Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Grado en Economía

La génesis histórica de la Teoría de la Utilidad Esperada

Presentado por:

Sergio Martín García

Tutelado por:

Carlos Pérez Domínguez

Valladolid, 4 de Abril de 2016

Índice

1. Introducción.

Los seres humanos nos vemos forzados a tomar constantemente decisiones que conllevan riesgo. En estas situaciones, los individuos tratamos de analizar las posibilidades de las alternativas posibles para, posteriormente, seleccionar aquellas que esperamos que nos reporten más beneficio. Desde principios del siglo XVII ya se conocía matemáticamente la idea de probabilidad. No obstante, la introducción al estudio de las decisiones con incertidumbre no comenzó hasta aproximadamente un siglo después, a principios del siglo XVIII, y estuvo asociado a la polémica que surgió en torno a la conocida como Paradoja de San Petersburgo. Algunos autores de la época, como Daniel Bernoulli y Gabriel Cramer, postularon la idea de Utilidad Esperada, que ha sido un aspecto fundamental en el tratamiento teórico del estudio de las elecciones con incertidumbre.

En este sentido, el objetivo central de este trabajo es efectuar una revisión histórica de la génesis, evolución y problemas que plantea la hipótesis de la Utilidad Esperada. Además, trataremos de conocer alguna teoría alternativa más elaborada como "*Prospect Theory*" (Teoría prospectiva).

Para ello, el trabajo se ha estructurado de la siguiente forma:

En el segundo punto del trabajo veremos cuál fue el origen de la utilidad esperada, la Paradoja de San Petersburgo. Estudiaremos de forma breve los antecedentes, el planteamiento formal y las soluciones más conocidas (las de Cramer y Bernoulli) de esta paradoja.

En el tercer punto, se analiza el enfoque axiomático que von Neumann y Morgenstern realizaron más de 200 años después de las aportaciones anteriores para esta teoría que, de cumplirse, darían validez al criterio de la utilidad esperada.

En el cuarto punto, basándonos en los axiomas que hemos expuesto previamente, estudiaremos el Teorema de la Utilidad Esperada y demostraremos su existencia. El objetivo de este teorema será corroborar la existencia de una función de utilidad que esté definida sobre premios finales que son cantidades ciertas y que permite ordenar las elecciones individuales en condiciones de riesgo o incertidumbre.

En el quinto punto, daremos cuenta de una serie de críticas realizadas al cumplimiento de los axiomas de la Teoría de la Utilidad Esperada descritos previamente. Podemos diferenciar tres niveles de críticas, las primeras son menos incisivas pero, las de los otros dos niveles restantes son de mayor calado.

Por último, en el sexto punto introduciremos la denominada "*Prospect Theory"*, una propuesta más reciente y global que muchos la consideran como una alternativa mejorada a la Teoría de la Utilidad Esperada.

2. La Paradoja de San Petersburgo.

2.1. Antecedentes.

Antes de hablar del problema formulado por Nicholas Bernoulli conocido como la paradoja de San Petersburgo, hay que conocer los antecedentes que llevaron a Bernoulli a plantearse ese problema. A principios del siglo XVII se desarrolla la teoría moderna de la probabilidad donde matemáticos como Blaise Pascal o Pierre Fermat se plantean, a través de calcular el valor esperado, cómo de atractivo resulta un determinado juego.

El cálculo del valor esperado de un juego consiste en la suma de los productos resultantes de multiplicar los premios que se obtendrían en un determinado juego por sus respectivas probabilidades. Una vez calculado el valor esperado de ese juego, podemos analizar lo interesante o atractiva que resultaría para los posibles jugadores participar en ese juego a través del denominado *criterio del juego justo,* el cual nos dice que un juego es justo cuando el pago por participar en él coincida con su esperanza matemática o valor esperado. Si el precio del juego fuese mayor que su valor esperado estaríamos ante un juego desfavorable y si fuese menor estaríamos ante un juego favorable para los participantes del mismo.

El problema más tarde conocido como la paradoja de San Petersburgo fue formulado por Nicholas Bernoulli en una carta dirigida a Pierre Rémond de Montmort con fecha 9 de septiembre de 1713 donde le planteaba 5 problemas de los cuales destacamos el cuarto y el quinto:

- Cuarto problema: es un juego que consiste en conseguir sacar un 6 al lanzar un dado y termina al sacar un número distinto a 6. El número de lanzamientos realizados puede ser infinito si sale infinitas veces seguidas el número 6. Los premios del juego consisten en el pago de una moneda si sale una vez el número 6, 2 monedas si sale 2 veces, 3 monedas si sale 3 veces, y así sucesivamente. Los premios seguirán la siguiente progresión: 1, 2, 3,…, ∞. En este contexto, Nicholas Bernoulli se pregunta cuál será el valor esperado del juego.
- Quinto problema: Nicholas Bernoulli se pregunta lo mismo que en el cuarto problema pero con unos premios que siguen unas progresiones distintas a la anterior:
  - 1, 2, 4, 8, 16,…, ∞
  - 1, 3, 9, 27,…, ∞
  - 1, 4, 9, 16, 25,…, ∞

Posteriormente, Montmort responde a Nicholas Bernoulli en otra carta con fecha 15 de Noviembre de 1713 en la que le dice que la resolución de los problemas que plantea no tiene dificultad. Montmort dice que basta con encontrar la suma de las series de las respectivas progresiones (cuadrados, cubos,…).

La siguiente carta se la envía Nicholas Bernoulli a Montmort con fecha 20 de Febrero de 1714. Nicholas Bernoulli está de acuerdo en la solución que le plantea Montmort pero le dice que debería haber intentado buscar una solución al problema porque se da un curioso caso. Nicholas Bernoulli llama *x* al valor esperado del juego. En el caso del cuarto problema tendremos:

$$x = \frac{1 + 5y}{6}$$

Donde *y* es el valor esperado después de sacar 6 en la primera tirada y que será necesariamente *x+1* porque el jugador espera recibir algunas monedas con la siguiente progresión: 2, 3, 4, 5, 6,… de la que cada término es una unidad mayor que el valor de la progresión de los premios: 1, 2, 3, 4, 5,…

Por lo tanto, sustituimos *x+1* por *y* en la ecuación anterior y obtendremos el siguiente resultado:

$$x = \frac{6 + 5x}{6} \Longrightarrow x = 6$$

Así pues, el valor esperado del juego será 6.

Sin embargo, cuando hacemos lo mismo para el quinto problema con la serie de premios: 1, 2, 4, 8,… obtenemos el siguiente resultado:

$$y = 2x$$

$$x = \frac{1+10x}{6} \Longrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Este resultado es una contradicción. Además, Nicholas Bernoulli duda si el valor esperado del cuarto problema, que es 6, es una cantidad excesivamente grande.

Posteriormente Montmort vuelve a responder a Nicholas Bernoulli en una carta con fecha 24 de Marzo de 1714 en la que le dice que está de acuerdo con la solución que da al cuarto problema pero no con la solución del quinto problema. Además, Montmort dice que no se cree capaz para resolver el problema y que este problema debe ser investigado.

2.2. El planteamiento de la Paradoja de San Petersburgo.

A continuación se muestra una versión simplificada del juego planteado por Nicholas Bernoulli:

Se plantea un juego consistente en el lanzamiento de una moneda *n veces* hasta que salga la primera cruz. En ese momento se deja de lanzar la moneda. El premio que recibirá el jugador será de 2^n €, donde *n* es el número de veces que ha sido lanzada la moneda. El juego tiene un número infinito de resultados puesto que solo se acaba hasta que salga la primera cruz y podría darse un resultado en que saliese de forma continuada un número reiterado de caras, aunque este resultado resulte muy improbable:

$$X_1 = 2€,\ X_2 = 4€, \ldots,\ X_n = 2^n€.$$

La probabilidad de que salga cruz en el *n-ésimo* lanzamiento de moneda será igual a $(\frac{1}{2})^n$. Así pues, las probabilidades de los premios serían las siguientes:

$$\pi_1 = \frac{1}{2}, \pi_2 = \frac{1}{4}, \ldots, \pi_n = \frac{1}{2^n}.$$

Al sumar los productos resultantes de multiplicar los posibles premios por sus correspondientes probabilidades obtendremos el valor esperado del juego que como vemos a continuación es infinito:

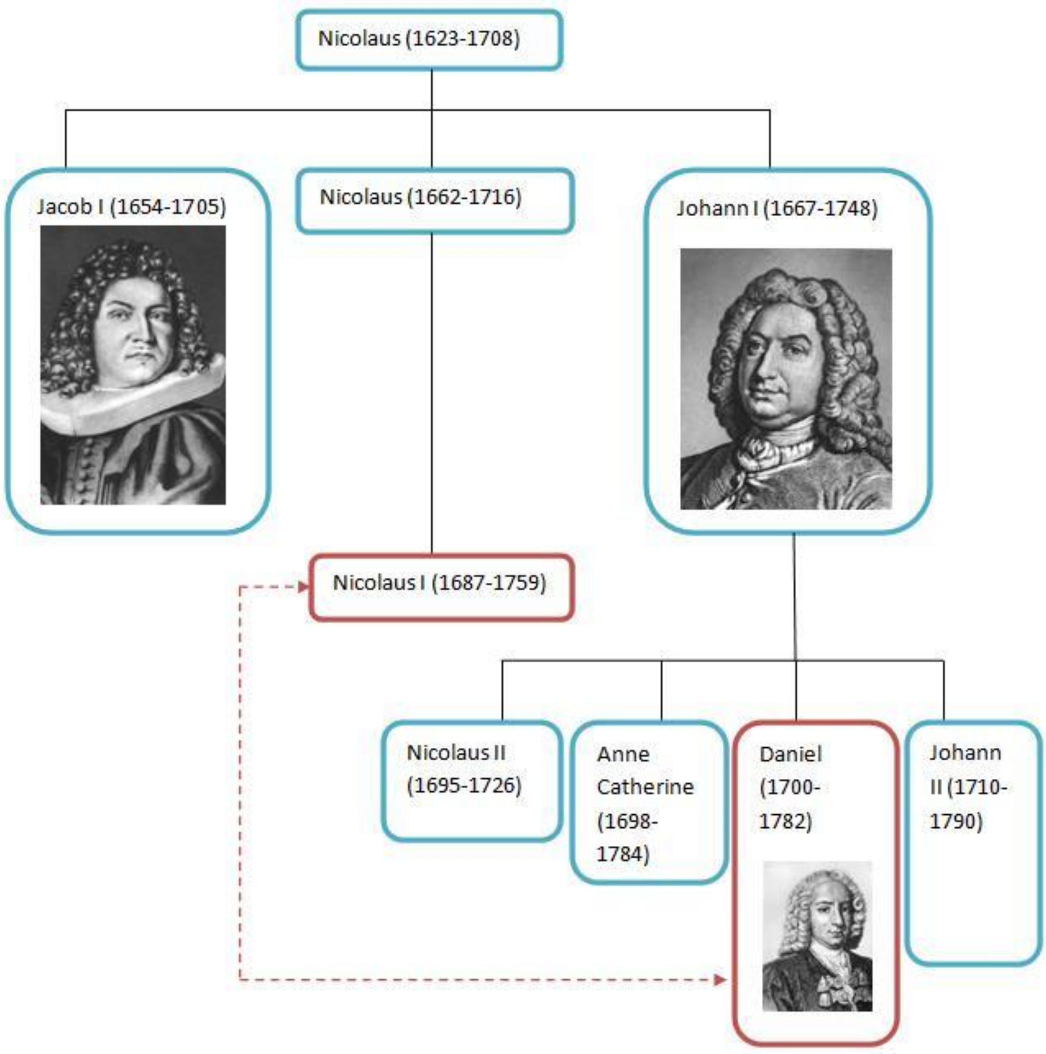
$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i X_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = 1 + 1 + \cdots + 1 = \infty$$

Aunque según el llamado *criterio del juego justo* mencionado anteriormente nos dice que el precio que estaría dispuesto a pagar una persona por participar en el juego sería infinito, lo cierto es que parece difícil que cualquier persona acepte pagar un elevado precio por participar en este juego.

