números multiperfectos.

Capítulo 3

Números Perfectos

3.1. Introducción a los Números de Mersenne

En el estudio de los números perfectos, los primos de Mersenne juegan un papel fundamental, como así muestra el *Teorema de Euclides-Euler* 3.12 que estudiaremos en próximas secciones. Es por ello que dedicaremos un apartado a dichos números y enumeraremos algunas de sus características más reseñables, aunque no se trate en sí mismo del objetivo que nos atañe.

Definición 3.1. *Sea n un número primo. Se llama* ***número de Mersenne*** *al entero de la forma $\boldsymbol{M_n} = 2^n - 1$. Si M_n es primo, se llama* ***número primo de Mersenne****.*

Ejemplo 9. *Ejemplos de primos de Mersenne:*

$$\begin{aligned} M_2 &= 2^2 - 1 = 3 \\ M_3 &= 2^3 - 1 = 7 \\ M_5 &= 2^5 - 1 = 31 \\ M_7 &= 2^7 - 1 = 127 \end{aligned}$$

■

Existen resultados de diversa índole que ayudan a decidir cuándo un número de Mersenne es primo. He aquí algunos de los más conocidos:

Teorema 3.2 (Cataldi-Fermat)**.** *Si M_n es un número primo, entonces el exponente n es primo.*

<u>`Demostración`</u>
Sea M_n un número primo, y supongamos que n no lo es, es decir, $n = ab$ con $1 < a \leq b < n$. Se tiene que

$$M_n = M_{ab} = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)\sum_{k=0}^{b-1}(2^a)^k 1^{b-1-k} = (2^a - 1)(1 + 2^a + 2^{2a} + \ldots + 2^{(b-1)a}).$$

Puesto que ambos factores son mayores que 1, M_n es, por tanto, un número compuesto, lo cual resulta ser una contradicción.

□

El recíproco no es cierto. Veámoslo con un ejemplo sencillo:

Ejemplo 10.

$$M_5 = 2^5 - 1 = 31 \textit{ es primo}$$
$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89 \textit{ no es primo} \qquad \blacksquare$$

Corolario 3.3. *Si n es un número compuesto, entonces M_n es compuesto.*

Ejemplo 11.

$$M_4 = 2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5 \textit{ no es primo}$$
$$M_9 = 2^9 - 1 = 511 = 7 \cdot 73 \textit{ tampoco es primo.} \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.4. *Los divisores de $M_p = 2^p - 1$, con p primo, son de la forma $2mp + 1$, para algún número entero positivo m.*

Demostración

Sea p_1 un número primo que divida a $M_p = 2^p - 1$. Por el *Teorema de Fermat* sabemos que $p_1 \,|\, (2^{p_1-1} - 1)$. También, es fácil ver que

$$\text{m.c.d.}(2^p - 1, 2^{p_1-1} - 1) = 2^{\text{m.c.d.}(p,p_1-1)} - 1.$$

Puesto que p_1 es un divisor común de $2^p - 1$ y $2^{p_1-1} - 1$, no son primos entre sí. Por tanto, $\text{m.c.d.}(p, p_1 - 1) = p$. Como $p | p_1 - 1$, existe un número entero k tal que $p_1 - 1 = kp$. Dado que p_1 es impar entonces k es par, $k = 2m$. En conclusión,

$$p_1 = kp + 1 = 2mp + 1.$$

Como cada divisor de M_p es un producto de divisores primos de M_p, cada divisor primo de M_p es de la forma $2mp + 1$ y tenemos el resultado pedido.

$\square$

Ejemplo 12.

$$M_{23} = 2^{23} - 1 = 8388607 \textit{ es divisible por } 47 = 2 \cdot 23m + 1 \textit{ con } m = 1$$
$$M_{29} = 2^{29} - 1 = 536870911 \textit{ es divisible por } 233 = 2 \cdot 29m + 1 \textit{ con } m = 4$$

Podemos saber esto mediante un método de ensayo-error buscando todos los primos de la forma $46m + 1$ menores que $\sqrt{M_{23}}$, reduciendo así el número de operaciones a realizar.
Lo mismo se puede efectuar en el segundo caso, con los primos de la forma $58m + 1$ menores que $\sqrt{M_{29}}$. $\blacksquare$

Teorema 3.5. *Sean p y q números primos impares. Si p divide a $M_q = 2^q - 1$, entonces $p \equiv 1 (\text{mod } q)$ y $p \equiv \pm 1 (\text{mod } 8)$.*

Demostración

Si p divide a M_q, entonces $2^q \equiv 1(\text{mod } p)$, y el orden de $2(\text{mod } p)$ divide al primo q, luego debe ser q. Por el *Pequeño teorema de Fermat* el orden de 2 también divide a $p - 1$, por tanto $p - 1 = 2kq$. Se tiene que

$$2^{\frac{p-1}{2}} = 2^{qk} \equiv 1(\text{mod } p)$$

por lo que 2 es un residuo cuadrático módulo p, y se sigue que $p \equiv \pm 1(\text{mod } 8)$.

$\square$

Proposición 3.6. *Sean $M_{p_1}, M_{p_2}, \ldots M_{p_n}$ primos de Mersenne. Se cumple que*

$$\sigma(M_{p_1}M_{p_2}\cdots M_{p_n}) = 2^{p_1+p_2+\ldots p_n}.$$

Más aún, todo número m tal que $\sigma(m) = 2^k$, con k un número natural, ha de ser de la forma indicada.

<u>Demostración</u>
Dados $M_{p_1}, M_{p_2}, \ldots M_{p_n}$ primos de Mersenne, dado que la función σ es multiplicativa se tiene que

$$\sigma(M_{p_1}M_{p_2}\cdots M_{p_n}) = \sigma(M_{p_1})\sigma(M_{p_2})\cdots\sigma(M_{p_n}) = \sigma(2^{p_1}-1)\sigma(2^{p_2}-1)\cdots\sigma(2^{p_n}-1)$$

Aplicando la propiedad (1.3),

$$\sigma(M_{p_1}M_{p_2}\cdots M_{p_n}) = 2^{p_1}2^{p_2}\cdots 2^{p_n} = 2^{p_1+p_2+\ldots+p_n}.$$

La segunda parte resulta trivial atendiendo a la *Definición* 3.1 de primo de Mersenne y a la propiedad multiplicativa de la función σ (*Proposición* 1.7).

□

Proposición 3.7. *Sea $p \equiv 3(mod\ 4)$ un número primo, entonces $2p+1$ es un número primo si y solo si $2p+1$ divide a M_p.*

<u>Demostración</u>
Supongamos que $q = 2p+1$ es primo. Como $q \equiv 7 (\text{mod } 8)$ se tiene que 2 es un residuo cuadrático módulo q, es decir, existe un entero n tal que $n^2 \equiv 2(\text{mod } q)$. Por tanto,

$$2^p = 2^{(q-1/2)} = n^{q-1} \equiv 1(\text{mod } q)$$

mostrando que q divide a M_p.

Recíprocamente, tomemos $2p+1$ un factor de M_p. Supongamos que $2p+1$ es un número compuesto y sea q su último factor primo. Entonces $2^p \equiv 1(\text{mod } q)$ y el orden de 2 módulo q divide tanto a p como a $q-1$, por lo que p divide a $q-1$. Esto implica que $q > p$ y se sigue que

$$(2p+1)+1 > q^2 > p^2$$

lo cual es una contradicción para $p > 2$.

□

En la *Tabla* 3.2 se detallan los primos de Mersenne conocidos hasta la fecha de escritura de este trabajo.

3.1.1. Búsqueda: Great Internet Mersenne Prime Search

En la actualidad se conocen un total de 49 primos de Mersenne siendo el último el $\boldsymbol{M_{74,207,281}}$, descubierto el 7 de enero de 2016 [1] [25]. Además, es el **número primo más grande** descubierto

[1]Este y otros descubrimientos se han producido durante la redacción de este trabajo, modificando la dirección del mismo planteada en un principio. Resulta estimulante observar progresos en “riguroso directo”.

hasta la fecha. Y es que desde 1876, con el hallazgo de M_{127}, siempre el mayor primo conocido ha sido de Mersenne, a excepción de breves periodos de tiempo (1951-1952 y 1889-1992).

¿Por qué primos de Mersenne? La razón de ello es que probar que un número gigantesco N es primo se basa en el estudio de las factorizaciones de $N+1$ o $N-1$, y en el caso de los números de Mersenne, la factorización de $N+1$ es la más sencilla posible, una potencia de 2. En concreto, es la rapidez con la que el test de primalidad de Lucas-Lehmer, mediante la transformada rápida de Fourier, actúa sobre estos números (de hecho fue Lucas el descubridor de M_{127}):

Teorema 3.8 (Test de Lucas-Lehmer). *Sea $M_p = 2^p - 1$ el número de Mersenne a testear, donde p es un número primo. Considérese la secuencia $\{s_i\}_{i\geq 0}$*

$$s_n \equiv s_{n-1}^2 - 2(\text{mod } M_p)$$

con $s_0 = 4$. Entonces M_p es primo si y solo si

$$s_{p-2} \equiv 0(\text{mod } M_p).$$

Como más tarde comentaremos, encontrar un primo de Mersenne conlleva el inmediato descubrimiento de un número perfecto. Recomendamos en este punto observar en la *Tabla* 3.2 las fechas correspondientes, deteniéndose en el ya citado descubrimiento de Lucas en 1876, durante 75 años el mayor primo conocido y adelantándose a primos de Mersenne sin descubrir en esa fecha. Pero si algo destaca en esa lista es, sin duda, lo que sucede en el año 1996, la creación del GIMPS.

Desde 1951 se habían acelerado los progresos en la materia fomentados por el incipiente uso de ordenadores cada vez más potentes pero fue en 1996 cuando se creó el Great Internet Mersenne Prime Search, el **primer proyecto de computación compartida de la historia** y el más importante en la actualidad en el ámbito matemático, siendo solo superado por el SETI con su búsqueda de vida inteligente. [45]

La búsqueda del GIMPS utiliza en primer lugar el *Teorema* 3.2 por el cual si $2^p - 1$ es un número primo, entonces p es primo. Este paso inicial disminuye en gran número la cantidad de números de Mersenne a estudio. Para más información del procedimiento visitar la página [24].

El 8 de Noviembre de 2014 el GIMPS confirmó que $M_{32582657}$ era efectívamente el 44° primo de Mersenne, habiendo chequeado todos aquellos números de Mersenne anteriores. A día de hoy se han verificado todos los primos M_p hasta el exponente 34980299, por lo que no se puede afirmar con total rotundidad que el primo $M_{74,207,281}$, hallado por Curtis Cooper el 7 de enero, sea el 49° primo de Mersenne. [22]

Cualquier persona puede enrolarse en la búsqueda, e incluso se ofrecen premios de 3000 dólares por cada primo de Mersenne descubierto, y de 50000 dólares si tal primo tuviese más de cien millones de dígitos (premios otorgados por la Electronic Frontier Foundation). Lo único necesario es descargar el programa gratuito, disponible en la web del GIMPS [22], y dejar trabajar al ordenador. Dependiendo de la capacidad de su procesador, se le adjudicará un trabajo de pruebas de primalidad, verificación o factorización.

¿Cuál es el porqué de esta búsqueda incesante de primos de Mersenne?
Tras esta pregunta se esconden múltiples razones. Desde la repercusión del hallazgo, pasando por la inclusión del nombre del propio descubridor en la selecta lista de matemáticos que buscaron los primos más grandes del momento (Cataldi, Descartes, Fermat, Mersenne, Frenicle, Leibniz, Euler, Landry, Lucas, Catalan, Sylvester, Cunningham, Pepin, Putnam, Lehmer,... por citar algunos), y acabando con la compensación económica ya comentada en párrafos anteriores. El ser humano, por naturaleza, colecciona objetos tan raros como bonitos. En matemáticas la belleza reside en demostraciones cortas, claras y concisas. Tal es el caso de los primos de Mersenne, que poseen una forma de lo más sencilla, $2^n - 1$, así como su primalidad es de una elegante simplicidad.
También existen motivos puramente matemáticos. En criptografía, si $2^p - 1$ es un número primo (primo de Mersenne), son de utilidad los grupos cíclicos de orden $2^p - 1$, $(GF(2^p)^*, \cdot)$, pues todos sus elementos (excepto el 1) tienen orden $2^p - 1$, al igual que todo polinomio irreducible de $\mathbb{F}_2[x]$ de grado p tiene orden $2^p - 1$, ($GF(2^p) = \mathbb{F}_2[x]/(P(x)$ donde $P(x)$ es un polinomio irreducible de grado p). En este sentido, el National Institute of Standards and Technology (NIST) recomienda, entre otros, al primo de Mersenne $2^{521} - 1$ en el uso de curvas elípticas criptográficas para la elección de las claves pública y privada [48]. El mismo texto también sugiere el uso de otros exponentes distintos, pero el más cercano a 521 en 384, el cual aporta un número considerablemente menor a $2^{521} - 1$ y, en definitiva, menos seguro en términos de desencriptación.
En informática a menudo se utilizan sus búsquedas para testear computadoras. Ejemplo de ello es Intel, quien utilizó las rutinas del software del GIMPS para chequear su Pentium II y Pentium Pro antes de ser puestos al mercado. Del mismo modo, en 1994 T. R. Nicely encontró el famoso error FDIV del Pentium estudiando los números primos gemelos. Otro de los usos es el Mersenne Twister, un generador de números pseudoaleatorios que recibe el nombre del hecho de que la longitud de su periodo es un primo de Mersenne, $2^{19937} - 1$. Existen dos variantes, MT19937 para 32 bits y MT19937-64 para un tamaño de palabra de 64 bits, motivo por el cual ambas versiones crean secuencias diferentes.

Desde este trabajo se invita a formar parte del proyecto de GIMPS [22] y participar en esta búsqueda global.

3.2. Introducción a los Números Perfectos

Definición 3.9. *Sea n un número entero positivo. Se dice que n es un **número perfecto** si es igual a la suma de sus divisores propios, es decir, si*

$$n = \sigma(n) - n = s(n),$$

o lo que es lo mismo,

$$\sigma(n) = 2n.$$

Ejemplo 13.

$$6 = s(6) = 1 + 2 + 3 \text{ es el primer número perfecto}$$
$$28 = s(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \text{ es el segundo número perfecto} \qquad \blacksquare$$

Nota. *El primer resultado que presentamos en esta sección es la razón por la que los números perfectos se consideran ya conocidos en el Antiguo Egipto. El concepto de fracción no existía como tal en aquel tiempo. Sin embargo, para realizar sus cálculos recurrían a la colocación de un símbolo sobre el número para definir su inverso, y nunca se podía repetir un sumando. Así pues, se llama* ***fracción egipcia*** *a la suma de fracciones unitarias distintas, es decir, fracciones de numerador* 1 *y denominadores naturales distintos. Aunque los egipcios no tuviesen conocimiento del término "número perfecto", resulta obvio pensar que conociesen que el* 6 *y el* 28 *cumplen la siguiente propiedad:*

Proposición 3.10. *La suma de los inversos de los divisores de un número perfecto es* 2*.*

<u>`Demostración`</u>
Dado n un número perfecto, se cumple que $\sigma(n) = 2n$, es decir,

$$\frac{\sigma(n)}{n} = 2.$$

Y efectivamente, realizando este cálculo se obtiene lo pedido,

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{d}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2.$$

$\square$

Ejemplo 14.

- $n = 6$: $\quad \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2$
- $n = 28$: $\quad \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2$
- $n = 496$: $\quad \frac{1}{496} + \frac{1}{248} + \frac{1}{124} + \frac{1}{62} + \frac{1}{31} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2$ $\blacksquare$

Nota. *El siguiente teorema que se presenta es la base de la búsqueda de nuevos números perfectos. Además, en la historia de las matemáticas, es el resultado de doble implicación con mayor intervalo de tiempo entre la demostración de una de ellas y su recíproca. La condición suficiente fue probada en 'Los Elementos de Euclides, Libro IX' siendo la última proposición de este. Dicho libro fue publicado alrededor del* 330 *a.C. No será hasta el siglo XVIII cuando Euler demuestre la condición necesaria, lo que da una idea de que el problema de los números perfectos lleva ocupando a los matemáticos durante más de dos milenios.*

Teorema 3.11 (de Euclides-Euler)**.** *Un número entero positivo par n es un número perfecto si y solo si*

$$n = 2^{k-1}(2^k - 1),$$

donde k es un número entero tal que $2^k - 1$ es primo.

<u>`Demostración`</u>
Veamos, primero, que si $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$, donde k es un número entero tal que $2^k - 1$ es primo,

entonces n es un número perfecto. Nótese que $2^k - 1$ es impar y por tanto m.c.d.$(2^{k-1}, 2^k - 1) = 1$. Notemos, también, que σ es una función multiplicativa (*Proposición* 1.7), por lo que

$$\sigma(n) = \sigma(2^{k-1})\sigma(2^k - 1).$$

Aplicando (1.2) se tiene que $\sigma(2^{k-1}) = 2^k - 1$, y aplicando (1.3) se cumple que $\sigma(2^k - 1) = 2^k$. En conclusión,

$$\sigma(n) = (2^k - 1)(2^k) = 2n.$$

Probemos la implicación contraria. Supongamos que n es un número perfecto par. Tomemos $n = 2^r s$, donde r y s son enteros positivos, y s impar. Dado que m.c.d.$(2^r, s) = 1$, tenemos que

$$\sigma(n) = \sigma(2^r)\sigma(s) = (2^{r+1} - 1)\sigma(s).$$

Como n es un número perfecto, se cumple que

$$(2^{r+1} - 1)\sigma(s) = 2n = 2^{r+1}s.$$

Notemos que m.c.d.$(2^{r+1} - 1, 2^{r+1}) = 1$ y, en consecuencia, $2^{r+1} \mid \sigma(s)$. Por tanto, existe un número entero q tal que $\sigma(s) = 2^{r+1}q$. En resumen,

$$(2^{r+1} - 1)2^{r+1}q = 2^{r+1}s$$

y se sigue que

$$(2^{r+1} - 1)q = s.$$

En definitiva, $q \,|\, s$. Añadiendo q a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$s + q = (2^{r+1} - 1)q + q = 2^{r+1}q = \sigma(s).$$

Debemos probar ahora que $q = 1$. Si $q \neq 1$, entonces s tendría tres divisores y por tanto $\sigma(s) \geqslant 1 + s + q$. En conclusión, $q = 1$ y como resultado $s = 2^{r+1} - 1$. También notemos que $\sigma(s) = s + 1$. Esto muestra que s es un número primo, dado que los únicos divisores que tiene son s y 1. En resumen,

$$n = 2^r(2^{r+1} - 1),$$

donde $(2^{r+1} - 1)$ es primo.

□

Atendiendo a la definición de los primos de Mersenne, podemos reformular el teorema de la siguiente manera:

Teorema 3.12 (de Euclides-Euler). *Un número entero positivo par n es un número perfecto si y solo si es de la forma*

$$n = 2^{p-1}M_p,$$

donde M_p es un primo de Mersenne.

Nota. *Como se puede apreciar, el teorema afirma que a cada primo de Mersenne le corresponde un número perfecto par y viceversa. Es decir, existe una biyección entre los primos de Mersenne y los números perfectos pares. Es en este punto donde estos primos cobran especial interés en la búsqueda de números perfectos. De hecho, la manera de hallar números perfectos pares es la obtención previa de su correspondiente primo de Mersenne. Esto último se ve claramente reflejado en la tabla de números perfectos conocidos, en la cual podemos observar cómo el GIMPS desempeña actualmente un papel fundamental en dichos hallazgos.*

Tabla 3.1: N° de Mersenne y N° perfectos conocidos

N°	$M_p = 2^p - 1$		N° perfecto	Fecha	Descubridor
	p	Dígitos	Dígitos		
1	2	1	1	500 a.C.	-
2	3	1	2	500 a.C.	-
3	5	2	3	275 a.C.	Antigua Grecia
4	7	3	4	275 a.C.	Antigua Grecia
5	13	4	8	1456	anónimo
6	17	6	10	1588	Cataldi
7	19	6	12	1588	Cataldi
8	31	10	19	1772	Euler
9	61	19	37	1883	Pervushin
10	89	27	54	1911	Powers
11	107	33	65	1914	Powers
12	127	39	77	1876	Lucas
13	521	157	314	1952	Robinson
14	607	183	366	1952	Robinson
15	1279	386	770	1952	Robinson
16	2203	664	1327	1952	Robinson
17	2281	687	1373	1952	Robinson
18	3217	969	1937	1957	Riesel
19	4253	1281	2561	1961	Hurwitz
20	4423	1332	2663	1961	Hurwitz
21	9689	2917	5834	1963	Gillies
22	9941	2993	5985	1963	Gillies
23	11213	3376	6751	1963	Gillies
24	19937	6002	12003	1971	Tuckerman
25	21701	6533	13066	1978	Noll y Nickel
26	23209	6987	13973	1979	Noll
27	44497	13395	26790	1979	Nelson y Slowinski
28	86243	25962	51924	1982	Slowinski
29	110503	33265	66530	1988	Colquitt y Welsh
30	132049	39751	79502	1983	Slowinski
31	216091	65050	130100	1985	Slowinski
32	756839	227832	455663	1992	Slowinski y Gage
33	859433	258716	517430	1994	Slowinski y Gage
34	1257787	378632	757263	1996	Slowinski y Gage
35	1398269	420921	841842	1996	GIMPS / Armengaud
36	2976221	895932	1791864	1997	GIMPS / Spence
37	3021377	909526	1819050	1998	GIMPS / Clarkson
38	6972593	2098960	4197919	1999	GIMPS / Hajratwala
39	13466917	4053946	8107892	2001	GIMPS / Cameron
40	20996011	6320430	12640858	2003	GIMPS / Shafer
41	24036583	7235733	14471465	2004	GIMPS / Findley
42	25964951	7816230	15632458	2005	GIMPS / Nowak
43	30402457	9152052	18304103	2005	GIMPS / Cooper y Boone
44	32582657	9808358	19616714	2006	GIMPS / Cooper y Boone

N°	M_p p	Dígitos	N° perfecto Dígitos	Fecha	Descubridor
45*	37156667	11185272	22370543	2008	GIMPS / Elvenich
46*	42643801	12837064	25674127	2009	GIMPS / Strindmo
47*	43112609	12978189	25956377	2008	GIMPS / Smith
48*	57885161	17425170	34850340	2013	GIMPS / Curtis Cooper
49*	74207281	22338618	44677235	2016	GIMPS / Curtis Cooper

*No se ha estudiado aún si existen números de Mersenne intermedios.
Fuente: [23][46]. Datos actualizados hasta fecha de escritura.

3.3. Números Perfectos Pares

En la lista anterior se observa que el número conocido de primos de Mersenne y de números perfectos es idéntico, fiel reflejo del *Teorema de Euclides-Euler* (*Teorema* 3.12). Ello no quiere decir que no existan números perfectos impares, simplemente no se han encontrado, y tampoco se ha demostrado ningún resultado que niegue su existencia. Aún así, resulta ser una razón de peso para estudiar ambos tipos por separado.

Una de las características más destacadas de los números perfectos pares es su terminación. En el año 100 d.C. Nicómaco de Gerasa conjeturó, con únicamente cuatro números perfectos conocidos, que estos terminaban alternativamente en 6 u 8. Su razón de ser fue atribuida a propiedades divinas, como comentaremos en el anexo histórico (*Apéndice* A). Dicha conjetura fue tomada como cierta por una gran cantidad de matemáticos pasado milenio y medio [16]. La hipótesis de Nicómaco fue parcialmente cierta, errando solo en su falsa alternancia:

Proposición 3.13. *Todo número perfecto par, en base* 10*, termina en* 6 *u* 8.

Demostración

Puesto que todo número primo $p > 2$ puede escribirse de la forma $4m + 1$ o $4m + 3$ para un natural m adecuado, caben dos posibilidades:

- Si $p = 4m + 1$:

$$2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{4m}(2^{4m+1} - 1) = 16^m(2 \cdot 16^m - 1)$$
$$\equiv 6^m(2 \cdot 6^m - 1)(\text{mod } 10) \equiv 6(12 - 1)(\text{mod } 10) \equiv 6(\text{mod } 10).$$

- Si $p = 4m + 1$:

$$2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{4m+2}(2^{4m+3} - 1) = 4 \cdot 16^m(8 \cdot 16^m - 1)$$
$$\equiv 4 \cdot 6(8 \cdot 6 - 1)(\text{mod } 10) \equiv 4 \cdot 7(\text{mod } 10) \equiv 8(\text{mod } 10).$$

Dado que para $p = 2$ tenemos el número perfecto 6, el resultado queda probado para todos los casos.

$\square$

Aunque esta sea la característica más destacada de estos números, comparten otras muchas cualidades que, sin tener uso alguno, sí que llaman la atención. A continuación enumeraremos algunas de las más relevantes, junto con otros resultados que utilizaremos a lo largo del trabajo:

Proposición 3.14. *Si sumamos las cifras de un número perfecto par, excepto el* 6*, sumamos las cifras de su resultado,..., el resultado final es* 1*.*

Demostración

El enunciado es equivalente a probar que todo número perfecto par es congruente con 1 módulo 9. Denotemos $S(n)$ a la suma de los dígitos de n. Es fácil ver que $S(n) \equiv n (\text{mod } 9)$. Si n es un número perfecto par, es de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$ con p primo. Así que p es o bien 2 o 3, o bien es congruente con 1 o 5 (mod 6). Nótese que hemos excluido el caso $p = 2$ que aportaría el número perfecto $n = 6$. Finalmente, módulo 9, las potencias de 2 se repiten con periodo 6, (es decir, $2^6 \equiv 1(\text{mod } 9)$) por lo que módulo 9, n es congruente con uno de los siguientes números

$$2^{1-1}(2^1 - 1), \qquad 2^{3-1}(2^3 - 1), \text{ o } \qquad 2^{5-1}(2^5 - 1)$$

los cuales valen todos $1(\text{mod } 9)$.

□

Ejemplo 15.

Para $n = 28$:	$2 + 8 = 10$	$\rightarrow$	$1 + 0 = 1$		
Para $n = 496$:	$4 + 9 + 6 = 19$	$\rightarrow$	$1 + 9 = 10$	$\rightarrow$	$1 + 0 = 1$
Para $n = 8128$:	$8 + 2 + 1 + 8 = 19$	$\rightarrow$	$1 + 9 = 10$	$\rightarrow$	$1 + 0 = 1$
Para $n = 33550336$:	$3 + 3 + 5 + 5 + 3 + 3 + 6 = 28$	$\rightarrow$	$2 + 8 = 10$	$\rightarrow$	$1 + 0 = 1$ ■

Propiedad 3.15. *Todo número perfecto par, excepto el* 6*, es la suma de los* $2^{(p-1)/2}$ *primeros números impares al cubo.*

Demostración

Dado un número primo p, definimos $k = 2^{(p-1)/2} - 1$. Entonces

$$(1 + k)^2 = 2^{p-1} \tag{3.1}$$

y

$$(1 + 4k + 2k^2) = 2(1 + k)^2 - 1 = 2^p - 1. \tag{3.2}$$

Multiplicando ambas ecuaciones demostramos lo pedido,

$$2^{p-1}(2^p - 1) = (1 + k)^2(1 + 4k + 2k^2) = 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1 = \sum_{j=1}^{k}(2j - 1)^3$$

donde la última igualdad se prueba fácilmente por inducción.

□

Ejemplo 16.

$$\begin{aligned} 28 &= 1^3 + 3^3 \\ 496 &= 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 \\ 8128 &= 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 15^3 \\ 33550336 &= 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 127^3 \end{aligned}$$

■

Teorema 3.16. *Todo número perfecto par, excepto el* 6*, puede ser escrito como la suma de cinco números al cubo.* [17]

Demostración
La prueba se basa en la siguiente igualdad:

$$2n^6 - 2 = (n^2 + n - 1)^3 + (n^2 - n - 1)^3 \tag{3.3}$$

con n un número natural.
Sea $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ un número perfecto par. Como $N > 6$, tenemos $p > 2$. Para $p = 3$, $N = 28 = 1^3 + 3^3$ por lo que se cumple el teorema (completando la suma con ceros). Para $p > 3$, existen dos posibilidades para el valor de p:

- Si $p = 6k + 1$ para algún natural k:

  $$N = 2^{6k}(2^{6k+1} - 1.)$$

  Tomando $n = 2^k$ en (3.3) se cumple que

  $$2^{6k+1} - 2 = a^3 + b^3, \qquad \text{con } a = n^2 + n - 1 \text{ y } n^2 - n - 1.$$

  Por tanto,

  $$N = 2^{6k}(2^{6k+1} - 1) = 2^{6k}(a^3 + b^3 + 1) = (2^{2k}a)^3 + (2^{2k}b)^3 + (2^{2k})^3$$

  por lo que se cumple el teorema (completando la suma con ceros).

- Si $p = 6k + 5$ para algún natural k:

  $$N = 2^{6k+4}(2^{6k+5} - 1) = 2^{6k+3}(2^{6k+6} - 2) = 2^{6k+3}(64 \cdot 2^{6k} - 2).$$

  Como $64 = 3^3 + 3^3 + 2^3 + 2$ se sigue que

  $$\begin{aligned} N &= 2^{6k+3}\left((3^3 + 3^3 + 2^3 + 2)2^{6k} - 2\right) \\ &= (2^{2k+1})^3\left((3 \cdot 2^{2k})^3 + (3 \cdot 2^{2k})^3 + (2 \cdot 2^{2k})^3 + (2 \cdot 2^{6k} - 2)\right), \end{aligned}$$

  Tomando $n = 2^k$ en (3.3) se tiene que

  $$2 \cdot 2^{6k} - 2 = a^3 + b^3, \qquad \text{con } a = n^2 + n - 1 \text{ y } b = n^2 - n - 1$$

  y sustituyendo esto en la ecuación anterior tenemos

  $$\begin{aligned} N &= (2^{2k+1})^3\left((3 \cdot 2^{2k})^3 + (3 \cdot 2^{2k})^3 + (2 \cdot 2^{2k})^3 + a^3 + b^3\right) \\ &= (3 \cdot 2^{4k+1})^3 + (3 \cdot 2^{4k+1})^3 + (2 \cdot 2^{4k+1})^3 + (2^{2k+1}a)^3 + (2^{2k+1}b)^3 \end{aligned}$$

  por lo que se cumple el teorema.

$\square$

Nota. *De hecho, aún no se conoce ningún número perfecto par, excepto el* 6*, que no pueda ser expresado como suma de* 3 *números naturales al cubo.*

Conjetura 3.17. *Todo número perfecto par, excepto el 6, puede ser escrito como la suma de tres números naturales al cubo.*

Ejemplo 17.

$$\begin{aligned} 28 &= 0^3 + 1^3 + 3^3 \\ 496 &= 4^3 + 6^3 + 6^3 \\ 8128 &= 4^3 + 4^3 + 20^3 \\ 33550336 &= 16^3 + 176^3 + 304^3 \\ 8589869056 &= 720^3 + 1336^3 + 1800^3 \end{aligned}$$

■

Proposición 3.18. *Todo número perfecto par es la suma de los primeros números naturales hasta* $2^p - 1$.

Demostración

Es una consecuencia directa de ser números triangulares (trivial), ya que dichos números son la suma de todos los naturales hasta cierto punto.

□

Ejemplo 18.

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 28 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \\ 496 &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 31 \\ 8128 &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 127 \end{aligned}$$

■

A pesar del tamaño de los números perfectos (recordemos que el último descubierto posee 44677235 dígitos) cualquier persona puede ser capaz de memorizar la lista entera de números perfectos conocidos. Lo "inexplicable" no lo es tanto si después del asombro relacionamos el concepto con los primos de Mersenne y se trabaja en base binaria:

Proposición 3.19. *Todo número perfecto par* $2^{p-1}(2^p - 1)$ *se representa en forma binaria como* p *unos seguido de* $p - 1$ *ceros.*

Demostración

Es una consecuencia directa de que todo número par sea de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, ya que

$$(2^{p-1})_{10} = (1\underbrace{00\ldots0}_{p-1 \text{ ceros}})_2 \qquad \text{y} \qquad (2^p - 1)_{10} = (\underbrace{11\ldots1}_{p \text{ unos}})_2$$

□

Tabla 3.2: Números perfectos en binario

Base 10	Base 2
6	110
28	11100
496	111110000
8128	1111111000000
33550336	1111111111111000000000000
8589869056	11111111111111111000000000000000
137438691328	1111111111111111111000000000000000000

Proposición 3.20. *Si* $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ *es un número perfecto par, entonces* $\tau(n) = 2p$.

Demostración
Por el *Teorema* 3.12, n es de la forma $n = 2^{p-1}M_p$, con p primo y M_p un primo de Mersenne. En conclusión,

$$\tau(n) = \tau((2^p - 1))\tau(2^{p-1}) = 2p.$$

□

3.4. Números Perfectos Impares

Tras más de dos milenios, el hallazgo de un número perfecto impar es el problema abierto más antiguo de las matemáticas. Ni siquiera se ha conseguido probar su existencia, pero lo cierto es que se cuenta con resultados que indican qué forma deberían tener o qué propiedades cumplir.

