Universidad de Valladolid

GRADO EN ECONOMÍA

TRABAJO FIN DE GRADO

“MÉTODOS NUMÉRICOS EN LA VALORACIÓN FINANCIERA DE PRÉSTAMOS HIPOTECARIOS”

AUTOR: BELÉN CAMBRONELL SANTOS

FECHA DE ENTREGA: Abril 2016

ABSTRACT:

The aim of this project arises from the need to study some tools for assessing mortgage loans.

We have studied Internal Rate of Return (TIR) and Net Present Value (VPN) for choosing investment.

This project talks about the characteristics of mortgage loans, the different kinds that exist and depreciation methods. We focus on the French method because it is the most used and with this method as time passes you pay more capital and less interest.

To resolve nonlinear equations we have applied the Newton-Raphson method and its formula.

We have applied this method in two real and actual mortgage loans extracted from Santander bank and Bankinter bank.

The aim of this is to see what you really pay with a mortgage loan. To measure this, we have used Matlab, the mathematical software.

We have checked graphically the growing trend between TIR and the type of interest and also between TIR and commissions.

Definitely, the objective of this project is to know the real profitability mortgage loans give to the borrower.

ÍNDICE:

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo fin de grado se pretende estudiar algunas herramientas de las que disponemos para valorar los préstamos hipotecarios.

Analizando la tasa de rentabilidad interna (TIR) y el valor presente neto (VPN) podemos decantarnos por unas inversiones u otras, analizar qué proyecto nos resulta indiferente, o cual más rentable. Dicho estudio se realizará en la Sección 2.1. Cuanto mayor sea la tasa de rentabilidad interna de un proyecto, más deseable será realizar esa inversión. El objetivo de estudiar la TIR, en definitiva, es saber lo que finalmente pagarás por tener un préstamo.

El valor presente neto nos mide el incremento que experimenta la riqueza después de acometer inversiones productivas. Tanto este criterio, como el de la TIR son completos para la elección de inversiones desde el punto de vista de la valoración financiera.

El préstamo es una operación financiera que cuenta con una prestación única, pero con una contraprestación múltiple. A la hora de estudiar un préstamo hipotecario se han de tener en cuenta distintos términos como el capital prestado, los periodos en los que se amortiza, el tanto de interés, etc.

Analizaremos las características de los mismos, los distintos tipos de préstamos que existen y los diferentes métodos de amortización en las Secciones 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5.

Aplicando el método de Newton-Raphson y su fórmula de recurrencia daremos solución a las ecuaciones no lineales. Cada iteración que vamos realizando, proporciona un resultado que se acerca más a la solución real de la ecuación. Analizaremos este método en profundidad en la Sección 3.

El principal inconveniente del método de Newton es que es indispensable conocer el valor de la primera derivada de la función en el punto, lo cual, en ocasiones, puede llegar a resultar arduo. Se analizarán estos problemas que pueden surgir en la Sección 3.1.

En la Sección 4 compararemos dos préstamos hipotecarios reales y actuales con distintas características y tipos de interés. Los préstamos han sido extraídos de Banco Santander y de Bankinter.

El objetivo de ello es observar lo que realmente se acaba pagando por cada préstamo. Para esto nos ayudaremos del software matemático Matlab y aplicando distintos comandos sacaremos las conclusiones finales en la Sección 4.2. Analizaremos la relevancia que tiene que un préstamo hipotecario cuente con una comisión de cancelación o no.

De manera gráfica observaremos la tendencia creciente que existe entre el tipo de interés y la tasa de rentabilidad interna, y también entre esta última y las comisiones. Todo ello en la Sección 4.3.

En uno de estos dos préstamos hipotecarios comprobaremos si se cumple la tasa anual equivalente (TAE). Es importante, ya que el TAE no siempre incluye los mismos gastos para su cálculo.

Finalmente, la Sección 5 muestra las conclusiones finales de todo este trabajo.

En definitiva, la importancia de este trabajo reside en conocer la rentabilidad real que los préstamos hipotecarios otorgan al prestatario.

2. BREVE SÍNTESIS DE LOS PRÉSTAMOS HIPOTECARIOS

En la actualidad, antes de tomar una decisión financiera se debe realizar un análisis cuantitativo detallado de todas las alternativas de las que disponemos, con la valoración financiera de cada una de ellas. De tal manera, el decisor dispone de todos los elementos en los que basar su elección.

A lo largo de este punto analizaremos los préstamos hipotecarios en profundidad y los distintos procedimientos de estimación financiera.

2.1 VALORACIÓN FINANCIERA Y CONCEPTOS PREVIOS

Tanto las decisiones económicas como las financieras no se pueden basar solo en una simple intuición del propio decisor. Existen muchos factores a tener en cuenta y múltiples valoraciones que se pueden hacer de cada uno de ellos.

Analizar al detalle y de manera correcta las alternativas en el ámbito de las finanzas requiere conocer conceptos y técnicas de valoración financiera.

La TIR es el tanto interno que iguala el desembolso realizado inicialmente con los rendimientos netos de la inversión, todo ello de manera financiera. Véase [6].

A la hora de comparar diferentes inversiones es importante introducir el concepto de VPN o valor presente neto, ya que ambos conceptos están estrechamente relacionados. El valor presente neto mide el incremento de la riqueza al acometer inversiones productivas y se calcula mediante la diferencia entre el valor actual de la renta y la inversión en capital que hemos realizado en el momento inicial. En las inversiones financieras libres de riesgo, el valor actual neto es siempre igual a cero,

$$VPN = VA - Inversión$$

$$VPN = \sum_{s=1}^{n} R_s \, (1+r)^{-s} - C_0 \ .$$

Siendo:

- R_s = Rendimientos netos que produce la inversión desde el periodo 1 hasta el periodo n.

- r = Tanto de valoración.
- C_0 = Desembolso inicial que ha generado la inversión.

Por tanto, la tasa de rentabilidad interna es el tanto efectivo para el cual el valor presente neto es igual a cero,

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} R_s \, (1+r)^{-s}$$

$$R_s \sum_{s=1}^{n} (1+r)^{-s} = R_s \; \frac{(1+r)^{-1} - (1+r)^{-n-1}}{1-(1+r)^{-1}} \quad ,$$

siendo el último término de esta ecuación, la suma de una progresión geométrica de razón $(1+r)^{-1}$.

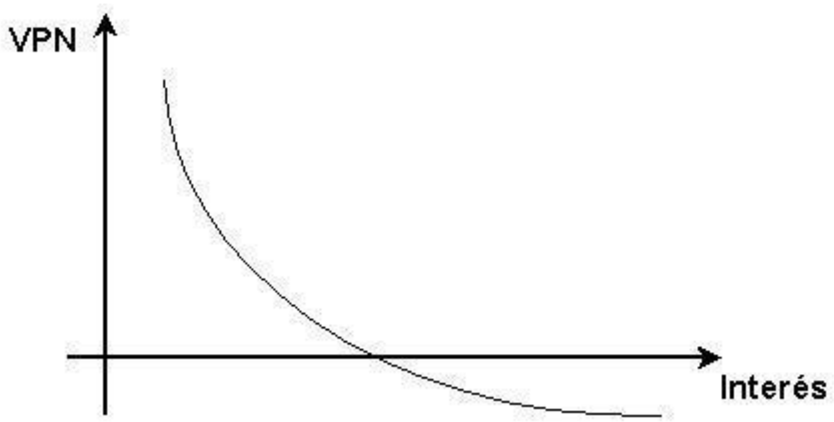
Esta ecuación es el resultado de igualar el valor actual de la renta con el capital desembolsado en el momento inicial. Es decir, la manera de calcular el valor presente neto que hemos visto anteriormente.

De la ecuación del VPN podemos deducir:

$\frac{dVPN}{dr} = \sum_1^n (-s) \, R_s \, (1+r)^{-(s+1)}$ < 0 cuando $R_s > 0$ $\forall s$

$\frac{d^2VPN}{dr^2} = \sum_1^n s \, (s+1) \, R_s \, (1+r)^{-(s+2)}$ > 0

En el cuadro 2.1 representamos gráficamente el VPN. La función es decreciente:



Cuadro 2.1: Representación del VPN.
Fuente: Generación proyectos, [8].

$$VPN = \sum_{s=1}^{n} R_s \, (1+TIR)^{-s} - C_0$$

En el gráfico, la tasa de rentabilidad interna es el punto de corte con el eje de abscisas: $VPN\,(r) = 0$.

Si los rendimientos R_s no son todos positivos, puede ocurrir que la función VPN no sea continuamente decreciente y que pueda producirse más de un resultado para la tasa de rentabilidad interna. Si esto sucede es porque estamos ante una inversión *mixta*, es decir, una operación que combina tramos de inversión y de financiación. Lo habitual son operaciones de inversión *pura* (primero se desembolsa y luego se obtienen los ingresos netos).

Si nos encontramos en una situación de equilibrio, con mercados de capitales y oportunidades de inversión productiva, el valor presente neto de una inversión productiva es igual a la diferencia entre el nivel de riqueza, en el momento actual, antes y después de la inversión. Esto es debido a que el VPN está relacionado con la riqueza, no con la productividad.

Siendo r_m el coste de oportunidad del capital, realizaremos una inversión si la tasa de rentabilidad interna es mayor que r_m.

Se cumplirá entonces que VPN > 0. Siguiendo esta regla, es como se toman las decisiones de inversión. Así pues, la tasa de rentabilidad interna viene dada por:

$$Rentabilidad = \frac{ganancia}{inversión} = \frac{(valor\ final - inversión\ requerida)}{inversión\ requerida}$$

El mayor inconveniente de la TIR es la dificultad para despejar r de dicha ecuación cuando existen más de dos flujos netos de caja. Para poder llevarlo a cabo serían necesarios métodos numéricos de aproximación, como suelen utilizar las hojas de cálculo.

La relación entre el VPN y la TIR es la siguiente:

$$VPN = \sum_{s=1}^{n} \frac{R_s}{(1+TIR)^s} - C_0 = 0$$

Tanto el criterio del valor presente neto cómo la tasa de rentabilidad interna, son los más completos para la elección de inversiones desde la perspectiva de la valoración financiera. En ambos casos se establece la equivalencia financiera en el origen.

Pongamos un ejemplo sencillo para ver cómo se utilizan la TIR y el VPN a la hora de elegir una inversión u otra. Los datos están recogidos en el cuadro 2.2.

INVERSIÓN	IMPORTE INVERSIÓN (euros)	RESULTADO (euros)
A	1600	2400
B	1300	1560
C	200	200

Cuadro 2.2: Ejemplo sobre TIR y VPN.
Fuente: Elaboración propia.

Supongamos que la rentabilidad de la inversión financiera es el 5%. (r_m = 5%).