El propio Nicholas Bernoulli intentó encontrar la solución durante un periodo de tiempo hasta que en 1715 decidió consultar a su primo Daniel puesto que éste poseía una gran capacidad matemática. Daniel Bernoulli se encontraba en San Petersburgo, ciudad dónde estaba concentrado gran parte del conocimiento de esta época y que posteriormente dio nombre a la paradoja. Después de reflexionar durante un largo periodo de tiempo, en 1738, Daniel Bernoulli publicó su propuesta de solución para el problema que le formuló su primo Nicholas Bernoulli. La solución que dio Daniel Bernoulli tiene que ver con la distinción que hace entre cantidad de dinero y utilidad del dinero. Esto último es, según Daniel Bernoulli, lo que la gente racional o con sentido común valora. También hay que destacar que anteriormente Gabriel Cramer ya había dado una solución al problema en 1728 aunque menos elaborada que la dada por Daniel Bernoulli. La solución de Cramer es conocida porque D. Bernoulli la incorporó explícitamente en su propio artículo.

Figura 1

Familia Bernoulli



Fuente: elaboración propia.

2.3. Las Soluciones a la Paradoja de San Petersburgo.

2.3.1. La solución de Cramer.

Gabriel Cramer en una carta escrita a Nicholas Bernoulli con fecha 21 de mayo de 1728 le dice que cree haber encontrado una solución al quinto problema planteado por Nicholas. La paradoja consiste en que cualquiera que desee participar en el juego debe dar una cantidad infinita por participar en ese juego. Esto parece absurdo, puesto que según Cramer, ninguna persona racional daría más de 20 monedas por participar en dicho juego. Cramer justifica esta contradicción de la siguiente forma:

"*los matemáticos, en su teoría, valoran el dinero en proporción a la cantidad del mismo. En cambio, la gente con sentido común, en la práctica, lo valora proporción a la utilidad que puede obtener de él".*[1]

La esperanza del juego da un valor infinito de monedas. Pero Cramer supone que la valoración la hace una persona racional, no un matemático, y que a una persona racional ya no le produce más placer una vez llegado a una cantidad determinada de monedas que él consideraba de 10 o 20 millones de monedas. Entonces el supuso que el juego está limitado al placer que producen 16.777.216 (2^{24}) monedas. Así que el valor esperado que él obtiene es el siguiente:

$$\frac{1}{2}1+\frac{1}{4}2+\frac{1}{8}4+\cdots+\frac{1}{2^{25}}2^{24}+\frac{1}{2^{26}}2^{24}+\cdots=$$

$$\frac{1}{2}24+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=12+1=13$$

Por lo tanto, según Cramer, la esperanza del juego es de 13 monedas, lo cual parece mucho más razonable que infinito.

Cramer continúa diciendo que es cierto que 100 millones son más valorados por la gente que 10 millones, pero no son 10 veces mejor valorados. Ahora supone que la utilidad viene dada por la raíz cuadrada de la cantidad de dinero *x*:

$$u(x)=\sqrt{x}$$

Así pues, la utilidad esperada será:

$$\frac{1}{2}\sqrt{1}+\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\sqrt{4}+\cdots=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

Pero esta cantidad no es el equivalente o precio del juego. El precio del juego debe ser el que iguale la pérdida de utilidad que tendría en caso de perder a la utilidad que tendría si resultase ganador. Por tanto, el equivalente o precio del juego (ξ) sería el siguiente:

---

[1] D. Bernoulli (1738). “Specimen theoriae novae de mensura sortis” página 168.

$$\sqrt{\xi} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \xi = (\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1})^2 \simeq 2.9 < 3$$

Cramer cree que esta estimación se acerca más que la que tiene como resultado un valor esperado igual a 13. Esto es suficiente, según su opinión, para demostrar que una personal racional no daría una cantidad infinita de monedas por participar en este juego.

2.3.2. La solución de Daniel Bernoulli.

La solución que da Daniel Bernoulli a la paradoja de San Petersburgo aparece publicada en el mencionado artículo de 1738 *"Specimen theoriae novae de mensura sortis"*. En este artículo, Daniel Bernoulli dice que es necesario distinguir entre precio y utilidad:

- Precio: es igual para todas las personas.
- Utilidad: depende de las circunstancias particulares de cada persona.

Esta distinción entre precio y utilidad la ilustra con un ejemplo que consiste en que un pobre posee un billete de lotería que con una probabilidad del 50% se obtiene un premio de 20.000 Ducados y con la misma probabilidad no se obtiene nada. Con esta situación, Daniel Bernoulli se pregunta si el pobre haría bien vendiendo ese billete de lotería por un precio de 9.000 Ducados y llega a la conclusión de que sí actuaría correctamente en venderlo por ese precio. En cambio, una persona rica haría mal si renunciara a comprar esa lotería por un precio de 9.000 Ducados. Con este ejemplo, deja claro que una ganancia de 1.000 Ducados es más significativa para una persona pobre que para una persona rica.[2]

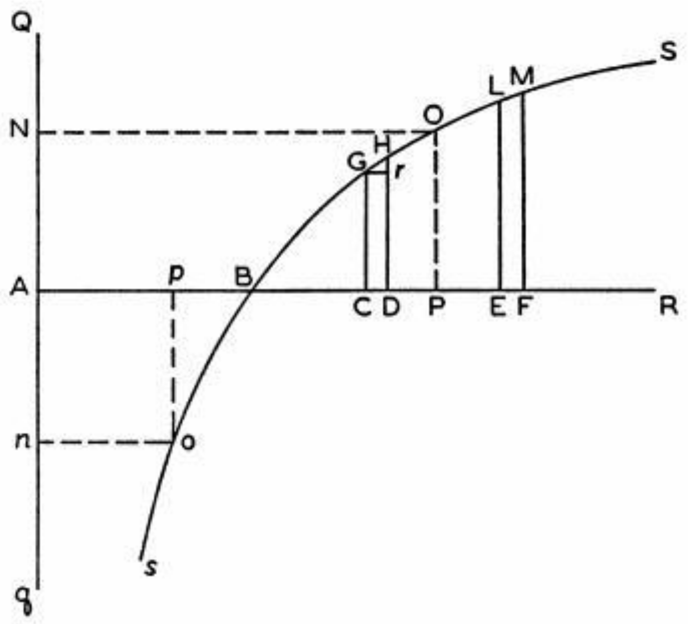
Daniel Bernoulli, en el sexto punto de su artículo, afirma lo siguiente: *“la utilidad resultante de cualquier pequeño incremento de la riqueza será*

[2] Ibidem, página 155.

inversamente proporcional a la cantidad de bienes previamente poseídos".[3] Por ello, utiliza la siguiente función de utilidad:

Figura 2

Función de utilidad de D. Bernoulli



Fuente: D. Bernoulli. "Specimen theoriae novae de mensura sortis", página 158.

En el eje de ordenadas está representada la riqueza y en el eje de abscisas la utilidad. Así pues, la utilidad esperada del juego sería la distancia *PO* y vendría dada por la siguiente ecuación:

$$PO = mCG + nDH + pEL + qFM + \cdots$$

Dónde *m, n, p, q,…* representan las probabilidades de las respectivas ganancias.

Para conocer cuánto estará dispuesto a arriesgar el individuo por participar en este juego debemos mirar en la parte opuesta de la función de utilidad. La distancia *Bp* representa la máxima pérdida que el individuo estaría dispuesto a asumir y la distancia *po* representa la disminución de la utilidad. En un juego justo en términos de utilidad, la pérdida de utilidad por participar en él

[3] Ibidem, página 156.

debe igualarse a la utilidad esperada de ganar en dicho juego. Por lo tanto: *An=AN* ó *po=PO.*

Como ya hemos mencionado, Daniel Bernoulli valora la utilidad marginal de forma decreciente pero utiliza una función de utilidad distinta a la propuesta por Cramer. A continuación mostramos una versión simplificada de la función de utilidad que utiliza Daniel Bernoulli determinada por el logaritmo neperiano de la cantidad de dinero:[4]

$$u(x) \simeq \ln(x)$$

Así pues, la utilidad esperada de la paradoja de San Petersburgo sería la siguiente:

$$\bar{u}(\tilde{y}) \equiv E[u(\tilde{y})] = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2^2}\ln(2^2) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln(2^i)}{2^i} = 2\ln(2)$$

El equivalente cierto o precio del juego (ξ) sería el siguiente:

$$\ln(\xi) = 2\ln(2) = \ln(4) \Longrightarrow \xi = 4$$

3. Enfoque axiomático de von Neumann y Morgenstern.

Como hemos visto, Cramer y Bernoulli encontraron una solución al problema de la Paradoja de San Petersburgo en la primera mitad del siglo XVIII introduciendo como único supuesto el criterio de la utilidad esperada. Dos siglos después, en 1947, John von Neumann y Oskar Morgenstern publicaron la segunda edición de *Theory of games and economic behavior* donde describen una serie de axiomas de comportamiento racional de tal forma que, si se cumplen, dan validez al supuesto del criterio de la utilidad esperada.