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes en la búsqueda de números perfectos impares. En él, Euler definió el tipo de factorización que tendrían este tipo de números, y ha sido, e incluso sigue siendo, la base para muchas de las demostraciones relacionadas con la resolución de este problema. [16]

Teorema 3.21 (Euler). *Si* n *es un número perfecto impar, entonces*

$$n = p^{\alpha} q_1^{2k_1} q_2^{2k_2} \cdots q_r^{2k_r}$$

con $p, q_1, q_2, \ldots, q_r$ *primos impares distintos, y* $p \equiv \alpha \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Demostración
Sea $n = p^{\alpha} q_1^{k_1} q_2^{k_2} \cdots q_r^{k_r}$ un número perfecto impar. Se cumple que

$$\sigma(n) = 2n = \sigma(p^{\alpha})\sigma(q_1^{k_1})\sigma(q_2^{k_2}) \cdots \sigma(q_r^{k_r}).$$

Como n es un número entero impar, entonces $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ o $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$. En cualquier caso

$$2n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4).$$

Por tanto, $\sigma(n) = 2n$ es divisible por 2, pero no por 4. Esto implica que uno de los factores anteriores, digamos $\sigma(p^{\alpha})$, debe ser par (no divisible por 4), mientras que el resto de factores $\sigma(q_i^{k_i})$ son impares.
Para cada q_i hay dos posibilidades:

$$q_i \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4) \qquad \text{o} \qquad q_i \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4).$$

Si $q_i \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4) \equiv -1(\mathrm{mod}\ 4)$,

$$\begin{aligned}
\sigma(q_i^{k_i}) &= 1 + q_i + q_i^2 + \ldots + q_i^{k_i} \\
&\equiv 1 + (-1) + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{k_i} (\mathrm{mod}\ 4) \\
&\equiv \begin{cases} 0(\mathrm{mod}\ 4) \text{ si } k_i \text{ es impar.} \\ 1(\mathrm{mod}\ 4) \text{ si } k_i \text{ es par.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Como $\sigma(p^\alpha)$ es divisible por 2, pero no por 4, se tiene que

$$\sigma(p^\alpha) \equiv 2(\text{mod } 4).$$

Esto nos dice que $p \not\equiv 3(\text{mod } 4)$, pues si no fuese así, entonces

$$\begin{aligned} \sigma(p^\alpha) &= 1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha \\ &\equiv 1 + 3 + 1 + 3 + \ldots + 3^\alpha(\text{mod } 4) \\ &\equiv 4 + 4 + \ldots + 3^\alpha(\text{mod } 4) \\ &\equiv \begin{cases} 0(\text{mod } 4) \text{ si } \alpha \text{ es impar} \\ 1(\text{mod } 4) \text{ si } \alpha \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

sin embargo, sabemos que ninguna de las dos es cierta, por lo que debe ser $p \equiv 1(\text{mod } 4)$. Ahora, $\sigma(q_i^{k_i}) \equiv 0(\text{mod } 4)$ implica que 4 divide a $\sigma(q_i^{k_i})$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $q_i \equiv 3(\text{mod } 4)$ y su exponente k_i es un número entero par. Si $q_i \equiv 1(\text{mod } 4)$, se sigue que

$$\begin{aligned} \sigma(q_i^{k_i}) &= 1 + q_i + q_i^2 + \ldots + q_i^{k_i} \\ &\equiv 1 + 1 + \ldots + +1^k(\text{mod } 4) \\ &\equiv k_i + 1(\text{mod } 4). \end{aligned}$$

Dado que $\sigma(q_i^{k_i}) \equiv 1$ o $3(\text{mod } 4)$, entonces $k_i \equiv 0$ o $2(\text{mod } 4)$. En cualquier caso k_i es par para todo i. De forma similar, la condición $\sigma(p^\alpha) \equiv 2(\text{mod } 4)$ implica que $\alpha \equiv 1(\text{mod } 4)$, con lo que el teorema queda probado.

□

Corolario 3.22. *Un número perfecto no puede ser de la forma p^k, con p un número primo impar y k un entero positivo.*

Demostración

Resulta claro que todo número perfecto n cumple que $\frac{\sigma(n)}{n} = 2$. Sin embargo, operando para un determinado $n = p^k$ con p primo y k un número natural, se sigue que

$$\frac{\sigma(p^k)}{p^k} = \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^k}\right) < \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p}} \leq \frac{1}{1 - \dfrac{1}{3}} = \frac{3}{2} < 2,$$

concluyendo que un número perfecto no puede ser de la forma enunciada.

□

Corolario 3.23. *Un número perfecto no puede ser de la forma $p^k q^l$, con p y q números primos impares, y k y l enteros positivos.*

Demostración

Operando como en el resultado anterior,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(p^k q^l)}{p^k q^l} &= \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^k}\right)\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^l}\right) \\ &< \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.24. *Ningún número perfecto puede ser de la forma $6k-1$, con k un entero positivo.*

Demostración

Supongamos que existe un número perfecto n de la forma $n = 6k-1$ para algún k entero positivo. Se tiene que

$$n \equiv -1 (\text{mod } 3) \qquad \text{y} \qquad 2n \equiv 1 (\text{mod } 3).$$

Si d es un divisor de n, entonces $d \cdot (n/d) = n$, por lo que $d \equiv 1(\text{mod } 3)$ y $n/d \equiv -1(\text{mod } 3)$, o viceversa. En cualquier caso,

$$d + \frac{n}{d} \equiv 0 (\text{mod } 3). \tag{3.4}$$

Ahora bien, puesto que ningún número perfecto puede ser un cuadrado, podemos redefinir la función σ de la forma

$$\sigma(n) = \sum_{d<\sqrt{n}} \left(d + \frac{n}{d} \right).$$

Teniendo en cuenta esto y atendiendo a (3.4) se deduce que $\sigma(n)$ es divisible por 3, lo que resulta ser una contradicción, pues se había supuesto al comienzo $2n \equiv 1(\text{mod } 3)$.

□

A continuación, enumeramos una serie de teoremas relativos a números perfectos impares. Esta búsqeda sigue en continua evolución, en parte gracias a la computación, y cada cierto tiempo aparece un nuevo resultado que mejora la acotación del anterior. Estos son algunos de estos "mejores" teoremas del momento, recopilados hasta la fecha de escritura de este trabajo:

Teorema 3.25. *Si $n = q^a p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \cdots p_k^{2a_k}$ es un número perfecto impar, con $q, p_1, \ldots, p_k$ son primos distintos, entonces*

- $n < 2^{4^k - 2^k}$. [11]
- *si* $5 \mid n$, $n < 5 \cdot 4^{4^{k-1}}$. [50]
- *si* $5 \mid n$ *y* $3^2 \mid n$, $n < 45 \cdot 14^{4^{k-2}}$. [50]
- $q^a > 10^{62}$ *o* $p_i^{2a_i} > 10^{62}$ *para algún* $i = 1, 2, \ldots, k$.

Teorema 3.26. *Si n es un número perfecto impar, entonces*

- $n > 10^{1500}$. [52]
- *n no es divisible por* 105. [42]
- $n \equiv 1(\text{mod } 12)$, $n \equiv 117(\text{mod } 468)$, *o* $n \equiv 81(\text{mod } 324)$. [58]
- *el mayor factor primo de n es mayor que* 10^8. [26]
- *el segundo mayor factor primo de n es mayor que* 10^4. [35][36]
- *el tercer mayor factor primo de n es mayor que* 100. [35][36]
- *n tiene al menos* 101 *factores primos, contando repeticiones.* [52]
- *n tiene al menos* 10 *factores primos distintos.* [52]
- *si* $3 \nmid n$ *entonces tiene al menos* 12 *factores primos distintos.* [51]

3.4.1. Conjetura de Ore

Otra vía para abordar la existencia de los números perfectos impares llegó de la mano de Oystein Ore y sus números. Dicho especialista en la teoría de grafos llegó a conjeturar, de una forma más general, que no existe número perfecto impar alguno. Expliquemos sus argumentos:

Definición 3.27. *Sea n un número entero positivo. Se dice que n es un **número de Ore** o **número divisor armónico** si satisface que*

$$\frac{n \cdot \tau(n)}{\sigma(n)}.$$

es un número entero positivo.

Nota. *Los números de Ore se escapan del objetivo del trabajo, por lo que trataremos el tema de forma escueta pese a que traten temas tan interesantes como es la media armónica, con la que se pueden definir con más belleza los números de Ore. Atendiendo a esta noción, dados k números $x_1, x_2, \ldots, x_k$, se define su **media armónica** como*

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{k}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_k}}.$$

*Así pues, se dice que un número n es un **número de Ore** si la media armónica de sus divisores es un número entero.*

Ejemplo 19. 6 *y* 140 *son números de Ore:*

- $\dfrac{6 \cdot \tau(6)}{\sigma(6)} = \dfrac{6 \cdot 4}{12} = 2 \qquad \left(= H(6) = \dfrac{4}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \right)$
- $\dfrac{140 \cdot \tau(140)}{\sigma(140)} = 5 \qquad \left(= H(140) = \dfrac{12}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{20} + \frac{1}{28} + \frac{1}{35} + \frac{1}{7} + \frac{1}{140}} \right)$ ■

Teorema 3.28 (Ore)**.** *Todo número perfecto es un número de Ore.* [53]

Demostración

Sea n un número perfecto. Tenemos que probar que si

$$\frac{n \cdot \tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{n \cdot \tau(n)}{2n} = \frac{\tau(n)}{2} = k$$

entonces k es un número entero. Resulta evidente que esta condición no se cumple si $\tau(n)$ fuese un número impar. Sin embargo,

- Si n es un número perfecto par, por el *Teorema* 3.20 $\tau(n)$ es un número par.
- Si n es un número perfecto impar, por el *Teorema* 3.21 n es de la forma $n = p^{\alpha} q_1^{2\beta_2} q_2^{2\beta_2} \cdots q_k^{2\beta_k}$ con $p, q_1, q_2, \ldots, q_k$ primos impares distintos, y $p = 1 (\text{mod } 4) = \alpha$. En conclusión,

  $$\frac{\tau(n)}{2} = \frac{(\alpha+1)(2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\cdots(2\beta_k+1)}{2}$$

  es un número entero, puesto que $\alpha + 1$ es par.

□

A raíz de este teorema, en 1948 Oystein Ore realizó la siguiente conjetura. Demostrar este enunciado no solo significaría afirmar que el 1 es el único número de Ore impar, sino que sería otra vía para probar la no existencia de números perfectos impares.

Conjetura 3.29. *Todo número de Ore no trivial es par.* [53]

Tabla 3.3: Primeros números de Ore

N°	N° de Ore	
1	1	
2	6	*
3	28	*
4	140	
5	270	
6	496	*
7	672	
8	1638	
9	2970	
10	6200	
11	8128	*
12	8190	
13	18600	
14	18620	
15	27846	

*Números perfectos.
Fuente: A001599.

¿Qué utilidad tienen los números perfectos?

Como muchos problemas en la teoría de números, y las ciencias en general, uno puede preguntarse el mérito y el uso de su investigación. La historia ha demostrado que lo que parecían temas sin una dirección fija aparente, tornaban en la base de estudios relevantes. Por ejemplo, la teoría de operadores a la postre fue la base de la mecánica cuántica.

Hasta la fecha, este tipo de números no posee ninguna utilidad. Sin embargo, la estrecha relación entre los números perfectos pares y los primos de Mersenne fundamenta su búsqueda, pues estos últimos cuentan con aplicaciones criptográficas e informáticas. Para más detalles volver a la *Sección* (3.1.1).

No obstante, la marcada tradición histórica de los números perfectos y los nombres de los matemáticos que dedicaron su tiempo a ellos son una razón suficiente para el estudio de estos números. El descubridor del último número perfecto conocido supo resumir esto en una frase:

“Los números perfectos son dignos de estudio por derecho propio.”

-Curtis Cooper (Carta al autor)

Correo de Curtis Cooper

El doctor Curtis Cooper, profesor de la University of Central Missouri y descubridor de cuatro números perfectos (incluyendo el último descubierto el 7 de enero) tuvo a bien aportarme una visión general del tema:

Dear Diego Alonso,

Thank you for your email.

To answer your questions.

Is there any current application to the last Mersenne primes?
I know of no practical application of the fact that $2^{74207281}-1$ is prime.
However, the success of the Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) proves that the concept of distributed computing works. It proves that large computing problems can be solved with a network of personal computers.

You think perfect numbers will be useful in the future?
I do not think perfect number will be useful in the future. However, Mersenne primes and perfect numbers are very beautiful objects and are worthy of study in their own right.

Sincerely,
Curtis Cooper

5-4-2016

Capítulo 4

Números Multiperfectos

Definición 4.1. *Sea n un número entero positivo. Se dice que n es un **número multiperfecto** (o **k-perfecto**) si satisface que*

$$\sigma(n) = kn$$

para algún entero positivo k.
Denotaremos $\boldsymbol{P_k^{(i)}}$ al i-ésimo número k-perfecto.

Nota. *A partir de la definición resulta claro que los números perfectos son un caso especial de número multiperfecto, es decir, 2-perfectos.*

Nota. *Tal vez la terminología "multiperfecto" no sea del todo apropiada. En la traducción al castellano se ha perdido su otra denominación, más explícita y exhaustiva. Así pues, en textos anglosajones es común tanto las referencias a "multiperfect numbers" o "pluperfect numbers" como la locución "multiply perfect numbers" usada por Carmichael ya en 1907; y es precisamente esta caracterización de "múltiplo perfecto" la que mejor define a nuestros números a estudio.*

Ejemplo 20.

- 496 *es un número* 2*-perfecto:*

$$\sigma(496) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 + 496 = 992 = 2 \cdot 496$$

- 120 *es un número* 3*-perfecto:*

$$\sigma(120) = 1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20+24+30+40+60+120 = 360 = 3 \cdot 120$$

- *El mayor valor conocido de k es* 11*, y solo se conoce un único número* 11*-perfecto:* [18]

$2^{468} \cdot 3^{140} \cdot 5^{66} \cdot 7^{49} \cdot 11^{40} \cdot 13^{31} \cdot 17^{11} \cdot 19^{12} \cdot 23^{9} \cdot 29^{7} \cdot 31^{11} \cdot 37^{8} \cdot 41^{5} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{3} \cdot 61^{2} \cdot 67^{4} \cdot 71^{4} \cdot 73^{3} \cdot 79 \cdot 83^{2} \cdot 89 \cdot 97^{4} \cdot 101^{4} \cdot 103^{3} \cdot 109^{3} \cdot 113^{2} \cdot 127^{3} \cdot 131^{3} \cdot 137^{2} \cdot$
$139^{2} \cdot 149^{2} \cdot 151 \cdot 157^{2} \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 181 \cdot 191 \cdot 193^{2} \cdot 197 \cdot 199 \cdot 211^{3} \cdot 223 \cdot 227 \cdot 229^{2} \cdot 239 \cdot 251 \cdot 257 \cdot 263 \cdot 269^{3} \cdot 271 \cdot 281^{2} \cdot 293 \cdot 307^{3} \cdot 313 \cdot 317 \cdot 331 \cdot 347 \cdot 349 \cdot 367 \cdot 373 \cdot 397 \cdot 401 \cdot$
$419 \cdot 421 \cdot 431 \cdot 443^{2} \cdot 449 \cdot 457 \cdot 461 \cdot 467 \cdot 491 \cdot 499^{2} \cdot 541 \cdot 547 \cdot 569 \cdot 571 \cdot 599 \cdot 607 \cdot 613 \cdot 647 \cdot 691 \cdot 701 \cdot 719 \cdot 727 \cdot 761 \cdot 827 \cdot 853 \cdot 937 \cdot 967 \cdot 991 \cdot 997 \cdot 1013 \cdot 1061 \cdot 1087 \cdot 1171 \cdot 1213 \cdot$
$1223 \cdot 1231 \cdot 1279 \cdot 1381 \cdot 1399 \cdot 1433 \cdot 1609 \cdot 1613 \cdot 1619 \cdot 1723 \cdot 1741 \cdot 1783 \cdot 1873 \cdot 1933 \cdot 1979 \cdot 2081 \cdot 2089 \cdot 2221 \cdot 2357 \cdot 2551 \cdot 2657 \cdot 2671 \cdot 2749 \cdot 2791 \cdot 2801 \cdot 2803 \cdot 3331 \cdot 3433 \cdot$
$4051 \cdot 4177 \cdot 4231 \cdot 5581 \cdot 5653 \cdot 5839 \cdot 6661 \cdot 7237 \cdot 7699 \cdot 8081 \cdot 8101 \cdot 8269 \cdot 8581 \cdot 8941 \cdot 10501 \cdot 11833 \cdot 12583 \cdot 12941 \cdot 13441 \cdot 14281 \cdot 15053 \cdot 17929 \cdot 19181 \cdot 20809 \cdot 21997 \cdot$
$23063 \cdot 23971 \cdot 26399 \cdot 26881 \cdot 27061 \cdot 28099 \cdot 29251 \cdot 32051 \cdot 32059 \cdot 32323 \cdot 33347 \cdot 33637 \cdot 36373 \cdot 38197 \cdot 41617 \cdot 51853 \cdot 62011 \cdot 67927 \cdot 73547 \cdot 77081 \cdot 83233 \cdot 92251 \cdot 93253 \cdot$
$124021 \cdot 133387 \cdot 141311 \cdot 175433 \cdot 248041 \cdot 256471 \cdot 262321 \cdot 292561 \cdot 338753 \cdot 353641 \cdot 441281 \cdot 449653 \cdot 509221 \cdot 511801 \cdot 540079 \cdot 639083 \cdot 696607 \cdot 746023 \cdot 922561 \cdot$
$1095551 \cdot 1401943 \cdot 1412753 \cdot 1428127 \cdot 1984327 \cdot 2556331 \cdot 5112661 \cdot 5714803 \cdot 7450297 \cdot 8334721 \cdot 10715147 \cdot 14091139 \cdot 14092193 \cdot 18739907 \cdot 19270249 \cdot 29866451 \cdot$

96656723·133338869·193707721·283763713·407865361·700116563·795217607·3035864933·3336809191·35061928679·143881112839·161969595577·287762225677·761838257287·840139875599·2031161085853·2454335007529·2765759031089·31280679788951·75364676329903·901563572369231·2169378653672701·4764764439424783·703219586448000177·79787519018560501·702022478271339803·1839633098314450447·165301473942399079669·604088623657497125653141·160014034995323841360748039·259222736692424623004411823 17·1542815232394896690968939043642078 1·420391294797275951862132367930818883361·23735410086474640244277823338130677687887·628683935022908831926019116410056880219316806841500141982334538232031397827230330241 ■

Desde el siglo XVII, con el descubrimiento del primer número k-perfecto con $k > 2$, los matemáticos se preguntaron por su factorización. Fue en 1900-1901 cuando Lehmer, generalizando un resultado previo de Sylvester, dio con el número mínimo de factores primos distintos de un número k-perfecto. El resultado consta de una demostración práctica a la par que sencilla y nos sirve para presentar estos números. [43]

Teorema 4.2.

- *Todo número* 3*-perfecto contiene al menos* 3 *factores primos distintos.*
- *Todo número* 4*-perfecto contiene al menos* 4 *factores primos distintos.*
- *Todo número* 5*-perfecto contiene al menos* 6 *factores primos distintos.*
- *Todo número* 6*-perfecto contiene al menos* 9 *factores primos distintos.*
- *Todo número* 7*-perfecto contiene al menos* 14 *factores primos distintos.*
- *Todo número* 8*-perfecto contiene al menos* 22 *factores primos distintos.*
- *Todo número* 9*-perfecto contiene al menos* 35 *factores primos distintos.*
- *Todo número* 10*-perfecto contiene al menos* 55 *factores primos distintos.*
- *Todo número* 11*-perfecto contiene al menos* 89 *factores primos distintos.*
- *Todo número* 12*-perfecto contiene al menos* 142 *factores primos distintos.*
- ...

Demostración

Sea $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{a_i}$ la descomposición en factores primos de un número k-perfecto, con $a_i \geq 1$ y p_i primos distintos para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Se cumple que

$$k = \frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i^{a_i}(p_i - 1)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - \frac{1}{p_i^{a_i}}}{p_i - 1},$$

por tanto

$$k < \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i - 1}. \tag{4.1}$$

- Si $k = 3$, el mayor valor del producto de $\dfrac{p_i}{p_i - 1}$ que se puede tomar con dos elementos primos p_i es
$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3,$$
y, en definitiva, no se cumple la desigualdad (4.1). No obstante, la desigualdad sí que se cumple tomando 3 valores primos p_i adecuados.

- El resto de casos se prueban de forma similar.

□

4.1. Tablas de Números Multiperfectos

Sea esta sección un preámbulo al estudio de los números k-perfectos, y sirvámonos de sus tablas para tener tanto una visión histórica como conocimientos de la cantidad y magnitud que estos números multiperfectos han alcanzado.

La primera lista muestra el desarrollo de estos números en los últimos cuatro siglos. Por su parte, la *Tabla* 4.2, nos ofrece las estimaciones de Achim Flammenkamp, creador de la web de números multiperfectos [18], en lo relativo a la cantidad de números multiperfectos que pudieran existir en comparación con el total contabilizado. En ningún caso debe tomarse esta tabla como referencia, pues dichas estimaciones son muy discutidas. No obstante, sí que permiten resaltar una premisa, se conjetura que todo número k-perfecto ha sido hallado para valores de $k = 3, 4, 5, 6$ y 7.

Tabla 4.1: Primeros números k-perfectos conocidos

k	Año	Descubridor	Número	Factorización
1	-	-	1	1
2	-	-	6	$2{\cdot}3$
3	1631	Mersenne	120	$2^3{\cdot}3{\cdot}5$
4	1638	Descartes	30240	$2^5{\cdot}3^3{\cdot}5{\cdot}7$
5	1638	Descartes	$1,418{\cdot}10^{10}$	$2^7{\cdot}3^4{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11^2 17{\cdot}19$
6	1643	Fermat	$3,411{\cdot}10^{40}$	$2^{27}{\cdot}3^5{\cdot}5^3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}19{\cdot}29{\cdot}31{\cdot}43{\cdot}61{\cdot}113{\cdot}127$
7	1902	Cunningham	$6{,}954{\cdot}10^{70}$	$2^{46}{\cdot}3^{15}{\cdot}5^3{\cdot}7^5{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}17{\cdot}19^2{\cdot}23{\cdot}31{\cdot}37{\cdot}41{\cdots}$
8	1929	Poulet	$2,341{\cdot}10^{161}$	$2^{62}{\cdot}3^{23}{\cdot}5^6{\cdot}7^{10}{\cdot}11{\cdot}13^5{\cdot}17^2{\cdot}19^2{\cdot}23{\cdot}29^3{\cdot}37{\cdots}$
9	1992	Helenius	$7,984{\cdot}10^{465}$	$2^{130}{\cdot}3^{49}{\cdot}5^{15}{\cdot}7^{20}{\cdot}11^{10}{\cdot}13^7{\cdot}17^6{\cdot}19^6{\cdot}23^2{\cdot}29^4{\cdots}$
10	1997	Sorli	$2,869{\cdot}10^{923}$	$2^{240}{\cdot}3^{77}{\cdot}5^{41}{\cdot}7^{30}{\cdot}11^{13}{\cdot}13^{19}{\cdot}17^{11}{\cdot}19^{14}{\cdot}23^5{\cdots}$
11	2001	Woltman	$2,519{\cdot}10^{1906}$	$2^{468}{\cdot}3^{140}{\cdot}5^{66}{\cdot}7^{49}{\cdot}11^{40}{\cdot}13^{31}{\cdot}17^{11}{\cdot}19^{12}{\cdot}23^9{\cdots}$

Fuente: [18].

Tabla 4.2: Cantidad de números k-perfectos conocidos

k	Cantidad	Estimación	Último descubrimiento
1	1	1	-
2	49	∞	2016
3	6	6	1643
4	36	36	1929
5	65	65	1990
6	245	245	1993
7	516	516	1994
8	1134	1140	2000
9	2095	2200	2013
10	1164	4500	2013
11	1	10000	2001

Fuente: [18].

Nota. *Achim Flammenkamp probó en* 2008*, mediante evaluaciones por ordenador, la no existencia de otros números k-perfectos menores que* $e^{350} \sim 10^{152}$ *más allá de los ya conocidos.* [19]

Los números 3-perfectos y 4-perfectos constituyen las clases más famosas de números multiperfectos. Ello se debe a su escasez (mostrada en la *Tabla* 4.2), a su aparente sencillez y a su marcado peso histórico, contando con nombres como Descartes, Fermat, Mersenne, Lehmer, Carmichael, ... Obsérvese que no se descubren números 3-perfectos desde 1643 y que el último 4-perfecto hallado fue hace casi un siglo. Por esta razón y porque serán utilizados en muchos de los próximos ejemplos, pasamos a listarlos:

Tabla 4.3: Números 3-perfectos

P_3	Fecha	Descubridor
$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	1557, 1631	Recorde, Mersenne
$2^5 \cdot 3 \cdot 7$	1636	Fermat
$2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$	1638	Jumeau, Fermat
$2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$	1638	Frenicle
$2^{13} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$	1638	Descartes, Fermat
$2^{14} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151$	1643	Fermat

Fuente: [18] y A005820.

Tabla 4.4: Números 4-perfectos

P_4	Fecha	Descubridor
$2^5{\cdot}3^3{\cdot}5{\cdot}7$	1638, 1634	Descartes, Mersenne
$2^3{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}13$	1638	Descartes
$2^2{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7^2{\cdot}13{\cdot}19$	1901	Lehmer
$2^9{\cdot}3^3{\cdot}5{\cdot}11{\cdot}31$	1638	Descartes
$2^7{\cdot}3^3{\cdot}5^2{\cdot}17{\cdot}31$	1639	in-Mersenne
$2^9{\cdot}3^2{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}31$	1638	Descartes
$2^8{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}19{\cdot}37{\cdot}73$	1638	Frenicle
$2^{10}{\cdot}3^3{\cdot}5^2{\cdot}23{\cdot}31{\cdot}89$	1639	in-Mersenne
$2^{13}{\cdot}3^3{\cdot}5{\cdot}11{\cdot}43{\cdot}127$	1638	Descartes
$2^{14}{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}19{\cdot}31{\cdot}151$	1643	Fermat
$2^{13}{\cdot}3^2{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}43{\cdot}127$	1638	Descartes
$2^5{\cdot}3^4{\cdot}7^2{\cdot}11^2{\cdot}19^2{\cdot}127$	1911	Carmichael
$2^8{\cdot}3^2{\cdot}7^2{\cdot}13{\cdot}19^2{\cdot}37{\cdot}73{\cdot}127$	1901	Lehmer
$2^7{\cdot}3^{10}{\cdot}5{\cdot}17{\cdot}23{\cdot}107{\cdot}3851$	1911	Carmichael
$2^7{\cdot}3^6{\cdot}5{\cdot}17{\cdot}23{\cdot}137{\cdot}547{\cdot}1093$	1643	Fermat
$2^{14}{\cdot}3^2{\cdot}7^2{\cdot}13{\cdot}19^2{\cdot}31{\cdot}127{\cdot}151$	1910	Carmichael
$2^5{\cdot}3^4{\cdot}7^2{\cdot}11^2{\cdot}19^4{\cdot}151{\cdot}911$	1929	Poulet
$2^9{\cdot}3^4{\cdot}7{\cdot}11^3{\cdot}31^2{\cdot}61{\cdot}83{\cdot}331$	1911	Carmichael
$2^8{\cdot}3^2{\cdot}7^2{\cdot}13{\cdot}19^4{\cdot}37{\cdot}73{\cdot}151{\cdot}911$	1929	Poulet
$2^{25}{\cdot}3^3{\cdot}5^2{\cdot}19{\cdot}31{\cdot}683{\cdot}2731{\cdot}8191$	1910	Carmichael
$2^{17}{\cdot}3^{10}{\cdot}7{\cdot}19^2{\cdot}23{\cdot}37{\cdot}73{\cdot}107{\cdot}127{\cdot}3851$	1911	Carmichael
$2^{17}{\cdot}3^6{\cdot}7{\cdot}19^2{\cdot}23{\cdot}37{\cdot}73{\cdot}127{\cdot}137{\cdot}547{\cdot}1093$	1911	Carmichael
$2^{25}{\cdot}3^4{\cdot}7{\cdot}11^2{\cdot}19^2{\cdot}127{\cdot}683{\cdot}2731{\cdot}8191$	1911	Carmichael
$2^{25}{\cdot}3^5{\cdot}7^2{\cdot}13{\cdot}19^2{\cdot}127{\cdot}683{\cdot}2731{\cdot}8191$	1911	Carmichael
$2^{17}{\cdot}3^{10}{\cdot}7{\cdot}19^4{\cdot}23{\cdot}37{\cdot}73{\cdot}107{\cdot}151{\cdot}911{\cdot}3851$	1929	Poulet
$2^{25}{\cdot}3^{10}{\cdot}5{\cdot}19{\cdot}23{\cdot}107{\cdot}683{\cdot}2731{\cdot}3851{\cdot}8191$	1911	Carmichael
$2^{17}{\cdot}3^6{\cdot}7{\cdot}19^4{\cdot}23{\cdot}37{\cdot}73{\cdot}137{\cdot}151{\cdot}547{\cdot}911{\cdot}1093$	1929	Poulet
$2^{25}{\cdot}3^6{\cdot}5{\cdot}19{\cdot}23{\cdot}137{\cdot}547{\cdot}683{\cdot}1093{\cdot}2731{\cdot}8191$	1910	Carmichael
$2^{25}{\cdot}3^4{\cdot}7{\cdot}11^2{\cdot}19^4{\cdot}151{\cdot}683{\cdot}911{\cdot}2731{\cdot}8191$	1929	Poulet
$2^{25}{\cdot}3^5{\cdot}7^2{\cdot}13{\cdot}19^4{\cdot}151{\cdot}683{\cdot}911{\cdot}2731{\cdot}8191$	1929	Poulet
$2^{33}{\cdot}3^4{\cdot}7{\cdot}11^3{\cdot}31{\cdot}61{\cdot}83{\cdot}331{\cdot}43691{\cdot}131071$	1911	Carmichael
$2^{33}{\cdot}3^{10}{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}23{\cdot}83{\cdot}107{\cdot}331{\cdot}3851{\cdot}43691{\cdot}131071$	1911	Carmichael
$2^{33}{\cdot}3^6{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}23{\cdot}83{\cdot}137{\cdot}331{\cdot}547{\cdot}1093{\cdot}43691{\cdot}131071$	1911	Carmichael
$2^{37}{\cdot}3^4{\cdot}7{\cdot}11^3{\cdot}31{\cdot}61{\cdot}83{\cdot}331{\cdot}43691{\cdot}174763{\cdot}524287$	1911	Carmichael
$2^{37}{\cdot}3^{10}{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}23{\cdot}83{\cdot}107{\cdot}331{\cdot}3851{\cdot}43691{\cdot}174763{\cdot}524287$	1911	Carmichael
$2^{37}{\cdot}3^6{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}23{\cdot}83{\cdot}137{\cdot}331{\cdot}547{\cdot}1093{\cdot}43691{\cdot}174763{\cdot}524287$	1911	Carmichael

Fuente: [18] y A027687.

Por último, se aporta la lista de los números 5-perfectos con intención testimonial. Sirva de herramienta para cotejar los sucesivos ejemplos que veamos. De igual modo, sirva de referencia el nombre de sus descubridores, pues es la razón de que los números multiperfectos sean un tema de culto en el mundo matemático.