$VPN\ A = valor\ actual - inversión = \frac{Resultado}{(1+r_m)} - inversión = \frac{2400}{1,05} - 1600 = 685,71\ euros.$

$VPN\ B = \frac{1560}{1,05} - 1300 = 185,71\ euros.$

$VPN\ B = \frac{200}{1,05} - 200 = -9,52\ euros.$

Solo aceptamos las inversiones que tengan un VPN>0, por lo tanto, la inversión en C queda descartada.

$TIR\ A = \frac{Resultado - inversión}{inversión} = \frac{2400-1600}{1600} = 0,5 = 50\%$

$50\% > 5\%\ ;\ TIR\ A > r_m$

$$TIR\ B = \frac{1560 - 1300}{1300} = 0,2 = 20\%$$

$20\% > 5\%\ ;\ TIR\ B > r_m$

Es más rentable la inversión A que la B, ya que obtenemos un VPN más elevado y un porcentaje en la tasa de rentabilidad interna más elevado.

Aceptamos dichas inversiones si el VPN es mayor que cero, por lo tanto se cumplirá que TIR (r_p) > r_m. Siendo TIR (r_p) la rentabilidad de las inversiones productivas.

En cualquier caso, la decisión de inversión depende del propio inversor y de su actitud frente al riesgo.

A la hora de valorar proyectos, la tasa de rentabilidad interna presenta algunas *ventajas*, (véase [1]):

1. Se interpreta de manera sencilla e intuitiva.
2. Tiene en cuenta el cambio del valor del dinero a lo largo del tiempo.
3. Es muy flexible, porque permite introducir variables como la inflación, la incertidumbre o la fiscalidad, que pueden afectar a la inversión.

Pero también tiene algunos *inconvenientes*:

1. Su cálculo es difícil y se complica cuanto mayor es el número de años en el horizonte temporal.

2. No considera los cambios del mercado o las circunstancias por las que atraviese la empresa durante el proyecto.

Cuanto mayor sea la tasa de rentabilidad interna de un proyecto, más deseable será realizar esa inversión.

Si suponemos que los demás factores son iguales entre los diferentes proyectos, el que posea la TIR más elevada, será el primer y mejor realizado.

Una diferencia significativa entre el VPN y la TIR es que, el VPN estudia la rentabilidad del proyecto en términos absolutos netos (es decir, en unidades monetarias), sin embargo, la TIR nos da un tanto por ciento (es decir, una medida relativa). Véase [9].

En el momento de analizar la rentabilidad o el coste de las operaciones financieras se debe tener en cuenta los capitales de la prestación y la contraprestación y los flujos de caja que surgen como consecuencia de la liquidación y formalización de las operaciones financieras a favor o en contra de cada una de las partes. El flujo de caja es entendido como los flujos de entradas y salidas de caja o efectivo, en un periodo dado.

En una operación financiera, junto a los capitales que se pactan intercambiar surgen una serie de obligaciones y/o derechos que suponen el cobro o pago de capitales adicionales para cada una de las partes, que se denominan “características comerciales”. Véase [13].

Estos capitales adicionales juegan un papel importante en la rentabilidad o en el coste de las operaciones.

Existen dos tipos de características comerciales:

1. Bilaterales o recíprocas: suponen un pago por una de las partes que recibe la otra. Un ejemplo serían las comisiones de apertura, ya que suponen un pago para el prestatario y un cobro para el prestamista.
2. Unilaterales: afectan solo a una de las dos partes. Ejemplos de ello serían los pagos en concepto de impuestos o los gastos de fedatario público.

En ciertas operaciones financieras, la ecuación de equivalencia para la determinación de la TIR puede tener más de una raíz positiva distinta o incluso no tener ninguna.

En estos casos es posible garantizar la existencia de una única raíz real, resultado que se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema:

En una operación financiera en la que los capitales de la prestación preceden a todos los capitales de la contraprestación, la ecuación para la obtención de la TIR tiene una única raíz real. Véase [13].

Nos encontramos ante una operación financiera definida por:

Prestación = $\{(C_1, t_1)\ (C_2, t_2) \ldots (C_n, t_n)\}$ $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

Contraprestación = {(C'_1, t'_1) (C'_2, t'_2)… (C'_m, t'_m)} $t_n < t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_m$

Esto indica que los capitales de la prestación tienen vencimientos anteriores a los capitales de la contraprestación.

Por lo tanto, la ecuación para poder calcular la TIR será:

$$C_1\,(1+k)^{-t_1} + C_2(1+k)^{-t_2} + \cdots + C_n\,(1+k)^{-t_n} = \\ = C'_1(1+k)^{-t'_1} + C'_2(1+k)^{-t'_2} + \cdots + C'_m(1+k)^{-t'_m}$$

Donde $t_1 < \ldots < t_n < t'_1 < \ldots < t'_m$ y donde C_i, $C'_j > 0$

Si multiplicamos a los dos miembros de la ecuación anterior por $(1+k)^{t_n}$ y pasando todos los términos al primer miembro nos queda:

$$\left[C_1\,(1+k)^{(t_n-t_1)} + C_2(1+k)^{(t_n-t_2)} + \cdots + C_n(1+k)^{(t_n-t_n)}\right] \\ - \left[C'_1(1+k)^{-(t'_1-t_n)} + C'_2(1+k)^{-(t'_2-t_n)} + \cdots \right. \\ \left. + C'_m(1+k)^{-(t'_m-t_n)}\right] = 0$$

Esta ecuación la podemos reescribir como:

$$g(k) = g_1(k) - g_2(k) = 0,$$

donde

$$g_1(k) = C_1(1+k)^{(t_n-t_1)} + C_2(1+k)^{(t_n-t_2)} + \cdots + C_n(1+k)^{(t_n-t_n)}$$

$$g_2(k) = C'_1(1+k)^{-(t'_1-t_n)} + C'_2(1+k)^{-(t'_2-t_n)} + \cdots + C'_m(1+k)^{-(t'_m-t_n)}$$

Como todos los C_i son mayores que cero es fácil comprobar que:

$dg_1(k)/dk > 0$ para todo $k > -1$, ya que $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Igualmente, al ser $t_n < t'_1 < \ldots < t'_m$ y todos los C'_j mayores que cero, entonces $dg_2(k)/dk < 0$, luego $-g_2(k)$ también es creciente para todo $k > -1$. Por tanto, la función g(k) es una función creciente para todo k > -1.

Por otra parte, como $\lim_{k\to -1} g(k) = -\infty$ y $\lim_{k\to +\infty} g(k) = +\infty$ necesariamente la función g (k) ha de pasar una sola vez por el eje de abscisas y, por tanto, la función g (k) tiene una sola raíz mayor que -1 que puede ser negativa o positiva.

Otro caso particular es aquel en el que la operación financiera tiene una única raíz positiva, aunque pueda tener múltiples raíces negativas.

Pongamos un ejemplo práctico. Los capitales intercambiados en una operación financiera son:

Prestación = {(1.000, 0)}

Contraprestación = {(12.653,56, 4)}

En esta operación todos los capitales de la prestación preceden a los de la contraprestación, por lo que la ecuación de equivalencia en base al régimen de capitalización compuesta tiene una única raíz.

Sea ahora, $A_t = \sum C_i - \sum C'_j$, siendo t la secuencia de vencimientos de los capitales de la prestación y contraprestación ordenada de mayor a menor. Se excluyen aquellos elementos de A_t iguales a cero. Si la serie $\{A_{t1},\ldots, A_{tf}\}$ contiene un único cambio de signo, entonces la ecuación para el cálculo de la TIR tiene una única raíz real positiva.

Por otro lado, la serie de la suma acumulada de cuantías es:

A_t = {10.000, -2.653,56},

presentando un único cambio de signo, por lo que la operación tiene una única raíz positiva.

Esta operación tiene una única tasa de rentabilidad interna y además, es positiva.

Tanto el VPN como la TIR son un importante punto de partida a la hora de evaluar un proyecto, pero hay otros temas importantes a considerar como el riesgo del proyecto, el tiempo que se tarda en recuperar la inversión, el análisis coste beneficio, etc.

Uno de los beneficios de la TIR es que se centra en los flujos netos de efectivo del proyecto, ya que la TIR es una tasa efectiva.

La TIR no maximiza la inversión sino que maximiza la rentabilidad del proyecto.

Uno de los motivos de la amplia utilización de la TIR es que los empresarios encuentran más sencillo comparar los proyectos en términos de rentabilidad promedio en vez de en términos de valor presente neto. Véase [19].

Cuando comparamos las tasas de rentabilidad interna de dos proyectos no tenemos en cuenta las posibles diferencias en dimensión de los mismos.

Una gran inversión con una TIR baja puede tener un VPN superior a un proyecto con una inversión pequeña con una TIR elevada.

2.2 LOS PRÉSTAMOS HIPOTECARIOS

El préstamo hipotecario es el producto que nos permite disponer de cierta cantidad de dinero que necesitamos para adquirir un bien inmueble.

Las entidades bancarias exigen garantías antes de conceder los préstamos. En el caso concreto de los hipotecarios, la garantía es el propio inmueble, que pasará a manos de la entidad financiera en caso de impago.

Un préstamo es una operación en la cual participan dos partes. Una de ellas (prestamista o acreedor) otorga un capital a la otra parte (prestatario o deudor), que se compromete a devolver su equivalente a través de diferentes pagos a lo largo de la duración. Son operaciones que conllevan prestación única pero contraprestación múltiple. Se trata de operaciones de crédito unilateral, siempre a favor del prestamista. Véase [6].

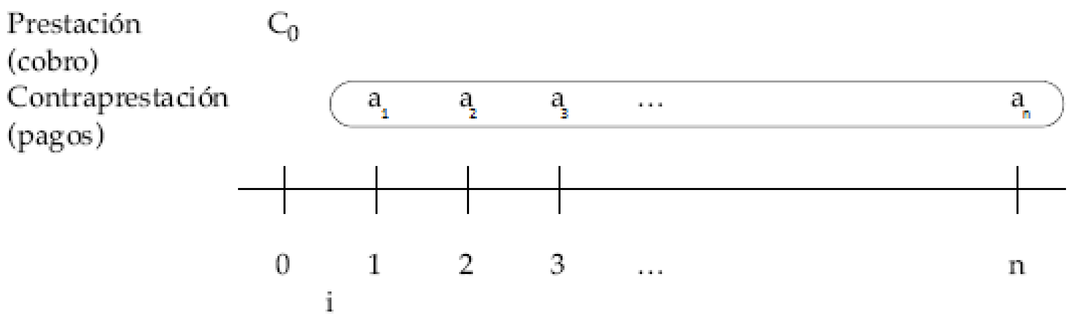
Debido a que los préstamos son, generalmente, operaciones de largo plazo, la ley financiera que se usa es la capitalización-descuento compuesto.

Todas las entidades financieras tienen el deber de entregar al deudor el documento contractual de las operaciones que contrate. Dicho documento debe recoger:

- El tipo de interés nominal.
- Frecuencia con la que se producirá el devengo de intereses y fechas.
- Cuantía de las comisiones.