Otros autores, como Jacob Marschak en 1950, propusieron otros sistemas axiomáticos alternativos, que están basados en esos desarrollos

[4] Función de utilidad original de D. Bernoulli:

$$b\ log\frac{AP}{AB} = mb\ log\frac{AC}{AB} + nb\ log\frac{AD}{AB} + pb\ log\frac{AE}{AB} + qb\ log\frac{AF}{AB} + \cdots$$

iniciales, con el objetivo de determinar, a partir de ellos, la validez de la utilidad esperada.

Antes de formular los axiomas, debemos detallar los términos del problema que trataremos de resolver:

Denominamos *conjunto de loterías* ($\mathcal{Y}$) al conjunto de decisiones que se pueden tomar en condiciones de riesgo:

$$\mathcal{Y} \equiv \{\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \dots, \tilde{y}^s\}$$

Cada lotería ($\tilde{y}$) tiene asociado a ella una serie de premios (x), los cuales son cantidades seguras e incompatibles entre sí, y que tienen asociados sus correspondientes probabilidades (p):

$$\tilde{y} = (p_1, p_2, \dots, p_s; x_1, x_2, \dots, x_s)$$

Estas loterías se pueden clasificar en:

- Loterías simples: los premios posibles son cantidades ciertas.

$$\tilde{y}^S = (p_1, p_2, \dots, p_s; x_1, x_2, \dots, x_s)$$

- Loterías compuestas: loterías que a su vez sus premios pueden ser loterías.

$$\tilde{y}^C = (p_1, p_2, \dots, p_s; \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_s)$$

- Loterías degeneradas: cuando el resultado de la lotería es totalmente cierto.

$$(1,0, \dots, 0; x_1, x_2, \dots, x_s) \equiv x_1$$

Además, es necesario definir una relación binaria sobre los elementos del conjunto de loterías ($\mathcal{Y}$). Esta relación binaria es "*ser al menos tan preferida a*" ($\succsim$).

A continuación analizamos cuatro axiomas de comportamiento que garantizan la existencia de una función de utilidad ($u(x)$):

1. Axioma de preorden-completo:

Si se cumple este axioma, el individuo será capaz de ordenar las loterías según sus preferencias. La ordenación de estas loterías será posible si las preferencias del individuo son:

- Completas: permite la comparación de dos loterías. El individuo puede preferir una lotería a otra o pueden resultarle indiferentes:

$$\forall\ \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in \mathcal{Y} \Rightarrow \tilde{y}_1 \succsim \tilde{y}_2 \text{ ó } \tilde{y}_2 \succsim \tilde{y}_1 \Rightarrow \tilde{y}_1 \succ \tilde{y}_2 \,;\, \tilde{y}_2 \succ \tilde{y}_1 \,;\, \tilde{y}_1 \sim \tilde{y}_2$$

- Reflexivas: supone que cualquier lotería es al menos tan preferida como ella misma:

$$\tilde{y}_1 \succsim \tilde{y}_1$$

- Transitivas: supone que si para el individuo una primera lotería es al menos tan preferida como una segunda lotería y que si a su vez esta segunda lotería es al menos tan preferida como una tercera lotería, para el individuo la primera lotería será al menos tan preferida como la tercera:

$$\forall\ \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3 \in \mathcal{Y} \Rightarrow \tilde{y}_1 \succsim \tilde{y}_2 \text{ e } \tilde{y}_2 \succsim \tilde{y}_3 \Rightarrow \tilde{y}_1 \succsim \tilde{y}_3$$

2. Axioma de continuidad:

Suponemos un conjunto de loterías ($\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3 \in \mathcal{Y}$) tales que, el individuo establece la siguiente relación de preferencia:

$$\tilde{y}_1 \succsim \tilde{y}_2 \succsim \tilde{y}_3$$

Este axioma dice que, para esta situación, debe existir una probabilidad comprendida entre cero y uno ($0 < p < 1$), subjetiva de cada persona, de forma que una lotería compuesta que tenga como premios la lotería más preferida y la menos preferida $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_3)$, sea indiferente a la lotería de preferencia intermedia $(\tilde{y}_2)$:

$$(p, 1-p; \tilde{y}_1, \tilde{y}_3) \sim \tilde{y}_2$$

3. **Axioma de reducción de loterías compuestas:**

Este axioma dice que cualquier lotería compuesta se puede reducir a una lotería simple que sea equivalente para el individuo puesto que a éste tan sólo le importa las cantidades de los premios y sus correspondientes probabilidades. Para él no tiene importancia el mecanismo aleatorio de las loterías.

Suponemos una lotería compuesta $(\tilde{y}^c)$ donde los premios son unas loterías ($\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$) con unas probabilidades de p y $(1-p)$ respectivamente:

$$\tilde{y}^c = (p, 1-p; \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$$

Estas loterías ($\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$) tienen a su vez como resultado los mismos premios (x_1, x_2) pero estos se obtienen con unas probabilidades distintas:

$$\tilde{y}_1 = (p, 1-p; x_1, x_2) \; ; \tilde{y}_2 = (q, 1-q; x_1, x_2)$$

Según este axioma, esta lotería compuesta será indiferente, para el individuo, a una lotería simple $(\tilde{y}^s)$ que tenga como premios x_1, x_2 y las probabilidades de conseguir esos premios sean las mismas que eran en la lotería compuesta:

$$\tilde{y}^s = (p^2 + (1-p)q, p(1-p) + (1-p)(1-q); \; x_1, x_2)$$

4. **Axioma de independencia de alternativas irrelevantes:**

El axioma de independencia de alternativas irrelevantes dice que un individuo ante dos alternativas donde prefiere la primera a la segunda, seguirá manteniendo este orden de preferencia ante una situación que mezcle las dos anteriores alternativas con una tercera nueva siempre que la estructura probabilística sea la misma. Es decir, la introducción de una tercera alternativa ($\tilde{y}$) no tiene influencia alguna sobre el orden de preferencia inicial del individuo, siempre que la distribución de probabilidad sea la misma.

Suponemos dos loterías ($\tilde{y}_1$,$\tilde{y}_2$) tales que, el individuo prefiere la primera a la segunda:

$$\forall\, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in \mathcal{Y} \Rightarrow \tilde{y}_1 \succsim \tilde{y}_2$$

A continuación suponemos que las dos loterías anteriores ($\tilde{y}_1$,$\tilde{y}_2$) se mezclan con una tercera lotería ($\tilde{y}$), manteniéndose una misma estructura probabilística:

$$\tilde{y}_3 = (p, 1-p; \tilde{y}_1, \tilde{y}) \;\; ; \;\; \tilde{y}_4 = (p, 1-p;\ \tilde{y}_2, \tilde{y})$$

El cumplimiento de este axioma exige que el orden de preferencias inicial, no se altere como consecuencia de este proceso. Es decir:

$$\tilde{y}_1 \succsim \tilde{y}_2 \Rightarrow \tilde{y}_3 \succsim \tilde{y}_4$$

Así pues, la introducción de una tercera lotería ($\tilde{y}$) resultará irrelevante sobre el orden de preferencias del individuo si la estructura de probabilidades es la misma.

4. El Teorema de la Utilidad Esperada.

4.1. Intuición.

El objetivo del teorema de la utilidad esperada es demostrar la existencia de una función de utilidad, denominada Función de Bernoulli o de von Neumann Morgenstern, la cual esté definida sobre premios que sean cantidades ciertas $u(x)$.

Según el ***axioma de reducción***, cualquier lotería compuesta puede simplificarse en una lotería simple que sea equivalente. Es decir, cualquier lotería puede formularse en función de un conjunto de premios ciertos:

$$X \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$$

A los cuales están asociadas sus respectivas probabilidades:

$$P \equiv \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

La suma de esas probabilidades debe ser igual a uno:

$$\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$$

Así pues, cualquier lotería puede quedar definida de la siguiente forma:

$$\tilde{y} \sim \tilde{y}^s \equiv (p_1, p_2, \dots, p_N; x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Según el ***axioma de independencia***, la utilidad esperada de la lotería $\tilde{y}$ $(\bar{u}(\tilde{y}))$ puede calcularse a través de una expresión lineal en los premios ciertos de su lotería simple equivalente:

$$\bar{u}(\tilde{y}) = E\big(u(\tilde{y})\big) = \sum_{n=1}^{N} p_n u(x_n) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \cdots + p_n u(x_n)$$

El ***axioma de pre-orden completo*** nos dice que las utilidades esperadas han de conservar el orden:

$$\forall\, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in \mathcal{Y}:\ (\tilde{y}_1 \gtrsim \tilde{y}_2) \Leftrightarrow E[u(\tilde{y}_1)] \geq E[u(\tilde{y}_2)]$$

4.2. Demostración.[5]

Para empezar la demostración del cumplimiento del teorema de la utilidad esperada, suponemos dos loterías ($\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$) tales que, la primera es al menos tan preferida por el individuo a la segunda $(\tilde{y}_1 \gtrsim \tilde{y}_2)$:

$$\forall\, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in \mathcal{Y}:\ \tilde{y}_1 \equiv (p, 1-p; x_1, x_2) \quad ; \quad \tilde{y}_2 \equiv (q, 1-q; x_3, x_4)$$

$$\tilde{y}_1 \gtrsim \tilde{y}_2$$

5 Takayama, A. (1994): *Analitycal Methods in Economics.*

Ante esta situación, suponemos que se cumplen los siguientes axiomas de racionalidad:

- Preservación del orden:

$$E[u(y_1)] \geq E[u(y_2)]$$

- Linealidad:

$$E[u(y_1)] = pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$$
$$E[u(y_2)] = qu(x_3) + (1-q)u(x_4)$$

Se derivan las siguientes implicaciones:

- Sea "*b*" la mejor lotería y "*w*" la peor lotería de todo el espacio de loterías ($\mathcal{Y}$):

$$b \gtrsim \tilde{y}_1, \quad \tilde{y}_2 \gtrsim w \quad \forall\, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in \mathcal{Y}$$

- Si "*b*" fuese indiferente a "*w*" ($b \sim w$) la prueba sería trivial. Por eso debe darse una relación tal que:

$$b \succ w$$

- Sea $\tilde{y}_1 \in \mathcal{Y}$ de tal forma que $\tilde{y}_1 \equiv (p, 1-p; x_1, x_2)$:
    - Por el axioma de continuidad (2), existe unas probabilidades ($\exists\, p_1, p_2$) comprendidas entre cero y uno ($0 < p_1, p_2 < 1$) tal que:

    $$x_1 \sim (p_1; b, w)$$

    $$x_2 \sim (p_2; b, w)$$

    - Por el axioma de independencia de alternativas irrelevantes (4):

    $$\tilde{y}_1 \equiv (p, 1-p; x_1, x_2) \sim [\,p, 1-p; (p_1; b, w); (p_2; b, w)]$$