Tabla 4.5: Números 5-perfectos

P_5	Fecha	Descubridor
$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19$	1638	Descartes
$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	1639	Descartes
$2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	1639	in-Mersenne
$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 89$	-	Fermat
$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 89$	1638	Frenicle
$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61$	1911	Carmichael
$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13^3 \cdot 17$	1911	Carmichael
$2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 257$	1911	Carmichael
$2^{11} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3851$	1911	Carmichael
$2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 127$	1643	Fermat
$2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	1911	Carmichael
$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$	1911	Carmichael
$2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 151 \cdot 331$	1911	Carmichael
$2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 127 \cdot 337$	1643	Fermat
$2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 127 \cdot 337$	1911	Carmichael
$2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 127 \cdot 337$	1911	Carmichael
$2^{21} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 89 \cdot 683$	1911	Carmichael
$2^{19} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 107 \cdot 3851$	1911	Carmichael
$2^{19} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	1911	Carmichael
$2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 151 \cdot 911$	1929	Poulet
$2^{22} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 151 \cdot 197 \cdot 178481$	1911	Carmichael
$2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 331 \cdot 337$	1911	Carmichael
$2^{19} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31^2 \cdot 41^2 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 431 \cdot 1723\ 7$	1911	Carmichael
$2^{21} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 127 \cdot 379 \cdot 683 \cdot 757$	1911	Carmichael
$2^{20} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 127 \cdot 337 \cdot 467 \cdot 2801$	1911	Carmichael
$2^{21} \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23^2 \cdot 31 \cdot 79 \cdot 89 \cdot 107 \cdot 683 \cdot 3851$	1911	Carmichael
$2^{21} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23^2 \cdot 31 \cdot 79 \cdot 89 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 683 \cdot 1093$	1901	Lehmer
$2^{33} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 43691 \cdot 131071$	1911	Carmichael
$2^{27} \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 107 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 3851$	1911	Carmichael
$2^{27} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	1911	Mason
$2^{33} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 43691 \cdot 131071$	1911	Carmichael
$2^{21} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 151 \cdot 379 \cdot 683 \cdot 757 \cdot 911$	1929	Poulet
$2^{24} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 127 \cdot 379 \cdot 601 \cdot 757 \cdot 1801$	1911	Carmichael
$2^{27} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 11^4 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 179 \cdot 3221$	1911	Mason
$2^{37} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 43691 \cdot 174763 \cdot 524287$	1911	Carmichael
$2^{28} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 127 \cdot 233 \cdot 379 \cdot 757 \cdot 1103 \cdot 2089$	1911	Mason
$2^{38} \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 79 \cdot 229 \cdot 8191 \cdot 121369$	1911	Mason
$2^{37} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 43691 \cdot 174763 \cdot 524287$	1911	Carmichael
$2^{24} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 151 \cdot 379 \cdot 601 \cdot 757 \cdot 911 \cdot 1801$	1929	Poulet
$2^{29} \cdot 3^{10} \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 83 \cdot 107 \cdot 151 \cdot 181 \cdot 331 \cdot 3851$	1911	Carmichael
$2^{29} \cdot 3^6 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 83 \cdot 137 \cdot 151 \cdot 181 \cdot 331 \cdot 547 \cdot 1093$	1911	Carmichael
$2^{28} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 151 \cdot 233 \cdot 379 \cdot 757 \cdot 911 \cdot 1103 \cdot 2089$	1929	Poulet
$2^{34} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 31 \cdot 71 \cdot 127 \cdot 151 \cdot 379 \cdot 683 \cdot 757 \cdot 911 \cdot 6829 \cdot 122921$	1929	Poulet
$2^{29} \cdot 3^8 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 83 \cdot 137 \cdot 151^2 \cdot 331 \cdot 379 \cdot 547 \cdot 757 \cdot 911 \cdot 1093$	1954	Brown

P_5	Fecha	Descubridor
$2^{31}\cdot 3^{13}\cdot 7^{4}\cdot 11^{3}\cdot 13\cdot 17\cdot 31\cdot 41\cdot 43\cdot 61\cdot 83\cdot 163\cdot 257\cdot 307\cdot 331\cdot 467\cdot 547^{2}\cdot 613\cdot 1093\cdot 2801\cdot 65537$	1911	Mason
$2^{29}\cdot 3^{16}\cdot 7^{4}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19^{2}\cdot 31^{2}\cdot 61\cdot 127\cdot 151\cdot 331^{2}\cdot 467\cdot 719\cdot 1871\cdot 2617\cdot 2801\cdot 5233\cdot 34511$	1954	Brown
$2^{61}\cdot 3^{7}\cdot 5^{5}\cdot 7^{3}\cdot 23\cdot 31\cdot 41\cdot 59\cdot 79\cdot 157\cdot 43331\cdot 3033169\cdot 715827883\cdot 2147483647$	1911	Mason
$2^{29}\cdot 3^{9}\cdot 7^{8}\cdot 11^{3}\cdot 13\cdot 19^{4}\cdot 31\cdot 37^{3}\cdot 61^{2}\cdot 73\cdot 83\cdot 97\cdot 137^{2}\cdot 151^{2}\cdot 331\cdot 547\cdot 911\cdot 1063\cdot 1093$	1990	Gretton
$2^{34}\cdot 3^{16}\cdot 5^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19^{2}\cdot 31^{3}\cdot 37\cdot 61\cdot 71\cdot 127^{2}\cdot 271\cdot 683\cdot 719\cdot 1871\cdot 5419\cdot 6829\cdot 34511\cdot 122921$	1990	Gretton
$2^{41}\cdot 3^{14}\cdot 7^{4}\cdot 11^{3}\cdot 13^{4}\cdot 17\cdot 31\cdot 41\cdot 43\cdot 61\cdot 127\cdot 163\cdot 191\cdot 271\cdot 337\cdot 467\cdot 2281\cdot 2801\cdot 4561\cdot 5419\cdot 30941$	1911	Mason
$2^{42}\cdot 3^{13}\cdot 7^{5}\cdot 11^{2}\cdot 13\cdot 19^{2}\cdot 31\cdot 41\cdot 43\cdot 61\cdot 83\cdot 127\cdot 163\cdot 307\cdot 331\cdot 431\cdot 547^{2}\cdot 613\cdot 1093\cdot 9719\cdot 2099863$	1911	Carmichael
$2^{42}\cdot 3^{14}\cdot 7^{5}\cdot 11^{3}\cdot 13^{2}\cdot 19^{2}\cdot 31\cdot 41\cdot 43\cdot 61^{3}\cdot 83\cdot 127\cdot 163\cdot 331\cdot 431\cdot 1861\cdot 2281\cdot 4561\cdot 9719\cdot 2099863$	1953	Franqui&Garcia
$2^{42}\cdot 3^{13}\cdot 7^{5}\cdot 11^{2}\cdot 13\cdot 19^{4}\cdot 31\cdot 41\cdot 43\cdot 61\cdot 83\cdot 151\cdot 163\cdot 307\cdot 331\cdot 431\cdot 547^{2}\cdot 613\cdot 911\cdot 1093\cdot 9719\cdot 2099863$	1929	Poulet
$2^{34}\cdot 3^{14}\cdot 7^{4}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 19^{4}\cdot 31^{2}\cdot 41\cdot 61\cdot 71\cdot 83\cdot 127\cdot 151\cdot 163\cdot 331\cdot 467\cdot 683\cdot 911\cdot 2281\cdot 2801\cdot 4561\cdot 6829\cdot 122921$	1990	Gretton
$2^{45}\cdot 3^{13}\cdot 7^{2}\cdot 11^{3}\cdot 17\cdot 19^{2}\cdot 31\cdot 41\cdot 43\cdot 47\cdot 61\cdot 127\cdot 151\cdot 163\cdot 197\cdot 271\cdot 307\cdot 547^{2}\cdot 613\cdot 1093\cdot 5419\cdot 178481\cdot 2796203$	1911	Mason
$2^{51}\cdot 3^{18}\cdot 5^{4}\cdot 11\cdot 17\cdot 19^{2}\cdot 47\cdot 53\cdot 71\cdot 79\cdot 127\cdot 157\cdot 269\cdot 607\cdot 683\cdot 1213\cdot 1597\cdot 1613\cdot 2731\cdot 8191\cdot 36389\cdot 363889$	1953	Franqui&Garcia
$2^{42}\cdot 3^{14}\cdot 7^{5}\cdot 11^{3}\cdot 13^{2}\cdot 19^{4}\cdot 31\cdot 41\cdot 43\cdot 61^{3}\cdot 83\cdot 151\cdot 163\cdot 331\cdot 431\cdot 911\cdot 1861\cdot 2281\cdot 4561\cdot 9719\cdot 2099863$	1953	Franqui&Garcia
$2^{40}\cdot 3^{16}\cdot 7^{2}\cdot 11\cdot 13^{2}\cdot 19^{2}\cdot 31^{2}\cdot 37\cdot 43\cdot 61\cdot 83\cdot 103\cdot 127\cdot 257\cdot 331\cdot 557\cdot 719\cdot 1871\cdot 7621\cdot 13367\cdot 15241\cdot 34511\cdot 164511353$	1929	Poulet
$2^{51}\cdot 3^{19}\cdot 5^{6}\cdot 11^{4}\cdot 19^{2}\cdot 31\cdot 43\cdot 53\cdot 61\cdot 79\cdot 127\cdot 157\cdot 179\cdot 197\cdot 257\cdot 269\cdot 683\cdot 1181\cdot 1613\cdot 2731\cdot 3221\cdot 8191\cdot 19531$	1911	Mason
$2^{51}\cdot 3^{18}\cdot 5^{4}\cdot 11\cdot 17\cdot 19^{4}\cdot 47\cdot 53\cdot 71\cdot 79\cdot 151\cdot 157\cdot 269\cdot 607\cdot 683\cdot 911\cdot 1213\cdot 1597\cdot 1613\cdot 2731\cdot 8191\cdot 36389\cdot 363889$	1953	Franqui&Garcia
$2^{41}\cdot 3^{14}\cdot 7^{9}\cdot 11^{3}\cdot 13^{5}\cdot 17\cdot 41\cdot 43^{2}\cdot 61^{2}\cdot 79^{2}\cdot 97\cdot 127\cdot 157\cdot 163\cdot 191\cdot 271\cdot 337\cdot 467\cdot 631\cdot 2281\cdot 2801\cdot 4561\cdot 5419$	1929	Poulet
$2^{41}\cdot 3^{12}\cdot 7^{4}\cdot 11^{2}\cdot 13^{4}\cdot 17^{2}\cdot 19^{4}\cdot 43\cdot 103\cdot 127\cdot 151\cdot 191\cdot 271\cdot 307\cdot 337\cdot 467\cdot 617\cdot 911\cdot 2801\cdot 5419\cdot 30941\cdot 398581\cdot 797161$	1953	Franqui&Garcia
$2^{40}\cdot 3^{16}\cdot 7^{2}\cdot 11\cdot 13^{2}\cdot 19^{4}\cdot 31^{2}\cdot 37\cdot 43\cdot 61\cdot 83\cdot 103\cdot 151\cdot 257\cdot 331\cdot 557\cdot 719\cdot 911\cdot 1871\cdot 7621\cdot 13367\cdot 15241\cdot 34511\cdot 164511353$	1929	Poulet
$2^{51}\cdot 3^{19}\cdot 5^{6}\cdot 11^{4}\cdot 19^{4}\cdot 31\cdot 43\cdot 53\cdot 61\cdot 79\cdot 151\cdot 157\cdot 179\cdot 197\cdot 257\cdot 269\cdot 683\cdot 911\cdot 1181\cdot 1613\cdot 2731\cdot 3221\cdot 8191\cdot 19531$	1929	Poulet
$2^{40}\cdot 3^{12}\cdot 7^{8}\cdot 11^{2}\cdot 17^{2}\cdot 19^{5}\cdot 31\cdot 37^{2}\cdot 43\cdot 47\cdot 67\cdot 103^{2}\cdot 127\cdot 257\cdot 307\cdot 557\cdot 617\cdot 1063\cdot 3571\cdot 7621\cdot 13367\cdot 15241\cdot 398581\cdot 797161\cdot 164511353$	1911	Mason

Fuente: [18] y A04606.

El resto de listas de números k-perfectos no serán aportadas debido a la nula información que nos ofrecerán con respecto a este trabajo y a la magnitud de estas (mostrado en la *Tabla* 4.2). Aún así, dichas listas pueden ser consultadas en la página web de referencia [18].

4.2. Relativo a la Desigualdad de Robin

Una vez más la *Hipótesis de Riemann*, de la mano de la *Desigualdad de Robin*, vuelve a aparecer en nuestro estudio. En este caso, de ser cierto aquello que Riemann postuló en 1859, el resultado de Robin aportaría una cota inferior a cada clase de número multiperfecto. Recordemos la desigualdad:

Teorema 4.3 (Robin)**.** *La Hipótesis de Riemann es cierta si y solo si*

$$\sigma(n) = \sum_{d\mid n} d \leq e^{\gamma} n \log\log n, \qquad \textit{para todo } n > 5040$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni, $e^{\gamma} = 1{,}78107$.

Supongamos que N es un número k-perfecto. De ser cierta la *Desigualdad de Robin*, se cumple que

$$\sigma(N) = kN \leq e^{\gamma} N \log\log N, \qquad \text{para todo } N > 5040$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{k}{e^{\gamma}} \leq \operatorname{loglog} N, \qquad \text{para todo } N > 5040$$

y, en conclusión, para todo número k-perfecto $N > 5040$ se tiene que

$$N > \exp\left(\exp\left(\frac{k}{e^{\gamma}}\right)\right).$$

Tabla 4.6: Cota inferior para números k-perfectos

k	Cota inferior
4	12687
5	15636042
6	$4{,}1016155134 \cdot 10^{12}$
7	$1{,}2983864742 \cdot 10^{22}$
8	$5{,}8866871854 \cdot 10^{38}$
9	$9{,}3859726557 \cdot 10^{67}$
10	$1{,}4837202677 \cdot 10^{119}$
11	$8{,}6044516559 \cdot 10^{208}$
12*	$2{,}0441298531 \cdot 10^{366}$
13*	$1{,}6841040896 \cdot 10^{642}$
...	...

*No conocidos hasta la fecha.

Nota. *Como podemos observar, el teorema no solo da una idea de los números k-perfectos conocidos, sino que a su vez aporta información de las dimensiones que, de existir, tendrían los números* 12*-perfectos,* 13*-perfectos, ...*
Nótese también que en dicha tabla no aparece ninguna mención a números 2*-perfectos ni* 3*-perfectos. Las razones no pueden ser más claras, pues es ampliamente conocido que* 6 *y* 120 *son sus menores representantes respectivamente, no hace falta más que calcular los valores de σ desde el primer número natural.*

4.3. Búsqueda de Números Multiperfectos

A excepción de la *Regla de Euclides-Euler* 3.12 para los números 2-perfectos, no se conoce ninguna fórmula que genere números multiperfectos. Muchos de estos números, como relatan la fuentes, han sido encontrados con el solo uso de lápiz y papel. Con todo ello, sí que existen métodos constructivos y heurísticos que han permitido el hallazgo de la gran mayoría de números k-perfectos.

Esta sección está dedicada a la explicación de los métodos más importantes de búsqueda de números multiperfectos. Se ha escrito muy poco sobre el tema, y la mayoría de artículos consisten en una mera lista de nuevos descubrimientos. Los procedimientos utilizados en la actualidad son nuevas versiones de métodos creados siglos atrás o computarizaciones de estos, y no suelen ser difundidas más allá de las propias webs de los creadores (como [18]) o mediante comunicación privada directa vía mail. [61]

4.3.1. Método Heurístico de Números Multiperfectos Pares

Como ya hemos mencionado, no existe forma determinista alguna que permita encontrar números multiperfectos. Pese a ello se han desarrollado estrategias partiendo de la observación de sus propiedades. Uno de los ejemplos más visuales de este tipo es el método que pasamos a detallar [61], el cual se basa en la búsqueda de números k-perfectos pares de la forma $N = 2^n p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ partiendo del factor 2^n.

Teorema 4.4 (Método heurístico)**.** *Esta búsqueda sistemática implica la construcción de una secuencia de números $N_0, N_1, \ldots$, tales que para algún natural n se sigue que*

$$N_0 = 2^n \qquad y \qquad N_{i+1} = N_i \cdot p_{i+1}^{a_{i+1}} = 2^n p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{i+1}^{a_{i+1}},$$

donde p_{i+1} es el mayor factor primo del numerador de $\frac{\sigma(N_i)}{N_i}$.
El proceso finaliza si:

- *$p_{i+1} = p_j$ para algún $j = 1, 2, \ldots, i$. En ese caso el método no genera ninguna solución.*
- *$\frac{\sigma(N_i)}{N_i} = k$, con k un número entero. En ese caso N_i es un número k-perfecto.*

Determinar los exponentes a_i es más difícil, por lo que discutiremos el tema más adelante. Ilustremos ahora este procedimiento:

Ejemplo 21. *Tómese $N_0 = 2^8$. Operamos*

$$\frac{\sigma(N_0)}{N_0} = \frac{2^9 - 1}{2^8(2-1)} = \frac{511}{256} = \frac{7 \cdot 73}{2^8}.$$

Se elige el mayor factor primo del numerador, $p_1 = 73$, con exponente $a_1 = 1$. Así pues, $N_1 = 2^8 \cdot 73$ y

$$\frac{\sigma(N_1)}{N_1} = \frac{\sigma(N_0)}{N_0} \cdot \frac{\sigma(73)}{73} = \frac{7 \cdot 73}{2^8} \cdot \frac{2 \cdot 37}{73} = \frac{7 \cdot 37}{2^7}.$$

Tomando $p_2 = 37$, se calcula $N_2 = 2^8 \cdot 73 \cdot 37$ y

$$\frac{\sigma(N_2)}{N_2} = \frac{\sigma(N_1)}{N_1} \cdot \frac{\sigma(37)}{37} = \frac{7 \cdot 37}{2^7} \cdot \frac{2 \cdot 19}{37} = \frac{7 \cdot 19}{2^6}.$$

Tomando $p_3 = 19$, se calcula $N_3 = 2^8 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 19$ y

$$\frac{\sigma(N_3)}{N_3} = \frac{\sigma(N_2)}{N_2} \cdot \frac{\sigma(19)}{19} = \frac{7 \cdot 19}{2^6} \cdot \frac{2^2 \cdot 5}{19} = \frac{5 \cdot 7}{2^4}.$$

Tomando $p_4 = 7$, se calcula $N_4 = 2^8 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 19 \cdot 7$ y

$$\frac{\sigma(N_4)}{N_4} = \frac{\sigma(N_3)}{N_3} \cdot \frac{\sigma(7)}{7} = \frac{5 \cdot 7}{2^4} \cdot \frac{2^3}{7} = \frac{5}{2}.$$

Tomando $p_5 = 5$, se calcula $N_5 = 2^8 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 19 \cdot 7 \cdot 5$ y

$$\frac{\sigma(N_5)}{N_5} = \frac{\sigma(N_4)}{N_4} \cdot \frac{\sigma(5)}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{5} = 3.$$

Hemos encontrado un número 3-perfecto, $P_3^{(4)} = 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$. ■

Desafortunadamente, este procedimiento no encuentra el resto de números multiperfectos con factor 2^n. Para ello, es necesario probar con potencias mayores de los factores primos impares tomados:

Ejemplo 22. *Retomemos el ejemplo anterior en su tercer paso:*
Tomando $p_3 = 19$ *con* $a_3 = 2$, $N_3 = 2^8 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 19^2$ *y*

$$\frac{\sigma(N_3)}{N_3} = \frac{\sigma(N_2)}{N_2} \cdot \frac{\sigma(19^2)}{19^2} = \frac{7 \cdot 19}{2^6} \cdot \frac{3 \cdot 127}{19^2} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 127}{2^6 \cdot 19}.$$

Tomando $p_4 = 127$, $N_4 = 2^8 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 19^2 \cdot 127$ *y*

$$\frac{\sigma(N_4)}{N_4} = \frac{\sigma(N_3)}{N_3} \cdot \frac{\sigma(127)}{127} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 127}{2^6 \cdot 19} \cdot \frac{2^7}{127} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{19}.$$

Tomando $p_5 = 7$ *con* $a_5 = 2$, $N_5 = 2^8 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 7^2$ *y*

$$\frac{\sigma(N_5)}{N_5} = \frac{\sigma(N_4)}{N_4} \cdot \frac{\sigma(7^2)}{7^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{19} \cdot \frac{3 \cdot 19}{7^2} = \frac{2 \cdot 3^2}{7}.$$

Tomando $p_6 = 3$ *con* $a_6 = 2$, $N_6 = 2^8 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 7^2 \cdot 3^2$ *y*

$$\frac{\sigma(N_6)}{N_6} = \frac{\sigma(N_5)}{N_5} \cdot \frac{\sigma(3^2)}{3^2} = \frac{2 \cdot 3^2}{7} \cdot \frac{13}{3^2} = \frac{2 \cdot 13}{7}.$$

Tomando $p_7 = 13$, $N_7 = 2^8 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 13$ *y*

$$\frac{\sigma(N_7)}{N_7} = \frac{\sigma(N_6)}{N_6} \cdot \frac{\sigma(13)}{13} = \frac{2 \cdot 13}{7} \cdot \frac{2 \cdot 7}{13} = 4.$$

Hemos encontrado un número 4-perfecto, $P_4^{(13)} = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 127$. ■

Como puede observarse, la elección de los factores primos p_i queda determinada a lo largo del procedimiento. Sin embargo, no sucede así con la búsqueda de exponentes. Para ello suele utilizarse un "árbol de decisiones" en el que se evalúen secuencialmente todas las alternativas posibles. El siguiente ejemplo ilustra un caso real de búsqueda de números multiperfectos:

Ejemplo 23. *Búsqueda de números multiperfectos, partiendo de la potencia* 2^{10}*:*
En cada fila se efectuará la operación $k = \frac{\sigma(N)}{N}$, *donde* N *es el resultado de multiplicar los factores que se van seleccionando; a su izquierda se muestra el factor seleccionado en el paso anterior; a la derecha el nuevo factor seleccionado a raíz de la operación.*

$$2^{10}: \quad k = \frac{23 \cdot 89}{2^{10}} \qquad \to 89$$

$$89: \quad k = \frac{23 \cdot 89}{2^{10}} \cdot \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5}{89} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 23}{2^9} \qquad \to 23$$

$$23: \quad k = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 23}{2^9} \cdot \frac{2^3 \cdot 3}{23} = \frac{3^3 \cdot 5}{2^6} \qquad \to 5$$

$$5: \quad k = \frac{3^3 \cdot 5}{2^6} \cdot \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{3^4}{2^5} \qquad \to 3$$

$$3: \quad k = \frac{3^4}{2^5} \cdot \frac{2^2}{3} = \frac{3^3}{2^3} \qquad \to \textit{ERROR, factor } 3 \textit{ ya tomado}$$

Probemos otra potencia de 3

$$3^2: \quad k = \frac{3^4}{2^5}\cdot\frac{13}{3^2} = \frac{3^2\cdot 13}{2^5} \quad \to 13$$
$$13: \quad k = \frac{3^2\cdot 13}{2^5}\cdot\frac{2\cdot 7}{13} = \frac{3^2\cdot 7}{2^4} \quad \to 7$$
$$7: \quad k = \frac{3^2\cdot 7}{2^4}\cdot\frac{2^3}{7} = \frac{3^2}{2} \quad \to \textit{ERROR, factor } 3 \textit{ ya tomado}$$

Probemos otra potencia de 3

$$3^3: \quad k = \frac{3^4}{2^5}\cdot\frac{2^3\cdot 5}{3^3} = \frac{3\cdot 5}{2^2} \quad \to \textit{ERROR, factor } 5 \textit{ ya tomado}$$

Probemos otra potencia de 3

$$3^4: \quad k = \frac{3^4}{2^5}\cdot\frac{11^2}{3^4} = \frac{11^2}{2^5} \quad \to 11$$
$$11: \quad k = \frac{11^2}{2^5}\cdot\frac{2^2\cdot 3}{11} = \frac{3\cdot 11}{2^3} \quad \to \textit{ERROR, factor } 11 \textit{ ya tomado}$$

Probemos otra potencia de 11

$$11^2: \quad k = \frac{11^2}{2^5}\cdot\frac{7\cdot 19}{11^2} = \frac{7\cdot 19}{2^5} \quad \to 19$$
$$19: \quad k = \frac{7\cdot 19}{2^5}\cdot\frac{2^2\cdot 5}{19} = \frac{5\cdot 7}{2^3} \quad \to 7$$
$$7: \quad k = \frac{5\cdot 7}{2^3}\cdot\frac{2^3}{7} = 5 \quad \to \textit{Hallado un número } 5\textit{-perfecto}$$

Hemos encontrado el número multiperfecto $P_5^{(4)} = 2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11^2\cdot 19\cdot 23\cdot 89$.

$$3^5: \quad k = \frac{3^4}{2^5}\cdot\frac{2^2\cdot 7\cdot 13}{3^5} = \frac{7\cdot 13}{2^3\cdot 3} \quad \to 13$$
$$13: \quad k = \frac{7\cdot 13}{2^3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 7}{13} = \frac{7^2}{2^2\cdot 3} \quad \to 7$$
$$7: \quad k = \frac{7^2}{2^2\cdot 3}\cdot\frac{2^3}{7} = \frac{2\cdot 7}{3} \quad \to \textit{ERROR, factor } 7 \textit{ ya tomado}$$

Probemos otra potencia de 7

$$7^2: \quad k = \frac{7^2}{2^2\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 19}{7^2} = \frac{19}{2^2} \quad \to 19$$
$$19: \quad k = \frac{19}{2^2}\cdot\frac{2^2\cdot 5}{19} = 5 \quad \to \textit{Hallado un número } 5\textit{-perfecto}$$

Hemos encontrado el número multiperfecto $P_5^{(5)} = 2^{10}\cdot 3^5\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13\cdot 19\cdot 23\cdot 89$.

$$5^2: \quad k = \frac{3^3\cdot 5}{2^6}\cdot\frac{31}{5^2} = \frac{3^3\cdot 31}{2^6\cdot 5} \quad \to 31$$
$$31: \quad k = \frac{3^3\cdot 31}{2^6\cdot 5}\cdot\frac{2^5}{31} = \frac{3^3}{2\cdot 5} \quad \to 3$$

$3: \qquad k = \frac{3^3}{2\cdot 5}\cdot\frac{2^2}{3} = \frac{2\cdot 3^2}{5}$ $\qquad \rightarrow$ *ERROR, factor 3 ya tomado*

Probemos otra potencia de 3

$3^2: \qquad k = \frac{3^3}{2\cdot 5}\cdot\frac{13}{3^2} = \frac{3\cdot 13}{2\cdot 5}$ $\qquad \rightarrow 13$

$13: \qquad k = \frac{3\cdot 13}{2\cdot 5}\cdot\frac{2\cdot 7}{13} = \frac{3\cdot 7}{5}$ $\qquad \rightarrow 7$

$7: \qquad k = \frac{3\cdot 7}{5}\cdot\frac{2^3}{7} = \frac{2^3\cdot 3}{5}$ $\qquad \rightarrow$ *ERROR, factor 3 ya tomado*

Probemos otra potencia de 3

$3^3: \qquad k = \frac{3^3}{2\cdot 5}\cdot\frac{2^3\cdot 5}{3^3} = 4$ $\qquad \rightarrow$ *Hallado un número 4-perfecto*

Hemos encontrado el número multiperfecto $P_4^{(8)} = 2^{10}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 23\cdot 31\cdot 89$.

Todas las posibilidades han sido examinadas.

■

4.3.2. Relativo a los Números Perfectos Impares

De probar que no existen números 3-perfectos más allá de los ya conocidos (el último fue descubierto hace cuatro siglos y se estima que no existan más), el siguiente teorema significaría la no existencia de números perfectos impares. Es por ello que destacamos su importancia dedicándole esta sección.

Teorema 4.5 (Lehmer)**.** *Si existe un número perfecto impar n, entonces $2n$ es un número 3-perfecto.*

Demostración

Supongamos que existe un número perfecto impar n. Se cumple que

$$\sigma(2n) = \sigma(2)\sigma(n) = 3\cdot 2n$$

por lo que $2n$ es un número 3-perfecto.

□

4.3.3. Sustituciones

Bajo ciertas condiciones, se pueden generar nuevos números multiperfectos a partir de los ya existentes. Es el caso del método que ideó Lehmer detallado en la sección anterior (*Teorema* 4.5) y que puede ser generalizado como sigue:

Teorema 4.6. *Si N es un número pn-perfecto, con p primo, n un entero positivo y $p \nmid N$, entonces pN es $(p{+}1)n$-perfecto.*

`Demostración`

$$\frac{\sigma(pN)}{pN} = \frac{\sigma(p)}{p} \cdot \frac{\sigma(N)}{N} = \left(\frac{p+1}{p}\right) \cdot pn = (p+1)n.$$

□

Ejemplo 24. *Partiendo de los números 3-perfectos expuestos, se pueden encontrar los siguientes números 4-perfectos (resulta claro observar que el método puede ser utilizado de forma inversa):*

$$P_3^{(4)} = 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 \qquad \longleftrightarrow \qquad 3P_3^{(4)} = P_4^{(7)} = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$$
$$P_3^{(6)} = 2^{14} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151 \qquad \longleftrightarrow \qquad 3P_3^{(6)} = P_4^{(10)} = 2^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151 \quad \blacksquare$$

Este tipo de búsqueda puede parecer una forma fácil de encontrar una gran cantidad de números multiperfectos para valores de $n = 1$. Un simple chequeo demuestra la falsedad de esa opinión, pues de los 5311 números contabilizados por Flammenkamp, solo es válido para dos 3-perfectos, veinte 5-perfectos, y lo que resulta más inexplicable, ningún número 7-perfecto conocido:

Tabla 4.8: Números k-perfectos tales que $k \nmid N$

k		Número k-perfecto
3	$P_3^{(4)}$	$2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$
	$P_3^{(6)}$	$2^{14} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151$
5	$P_5^{(34)}$	$2^{24} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 127 \cdot 379 \cdot 601 \cdot 757 \cdot 1801$
	$P_5^{(40)}$	$2^{24} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 151 \cdot 379 \cdot 601 \cdot 757 \cdot 911 \cdot 1801$
	$P_5^{(41)}$	$2^{29} \cdot 3^{10} \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 83 \cdot 107 \cdot 151 \cdot 181 \cdot 331 \cdot 3851$
	$P_5^{(42)}$	$2^{29} \cdot 3^6 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 83 \cdot 137 \cdot 151 \cdot 181 \cdot 331 \cdot 547 \cdot 1093$
	$P_5^{(45)}$	$2^{29} \cdot 3^8 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 83 \cdot 137 \cdot 151^2 \cdot 331 \cdot 379 \cdot 547 \cdot 757 \cdot 911 \cdot 1093$
	$P_5^{(46)}$	$2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 163 \cdot 257 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 467 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 1093 \cdot 2801 \cdot 65537$
	$P_5^{(47)}$	$2^{29} \cdot 3^{16} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 127 \cdot 151 \cdot 331^2 \cdot 467 \cdot 719 \cdot 1871 \cdot 2617 \cdot 2801 \cdot 5233 \cdot 34511$
	$P_5^{(49)}$	$2^{29} \cdot 3^9 \cdot 7^8 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 31 \cdot 37^3 \cdot 61^2 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 97 \cdot 137^2 \cdot 151^2 \cdot 331 \cdot 547 \cdot 911 \cdot 1063 \cdot 1093$
	$P_5^{(50)}$	$2^{41} \cdot 3^{14} \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^4 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 127 \cdot 163 \cdot 191 \cdot 271 \cdot 337 \cdot 467 \cdot 2281 \cdot 2801 \cdot 4561 \cdot 5419 \cdot 30941$
	$P_5^{(51)}$	$2^{42} \cdot 3^{13} \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 431 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 1093 \cdot 9719 \cdot 2099863$
	$P_5^{(52)}$	$2^{42} \cdot 3^{14} \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61^3 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 163 \cdot 331 \cdot 431 \cdot 1861 \cdot 2281 \cdot 4561 \cdot 9719 \cdot 2099863$
	$P_5^{(53)}$	$2^{42} \cdot 3^{13} \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 307 \cdot 331 \cdot 431 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 911 \cdot 1093 \cdot 9719 \cdot 2099863$
	$P_5^{(54)}$	$2^{34} \cdot 3^{14} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 19^4 \cdot 31^2 \cdot 41 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 331 \cdot 467 \cdot 683 \cdot 911 \cdot 2281 \cdot 2801 \cdot 4561 \cdot 6829 \cdot 122921$
	$P_5^{(55)}$	$2^{45} \cdot 3^{13} \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 61 \cdot 127 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 197 \cdot 271 \cdot 307 \cdot 547^2 \cdot 613 \cdot 1093 \cdot 5419 \cdot 178481 \cdot 2796203$
	$P_5^{(57)}$	$2^{42} \cdot 3^{14} \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 19^4 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61^3 \cdot 83 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 331 \cdot 431 \cdot 911 \cdot 1861 \cdot 2281 \cdot 4561 \cdot 9719 \cdot 2099863$
	$P_5^{(58)}$	$2^{40} \cdot 3^{16} \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 103 \cdot 127 \cdot 257 \cdot 331 \cdot 557 \cdot 719 \cdot 1871 \cdot 7621 \cdot 13367 \cdot 15241 \cdot 34511 \cdot 164511353$
	$P_5^{(61)}$	$2^{41} \cdot 3^{14} \cdot 7^9 \cdot 11^3 \cdot 13^5 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 43^2 \cdot 61^2 \cdot 79^2 \cdot 97 \cdot 127 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 191 \cdot 271 \cdot 337 \cdot 467 \cdot 631 \cdot 2281 \cdot 2801 \cdot 4561 \cdot 5419$
	$P_5^{(62)}$	$2^{41} \cdot 3^{12} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^4 \cdot 17^2 \cdot 19^4 \cdot 43 \cdot 103 \cdot 127 \cdot 151 \cdot 191 \cdot 271 \cdot 307 \cdot 337 \cdot 467 \cdot 617 \cdot 911 \cdot 2801 \cdot 5419 \cdot 30941 \cdot 398581 \cdot 797161$
	$P_5^{(63)}$	$2^{40} \cdot 3^{16} \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19^4 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 103 \cdot 151 \cdot 257 \cdot 331 \cdot 557 \cdot 719 \cdot 911 \cdot 1871 \cdot 7621 \cdot 13367 \cdot 15241 \cdot 34511 \cdot 164511353$
	$P_5^{(65)}$	$2^{40} \cdot 3^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^2 \cdot 17^2 \cdot 19^5 \cdot 31 \cdot 37^2 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 67 \cdot 103^2 \cdot 127 \cdot 257 \cdot 307 \cdot 557 \cdot 617 \cdot 1063 \cdot 3571 \cdot 7621 \cdot 13367 \cdot 15241 \cdot 398581 \cdot 797161 \cdot 164511353$

Nota. *El Teorema 4.6 es una generalización del Teorema 4.5, pero fue mucho antes, en 1638, cuando Descartes enunció el teorema para los números 3-perfectos, Corolario 4.7. Una gran cantidad de números multiperfectos fueron descubiertos en esa época. El mérito de ese trabajo es atribuido a René Descartes, Pierre de Fermat, Bernard Frenicle, Christiaan Huygens y Marin Mersenne. La continua correspondencia que mantenían entre ellos, comandada por el propio Mersenne (algunos de los resultados se le atribuyen al propio Mersenne debido a que, fruto de tanta carteo, olvidaba citar al descubridor), motivó la búsqueda de estos números en lo que parecía más una competición por ver quién encontraba mayor cantidad que un estudio de la teoría de números. Para más información, recurrir al anexo histórico, Apéndice A.*
De aquellas cartas destacan cinco resultados útiles y fáciles de probar, ideados por Descartes, los cuales aportan una referencia de los métodos utilizados en esa época [16][66]*:*

Corolario 4.7 (Descartes)**.**

(a). Si n es un número 3-perfecto no divisible por 3, entonces $3n$ es 4-perfecto.

(b). Si n es un número 3-perfecto divisible por 3, pero no por 5 ni 9, entonces $45n$ es 4-perfecto.

(c). Si n es un número 3-perfecto divisible por 3, pero no por 7 ni 9 ni 13, entonces $3 \cdot 7 \cdot 13n$ es 4-perfecto.

(d). Si n es divisible por 2^9, pero no por alguno de los números 2^{10}, 31, 43, o 127, entonces $31n$ y $16 \cdot 43 \cdot 127n$ son proporcionales a la suma de sus partes alícuotas.

(e). Si n no es divisible por 3 y $3n$ es un número $4k$-perfecto, entonces n es un $3k$-perfecto.

Ejemplo 25. *A partir de esas reglas, Descartes hizo los siguientes hallazgos* [16]*:*
Aplicando (b):

- *Partiendo de* $P_3^{(2)} = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ *obtuvo* $P_4^{(1)} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
- *Partiendo de* $P_3^{(3)} = 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ *obtuvo* $P_4^{(4)} = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$
- *Partiendo de* $P_3^{(5)} = 2^{13} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$ *obtuvo* $P_4^{(11)} = 2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$

Aplicando (c):

- *Partiendo de* $P_3^{(1)} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ *obtuvo* $P_4^{(2)} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
- *Partiendo de* $P_3^{(3)} = 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ *obtuvo* $P_4^{(6)} = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31$
- *Partiendo de* $P_3^{(5)} = 2^{13} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$ *obtuvo* $P_4^{(11)} = 2^{13} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 43 \cdot 127$ ■

Más común es generar números multiperfectos mediante la sustitución de determinados factores de un número multiperfecto ya existente. Lo más utilizado es el intercambio de factores con igual multiplicidad, como indica el enunciado:

Teorema 4.8. *Sea N un número k-perfecto, y sea P un factor de N tal que* m.c.d. $\left(\frac{N}{P}, P\right) = 1$. *Si Q es un número entero positivo tal que*

$$\frac{\sigma(P)}{P} = \frac{\sigma(Q)}{Q} \qquad y \qquad \text{m.c.d.}\left(\frac{N}{P}, Q\right) = 1,$$

entonces $\frac{N}{P}Q$ es un número k-perfecto.