Los capitales que entrega la contraprestación se denominan: "términos amortizativos" o "cuotas a pagar".

Gráficamente, el esquema de un préstamo es el que se refleja en el cuadro 2.3:



Cuadro 2.3: Esquema de un préstamo.
Fuente: Operaciones financieras. CEF. [15]

Para conocer a cuánto asciende la cuantía de los términos amortizativos utilizamos la *ecuación de equivalencia*:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s (1+r)^{-s}$$

C_0: Capital prestado.

a_s: Cuotas a pagar o términos amortizativos.

r: Tipo de interés en cada periodo.

La característica más importante que tienen los préstamos hipotecarios es que el prestatario hipoteca bienes inmuebles como garantía de la operación. El tipo de interés es menor que en otras operaciones similares en duración y cuantía ya que se reduce el riesgo de impago para el acreedor.

2.3 CARACTERÍSTICAS DE LOS PRÉSTAMOS HIPOTECARIOS

Las principales características de los préstamos son el interés y la tasa anual equivalente (TAE).

El interés es el precio que se paga por tener el préstamo hipotecario y el beneficio que obtiene la entidad bancaria por prestar ese dinero.

Con respecto al TAE, aunque hablaremos más adelante de ello, es importante saber que incluye otros gastos además de los intereses nominales.

Para comparar los costes de un préstamo es más efectivo fijarse en el TAE que en el interés nominal. Véase [5].

Las características más destacadas de los préstamos hipotecarios son:

1. De importante cuantía.
2. De larga duración. (Suelen sobrepasar los 10 años).
3. Las cuotas a pagar suelen ser mensuales constantes o crecientes en progresión geométrica.
4. Gastos iniciales elevados debidos a la gestoría, notaría, registro de la propiedad, etc.
5. Gastos de cancelación de la hipoteca.
6. Tipo de interés (que puede ser fijo o variable).
7. El capital prestado C_0 suele ser menor o igual al 80% del valor de la tasación del inmueble de la hipoteca.
8. El impuesto de Transmisiones Patrimoniales y Actos Jurídicos Documentados, que grava el establecimiento de la hipoteca y su cancelación. Dicho impuesto corre a cargo del deudor.

Para regular los préstamos hipotecarios existe un Mercado Hipotecario en el que participan las entidades financieras de manera activa. Véase [6].

2.4 TIPOS DE PRÉSTAMOS HIPOTECARIOS

Los préstamos hipotecarios son importantes en el ámbito económico-financiero por el elevado número de operaciones que se efectúan y por la cuantía total de ellas.

El tipo de interés es el beneficio que obtienen las entidades por prestar su dinero. Los préstamos hipotecarios pueden ser concedidos a tipo de interés fijo o variable. Véase [7].

1. PRÉSTAMOS HIPOTECARIOS A TIPO FIJO:

Los casos más habituales son:

- El pago de mensualidad constante (conocido como método francés).
- Crecientes en progresión geométrica.

2. PRÉSTAMOS HIPOTECARIOS A INTERÉS VARIABLE:

En el momento inicial no conoceremos el tipo de interés que se aplicará en cada periodo, ya que depende de un tipo de interés que se toma como referencia.

Los tipos de interés de referencia más comunes en el mercado hipotecario español son:

- El Euribor a un año (EURopean InterBank Offered Rate). Los plazos de cotización van desde un mes hasta un año.
- Índice de Referencia de los Préstamos Hipotecarios o IRPH de los bancos. Es el tipo de interés medio que están aplicando los bancos a los préstamos hipotecarios a más de tres años de vivienda libre.
- IRPH de las cajas. Es igual que el tipo de interés medio anterior, pero lo aplican las cajas de ahorro.
- El Índice CECA (Confederación Española de Cajas de Ahorro).
- El tipo medio del conjunto de las entidades de crédito.
- La TIR de la deuda pública con vida residual entre dos y seis años en operaciones simples al contado del mercado secundario.

El tipo de interés en cada periodo al que resulta el préstamo lo obtenemos sumando el tipo de referencia y otro tipo de interés denominado “margen” o “diferencial” *(spread)*. Este último tipo de interés se fija al inicio de la operación y suele variar entre un 0,25% y un 1,5%.

$$\boxed{I_s = i_{R,s} + i_d}$$

El I_s es el tipo de interés o rédito que se aplicará en el periodo s. Siendo:

$i_{R,s}$: Tipo de referencia. Puede variar en cada periodo.

i_d: “margen” o “diferencial”. Es un tipo fijo.

2.5 MÉTODOS AMORTIZATIVOS DE LOS PRÉSTAMOS

La amortización consiste en distribuir con periodicidad la devolución del capital prestado C_0, junto con los intereses que se vayan devengando durante la vida del préstamo.

Los pagos periódicos que realiza el deudor tienen la finalidad de amortizar o extinguir el capital inicial prestado. Véase [6].

Algunos métodos amortizativos son:

1. <u>MÉTODO FRANCÉS:</u>

También es denominado método progresivo.

Los términos amortizativos son constantes ($a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \ldots = a$), y la operación se valora con un solo tanto i, durante toda la vida del préstamo.

La contraprestación es de cuantía constante, temporal y pospagable.

Conociendo el capital prestado C_0, la duración y el tanto i podemos obtener el término amortizativo constante a través de la ecuación de equivalencia:

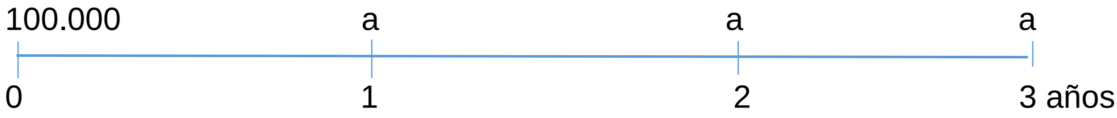
$$C_0 = a * a_{n\urcorner\, i}$$

Si despejamos el término amortizativo:

$$a = \frac{C_0}{a_{n\urcorner\, i}} = \frac{C_0 * i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Pongamos un ejemplo, (véase [15]). Obtenemos un préstamo por importe de 100.000 euros, con una duración de tres años y un tipo de interés al 10% anual (i = 0,1). Los términos amortizativos anuales son constantes.

Representamos el préstamo gráficamente en el cuadro 2.4:



Cuadro 2.4: Representación préstamo.
Fuente: Elaboración propia.

$$a = \frac{100.000}{a_{3\urcorner\, 0,10}} = \frac{100.000 * 0,1}{1-(1+0,1)^{-3}} = 40.211,48$$

Este es el término amortizativo, es decir, el importe del pago total a realizar.

La amortización o cuota de amortización se calcula mediante la diferencia entre el término amortizativo y los intereses.

El capital vivo se obtiene de restar al capital pendiente de amortizar a principios de cada periodo, la amortización de ese mismo periodo.

El cuadro de amortización queda reflejado en el cuadro 2.5. Se trata de una tabla en la que se recogen los términos amortizativos, las cuotas de intereses, las cuotas de amortización y los capitales vivos.

Para aclarar cómo hemos calculado la cuota de interés:

$$I_s = C_{s-1} * i$$

Siendo C_{s-1} el capital vivo del periodo anterior:

I_1 = 100.000 * 0,1 = 10.000

I_2 = 69.788,52 * 0,1 = 6.978,85

…

Con el sistema francés, a medida que pasa el tiempo, cada vez se paga más capital y menos intereses. Es el sistema más utilizado.

AÑO	TÉRMINO AMORTIZATIVO	CUOTA DE INTERÉS	AMORTIZACIÓN	CAPITAL VIVO
0				100.000
1	40.211,48	10.000	30.211,48	69.788,52
2	40.211,48	6.978,85	33.232,63	36.555,89
3	40.211,48	3.655,59	36.555,89	
TOTAL	120.634,44	20.634,44	100.000	

Cuadro 2.5: Cuadro de amortización.
Fuente: "Operaciones financieras. Teoría y problemas resueltos", [15].

2. <u>MÉTODO DE CUOTAS DE AMORTIZACIÓN CONSTANTES:</u>

En este caso: $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$

La valoración es a tanto constante i.

Y la relación es: $C_0 = n * A,\ por\ lo\ tanto,\ A = \frac{C_0}{n}$.

La cuota de intereses se calcula exactamente igual que en el método francés:

$$I_s = C_{s-1} * i$$

El cuadro de amortización se construye de la misma manera también.

3. <u>MÉTODO AMERICANO SIMPLE:</u>

Durante los $(n-1)$ primeros periodos solo se pagan intereses. En el último periodo es cuando se produce la amortización total del préstamo.

$A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = 0$, es decir, $A_n = C_0$

Las cuotas de intereses son: $I_1 = I_2 = \cdots = I_n = C_0 * i$

Los términos amortizativos de los $(n-1)$ primeros periodos:

$a_1 = \cdots = a_{n-1} = C_0 * i$

$a_n = (C_0 * i) + C_0$

Este método probablemente sea el más sencillo, porque durante los $(n-1)$ primeros periodos no se amortiza nada, por lo tanto, el capital vivo al final de cada periodo es igual a C_0 y el capital amortizado es igual a cero.

4. <u>MÉTODO ALEMÁN:</u>

Los términos amortizativos son constantes, las cuotas son decrecientes y el interés va disminuyendo.

$$C_0 = C'_0 - C'_0 * i = C'_0 (1 - i_*)$$

C'_0 : Capital nominal prestado (el que figura en el contrato del préstamo).

i_* : Tipo de interés anticipado.

Para obtener el término amortizativo utilizamos la siguiente expresión:

$$C'_0 = a * \frac{1-(1-i_*)^n}{i_*}$$

La relación entre el tipo de interés anticipado i_* y el tipo de interés ordinario o vencido i se obtiene a partir de:

$$1 - i_* = (1+i)^{-1} \rightarrow \begin{cases} i_* = \dfrac{i}{1+i} \\ i = \dfrac{i_*}{1-i_*} \end{cases}$$

5. <u>MÉTODO AMERICANO CON FONDOS (SINKING FUND):</u>

Consiste en el pago de los intereses al prestamista (préstamo americano) periódicamente, y al mismo tiempo una aportación para construir un capital, con el que se cancelará el capital del préstamo americano a su vencimiento.

Este método es muy utilizado en Norteamérica.

Se trata de la suma de un préstamo americano más un fondo de constitución de capital.

2.6 VALOR DEL PRÉSTAMO A TANTO DE MERCADO, TANTOS EFECTIVOS Y TAE

A lo largo de la duración de un préstamo, el prestamista goza de unos derechos económicos que son los términos amortizativos que ha de recibir hasta que finalice la operación. El valor de estos derechos es el capital pendiente de amortizar. Véase [6].

En los mercados de capitales, los tipos de interés son volátiles, es decir, fluctúan a lo largo el tiempo. Los tipos de interés aumentan y disminuyen en función de la situación económica general, de la inflación, de la demanda de capitales en cada momento, etc.