    - Por el axioma de reducción de loterías compuestas (3):

    $$\tilde{y}_1 \equiv (p, 1-p; x_1, x_2) \sim (p', 1-p'; b, w)$$

    Donde: $p' = pp_1 + (1-p)p_2$

- Sea $\tilde{y}_2 \in \mathcal{Y}$ de tal forma que: $\tilde{y}_2 \equiv (q, 1-q; x_3, x_4)$. Utilizando el mismo razonamiento que antes:

$$\tilde{y}_2 \equiv (q, 1-q; x_3, x_4) \sim (q', 1-q'; b, w)$$

Donde: $q' = qq_1 + (1-q)q_2$

- Por la propiedad de monotonía, que se deriva de los axiomas de independencia de alternativas irrelevantes (4) y de continuidad (2), tenemos lo siguiente:

(B): $\tilde{y}_1 \equiv (p', 1-p'; b, w) \gtrsim \tilde{y}_2 \equiv (q', 1-q'; b, w) \Leftrightarrow p' \geq q'$

(C): Si realizamos una normalización de escala y de origen de tal forma que la utilidad de la mejor lotería sea igual a uno ($u(b) = 1$), y la utilidad de la peor lotería sea igual a cero ($u(w) = 0$), obtendremos las siguientes utilidades de los premios posibles:

$$x_1 \sim (p_1; b, w) \Rightarrow u(x_1) = p_1 u(b) + (1-p_1)u(w) = p_1$$

$$x_2 \sim (p_2; b, w) \Rightarrow u(x_2) = p_2 u(b) + (1-p_2)u(w) = p_2$$

$$x_3 \sim (q_1; b, w) \Rightarrow u(x_3) = q_1 u(b) + (1-q_1)u(w) = q_1$$

$$x_4 \sim (q_2; b, w) \Rightarrow u(x_4) = q_2 u(b) + (1-q_2)u(w) = q_2$$

De tal forma que las utilidades esperadas de las loterías $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$ son las siguientes:

$$\tilde{y}_1 \equiv (p, 1-p; x_1, x_2) \Rightarrow E[u(\tilde{y}_1)] = pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$$
$$= pp_1 + (1-p)p_2 = p'$$

$$\tilde{y}_2 \equiv (q, 1-q; x_3, x_4) \Rightarrow \ E[u(\tilde{y}_2)] = qu(x_3) + (1-q)u(x_3)$$
$$= qq_1 + (1-q)q_2 = q'$$

(A): Así pues:

$$\tilde{y}_1 \succsim \tilde{y}_2 \Rightarrow E[u(\tilde{y}_1)] \geq E[u(\tilde{y}_2)]$$

$$\tilde{y}_1 \succsim \tilde{y}_2 \overset{(A)}{\Leftrightarrow} E[u(\tilde{y}_1)] \geq E[u(\tilde{y}_2)]$$

$$\tilde{y}_1 \succsim \tilde{y}_2 \overset{(B)}{\Leftrightarrow} p' \geq q' \overset{(C)}{\Leftrightarrow} E[u(\tilde{y}_1)] \geq E[u(\tilde{y}_2)]$$

5. Incumplimiento de los axiomas de la utilidad esperada.

5.1. Críticas al axioma de continuidad y de reducción.

Al poco tiempo de formularse el Teorema de la Utilidad Esperada, surgen las primeras críticas al axioma de continuidad y de reducción. Estas críticas tienen fácil justificación, como vemos a continuación.

Armen Alchian (1953) planteó una **crítica al axioma de continuidad.** Para ello supone tres cantidades ciertas o loterías degeneradas (x_1, x_2, x_3), para las que un individuo establece la siguiente el siguiente orden de preferencias:

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3$$

A continuación, Alchian supone que el mejor resultado (x_1) es conseguir dos caramelos, que el resultado intermedio (x_2) es conseguir un caramelo y, que el peor resultado (x_3) es un tiro en la sien. Ante esta situación, realiza la siguiente cuestión: "*¿Es posible encontrar una probabilidad positiva* (p) *tal que alguien sea capaz de encontrar indiferente disponer de un caramelo a participar en un juego cuya ganancia supone obtener un caramelo más, pero cuya pérdida supone la muerte?*".

Green (1971) dio una respuesta a la crítica realizada por Alchian afirmando que el segundo caramelo debe ser la compensación por la pequeña probabilidad existente de que alguien que dispare su pistola desde el desierto del Sahara sobre su cabeza en Toronto acertase dando en el blanco.

La crítica que realiza Alchian al axioma de continuidad parece por tanto tan solo un problema de medida.

Armen Alchian (1953) planteó también una **crítica al axioma de reducción.** Alchian se pregunta cómo es posible que existan máquinas tragaperras, muy atractivas visualmente para los jugadores, si, tal y como dice el axioma de reducción, a los individuos solo les interesa los premios y sus correspondientes probabilidades. De ser esto cierto, no tendría sentido la existencia de estas máquinas tragaperras tan atractivas visualmente y, lo lógico, sería que esas máquinas no tuviesen esas luces o adornos tan atractivos para los jugadores y se tratasen de unas máquinas que consistiesen tan solo en meter una moneda y esperar a ver el premio que saliese de la máquina. Así pues, los individuos no solo obtienen placer por el mero hecho de participar en un juego, sino que también pueden obtener placer a través del mecanismo aleatorio por el cual se generan los premios en un juego.

La respuesta a la crítica realizada por Alchian es fácil puesto que la Teoría de la Utilidad Esperada tan solo trata de dar respuesta a aquellos juegos que están orientados a la riqueza, más propios de aplicaciones económicas, y no a estos juegos de los que habla Alchian los cuales están orientados al placer.

5.2. Críticas al axioma de independencia de alternativas irrelevantes.

Las primeras críticas fuertes a la validez de la Teoría de la Utilidad Esperada se asocian, inicialmente, al trabajo realizado por Maurice Allais en el año 1952 que analizaremos posteriormente en este apartado. Posteriormente, surgen otra serie de fuertes críticas al axioma de independencia de alternativas irrelevantes, como el llamado *"efecto del ratio común"* estudiado por Kahneman y Tversky en 1979.

5.2.1. El triángulo de Marschak-Machina.

Jacob Marschak y Mark J. Machina elaboraron un esquema idóneo para evaluar este tipo de críticas. El esquema realizado por Marschak y Machina empieza suponiendo la existencia de tres premios que son cantidades ciertas que tienen el siguiente orden de preferencias:

$$x_3 \succ x_2 \succ x_1$$

Estos premios (x_1, x_2, x_3) tienen asociados unas probabilidades

(p_1, p_2, p_3) tales que su suma es igual a uno:

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$$

Las distintas loterías $(\tilde{y})$ vienen representadas de la siguiente forma:

$$\tilde{y} \equiv (p_1, p_2, p_3)$$

Suponemos las siguientes loterías:

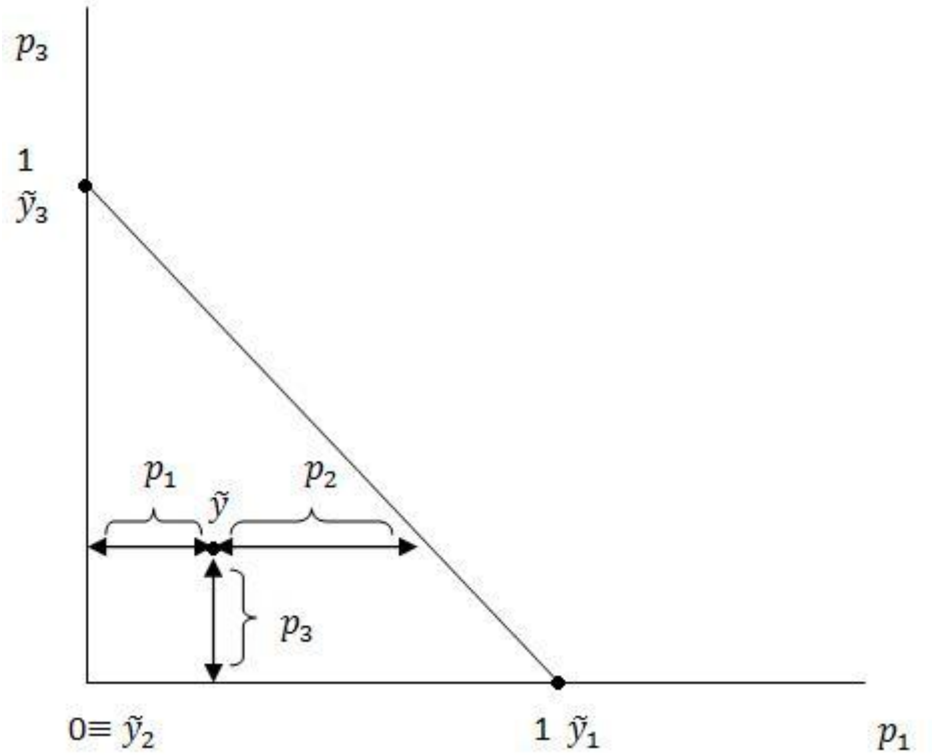
$$\tilde{y}_1 \equiv (1,0,0);\ \tilde{y}_2 \equiv (0,1,0);\ \tilde{y}_3 \equiv (0,0,1)$$

$$\tilde{y} \equiv (p_1, p_2, p_3) \quad \text{con} \quad p_i > 0\ \forall i$$

El llamado triángulo de Marschak-Machina viene representado en un plano donde en el eje de ordenadas está representada la probabilidad de obtener el premio más preferido (p_3) y en el eje de abscisas está representada la probabilidad de obtener el premio menos preferido (p_1).

Figura 3

Triángulo de Marschak-Machina



Fuente: elaboración propia.