<u>`Demostración`</u>

$$k = \frac{\sigma(N)}{N} = \frac{\sigma(\frac{N}{P}P)}{\frac{N}{P}P} = \frac{\sigma(\frac{N}{P})}{\frac{N}{P}} \cdot \frac{\sigma(P)}{P} = \frac{\sigma(\frac{N}{P})}{\frac{N}{P}} \cdot \frac{\sigma(Q)}{Q} = \frac{\sigma(\frac{N}{P}Q)}{\frac{N}{P}Q}.$$

□

Ejemplo 26. *Retomando el Ejemplo 22, se había hallado el número*

$$P_4^{(13)} = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 127.$$

Puesto que

$$\frac{\sigma(19^2 \cdot 127)}{19^2 \cdot 127} = \frac{\sigma(19^4 \cdot 151 \cdot 911)}{19^4 \cdot 151 \cdot 911} \qquad y \qquad \text{m.c.d.}\left(\frac{P_4^{(13)}}{19^2 \cdot 127}, 19^4 \cdot 151 \cdot 911\right) = 1,$$

si se realiza la sustitución de $19^2 \cdot 127$ por $19^4 \cdot 151 \cdot 911$, se obtiene el número

$$P_4^{(19)} = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 151 \cdot 911.$$

De esta forma hemos encontrado ya todos los números multiperfectos conocidos con factor 2^8 contando con los ya hallados en el Método Heurístico 4.3.1. ■

La siguiente tabla muestra algunas de las sustituciones conocidas de este tipo:

Tabla 4.9: Sustituciones de igual multiplicidad [61]

P	Q
$2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61$	$3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 61^2 \cdot 97 \cdot 127$
$2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19$	$3^4 \cdot 5 \cdot 11^4 \cdot 179 \cdot 3221$
$2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^3 \cdot 181$	$2^3 \cdot 19^2 \cdot 127$
$2 \cdot 13 \cdot 31$	$3^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$
$2 \cdot 19^2 \cdot 127$	$5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^3 \cdot 181$
$2^2 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$	$3^2 \cdot 5 \cdot 13^3 \cdot 17$
$2^2 \cdot 31 \cdot 61$	$3^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 61^2 \cdot 97$
$2^3 \cdot 5$	$2^5 \cdot 7$
$2^3 \cdot 31 \cdot 61$	$3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 61^2 \cdot 97$
$2^7 \cdot 17$	$2^{10} \cdot 23 \cdot 89$
$2^7 \cdot 17$	$2^{25} \cdot 19 \cdot 683 \cdot 2731 \cdot 8191$
$2^9 \cdot 31$	$2^{13} \cdot 43 \cdot 127$

P	Q
$2^{11} \cdot 3^5$	$2^{20} \cdot 3^3 \cdot 127 \cdot 337$
$2^{19} \cdot 7^2 \cdot 41$	$2^{29} \cdot 7^3 \cdot 83 \cdot 151 \cdot 331$
$2^{28} \cdot 7 \cdot 23 \cdot 233 \cdot 1103 \cdot 2089$	$2^{36} \cdot 7^5 \cdot 43 \cdot 223 \cdot 7019 \cdot 112303 \cdot 898423 \cdot 616318177$
$2^{33} \cdot 131071$	$2^{37} \cdot 174763 \cdot 524287$
$2^{38} \cdot 53 \cdot 229 \cdot 8191 \cdot 121369$	$2^{61} \cdot 59 \cdot 157 \cdot 43331 \cdot 3033169 \cdot 715827883 \cdot 2147483647$
$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$	$3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 127$
$3 \cdot 7 \cdot 13$	$3^2 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$
$3^2 \cdot 5^2 \cdot 31$	$3^3 \cdot 5^3$
$3^2 \cdot 7 \cdot 13$	$3^3 \cdot 5$
$3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 61$	$3^7 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 41 \cdot 61^2 \cdot 97 \cdot 467 \cdot 2801$
$3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$	$3^5 \cdot 5 \cdot 13^2 \cdot 61$
$3^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31$	$3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19^2 \cdot 127$
$3^3 \cdot 5^2 \cdot 31$	$3^6 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$
$3^4 \cdot 7 \cdot 11^2$	$3^5 \cdot 7^2 \cdot 13$
$3^4 \cdot 11^3 \cdot 13$	$3^5 \cdot 11 \cdot 13^2$
$3^4 \cdot 11^3 \cdot 31 \cdot 61$	$3^6 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$
$3^5 \cdot 5^2 \cdot 31$	$3^7 \cdot 5^3 \cdot 41$
$3^5 \cdot 7 \cdot 13$	$3^7 \cdot 5 \cdot 41$
$3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 127$	$3^6 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$
$3^5 \cdot 7^3 \cdot 13$	$3^7 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 41$
$3^5 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 61$	$3^6 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$
$3^6 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	$3^7 \cdot 5^2 \cdot 31^2 \cdot 41^2 \cdot 83 \cdot 331 \cdot 431 \cdot 1723$
$3^6 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	$3^7 \cdot 7^2 \cdot 19^2 \cdot 41 \cdot 127$
$3^6 \cdot 23^2 \cdot 79 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	$3^7 \cdot 23 \cdot 41$
$3^6 \cdot 37^3 \cdot 73 \cdot 137^2 \cdot 547 \cdot 1093$	$3^7 \cdot 37 \cdot 41$
$3^6 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$	$3^{10} \cdot 107 \cdot 3851$
$3^7 \cdot 23 \cdot 41$	$3^{10} \cdot 23^2 \cdot 79 \cdot 107 \cdot 3851$
$3^{12} \cdot 1093 \cdot 797161$	$3^{13} \cdot 1093^2$
$3^{18} \cdot 17 \cdot 19^3 \cdot 47 \cdot 181 \cdot 607 \cdot 1213 \cdot 1597 \cdot 36389 \cdot 363889$	$3^{20} \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 41 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 409 \cdot 547 \cdot 1093 \cdot 36809 \cdot 368089$
$3^{18} \cdot 17^2 \cdot 19^3 \cdot 181 \cdot 307 \cdot 607 \cdot 1213 \cdot 1597 \cdot 36389 \cdot 363889$	$3^{22} \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 127 \cdot 139 \cdot 3613 \cdot 2384579 \cdot 1001523179$
$5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 61$	$5^2 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 61^2 \cdot 97$
$5 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$	$5^2 \cdot 7^3 \cdot 31^2 \cdot 83 \cdot 331$
$5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 31$	$5^3 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 307 \cdot 467 \cdot 2801$
$5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 31$	$5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 71$
$5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 127$	$5^3 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 61$
$5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 31$	$5^3 \cdot 7^3 \cdot 13$
$5^2 \cdot 7^2 \cdot 19^2 \cdot 127$	$5^5 \cdot 7^3 \cdot 19$
$5^2 \cdot 7^5 \cdot 19^2 \cdot 127$	$5^5 \cdot 7^7 \cdot 19 \cdot 601 \cdot 1201$
$5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$	$5^3 \cdot 13^3 \cdot 17$
$5^3 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 61$	$5^5 \cdot 7^3 \cdot 13$
$5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 127$	$5^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 71$
$5^3 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 307 \cdot 467 \cdot 2801$	$5^4 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 71$
$5^3 \cdot 11 \cdot 13$	$5^4 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 71$
$5^4 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 467 \cdot 2801$	$5^5 \cdot 7^6 \cdot 11^4 \cdot 17^2 \cdot 29^2 \cdot 67 \cdot 179 \cdot 263 \cdot 307 \cdot 3221 \cdot 4733$

P	Q
$7^4 \cdot 13^4 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 30941$ $7^5 \cdot 17 \cdot 37 \cdot 43$	$7^9 \cdot 13^5 \cdot 43^2 \cdot 61^2 \cdot 79^2 \cdot 97 \cdot 157 \cdot 631$ $7^8 \cdot 17^2 \cdot 37^2 \cdot 67 \cdot 307 \cdot 1063$
$11 \cdot 17^2 \cdot 29 \cdot 307$	$13 \cdot 17^3 \cdot 29^2 \cdot 67$
$13 \cdot 31^2 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 331$ $13^{11} \cdot 139 \cdot 157^2 \cdot 181^2 \cdot 191 \cdot 229^2 \cdot 827\cdot$ $\cdot 8269 \cdot 14197 \cdot 28393$	$13^2 \cdot 31 \cdot 61^2 \cdot 97$ $13^{14} \cdot 157 \cdot 181 \cdot 191^2 \cdot 199 \cdot 229 \cdot 397 \cdot 1163 \cdot 4651\cdot$ $\cdot 30941 \cdot 40493 \cdot 161971$
$19^2 \cdot 127$	$19^4 \cdot 151 \cdot 911$
$23 \cdot 37^3 \cdot 73 \cdot 137^2$	$23^2 \cdot 37 \cdot 79 \cdot 137$

Esta lista volverá a ser utilizada en el siguiente tema en lo relativo a búsqueda de números amigos, sección 5.1.1.

Ejemplo 27. *Hallemos números multiperfectos partiendo de otros ya conocidos, haciendo uso de la tabla. Denotemos entre paréntesis los factores a sustituir:*

$$
\begin{array}{lcl}
P_3^{(3)} = 3{\cdot}11{\cdot}(2^9{\cdot}31) & \longleftrightarrow & P_3^{(5)} = 3{\cdot}11{\cdot}(2^{13}{\cdot}43{\cdot}127) \\
P_4^{(4)} = 2^9{\cdot}11{\cdot}31{\cdot}(3^3{\cdot}5) & \longleftrightarrow & P_4^{(6)} = 2^9{\cdot}11{\cdot}31{\cdot}(3^2{\cdot}7{\cdot}13) \\
P_4^{(6)} = 3^3{\cdot}5{\cdot}11{\cdot}(2^9{\cdot}31) & \longleftrightarrow & P_4^{(9)} = 3^3{\cdot}5{\cdot}11{\cdot}(2^{13}{\cdot}43{\cdot}127) \\
P_4^{(5)} = 3^3{\cdot}5^2{\cdot}31{\cdot}(2^7{\cdot}17) & \longleftrightarrow & P_4^{(8)} = 3^3{\cdot}5^2{\cdot}31{\cdot}(2^{10}{\cdot}23{\cdot}89) \\
P_4^{(12)} = 2^5{\cdot}3^4{\cdot}7^2{\cdot}11^2{\cdot}(19^2{\cdot}127) & \longleftrightarrow & P_4^{(17)} = 2^5{\cdot}3^4{\cdot}7^2{\cdot}11^2{\cdot}(19^4{\cdot}151{\cdot}911) \\
P_5^{(1)} = 3^4{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11^2{\cdot}19{\cdot}(2^7{\cdot}17) & \longleftrightarrow & P_5^{(4)} = 3^4{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11^2{\cdot}19{\cdot}(2^{10}{\cdot}23{\cdot}89) \\
P_5^{(4)} = 2^{10}{\cdot}5{\cdot}19{\cdot}23{\cdot}89{\cdot}(3^4{\cdot}7{\cdot}11^2) & \longleftrightarrow & P_5^{(5)} = 2^{10}{\cdot}5{\cdot}19{\cdot}23{\cdot}89{\cdot}(3^5{\cdot}7^2{\cdot}13) \\
P_5^{(5)} = 3^5{\cdot}5{\cdot}7^2{\cdot}13{\cdot}19{\cdot}(2^{10}{\cdot}23{\cdot}89) & \longleftrightarrow & P_5^{(2)} = 3^5{\cdot}5{\cdot}7^2{\cdot}13{\cdot}19{\cdot}(2^7{\cdot}17) \\
P_5^{(14)} = 5{\cdot}7^2{\cdot}13^2{\cdot}19{\cdot}31{\cdot}61{\cdot}(2^{20}{\cdot}3^3{\cdot}127{\cdot}337) & \longleftrightarrow & P_5^{(6)} = 5{\cdot}7^2{\cdot}13^2{\cdot}19{\cdot}31{\cdot}61{\cdot}(2^{11}{\cdot}3^5) \quad \blacksquare
\end{array}
$$

Menos común son las sustituciones que relacionan números multiperfectos de distinta multiplicidad. Este método es una versión más general del anterior, y el resultado que lo fundamenta afirma lo siguiente:

Teorema 4.9. *Sea N un número k-perfecto, y sea P un factor de N tal que* m.c.d. $\left(\frac{N}{P}, P\right) = 1$. *Si Q es un número entero positivo tal que*

$$\frac{\sigma(P)}{P} = r \cdot \frac{\sigma(Q)}{Q} \qquad y \qquad \text{m.c.d.}\left(\frac{N}{P}, Q\right) = 1$$

con r un número racional, entonces $\frac{N}{P}Q$ es un número $\frac{k}{r}$-perfecto.

<u>`Demostración`</u>

$$k = \frac{\sigma(N)}{N} = \frac{\sigma(\frac{N}{P}P)}{\frac{N}{P}P} = \frac{\sigma(\frac{N}{P})}{\frac{N}{P}} \cdot \frac{\sigma(P)}{P} = \frac{\sigma(\frac{N}{P})}{\frac{N}{P}} \cdot r \cdot \frac{\sigma(Q)}{Q} = r \cdot \frac{\sigma(\frac{N}{P}Q)}{\frac{N}{P}Q}.$$

$\square$

Ejemplo 28.

(a). Sustituyendo 3 *por* $3^3 \cdot 5$*:*

- *A partir de* $P_3^{(2)} = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ *se obtiene* $P_4^{(1)} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.
- *A partir de* $P_3^{(5)} = 2^{13} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$ *se obtiene* $P_4^{(9)} = 2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$.

(b). Sustituyendo 3 *por* $3^2 \cdot 7 \cdot 13$*:*

- *A partir de* $P_3^{(1)} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ *se obtiene* $P_4^{(2)} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. ∎

La siguiente tabla muestra algunas de las sustituciones conocidas de este tipo.

Tabla 4.10: Sustituciones de distinta multiplicidad [61]

Cambio de Multiplicidad	P	Q
$3 \to 4$	3 3	$3^3 \cdot 5$ $3^2 \cdot 7 \cdot 13$
$5 \to 4$	$3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13$ $3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19$	$3^{10} \cdot 7 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3851$ $3^6 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093$
$5 \to 6$	$5 \cdot 7$ $5^2 \cdot 31$	$5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$ $5^3 \cdot 7 \cdot 13$

La literatura no es clara sobre la importancia de las sustituciones en el descubrimiento de números multiperfectos, con la excepción del caso destacado en el *Ejemplo* 26.

4.3.4. Corrección de una Errata en [8]

Durante la redacción de este trabajo di con una errata. Dicho error, de carácter tipográfico posiblemente, aparece repetido y reproducido en más textos sobre el tema. Un ejemplo de ello es la tesis doctoral de R. M. Sorli, *Algorithms in the study of multiperfect and odd perfect numbers* ([61], página 30) de la cual hemos hecho uso anteriormente. Además, dicha tesis es una de las pocas que aparece referenciada en la web de Achim Flammenkamp [18], página web de cabecera en lo notable a números multiperfectos. Del mismo modo, también hay una referencia al texto original de Carmichael y Mason [8], que ahora pasamos a corregir.

En 1911, R. D. Carmichael y T. E. Mason publicaron *Note on Multiply Perfect Numbers, Including a Table of* 204 *New Ones and the* 47 *Others Previously Published* [8] en la revista anual Proceedings of the Indiana Academy of Science, volumen 21 ,donde introducían, entre otros resultados, los dos últimos métodos de sustitución que acabamos de probar.
En su página 260 se presenta la última lista de sustituciones detallada en la sección anterior (*Tabla* 4.10) con una pequeña diferencia, la potencia del 3 en el primer caso. El texto de Carmichael y Mason reza lo siguiente: [8]

260

is a multiply perfect number of multiplicity m,:

$3^3.5.7^3.13$ (5), $3^{10}.7.23.107.3851$ (4)

$3^4.7.11^2.19$ (5), $3^6.23.137.547.1093$ (4)

5.7 (5), $5^3.7^2.13.19$ (6)

$5^2.31$ (5), $5^3.7.13$ (6)

Atendiendo al primer ejemplo, Carmichael y Mason afirman que, utilizando el *Teorema* 4.9, si se sustituyen los factores $P = 3^3 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13$ de un número 5-perfecto que cumpla lo pedido por los factores $Q = 3^{10} \cdot 7 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3851$, el resultado sería un número 4-perfecto.

Siguiendo el *Teorema* 4.9, si quisiésemos obtener un número 4-perfecto a partir de un 5-perfecto realizando tal sustitución, se debería dar la relación

$$\frac{\sigma(P)}{P} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sigma(Q)}{Q}.$$

Sin embargo,

$$\frac{\sigma(P)}{P} = \frac{\sigma(3^3 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13)}{3^3 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13} = \frac{225}{182} \cdot \frac{\sigma(3^{10} \cdot 7 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3851)}{3^{10} \cdot 7 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3851} \neq \frac{5}{4} \cdot \frac{\sigma(Q)}{Q}.$$

La corrección que aporto es tomar $P = 3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13$, con lo que se sigue que

$$\frac{\sigma(3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13)}{3^5 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sigma(3^{10} \cdot 7 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3851)}{3^{10} \cdot 7 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3851}.$$

Ejemplo 29. *Números multiperfectos que pudieron haber sido hallados con dicha sustitución. Denotemos entre paréntesis los factores a sustituir:*

$P_5^{(10)}=2^{17}\cdot 19^2\cdot 37\cdot 73\cdot 127\cdot(3^5\cdot 5\cdot 7^3\cdot 13) \longleftrightarrow P_4^{(21)}=2^{17}\cdot 19^2\cdot 37\cdot 73\cdot 127\cdot(3^{10}\cdot 7\cdot 23\cdot 107\cdot 3851)$

$P_5^{(20)}=2^{17}\cdot 19^4\cdot 13\cdot 73\cdot 151\cdot 911\cdot(3^5\cdot 5\cdot 7^3\cdot 13) \longleftrightarrow P_4^{(25)}=2^{17}\cdot 19^4\cdot 13\cdot 73\cdot 151\cdot 911\cdot(3^{10}\cdot 7\cdot 23\cdot 107\cdot 3851)$

$P_5^{(28)}=2^{33}\cdot 11\cdot 83\cdot 331\cdot 43691\cdot 131071\cdot(3^5\cdot 5\cdot 7^3\cdot 13) \longleftrightarrow P_4^{(32)}=2^{33}\cdot 11\cdot 83\cdot 331\cdot 43691\cdot 131071\cdot(3^{10}\cdot 7\cdot 23\cdot 107\cdot 3851)$

$P_5^{(35)}=2^{37}\cdot 11\cdot 83\cdot 331\cdot 43691\cdot 174763\cdot 524287\cdot(3^5\cdot 5\cdot 7^3\cdot 13) \longleftrightarrow P_4^{(35)}=2^{37}\cdot 11\cdot 83\cdot 331\cdot 43691\cdot 174763\cdot 524287\cdot(3^{10}\cdot 7\cdot 23\cdot 107\cdot 3851)$

En el primer ejemplo, $P_5^{(10)}$ *había sido descubierto por Fermat en* 1643. *En* 1911 *Carmichael utilizó esta sustitución para descubrir* $P_4^{(21)}$*. El tercer y cuarto ejemplo también son descubrimientos de Carmichael, mientras que el segundo es de Poulet.* ■

4.4. Números Multiperfectos de Forma Plana

El estudio de los números k-perfectos se ha desarrollado en distintas direcciones debido, tal vez, a la inexistencia de un resultado de peso que facilitase su descubrimiento, como es el caso del *Teorema de Euclides-Euler* (*Teorema* 3.12) en relación a los números perfectos pares. Un ejemplo de ello es la búsqueda de aquellos k-perfectos que posean una forma determinada, y entre estos destacan los números multiperfectos de forma plana. Dedicaremos esta sección al estudio de estos números. La mayor parte de los resultados pueden ser consultados en la tesis doctoral de Q. Zhou [66].

Diremos que un número N es **de forma plana** si

$$N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$$

con $a \geq 1$ y $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares.

A día de hoy solo se contabiliza un total de ocho números multiperfectos de dicha forma: los seis únicos 3-perfectos conocidos y dos 4-perfectos. Lo cierto es que se desconoce si habrá más de estas clases o, incluso, algún k-perfecto para otros valores de k. A pesar de ello, se ha conformado una amplia colección de teoremas que indicarían, de existir, qué forma tendrían. Dichos resultados son utilizados a la hora de programar métodos de búsqueda de nuevos números multiperfectos.

Teorema 4.10. *Si $N = 2^a$, entonces N no es un número multiperfecto.*

Demostración
Trivial, $k = \frac{\sigma(N)}{N}$ no puede ser un número entero ya que $\sigma(N) = 2^{a+1} - 1$ es impar pero N es par.

□

Teorema 4.11. *Si $N = 2^a p$ es un número multiperfecto, donde $a \geq 1$ y p un primo impar, entonces N es un número perfecto.*

Demostración
Sea $N = 2^a p$ un número k-perfecto y $k \neq 2$, luego

$$\frac{\sigma(N)}{N} = \frac{2^{a+1} - 1}{p} \cdot \frac{p+1}{2^a} = k,$$

por lo que $2^a \leq p + 1 \leq 2^{a+1}$, es decir, $1 \leq \frac{p+1}{2^a} \leq 2$. Como $\frac{p+1}{2^a}$ es un número entero, tenemos los siguientes casos:

- Si $\frac{p+1}{2^a} = 1$, entonces $p + 1 = 2^a$, lo cual implica que $2p + 2 = 2^{a+1}$. En consecuencia, $2p + 1 = 2^{a+1} - 1 = rp$ con $r \geq 1$, por tanto $p(r-2) = 1$, lo cual es imposible.
- Si $\frac{p+1}{2^a} = 2$, entonces $p + 1 = 2^{a+1}$, lo cual implica que $p = 2^{a+1} - 1$ y, por tanto, $k = 2$.

□

Teorema 4.12. *Si $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$, donde $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ son primos impares, entonces N no es un número multiperfecto.*

Demostración
Supongamos que $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$ es un número multiperfecto, luego $N \,|\, \sigma(N)$, lo cual implica que

$$p_m \mid \sigma(N) = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_m + 1).$$

Dado que $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$, todos los factores primos de $(p_i + 1)$ son menores que $\frac{p_i+1}{2} < p_m$ para todo $i = 1, 2, \ldots m$. Por tanto, N no puede ser un número multiperfecto.

□

Teorema 4.13. *Si $N = 2p_1 \cdot p_2 \cdots p_m \neq 6$, donde $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ son primos impares, entonces N no es un número multiperfecto.*

Demostración

Supongamos que $N = 2p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$ es un número multiperfecto, luego $N \,|\, \sigma(N)$, lo cual implica que

$$p_m \mid \sigma(N) = 3(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_m + 1).$$

Dado que $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$, entonces $p_m \nmid (p_1+1)(p_2+1) \cdots (p_m+1)$. En conclusión, $p_m = 3$, lo que resulta absurdo pues $N \neq 6$ por el enunciado.

□

Teorema 4.14. *Si $N = 4p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$ es un número multiperfecto, donde $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ son primos impares, entonces $N = 28$ es la única solución.*

Demostración

Supongamos que $N = 4p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$ es un número multiperfecto, luego $N \,|\, \sigma(N)$, lo cual implica que

$$p_m \,|\, \sigma(N) = 7(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_m + 1).$$

Dado que $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$, entonces $p_m \nmid (p_1+1)(p_2+1) \cdots (p_m+1)$. En conclusión, $p_m = 7$. Los únicos valores posibles de N son

$$4 \cdot 7; \qquad 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7; \qquad 4 \cdot 3 \cdot 7; \qquad 4 \cdot 5 \cdot 7.$$

Calculando $\sigma(N)/N$ para estos posibles valores se concluye que $N = 28$ es la única solución factible.

□

La colección de teoremas que acabamos de enumerar se compone de resultados generales para el estudio de toda clase de número multiperfecto. Existen otros específicos de cada k-perfecto para cualquier valor de k. Sin embargo, los números multiperfectos de forma plana conocidos hasta ahora son 3-perfectos o 4-perfectos. Veamos algunos de estos resultados específicos relativos a estos números.

Números 3-perfectos

Como ya hemos dicho, todos los números 3-perfectos conocidos hasta la fecha, detallados en la *Tabla* 4.3, son de la forma

$$N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$$

con $a \geq 1$ y $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares. Esta sección está dedicada a los números de este tipo.

Carmichael probó en 1906 que los únicos números multiperfectos de la forma $N = 2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}$ son los números 3-perfectos 120 y 672 [7]. El siguiente teorema es un caso particular del resultado de Carmichael.

Teorema 4.15. *Si $N = 2^a p_1 p_2$ es un número multiperfecto, donde $p_1 < p_2$ son primos impares y $a \geq 1$, entonces N es un número 3-perfecto y $N = 120$ o $N = 672$.*

Demostración

Sea $N = 2^a p_1 p_2$ un número k-perfecto, luego

$$k = \frac{\sigma(N)}{N} < 2\left(\frac{p_1+1}{p_1}\right)\left(\frac{p_2+1}{p_2}\right) \leq 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} < 4. \tag{4.2}$$

Puesto que $k \neq 2$ (ya que no cumple la factorización dada por el *Teorema de Euler* 3.21), por la desigualdad (4.2) se tiene que $k = 3$.

Por ser N un número 3-perfecto se cumple que

$$\sigma(N) = (2^{a+1}-1)(p_1+1)(p_2+1) = 3 \cdot 2^a p_1 p_2 = 3N.$$

Si $3 \nmid N$, entonces p_1 y p_2 son primos mayores que 3 y se dan las siguientes desigualdades

$$3 = \frac{\sigma(N)}{N} < 2 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} < 3$$

lo que resulta absurdo. En consecuencia $p_1 = 3 \mid N$, lo cual implica que

$$(2^{a+1}-1)(3+1)(p_2+1) = 2^a 3^2 p_2.$$

Analicemos los tres posibles casos:

- Si $2^{a+1}-1 = p_2$ y $p_2+1 = 2^{a-2}3^2$, entonces $2^{a+1} = 2^{a-2}3^2$, lo cual es imposible.
- Si $2^{a+1}-1 = 3p_2$ y $p_2+1 = 2^{a-2}3$, entonces $a = 3$ y $p_2 = 5$. $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.
- Si $2^{a+1}-1 = 3^2 p_2$ y $p_2+1 = 2^{a-2}$, entonces $a = 5$ y $p_2 = 7$. $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 672$.

$\square$

Teorema 4.16. *Si*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \geq \frac{3}{5}$$

donde $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ son primos impares, entonces $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ con $a \geq 1$ no es un número 3-perfecto.

Demostración

Supongamos que $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ es un número 3-perfecto. Por los *Teoremas* 4.13 y 4.14 se puede asumir $a \geq 3$. Se cumple que

$$3N = 2^a 3 p_1 p_2 \cdots p_m = (2^{a+1}-1)(p_1+1)\cdots(p_m+1)$$

luego dividiendo por N se tiene que

$$\left(2 - \frac{1}{2^a}\right)\left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_m}\right) = 3. \tag{4.3}$$

Por un lado, atendiendo a la igualdad (4.3) y teniendo en cuenta que $a \geq 3$, se cumple que

$$\prod_{i=1}^{m}\left(1 + \frac{1}{p_i}\right) = \frac{3}{2 - \frac{1}{2^a}} \leq \frac{8}{5}. \tag{4.4}$$

Por otro lado, atendiendo al enunciado, se sigue que

$$\prod_{i=1}^{m}\left(1+\frac{1}{p_i}\right) > 1+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i} \geq \frac{8}{5}, \tag{4.5}$$

donde la primera desigualdad resulta trivial. En resumen, existe una contradicción entre las igualdades (4.4) y (4.5), lo cual conlleva que N no pueda ser un número 3-perfecto.

□

Teorema 4.17. *Si $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ con $a \geq 1$, $p_i + 1 = 2^{a_i} p_{i-1}$, $a_i \geq 1$ y p_i primo impar para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, entonces N no es un número 3-perfecto.*

Demostración

Supongamos que $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ es un número 3-perfecto. Se cumple que

$$\sigma(N) = (2^{a+1}-1)(p_1+1)\cdots(p_m+1) = (2^{a+1}-1)2^{\sum_{i=1}^{m} a_i} p_0 \cdots p_{m-1} \tag{4.6}$$

y

$$\sigma(N) = 3N = 3 \cdots 2^a p_1 \cdots p_m. \tag{4.7}$$

De (4.6) y (4.7) se desprenden las igualdades siguientes

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad \text{y} \qquad (2^{a+1}-1)p_0 = 3p_m.$$

Tenemos dos casos posibles:

- Si $p_0 = 3$, entonces $p_m + 1 = 2^{a+1}$, pero $p_m + 1 = 2^{a_m} p_{m-1}$ con p_{m-1} un primo impar, lo cual es una contradicción.

- Si $p_0 = p_m$, de la ecuación $p_i + 1 = 2^{a_i} p_{i-1}$ se deduce que $p_0 < p_1 < \ldots < p_m$, por lo cual $p_m = p_0 < p_m$ resulta ser una contradicción.

En conclusión, N no es un número 3-perfecto.

□

Teorema 4.18. *Sean $N = 2^f p_0 p_1 \cdots p_m$ y $N_2 = 2^g p_0 p_1 \cdots p_m p_{m+1} \cdots p_l$, donde p_0 es un primo de Mersenne, $f \geq 1$, $g \geq 1$, y p_i un primo impar tal que $p_i + 1 = 2^{a_i} p_{i-1}$ y $a_i \geq 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, l$. Si N es un número 3-perfecto, entonces N_2 no lo es.*

Demostración

Dado que $N = 2^f p_0 p_1 \cdots p_m$ es un número 3-perfecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma(N) &= (2^{f+1}-1)(p_0+1)(p_1+1)\cdots(p_m+1) \\
&= (2^{f+1}-1)2^{\sum_{i=0}^{m} a_i} p_0 \cdots p_{m-1} \\
&= 3 \cdot 2^f p_0 p_1 \cdots p_m = 3N,
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i \qquad \text{y} \qquad 2^{f+1} - 1 = 3p_m.$$

Supongamos que $N_2 = 2^g p_0 p_1 \cdots p_m p_{m+1} \cdots p_l$ sea un número 3-perfecto, se cumple que

$$\sigma(N_2) = (2^{g+1} - 1)2^{\sum_{i=0}^{l} a_i} p_0 \cdots p_{l-1} = 3 \cdot 2^g p_0 p_1 \cdots p_m p_{m+1} \cdots p_l = 3N_2,$$

lo cual implica que

$$g = \sum_{i=0}^{l} a_i = f + \sum_{i=m+1}^{l} a_i \qquad \text{y} \qquad 2^{g+1} - 1 = 3p_l.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2^{g+1} - 1 &= 3(2^{a_l} p_{l-1} - 1) \\ &= 3 \cdot 2^{a_l} p_{l-1} - 3 \\ &= 3 \cdot 2^{a_l}(2^{a_{l-1}} p_{l-2} - 1) - 3 \\ &= 3 \cdot 2^{\sum_{i=m+1}^{l} a_i} p_m - 3k - 3 \qquad \text{(para algún natural } k) \\ &= (2^{f+1} - 1)2^{\sum_{i=m+1}^{l} a_i} - 3k - 3 \\ &= 2^{g+1} - 2^{\sum_{i=m+1}^{l} a_i} - 3k - 3. \end{aligned}$$

En resumen,

$$2 + 2^{\sum_{i=m+1}^{l} a_i} + 3k = 0,$$

lo cual es absurdo. En conclusión, N_2 no puede ser un número 3-perfecto.

□

Teorema 4.19. *Sea $N = 2^a p_1 \cdots p_m$ un número 3-perfecto, con a par y $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares. Si $3 \,|\, N$, entonces $9 \nmid p_m + 1$.*

Demostración

Sea $N = 2^a p_1 \cdots p_m$ un número 3-perfecto, con $a = 2b$. Como $3 \,|\, N$, se tiene que $p_1 = 3$ y

$$\sigma(N) = (2^{2b+1} - 1)(3 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_m + 1) = 2^{2b} 3^2 p_2 \cdots p_m = 3N.$$

Supongamos que $9 \mid p_m + 1$, entonces $3 \nmid p_j + 1$ para todo $j = 2, 3, \ldots, m - 1$, por lo que

$$p_m \equiv 2 (\text{mod } 3) \qquad \text{y} \qquad p_j \equiv 1 (\text{mod } 3) \text{ para todo } j = 2, 3, \ldots, m.$$

Dado que $p_m \nmid p_i + 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m - 1$, entonces $p_m \mid 2^{2b+1} - 1$. En consecuencia

$$2^{2b+1} - 1 = p_m \prod_{j=2}^{m-1} p_j$$

lo cual es imposible, pues

$$2^{2b+1} - 1 \equiv 1 (\text{mod } 3) \not\equiv 2 (\text{mod } 3) \equiv p_m \prod_{j=2}^{m-1} p_j.$$

□

Teorema 4.20. *Sea $N = 2^a p_1 \cdots p_m$ un número 3-perfecto, con a impar y $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares. Si $3 \nmid N$, entonces todo divisor primo impar de N es congruente con 1 módulo 3.*

<u>`Demostración`</u>
Sea $N = 2^a p_1 \cdots p_m$ un número 3-perfecto, con a impar, y supongamos que $3 \nmid N$. Se cumple que

$$3N = 3 \cdot 2^a p_1 \cdots p_m = \sigma(2^a)(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) = \sigma(N).$$

Como a es impar y $2^2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$, entonces $\sigma(2^a) = 2^{a+1} - 1 \equiv 0 (\text{mod } 3)$. Por tanto

$$N = 2^a p_1 \cdots p_m = \frac{\sigma(2^a)}{3}(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1).$$

Dado que $3 \nmid N$, ninguno de los factores primos es 3.
Si existiese un factor p_i de N con $p_i \equiv 2 (\text{mod } 3)$ para cualquier $i = 1, 2, \ldots, m$, entonces en el lado derecho de la igualdad se tendrá $p_i + 1 \equiv 0 (\text{mod } 3)$, por lo que $3 \mid N$, lo que sería una contradicción.

□

Teorema 4.21. *Sea $N = 2^a p_1 \cdots p_m$ un número 3-perfecto, con a impar y $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares, y $3 \nmid N$.*

(a). Si $a \not\equiv 1 (\text{mod } 12)$, entonces a es par.