Si el prestamista, quiere transmitir sus derechos a una tercera persona, recibirá su valor de acuerdo a los tipos de interés que en ese momento estén vigentes en el mercado de capitales para operaciones semejantes. El capital así obtenido se denomina *valor del préstamo*.

<u>TANTOS EFECTIVOS:</u>

Estos tantos tienen características unilaterales, por lo tanto son distintos para cada una de las partes. (Las entrega una de las partes y van a parar a terceros).

Los prestatarios pueden deducirse los intereses en el impuesto de Sociedades y también en el IRPF para empresarios y profesionales que financien activos afectos a su actividad profesional o a su negocio.

Los préstamos están exentos del impuesto sobre el valor añadido (IVA). Pero los préstamos hipotecarios están sujetos a AJD (Actos Jurídicos Documentados) en la cita de Documentos Notariales y en el momento de la constitución y cancelación de la hipoteca.

Para calcular el tanto efectivo para cada una de las partes hay que tener en cuenta lo que real o efectivamente recibe y entrega cada parte. La incógnita de la ecuación de equivalencia será el tanto que equilibra financieramente lo que se entrega y se recibe.

<u>TANTO EFECTIVO PARA EL PRESTATARIO:</u>

Puede que el prestatario tenga los siguientes gastos:

1. En el momento inicial:
    - 1.1 Gastos notariales relativos a la constitución, modificación o cancelación de la hipoteca.
    - 1.2 Gastos de registro (según arancel).
    - 1.3 Gastos de tasación del inmueble.
    - 1.4 Gastos de gestoría.
    - 1.5 Impuesto de Actos Jurídicos Documentados.

2. Durante la vida del préstamo:

Se producen cuando el prestatario realiza el pago mediante transferencia o cheque conformado. En ocasiones se fija un tanto por mil de la cuantía de cada término amortizativo en concepto de "gastos de administración" del préstamo.

3. Al final de la operación:

Se producen gastos con motivo de levantar las cargas establecidas sobre los bienes hipotecados. Estos gastos son:

- 3.1 Gastos de notaría al cancelar la hipoteca.
- 3.2 Gastos de registro de la propiedad.
- 3.3 Gastos de gestoría.
- 3.4 Impuesto AJD (igual que en el momento inicial).

Para calcular el tanto efectivo r para el prestatario utilizamos la "ecuación de equivalencia financiera":

$$\boxed{C_0 - G_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s\,(1+r)^{-s} + G_n\,(1+r)^{-n}}$$

De esa ecuación despejamos la r.

G_0: Todos los gastos iniciales.

a_s: Término amortizativo que desembolsa el prestatario en el periodo s.

G_n: Gastos finales (si existen).

4. Cancelación anticipada del préstamo:

Si la cancelación la solicita el prestatario en el contrato figura una penalización que consiste en un porcentaje del capital pendiente de amortizar.

TANTO EFECTIVO DEUDOR O DEL PRESTATARIO:

Prestación real prestatario	⟷	Contraprestación real prestatario
Lo recibido		Lo entregado
(Importe préstamo)		(Términos amortizativos + Gastos)

TANTO EFECTIVO PARA EL PRESTAMISTA:

Si el prestamista es un banco o una caja de ahorros tienen ingresos en lugar de gastos, ya que cobran comisiones de apertura y estudio.

Durante la vida del préstamo:

- Si la persona es física, los intereses percibidos se consideran ingresos del capital mobiliario en su declaración del IRPF.
- Si la persona es jurídica, lo percibido en concepto de intereses son ingresos financieros.

El término amortizativo neto a'_s correspondiente al periodo s, para un tipo impositivo t_s (en tanto por uno), es:

$$a'_s = a_s - I_s * t_s$$

La ecuación de equivalencia para obtener el tanto efectivo r es la siguiente:

$$C_0 - I_0 = \sum_{s=1}^{n} a'_s \,(1+\mathrm{r})^{-s}$$

Suponemos que I_0 son los ingresos iniciales por las comisiones de apertura y estudio que percibe y que no tiene gastos iniciales.

TANTO EFECTIVO DEL PRESTAMISTA:

Prestación real prestamista	⟷	Contraprestación real prestamista
Lo entregado		Lo recibido
(Importe préstamo + Gastos)		(Términos amortizativos)

Puede darse el caso de que, en un préstamo, además de devolverse el capital y pagarse los intereses, existan otros pagos y cobros de distinta naturaleza.

Hay que determinar la equivalencia entre lo realmente entregado y recibido en la operación. Esto será una medida efectiva de la rentabilidad obtenida por el prestamista y el coste efectivo que soporta el deudor.

Pongamos un ejemplo para explicar los tantos efectivos. Véase [4]:

Se presta un capital igual a 15.000 euros a amortizar en cuatro años (por el sistema francés). El tipo de interés anual es del 12%. Existen unos gastos iniciales a cargo del prestatario de 150 euros, que denominaremos “A”. Por otro lado, existen unos gastos anuales a cargo también del prestatario de 50 euros. Y, es importante saber, que los gastos imputables al prestatario los cobra un tercero.

¿Cuál es el tanto efectivo del prestamista?

Primero calculamos el término amortizativo:

$$a = \frac{15.000 * 0,12}{[1-(1+0,12)^{-4}]} = 4938,52$$

Lo entregado por el prestamista ←→ Lo recibido por el prestamista

$$15.000 = 4938,52 * \; a4\urcorner\, i$$

La rentabilidad que obtiene el prestamista viene determinada exclusivamente por el tipo de interés del préstamo (que es constante). Por lo tanto, el resultado es 12%.

¿Cuál es el tanto efectivo del prestatario?

Lo recibido por el prestatario ←→ Lo entregado por el prestatario

$$15.000 = 150 + (4938,52 + 50) * a_{4\urcorner\, i}$$

$$a_{4\urcorner\, i} = [C(1+TIR)^{-t_1} + \cdots + C(1+TIR)^{-t_4}] + A$$

$$15.000 = 150 + (4938,52 + 50)[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4}]$$

$$3 = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4}$$

Por lo tanto, si cambiamos la variable i por X_0 e igualamos a cero, tenemos:

$$f(X_0) = 3 - (1+X_0)^{-1} - (1+X_0)^{-2} - (1+X_0)^{-3} - (1+X_0)^{-4}$$

$$f'(X_0) = (1+X_0)^{-2} + 2(1+X_0)^{-3} + 3(1+X_0)^{-4} + 4(1+X_0)^{-5}$$

Aplicando comandos en Matlab despejaríamos la incógnita X_0 (que correspondería a la TIR), apoyándonos en el método de Newton-Raphson, que veremos más adelante.

La solución sería 12%. Llegamos a ella a través de una calculadora financiera o tanteando en la ecuación.

<u>EL TAE O TANTO ANUAL DE LOS PRÉSTAMOS:</u>

La Circular 8/90 del Banco de España define lo que es el TAE indicando las comisiones y gastos repercutibles que han de incluirse en su cálculo.

En dicha Circular se fijan las normas que las entidades bancarias deben cumplir con respecto a su clientela en lo referente a:

1. Publicidad de los tipos de interés.
2. Tarifas de comisiones y gastos repercutibles a los clientes.
3. Servicio de reclamaciones.
4. Fechas de adeudos y abonos.
5. Coste y rendimiento efectivo de las operaciones.

El TAE mide la rentabilidad para la entidad financiera. Se tienen en cuenta las comisiones que percibe la entidad pero no computan en su cálculo los gastos complementarios y suplidos. Véase [6].

El TAE se calcula igual que el tanto efectivo pero teniendo en cuenta los gastos y comisiones que incluye el Banco de España. El TAE no mide el tanto efectivo para el cliente de la entidad bancaria.

Denominamos tanto efectivo al tanto que establece el equilibrio entre lo que efectivamente se ha recibido y entregado. Es decir, entre la prestación y la contraprestación reales.

Y por último, mencionar, que el TAEC es el tanto efectivo para el prestatario, ya que tiene en cuenta todos los gastos del préstamo.

2.7. FOLLETOS INFORMATIVOS DE PRÉSTAMOS HIPOTECARIOS

Los folletos informativos sobre préstamos hipotecarios contienen los siguientes elementos mínimos (sujetos a la Orden del Ministerio de la Presidencia de 5 de mayo de 1994):

1. Identificación del préstamo. Alberga los siguientes datos:
    - 1.1 Moneda del préstamo (en caso de ser diferente al euro).
    - 1.2 Designación comercial.
    - 1.3 Cuantía tope del préstamo con respecto al valor de tasación del inmueble propiamente hipotecado.
2. Plazos:
    - 2.1 Plazo total del préstamo.
    - 2.2 Repetición regular de los pagos (mensual, trimestral, semestral, etc) y el sistema de amortización del principal (creciente, constante, etc).
    - 2.3 Plazo de déficit de amortización del capital.
3. Tipo de interés:
    - 3.1 Tipo de interés (fijo o variable).
    - 3.2 Tipo de interés nominal aplicable.
    - 3.3 Plazo de revisión del tipo de interés. (La primera revisión y la frecuencia de las sucesivas).
    - 3.4 Índice de referencia, en préstamos a interés variable.

3.5 Tasa anual equivalente, indicando el intervalo en el que pueda moverse.

4. Comisiones:

   4.1 Comisión de apertura.

   4.2 Si se produce una amortización anticipada existe una cantidad o porcentaje que deberá satisfacer el prestatario a la entidad prestamista.

   4.3 Otras comisiones.

5. Gastos a cargo del prestatario:

   5.1 Servicios que proporciona la propia entidad de crédito.

   5.2 Servicios contratados y abonados directamente por el cliente de manera obligatoria.

   5.3 Régimen de aportaciones y momento en el que se realizan.

   5.4 Impuestos y aranceles.

6. Importe de las cuotas periódicas. Se entrega al solicitante una tabla de cuotas periódicas en función del tipo de interés y del plazo.

3. MÉTODOS DE LOCALIZACIÓN DE RAICES EN ECUACIONES NO LINEALES

Denominaremos raíz o cero de una función $f(x)$ a todo X perteneciente al dominio de dicha función que cumpla que $f(x) = 0$. Esto es, los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas.

Con frecuencia, no es posible encontrar explícitamente las raíces a partir de la expresión de la función f. Por tanto, debemos utilizar métodos numéricos para calcular aproximaciones de las raíces.

3.1 MÉTODOS DE NEWTON-RAPHSON Y DE LA SECANTE

EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON:

El método de Newton fue descrito por Isaac Newton. Newton solo aplicaba el método a polinomios. Pero el método es llamado así gracias al matemático inglés Joseph Raphson (contemporáneo de Newton). También es conocido como “método de Newton-Fourier”. Es uno de los métodos más usados y efectivos.

Este método es un algoritmo eficiente para encontrar aproximaciones a la solución de una ecuación del tipo: $f(x) = 0$. Cada una de esas aproximaciones se llama *iteración*. (Véase [18]).