La utilidad está determinada por funciones de Bernoulli $(u = u(x))$ y los distintos niveles de utilidad vienen representados por las curvas de iso-utilidad esperada. Así pues, la utilidad esperada de una lotería $(E[u(\tilde{y})])$ es:

$$E[u(\tilde{y})] = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + p_3 u(x_3)$$

Fijamos un nivel de utilidad constante $(u^0 = cte)$:

$u^0 = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + p_3 u(x_3) \Rightarrow$ Curva de iso-utilidad esperada de nivel u^0

Sabemos que se tienen que dar las siguientes relaciones:

$$u(x_3) \succ u(x_2) \succ u(x_1)$$

Los valores de las anteriores utilidades de los posibles premios son constantes. Así que, podemos normalizar los valores de esas utilidades de tal forma que:

$$u(x_3) = 1, \quad u(x_1) = 0, \quad u(x_2) = u_2, \quad 0 < u_2 < 1$$

Sabemos que:

$$p_2 = 1 - p_1 - p_3$$

Luego podemos reescribir la ecuación que determina el nivel de utilidad u^0 de la siguiente forma:

$$u^0 = p_1 0 + (1 - p_1 - p_3)u_2 + p_3 1$$

Operando en la ecuación anterior, llegamos a reescribirla de la siguiente forma:

$$p_3 = \frac{u^0 - u_2}{1 - u_2} + \frac{u_2}{1 - u_2} p_1$$

Así pues, podemos ver que las curvas de iso-utilidad esperada presentan las siguientes características:

- Son líneas rectas paralelas.
- Su pendiente es mayor que cero:

$$\frac{u_2}{1 - u_2} > 0$$

- La pendiente depende del valor de la utilidad esperada del premio intermedio (u_2):

$u_2 = 1 \Rightarrow$ Pendiente=1

$u_2 > \frac{1}{2} \Rightarrow$ Pendiente> 1

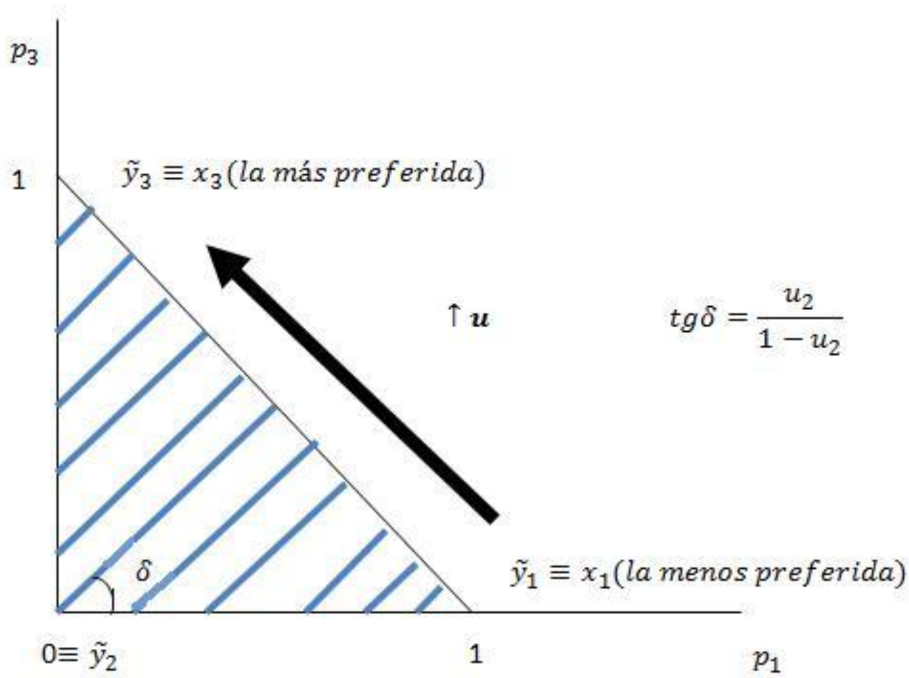
$u_2 < \frac{1}{2} \Rightarrow$ Pendiente< 1

Sin normalizar, la ecuación que determina el nivel de utilidad quedaría de la siguiente forma:

$$p_3 = \frac{u^0 - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} + \frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)} p_1$$

Figura 4

Las funciones de utilidad esperada representadas en el triángulo de Marschak-Machina



Fuente: elaboración propia.

5.2.2. El efecto de la consecuencia común: La paradoja de Allais.

La forma general del problema conocido como "***efecto de la consecuencia común***", consta de dos loterías $(\tilde{y}^A, \tilde{y}^B)$ con la siguiente estructura de probabilidades y premios:

$$\tilde{y}^A \equiv (p + q, 1 - p - q; a, c), \tilde{y}^B \equiv (p, q, 1 - p - q; b, 0, c)$$

Donde:

- "*a*" es menor que "*b*":

$$a < b$$

- "*c*" es la llamada "*consecuencia común*", que suele ser muy pequeña.

Según el axioma de independencia, la elección entre esas dos loterías $(\tilde{y}^A, \tilde{y}^B)$ no puede depender de la consecuencia común (c).

La **paradoja** del efecto de la consecuencia común consiste en que ante un descenso de "c", es fácil que las preferencias de los individuos se inviertan pasando de preferir la primera lotería $(\tilde{y}^A)$, a preferir la segunda lotería $(\tilde{y}^B)$. Luego se violaría el axioma de independencia de alternativas irrelevantes puesto que "c" sí contamina la elección entre las dos loterías posibles $(\tilde{y}^A, \tilde{y}^B)$.

La forma original del problema del efecto de la consecuencia común fue formulada por Maurice Allais (1952) y es conocida como "*la paradoja de Allais*"[6].

El experimento realizado por Allais consiste en dos juegos que consisten en la elección entre dos loterías que mantienen la misma estructura de la forma general del problema del efecto de la consecuencia común.

El primer juego consta de dos loterías $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ con la siguiente estructura de probabilidades y premios:

$$\tilde{y}_1 \equiv \text{Recibir un millón con certeza}$$

$$\tilde{y}_2 \equiv (0.1{,}0.01{,}0.89; 5\ Millones, 0{,}1\ Millón)$$

El segundo juego consta de otras dos loterías $(\tilde{y}_3, \tilde{y}_4)$ que tienen la siguiente estructura de probabilidades y premios:

$$\tilde{y}_3 \equiv (0.11{,}0.89; 1\ Millón, 0)$$

$$\tilde{y}_4 \equiv (0.1{,}0.9; 5\ Millones, 0)$$

El axioma de independencia de alternativas irrelevantes obliga al individuo a elegir la primera lotería en el segundo juego $(\tilde{y}_3)$, en el caso de

[6] Allais (1952), p.89 [Allais(1953), p.527].

haber elegido la primera lotería en el primer juego ($\tilde{y}_1$), si las curvas de indiferencia son paralelas. Esto se debe a que las curvas de indiferencia que pasan por $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_3$ son superiores a las que pasan por $\tilde{y}_2$ e $\tilde{y}_4$.

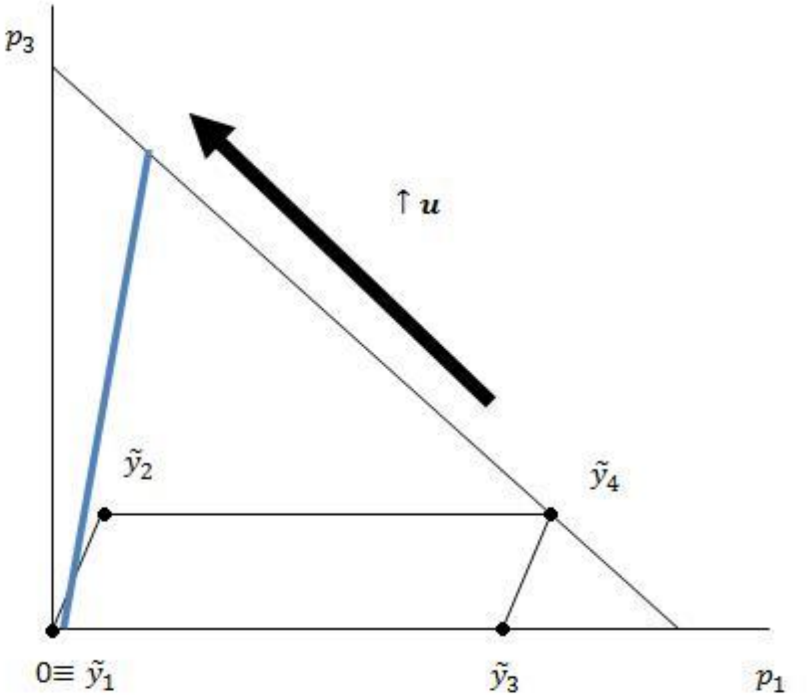
En cambio, si el individuo elige $\tilde{y}_2$ en el primer juego, deberá elegir $\tilde{y}_4$ en el segundo juego. En esta situación, el individuo es más averso al riesgo.

Daniel Kahneman y Amos Tervsky realizaron el ejemplo original de Allais moderando más las cantidades monetarias, aproximándolas a los ingresos mensuales de una familia media, y lo realizaron a una muestra de 72 personas. El resultado del experimento demostró que el axioma de independencia de alternativas irrelevantes es violado de forma continua por los individuos, puesto que el 82% eligió $\tilde{y}_1$ en el primer juego y, en cambio, el 83% de la muestra escogió $\tilde{y}_4$ en el segundo juego[7]. Este problema es conocido como "*la paradoja de Allais*".

[7] Kahneman and Tversky (1979), problemas 1 y 2.

Figura 5

El efecto de la consecuencia común representado en el triángulo de Marschak-Machina



Fuente: elaboración propia.

5.2.3. El efecto del ratio común.

El llamado ***efecto del ratio común***, consta de dos juegos que consisten en la elección entre dos loterías. Ambos juegos tienen los mismos premios, pero las probabilidades con que se obtienen son distintas.

El primer juego consta de dos loterías $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ que tienen la siguiente estructura de probabilidades y premios[8]:

$$\tilde{y}_1 \equiv (p, 1-p; X, x)$$

$$\tilde{y}_2 \equiv (q, 1-q; Y, y)$$

[8] Si p=1, se obtiene lo que Kahneman y Tversky denominan *certainty effect* [Kahneman and Tversky (1979), problemas 3, 4, 5 y 6].