(b). Si $a \equiv 1 (\text{mod } 12)$, entonces m es impar y todo factor primo impar de N es congruente con 1 módulo 3.

Para probar el teorema, es necesario tener conocimiento de unos resultados que veremos en la siguiente sección.
<u>`Demostración`</u>
Sea $M = 3N$. Por el *Teorema* 4.6 M es un número 4-perfecto.

(a). Por el *Teorema* 4.26 si $a \not\equiv 1 (\text{mod } 12)$, entonces a es par.

(b). Si $a \equiv 1 (\text{mod } 12)$, por el *Teorema* 4.26 M posee un número par de factores primos impares, así que m es impar, y por el *Teorema* 4.20 todo factor primo impar de N es congruente con 1 módulo 3.

□

Números 4-perfectos

En esta sección nos centraremos en los números 4-perfectos de forma plana. Sin embargo, de los treinta y seis números 4-perfectos hallados a día de hoy únicamente dos números poseen esta factorización,

$$P_4^{(7)} = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 \qquad y \qquad P_4^{(10)} = 2^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151.$$

A pesar de ello, sí que se cuenta con una amplia colección de resultados que indicarían, de existir más, qué forma tendrían.

Teorema 4.22. *Sea $a \geq 1$, existe a lo más un número 4-perfecto de la forma $N = 2^a p_1 \cdots p_m$, donde $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ son primos impares. Además, en caso de existir, se satisface que $3 \leq m \leq a+2$.*

<u>`Demostración`</u>

Sean $N_1 = 2^a b_1$ y $N_2 = 2^a b_2$ donde b_1 y b_2 son números impares sin factores repetidos. Se cumple que

$$\sigma(N_1) = \sigma(2^a)\sigma(b_1) \tag{4.8}$$

y

$$\sigma(N_1) = 4N = 2^{a+2} b_1. \tag{4.9}$$

De las igualdades (4.8) y (4.9) se desprende que

$$\sigma(2^a) \mid b_1 \qquad y \qquad \sigma(2^a) \mid b_2,$$

por lo que se tiene la igualdad

$$b_1\sigma(b_2) = b_2\sigma(b_1).$$

Supongamos $b_1 \neq b_2$. Tomemos $b_1 = c \cdot p_1 p_2 \cdots p_m$, $b_2 = c \cdot q_1 q_2 \cdots q_l$, donde ninguno de los primos p_i es igual a ninguno de los q_j. Entonces

$$p_1 p_2 \cdots p_m (q_1+1)(q_2+1)\cdots(q_l+1) = q_1 q_2 \cdots q_l (p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_m+1).$$

Si p fuese el máximo de todos los primos p_i y q_j, entonces p divide a un lado de la igualdad pero no a otro, lo cual es absurdo. En conclusión, $b_1 = b_2$.

Falta probar las desigualdades $3 \leq m \leq a+2$:

Supongamos que $N = 2^a p$ es un número 4-perfecto, entonces

$$\sigma(N) = (2^{a+1} - 1)(p+1) \tag{4.10}$$

y

$$\sigma(N) = 4N = 2^{a+2} p. \tag{4.11}$$

De las igualdades (4.10) y (4.11) resulta claro que como $p+1 \nmid p$, entonces p es un primo de Mersenne. Por ello se sigue que

$$p+1 = 2^{a+2} \qquad y \qquad p = 2^{a+1} - 1.$$

Esto es absurdo pues tenemos $a+2 = a+1$. Por tanto $m \neq 1$.

Supongamos que $N = 2^a p_1 p_2$ es un número 4-perfecto. Se cumple que

$$\sigma(N) = (2^{a+1} - 1)(p_1+1)(p_2+1) \tag{4.12}$$

y

$$\sigma(N) = 4N = 2^{a+2} p_1 p_2. \tag{4.13}$$

Tomemos $p_1 + 1 = 2^{a_1} q_1 \cdots q_l$ con q_j primo para todo $j = 1, 2, \ldots, l$. Así pues, se cumple que $q_j < p_1 < p_2$, por lo cual $q_j = 2$ y p_1 es un primo de Mersenne. Sea $p_1 + 1 = 2^{a_1}$. Como $p_2 + 1 \nmid p_1$ y $p_2 + 1 \nmid p_2$, entonces p_2 es también un primo de Mersenne. Sea $p_2 + 1 = 2^{a_2}$. Se tiene que

$$(2^{a+1} - 1)2^{a_1+a_2} = 2^{a+2}(2^{a_1} - 1)(2^{a_2} - 1).$$

En resumen, se deben cumplir las expresiones

$$a_1 + a_2 = a + 2, \qquad a_1 < a_2, \qquad a_1 \mid a + 1, \qquad a_2 \mid a + 1,$$

lo cual implica que

$$a_1 a_2 \leq a + 1 < a + 2 = a_1 + a_2$$

por lo que $a_1 = 1$ y $p_1 = 1$, que resulta ser una contradicción. En definitiva, se sigue la desigualdad $m \geq 3$.

Dado que $2^a p_1 \cdots p_m$ es un número 4-perfecto, se cumple que

$$\sigma(2^a p_1 \cdots p_m) = 4 \cdot 2^a p_1 \cdots p_m,$$

es decir,

$$(2^{a+1} - 1)\left(\frac{p_1 + 1}{2}\right) \cdots \left(\frac{p_m + 1}{2}\right) = 2^{a+2-m} p_1 \cdots p_m$$

y

$$a + 2 - m \geq 0$$

con lo que finaliza la demostración.

$\square$

Teorema 4.23. *Sea $N = 2^a p_1 \cdots p_m$ un número 4-perfecto, con $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares, entonces $a \not\equiv 3 (\text{mod } 4)$; $a \not\equiv 5 (\text{mod } 6)$; y $a \not\equiv 9 (\text{mod } 10)$.*

<u>`Demostración`</u>

Sea $N = 2^a p_1 \cdots p_m$ un número 4-perfecto.

- Si $a \equiv 3 (\text{mod } 4)$. Por ser N un número 4-perfecto, se cumple que

  $$(2^{a+1} - 1)(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) = 2^{a+2} p_1 \cdots p_m.$$

  Como $4 \mid a + 1$, tenemos que $15 = \sigma(2^3) \mid \sigma(2^a)$, y hemos hallado los valores de p_1 y p_2. Llevando esto a la expresión anterior,

  $$\begin{aligned} 15\frac{(2^{a+1} - 1)}{15}(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) &= 2^{a+2} 3 \cdot 5 \cdot p_3 \cdots p_m, \\ 15\frac{(2^{a+1} - 1)}{15} \cdot 4 \cdot 6 \cdot (p_3 + 1) \cdots (p_m + 1) &= 2^{a+2} 3 \cdot 5 \cdot p_3 \cdots p_m, \\ \frac{(2^{a+1} - 1)}{15} \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (p_3 + 1) \cdots (p_m + 1) &= 2^{a+2} 3 \cdot 5 \cdot p_3 \cdots p_m. \end{aligned}$$

  En resumen, 3^2 debería dividir al lado derecho de la igualdad, lo cual resulta absurdo. Se deduce que $a \not\equiv 3 (\text{mod } 4)$.

- Si $a \equiv 5 (\text{mod } 6)$. Por ser N un número 4-perfecto, se cumple que

  $$(2^{a+1} - 1)(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) = 2^{a+2} p_1 \cdots p_m.$$

  Como $a + 1 \equiv 0 (\text{mod } 6)$, entonces $5 + 1 \mid a + 1$, por lo que

  $$63 = 3^2 7 = \sigma(2^5) \mid \sigma(2^a) = 2^{a+1} - 1.$$

  En resumen, $3^2 \mid p_1 \cdots p_m$, lo cual es absurdo. Se deduce que $a \not\equiv 5 (\text{mod } 6)$.

- Si $a \equiv 9(\text{mod } 10)$. Luego $10 \mid a+1$, entonces $3 \cdot 11 = \sigma(2^9) \mid \sigma(2^a)$ y por tanto $p_1 = 3$ y $p_j = 11$. Así que

$$\sigma(N) = \sigma(2^a)4(p_1+1)\cdots(p_{j-1}+1)12(p_{j+1}+1)\cdots(p_m+1) = 2^{a+2}3\cdots 11\cdots p_m$$

lo que implica que

$$\frac{\sigma(2^a)}{3\cdot 11}2^2\cdots 2^2 3\cdots(p_m+1) = 2^{a+2}p_2\cdots p_{j-1}p_{j+1}\cdots p_m$$

y en resumen, $3 \mid p_2\cdots p_{j-1}p_{j+1}\cdots p_m$, lo cual es absurdo. Se deduce que $a \not\equiv 9(\text{mod } 10)$.

□

Aunque todos los números 4-perfectos conocidos son divisibles por 3, no podemos probarlo. Sin embargo, tenemos las siguientes condiciones:

Teorema 4.24. *Sea $N = 2^a p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}$ un número 4-perfecto par, con $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares, entonces $3|N$ en los siguientes casos:*

(a). Si a es impar.

(b). Si existe un i con a_i impar y $p_i \equiv 2(\text{mod } 3)$.

(c). Si existe un i con $a_i \equiv 2(mod\ 3)$ y $p_i \equiv 1(\text{mod } 3)$.

Demostración

Sea $N = 2^a p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}$ un número 4-perfecto.

(a). Se cumple que

$$\sigma(N) = (2^{a+1}-1)\sigma(p_1^{a_1})\cdots\sigma(p_m^{a_m}) \tag{4.14}$$

y

$$\sigma(N) = 4N = 2^{a+2}p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}. \tag{4.15}$$

Si a es impar entonces $3 \mid 2^{a+1}-1$, luego de las igualdades (4.14) y (4.15) se desprende que uno de los p_i debe ser 3, por lo que $3|N$.

(b). Si uno de los a_i es impar y $p_i \equiv 2(\text{mod } 3)$, como $2 \mid a_1+1$, entonces por el *Teorema* 1.11 $1+p_i \mid \sigma(p_i^{a_i})$, por lo que $3|N$.

(c). Supongamos que $3 \nmid N$. Tomemos $b = p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}$ por lo que $3 \nmid b$. Gracias al apartado *(a)* podemos asumir que a es par. Se cumple que

$$\sigma(N) = (2^{a+2}-1)\sigma(b) \tag{4.16}$$

y

$$\sigma(N) = 4N = 2^{a+2}b. \tag{4.17}$$

De las igualdades (4.16) y (4.17) se desprende que

$$\sigma(b) = 2b + \frac{2b}{2^{a+1}-1}.$$

Supongamos $b \equiv 2(\text{mod } 3)$. Como cada divisor d de b satisface que $3 \nmid d$, cada suma $b/d + d \equiv 0(\text{mod } 3)$. Pero de la igualdad anterior, $\sigma(b) \equiv 0(\text{mod } 2)$, así que, como cada divisor de b es impar, b tiene un número par de divisores. Colocándolos en pares $\{b/d, d\}$ y sumándolos para mostrar que $3|\sigma(b)$, tenemos que $3|b$, una contradicción.
Esto significa que $b \equiv 1(\text{mod } 3)$, y por tanto $p_i \equiv 1(\text{mod } 3)$ y por el apartado *(b)* si alguno de los $p_i \equiv 2(\text{mod } 3)$, entonces su correspondiente a_i es par.

Consideremos ahora la igualdad

$$(2^{a+2} - 1)\sigma(b) = 2^{a+2}b$$

con a par, y tomemos la expresión módulo 3,

$$(1 + a_1) \cdots (1 + a_m) \equiv 1(\text{mod } 3).$$

Sin embargo, dado un $a_i \equiv 2(\text{mod } 3)$ se obtiene $0 \equiv 1(\text{mod } 3)$, absurdo, lo cual implica $3|b$, y finalmente $3|N$.

□

Teorema 4.25. *Si $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ es un número 4-perfecto con $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares, entonces $a \not\equiv 9(\text{mod } 12)$.*

<u>`Demostración`</u>
Sea $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ un número 4-perfecto y supongamos que $a = 12b + 9$ con $b \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma(N) &= (2^{12b+10} - 1)(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) \\ &= (2^{6b+5} + 1)(2^{6b+5} - 1)(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) \end{aligned} \tag{4.18}$$

y

$$\sigma(N) = 4N = 2^{12b+11} p_1 p_2 \cdots p_m. \tag{4.19}$$

Si $p_i \equiv 2(\text{mod } 3)$ para algún $i = 2, 3, \ldots m$, entonces de las igualdades (4.18) y (4.19) se desprende que $3 \mid p_i + 1$, luego N tendría como factor una potencia de 3 mayor que la unidad, absurdo. Por tanto, $p_i \equiv 1(\text{mod } 3)$ para todo $i = 2, 3, \ldots m$.
Como

$$2^{6b+5} - 1 = 3(21x + 11) = 3(3y + 2),$$

entonces $p_1 = 3$, y $3y + 2$ es el producto de algunos factores primos de N. Esto resulta ser una contradicción, pues

$$3y + 2 \equiv 2(\text{mod } 3) \neq 1(\text{mod } 3) \equiv \prod_{i=2}^{m} p_i.$$

En conclusión , si $a \equiv 9(\text{mod } 12)$, N no es un número 4-perfecto.

□

Teorema 4.26. *Sea $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ un número 4-perfecto con $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares.*

(a). Si $a \equiv 1(\text{mod } 12)$ entonces $3|N$, $p_i \equiv 1(\text{mod } 3)$ para todo $i = 2, 3, \ldots, m$, y m es par.

(b). Si a es par y $3 \nmid N$ entonces m es par.

(c). Si $a \not\equiv 1 (\text{mod } 12)$, entonces a es par.

Demostración

(a). Sea $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ un número 4-perfecto y supongamos $a = 12b + 1$, con $b \geq 0$. Se cumple que

$$\sigma(N) = (2^{12b+2} - 1)(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_m + 1), \tag{4.20}$$

$$\sigma(N) = 4N = 2^{12b+3} p_1 p_2 \cdots p_m \tag{4.21}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma(2^a) \quad &= 2^{12b+2} - 1 \\ &= 3(21x + 1) \\ &= 3(3y + 1) \end{aligned} \tag{4.22}$$

donde $x = 2^{12b-4} + 2^{12b-10} + \ldots + 2^2$ e $y = 7x$.

De las igualdades (4.20) y (4.22) se desprende que $p_1 = 3$ y

$$\frac{2^{12b+2} - 1}{3} (p_2 + 1) \cdots (p_m + 1) = 2^{12b+1} p_2 \cdots p_m. \tag{4.23}$$

Si $p_i \equiv 2 (\text{mod } 3)$ para algún $i = 2, 3, \ldots, m$, entonces $p_i + 1 \equiv 0 (\text{mod } 3)$ luego N tendría como factor una potencia de 3 mayor que la unidad, absurdo. Así pues, $p_i \equiv 1 (\text{mod } 3)$ para todo $i = 2, 3, \ldots, m$.

Tomando la igualdad (4.23) módulo 3, se tiene que

$$\prod_{i=2}^{m} (p_i + 1) \equiv 2^{m-1} \equiv 2^a \equiv 2 (\text{mod } 3)$$

y por tanto, $2^m \equiv 1 (\text{mod } 3)$, por lo que m debe ser par.

(b). Sea $N = 2^{2b} p_1 p_2 \cdots p_m$ un número 4-perfecto con $b \geq 1$. Si $3 \nmid N$ entonces $p_i \equiv 1 (\text{mod } 3)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, y si $2^{b_i} \mid p_i + 1$ tal que m.c.d.$(2^{b_i}, \frac{p_i+1}{2^{b_i}})$, como $\frac{p_i+1}{2^{b_i}}$ es un producto de primos congruente con 1 módulo 3, entonces debe ser también congruente con 1 módulo 3. Por tanto, cada b_i es impar, y m es par dado que $b_i + b_2 + \ldots + b_m = 2b + 2$.

(c). Sea $N = 2^{2b} p_1 p_2 \cdots p_m$ un número 4-perfecto con $b \geq 1$. Por el *Teorema* 4.23 sabemos que $a \not\equiv 5 (\text{mod } 6)$, lo cual implica que $a \not\equiv 5 (\text{mod } 12)$ y $a \not\equiv 11 (\text{mod } 12)$. Por el *Teorema* 4.25 $a \not\equiv 9 (\text{mod } 12)$. Por el *Teorema* 4.23 como $a \not\equiv 3 (\text{mod } 4)$, tenemos que $a \not\equiv 3 (\text{mod } 12)$ y $a \not\equiv 7 (\text{mod } 12)$. En conclusión, dado que por hipótesis $a \not\equiv 1 (\text{mod } 12)$, a solo puede tomar un valor par.

□

Presencia de primos de Mersenne en su factorización

Es interesante la presencia de primos de Mersenne en las factorizaciones de números multiperfectos. Debido al *Teorema de Euclides-Euler* 3.12, resulta claro para el caso de los 2-perfectos pares. De la misma forma, podemos demostrarlo para los 3-perfectos y 4-perfectos de la forma $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$, aunque es necesaria la presencia de al menos un primo que no sea de Mersenne:

Teorema 4.27. *Sea $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ un número k-perfecto con $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares.*

(a). Si $k \leq 4$, entonces N es divisible por al menos un primo de Mersenne.

(b). Si todos los factores primos impares de N son de Mersenne, entonces N es perfecto.

<u>Demostración</u>
Sea $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ un número k-perfecto.

(a). Si $k = 2$, entonces , por el *Teorema de Euclides-Euler* (*Teorema* 3.12), $N = 2^{p-1} M_p$ con p primo y M_p un primo de Mersenne.

Si $k = 4$, se cumple que

$$\sigma(N) = (2^{a+1} - 1)(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) \tag{4.24}$$

y

$$\sigma(N) = 4N = 2^{a+2} p_1 \cdots p_m. \tag{4.25}$$

De las igualdades (4.24) y (4.25) se desprende que si p_1 no es de Mersenne, el menor divisor primo de $p_1 + 1$ es un primo impar $q < p_1$, el cual divide a $p_1 \cdots p_m$, y por tanto a N, lo cual es absurdo. En conclusión, p_1 debe ser un primo de Mersenne.

Si $k = 3$, si a es impar, por se N un número k-perfecto se cumple que

$$\left(\frac{2^{a+1} - 1}{3}\right)(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) = 2^a p_1 \cdots p_m.$$

Razonando como en el caso $k = 4$ se deduce que p_1 es un primo de Mersenne.

Asumamos que ninguno de los p_i es de Mersenne. Se cumple que

$$(2^{a+1} - 1)(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1) = 3 \cdot 2^a p_1 \cdots p_m.$$

Si definimos la función $\omega(N)$ como el número de primos distintos que dividen a N, puesto que

$$\text{m.c.d.}(2^{a+1} - 1, p_i + 1) = 1 \qquad y \qquad \text{m.c.d.}(p_i + 1, p_j + 1) = 2^{a_{ij}}$$

con $a_{ij} \geq 1$ para todo $i \neq j$, se tiene que

$$\omega(2^{a+1} - 1) + 1 + m \leq \omega(3 \cdot 2^a p_1 \cdots p_m) = m + 2$$

lo cual implica que $\omega(2^{a+1} - 1) = 1$, es decir es primo, y es de Mersenne.

(b). Supongamos que todos los p_i son primos de Mersenne, $p_i = 2^{q_i} - 1$. Se cumple que

$$\sigma(N) = \sigma(2^a)(p_1 + 1) \cdots (p_m + 1)$$

y

$$\sigma(N) = kN = k \cdot 2^a p_1 \cdots p_m,$$

es decir,

$$(2^{a+1} - 1)2^{q_1} \cdots 2^{q_m} = k \cdot 2^a(2^{q_1} - 1) \cdots (2^{q_m} - 1)$$

por lo que $a \leq q_1 + \ldots + q_m$ y $2^{q_i} - 1 \mid 2^{a+1} - 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Pero esto último significa que $q_i \mid a + 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y en resumen

$$q_1 \cdot q_2 \cdots q_m \leq a + 1 \leq q_1 + q_2 + \ldots + q_m + 1.$$

Esto supone que $m = 1$, y

$$(2^{a+1} - 1)(p_1 + 1) = k \cdot 2^a p_1$$

implica que $p_1 \mid 2^{a+1} - 1$ y $2^a \mid p_1 + 1$ y por tanto

$$1 \leq \frac{p_1 + 1}{2^a} \leq 2.$$

Si $\frac{p_1+1}{2^a} = 1$, entonces $p_1 + 1 = 2^a$, así que $p_1 = 2^a - 1$ y $2^a - 1 \mid 2^{a+1} - 1$, lo cual implica que $a = 1$ y sea $N = 6$, número perfecto. Si $\frac{p_1+1}{2^a} = 2$, entonces $p_1 = 2^{a+1} - 1$ dando $k = 2$, es decir, N es un número perfecto.

□

Teorema 4.28. *Sea $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m M_{q_1} M_{q_2} \cdots M_{q_l}$ donde p_i es un primo impar tal que $p_i + 1 = 2^{a_i} p_{i-1}$ y $a_i \geq 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$; M_{q_j} un primo de Mersenne para todo $j = 1, 2, \ldots, l$; y p_0 es uno de los M_{q_j}. Para un a dado, existe un número finito de números 3-perfectos de la forma dada N.*

Demostración

Sea $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m M_{q_1} M_{q_2} \cdots M_{q_l}$ un número 3-perfecto. Se cumple que

$$\begin{aligned} \sigma(N) &= (2^{a+1} - 1) \prod_{i=1}^{m} (p_i + 1) \prod_{j=1}^{l} (M_{q_j} + 1) \\ &= (2^{a+1} - 1) 2^{\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{l} q_j} p_0 p_1 \cdots p_{m-1} \end{aligned} \tag{4.26}$$

y

$$\sigma(N) = 3N = 3 \cdot 2^a p_1 p_2 \cdots p_m \prod_{j=1}^{l} M_{q_j}. \tag{4.27}$$

De las igualdades (4.26) y (4.27) se desprende que

$$a + 1 = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{l} q_j + 1 \qquad y \qquad (2^{a+1} - 1)p_0 = 3p_m \prod_{j=1}^{l} M_{q_j}.$$

Digamos $p_0 = M_{q_1}$, entonces

$$2^{a+1} - 1 = 3p_m \prod_{j=2}^{l} M_{q_j}.$$

Dado que $1 \leq a < +\infty$, se tiene que $2^{a+1} - 1 < +\infty$ y, en resumen, los números p_m y M_{q_j} para todo $j = 1, 2, \ldots, l$ que cumplan lo pedido son limitados. En conclusión, existe un número finito de números 3-perfectos N de la forma dada.

□

Teorema 4.29. *Sea $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ un número 3-perfecto con a par y $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares. Entonces no todos los factores primos de $\sigma(2^a)$ son primos de Mersenne.*

<u>`Demostración`</u>
Sea $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ un número 3-perfecto y $a = 2b$. Se cumple que

$$\sigma(N) = (2^{2b+1} - 1)(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_m + 1) \tag{4.28}$$

y

$$\sigma(N) = 3N = 3 \cdot 2^a p_1 p_2 \cdots p_m. \tag{4.29}$$

Supongamos que todos los factores primos de $2^{2b+1} - 1$ son de Mersenne.
De las igualdades (4.28) y (4.29) se desprende que, como $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$, entonces $p_m \nmid p_i + 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, por lo cual $p_m \mid 2^{2b+1} - 1$, es decir, p_m es un primo de Mersenne. Tomemos $p_m + 1 = 2^{a_m}$. Similarmente, por inducción deducimos que $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ también son factores primos de $2^{2b+1} - 1$ y, por ende, primos de Mersenne. En resumen, 3 no divide a la expresión (4.28), lo cual resulta ser una contradicción debido a que 3 es un factor de la expresión (4.29). En conclusión, no todos los factores primos de $2^{2b+1} - 1$ son de Mersenne.

□

Corolario 4.30. *Sea $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m$ un número 3-perfecto con a par y $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ primos impares. Entonces el mayor de los factores primos de N que no son de Mersenne divide a $\sigma(2^a)$.*

4.5. Números Multiperfectos Impares

Finalizamos el capítulo con la generalización de uno de los problemas abiertos expuestos en este trabajo. Todavía no se conoce ningún número multiperfecto impar que no sea el trivial 1-perfecto por antonomasia, la unidad. Por ello, de demostrar que no existe ningún k-perfecto impar también se confirmaría la no existencia de números perfectos impares.
No obstante, sí que se conocen ciertas cotas de ellos que, en caso de existir, nos darían una idea aproximada de sus dimensiones. Estas cotas van siendo mejoradas con el paso del tiempo, por lo que nos limitaremos a citar algunos de los resultados más significativos y recientes:

Teorema 4.31. *Si N es un número k-perfecto impar, entonces*

- $N > 10^{152}$. [19]
- *su mayor factor primo es mayor o igual que* 100129. [14]

- *su segundo mayor factor primo es mayor o igual que* 1009. [14]
- *su tercer mayor factor primo es mayor o igual que* 101. [32]
- *tiene al menos* $k^2 - 1$ *factores primos distintos.* [47]

Al igual que sucedía en el caso de los números multiperfectos de forma plana, el estudio de los números k-perfectos también ha derivado en la búsqueda de resultados específicos para cada valor de k. Una vez más, ejemplificaremos esto con las dos clases más importantes de este ámbito, los números 3-perfectos y 4-perfectos.

Números 3-perfectos Impares

Teorema 4.32. *Si N es un número 3-perfecto impar, entonces N es un cuadrado.* [39]

Demostración
Si N es un número 3-perfecto impar, entonces $\sigma(N) = 3N$ es un número impar.
Sea $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ su descomposición en factores primos. Supongamos que N no es un cuadrado, entonces existe un exponente a_i que es impar. Sin embargo,

$$\sigma(p_i^{a_i}) = 1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{a_i}$$

es la suma de un número par de números impares, luego par, lo que contradice que $\sigma(N) = 3N$ sea impar.

□

Los números 3-perfectos también cuentan con resultados que con el tiempo van refinando la acotación tanto de estos como de sus propios factores. A continuación mostramos algunas de estas mejores cotas hasta la fecha:

Teorema 4.33. *Si N es un número 3-perfecto impar, entonces*

- *su mayor factor primo es mayor o igual que* 10000019. [34][61]
- *tiene al menos* 12 *factores primos distintos.* [29]
- *si* $3 \nmid N$, *entonces tiene al menos* 35 *factores primos distintos.* [61]

Números 4-perfectos Impares

Similar al *Teorema de Euler* 3.21 para el caso de los números perfectos impares:

Teorema 4.34. *Si N es un número 4-perfecto impar, entonces posee una de las siguientes factorizaciones:*

(a). $N = q_1^{e_1} q_2^{e_2} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_m^{2\alpha_m}$, *con* $q_i \equiv e_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$,

(b). $N = q^{\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_m^{2\alpha_m}$, *con* $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ *y* $\alpha \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 8)$,

(c). $N = q^{\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_m^{2\alpha_m}$, *con* $q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 8)$ *y* $\alpha \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$,

donde $q, q_1, q_2, p_1, p_2, \ldots, p_m$ son primos impares y $e_1, e_2, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ números enteros. [6]

Demostración

Sea $N = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_h^{\beta_h}$ un número 4-perfecto, donde p_i es un primo impar y β_i un número natural para todo $i = 1, 2, \ldots, h$. Puesto que $\sigma(N) = 4N$, se cumple que

$$2^2 \mid \sigma(p_1^{\beta_1})\sigma(p_2^{\beta_2}) \cdots \sigma(p_h^{\beta_h}) \qquad y \qquad \text{m.c.d.}(2^2, \sigma(p_1^{\beta_1})\sigma(p_2^{\beta_2}) \cdots \sigma(p_h^{\beta_h})/2^2) = 1$$

Se pueden dar dos casos:

- 2^1 es la mayor potencia de dos que divide a dos términos distintos del producto, y el resto son impares. Por tanto, resulta claro que el tipo *(a)* es de esta forma.
- 2^2 es la mayor potencia de dos que divide a un término del producto, y el resto son impares. Los tipos *(b)* y *(c)* son de esta forma. Por tanto, solo necesitamos considerar primos q y potencias α tales que $2^2 \mid \sigma(q^\alpha)$ y m.c.d.$(2^2, q^\alpha/2^2) = 1$.

(b) Si $q \equiv 1 (\text{mod } 4)$ y $\alpha \equiv 3 (\text{mod } 8)$. Tomemos $q = 1 + 4x$ y $\alpha = 3 + 8e$, entonces

$$\begin{aligned}
\sigma(q^\alpha) &= \frac{(1+4x)^{4+8e} - 1}{4x} \\
&= \frac{(1+4x)^{4f} - 1}{4x} \\
&= \frac{1}{4x}\left(4x \cdot 4f + \binom{4f}{2}(4x)^2 + (4x)^3 y\right) \\
&= 4g
\end{aligned}$$

por lo que $4 \,|\, \sigma(q^\alpha)$. Falta ver que $8 \nmid \sigma(q^\alpha)$. Escribamos

$$\sigma(q^\alpha) = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{3+8e},$$

agrupando los $4 + 8e$ sumandos en $1 + 2e$ conjuntos de 4 términos se tiene que

$$\sigma(q^\alpha) \equiv (1 + q + q^2 + q^3)(1 + 2e) (\text{mod } 8),$$

donde hemos utilizado la equivalencia $q^4 \equiv 1 (\text{mod } 8)$. Reemplazando q por $1 + 4x$ y reduciendo módulo 8 se sigue que

$$\sigma(q^\alpha) \equiv 4(1 + 2e) (\text{mod } 8)$$

lo cual es distinto de cero, luego $8 \nmid \sigma(q^\alpha)$.

(c) Si $q \equiv 3 (\text{mod } 8)$ y $\alpha \equiv 1 (\text{mod } 4)$. Tomemos $q = 3 + 8x$ y $\alpha = 1 + 4e$, entonces

$$\begin{aligned}
\sigma(q^\alpha) &= \frac{(2+8x)^{2f} - 1}{2+8x} && \text{donde } f \text{ es impar} \\
&= \frac{(1+2y)^{2f} - 1}{2y} && \text{donde } y \text{ es impar} \\
&= \frac{1}{2y}\left(2y \cdot 2f + \binom{2f}{2}(2y)^2 + \ldots\right) \\
&= 2f + 2f(2f-1)y + 4z \\
&= 4w
\end{aligned}$$

por lo que $4\,|\,\sigma(q^\alpha)$. Falta ver que $8 \nmid \sigma(q^\alpha)$. Escribamos

$$\sigma(q^\alpha) = \frac{q^{2+4e}-1}{2+8x} \equiv \frac{q^2-1}{2}(\text{mod } 8) \equiv \frac{(3+8x)^2-1}{2}(\text{mod } 8) \equiv 4(\text{mod } 8)$$

lo cual es distinto de cero, luego $8 \nmid \sigma(q^\alpha)$.

Solo falta ver que estos casos constituyen los únicos posibles analizando los 12 valores restantes. En resumen, usando la notación q^α para los valores de q y α módulo 8 y utilizando las mismas técnicas de la prueba, los casos $1^1, 1^5, 5^1$ y 5^5 dan $4 \nmid \sigma(q^\alpha)$ y los casos $1^7, 3^3, 3^7, 5^7, 7^1, 7^3, 7^5$ y 7^7 dan $8\,|\,\sigma(q^\alpha)$ por lo que no pueden ocurrir, mientras que los casos 5^3 y 3^5 están cubiertos por *(b)* y *(c)*.

□

Corolario 4.35. *Si N es un número 4-perfecto impar, entonces no es un cuadrado ni un número de forma plana.*

Demostración

Por el anterior *Teorema* 4.34, la primera parte resulta inmediata. Para la segunda parte, atendiendo al *Teorema* 4.2 todo número 4-perfecto tiene al menos 4 factores primos distintos. Utilizando este resultado en el anterior *Teorema* 4.34, es fácil ver que $m \neq 0$ y, en conclusión, no será un número libre de cuadrados.

□

En lo referente a la factorización de números 4-perfectos impares, también existen resultados que aportan cotas, las cuales van siendo mejoradas con el paso del tiempo.

Teorema 4.36. *Si N es un número 4-perfecto impar, entonces*

- *tiene al menos 22 factores primos distintos.* [6]
- *si $3 \nmid N$, entonces tiene al menos 142 factores primos distintos.* [6]

Capítulo 5

Números Amigos

Definición 5.1. *Un par de números enteros positivos* (M, N) *son llamados* ***números amigos*** *si* M *es la suma de los divisores propios de* N *y* N *es la suma de los divisores propios de* M

$$s(M) = N \qquad y \qquad s(N) = M,$$

es decir, si

$$\sigma(M) = M + N = \sigma(N).$$

Ejemplo 30. $(220, 284)$ *son números amigos (y de hecho es la menor pareja):*

$$\begin{aligned} s(220) &= 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284 \\ s(284) &= 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220 \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Nota. *Atendiendo a la definición, podemos afirmar que los números perfectos son un caso particular de números amigos, es decir, auto-amigos o amigos de sí mismos.*

Nota. *Una vez más la literatura española nos juega una mala pasada. En inglés se utiliza el término "amicable numbers" para referirse a los números amigos mientras que existe otra acepción muy parecida, pero de distinto significado, que no posee una traducción reconocida en español, "friendly numbers". Se dice que dos números enteros* m *y* n *son* ***"friendly numbers"*** *si* $\sigma(m)/m = \sigma(n)/n$*, es decir, si poseen la misma abundancia o multiplicidad. Ejemplo de pares* ***"amigables"*** *son los aportados en la Tabla 4.3.3, así como todos los números k-perfectos conocidos hasta la fecha para un natural* k *dado. Se dice que un número es* ***solitario*** *si no es amigable.*

Definición 5.2. *Sean* (M, N) *números amigos y sea* $g = \text{m.c.d.}(M, N)$*. Se dice que el par es del* ***tipo*** $\boldsymbol{(i, j)}$ *si el número de factores primos diferentes de* M *que no divide a* g *es* i*, y el número de factores primos diferentes de* N *que no divide a* g *es* j*.*

La factorización de un par de números amigos del tipo (i, j) *es de la forma*

$$(M, N) = (g \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i}, g \cdot q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_j^{\beta_j})$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_i, q_1, q_2, \ldots, q_j$ *son primos diferentes con exponente positivo. Por conveniencia, son representados con el formato*

$$(M, N) = g \left\{ \begin{array}{l} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \\ q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_j^{\beta_j} \end{array} \right. .$$

Definición 5.3. *Sean* (M, N) *números amigos y sea* $g = \text{m.c.d.}(M, N)$. *Si* $\text{m.c.d.}(g, M/g) = \text{m.c.d.}(g, N/g) = 1$, *y ni* M/g *ni* N/g *tienen factores cuadrados, entonces el par es llamado* ***regular***. *En caso contrario, se dice que el par es* ***irregular*** *o* ***exótico***.