Se utiliza la siguiente fórmula de recurrencia para construir la sucesión de aproximaciones, pero siempre se parte de una estimación inicial de la solución X_0:

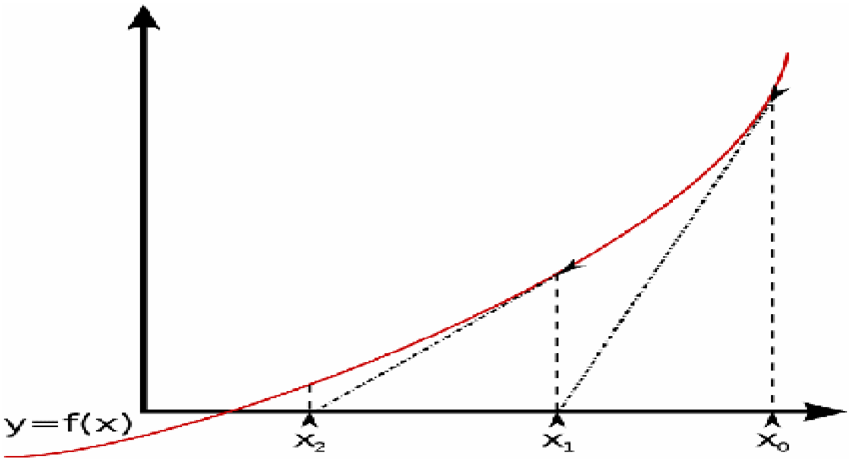
$$X_{j+1} = X_j - \frac{f(X_j)}{f'(X_j)} \; .$$

Este método no trabaja sobre un intervalo, sino que se basa en un proceso iterativo. También converge muy rápidamente y proporciona unos resultados muy precisos.

El método de Newton utiliza las rectas tangentes que pasan por la sucesión de aproximaciones de la raíz.

Si se da un caso en el que $f'(x) = 0$ no podríamos aplicar el método, porque la recta tangente es horizontal, por lo tanto nunca intersecciona con el eje X.

Representamos la función $y = f(x)$ a la que queremos encontrar una raíz por el procedimiento de Newton-Raphson. Gráficamente, el método queda reflejado en el cuadro 3.1:



Cuadro 3.1: Newton-Raphson.
Fuente: Wikipedia, [18].

Gráficamente, la raíz es el punto que corta al eje de abscisas.

1. Tomamos un punto X_0 que consideremos que esté cercano a la raíz (lo vemos gráficamente o bien aleatoriamente).
2. En ese punto X_0 trazamos la recta tangente a la gráfica y vemos su punto de corte con el eje X. Así obtenemos el punto X_1.
3. En X_1 repetimos el procedimiento. Trazamos una recta tangente a la gráfica y vemos donde corta al eje X. Así obtenemos el punto X_2.
4. En X_2 hacemos lo mismo y obtenemos el punto que finalmente corta al eje X.

Con solo tres iteraciones obtenemos un valor muy próximo a la raíz buscada. El iterante X_3 (que correspondería al punto que corta al eje X) podría ser una aproximación adecuada a la raíz que estamos buscando.

El método de Newton-Raphson se puede emplear para resolver ecuaciones no lineales porque es eficiente. Una de las principales ventajas de este método es la mayor velocidad de convergencia respecto de otros métodos.

La convergencia del método es cuadrática siempre y cuando:

$$f(x) = 0 \ \ posea\ una\ solución\ en\ [a, b]$$

$$f\,'(x) \neq 0\ en\ [a, b]$$

Existen dos situaciones en las que el método puede presentar dificultades:

1. En el caso concreto de las raíces múltiples.
2. En el caso de raíces simples, si tienen lenta convergencia.

Generalmente, la convergencia es cuadrática porque el error es básicamente cuadrado en cada paso. Esto significa que el número de dígitos exactos se duplica en cada paso. Véase [12].

El método requiere dos condiciones:

1. Que la derivada se calcule directamente.
2. Poner límite al número de iteraciones y al tamaño de las mismas.

EL MÉTODO DE LA SECANTE:

El método de la secante o método de las partes proporcionales, es una variación del método de Newton. Solo necesita una evaluación de $f(x)$ por paso. Con el método de Newton necesitábamos evaluar dos funciones por cada iteración ($f(x)\ y\ f'(x)$). Se trata de un método que sirve para encontrar los ceros de una función de forma iterativa. Véase [17].

Este método elimina el problema de la derivada de la función del que hablábamos antes. Se suele utilizar cuando es complejo calcular la derivada de la función.

El método de la secante es casi tan rápido como el de Newton. En una raíz simple tiene un orden de convergencia de R≈1,618, y el de Newton es de 2. Véase [11]. A cambio, los cálculos en este método son más simples.

Como la velocidad de convergencia es menor que la de Newton, corremos el riesgo de que la primera aproximación a la raíz no esté lo suficientemente cercana a ella. Es decir, corre el riesgo de no converger a la raíz por ser un proceso iterativo.

Es un método cerrado, porque no se necesita que $f(x)$ cambie de signo.

La ecuación de recurrencia de este método es:

$$X_{j+1} = X_j - \frac{X_j - X_{j-1}}{f\big(X_j\big) - f\big(X_{j-1}\big)} * f(X_j)$$

El objetivo es obtener la recta que pasa por los puntos $(X_{j-1}, f\big(X_{j-1}\big))$ y $(X_j, f(X_j))$. La recta tangente a la curva del método de Newton, aquí se reemplaza por una recta secante, que corta la gráfica de la función.

Este método casi nunca falla ya que, el mismo método se va retroalimentando y solo necesita dos puntos al principio, que pueden ser arbitrarios.

Este método va trazando rectas secantes a la curva de la ecuación original que analizamos, y se calcula la intersección de dichas rectas con el eje de abscisas, hasta obtener una aproximación adecuada a la raíz buscada.

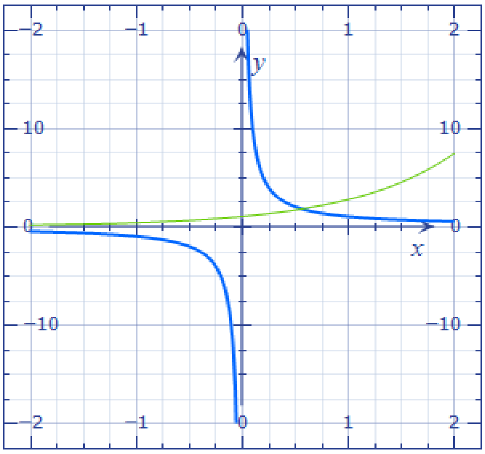
Es un método rápido y preciso, que necesita pocas iteraciones. Presenta ciertas ventajas como la de que se procede independientemente a los signos de la función.

3.2 APLICACIÓN EMPÍRICA DEL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Con el siguiente ejemplo, (véase [14]), vamos a detallar todos los pasos que hay que seguir en la aplicación del método de Newton–Raphson para obtener el valor de x que verifique la siguiente igualdad: $e^x = \frac{1}{x}$

En este caso, nos sería imposible despejar la incógnita X, pero si representamos por un lado, $y = e^x$, y por otro lado, $y = \frac{1}{x}$, si sería factible.

En el cuadro 3.2 quedan reflejadas ambas funciones:



Cuadro 3.2: Ejemplo 1.
Fuente: Elaboración propia.

Vamos a aplicar el método de “Newton-Raphson” por pasos:

1. Escribimos la ecuación, para que sea del tipo $f(x) = 0$

$$f(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

2. Calculamos su derivada:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$$

3. Con la fórmula arriba descrita:

$$X_{j+1} = X_j - \frac{e^{X_j} - \frac{1}{X_j}}{e^{X_j} + \frac{1}{X_j^2}}$$

4. Se parte de una estimación inicial de la solución. Por ejemplo:

$$X_0 = 1$$

Vamos a calcular la sucesión de aproximaciones:

$X_0 = 1$

$$X_1 = 1 - \left(\frac{e^1 - \frac{1}{1}}{e^1 + \frac{1}{1^2}} \right) = 0{,}537882$$

$$X_2 = X_1 - \left(\frac{e^{x_1} - \frac{1}{x_1}}{e^{x_1} + \frac{1}{x_1^2}} \right) = 0{,}566277$$

$X_3 = 0{,}567142$

$X_4 = 0{,}567143$

$X_5 = 0{,}567143$

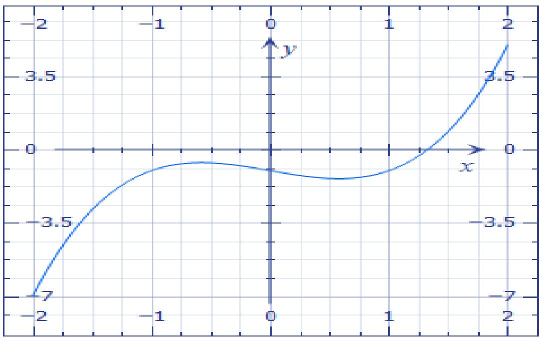
En el último iterante calculado coinciden hasta seis decimales.

En el siguiente ejemplo tomaremos como punto de partida $X_0 = 1$. Esta es la primera iteración.

$$f(X_0) = x^3 - x - 1 = 0$$

En el cuadro 3.3 queda representada dicha función.

$$X_{j+1} = X_j - \frac{f(X_j)}{f'(X_j)} \; ; \; si \; f'(X_j) \neq 0$$



Cuadro 3.3: Ejemplo 2.
Fuente: Elaboración propia.

Tiene sentido que tomemos $X_0 = 1$ porque está muy próximo a la raíz como podemos ver de manera gráfica.

$f'(X_0) = 3x^2 - 1$

$X_0 = 1$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1{,}5$$

$$X_2 = 1{,}5 - \frac{f(1{,}5)}{f'(1{,}5)} = 1{,}5 - \left(\frac{0{,}875}{5{,}75}\right) = 1{,}34782$$

$$X_3 = 1{,}34782 - \frac{f(1{,}34782)}{f'(1{,}34782)} = 1{,}32520$$

$$X_4 = 1{,}32520 - \frac{f(1{,}32520)}{f'(1{,}32520)} = 1{,}3247$$

$$X_5 = 1{,}3247 - \frac{f(1{,}3247)}{f'(1{,}3247)} = 1{,}3247$$

Por lo tanto, la raíz que buscamos es, aproximadamente 1,32.

Ahora vamos a utilizar el método de Newton-Raphson para calcular: √5. Véase [11].

$\sqrt{5} = 2{,}236067$; realizado con calculadora.

Empezamos con $X_0 = 2$ y usamos la iteración de Newton-Raphson para el cálculo de raíces cuadradas:

$$X_j = \frac{1}{2}\left(X_{j-1} + \frac{A}{X_{j-1}}\right) \; para \; j = 1{,}2, \ldots$$

Supongamos que $A > 0$ es un número real y sea $X_0 > 0$ una aproximación inicial a $\sqrt{A}$. Entonces la sucesión converge a $\sqrt{A}$.