El segundo juego consta de otras dos loterías $(\tilde{y}_3, \tilde{y}_4)$ que tienen los mismos premios que las dos loterías del primer juego, pero la estructura de probabilidades cambia. Las probabilidades de conseguir los premios X e Y(p y q) se multiplican ambas por un ratio r cuyo valor está comprendido entre cero y uno: $0 < r < 1$. De esta forma, el segundo juego tendría la siguiente estructura de premios y probabilidades:

$$\tilde{y}_3 \equiv (rp, 1 - rp; X, x)$$

$$\tilde{y}_4 \equiv (rq, 1 - rq; Y, y)$$

Además, deben darse las siguientes relaciones:

$$Y > X > 0; \quad X > x; \quad Y > y$$

$$p > q$$

La siguiente ecuación es el denominado *ratio común*:

$$\frac{p}{q} = \frac{rp}{rq}$$

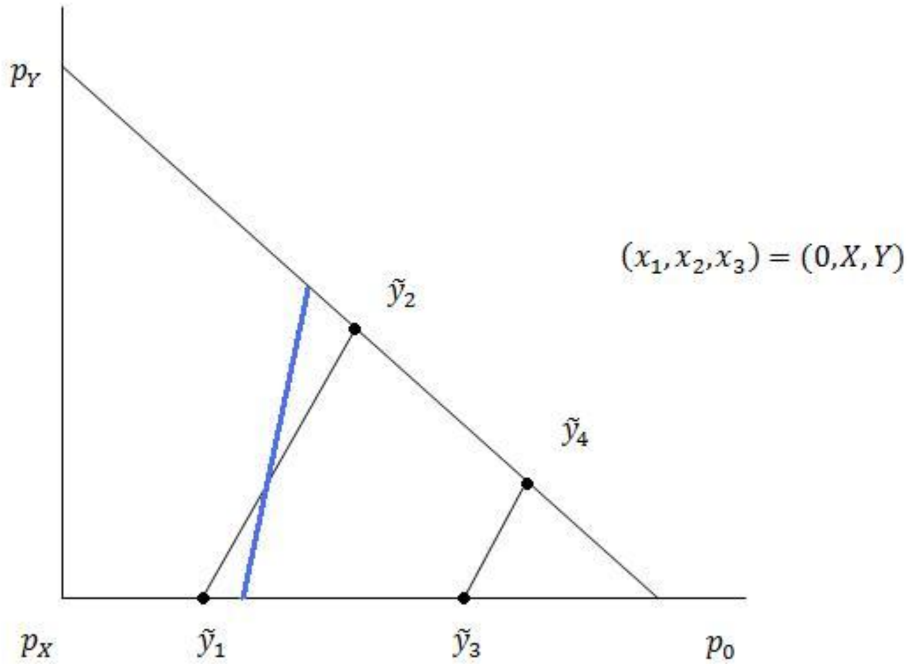
El axioma de independencia de alternativas irrelevantes dice que si un individuo prefiere la primera lotería en el primer juego $(\tilde{y}_1)$, entonces, en el segundo juego tiene que preferir también la primera lotería $(\tilde{y}_3)$. O al revés, si en el primer juego prefiere la segunda lotería $(\tilde{y}_2)$, en el segundo juego tiene que preferir la segunda lotería $(\tilde{y}_4)$. Esas preferencias están determinadas por las curva de indiferencia de los individuos, o lo que es lo mismo, de la aversión al riesgo de éstos. Si no se cumplen estas pautas, se estaría incumpliendo el axioma de independencia de alternativas irrelevantes[9].

---

[9] Tversky (1975), MacCrimmon and Larsson (1979), Chew and Waller (1986) y Hagen (1979) han encontrado elecciones sistemáticas de $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_4$. Además, Kahneman and Tversky (1979) encontraron el efecto simétrico considerando pérdidas en lugar de ganancias: $(-Y, -X, 0)$.

Figura 6

El efecto del ratio común representado en el triángulo de Marschak-Machina



Fuente: elaboración propia.

5.3. Críticas al axioma de transitividad.

Investigadores psicólogos descubrieron en los años 70 observando el comportamiento de individuos normales que el axioma de transitividad es incumplido sistemáticamente. Los economistas inicialmente pensaron que "había algún truco", pues, el axioma de transitividad era concebido "como un principio lógico cuya violación representa un error de juicio o de razonamiento"[10]. No obstante, a partir de 1979, los economistas tuvieron que admitir que el axioma de transitividad tampoco se cumple.

Las transgresiones del axioma de transitividad están relacionadas con un fenómeno denominado "inversión de preferencias". Esto ocurre frecuentemente cuando se ofrece a un sujeto dos tipos de apuestas con un valor esperado parecido. Una de ellas tiene una alta probabilidad de ganar una pequeña cantidad de dinero (apuesta conservadora), en cambio, la otra tiene

[10] Tversky (1969), p. 45.Véase también Raiffa (1968), pp.78-80.

una pequeña probabilidad de ganar una alta cantidad de dinero (apuesta arriesgada). El resultado más común ante esta situación es que los individuos escogen generalmente la apuesta conservadora pero, en cambio, asignan un mayor valor monetario a la apuesta arriesgada.

A continuación, veremos por qué se viola el axioma de transitividad con el siguiente ejemplo[11]:

Los individuos deben elegir entre dos loterías $(P-bet, \$-bet)$ que tienen las siguientes características:

- El mejor premio que ofrece "$P-bet$" es una cantidad no muy alta ($X\$$), pero con alta probabilidad de salir (p). Tiene la siguiente estructura de probabilidades y premios:

$$P-bet \equiv (p, 1-p; X\$, x\$)$$

$$X\$ > x\$ \quad , \quad x\$ \lesseqgtr 0$$

- El mejor premio que ofrece "$\$-bet$" es una cantidad alta de dinero ($Y\$$), pero con baja probabilidad de salir (q). Tiene la siguiente estructura de probabilidades y premios:

$$\$-bet \equiv (q, 1-q; Y\$, y\$)$$

$$Y\$ > y\$ \quad , \quad y\$ \lesseqgtr 0$$

Deben darse por tanto las siguientes relaciones:

$$Y > X \quad , \quad p > q$$

A continuación, se pide a los sujetos que valoren esas loterías de acuerdo a tres métodos diferentes:

a) Máximo precio de compra (*método de compra*).
b) Mínimo precio de venta (*método de venta*).
c) Método de "elicitación" de Becker (*método de venta*). La mejor estrategia para este método es revelar tu equivalente cierto.

[11] Preference Reversal Phenomenon; Slovic and Lichstenstein (1971).

> Este método consiste en que el sujeto de un precio de venta para una determinada lotería, y se obtiene otro precio aleatoriamente entre todos los ofrecidos. Si el precio aleatorio es mayor que el precio ofrecido por el sujeto, este sujeto pierde la lotería y recibe el precio aleatorio. En cambio, si el precio aleatorio es inferior al precio de venta del sujeto, éste conservará la lotería.

El resultado de estas valoraciones es que sistemáticamente los sujetos optan por las loterías “$P - bet$” en las elecciones directas, pero asignan mayores equivalentes ciertos a las loterías “$\$ - bet$”.

Un experimento realizado en 1973 en Las Vegas corrobora este resultado. En él, 127 de las 173 personas que participaban en el experimento establecieron un mayor valor de venta a "$\$ - bet$", habiendo elegido previamente la apuesta "$P - bet$".

La implicación económica que se deriva de este experimento es que no se cumple el axioma de transitividad de las preferencias. Por una parte, los individuos prefieren poseer la apuesta "$P - bet$", pero, a la hora de valorar el equivalente cierto (ξ) que tienen para ellos esas apuestas, asignan un mayor valor a la apuesta "$\$ - bet$":

$$\boxed{\begin{array}{l} P - bet \succ \$ - bet \\ \\ \xi(\$ - bet) > \xi(P - bet) \end{array}}$$

6. Un nuevo paradigma: *“Prospect Theory”*.

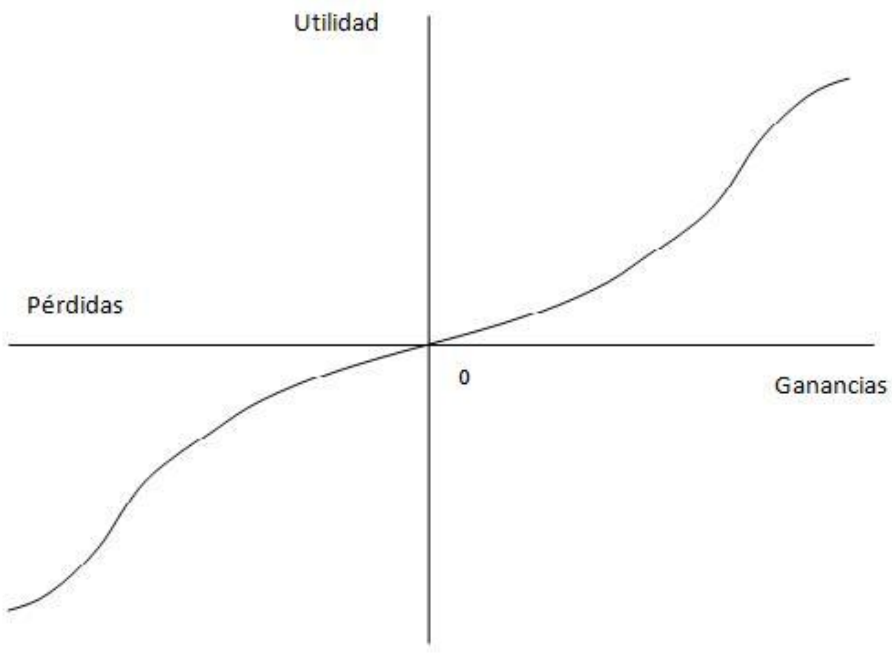
En los apartados anteriores, hemos visto que determinados axiomas del teorema de la utilidad esperada pueden ser incumplidos de forma sistemática. El axioma de independencia de alternativas irrelevantes queda demostrado, con la "*paradoja de Allais*", que puede incumplirse al cambiar el orden de preferencias inicial de los individuos entre dos loterías cuando se introduce una alternativa común en ambas loterías y, que tanto el axioma de transitividad como el de reducción, pueden incumplirse cuando las preferencias de los individuos entre loterías quedan afectadas por la forma en que son presentadas a los agentes derivando en comportamientos intransitivos.

Además, un mismo individuo puede comportarse simultáneamente como un averso al riesgo y como un amante del riesgo.

Friedman y Savage (1948) se preguntaron lo siguiente: "*¿Cómo puede un mismo individuo racional asegurar su casa y jugar a la lotería, simultáneamente?*". A lo que Markowitz (1952) dio como respuesta que los individuos toman como referencia su situación actual y valoran sus decisiones en términos de ganancias o pérdidas con respecto a sus puntos de referencia.

Figura 7

Función de utilidad de Markowitz



Fuente: elaboración propia.