Ejemplo 31.

- $(2620, 2924) = 2^2 \begin{cases} 5 \cdot 131 \\ 17 \cdot 43 \end{cases}$ *son números amigos del tipo* $(2, 2)$ *y regular.*
- $(12285, 14595) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \begin{cases} 3^2 \cdot 13 \\ 139 \end{cases}$ *son números amigos del tipo* $(1, 1)$ *y exótico.* *Es el menor par de amigos en el que ambos miembros son impares.* ■

En lo referente a la factorización de números amigos, aún no se conocen pares tales que uno de sus miembros sea la potencia de un número primo. Lo que es seguro es que, de no existir tales pares, uno de los miembros debería tener al menos dos factores primos distintos y el otro tres:

Teorema 5.4. *Si existe un par de amigos de la forma* $(M, N) = (p^\alpha, q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_j^{\beta_j})$, *donde* $p, q_1, q_2, \ldots, q_j$ *son primos distintos y* $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$ *enteros positivos, entonces ambos miembros son impares,* α *es impar,* $\alpha > 1400$, $j > 300$, $M > N$ *y* $N > 10^{1500}$. [21] [37]

Teorema 5.5. *No existen números amigos de la forma* $(M, N) = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2})$. [21] [38]

Tabla 5.1: Menores números amigos conocidos

$(220, 284) = 2^2 \begin{cases} 5 \cdot 11 \\ 71 \end{cases}$	Pitágoras 500 a.C.	$(1184, 1210) = 2 \begin{cases} 2^4 \cdot 37 \\ 5 \cdot 11^2 \end{cases}$	Paganini 1860
$(2620, 2924) = 2^2 \begin{cases} 5 \cdot 131 \\ 17 \cdot 43 \end{cases}$	Euler 1747	$(5020, 5564) = 2^2 \begin{cases} 5 \cdot 251 \\ 13 \cdot 107 \end{cases}$	Euler 1747
$(6232, 6368) = 2^3 \begin{cases} 19 \cdot 41 \\ 2^2 \cdot 199 \end{cases}$	Euler 1750	$(10744, 10856) = 2^3 \begin{cases} 17 \cdot 79 \\ 23 \cdot 59 \end{cases}$	Euler 1747
$(12285, 14595) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \begin{cases} 3^2 \cdot 13 \\ 139 \end{cases}$	Brown 1939	$(17296, 18416) = 2^4 \begin{cases} 23 \cdot 47 \\ 1151 \end{cases}$	ibn Qurra s.IX
$(63020, 76084) = 2^2 \cdot 23 \begin{cases} 5 \cdot 137 \\ 827 \end{cases}$	Euler 1747	$(66928, 66992) = 2^4 \begin{cases} 47 \cdot 89 \\ 53 \cdot 79 \end{cases}$	Euler 1750
$(67095, 71145) = 3^3 \cdot 5 \begin{cases} 7 \cdot 71 \\ 17 \cdot 31 \end{cases}$	Euler 1747	$(69615, 87633) = 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \begin{cases} 5 \cdot 17 \\ 107 \end{cases}$	Euler 1747
$(79750, 88730) = 2 \cdot 5 \begin{cases} 5^2 \cdot 11 \cdot 29 \\ 19 \cdot 467 \end{cases}$	Rolf 1964	$(100485, 124155) = 3^2 \cdot 5 \begin{cases} 7 \cdot 11 \cdot 29 \\ 31 \cdot 89 \end{cases}$	Euler 1747
$(122265, 139815) = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \begin{cases} 11 \cdot 19 \\ 239 \end{cases}$	Euler 1747	$(122368, 123152) = 2^4 \begin{cases} 2^5 \cdot 239 \\ 43 \cdot 179 \end{cases}$	Poulet 1941
$(141664, 153176) = 2^3 \begin{cases} 2^2 \cdot 19 \cdot 233 \\ 41 \cdot 467 \end{cases}$	Euler 1750	$(142310, 168730) = 2 \cdot 5 \begin{cases} 7 \cdot 19 \cdot 107 \\ 47 \cdot 359 \end{cases}$	Euler 1750
$(171856, 176336) = 2^4 \begin{cases} 23 \cdot 467 \\ 103 \cdot 107 \end{cases}$	Euler 1750	$(176272, 180848) = 2^4 \begin{cases} 23 \cdot 479 \\ 89 \cdot 127 \end{cases}$	Euler 1750
...		...	

5.1. Métodos de Generación de Números Amigos

En la búsqueda de nuevos pares de números amigos (M, N) los procedimientos pueden ser clasificados en tres grandes grupos. En primer lugar trataremos los *métodos numéricos exhaustivos*, basados en el cálculo directo de $\sigma(M)$ y $\sigma(N)$. En segundo lugar los *métodos algebraicos de suposición*, los cuales parten de apreciaciones relativas a su factorización. Por último detallaremos los *métodos algebraicos constructivos*, procedimientos que se sirven de pares ya conocidos para construir nuevos números amigos. Precisamente, dentro de este tipo de métodos podemos encontrar uno ya comentado en el *Capítulo* 4 durante el estudio de los números multiperfectos, el *método constructivo de sustitución*.

5.1.1. Método de Sustitución

Como acabamos de relatar, este procedimiento es un caso particular de los métodos constructivos que más adelante detallaremos. Sin embargo, no podemos evitar resaltarlo al comienzo de esta sección ya que se encuentra íntimamente ligado a un resultado ya visto en este trabajo. Así pues, este método es similar al *Teorema* 4.8 estudiado en la búsqueda de números multiperfectos. En este sentido, la *Tabla* 4.3.3 de sustituciones de factores de igual multiplicidad también nos es de utilidad en el caso de números amigos.

Teorema 5.6. *Sean (M, N) números amigos y sea g un entero positivo tal que $g\,|\,M$ y $g\,|\,N$. Si*

$$\text{m.c.d.}\left(g, \frac{M}{g}\right) = \text{m.c.d.}\left(g, \frac{N}{g}\right) = 1,$$

y si $h \neq g$ es un número entero positivo tal que

$$\frac{\sigma(h)}{h} = \frac{\sigma(g)}{g} \qquad y \qquad \text{m.c.d.}\left(h, \frac{M}{g}\right) = \text{m.c.d.}\left(h, \frac{N}{g}\right) = 1,$$

entonces

$$\left(h\,\frac{M}{g}, h\,\frac{N}{g}\right)$$

son números amigos.
Estos pares de amigos son llamados ***isotópicos***.

<u>`Demostración`</u>
Veamos si se cumple la definición de números amigos.

Primero probemos que $\sigma(\frac{hM}{g}) = \sigma(\frac{hN}{g})$:
Puesto que m.c.d.$(h, M/g) = 1$, se tiene que

$$\sigma\left(\frac{hM}{g}\right) = \sigma(h)\sigma\left(\frac{M}{g}\right).$$

Aplicando la igualdad $\sigma(h)/h = \sigma(g)/g$,

$$\sigma(h)\,\sigma\left(\frac{M}{g}\right) = \frac{h\,\sigma(g)}{g}\,\sigma\left(\frac{M}{g}\right),$$

y como m.c.d.$(g, M/g) = 1$ y (M, N) son números amigos,

$$\frac{h\,\sigma(g)}{g}\,\sigma\left(\frac{M}{g}\right) = \frac{h}{g}\,\sigma(M) = \frac{h}{g}\,\sigma(N). \tag{5.1}$$

Una vez más, como m.c.d.$(g, N/g) = 1$ y atendiendo a que $\sigma(h)/h = \sigma(g)/g$,

$$\frac{h}{g}\,\sigma(N) = \frac{h\,\sigma(g)}{g}\,\sigma\left(\frac{N}{g}\right) = \sigma(h)\,\sigma\left(\frac{N}{g}\right).$$

Por último, dado que m.c.d.$(h, N/g) = 1$, se cumple que

$$\sigma(h)\,\sigma\left(\frac{N}{g}\right) = \sigma\left(\frac{hN}{g}\right)$$

con lo que se da la igualdad buscada.

Por último, veamos que se da la igualdad $\sigma(\frac{hM}{g}) = \frac{hM}{g} + \frac{hN}{g}$:
Continuando en la expresión 5.1, y teniendo en cuenta que (M, N) son números amigos, se tiene que

$$\frac{h\,\sigma(g)}{g}\,\sigma\left(\frac{M}{g}\right) = \frac{h}{g}\,\sigma(M) = \frac{h}{g}\,(M+N) = \frac{hM}{g} + \frac{hN}{g}$$

concluyendo que se trata, en efecto, de un par de números amigos.

□

Ejemplo 32. *Para el par de amigos*

$$(5730615, 6088905) = 3^3 \cdot 5 \left\{ \begin{array}{l} 11 \cdot 17 \cdot 227 \\ 23 \cdot 37 \cdot 53 \end{array} \right. .$$

se toma $g = 3^3 \cdot 5$*, por lo que encontrando* $h = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$*, se cumple que*

$$\frac{\sigma(g)}{g} = \frac{40 \cdot 6}{27 \cdot 5} = \frac{16}{9} = \frac{13 \cdot 8 \cdot 14}{9 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{\sigma(h)}{h}$$

con lo que hallamos un nuevo par de números amigos isotópico al anterior,

$$(34765731, 36939357) = 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \left\{ \begin{array}{l} 11 \cdot 17 \cdot 227 \\ 23 \cdot 37 \cdot 53 \end{array} \right. .$$ ■

Ejemplo 33. *El mayor número de pares isotópicos conocidos es siete* [21]*. Un ejemplo de ello es el de los números amigos*

$$3^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 521 \left\{ \begin{array}{l} 15629 \cdot 296969 \\ 4641641099 \end{array} \right. .$$

Si se toma $g = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 31$*, puesto que* $\sigma(g)/g = 1024/513$*, buscando valores de* h *tales que* $\sigma(h)/h = 1024/513$ *obtenemos los siguientes pares de amigos isotópicos, donde representaremos* *entre paréntesis los factores que forman parte de la sustitución:*

$$(3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19^2 \cdot 127) \cdot 521 \begin{cases} 15629 \cdot 296969 \\ 4641641099 \end{cases}$$

$$(3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 127) \cdot 521 \begin{cases} 15629 \cdot 296969 \\ 4641641099 \end{cases}$$

$$(3^{10} \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3851) \cdot 521 \begin{cases} 15629 \cdot 296969 \\ 4641641099 \end{cases}$$

$$(3^6 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093) \cdot 521 \begin{cases} 15629 \cdot 296969 \\ 4641641099 \end{cases}$$

$$(3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 911) \cdot 521 \begin{cases} 15629 \cdot 296969 \\ 4641641099 \end{cases}$$

$$(3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19^4 \cdot 151 \cdot 911) \cdot 521 \begin{cases} 15629 \cdot 296969 \\ 4641641099 \end{cases}$$

■

5.1.2. Métodos Numéricos Exhaustivos

Todos los métodos numéricos exhaustivos están basados en el cálculo directo de $\sigma(M)$ y $\sigma(N)$, y su computación puede realizarse como sigue [63][64]:

Teorema 5.7. *Sean M y N números enteros positivos. Si*

$$\begin{cases} N = \sigma(M) - M \\ t = \sigma(N) - N \\ t = M \end{cases},$$

entonces (M, N) es un par de amigos.

Los métodos numéricos son sencillos de implementar en un ordenador y ofrecen la ventaja de encontrar todos aquellos números amigos existentes hasta un cierto límite, pero son los menos recomendados debido a la cantidad de operaciones que son necesarias en su ejecución. La desventaja reside en la lentitud de su computación debido a que la función σ depende de la factorización de números enteros, para lo cual no existe aún un algoritmo eficiente.

5.1.3. Métodos Algebraicos de Suposición

En el siglo IX, el matemático árabe Thabit ibn Qurra ideó el primer método algebraico en el estudio de los números amigos, sentando las bases de la búsqueda de los once siglos posteriores:

Teorema 5.8 (Regla de Thabit para números amigos). *Sea k un número entero positivo. Si*

$$\begin{cases} p = 3 \cdot 2^{k-1} - 1 \\ q = 3 \cdot 2^k - 1 \\ r = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1 \end{cases}$$

son todos primos, entonces

$$(M, N) = (2^k pq, 2^k r)$$

es un par de amigos.

Demostración
Es un caso particular del *Teorema* 5.9, para los valores de $n - m = 1$.

□

Ejemplo 34. *Desafortunadamente, parece ser que este método solo genera los tres pares de amigos siguientes* [63] *(verificado con Maple para valores de* $k \leq 10^5$*, mejorando la cota de* [63]*):*

$$(220, 284) = 2^2 \begin{cases} 5 \cdot 11 \\ 71 \end{cases} \text{Pitágoras 500 a.C.}$$
$$(17296, 18416) = 2^4 \begin{cases} 23 \cdot 47 \\ 1151 \end{cases} \text{ibn Qurra s.IX, Fermat 1636}$$
$$(9363584, 9437056) = 2^7 \begin{cases} 191 \cdot 383 \\ 73727 \end{cases} \text{Yazdi s.XVII, Descartes 1638}$$
■

Euler fue el primero en estudiar este tipo de números de manera sistemática. Desarrolló diversos métodos de generación de números amigos basándose en el trabajo de Thabit, gracias a los que encontró cincuenta y nueve nuevos pares.

Teorema 5.9 (Regla de Euler para números amigos)**.** *Si*

$$\begin{cases} p = 2^m(2^{n-m} + 1) - 1 \\ q = 2^n(2^{n-m} + 1) - 1 \\ r = 2^{m+n}(2^{n-m} + 1)^2 - 1 \end{cases}$$

son todos primos distintos con $1 \leq m \leq n$*, entonces*

$$(M, N) = (2^n pq, 2^n r)$$

es un par de amigos.

Demostración
Primero, veamos que $\sigma(M) = \sigma(N)$. Como p, q y r son primos distintos, y teniendo en cuenta su valor, se cumple que

$$\sigma(pq) = (p + 1)(q + 1) = r + 1 = \sigma(r) \tag{5.2}$$

por lo que la igualdad resulta trivial.

Ahora, supongamos que $\sigma(N) \neq M + N$, es decir,

$$(2^{n+1} - 1)(r + 1) \neq 2^n(pq + r)$$

Por (5.2), podemos sustituir $pq + r$ por $2r - p - q$, por lo que

$$2^{n+1}r + 2^{n+1} - r - 1 \neq 2^{n+1}r - 2^n p - 2^n q$$

Por tanto, sustituyendo $r + 1 = (p + 1)(q + 1)$ se tiene que

$$(r + 1) - 2^{n+1} - 2^n(p + q) = (p + 1)(q + 1) - 2^{n+1} - 2^n(p + q) \neq 0$$

y operando

$$\begin{aligned}
&(p+1)(q+1)-2^{n+1}-2^n(p+q)\neq 0\\
&(2^m(2^{n-m}+1))(2^n(2^{n-m}+1))-2^{n-1}-2^n(2^m(2^{n-m+1})+2^n(2^{n-m+1})-2)\neq 0\\
&(2^n+2^m)(2^{2n-m}+2^n)-2^{n-1}-2^n(2^n+2^m+2^{2n-m}+2^n-2)\neq 0\\
&2^{3n-m}+2^{2n}+2^{2n}+2^{n+m}-2^{n+1}-2^{2n}-2^{n+m}-2^{3n-m}-2^{2n}+2^{n+1}\neq 0\\
&0\neq 0
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo, por lo que se puede concluir que $\sigma(N) = M + N$, y el teorema queda probado.

$\square$

Ejemplo 35. *El resultado de Euler solo aporta dos pares más que la regla de Thabit* [63]*(verificado con Maple para valores de $n \leq 10^3$).*

$$(2172649216, 2181168896) = 2^8\begin{cases} 257\cdot 33023 \\ 8520191\end{cases} \quad \text{Legendre 1830}$$

$$2^{40}\begin{cases} 1100048498687\cdot 2252899325313023 \\ 2478298520505800166853312511\end{cases} \quad \text{te Riele 1972}$$

$\blacksquare$

Muchos autores han introducido variantes en ambos métodos, hasta que en 1986 Borho y Hoffmann encontraron un teorema análogo a la búsqueda de Thabit. [5]

Teorema 5.10 (Análogo a la regla de Thabit para números amigos)**.** *Sea k un número entero positivo y sea $0<x<k$ tal que*

$$p = 2^x g - 1$$

es un número primo, donde $g = 2^{k-x}+1$. Sea $0<y<k$ tal que

$$\begin{cases} q = 2^y + (2^{k+1}-1)g \\ r = 2^{k-y}gq - 1 \\ s = 2^{k-y+x}g^2q - 1 \end{cases}.$$

Si q, r y s son todos primos, entonces

$$(M, N) = (2^k pqr, 2^k qs)$$

es un par de amigos.

Demostración

Primero, veamos que $\sigma(M) = \sigma(N)$. Puesto que p, q, r y s son primos impares distintos, se cumple la igualdad

$$\begin{aligned}
\sigma(M) &= \sigma(2^k qpr)\\
&= \sigma(2^k)\sigma(q)\sigma(p)\sigma(r)\\
&= \sigma(2^k)\sigma(q)(p+1)(r+1)\\
&= \sigma(2^k)\sigma(q)(2^x g)(2^{k-y}gq)\\
&= \sigma(2^k)\sigma(q)(2^{k-y+x}g^2q)\\
&= \sigma(2^k)\sigma(q)(s+1)\\
&= \sigma(2^k)\sigma(q)\sigma(s)\\
&= \sigma(2^k qs) = \sigma(N).
\end{aligned}$$

Solo falta ver que $\sigma(N) = M + N$. Por un lado

$$\begin{aligned}
\sigma(N) &= (2^{k+1}-1)(q+1)(s+1) \\
&= (2^{k+1}-1)(qs+q+s+1) \\
&= 2^{k+1}qs + 2^{k+1}(q+s+1) - (q+1)(s+1) \\
&= 2^{k+1}qs + (s+1)[(2^{k+1}-q-1) + 2^{k+1}q] \\
&= 2^{k+1}qs + 2^k q\{2^{x-y}g^2[2^{k+1}-q-1] + 2\} \\
&= 2^{k+1}qs + 2^k q\{2^{x-y}g^2[(2^{k+1}-1)(1-g) - 2^y] + 2\} \\
&= 2^{k+1}qs + 2^k q\{2^{x-y}g^2[-2^{k-x}(2^{k+1}-1) - 2^y] + 2\} \\
&= 2^{k+1}qs + 2^k q[-2^{k-y}g^2(2^{k+1}-1) - 2^x g^2 + 2] \\
&= 2^{k+1}qs - 2^k q[2^{k-y}g^2(2^{k+1}-1) + 2^x g^2 - 2] \\
&= 2^{k+1}qs - 2^k q\{g^2[2^x + 2^{k-y}(2^{k+1}-1)] - 2\}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $(p+1)(r+1) = s+1$, se cumple que $s = pr + p + r$. Teniendo en cuenta esta igualdad, se pueden realizar las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
M + N &= 2^k q(pr + s) \\
&= 2^k q(2s - p - r) \\
&= 2^{k+1}qs - 2^k pq - 2^k qr \\
&= 2^{k+1}qs - 2^k q(p + r) \\
&= 2^{k+1}qs - 2^k q[g(2^x + 2^{k-y}q) - 2] \\
&= 2^{k+1}qs - 2^k q[g(2^x + 2^k + 2^{k-y}(2^{k+1}-1)g) - 2] \\
&= 2^{k+1}qs - 2^k q\{g[2^x g + 2^{k-y}(2^{k+1}-1)g] - 2\} \\
&= 2^{k+1}qs - 2^k q\{g^2[2^x + 2^{k-y}(2^{k+1}-1)] - 2\}.
\end{aligned}$$

De estos cálculos se desprende que $\sigma(N) = M + N$ y, en resumen, el teorema queda probado.

□

Ejemplo 36. *Se ha comprobado con Maple para valores de $k \leq 10^3$ que el teorema solo genera dos pares de números amigos, cuyos valores son*

$$\left\{\begin{array}{l} k = 2 \\ p = 5 \\ q = 23 \\ r = 137 \\ s = 827 \end{array}\right. \quad y \quad \left\{\begin{array}{l} k = 47 \\ p = 145135534866431 \\ q = 9288811670405087 \\ r = 313887523966328699903 \\ s = 45556233678753109045286896851222527 \end{array}\right. .$$

El primer par ya había sido hallado por Euler mientras que el segundo era nuevo, siendo descubierto en 1993. [63][65] ■

Desde entonces se han creado muchos otros métodos de búsqueda y, fruto de su combinación, se han ido formando reglas cada vez más complicadas permitiendo encontrar números amigos de una magnitud mayor. Ejemplo de ello son los dos siguientes resultados. Véase que el primero es una versión de la regla de Thabit para números amigos del tipo (2,2):

Teorema 5.11 (Análogo de Lee a la Regla de Thabit para números amigos). *Sea k un número entero positivo. Si*

$$\begin{cases} p = 3 \cdot 2^{k-1} - 1 \\ q = 35 \cdot 2^{k+1} - 29 \\ r = 7 \cdot 2^{k-1} - 1 \\ s = 15 \cdot 2^{k+1} - 13 \end{cases}$$

son números primos, entonces

$$(M, N) = (2^k pq, 2^k rs)$$

es un par de amigos.

<u>Demostración</u>
Para comenzar, es claro que $\sigma(M) = \sigma(N)$ si y solo si

$$(p+1)(q+1) = (r+1)(s+1)$$

lo cual es cierto ya que

$$(p+1)(q+1) = 105 \cdot 2^{2k} - 84 \cdot 2^{k-1} = (r+1)(s+1).$$

Por último, veamos que $\sigma(M) = M + N$:

$$\begin{aligned} M + N &= 2^k[(3 \cdot 2^{k-1} - 1)(35 \cdot 2^{k+1} - 29) + (7 \cdot 2^{k-1} - 1)(15 \cdot 2^{k+1} - 13)] \\ &= (2^{k+1} - 1)(105 \cdot 2^{2k} - 84 \cdot 2^{k-1}) = \sigma(M) \end{aligned}$$

con lo que el resultado queda probado.

□

Ejemplo 37. *El único par encontrado con el uso de esta regla es*

$$(5020, 5564) = 2^2 \begin{cases} 5 \cdot 251 \\ 13 \cdot 107 \end{cases} \quad \text{Euler 1747}$$

para valores de $k \leq 10^4$ (mediante la implementación del teorema con Maple, mejorando la cota dada por [63]*).* ■

Teorema 5.12. *Sean k, m y n números enteros positivos con $k < m$. Sean*

$$\begin{cases} f = 2^k + 1 \\ g = 2^{m-k} f^2 \end{cases} .$$

Si

$$\begin{cases} r_1 = f 2^{m-k} - 1 \\ r_2 = f 2^m - 1 \\ p = g(2^{m+1} - 1) + 1 \\ q_1 = p^n((2^m - 1)g + 2) - 1 \\ q_2 = 2^m p^n g((2^m - 1)g + 2) - 1 \end{cases}$$

son todos primos, entonces

$$(M, N) = (2^m p^n r_1 r_2 q_1, 2^m p^n q_2)$$

es un par de amigos. [64]

Ejemplo 38. *Utilizando la implementación del método en Maple para valores de $n \leq 10$ y $m < 10^3$, el único par hallado fue*

$$(3204978428740, 4195612705532) = 2^2 \cdot 127^2 \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot 11 \cdot 903223 \\ 65032127 \end{array} \right. \quad \text{Borho 1972} \qquad \blacksquare$$

La *Regla de Euler* (*Teorema* 5.9) se basa en la utilización de tres números primos simultáneamente. Walter Borho estudió métodos para requerir únicamente dos. El trabajo de Borho estaba motivado por la cuestión de saber cuándo el conjunto $\mathfrak{M}$ de pares de amigos creados a partir de dichos factores podría ser infinito, encontrando la siguiente condición necesaria [4]:

Proposición 5.13. *Sean b_1 y b_2 enteros positivos y sea p un primo que no divide ni a b_1 ni a b_2. Denotemos por $\mathfrak{M}$ al conjunto de pares de amigos $(m_1, m_2) = (p^n b_1 q_1, p^n b_2 q_2)$ con q_1 y q_2 números primos y n natural. Entonces, una condición necesaria para que $\mathfrak{M}$ sea infinito es*

$$\frac{p}{p-1} = \frac{b_1}{\sigma(b_1)} + \frac{b_2}{\sigma(b_2)}.$$

<u>Demostración</u>
Primero véase que, como (m_1, m_2) pertenecen a $\mathfrak{M}$, entonces

$$\sigma(m_i) = m_1 + m_2 = p^n(b_1 q_1 + b_2 q_2),$$
$$\sigma(m_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma(p^n)\sigma(b_i q_i) & \text{si } q_i \neq p, \\ \sigma(p^{n+1})\sigma(b_i) & \text{si } q_i = p, \end{array} \right.$$

y se sigue que

$$\sigma(b_i q_i) \equiv 0 (\text{mod } p^n) \tag{5.3}$$

para $i = 1, 2$.

Notemos que para todo par de $\mathfrak{M}$, excepto para un número finito de ellos, se cumple que $q_i \nmid b_i p$ para $i = 1, 2$. De hecho, si q_1 o q_2 son alguno de los divisores primos de $b_1 b_2 p$, entonces los posibles valores para n están limitados por (5.3), y uno de los q_i, junto con n, determina el par (m_1, m_2).

Ahora, para casi todo (m_1, m_2) perteneciente a $\mathfrak{M}$ se cumple que

$$\sigma(m_i) = \sigma(p^n b_i)(q_i + 1) = p^n b_1 q_1 + p^n b_2 q_2 = m_1 + m_2 \qquad \text{para } i = 1, 2,$$

lo cual, para un n dado, es un sistema de ecuaciones que determina q_1 y q_2 de forma única.

De (5.3) se sigue que $q_i(n) \to \infty$ si $n \to \infty$. Con todo ello, la ecuación

$$1 = \frac{m_1}{\sigma(m_1)} + \frac{m_2}{\sigma(m_2)} = \sum_{i=1,2} \frac{b_i}{\sigma(b_i)} \frac{p^n}{\sigma(p^n)} \frac{q_i}{q_i + 1}$$

nos aporta la condición necesaria buscada cuando $n \to \infty$.

$\square$

A partir de esta proposición, Borho construyó el siguiente método [4] [21]:

Teorema 5.14 (Regla de Borho). *Sean b_1 y b_2 enteros positivos y sea p un primo que no divide a b_1 ni b_2 tales que*

$$\frac{p}{p-1} = \frac{b_1}{\sigma(b_1)} + \frac{b_2}{\sigma(b_2)}.$$

Si para algún entero positivo k y para $i = 1, 2$,

$$q_i = \frac{p^k(p-1)(b_1+b_2)}{\sigma(b_i)} - 1$$

es un primo que no divide a $b_i p$, entonces

$$(M, N) = (b_1 p^k q_1, b_2 p^k q_2)$$

es un par de amigos.

Ejemplo 39. *Los números $b_1 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$, $b_2 = 2^2$, $p = 127$ satisfacen la Regla de Borho. De hecho $(2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 127^k \cdot q_1, 2^2 \cdot 127^k \cdot q_2)$ es un par de números amigos para cada natural k que satisfaga que $q_1 = 56 \cdot 127^k - 1$ y $q_1 = 56 \cdot 72 \cdot 127^k - 1$ son números primos.* [4][21]
Por ejemplo, para $k = 2$, se tiene el par

$$2^2 \cdot 127^2 \begin{cases} 5 \cdot 11 \cdot 903223 \\ 65032127 \end{cases} \quad \text{Borho 1972}$$ ■

La experiencia muestra que es muy difícil encontrar nuevos números amigos mediante el uso de métodos algebraicos puros tales como la *Regla de Thabit* 5.8, la *Regla de Euler* 5.9 o sus respectivas variaciones, sobre todo para pares de amigos particularmente grandes. En la siguiente sección estudiaremos algunos de los más recientes y potentes métodos capaces de generar números amigos de gran tamaño, los métodos algebraicos constructivos.

5.1.4. Métodos Algebraicos Constructivos

Este tipo de procedimientos están basados en la búsqueda de soluciones de ecuaciones Diofánticas bilineales. Por métodos *constructivos* nos referimos a aquellos capaces de generar nuevos números amigos partiendo de un par ya conocido.

Basándose en la observación de que todo par de amigos puede ser escrito de la forma

$$(M, N) = (a_1 pq, a_2 r) \tag{5.4}$$

con m.c.d.$(a_1, p) =$ m.c.d.$(a_1, q) =$ m.c.d.$(a_2, r) = 1$, Lee propuso en 1968 un método general de búsqueda que puede ser resumido como sigue [63] [64]:

Proposición 5.15 (Método de Lee). *Sean $A_1 = \sigma(a_1)$ y $A_2 = \sigma(a_2)$. De la igualdad (5.4) se tiene que*

$$\begin{cases} A_1(p+1)(q+1) = A_2(r+1) = a_1 pq + a_2 r \\ r = \dfrac{A_1(p+1)(q+1)}{A_2} - 1 \\ (a_1A_2 - A_1(A_2 - a_2))pq - A_1(A_2 - a_2)(p+q) = a_2A_2 + A_1(A_2 - a_2) \\ p = \dfrac{X + A_1(A_2 - a_2)}{a_1A_2 - A_1(A_2 - a_2)} \\ q = \dfrac{Y + A_1(A_2 - a_2)}{a_1A_2 - A_1(A_2 - a_2)} \end{cases} \tag{5.5}$$

donde X e Y son un par de factores tales que

$$XY = A_2(a_1a_2A_2 + A_1(a_1 - a_2)(A_1 - a_2)). \tag{5.6}$$

Del denominador de p y q se deduce la siguiente condición:

$$\frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} > 1. \tag{5.7}$$

Ahora, tomando a_1 y a_2 sujetos a (5.7), de las igualdades (5.5) se pueden obtener obtener todos los posibles valores de p, q y r tales que

$$(M, N) = (a_1pq, a_2r)$$

sean números amigos.

El problema del método de Lee era encontrar tales a_1 y a_2 para que p, q y r fuesen enteros, por lo que resultaba difícilmente aplicable. La dificultad fue subsanada por Herman J.J. te Riele [56], sugiriendo partir de números amigos ya existentes [63] [64]:

Teorema 5.16 (Análogo al Método de Lee)**.** *Sea $(M_1, N_1) = (a_1p, a_2q)$ un par de números amigos con*

$$\begin{cases} p \text{ y } q \text{ son primos} \\ \text{m.c.d.}(a_1, p) = \text{m.c.d.}(a_2, q) = 1 \end{cases}. \tag{5.8}$$

Seleccionar (a_1, a_2) para encontrar una solución (q_1, q_2) de la ecuación bilineal Diofántica

$$Aq_1q_2 - B(q_1 + q_2) = C$$

o equivalentemente

$$(Aq_1 - B)(Aq_2 - B) = AC + B^2 = W,$$

donde

$$\begin{cases} A_1 = \sigma(a_1) \\ A_2 = \sigma(a_2) \\ B_1 = \sigma(a_1) - a_1 \\ B_2 = \sigma(a_2) - a_2 \\ A = a_1a_2 - B_1B_2 \\ B = B_1A_2 \\ C = a_1A_1 + B_1A_2W = AC + B^2 \end{cases}.$$

Escribiendo W en todas las formas posibles de un producto $W = UV$, se tiene

$$\begin{cases} U = Aq_1 - B \\ V = Aq_2 - B \end{cases},$$

por lo que

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{U + B}{A} \\ q_2 = \dfrac{V + B}{A} \end{cases},$$

donde q_1 y q_2 satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{cases} q_1 \text{ y } q_2 \text{ son primos} \\ q_1 \neq q_2 \\ \text{m.c.d.}(a_2, q_1 \cdot q_2) = 1 \end{cases}. \tag{5.9}$$

Se calcula p_1 tal que

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{a_2 q_1 q_2 - A_1}{B_1} \\ p_1 \text{ es primo} \\ \text{m.c.d.}(a_1, p_1) = 1 \end{cases}. \tag{5.10}$$

Si se satisfacen todas las condiciones (5.8), (5.9) y (5.10), entonces

$$(M, N) = (a_1 p_1, a_2 q_1 q_2)$$

es un par de números amigos.

Ejemplo 40. *Partiendo de la menor pareja de números amigos*

$$(220, 284) = \begin{cases} 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \\ 2^2 \cdot 71 \end{cases},$$

y tomando $(a_1, a_2) = (2^2 \cdot 5, 2^2)$, se obtienen las soluciones $(q_1, q_2) = (17, 43)$ y $(13, 107)$ con $p_1 = 131$ y 251 respectivamente, es decir,

$$(2620, 2924) = 2^2 \begin{cases} 5 \cdot 131 \\ 17 \cdot 43 \end{cases}$$

$$(5020, 5564) = 2^2 \begin{cases} 5 \cdot 251 \\ 13 \cdot 107 \end{cases}$$ ■

Un Método Algebraico Constructivo General

En 1984 te Riele propuso el siguiente resultado [55]:

Teorema 5.17 (Regla de te Riele)**.** *Sea $(M_1, N_1) = (au, ap)$ un par de números amigos con $\text{m.c.d.}(a, u) = \text{m.c.d.}(a, p) = 1$, donde p es primo. Si existe un par de números primos r y s con $p < r < s$ y $\text{m.c.d.}(a, rs) = 1$, satisfaciendo que*

$$(r - p)(s - p) = \frac{\sigma(a)}{a} \sigma(u)^2, \tag{5.11}$$

y si existe un primo q con $\text{m.c.d.}(au, q) = 1$ y

$$q = r + s + u,$$

entonces

$$(M, N) = (auq, ars)$$

es un par de amigos.