$X_0 = 2$

$$X_1 = \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = 2{,}25$$

$$X_2 = \frac{2{,}25 + \frac{5}{2{,}25}}{2} = 2{,}236111$$

$$X_3 = \frac{2{,}236111 + \frac{5}{2{,}236111}}{2} = 2{,}236067$$

$$X_4 = \frac{2{,}236067 + \frac{5}{2{,}236067}}{2} = 2{,}236067 = \sqrt{5}$$

Hemos conseguido una exactitud de seis cifras decimales.

Pueden existir inconvenientes y dificultades a la hora de aplicar el método que no son fáciles de advertir. Supongamos, por ejemplo, que la función es:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5\,.$$

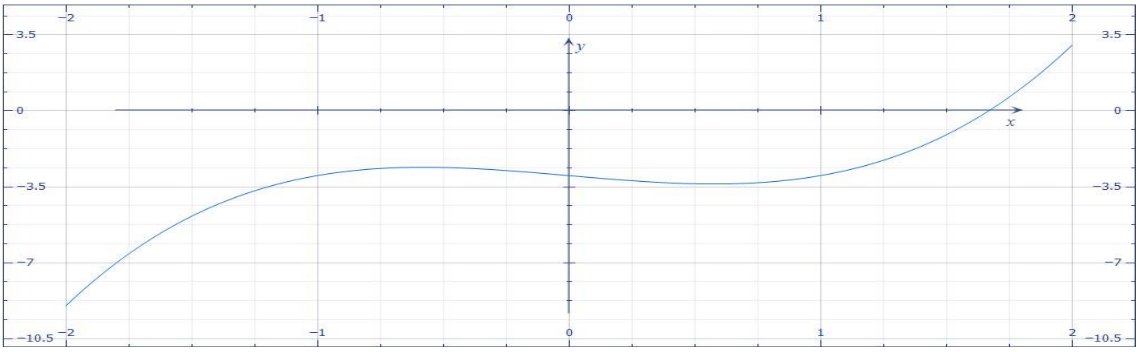
En ocasiones, la aproximación inicial X_0 está demasiado lejos de la raíz deseada y la sucesión de iteraciones converge a otra raíz. Esto suele ocurrir cuando la pendiente $f'(X_0)$ es pequeña y la recta tangente a la curva $y = f(x)$ es casi horizontal.

Otro fenómeno importante que puede darse es el de la periodicidad. Sucede cuando los términos de la sucesión tienden a repetirse o casi repetirse.

Un ejemplo de ello, (véase [11]): $f(x) = x^3 - x - 3$. En el cuadro 3.4 queda reflejada dicha función.

La aproximación inicial es $X_0 = 0$.

La iteración de Newton-Raphson para $f(x) = x^3 - x - 3$ puede producir una sucesión periódica.



Cuadro 3.4: Ejemplo 4.
Fuente: Elaboración propia.

La sucesión que obtendríamos sería la siguiente:

$X_1 = -3{,}000000$

$X_2 = -1{,}961538$

$X_3 = -1{,}147176$

$X_4 = -0{,}006579$

$X_5 = -3{,}000389$

$X_6 = -1{,}961818$

$X_7 = -1{,}147430$

Quedamos atrapados en un ciclo. Sin embargo, si el valor inicial X_0 está suficientemente cerca de la raíz X ≈ 1,671699, entonces la sucesión converge. Por ejemplo, si $X_0 = 2$, entonces la sucesión converge y:

$X_1 = 1{,}727272$
$X_2 = 1{,}673691$
$X_3 = 1{,}671702$
$X_4 = 1{,}671699$

En algunas ocasiones, la sucesión no converge; no siempre se da el caso de que encontremos una solución después de N iteraciones. Los programas de cálculo de raíces deben ser capaces de informar de esta situación.

Realmente no existe una fórmula que nos permita obtener las raíces de una ecuación que se plantea para obtener la tasa de rentabilidad interna de las operaciones financieras. Es por ello que, el método de Newton se utiliza cuando los capitales de la prestación preceden a los capitales de la contraprestación. Véase [10].
La fórmula de recurrencia de Newton resuelve la ecuación que proporciona la tasa de rentabilidad interna de una operación financiera.

Pongamos un ejemplo:

$$f(x) = 10.000 - 12.653{,}59(1+x)^{-4} = 0$$

Si escogemos como solución inicial $X_0 = 0$, tenemos:

$$f(0) = 10.000 - 12.653{,}59 = -2.653{,}59$$

Por otra parte, la función $f'(x)$ será: $f'(x) = 12.653{,}59 * 4(1+x)^{-5}$; por lo que:

$$f'(X_0) = f'(0) = 50.614{,}36\ .$$

Obtenemos X_1:

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = 0 - \frac{-2.653{,}59}{50.614{,}36} = 0{,}052427$$

Si admitimos un error máximo de $\varepsilon = 0{,}0001$ y $X_1 - X_0 = 0{,}0524271 > \varepsilon$, hay que repetir el proceso:

$$f(X_1) = -314{,}41379$$
$$f'(X_1) = 39.202{,}387$$

Por lo tanto:

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)} = 0{,}052427 - \frac{-314{,}41379}{39.202{,}387} = 0{,}0604473$$

Como $X_2 - X_1 = 0{,}00802 > 0{,}0001$; hay que realizar una nueva iteración:

$$f(X_2) = -5{,}900063$$
$$f'(X_2) = 37.742{,}184$$

$$X_3 = 0{,}0604473 - \frac{-5{,}900063}{37.742{,}184} = 0{,}0606037$$

$X_3 - X_2 = 0{,}0001563 > 0{,}0001$; hay que realizar otra nueva iteración.

$$f(X_3) = -0{,}00217$$
$$f'(X_3) = 37.714{,}378$$

$$X_4 = X_3 - \frac{f(X_3)}{f'(X_3)} = 0{,}0606037 - \frac{-0{,}0217}{37.714{,}378} = 0{,}0606037$$

$X_4 - X_3 = 5{,}7 * 10^{-8} < 0{,}0001$; ha terminado el proceso de iteración.
La raíz de la ecuación es 6,06%.

Pongamos otro ejemplo, (véase [13]):
Contamos con un capital prestado de 100.000 euros, y unos términos amortizativos anuales de 30.000 euros, 40.000 euros y 50.000 euros. Existen unos gastos de estudio y tramitación de 200 euros. Por el corredor de comercio nos cobran 300 euros y la comisión de apertura es de un 1% sobre el capital prestado. Este préstamo lleva consigo una subvención a fondo perdido a favor del prestatario del 5% del capital prestado que se hará efectiva a los 18 meses de iniciarse la operación.
Se pide calcular la tasa de rentabilidad interna de la operación financiera.

Para calcular la TIR utilizamos la siguiente ecuación de equivalencia:

$$100.000 = 30.000(1+x)^{-1} + 40.000(1+x)^{-2} + 50.000(1+x)^{-3}$$

Para calcular su raíz vamos a aplicar el método de Newton y vamos a tener en cuenta un margen de error de: ε=0,0001.

$$f(x) = 100.000 - 30.000(1+x)^{-1} - 40.000(1+x)^{-2} - 50.000(1+x)^{-3}$$

$$f'(x) = 30.000(1+x)^{-2} + 80.000(1+x)^{-3} + 150.000(1+x)^{-4}$$

Partimos de $X_0 = 0$

$$f(X_0) = -20.000$$
$$f'(X_0) = 260.000$$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = 0 - \frac{-20.000}{260.000} = 0{,}076923$$

$X_1 - X_0 > 0{,}0001$; deberá realizarse una nueva iteración:

$$f(X_1) = -2.379{,}7376$$

$$f'(X_1) = 201.439{,}76$$

$$X_2 = 0{,}076923 - \frac{-2.379{,}7376}{201.439{,}76} = 0{,}0887367$$

Nuevamente, $X_2 - X_1 > 0{,}0001$; volvemos a aplicar el algoritmo.

$$f(X_2) = -43{,}972027$$
$$f'(X_2) = 194.056{,}83$$

$$X_3 = 0{,}0887367 - \frac{-43{,}972027}{194.056{,}83} = 0{,}0889633$$

$X_3 - X_2 > 0{,}0001$; aplicamos el algoritmo de nuevo:

$$f(X_3) = -0{,}015632$$
$$f'(X_3) = 193.918{,}78$$

$$X_4 = 0{,}0889633 - \frac{-0{,}015632}{193.918{,}78} = 0{,}0889633$$

$X_4 - X_3 < 0{,}0001$; por lo tanto, la raíz buscada es: X= 8,89%.

4. PROGRAMACIÓN DEL MÉTODO DE NEWTON

Como hemos dicho anteriormente, este método calcula raíces de funciones no lineales.

Comprobaremos, a partir del software matemático Matlab, la eficacia del método de Newton y su convergencia.

Utilizando préstamos hipotecarios, tendremos conocimiento del comportamiento que tienen las funciones. El objetivo de ello es ver los resultados de la tasa de rentabilidad interna (TIR) y comparar unos con otros.

4.1 SOFTWARE MATEMÁTICO MATLAB

Fue diseñado por el programador y matemático Cleve Moler en 1984. Matlab es una herramienta de software con un lenguaje de programación propio, denominado lenguaje M. Véase [16].
El programa integra:

- Análisis numérico.
- Procesamiento de señales.
- Gráficos.
- Calculo matricial.

Con ayuda de Matlab resolveremos las ecuaciones no lineales que extraeremos de los préstamos hipotecarios a analizar.
La capacidad de Matlab para programar, permite al usuario agrupar sentencias, denominadas “órdenes”, que utiliza con asiduidad dentro de un programa.

En la siguiente sección veremos las diferentes iteraciones del método de Newton-Raphson.

4.2. DOS PRÉSTAMOS HIPOTECARIOS CONCRETOS

La primera hipoteca que vamos a analizar es del **Banco Santander** y la vemos reflejada en el cuadro 4.1. Consideramos un periodo de 10 años para amortizar dicho préstamo. El importe de la hipoteca es de 200.000 euros. Contamos con una comisión de apertura de 1.000 euros, que se corresponde con un gasto inicial.

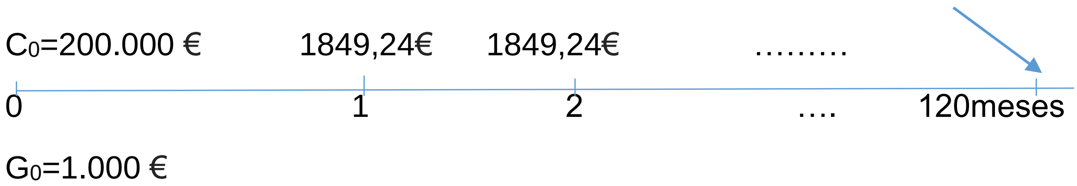
Cuadro 4.1: Hipoteca uno.
Fuente: Banco Santander, [2].