Markowitz (1952) y más tarde Kahneman y Tversky (1979), se preguntaban cómo reaccionan lo individuos en condiciones de incertidumbre, para ello elaboraron la cuádruple pauta de las actitudes frente al riesgo ("*the fourfold pattern of risk attitudes*"). El problema que planteaban consistía en preguntar a los individuos por sus preferencias respecto a cuatro situaciones distintas. Los resultados modales del problema son los siguientes:

	Ganancias	**Pérdidas**
Baja probabilidad	$\tilde{y}_1 \equiv (0.05;100€,0€) \sim 14€ \succ 5€$ *Los individuos, ante esta situación, presentan un comportamiento de **amantes al riesgo**. Son atraídos por el juego.*	$-5€ \succ \tilde{y}_2 \equiv (0.05;-100€,0€) \sim -8€$ *Los individuos, en esta situación, se comportan como aversos al riesgo. Tienen atracción por asegurarse.*
Alta probabilidad	$95€ \succ \tilde{y}_3 \equiv (0.95;100€,0€) \sim 78€$ *Los individuos, ante esta situación, se comportan como aversos al riesgo. Es el llamado efecto de la "cosa segura".*	$\tilde{y}_4 \equiv (0.95;-100€,0€) \sim -84€ \succ -95€$ *Los individuos, en esta situación, se comportan como amantes del riesgo. Este comportamiento se puede resumir con la expresión "de perdidos al rio".*

Los psicólogos Daniel Kahneman y Amos Tversky desarrollaron en 1979 la denominada "***Prospect Theory***" (Teoría prospectiva). Esta teoría trata de describir cómo toman decisiones los individuos en situaciones donde deben de elegir entre alternativas que conllevan riesgo, como por ejemplo una inversión financiera. Esta teoría, a diferencia de la teoría clásica, dice que la aversión al riesgo por parte de los individuos depende del punto de referencia inicial de donde parten los individuos antes de enfrentarse al riesgo (*status quo*).

"***Prospect Theory***" es una teoría alternativa, más desarrollada, a la Teoría de la Utilidad Esperada. Se empieza definiendo una lotería

($\tilde{y} = (p_1, p_2, \ldots, p_s; x_1, x_2, \ldots, x_s)$). Las funciones valor ($v(x_i)$), presentan características diferentes a las de la Teoría de la Utilidad Esperada. Además, a diferencia de la teoría clásica, se introducen unas funciones de ponderación ($w(p_i)$), las cuales ponderan las probabilidades asociadas a los premios correspondientes. El valor de dicha lotería ($V(\tilde{y})$), viene determinado por el sumatorio de las funciones valor ($v(x_i)$) multiplicadas por sus correspondientes funciones de ponderación ($w(p_i)$):

$$V(\tilde{y}) = \sum_{i=1}^{s} w(p_i)\ v(x_i)$$

Los premios (x_i) y las probabilidades (p_i) están cualificados por dichas funciones.

La **función de valor** ($v(x_i)$) planteada por Kahneman y Tversky es parecida a la función de Markowitz y tiene las características siguientes:

- A diferencia de la de la teoría de la utilidad esperada que está definida sobre riqueza absoluta, esta está definida sobre "***ganancias y pérdidas***".
- Las ganancias y pérdidas son computables en relación a un punto de referencia denominado **"*status quo*"** en el que se cumple:

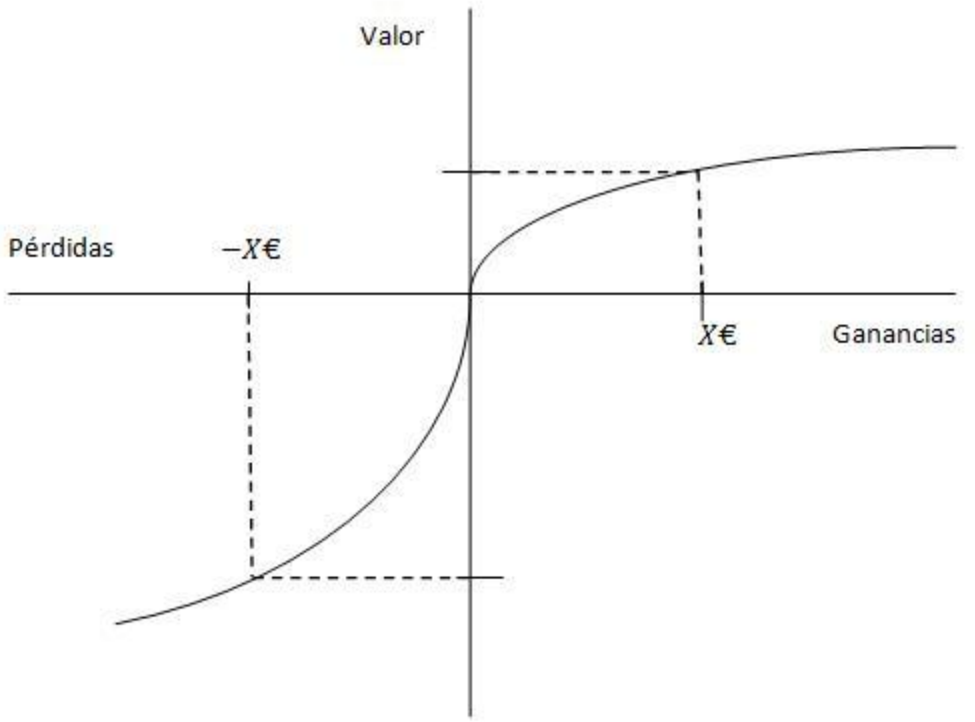
$$v(0) = 0$$

- La función presenta el principio psicológico de "***sensibilidad decreciente***", es decir, el impacto sobre la utilidad esperada disminuye a medida que nos alejamos del punto de referencia. Esto implica que la función sea estrictamente cóncava en la zona de las ganancias y estrictamente convexa en la zona de las pérdidas.
- La función tiene en cuenta la llamada "***aversión a la pérdida***" (**"*lost aversion*"**), que no es lo mismo que la aversión al

riesgo. Esto es que a los individuos les impacta más un riesgo que conlleve pérdidas respecto a su situación inicial que una que conlleve ganancias. Esto se refleja en la pendiente de la función de utilidad, la cual es mayor en la zona de pérdidas que en la zona de ganancias.

Figura 8

Función de valor



Fuente: elaboración propia.

Además, a diferencia de la Teoría de la Utilidad Esperada, aquí se utiliza una **función de ponderación** ($w(p_i)$) que presenta las siguientes características:

- Los valores no tienen por qué ser "probabilidades subjetivas". Un ejemplo es que un individuo puede creer que es más fácil obtener un seis con su propio dado independientemente de que sepa que no está trucado.

- La forma de la función refleja el principio de "***sensibilidad decreciente***":

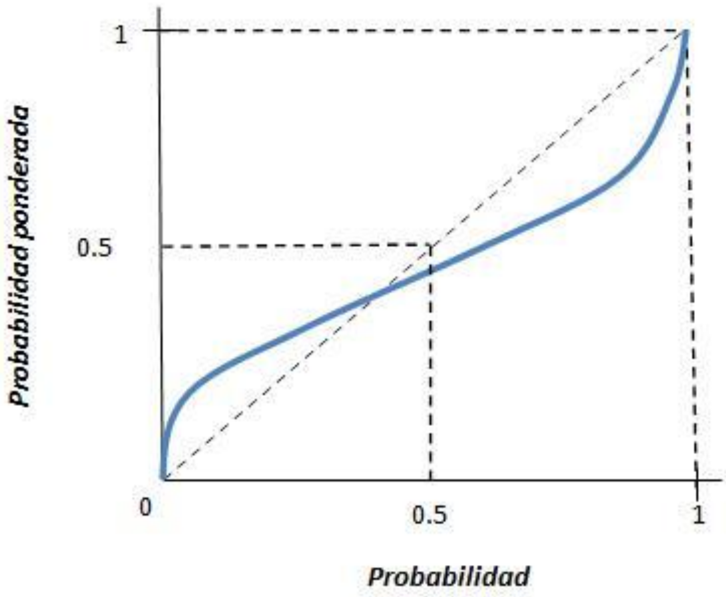
  a) Presenta dos puntos de referencia que son el punto de imposibilidad $(p = 0)$ y el punto de certeza $(p = 1)$. Además, sus valores están normalizados entre cero y uno:

  $$w(0) = 0, w(1) = 1$$

  b) Los individuos tienden a sobrevalorar las bajas probabilidades y, en cambio, suelen minusvalorar las probabilidades medias y las altas. Así pues, la función de ponderación tiene una forma de "*S-invertida*".

Figura 9

Función de ponderación



Fuente: elaboración propia.

A continuación veremos cómo solventa "***Prospect Theory***" los problemas que presentaba la Teoría de la Utilidad Esperada. Esta nueva teoría hace las siguientes interpretaciones de la realidad:

- Esta teoría permite explicar la llamada "*cuádruple pauta de las actitudes frente al riesgo*":

	Ganancias	**Pérdidas**
Baja probabilidad	*Puede explicar la atracción al juego propia de un amante del riesgo puesto que, la función de ponderación sobrevalora la probabilidad de ganancia y, con ello, se puede revertir el efecto de que la función de valor sea cóncava.*	*Puede explicarse la atracción por asegurarse propia de los individuos en esta situación que se comportan como aversos al riesgo puesto que, con el hecho de que la función de ponderación sobrevalora la probabilidad de pérdida, se puede revertir el efecto de una función de valor convexa.*
Alta probabilidad	*Se puede explicar el denominado efecto de la "cosa segura" típico de un comportamiento de un averso al riesgo. La función de ponderación infravalora la probabilidad de ganancia reforzando así, a la forma cóncava de la función de valor.*	*Permite explicar el comportamiento típico de los individuos que ante esta situación dicen "de perdidos al rio" y, por tanto se comportan como amantes del riesgo. La función de ponderación infravalora la probabilidad de pérdida y, refuerza a la forma convexa de la función de valor.*

- Interpreta cómo muchas veces los individuos prefieren dar una forma diferente a una misma lotería según la forma en que ésta se presente dependiendo de las pérdidas o ganancias o del modo en que se describen las probabilidades:

- ***Framing (*efecto marco*)***: el marco de referencia en que se presenta el problema influye en la decisión del individuo. Esto se puede demostrar con el siguiente ejemplo:
  - ***Primer juego:*** regalan 1.000€ al agente. A continuación, le ofrecen 500€ seguros o participar en un juego que la mitad de las veces tiene 1.000€ de premio y la otra mitad nada.
  - ***Segundo juego:*** regalan 2.000€ al agente. A continuación, le exigen pagar una multa de 500€ o participar en un juego en el que la mitad de las veces tiene que pagar 1.000€ y la otra mitad no paga nada.