<u>`Demostración`</u>

Antes de comenzar notemos que, puesto que $(M_1, N_1) = (au, ap)$ son números amigos, se cumple que

$$\begin{cases} \sigma(au) = \sigma(ap) \\ \sigma(u) = \sigma(p) \\ \sigma(au) = \sigma(ap) = a(u + p) \end{cases}.$$

Primero, probemos que $\sigma(M) = \sigma(N)$. Si (au, ap) es un par de amigos, entonces

$$\frac{\sigma(a)\sigma(u)}{a} = u + p.$$

Por tanto, la igualdad (5.11) se traduce en $(r-p)(s-p) = (u+p)\sigma(u)$. Operando,

$$\begin{aligned}
rs - p(r+s) + p^2 &= (u+p)\sigma(u)\\
rs - p(q-u) + p^2 &= (u+p)(p+1)\\
rs - p(q-u) &= up + u + p\\
rs &= pq + u + p.
\end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma(M) &= \sigma(auq) = \sigma(apq) = \sigma(a)(p+1)(q+1)\\
\sigma(N) &= \sigma(ars) = \sigma(a)(r+1)(s+1)
\end{aligned}$$

por lo cual $\sigma(M) = \sigma(N)$, ya que

$$(p+1(q+1) = pq + p + q + 1 = rs - u + q + 1 = rs + r + s + 1 = (r+1)(s+1).$$

Por último, falta probar que $\sigma(M) = M + N$. Como

$$\begin{aligned}
\sigma(M) &= \sigma(auq) = \sigma(au)\sigma(q) = a(u+p)(q+1)\\
&= a(uq + u + pq + p) = a(uq + rs) = M + N
\end{aligned}$$

el teorema queda demostrado.

□

Ejemplo 41. *Con el método anterior, partiendo de los números amigos*

$$(au, ap) = 2 \cdot 5^3 \cdot 19 \cdot 67 \begin{cases} 15959 \cdot 5346599 \\ 85331735999 \end{cases}$$

y analizando todos los casos posibles, te Riele descubrió 145 *nuevos números amigos.* [55] ■

Como hemos dicho, muchos otros métodos se pueden formar a partir de versiones de las búsquedas de Thabit y Euler, así como combinaciones de estas. Muestra de ello son los resultados expuestos hasta el final de este capítulo:

Forward Methods

Consideremos números amigos de la forma

$$(M, N) = (wm, wn)$$

donde w es el máximo común divisor de M y N con m.c.d.$(w, m) =$ m.c.d.$(w, n) = 1$.
Los métodos *hacia delante* o *forward methods* parten del factor común w para intentar hallar los valores m y n que definan el par de amigos buscado.

Teorema 5.18. *Sea $w > 1$ un número entero dado, y sean u y v números enteros tales que $w^2 = uv$ y $1 < u \leq v$. Sean $A = \sigma(w) - w$ y $B = 2w - \sigma(w)$. Si*

$$\begin{cases} p = \dfrac{u+A}{B} \\ q = \dfrac{v+A}{B} \\ s = p \cdot q + p + q \end{cases}$$

son primos distintos, y

$$\text{m.c.d.}(w,p) = \text{m.c.d.}(w,q) = \text{m.c.d.}(w,s) = 1,$$

entonces

$$(M,N) = (wpq, ws)$$

es un par de amigos. [63]

Demostración

Primero, probemos que $\sigma(M) = \sigma(N)$:

$$\begin{aligned} \sigma(M) = \sigma(wpq) &= \sigma(w)(p+1)(q+1) \\ &= \sigma(w)(pq+p+q+1) \\ &= \sigma(w)(s+1) = \sigma(ws) = \sigma(N). \end{aligned}$$

Por último, veamos que $\sigma(M) = M + N$. Antes de empezar, notemos que

$$\begin{cases} p = \dfrac{u+\sigma(w)-w}{B} = \dfrac{u+w}{B} - 1 \\ q = \dfrac{v+w}{B} - 1 \\ s + 1 = \dfrac{(u+w)}{B}\,\dfrac{(v+w)}{B} = \dfrac{2w^2 + w(u+v)}{B^2} = \dfrac{w(2w+u+v)}{B^2} \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{cases} \sigma(M) = \sigma(N) = \sigma(w)(s+1) = \sigma(w)\,\dfrac{w(2w+u+v)}{B^2} \\ M + N = w(pq+s) = w(2s-p-q) \end{cases}.$$

Es decir, $\sigma(M) = M + N$ si y solo si

$$B^2(2s-p-q) = \sigma(w)(2w+u+v).$$

Operando el primer miembro de la igualdad, se tiene que

$$B^2(2s-p-q) = B^2\left(\frac{2w(2w+u+v)}{B^2} - 2 - p - q\right) = 2w(2w+u+v) - B^2(2+p+q),$$

es igual al segundo miembro, $\sigma(w)(2w+u+v)$, si y solo si

$$(2w - \sigma(w))(2w+u+v) = B^2(2+p+q),$$

es decir,

$$2w + u + v = B(p+q+2) = B\left(\frac{u+w}{B} + \frac{v+w}{B}\right)$$

lo cual es cierto, con lo que el teorema queda demostrado.

$\square$

Ejemplo 42. *Tomemos $w = 16$. Se cumple que*

$$\begin{cases} \sigma(w) = 31 \\ A = \sigma(w) - w = 15 \\ B = 2w - \sigma(w) = 1 \end{cases}.$$

Se puede expresar $w^2 = 256$ como producto de dos números $v \geq u > 1$ de las siguientes formas, aunque solo una de ellas genera un par de números amigos:

- $(u, v) = (2, 128)$*:*
$$\begin{cases} p = 2 + 15 = 17 \\ q = 128 + 15 = 143 = 11 \cdot 13 \text{ no es primo} \\ s = 2591 \end{cases}$$

- $(u, v) = (4, 64)$*:*
$$\begin{cases} p = 4 + 15 = 19 \\ q = 64 + 15 = 79 \\ s = 1599 = 3 \cdot 13 \cdot 41 \text{ no es primo} \end{cases}$$

- $(u, v) = (8, 32)$*:*
$$\begin{cases} p = 8 + 15 = 23 \\ q = 32 + 15 = 47 \\ s = 1151 \end{cases}$$

  Como p, q y s son primos, genera el par de números amigos

$$(17296, 18416) = 2^4 \begin{cases} 23 \cdot 47 \\ 1151 \end{cases}$$

- $(u, v) = (16, 16)$*:*
$$\begin{cases} p = 16 + 15 = 31 \\ q = 16 + 15 = 31 \text{ pero } p \text{ y } q \text{ no son distintos.} \\ s = 1023 \end{cases}$$

■

Ejemplo 43. *Implementando el método en Maple para valores de $w \leq 10^3$ se obtuvieron los siguientes pares de amigos:*

$$(220, 284) = 2^2 \begin{cases} 5 \cdot 11 \\ 71 \end{cases} \qquad (17296, 18416) = 2^4 \begin{cases} 23 \cdot 47 \\ 1151 \end{cases}$$

$$(63020, 76084) = 2^2 \cdot 23 \begin{cases} 5 \cdot 137 \\ 827 \end{cases} \qquad (69615, 87633) = 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \begin{cases} 5 \cdot 17 \\ 107 \end{cases}$$

$$(122265, 139815) = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \begin{cases} 11 \cdot 19 \\ 239 \end{cases} \qquad (9363584, 9437056) = 2^7 \begin{cases} 191 \cdot 383 \\ 73727 \end{cases}$$

$$(31536855, 32148585) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \begin{cases} 53 \cdot 1889 \\ 102059 \end{cases} \qquad (175032884, 175826716) = 2^2 \cdot 13 \cdot 17 \begin{cases} 389 \cdot 509 \\ 198899 \end{cases}$$

$$(2172649216, 2181168896) = 2^8 \begin{cases} 257 \cdot 33023 \\ 8520191 \end{cases}$$

■

Teorema 5.19. *Sean a_1 y a_2 dos números enteros positivos dados. Sean*

$$\begin{cases} A = \sigma(a_1)(\sigma(a_2) - a_2) \\ B = a_1\sigma(a_2) - \sigma(a_1)(\sigma(a_2) - a_2) \end{cases}$$

y sean u y v números naturales tales que

$$uv = \sigma(a_2)(a_1a_2\sigma(a_2) + \sigma(a_1)(a_1 - a_2)(\sigma(a_2) - a_2)).$$

Si

$$\begin{cases} p = \dfrac{u + A}{B} \\ q = \dfrac{v + A}{B} \\ s = \dfrac{\sigma(a_1)(pq + p + q + 1)}{\sigma(a_2)} - 1 \end{cases}$$

son primos diferentes, y

$$\text{m.c.d.}(a_1, p) = \text{m.c.d.}(a_1, q) = \text{m.c.d.}(a_2, s) = 1,$$

entonces

$$(M, N) = (a_1pq, a_2s)$$

es un par de amigos. [63]

<u>`Demostración`</u>
Primero, probemos que $\sigma(M) = \sigma(N)$:

$$\begin{aligned} \sigma(N) &= \sigma(a_2s) = \sigma(a_2)(s + 1) \\ &= \sigma(a_2)\frac{\sigma(a_1)(pq + p + q + 1)}{\sigma(a_2)} \\ &= \sigma(a_1)(p + 1)(q + 1) = \sigma(a_1pq) = \sigma(M). \end{aligned}$$

Por último, veamos que $\sigma(M) = M + N$. Por el enunciado, se tiene que

$$\begin{aligned} &A = \sigma(a_1)(\sigma(a_2) - a_2) \\ &B = a_1\sigma(a_2) - \sigma(a_1)(\sigma(a_2) - a_2) \\ &uv = \sigma(a_2)(a_1a_2\sigma(a_2) + \sigma(a_1)(a_1 - a_2)(\sigma(a_2) - a_2)) \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} p &= \frac{u + A}{B} = \frac{u + A + B}{B} - 1 = \frac{u + a_1\sigma(a_2)}{B} - 1 \\ q &= \frac{v + A}{B} = \frac{v + A + B}{B} - 1 = \frac{v + a_1\sigma(a_2)}{B} - 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
s+1 &= \frac{\sigma(a_1)(p+1)(q+1)}{\sigma(a_2)} = \frac{\sigma(a_1)}{\sigma(a_2)}\,\frac{(u+a_1\sigma(a_2))(v+a_1\sigma(a_2))}{B^2}\\
&= \frac{\sigma(a_1)}{\sigma(a_2)}\,\frac{a_1\sigma(a_2)(u+v)+a_1^2\sigma^2(a_2)+uv}{B^2}\\
&= \frac{\sigma(a_1)}{\sigma(a_2)}\,\frac{a_1\sigma(a_2)(u+v)+a_1^2\sigma^2(a_2)+\sigma(a_2)(a_1a_2\sigma(a_2)+\sigma(a_1)(a_1-a_2)(\sigma(a_2)-a_2))}{B^2}\\
pq &= \frac{\sigma(a_2)(s+1)}{\sigma(a_1)} - p - q - 1\\
&= \frac{\sigma(a_2)(a_1(u+v)+a_1^2\sigma(a_2)+a_1a_2\sigma(a_2)+\sigma(a_1)(a_1-a_2)(\sigma(a_2)-a_2))}{B^2} - p - q - 1.
\end{aligned}$$

Con todo ello,

$$\begin{aligned}
M+N &= a_1pq + a_2s = a_1pq + a_2\left(\frac{\sigma(a_1)(pq+p+q+1)}{\sigma(a_2)} - 1\right)\\
\sigma(M) &= \sigma(a_1)(pq+p+q+1).
\end{aligned}$$

Por tanto, se cumple la igualdad $M+N=\sigma(M)$ si y solo si

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1\sigma(a_2)(a_1(u+v)+a_1^2\sigma(a_2)+a_1a_2\sigma(a_2)+\sigma(a_1)(a_1-a_2)(\sigma(a_2)-a_2))}{B^2} - a_1p - a_1q - a_1 - a_2\\
&= \frac{(\sigma(a_2)-a_2)\sigma(a_1)}{B^2}(a_1(u+v)+a_1^2\sigma(a_2)+a_1a_2\sigma(a_2)+\sigma(a_1)(a_1-a_2)(\sigma(a_2)-a_2))
\end{aligned}$$

si y solo si

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1\sigma(a_2)+a_2\sigma(a_1)-\sigma(a_1)\sigma(a_2)}{B}(a_1(u+v)+a_1^2\sigma(a_2)+a_1a_2\sigma(a_2)\\
&+\sigma(a_1)(a_1-a_2)(\sigma(a_2)-a_2))B - a_1B(u+v+2A) - (a_1+a_2)B^2 = 0
\end{aligned}$$

si y solo si

$$\begin{aligned}
&a_1(u+v+2A) + (a_1+a_2)B - (a_1(u+v)+a_1^2\sigma(a_2)\\
&\qquad +a_1a_2\sigma(a_2)+\sigma(a_1)(a_1-a_2)(\sigma(a_2)-a_2)) = 0
\end{aligned}$$

y operando

$$\begin{aligned}
&(a_1+a_2)B + 2a_1A - a_1^2\sigma(a_2) - a_1a_2\sigma(a_2) - (a_1-a_2)A = 0\\
&(a_1+a_2)B - a_1^2\sigma(a_2) - a_1a_2\sigma(a_2) + (a_1+a_2)A = 0\\
&a_1\sigma(a_2)(a_1+a_2) - a_1^2\sigma(a_2) - a_1a_2\sigma(a_2) = 0
\end{aligned}$$

por lo que el resultado es cierto.

□

Ejemplo 44. *Tomemos $a_1 = 2^5$ y $a_2 = 2^3\cdot 41$. Operando como indica el resultado, se tiene que*

$$u\cdot v = 2^5\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7^3\cdot 139.$$

Eligiendo los valores de $u = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ *y* $v = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 139$ *se obtienen los números primos*

$$\begin{cases} p = 17 \\ q = 2179 \\ s = 3923 \end{cases}$$

por lo que se obtiene el par

$$(a_1pq, a_2s) = (1185376, 1286744) = 2^3 \begin{cases} 2^2 \cdot 17 \cdot 2179 \\ 41 \cdot 3923 \end{cases} \quad \text{Gerardin 1929}$$

■

Backward Methods

Consideremos números amigos de la forma

$$(M, N) = (wm, wn)$$

donde w es el máximo común divisor de M y N con m.c.d.$(w, m) =$ m.c.d.$(w, n) = 1$.
Los *métodos hacia atrás* o *backward methods* parten de dos factores dados m de M y n de N para intentar hallar un número w tal que $(M, N) = (wm, wn)$ sea un par de números amigos.

Teorema 5.20. *Sean* m *y* n *dos números enteros positivos distintos tales que*

$$\sigma(m) = \sigma(n) \neq m + n. \tag{5.12}$$

Si existe otro número entero $w > 1$ *tal que*

$$\begin{cases} \text{m.c.d.}(m, w) = \text{m.c.d.}(n, w) = 1 \\ \dfrac{\sigma(w)}{w} = \dfrac{m+n}{\sigma(m)} \end{cases} \tag{5.13}$$

entonces

$$(M, N) = (wm, wn)$$

es un par de amigos. [63]

<u>Demostración</u>
De (5.12) y (5.13) es fácil deducir que $\sigma(M) = \sigma(N)$, ya que

$$\sigma(M) = \sigma(wm) = \sigma(w)\sigma(m) = \sigma(w)\sigma(n) = \sigma(wn) = \sigma(N).$$

De la misma forma, se prueba que $\sigma(M) = M + N$ a partir de (5.13),

$$\sigma(M) = \sigma(w)\sigma(m) = w(m + n) = M + N.$$

Por tanto, (M, N) es un par de números amigos.

□

Ejemplo 45. *Tomemos un par de números que cumplan lo pedido,*

$$(m, n) = (11 \cdot 13 \cdot 431 \cdot 719, 127 \cdot 503 \cdot 809).$$

Debemos encontrar un número natural w *que cumpla el enunciado tal que*

$$\frac{\sigma(w)}{w} = \frac{m+n}{\sigma(m)} = \frac{248}{135}.$$

El número $w = 3^3 \cdot 5^2$ *cumple lo pedido. Entonces se sigue que el par*

$$(wm, wn) = 3^3 \cdot 5^2 \begin{cases} 11 \cdot 13 \cdot 431 \cdot 719 \\ 127 \cdot 503 \cdot 809 \end{cases} \quad \text{Moews\&Moews 1992}$$

es de números amigos. ■

5.1.5. Pares Criadores o Breeders

La revolución en el hallazgo de números amigos vino de la mano de este concepto que pasamos a explicar [21]:

Definición 5.21. *Un par de números enteros positivos* (a_1, a_2) *es llamado* ***breeder*** *o* ***criador*** *si la ecuación*

$$a_1 + a_2 x = \sigma(a_1) = \sigma(a_2)(x+1) \tag{5.14}$$

tiene una solución entera positiva x*.*

Ejemplo 46.

- *El par* $(2^2 \cdot 5 \cdot 11, 2^2)$ *es un par criador o breeder, con* $x = 71$*.*

- *El par* $(2^3 \cdot 11 \cdot 23, 2^3)$ *es un par criador breeder, con* $x = 287 = 7 \cdot 41$*.* ■

El concepto de "par criador" es la clave en los descubrimientos de nuevos números amigos que se están viviendo desde finales de 2015 y la razón de su importancia puede ser resumida en la siguiente proposición de demostración trivial.

Proposición 5.22. *Sea* (a_1, a_2) *un par breeder. Si* x *es un número primo que no divide a* a_2 *y es solución de la ecuación (*5.14*), entonces* $(a_1, a_2 x)$ *es un par de números amigos.*

De la definición de *breeder* se desprende que cualquier método por el cual podamos encontrar pares amigos del tipo $(i, 1)$ con $i \geq 1$ también puede ser utilizado para encontrar pares criadores, debido a la proposición anterior. Ilustrémoslo con un resultado ya visto: [21]

Ejemplo 47. *Véase el Método de Lee (Proposición* 5.15*), el cual se encarga de la búsqueda de números amigos de la forma*

$$(M, N) = (a_1 pq, a_2 r),$$

y tómese $a_1 = a_2$*. Es por ello que (*5.5*) se convierte en* $r = pq + p + q$*. Por tanto, para dos primos cualesquiera* p *y* q *tales que no dividan a* a_1 *y satisfagan la Proposición* 5.22*, se tiene el par criador* $(a_1 pq, a_1)$*, y si* r *es primo entonces se obtiene los números amigos* $(a_1 pq, a_1 r)$*. Por ejemplo, atendiendo al par criador* $(2^2 \cdot 5 \cdot 11, 2^2)$ *del Ejemplo* 46 *y tomando* $r = 71$ *que es un número primo, se obtienen los números amigos* $(220, 284)$*.* ■

Sustituyendo el concepto de par de números amigos (au, ap) por el de breeder (au, a) en la *Regla de te Riele* (*Teorema* 5.17), se obtiene una regla más general que la de su predecesor [21]:

Teorema 5.23 (Regla de Borho)**.** *Sea* (au, a) *un par criador, con solución entera* x *de la ecuación (*5.14*). Si existe un par de números primos distintos* r *y* s *con* $\text{m.c.d.}(a, rs) = 1$*, satisfaciendo que*

$$(r - x)(s - x) = (x+1)(x+u),$$

y si existe un primo q *con* $\text{m.c.d.}(au, q) = 1$ *tal que*

$$q = r + s + u,$$

entonces

$$(M, N) = (auq, ars)$$

es un par de amigos.

Ejemplo 48. *Atendiendo al par criador* $(2^3 \cdot 11 \cdot 23, 2^3)$ *del Ejemplo* 46 *donde* $a = 2^3$ *y* $r = 11 \cdot 23$, *se obtienen los siguientes números amigos:*

$$2^3 \begin{cases} 11 \cdot 23 \cdot 2543 \\ 383 \cdot 1907 \end{cases} \qquad 2^3 \begin{cases} 11 \cdot 23 \cdot 1871 \\ 467 \cdot 1151 \end{cases} \qquad 2^3 \begin{cases} 11 \cdot 23 \cdot 1619 \\ 647 \cdot 719 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Nota. *En numerosos textos el concepto de par "breeder" es reemplazado por el de "mother pair", lo cual permite denominar como "daughter pairs" a los nuevos pares generados. El concepto fue introducido por te Riele en* 1984. [21] [63]

Hasta la finalización de escritura de este trabajo, la *Regla de te Riele* (*Teorema* 5.17) junto con la implementación de los *breeders* aportada por Borho (*Teorema* 5.23) han sido la clave para el hallazgo de más del 99 % de los números amigos.

5.2. Búsqueda en el siglo XXI

En siglo XXI se han seguido produciendo avances en lo que corresponde a la relación entre números amigos y pares criadores.

Teorema 5.24 (Battiato y Borho [3]). *Sean* a_1 *y* a_2 *números enteros positivos. Si*

$$\sigma(a_1)(r_1 + 1) = a_1 r_1 + a_2 r_2 = \sigma(a_2)(r_2 + 1)$$

tiene una solución de enteros positivos r_1 *y* r_2, *y* m.c.d.$(a_1, r_1) =$ m.c.d.$(a_2, r_2) = 1$, *entonces*

$$(M, N) = (a_1 r_1, a_2 r_2)$$

es un par de amigos.

García encontró los primeros números amigos del tipo $(7, 1)$ [20]:

$$2 \cdot 5^2 \cdot 19 \begin{cases} p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \cdot p_7 \\ q \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} p_1 = 23 \\ p_2 = 2203 \\ p_3 = 256661 \\ p_4 = 20053673 \\ p_5 = 872652329 \\ p_6 = 22758173093782011993424 8943 \\ p_7 = 21770183790784057637925637670267261120565039600 79 \\ q = (p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1)(p_4 + 1)(p_5 + 1)(p_6 + 1)(p_7 + 1) - 1 \end{cases}.$$

Utilizando este par como *breeder*, y haciendo uso del siguiente *Teorema* 5.25 de te Riele, García obtuvo 122444006400 casos posibles. El cálculo de todos ellos llevó años. La muestra de que el método sí funcionaba fue el temprano hallazgo de números amigos, no todos nuevos, del tipo $(8, 2)$ de la forma

$$2 \cdot 5^2 \cdot 19 \begin{cases} p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \cdot p_7 \cdot p_8 \\ q_1 \cdot q_2 \end{cases}.$$

Para hacerse una idea del tamaño de estos números, los factores de uno de los pares obtenidos son q_1, un número primo de 102 dígitos, y p_8 y q_2 primos de 125 cifras cada uno. [20][64]

Teorema 5.25. *Sean m, n números enteros positivos tales que*

$$\sigma(m)\sigma(n) = n(m + \sigma(m) - 1)$$

y m.c.d.$(m, n) = 1$. *Si*

$$\begin{cases} p \\ q \\ r = \sigma(m)(p+1)(q+1) - 1 \end{cases}$$

son primos tales que no dividen ni a m ni a n, y tal que satisfacen la ecuación

$$(p - m + 1)(q - m + 1) = m(m - 1) + 1,$$

entonces

$$(M, N) = (mnpq, nr)$$

es un par de amigos. [64]

Sergei Chernykh

Hasta el año 2015 se conocían algo más de diez millones de pares. En Octubre de ese mismo año se puso en marcha la web de Sergei Chernykh [12]. Haciendo uso de un nuevo método, del que aún no se conocen muchos detalles, los resultados fueron rápidamente visibles:

- Más de un millón de pares de números amigos al día.
- (14 de Octubre, 2015) Hallados los menores números amigos con menor ratio M/N encontrado:

  $$(523445399739689350, 865023542517044858) = 2 \cdot 31 \cdot 37 \begin{cases} 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 73 \cdot 191 \cdot 500083 \\ 107 \cdot 63487 \cdot 55509323 \end{cases}$$

  El ratio es $\simeq 0{,}60512272$, y el anterior era $\simeq 0{,}6468$ para el par $(35049418250, 54192685558)$.
- (30 de Octubre, 2015) Primer par de números amigos del tipo $(10, x)$ encontrado:

  $$(5963619754366409564, 7853966263527990436) = 2^2 \begin{cases} 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47 \cdot 67 \cdot 79 \cdot 149 \cdot 179 \cdot 191 \cdot 433 \\ 251 \cdot 1151 \cdot 2549 \cdot 15359 \cdot 173599 \end{cases}$$

- (30 de Enero, 2016) Primeros números amigos hallados donde el menor factor primo de cada miembro es distinto. Ver *Sección* 5.3.2.
- (7 de Marzo, 2016) Primer par de números amigos del tipo (8,1):

  $$2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 59 \begin{cases} 71 \cdot 73 \cdot 1061 \cdot 3019 \cdot 4211 \cdot 65521001603 \cdot 48419418142730297421117557 \cdot 848771104211962639157584 93 \\ 1938093469849255527271721180036461246815895464743552327480323470992363397119 \end{cases}$$

  Los hallazgos de pares de un nuevo tipo $(x, 1)$ son exponencialmente más difíciles cada vez. Habían pasado 15 años desde que García hallase el primer par del tipo (7,1).
- (11 de Abril, 2016) Alcanzados mil millones de pares de números amigos conocidos.

El método de Sergei Chernykh se basa en la obtención de nuevos *breeders* de manera recursiva, es decir, trabajar con pares criadores ya conocidos para crear *daughter breeders, grandaughter breders*, ..., e ir formando una base de datos con todos ellos. De igual modo, utiliza la mayoría de resultados que hemos explicado a lo largo del capítulo, así como distintas versiones de estos. En ocasiones su programa hace uso de conjeturas que, pese a no haber sido demostradas aún, sí que generan los resultados deseados (téngase en cuenta que los falsos nuevos pares obtenidos son fácilmente desechados comprobando la propia definición de números amigos). En su web [12] se aporta una breve descripción del método de búsqueda del cual, como afirma en el correo que se adjunta a continuación, prevee publicar un artículo en los próximos meses.

Correo de Sergei Chernykh

Motivado por sus recientes hallazgos, me decidí a consultar a Sergei Chernykh en relación con su trabajo. El descubridor tuvo a bien dedicarme unas palabras:

> Hello Diego,
>
> Yes, I think there are infinitely many amicable numbers. Moreover, I think I found a good estimate for $A(x)$ - the number of amicable pairs with smaller member $\leq x$:
>
> $$A(x) = x^{1/(3+e(x))} \qquad \text{where } e(x) \to 0 \text{ as } x \to \infty.$$
>
> So $A(x)$ is roughly a cubic root of x for sufficiently large x. I have no proof, so it's only a conjecture, but it aligns very good with known values for $A(x)$: http://mersenneforum.org/showpost.ph...9&postcount=26
>
> I'll try to finish the search for amicable pairs up to 10^{18} this year. As for total amount of known amicable numbers, I'm sure it'll be over 1 billion in a few months. Breeding methods are very effective for generating new pairs.
>
> I'll also write an article describing how I found the first type $(8,1)$ pair and lots of other type $(i,1)$ pairs, since the methods I used are quite interesting and effective. I have no ETA for this article, it'll be published when I have enough time to write it.
>
> 4-4-2016

El enlace que Sergei Chernykh me adjuntaba conducía al siguiente mensaje que el propio Chernykh había publicado el 11 de Septiembre de 2015:

> The search of amicable pairs up to 10^{17} is almost finished (currently searching largest prime factors near 10^{11}). Now that I have more data than ever, I've tried to find a good approximation for $A(x)$ - the number of amicable pairs with smaller member $\leq x$. I know $A(x)$ for $x \leq 10^{16}$ and a very accurate estimate for $x = 10^{17}$ based on pairs I found so far and

```
pairs known before.

It can be clearly seen from the table below that
```

$$A(x) = x^{1/(3+e(x))} \quad \texttt{where } e(x) \to 0 \texttt{ as } x \to \infty.$$

`So I tried` $f(x) = x^{1/(3+1/\ln(x))}$ `and it seems to be a very good approximation.`

```
Code:
```

x	$\ln(x)/\ln(A(x))$	$A(x)$	$f(x)$
10^4	5,722706232	5	19
10^5	4,488558588	13	41
10^6	3,696289926	42	89
10^7	3,442469864	108	193
10^8	3,371385028	236	416
10^9	3,251565357	586	896
10^{10}	3,170150901	1427	1930
10^{11}	3,121677483	3340	4159
10^{12}	3,090229261	7642	8960
10^{13}	3,063502173	17519	19302
10^{14}	3,046651059	39374	41582
10^{15}	3,036419958	87102	89579
10^{16}	3,030003782	190775	192979
10^{17}	3,025652216	$\sim$ 415550	415737

Como se observa en el correo, el 4 de Abril Sergei Chernykh escribió:

> *"Serán* 1.000.000.000 *(1 billón en léxico anglosajón) en unos pocos meses".*

El 11 de Abril la cifra fue alcanzada, superando las previsiones del propio descubridor.

5.3. En Busca de Números Amigos Especiales

La búsqueda de números amigos no solo se ha centrado en la ampliación de la colección de pares conocidos. Otros estudios han intentado hallar pares con alguna característica singular. He aquí una breve descripción de aquellas clases más estudiadas y de sus respectivos avances en el tema.

5.3.1. Números Amigos No Divisibles por 3

Durante mucho tiempo su existencia tuvo un sitio reservado entre los problemas sin resolver de la teoría de números. El misterio llegó a su fin en 1988 de la mano de S. Battiato y W. Borho [2], quienes presentaron una lista de 15 pares de amigos de este tipo donde los factores comunes de todos ellos eran $a = 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 61^2 \cdot 97 \cdot 307$:

$$\begin{cases} a \cdot 140453 \cdot 85857199 \\ a \cdot 56099 \cdot 214955207 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 40459 \cdot 4075499 \cdot 11247066371 \\ a \cdot 6398629999 \cdot 289840477211 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 40063 \cdot 1083014405858114729 \\ a \cdot 759883871 \cdot 57100684400759 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 40459 \cdot 4071703 \cdot 347952801041 \\ a \cdot 62791913183 \cdot 912890522669 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 40127 \cdot 24316459 \cdot 8637336284693 \\ a \cdot 894223226623 \cdot 9425008441529 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 40127 \cdot 24316459 \cdot 131473538420639 \\ a \cdot 753760237567 \cdot 170197428069899 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 40459 \cdot 79670932151 \cdot 785235094643 \\ a \cdot 4071703 \cdot 621654783217660851119 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 40127 \cdot 456864935591 \cdot 2947460281395319 \\ a \cdot 24317567 \cdot 2222097774949919253614239 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 40127 \cdot 24315667 \cdot 4668800173953586602539 \\ a \cdot 1410559270197839 \cdot 3229592045605749823 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 40169 \cdot 43850540160157971076585196343983 \\ a \cdot 14887001 \cdot 132233805923 \cdot 894802182277066859 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 52937 \cdot 2215291513690331 \cdot 134965225980517047468079 \\ a \cdot 164729 \cdot 1222569893 \cdot 78591197135018911142345778143 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 52937 \cdot 2215291479910079 \cdot 1901293905067632711472171 \\ a \cdot 164729 \cdot 1222569893 \cdot 1107136751268199952431099377023 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 48619 \cdot 1932038626331293043 \cdot 101457516345910172512469 \\ a \cdot 227597 \cdot 1787122884689 \cdot 23431070376718989407107294679 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 40697 \cdot 7837685559226301 \cdot 302073366913892362707570079 \\ a \cdot 2565569 \cdot 2695609487 \cdot 13932610455428808648764074706747 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 48619 \cdot 290822832708589621439 \cdot 14139515710202352254726567 \\ a \cdot 227597 \cdot 1787121242591 \cdot 491536226488477432136736101354399 \end{cases}$$

5.3.2. Números Amigos con Menor Factor Primo Distinto

El descubrimiento de pares de este tipo es muy reciente. El 30 de enero de 2016 Sergei Chernykh dio a conocer un total de siete ejemplos de ello (Ver *Página* 102).

$$(445953248528881275, 659008669204392325) = 5^2{\cdot}7{\cdot}13{\cdot}19{\cdot}37{\cdot}73 \begin{cases} 3^2{\cdot}43{\cdot}439{\cdot}22483 \\ 571{\cdot}1693{\cdot}5839 \end{cases}$$

$$(1097581690986390225, 1615281291559017775) = 5^2{\cdot}7^3{\cdot}11^2{\cdot}31 \begin{cases} 3^3{\cdot}61{\cdot}4507{\cdot}4597 \\ 43{\cdot}2851{\cdot}409639 \end{cases}$$

$$(1281431098689616875, 1769164614201263125) = 5^4{\cdot}7{\cdot}11^2{\cdot}19 \begin{cases} 3{\cdot}13{\cdot}373{\cdot}2503{\cdot}3499 \\ 31{\cdot}97{\cdot}1699{\cdot}34429 \end{cases}$$

$$(1993991197249826775, 2901232579265245225) = 5^2{\cdot}7{\cdot}11^2{\cdot}13{\cdot}307 \begin{cases} 3^2{\cdot}109{\cdot}1567{\cdot}15349 \\ 439{\cdot}4297{\cdot}18199 \end{cases}$$

$$(4438032132485808675, 6288132595256655325) = 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 43 \begin{cases} 3^2 \cdot 61 \cdot 1291 \cdot 42139 \\ 37 \cdot 103 \cdot 11103889 \end{cases}$$

$$(8265325617300085425, 12234092897366205775) = 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \begin{cases} 3^3 \cdot 151 \cdot 727 \cdot 937 \cdot 2221 \\ 109 \cdot 1567 \cdot 1741 \cdot 30703 \end{cases}$$

$$(9759636606249354825, 14162430025984014775) = 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \begin{cases} 3^2 \cdot 139 \cdot 241 \cdot 6967 \cdot 16879 \\ 223 \cdot 439 \cdot 7369 \cdot 71317 \end{cases}$$

5.3.3. Números Amigos Relativamente Primos

Inspeccionando la lista de pares de amigos conocidos [12] uno puede darse cuenta de que todos tienen, al menos, un divisor común mayor que 1. Y es que su existencia resulta ser una incógnita.

Teorema 5.26. *Si (M, N) es un par de números amigos relativamente primos, entonces MN tiene más de 20 factores primos.*[40]

Teorema 5.27. *Si (M, N) es un par de números amigos relativamente primos, entonces $M > 10^{33}$ y $M > 10^{33}$.* [31]

Lo que resulta seguro es que haciendo uso de los métodos como los de Thabit, Euler, métodos constructivos o derivados, ningún par de miembros relativamente primos podrá ser encontrado debido a la naturaleza del algoritmo y su forma de construir nuevos pares.