La cuota mensual que acabaremos pagando es de 1.849,24 € a un tipo de interés nominal anual del 2,10% (cumpliendo condiciones).

Lo que estamos buscando es el tipo de interés efectivo, por lo tanto dividimos el tipo de interés nominal anual que nos dan entre la periodicidad, que son 12 meses.

$$i_{12} = \frac{i}{12}$$

$$i_{12} = \frac{2{,}10\%}{12} = \frac{0{,}021}{12} = 0{,}00175$$



$$Capital\ prestado = Cuota(1+i_{12})^{-1} + \cdots + Cuota(1+i_{12})^{-120} + A$$

En la ecuación hemos actualizado todos los términos al instante inicial.

$$Capital\ prestado = Cuota\left[\frac{(1+i_{12})^{-1} - (1+i_{12})^{-121}}{1-(1+i_{12})^{-1}}\right] + A$$

$$Capital\ prestado - A = Cuota * \left[\frac{1-(1+i_{12})^{-120}}{i_{12}}\right]$$

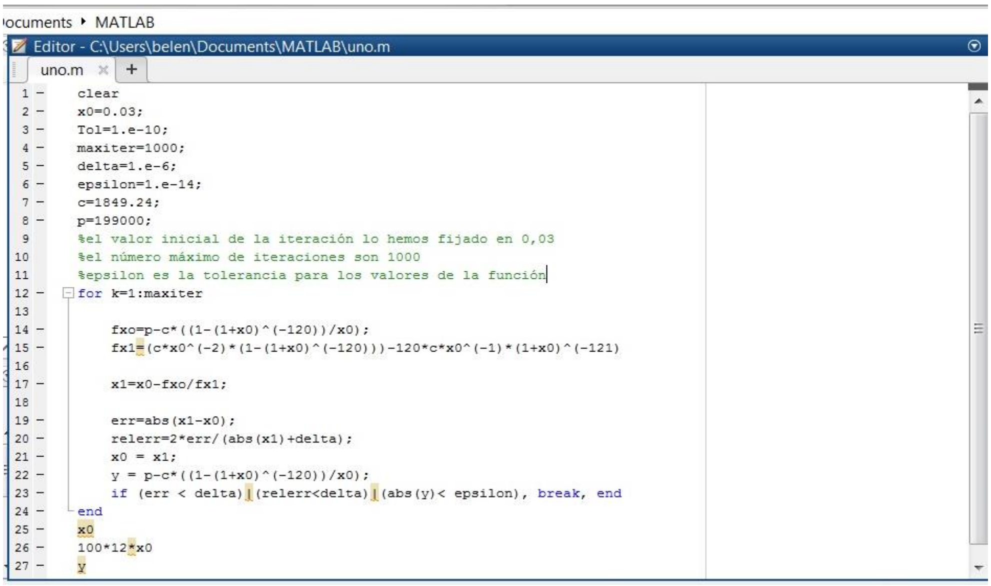
$$199.000 = 1.849{,}24 * \left[\frac{1-\ (1+i_{12})^{-120}}{i_{12}}\right]$$

Fórmula de recurrencia del método de Newton: $X_1 = X_0 - \left[\frac{f(X_0)}{f'(X_0)}\right]$

$$f(X_0) = 199.000 - 1.849{,}24\left[\frac{1-(1+X_0)^{-120}}{X_0}\right]$$

$$f'(X_0) = 1.849{,}24\, X_0^{-2} * [1-(1+X_0)^{-120}] - 221.908{,}8 * X_0^{-1} * (1+X_0)^{-121}$$

Vamos a resolverlo con ayuda de Matlab. La secuencia de comandos que hemos introducido queda reflejada en el cuadro 4.2:



```
ocuments ▸ MATLAB
Editor - C:\Users\belen\Documents\MATLAB\uno.m
uno.m  ×  +

clear
x0=0.03;
Tol=1.e-10;
maxiter=1000;
delta=1.e-6;
epsilon=1.e-14;
c=1849.24;
p=199000;
%el valor inicial de la iteración lo hemos fijado en 0,03
%el número máximo de iteraciones son 1000
%epsilon es la tolerancia para los valores de la función
for k=1:maxiter

    fxo=p-c*((1-(1+x0)^(-120))/x0);
    fx1=(c*x0^(-2)*(1-(1+x0)^(-120)))-120*c*x0^(-1)*(1+x0)^(-121)

    x1=x0-fxo/fx1;

    err=abs(x1-x0);
    relerr=2*err/(abs(x1)+delta);
    x0 = x1;
    y = p-c*((1-(1+x0)^(-120))/x0);
    if (err < delta)|(relerr<delta)|(abs(y)< epsilon), break, end
end
x0
100*12*x0
y
```

Cuadro 4.2: Editor Hipoteca uno.
Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos en el Command Window son los que aparecen en el cuadro 4.3:

```
cuments ▸ MATLAB
Command Window

ans =

    2.2033

y =

  -6.7026e-08

>> x0

x0 =

    0.0018

>> x1

x1 =

    0.0018

>> y

y =

  -6.7026e-08

>>
```

Cuadro 4.3: Resultados Hipoteca uno.
Fuente: Elaboración propia.

La respuesta es 2,2033% como se puede observar en el cuadro 4.3. Es una respuesta más que razonable, ya que si realizamos el mismo procedimiento quitando la comisión de 1.000 euros la solución que nos sale es 2,10%, que se corresponde con el interés nominal anual.
El X_0 es 0,0018. El i_{12} era igual a: 0,00175.
El error y es igual a $-6{,}7026 * 10^{-8}$.

La segunda hipoteca se trata de un préstamo de **Bankinter**. Las características que posee son las que aparecen en el cuadro 4.4:

Capital prestado	100.000 €
Tiempo	10 años
Tipo interés anual	1,80% anual
TAE	3,30%
Comisión apertura/A	1.000 €
Comisión cancelación	500 €

Cuadro 4.4: Hipoteca dos.
Fuente: Elaboración propia a partir de [3].

Vamos a calcular la cuota mensual que tenemos que pagar:

$$i_{12} = \frac{1{,}80\%}{12} = \frac{0{,}018}{12} = 0{,}0015$$

$$Capital - A = Cuota[\ (1+i_{12})^{-1} + \cdots + (1+i_{12})^{-120}] + 500(1+i_{12})^{-120}$$

$$99.000 = Cuota * \left[\frac{1-(1+i_{12})^{-120}}{i_{12}}\right] + 500(1+i_{12})^{-120}$$

Si despejamos la Cuota obtenemos:
Cuota= 898,2872006 €/mes.

$$f(X_0) = 99.000 - 898{,}28\left(\frac{1-(1+X_0)^{-120}}{X_0}\right) - \ 500(1+X_0)^{-120}$$

$$f'(X_0) = \frac{c*(1-(1+X_0)^{-120})}{X_0{}^2} - \frac{107.793{,}6(1+X_0)^{-121}}{X_0} + 60.000(1+X_0)^{-121}$$

Siendo c la cuota mensual de: 898,2872006 euros.

Vamos a resolverlo con ayuda de Matlab. La secuencia de comandos que hemos introducido queda reflejada en el cuadro 4.5:

Editor - C:\Users\belen\Documents\MATLAB\hip2si.m

hip2si.m

```
clear
x0=0.01;
Tol=1.e-6;
maxiter=1000;
delta=1.e-6;
epsilon=1.e-10;
c=898.2872006;
p=99000;
%el valor inicial de la iteración lo hemos fijado en 0,01
%el número máximo de iteraciones son 1000
%epsilon es la tolerancia para los valores de la función
for k=1:maxiter

    fxo= p-c*((1-(1+x0)^(-120))/x0)-(500*(1+x0)^-(120));
    fx1= (c*x0^(-2)*(1-(1+x0)^(-120)))-107793.6*x0^(-1)*(1+x0)^(-121)+60000*(1+x0)^(-121);

    x1=x0-fxo/fx1;

    err=abs(x1-x0);
    relerr=2*err/(abs(x1)+delta);
    x0 = x1;
    y = p-c*((1-(1+x0)^(-120))/x0)-(500*(1+x0)^-(120));
    if (err < delta)|(relerr<delta)|(abs(y)< epsilon), break, end
end
x0
100*12*x0
y
```

Cuadro 4.5: Editor Hipoteca dos.
Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos en el Command Window son los que aparecen en el cuadro 4.6:

Command Window

```
>> hip2si

x0 =

    0.0015


ans =

    1.8000


y =

  -1.4147e-06

>>
```

Cuadro 4.6: Resultados Hipoteca dos.
Fuente: Elaboración propia.

La respuesta es: 1,80%. Coincide con el tipo de interés anual. El X_0 es 0,0015. El i_{12} era igual a 0,0015. El error y es igual a $-1{,}4147 * 10^{-6}$.
Si realizamos el mismo procedimiento quitando la comisión de apertura y la de cancelación, la respuesta disminuye hasta 1,5%. Al introducir los gastos aumenta el tipo, por lo tanto, es una respuesta razonable. El X_0 también disminuye hasta 0,0013.

Vamos a comprobarlo sin introducir los gastos en el cuadro 4.7:

Editor - C:\Users\belen\Documents\MATLAB\beleneco.m

beleneco.m

```
clear
x0=0.01;
Tol=1.e-6;
maxiter=1000;
delta=1.e-6;
epsilon=1.e-10;
c=898.2872006;
p=100000;
for k=1:maxiter

    fxo= p-c*((1-(1+x0)^(-120))/x0);
    fx1=(c*x0^(-2)*(1-(1+x0)^(-120)))-(c*x0^(-1)*120*(x0+1)^(-121)) ;

    x1=x0-fxo/fx1;

    err=abs(x1-x0);
    relerr=2*err/(abs(x1)+delta);
    x0 = x1;
    y = p-c*((1-(1+x0)^(-120))/x0);
    if (err < delta)|(relerr<delta)|(abs(y)< epsilon), break, end
end
x0
100*12*x0
y
```

Cuadro 4.7: Editor prueba dos.
Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos en el Command Window son los que aparecen en el cuadro 4.8:

Command Window

```
>> beleneco

x0 =

    0.0013


ans =

    1.5084


y =

  -2.7358e-09

>>
```

Cuadro 4.8: Resultados prueba dos.
Fuente: Elaboración propia.

Ahora vamos a comprobar que en esta hipoteca se cumple el TAE. La expresión general para obtener el TAE es la siguiente:

$$Capital - Cuota * \frac{1-\left(1+\frac{i_0}{12}\right)^{-120}}{\frac{i_0}{12}} - C_0 - C_f\left(1+\frac{i_0}{12}\right)^{-120} = 0$$

$$100.000 - c * \frac{1-\left(1+\frac{0{,}018}{12}\right)^{-120}}{\frac{0{,}018}{12}} - 1.000 - 500 * \left(1+\frac{0{,}018}{12}\right)^{-120} = 0$$

Siendo c la cuota mensual de: 898,2872006 euros.