  En el primer juego, la decisión más común que toman los individuos es aceptar los 500€ y no jugar al juego (efecto de la "*cosa segura*"). En cambio, en el segundo juego, el resultado más común es jugar al juego antes que pagar la multa de 500€ ("*de perdidos al rio*"). Sin embargo, los dos juegos ofrecen lo mismo.
- ***Editing* (efecto transformación):** los individuos tienden a editar mentalmente la estructura de las loterías presentándolas de una forma en la que puedan asimilar mejor su significado. Dependiendo de esas transformaciones, las loterías pueden ser valoradas de formas distintas. A continuación, vemos un par de ejemplos de formas de edición:
  - *Segregación*: se tiende a segregar los premios ciertos:

    $(0.5,0.5; 20€, 30€)$ *se representa por:*

    $$20€ + (0.5,0.5; 0€, 10€)$$

  - *Redondeo:* se tiende a redondear cifras con decimales o probabilidades muy infrecuentes:

    $(0.51,0.0001,0.4899; 99€, 5€, 0€)$ *se representa por:*

    $$20€ + (0.5,0.5; 99€, 0€)$$

- Contempla los efectos relacionados con la aversión a la pérdida (***loss aversion***). Los individuos suelen valorar más algo que les pertenece cuando lo tienen que vender que esa misma cosa cuando no la tienen y la quieren o tienen que comprar (***endowment effect***).
- Contemplando conjuntamente el llamado "efecto marco*",* la función de valor con forma de "*S*" y la denominada aversión a la pérdida, podemos explicar algunas paradojas económicas como las que vemos a continuación:
    - *a)* ***La ilusión monetaria*** *de la que hablaba Keynes****:*** los individuos aceptan mejor una reducción del poder adquisitivo que se derive de la inflación, que una que se derive de una reducción de sus salarios.
    - *b)* ***Los precios rígidos de la vivienda en uso en las recesiones:*** esto se explica porque los propietarios ven como una pérdida bajar el precio al tomar como referencia el precio de cuando había crecimiento económico.
    - *c)* ***La aceptación por parte de los empleados de que la empresa les retenga parte de su salario en concepto de impuesto sobre la renta:*** los trabajadores prefieren pagar los impuestos de esta forma en vez de recibir el salario bruto íntegro y pagar después por su cuenta los impuestos derivados de la renta.
    - *d)* ***Rechazo de la gente a aceptar mayores impuestos indirectos que elevan los precios:*** la gente suele ser más reacia a estos impuestos, suelen preferir otras intervenciones, aunque también eleven los precios, como el establecimiento de aranceles.

A la hora de realizar un **planteamiento formal** de "*Prospect Theory*", la función de valor más utilizada es la que plantearon Kahneman y Tversky (1992) y la función de ponderación más utilizada es la de Lattimore (1992):

- **Función de valor:**

$$v(x) = \begin{cases} x^{\alpha}, & x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^{\beta}, & x < 0 \end{cases}$$

α y β son valores comprendidos entre cero y uno ($0 < \alpha, \beta < 1$) que miden la curvatura de la función valor para las ganancias y para las pérdidas respectivamente. en cuanto a λ, es el *coeficiente de aversión a la pérdida* y toma valores mayores que uno ($\lambda > 1$).

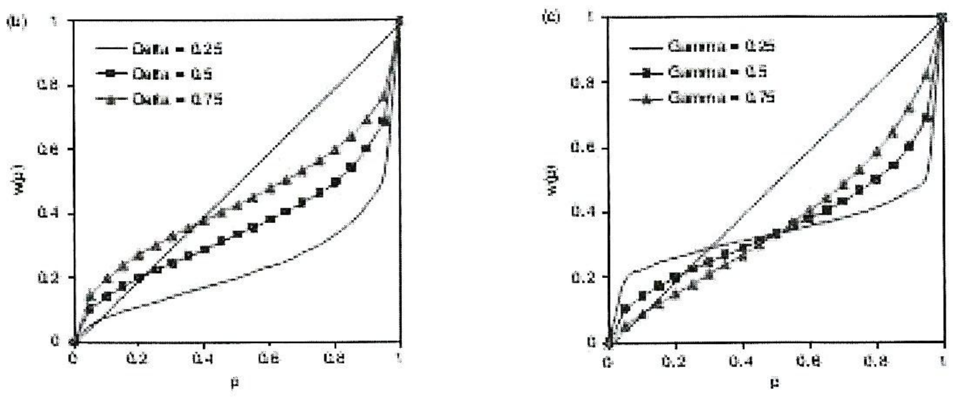
- **Función de ponderación:**

$$w(p) = \frac{\delta p^{\gamma}}{\delta p^{\gamma} + (1-p)^{\gamma}}$$

δ y γ miden la elevación y el grado de curvatura de la función de ponderación respectivamente y toman valores comprendidos entre cero y uno ($0 < \delta, \gamma < 1$). Cuanto más grande sea δ, más grande será la elevación de la función de ponderación y, cuanta más pequeña sea γ, mayor será el grado de curvatura de la función de ponderación.

Figura 10

Función de ponderación de Lattimore (1992)



Fuente: P. Lattimore. "The influence of probability on risky choice. A parametric examination".

7. Conclusiones.

En este trabajo hemos realizado un estudio sobre la Teoría de la Utilidad Esperada, así como de su origen histórico, la Paradoja de San Petersburgo, y de los axiomas de comportamiento de von Neumann y Morgenstern que, si se cumplen, garantizan la existencia de una función de utilidad. Además, también hemos analizado una serie de críticas realizadas a estos axiomas de comportamiento: unas primeras realizadas a los axiomas de continuidad y de reducción que tienen fácil solución, y otras más complejas realizadas a los axiomas de independencia y de transitividad. Por último, hemos hecho un breve desarrollo de "*Prospect Theory*" (la Teoría Prospectiva), una teoría alternativa a la Teoría de la Utilidad Esperada más desarrollada, que presenta diferentes características como la introducción de una función de ponderación.

A raíz de lo anterior se pueden extraer las siguientes conclusiones:

En primer lugar, se ha realizado un estudio de la génesis histórica de la utilidad esperada, es decir, de la Paradoja de San Petersburgo que surge en 1713. Aquí hemos visto brevemente los antecedentes de la Paradoja de San Petersburgo, es decir, la teoría moderna de la probabilidad, así como el planteamiento formal y las soluciones más conocidas, las de Cramer y Bernoulli, de la Paradoja de San Petersburgo.

A continuación hacemos un salto temporal de dos siglos hasta 1947, para estudiar los axiomas de comportamiento descritos por von Neumann y Morgenstern que, de cumplirse, darían validez al criterio de la utilidad esperada. Los axiomas que hemos analizado que garantizan la existencia de una función de utilidad son los cuatro siguientes:

- Axioma de preorden-completo.
- Axioma de continuidad.
- Axioma de reducción de loterías compuestas.
- Axioma de independencia de alternativas irrelevantes.

Después, hemos estudiado el Teorema de la Utilidad Esperada y demostrado su existencia. El objetivo de este teorema es demostrar la existencia de una función de utilidad que esté definida sobre premios que son cantidades ciertas.

También hemos visto una serie de críticas realizadas al cumplimiento de los axiomas de la Teoría de la Utilidad Esperada:

- Críticas al axioma de continuidad y al axioma de reducción: fueron planteadas por A. Alchian poco después de formularse esta teoría y se justifican fácilmente.
- Críticas al axioma de independencia de alternativas irrelevantes: surgieron también al poco tiempo de formularse la Teoría de la Utilidad Esperada. Hemos estudiado la conocida como "*paradoja de Allais*", formulada por el Premio Nobel de economía M. Allais y el denominado *efecto del ratio común.* Además, vimos el triángulo de Marschak-Machina, que es un esquema idóneo para el estudio de este tipo de críticas.
- Críticas al axioma de transitividad: son más recientes y están relacionadas con el fenómeno conocido como "*inversión de preferencias".* Fueron descubiertas por investigadores psicólogos.

Finalmente, hemos realizado un estudio sobre "*Prospect Theory"*, que, como ya hemos dicho, es una teoría alternativa, más desarrollada, a la Teoría de la Utilidad Esperada. Hemos visto como esta teoría decía que la aversión al riesgo depende del punto de referencia inicial de donde parten los individuos, conocido como "*status quo*". Además, hemos estudiado las funciones valor y ponderación que determinan el valor de los prospectos. También hemos observado las interpretaciones que hace esta teoría de la realidad y hemos expuesto brevemente un planteamiento formal para esta teoría.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alchian, A.A. (1953): “The meaning of Utility Measurement”, *American Economic Review* 43 (March), pp. 26-53.

Allais, M. (1953). "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine." *Econometrica*, 21.

Bernoulli, D. (1738): “Specimen Theoriae Novae de Mesura Sortis”, en Segura, J. y Rodriguez Braun, C. (ed), *La economía en sus textos*, Taurus, Madrid, pp. 154-169

Chew, S. y Waller, W. (1986): “Empirical tests of weighted utility theory”, *Journal of Mathematical Psychology,* March, 30, pp. 55-72.

Friedman, M. y Savage, L. (1948): “The utility analysis of choice involving risk”, *Journal of Political Economy,* Aug. 56, pp. 279-304.

Green, H.A.J. (1976): *La Teoría del Consumidor,* Alianza Universidad, Madrid.

Hagen, O. (1979): “Towards a positive theory of preferences under risk”, en Allais and Hagen, pp. 271-302.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1979): “Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk”, *Econometrica* 47 (2), pp. 263-292.

Lattimore , P.K. , Baker , J.R. , y Witte , A.D. (1992): “The influence of probability on risky choice. A parametric examination”, *Journal of Economic Behavior and Organization,* 17, pp. 377-400 .

MacCrimmon, K.R. y Larsson, S. (1979), “Utility theory: Axioms versus Paradoxes”, en Allais and Hagen, pp. 333-409.

Machina, M.J. (1989): “Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved”, in *Current Issues in Microeconomics,* J.D.Hey ed., MacMillan, pp.12-46.

Markowitz, H. (1952): “The utility of wealth”, *Journal of Political Economy,* Ap. 60, pp. 151-168.

Marschak, J. (1950): "Rational behavior, uncertain prospects and measurable utility", *Econometrica,* April, 18(2), pp. 11-141

Montmort, P. R. de (1713): *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, Seconde Edition, Revûe et augmentée de plusieurs Lettre, Quillau, París.

Neumann, J. von, y Morgenstern, O. (1953): *Theory of games and economic behabior,* 3ª ed. Princeton University Press.

Pérez Domínguez, C. (1996): *La hipótesis de la utilidad esperada,* Universidad de Valladolid, *mimeo.*

Raiffa, H. (1968): *Decision analysis: Introductory lectures on choice under uncertainty,* Addison Wesley, Reading, Mass.

Schumpeter, J. A. (1943): *Capitalism, socialism and democracy*. Allen and Unwin, Londres.

Takayama, A. (1994): *Analitycal Methods in Economics,* Harvester Wheatsheaf, USA.

Tversky, A. (1969): "Intransitivity of preferences", *Psychological Review,* Jan, 76, pp. 31-48.

Tversky, A. (1975): "A critique of expected utilitu theory: Descriptive and normative considerations", *Erkenntnis,* 9, pp. 163-173.