5.3.4. Números Amigos de Paridad Opuesta

Al igual que el caso anterior, todavía no se conoce ningún par de amigos de paridad opuesta, es decir, aquel en el que uno de sus miembros sea par y el otro impar.

Teorema 5.28. *Si existe un par de números amigos de paridad opuesta, entonces el miembro impar es un cuadrado y el miembro par es el producto de una potencia de 2 por un número cuadrado impar.* [15]

En lo concerniente a pares amigos (M, N) relativamente primos y de paridad opuesta:

Teorema 5.29. *Si (M, N) es un par de números amigos relativamente primos de paridad opuesta, entonces $MN > 10^{121}$.* [21] [30]

Corolario 5.30. *Si (M, N) es un par de números amigos relativamente primos de paridad opuesta, entonces $M > 10^{60}$ y $N > 10^{60}$.* [21] [30]

Capítulo 6

Problemas Abiertos

¿Hay infinitos números perfectos pares?

Es una de las incógnitas más antiguas de las matemáticas. De la mano del *Teorema de Euclides-Euler* (3.12) podemos enunciar una pregunta análoga:

¿Hay infinitos números de Mersenne?

Richard K. Guy, así como la mayor parte de la comunidad matemática, afirma sin ningún tipo de duda la infinitud de la cantidad de números de Mersenne [28]. Sin embargo, lo cierto es que aún resulta ser un problema sin solución.

¿Existe algún número perfecto impar?

He aquí el misterio más antiguo de las matemáticas. Sylvester ya lo retrató como

> *"un problema comparable en dificultad a las labores de Hermite y Lindemann relacionadas con el tema de la cuadratura del círculo"* [16].

A lo largo de este trabajo hemos presentado tres posibles planteamientos distintos para abordarlo: su relación con los números de Ore (3.4.1), su relación con los números 3-perfectos (4.3.2) y un problema abierto más general que lo engloba, la existencia de números multiperfectos impares:

¿Existe algún número multiperfecto impar?

Se ha abordado el tema en la *Sección* 4.5.

¿Existen números k-perfectos para cualquier k?

Dicho de otra forma, ¿Puede ser k tan grande como queramos? En su tiempo, Paul Erdős conjeturó que $k = o(\log\log n)$ cuando $n \to \infty$. [28]. Esta suposición conduce a otra pregunta:

¿Hay infinitos números multiperfectos?

Se conjetura que para cada $k > 2$ exista, a lo más, un número finito de números k-perfectos [28] y que, de hecho, se hayan encontrado todos los existentes para $k = 3, 4, 5, 6, 7$, pero nada se ha probado a ciencia cierta. Aún así, resaltemos las dos principales preguntas que por su edad merecen un hueco destacado en esta sección:

¿Existen solo seis números 3-perfectos?

De entre todos los tipos de números k-perfectos, destacan aquellos de multiplicidad 3. Resulta más remarcable aún si, teniendo en cuenta su aparente simplicidad, se piensa que solo se conocen seis, y que fue en 1643 cuando Fermat descubrió el último de ellos. Con todo ello, y a falta de respuesta alguna, muchos matemáticos conjeturan que no se encontrarán más.

Recordemos que, de existir únicamente dichos seis 3-perfectos, la *Sección* 4.3.2 constituiría la negación de la existencia de números perfectos impares.

¿Existen solo treinta y seis números 4-perfectos?

Se cree que se descubrieron todos hace 100 años, pero la respuesta acaba aquí, en una mera creencia.

¿Existen números multiperfectos planos por descubrir?

¿Existen números k-perfectos planos con $k > 4$? ¿Todo número 3-perfecto es plano?

¿Hay infinitos números amigos?

A falta de un demostración que aporte luz al asunto, los hallazgos de Sergei Chernykh incitan a pensar que la respuesta es afirmativa.

¿Existe algún par de números amigos relativamente primos?

Ver *Sección* 5.3.3.

¿Existe algún par de números amigos de paridad opuesta?

Ver *Sección* 5.3.4.

Apéndice A

Miscelánea Histórica

A.1. Números Perfectos

No se conoce con certeza cuándo fueron descubiertos por primera vez los números perfectos, aunque se piensa que pudieron ser conocidos por los egipcios o incluso antes. Lo cierto es que estos números empezaron a cobrar interés en la Antigua Grecia de Pitágoras y sus discípulos. Así pues, los Pitagóricos encontraban fascinantes cualidades en el número 6, más por sus tintes místicos y numerológicos que por su significado matemático, al ser el primer número igual a la suma de sus divisores propios,

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

El siguiente número de estas características es el 28. Ambos tienen un arraigado significado teológico, pues así como el Dios cristiano creó el mundo en 6 días, 28 es la duración del ciclo lunar. Respecto a esto, el místico San Agustín recoge lo siguiente en su libro *La Ciudad de Dios*, 426 d.C.

> *"6 es un número perfecto en sí mismo, y no porque Dios crease todo en 6 días; más bien el recíproco es cierto. Dios creó todo en 6 días porque el número es perfecto..."*

La perfección del número 6 significa, por tanto, la perfección de la creación.

Las primeras definiciones de un número perfecto utilizaban el término, ya en desuso, de partes alícuotas:

Un número perfecto es aquel que es igual a la suma de sus partes alícuotas.

Los Pitagóricos siguieron interesándose en las propiedades ocultas de los números perfectos, pero pasaron siglos hasta que, alrededor del 330 a.C., viese la luz el primer resultado real sobre estos números, escrito por Euclides en su libro *Los Elementos, Libro IX Teorema* 36, el cual enuncia:

> "Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su total resulte primo, y el total multiplicado por el último produce algún número, el producto será perfecto."

No será hasta el siglo XVIII cuando Euler pruebe la implicación recíproca, dando lugar al teorema de doble implicación con mayor intervalo de tiempo entre la demostración de ambas.

Los antiguos no solo pusieron sus ojos en los números perfectos, sino que todo el espectro de los números naturales fue clasificado. Nicómaco de Gerasa en su *Introductio Arithmetica*, sobre el año 100 d.C., fue el primero en realizar tal clasificación en abundantes, perfectos y deficientes.

Definición A.1. *Sea n un número entero positivo.*

- *Se dice que n es un* ***número abundante*** *si*

$$\sigma(n) > 2n.$$

- *Se dice que n es un* ***número deficiente*** *si*

$$\sigma(n) < 2n.$$

Ejemplo 49.

4 *es un número deficiente:*	$\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7 < 2 \cdot 4$
12 *es un número abundante:*	$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 > 2 \cdot 12$ ■

El libro de Nicómaco posee un cierto enfoque místico pues, apoyándose en ideas teóricas de Pitágoras, aporta a los números propiedades morales, físicas, ..., y los dota de vida como si de seres se tratase, definiendo así la propia esencia del número:

> *"En el caso de lo demasiado, se produce exceso, lo superfluo, exageraciones y abusos; en el caso de lo muy poco, se produce querencia, incumplimientos, privaciones e insuficiencias. Y en el caso de aquellos que se encuentran entre el exceso y la deficiencia, es decir, en la igualdad, la virtud se produce, justa medida, el decoro, la belleza y cosas de ese tipo - de los cuales el mejor ejemplo es el tipo de número que se llama perfecto."*

Refiriéndose a los números abundantes, y asemejándolos a un animal, escribe:

> *" ... con diez bocas, o nueve labios y provistos de tres líneas de dientes; o con un centenar de brazos, o tener demasiados dedos en una de sus manos ... "*

Y respecto a los números deficientes:

> *" ... con un solo ojo, ... de un brazo, o que una de sus manos tuviera menos de cinco dedos, o si no tuviese lengua ... "*

Nicómaco también presentó en su libro cinco conjeturas, muchas de las cuales fueron tomadas como ciertas por multitud de matemáticos más de mil quinientos años después [16]:

Conjetura A.2 (de Nicómaco).

(a). El n-ésimo número perfecto tiene n dígitos.

(b). Todos los números perfectos terminan en 6 *u* 8 *alternativamente.*

(c). Todos los números perfectos son pares.

(d). El Algortimo de Euclides genera todos los números perfectos.

(e). Existen infinitos números perfectos.

Hay que pensar que Nicómaco realizó dichas hipótesis con la sola constancia de cuatros números perfectos: 6, 28, 496 y 8128. El resultado de sus conjeturas fue el siguiente:

(a). La primera conjetura es falsa. El quinto número perfecto, 33550336, posee un total de ocho dígitos. Aún así, la hipótesis tuvo que esperar hasta 1456 para ser refutada, fecha del descubrimiento de dicho número.

(b). Parcialmente verdad. Es cierto que todos los números perfectos pares acaban en 6 u 8 en base 10, como hemos demostrado en el *Teorema* 3.13. No obstante, resulta falso que esto ocurra de forma alternativa: el sexto número perfecto es el 8589869056 y acabamos de ver que el quinto era 33550336.

(c). La tercera conjetura es uno de los problemas abiertos más antiguos de la humanidad, pues significaría la no existencia de números perfectos impares.

(d). De ser verdad la tercera conjetura, la cuarta sería también verdad, aunque se adelantó dieciocho siglos hasta que el *Teorema de Euclides-Euler* (*Teorema* 3.12) fue probado en su totalidad.

(e). Por último, nos topamos con otro problema aún sin resolver y que, de la mano del *Teorema de Euclides-Euler* (*Teorema* 3.12), implica la demostración de que existan infinitos primos de Mersenne.

Nicómaco, también introdujo una definición más sencilla de número perfecto:

Si la suma de las n primeras potencias de 2 *es un número primo, entonces el producto de la suma por la última potencia sumada es un número perfecto.*

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \cdot 2^4 = 31 \cdot 16 = 496$$
$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) \cdot 2^6 = 127 \cdot 64 = 2198$$

Alcuin de York (735-804), maestro de Carlomagno, observa un significado diferente en la terminación de los números perfectos. Así como el 6 representaba la creación de Dios y su divina perfección, el número 8, como las 8 personas que se salvaron en el Arca de Noé, representaba esa segunda creación, imperfecta en comparación con la primera, y argumentada por ser el 8 el primer número deficiente después del 6.

Así como el quinto número perfecto no tiene descubridor reconocido, el sexto y séptimo podemos atribuirlos a Pietro Antonio Cataldi en 1588, quien en su *Tratatto dei numeri perfetti* tabuló los factores de todos los números menores que 800, y con ello pudo probar que $2^{17}-1$ es primo. Dicho matemático, se atrevió a afirmar en su trabajo *Utriusque Arithmetices* que la ecuación

$$2^{p-1}(2^p-1)$$

proporcionaba números perfectos para los exponentes $p = 23, 29, 31, 37$. Fermat fue el encargado de demostrar que Cataldi se equivocaba para los casos $p = 23$ y 37, y Euler para $p = 29$, quien halló el octavo número perfecto dos siglos después del último descubrimiento de Cataldi. Es precisamente en el estudio de los números de Mersenne cuando Fermat descubre su *Pequeño teorema*.

Mersenne, en la introducción de su *Cogitata Physica Mathematica* conjetura que los números de la forma 2^n-1 son primos para los exponentes

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$$

y son números compuestos para el resto de casos $n < 257$. El primer error en la lista de Mersenne fue descubierto por Lucas en 1876, probando que $2^{127}-1$ es un número primo. Lucas utilizó un procedimiento que tiempo después, en 1930, Lehmer convertiría en algoritmo, siendo la base de toda búsqueda de primos de Mersenne en la actualidad, el *test de Lucas-Lehmer*.

El 31 de Octubre de 1903, Frank Nelson Cole debía presentar su trabajo *On the factorization of large numbers* en una reunión de la American Mathematical Society. Delante de la pizarra y sin articular palabra, calculó a mano 2^{67} y le restó 1. A continuación, al otro lado de la pizarra multiplicó $193707721 \cdot 761838257287$. Los resultados coincidían, y se sentó entre aplausos. Tras más de una hora de presentación en completo silencio, había demostrado que $2^{67}-1$ no era un número primo como se creía. Otro fallo de Mersenne en definitiva (se cree que este pudo ser un fallo de impresión, y que realmente Mersenne escribió 61, el cual sí que forma un primo de Mersenne).

El interés que suscita el hallazgo del número primo más largo hasta la fecha es una de las razones por las que los primos de Mersenne han tenido un peso notable en el mundo de las matemáticas. De hecho, desde el ya citado 1876, cuando Lucas determinó la primalidad de $2^{127}-1$ (descubriendo así su correspondiente número perfecto), el mayor número primo hasta la fecha siempre ha sido un primo de Mersenne, a excepción de un breve periodo entre Junio de 1951 y Enero de 1952, cuando Miller y Wheeler encontraron $k(2^{127}-1)+1$ para distintos valores de k, y más tarde $180(2^{127}-1)^2+1$. De igual modo Ferrier en 1952 encontró el primo $(2^{148}+1)/17$, para lo cual hizo uso de una calculadora mecánica. Es probablemente el mayor primo que jamás se encontrará sin hacer uso de un ordenador. Desde entonces, la tecnología ha ocupado el sitio que hasta ese momento estaba reservado a ingeniosos resultados y mentes matemáticas.

A.2. Números Multiperfectos

Los números k-perfectos nacieron hace cuatro siglos, siendo fruto del estudio de sus predecesores, los números perfectos. En 1557 Robert Recorde ya había clasificado al 120 como número abundante, al sumar sus divisores propios 240. Sin embargo, el estudio de los números multiperfectos comenzó en Francia en el siglo XVII. Este es el motivo por el que los números 3-perfectos fueron inicialmente denominados *"sous-double"*, puesto que todo P_3 es igual a la mitad de la suma de sus partes alícuotas. Por la misma razón los 4-perfectos fueron bautizados en un principio como *"sous-triple"*, los 5-perfectos *"sous-quadruple"*, ...

Como ya introdujimos en el *Capítulo* 4, el desarrollo de estos números se debe en gran medida al intenso y fluido carteo que mantuvieron René Descartes, Pierre de Fermat, Bernard Frenicle, Christiaan Huygens y Marin Mersenne a mediados del siglo XVII. El mérito que se puede atribuir a estos hombres lo es mucho más si se observan los ingeniosos métodos que utilizaron, y el enrevesado lenguaje con el que se transmitía. Así pues, Mersenne enunció que Fermat había encontrado el siguiente método "infalible" para hallar números 3-perfectos:

Teorema A.3 (Método de Fermat)**.** *Comenzando por la progresión geométrica* $2, 4, 8, \ldots$, *restándoles una unidad y colocando los restos encima de la fila formada. Sumándoles una unidad y colocándolos bajo la fila formada. Si el cociente del* $(n+3)$*-ésimo número de la fila superior entre el n-ésimo número de la fila inferior es un número primo, entonces su triple multiplicado por el* $(n+2)$*-ésimo número de la fila central es un número* 3*-perfecto.* [16]

Ejemplo 50. *Ilustremos el método de Fermat:*

n	1	2	3	4	5	6	...
2^n-1	1	3	7	$15^{\diamondsuit}$	31	$63^{\triangle}$	...
2^n	2	4	8	16	32	64	...
2^n+1	$3^{\diamondsuit}$	5	$9^{\triangle}$	17	33	65	...

- $\diamondsuit$ $n=1$: $\dfrac{15}{3} = 5$ *es primo, luego* $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120 = P_3^{(1)}$ *es un número* 3*-perfecto.*
- $\bullet$ $n=2$: $\dfrac{31}{5}$ *no es primo.*
- $\triangle$ $n=3$: $\dfrac{63}{9} = 7$ *es primo, luego* $3 \cdot 7 \cdot 32 = 672 = P_3^{(2)}$ *es un número* 3*-perfecto.* ∎

El método, en un lenguaje más matemático, se puede traducir en:

Teorema A.4. *Si*

$$p = \frac{2^{n+3}-1}{2^n+1}$$

es un número primo, con n un número natural, entonces $3 \cdot 2^{n+2}p$ *es un número* 3*-perfecto.*

Tiempo más tarde, Descartes denunció que la regla Fermat no permitía encontrar otros números 3-perfectos más allá de 120 y 672, y acusó a Fermat de haber acomodado el método a esos dos números, los cuales previamente habría descubierto por tanteo.

Fruto de aquellas misivas, aquel grupo de matemáticos encontró en el siglo XVII multitud de números multiperfectos de un tamaño asombroso para la época. Sirva de ejemplo Mersenne, quien descubrió en 1643 el que fue durante siglos el número más grande con una propiedad conocida,

$P_6^{(168)} = 2^{36} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 83 \cdot 223 \cdot 331 \cdot 379 \cdot 601 \cdot 757 \cdot 1201 \cdot 7019 \cdot 112303 \cdot 898423 \cdot 616318177.$

Sin duda alguna, esas cartas sentaron las bases del estudio de los números multiperfectos.

A.3. Números Amigos

La historia de los números amigos se remonta milenios atrás. Ya los pitagóricos tenían conocimiento del par (220,284) al que, cómo no, atribuían propiedades místicas. Iamblichus narra lo siguiente:

> *"... aportando cualidades sociales a los números, como* 284 *y* 220*, para los que las partes de cada uno tienen el poder de generar al otro, de acuerdo a una regla de amistad, como Pitágoras afirmó. Cuando preguntamos qué es un amigo, la respuesta es: otro yo."* [16]

El interés por estos números es de tradición árabe. Alrededor del año 850 Thabit ibn Qurra enunció su *Teorema* 5.8 para generar pares amigos y, junto con ello, el par (17296,18416). El término utilizado para los números amigos fue *"se invicem amantes"*. Dicho par será descubierto de manera independiente en 1636 por Fermat, motivo por el cual comparten autoría. De igual modo al-Farisi, famoso matemático persa, dio en el siglo XIII una prueba del teorema de Thabit, así como el par antes mencionado. La última aportación árabe fue el par (9363584,9437056) de Baqir Yazdi en el siglo XVI casi un siglo antes de que Descartes, firme competidor de Fermat, volviese a dar con el par mencionado otra vez de manera independiente.

El grupo de Descartes, Fermat y Mersenne también trató el tema de los números amigos en sus constantes misivas y, al igual que sucedía con los números multiperfectos, no todos sus resultados tenían un lenguaje excesivamente inteligible. Como ejemplo, una regla general que Fermat comunicó haber descubierto a Mersenne, de las mismas características que el anterior *Teorema* A.3:

Teorema A.5. *Comenzando por la progresión geométrica* $2, 4, 8, \ldots$*, escribiendo el producto por* 3 *en la línea siguiente, y restándole* 1 *y poniéndolo en la fila superior. La última fila es* $6 \cdot 12 - 1$, $12 \cdot 24 - 1$, $\ldots$ *Cuando un número de la última fila es primo (como el* 71*), y el de su columna en la fila superior (el número* 11*) es primo, y el que lo precede (el* 5*) también, entonces* $71 \cdot 4 = 284$ *y* $5 \cdot 11 \cdot 4 = 220$ *son números amigos. Similarmente para* $111 \cdot 16 = 18416$ *y* $23 \cdot 47 \cdot 16 = 17296$*, y así hasta infinito.* [16]

Ejemplo 51. *Ilustremos el método de Fermat:*

n	1	2	3	4	...
$2^n \cdot 3 - 1$	$5^\diamondsuit$	$11^\diamondsuit$	$23^\vartriangle$	$47^\vartriangle$	...
2^n	2	4	8	16	...
$2^n \cdot 3$	6	12	24	48	...
$2^{2n-1} \cdot 9 - 1$		$71^\diamondsuit$	287	$1151^\vartriangle$	...

- ♢ $n = 1$: 71, 11 *y* 5 *son primos, luego* $(220, 284) = (5 \cdot 11 \cdot 4, 71 \cdot 4)$ *son números amigos.*
- • $n = 2$: 287 *no es un número primo.*
- △ $n = 3$: 1151, 47 *y* 23 *son primos, luego* $(17296, 18416) = (23 \cdot 47 \cdot 16, 711151 \cdot 416)$ *son números amigos.* ■

Descartes dio otra regla, una vez más contraponiéndose al resultado de Fermat:

Teorema A.6. *Si tomamos una potencia de* 2 *tal que su cubo menos* 1*,* 6 *veces el número menos* 1*, y* 18 *veces el cuadrado del número menos* 1 *son todos primos, entonces el producto del último primo por la potencia de* 2 *es un miembro del par de números amigos.*

Poco tiempo después, Descartes se dio cuenta de que Fermat y él habían dado exactamente con la misma regla. Sin embargo, no tuvieron constancia del hecho de que Thabit ibn Qurra hubiese propuesto el mismo resultado ochocientos años antes, el *Teorema* 5.8.

Hasta la llegada de Euler a esta materia en el siglo XVIII, solo eran conocidos tres pares de números amigos: (220,284), (17296,18416) y (9363584,9437056). Euler aportó numerosos resultados a la causa y un total de cincuenta y nueve nuevos pares.

La estrategia de Euler

Euler llevó a cabo el hallazgo de sus nuevos pares aplicando el siguiente razonamiento: Supongamos que $(M, N) = (apq, ar)$ es un par de números amigos, donde p, q y r son primos diferentes, relativamente primos con a. Puesto que se cumple la igualdad

$$\sigma(M) = \sigma(apq) = \sigma(ar) = \sigma(N)$$

y, atendiendo a la propiedad multiplicativa de la función σ, se tiene que

$$\sigma(p)\sigma(q) = \sigma(r),$$

es decir,

$$(p + 1)(q + 1) = r + 1$$

Denominemos $x = p + 1$ e $y = q + 1$. Podemos escribir la ecuación anterior de la forma

$$xy = r + 1.$$

Sustituyendo los valores de x e y en las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \sigma(M) &= M + N = a(pq + r) \\ \sigma(M) &= \sigma(a)(p + 1)(q + 1) \end{aligned}$$

obtenemos la igualdad

$$\sigma(a)xy = a[(x - 1)(y - 1) + (xy - 1)],$$

y operando se sigue que

$$\begin{aligned} \sigma(a)xy &= a[2xy - x - y] \\ ax &= [2ax - \sigma(a)x - a]y \end{aligned}$$

obteniendo la ecuación para y
$$y = \frac{ax}{[2a - \sigma(a)]x - a}.$$
Sean b y c los menores enteros positivos tal que se cumpla la igualdad
$$\frac{a}{2a - \sigma(a)} = \frac{b}{c}.$$
Con todo ello se tiene que
$$y = \frac{ax}{[\frac{ac}{b}]x - a} = \frac{bx}{cx - b}.$$
Multiplicando todo por c y restando b se obtiene
$$cy - b = c\left[\frac{bx}{cx - b}\right] - b = \frac{b^2}{cx - b},$$
es decir,
$$(cx - b)(cy - b) = b^2. \tag{A.1}$$
En resumen, estas son las bases para el procedimiento de Euler, el cual podría ser resumido en cuatro pasos:

(a). Tomar a.

(b). Encontrar b y c de la igualdad $\dfrac{a}{2a - \sigma(a)} = \dfrac{b}{c}$.

(c). A partir de la expresión (A.1), hallar x e y tales que $p = x - 1$, $q = y - 1$ y $r = xy - 1$ sean primos.

(d). $(M, N) = (apq, ar)$ son números amigos.

Ilustremos el método con un caso sencillo.

Ejemplo 52. *Tomando $a = 4$, se cumple que*
$$\frac{a}{2a - \sigma(a)} = \frac{4}{8 - 7} = \frac{4}{1}.$$
De esta manera, sabemos que $b = 4$, $c = 1$, y que $(x - 4)(y - 4) = 4^2 = 16$. En definitiva, necesitamos examinar las opciones de escribir 16 como producto de dos números $x - 4$ e $y - 4$. Es de ayuda utilizar la siguiente tabla:

$x-4$	$y-4$	x	y	$p = x-1$	$q = y-1$	$r = xy-1$
16	1	20	5	19	4	99
8	**2**	**12**	**6**	**11**	**5**	**71**
4	4	8	8	7	7	63

Únicamente la fila del medio aporta tres valores primos para p, q y r. El par de amigos que *resulta es*

$$M = apq = 4 \cdot 1 \cdot 5 = 220, \qquad y \qquad N = ar = 4 \cdot 71 = 284.$$

Este par ya era conocido por los antiguos griegos, pero Euler utilizó su método con otros valores distintos de a*, produciendo nuevos pares.*
Tomando $a = 585$*, se cumple que*

$$\frac{a}{2a - \sigma(a)} = \frac{585}{1170 - 1092} = \frac{15}{2}.$$

De esta manera, sabemos que $b = 15$*,* $c = 2$*, y* $(2x - 15)(2y - 15) = 15^2 = 225$*. En resumen, necesitamos examinar las opciones de expresar* 225 *como producto de dos números.*

$2x - 15$	$2y - 15$	x	y	$p = x - 1$	$q = y - 1$	$r = xy - 1$
225	1	120	8	119	7	959
75	3	45	9	44	8	404
45	5	30	10	29	9	299
25	**9**	**20**	**12**	**19**	**11**	**239**
15	15	15	15	14	14	224

Aplicando el método se obtiene el par

$$M = apq = 585 \cdot 19 \cdot 11 \qquad y \qquad N = ar = 585 \cdot 239$$

Otros valores de cálculo pueden ser $a = 819, a = 5733, \ldots$ [16] ■

Sin duda, la anécdota más remarcable en la historia de los números amigos fue la acontecida en 1860 con el descubrimiento del segundo menor par de amigos (1184, 1210). Tras la larga lista de ilustres matemáticos que habían empleado su tiempo en estos números, todos habían obviado la segunda menor pareja, y tuvo que ser un estudiante de 16 años llamado Nicolò I. Paganini (no confundir con el famoso violinista y compositor de Génova) quien diese con él. Paganini jamás dio indicación alguna de su descubrimiento. [16]

Bibliografía

[1] E. Bach, J. Shallit, *Algorithmic Number Theory: Efficient algorithms, Volume 1*, 1996.

[2] S. Battiato, W. Borho, *Are there Odd Amicable Numbers not Divisible by Three?*, Mathematics of Computation 50: 633-637, 1988.

[3] S. Battiato, W. Borho, *Breeding amicable numbers in abundance II*, Mathematics of Computation 70(235): 1329-1333, 2001.

[4] W. Borho, *On Thabit ibn Kurrah's formula for amicable numbers*, Mathematics of Computation 26: 571-578, 1972.

[5] W. Borho, H. Hoffmann, *Breeding Amicable Numbers in Abundance*, Mathematics of Computation 46(173): 281-293, 1986.

[6] K. A. Broughan, , Q. Zhou, *Odd multiperfect numbers of abundancy* 4, Journal of Number Theory 128(6): 1566-1575, 2008.

[7] R. D. Carmichael, *Multiply perfect numbers of three different primes*, Annals of Mathematics 8(1): 49-56, 1906.

[8] R. D. Carmichael, T. E. Mason, *Note on Multiply Perfect Numbers, Including a Table of* 204 *New Ones and the* 47 *Others Previously Published*, Proceedings of the Indiana Academy of Science 21: 257-270, 1911.

[9] G. Caveney, J.-L. Nicolas, J. Sondow, *On SA, CA, and GA numbers*, The Ramanujan Journal 29(1): 359-384, 2012.

[10] G. Caveney, J.L. Nicolas, J. Sondow, *Robin's theorem, primes, and a new elementary reformulation of the Riemann hypothesis*, Integers 11 A33, 2011.

[11] Y. G. Chen, C. E. Tang, *Improved upper bounds for odd multiperfect numbers*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 89(3): 353-359, 2014.

[12] S. Chernykh, *Amicable pairs website*, http://sech.me/ap/index.html

[13] Y.-J. Choie, N. Lichiardopol, P. Moree, P. Sole, *On Robin's criterion for the Riemann Hypothesis*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 19: 351-366, 2007.

[14] G. L. Cohen, P. Hagis, *Results concerning odd multiperfect numbers*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Society 8(1): 23-26, 1985.

[15] G. D'Abramo, *On Amicable Numbers With Different Parity*, http://arxiv.org/abs/math/0501402v4, 2005.

[16] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers, Volume I*, capítulos I y X, 1971.

[17] B. Farhi, *On the representation of an even perfect number as the sum of a limited number of cubes*, 2015.

[18] A. Flammenkamp, Multiperfect number web site, `http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/mpn.html`

[19] A. Flammenkamp, *Multiply perfect numbers less than a given N*, Bielefeld University, 2008.

[20] M. García, *The first known type* $(7,1)$ *amicable pair*, Mathematics of Computation 72: 939-940, 2003.

[21] M. García, J.M. Pedersen, H.J.J. te Riele, *Amicable pairs, a survey*, Centrum Wiskunde en Informatica, Report MAS-R0307, 2003.

[22] GIMPS Home Page, `www.mersenne.org`

[23] GIMPS Home Page, *List of Known Mersenne Prime Numbers*, `www.mersenne.org/primes/`

[24] GIMPS Home Page, *Mathematics and Research Strategy*, `www.mersenne.org/various/math.php`

[25] GIMPS Home Page, *Mersenne Prime Number discovery -* $2^{74207281}-1$ *is Prime!*, `http://www.mersenne.org/primes/?press=M74207281`

[26] T. Goto, Y. Ohno, *Odd perfect numbers have a prime factor exceeding* 10^8, Mathematics of Computation 77(263): 1859-1868, 2008.

[27] T. H. Gronwall, *Some asymptotic expressions in the theory of numbers*, Transactions of the American Mathematical Society 14: 113-122, 1913.

[28] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory, Volume I*, capítulos A y B, 1994.

[29] P. Hagis, *A new proof that every odd triperfect number has at least twelve prime factors*, Contemporary Mathematics 143: 445-450, 1993.

[30] P. Hagis, *Lower Bounds for Relatively Prime Amicable Numbers of Opposite Parity*, Mathematics of Computation 24(112): 963-968, 1970.

[31] P. Hagis, *On Relatively Prime Odd Amicable Numbers*, Mathematics of Computation 23(107): 539-543, 1969.

[32] P. Hagis, *The third largest prime factor of an odd multiperfect number exceeds* 100, Bulletin of the Malaysian Mathematical Society 9(2): 43-49, 1993.

[33] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, capítulos XVI y XVII, 1979.

[34] D. E. Ianucci, *The largest prime divisor of an odd triperfect number exceeds* 10^7, Private communication, 1999.

[35] D. E. Iannucci, *The second largest prime divisor of an odd perfect number exceeds ten thousand*, Mathematics of Computation 68(228): 1749-1760, 1999.

[36] D. E. Iannucci, *The third largest prime divisor of an odd perfect number exceeds one hundred*, Mathematics of Computation 69(230): 867-879. 2000.

[37] H.-J. Kanold, *Über befreundete Zahlen I*, Mathematische Nachrichten 9: 243-248, 1953.

[38] H.-J. Kanold, *Über befreundete Zahlen II*, Mathematische Nachrichten 10: 99-111, 1953.

[39] H. J. Kanold, *Über mehrfach vollkommene Zahlen II*, Journal für die reine und angewandte Mathematische 197(1): 82-96, 1957.

[40] H.-J. Kanold, *Untere Schranken für teilerfremde befreudete Zahlen* , Archiv der Mathematik 4(5): 399-401, 1953.

[41] M. Kishore, *Odd triperfect numbers are divisible by twelve distinct prime factors*, Journal of the Australian Mathematical Society 42: 173-182, 1987.

[42] U. Khnel, *Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen*, Mathematische Zeitschrift 52: 201-211, 1949.

[43] D. N. Lehmer, *Multiply Perfect Numbers*, The Annals of Mathematics, Second Series 2(1/4): 103-104, 1900-1901.

[44] W.J. LeVeque, *Topics in Number Theory, Volume I*, capítulo 6, 1965.

[45] *List of distributed computing projects* `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_distributed_computing_projects&oldid=700591107`

[46] *List of perfect numbers* `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_perfect_numbers`

[47] P. J. McCarthy, *Note on perfect and multiply perfect numbers*, Portugaliae mathematica 16: 19-21, 1957.

[48] National Institute of Standards and Technology (NIST), *FIPS PUB* 186-4*: Digital Signature Standard (DSS)*, 2013.

[49] J.-L. Nicolas, J. Sondow, *Ramanujan, Robin, Highly Composite Numbers, and the Riemann Hypothesis*, Contemporary Mathematics 627: 145-156, 2014.

[50] P. P. Nielsen, *An upper bound for odd perfect numbers*, Integers 3: A14-A22, 2003.

[51] P. P. Nielsen, *Odd perfect numbers have at least nine distinct prime factors*, Mathematics of Computation 76(260): 2109-2126, 2007.

[52] P. Ocheml, M. Rao, *Odd perfect numbers are greater than* 10^{1500}, Mathematics of Computation 81: 1869-1877, 2012.

[53] O. Ore, *On the averages of the divisors of a number*, The American Mathematical Monthly 55, 615-619, 1948.

[54] S. Ramanujan, *Highly composite numbers, annotated and with a foreword by J.-L. Nicolas and G. Robin*, The Ramanujan Journal 1: 119-153, 1997.

[55] H. J. J. te Riele, *New very large amicable pairs*, Lecture Notes in Mathematics 1068: 210-215, 1983.

[56] H. J. J. te Riele, *On Generating New Amicable Pairs from Given Amicable Pairs*, Mathematics of Computation 42: 219-223, 1984.

[57] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, 1859.

[58] T. Roberts, *On the Form of an Odd Perfect Number*, Australian Mathematical Gazette 35(4): 244, 2008.

[59] G. Robin, *Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothse de Riemann*, Journal de Mathmatiques Pures et Appliques, Neuvime Srie 63(2): 187-213, 1984

[60] R. Sivaramakrishnan, *Classical Theory of Arithmetic Functions*, 1989.

[61] R. M. Sorli, *Algorithms in the study of multiperfect and odd perfect numbers*, doctoral dissertation, University of Technology Sydney, 2003.

[62] E. W. Weisstein, *Divisor Function*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/DivisorFunction.html`

[63] S. Y. Yan, *Perfect, Amicable and Sociable Numbers*, 1996.

[64] S.Y. Yan, T.H. Jackson, 2500 *Years in the Search for Amicable Numbers*, Advances in Mathematics (China) 33(4): 385-400, 2004.

[65] S.Y. Yan, T.H. Jackson, *A new large amicable pair*, Computers and Mathematics with Applications 27(6): 1-3, 1994.

[66] Q. Zhou, *Multiply perfect numbers of low abundancy*, doctoral dissertations, University of Waikato, 2010.