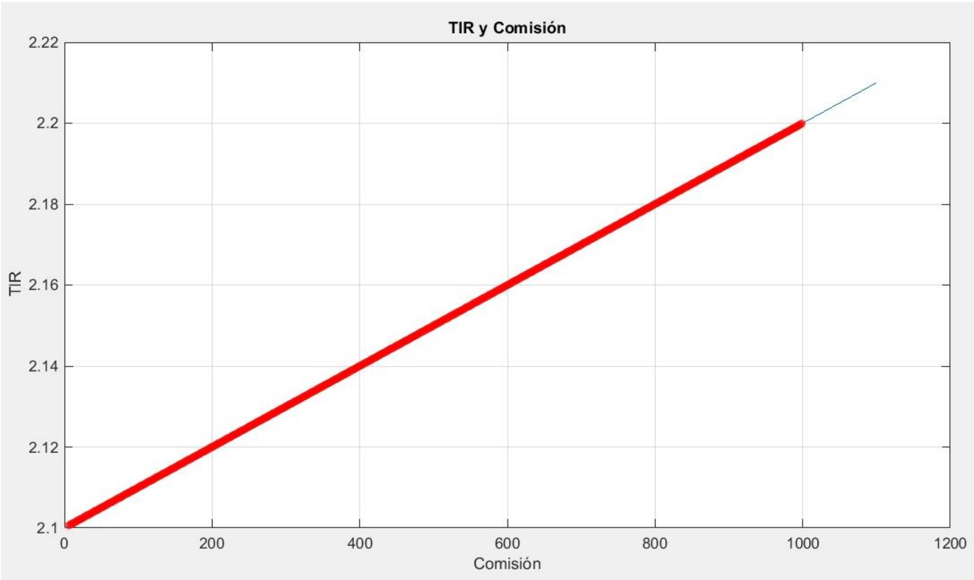
Si resolvemos todo, la ecuación se cumple.

Cuanto menor es la diferencia entre TAE e interés de una hipoteca, menos comisiones, gastos o seguros se cobrarán al prestatario.

4.3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

A razón de los resultados obtenidos en la primera hipoteca del Banco Santander vamos a realizar una representación.

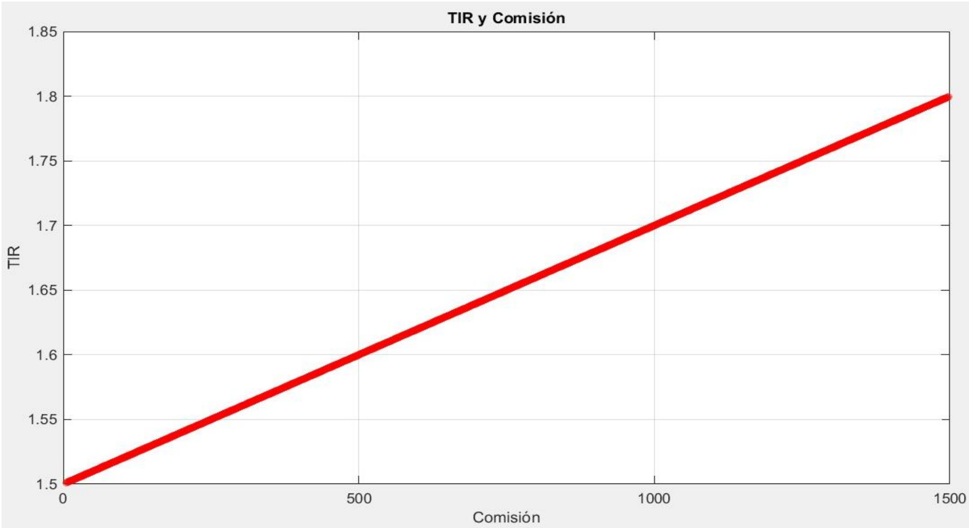
En el siguiente cuadro 4.9 observamos la relacion existente entre la TIR y la comision de apertura que teníamos en la primera hipoteca. Siendo fijo el tipo de interés, cuando contabamos con el gasto inicial de 1.000 euros el resultado que obteníamos era de 2,20%. Si la comisión es de cero (quitamos el gasto), el resultado es de 2,10%.



Cuadro 4.9: Representación uno.
Fuente: Elaboración propia.

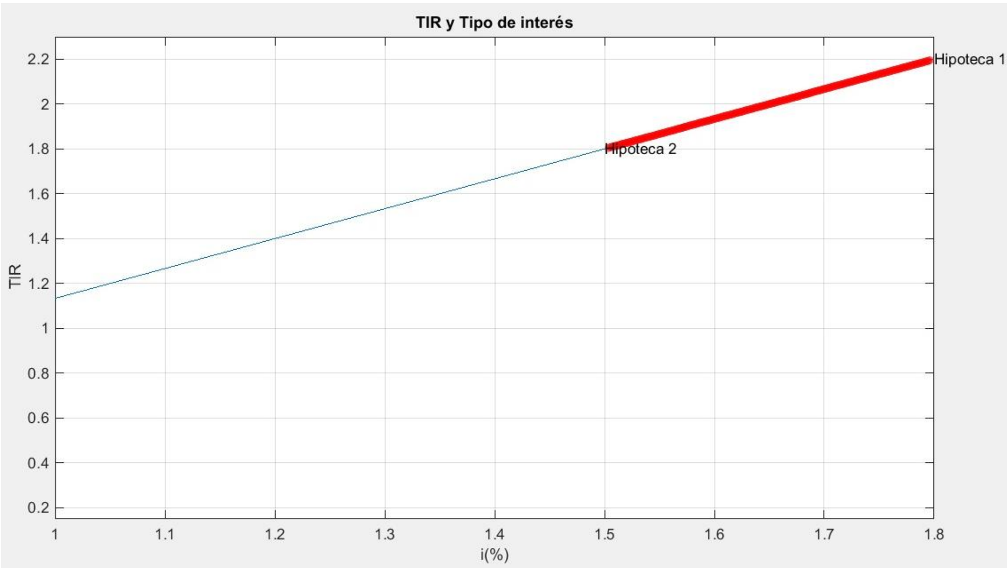
En la segunda hipoteca de Bankinter teníamos dos comisiones a tener en cuenta: una comisión de apertura de 1.000 euros y otra de cancelación de 500 euros.

En el cuadro 4.10 representamos la TIR y las comisiones, y siendo nuevamente fijo el tipo de interés, si no contamos con los gastos, la respuesta sería de 1,50%. Al introducir los gastos de las comisiones (1.000+500=1.500 euros), la respuesta aumenta hasta el 1,80%.



Cuadro 4.10: Representación dos.
Fuente: Elaboración propia.

Y por último, si observamos la relación entre la TIR y el tipo de interés, (fijando las comisiones de ambas hipotecas), obtenemos el cuadro 4.11:



Cuadro 4.11: Representación tres.
Fuente: Elaboración propia.

Para la primera hipoteca, con el tipo de interés de 1,8% que teníamos, obteníamos una rentabilidad (TIR) del 2,20%.

En el caso de la segunda hipoteca de Bankinter, con el tipo de interés del 1,5%, obteníamos una rentabilidad del 1,80%.

La tendencia de las tres gráficas es ascendente, esto significa que, a mayores gastos (comisiones) mayor es el tipo de interés anual.

5. CONCLUSIONES

Cuando disponemos de cierto capital, podemos invertirlo o gastarlo para satisfacer algunas de nuestras necesidades. Nos decantaremos por la decisión de invertir siempre y cuando la compensación económica que resulte sea suficiente y asumamos el riesgo que conlleva invertir.

En la economía disponemos de herramientas financieras como el valor presente neto (VPN) o la tasa de rentabilidad interna (TIR) para decantarnos por unas inversiones u otras, en función de cual sea más rentable. La TIR no es más que una tasa efectiva que maximiza la rentabilidad del proyecto.
En cualquier caso, la decisión de inversión depende del propio inversor y de su aversión al riesgo.

Cuando solicitamos un préstamo hipotecario, el prestatario hipoteca bienes inmuebles como garantía de la operación. Son operaciones, generalmente, a largo plazo.

Existen dos tipos de préstamos hipotecarios: a interés variable y a tipo fijo. Este último es el más habitual, porque con él se paga una mensualidad constante (conocido como “método francés”, que es el sistema de amortización de préstamos más difundido por ser un método progresivo).

Utilizando el método de Newton-Raphson conseguimos resolver ecuaciones no lineales y encontrar aproximaciones a la solución de una ecuación del tipo: $f(x) = 0$.

Hemos comprobado que este método proporciona unos resultados muy precisos, es por ello, que se lo hemos aplicado a dos préstamos hipotecarios reales y actuales.

Al introducir una serie de comandos en Matlab, (el método de Newton-Raphson), hemos obtenido la tasa de rentabilidad interna de dichos préstamos.

Con la primera hipoteca del banco Santander obteníamos una rentabilidad, (un tipo de interés anual), del 2,20%, (contando con su comisión de apertura de 1.000 euros).
Hemos podido comprobar al retirar el gasto cómo disminuye el tipo hasta alcanzar un 2,10%.
Es por ello que, en la representación en la que analizábamos la comisión y la TIR, (dejando fijo el tipo de interés), la tendencia es ascendente. Esto significa que, a mayores gastos, mayor es el tipo de interés anual.

Con respecto a la segunda hipoteca de Bankinter en la que contábamos con dos gastos, (una comisión de apertura de 1.000 euros y una comisión de cancelación de 500 euros), obteníamos una rentabilidad del 1,80%, que coincidía con el tipo de interés anual que aparece en la información de Bankinter.

Al retirar ambos gastos, el tipo ha disminuido hasta alcanzar un 1,5%.
Al comparar gráficamente la TIR con las comisiones, (fijando el tipo de interés), la tendencia vuelve a ser ascendente.
Con una comisión de cero, es decir, retirando ambas comisiones, la rentabilidad es del 1,5%. Al introducir los gastos, (1.500 euros), el tipo aumenta hasta alcanzar el 1,80%.
También hemos representado conjuntamente ambas hipotecas. Fijando las comisiones de ambas y comparando la TIR con el tipo de interés.

En la hipoteca del banco Santander contábamos con un tipo de interés más elevado (del 1,8%), pero también nos proporcionaba una rentabilidad más alta (del 2,20%).

La segunda hipoteca de Bankinter contaba con un tipo de interés del 1,5% y proporcionaba una rentabilidad del 1,80%. (Tendencia nuevamente ascendente).

Como conclusión final, podemos decir que, en los préstamos hipotecarios, a mayores gastos, mayor es el tipo de interés anual.

La utilidad de este trabajo reside en conocer el tipo de rentabilidad (TIR) que obtiene el prestatario o deudor al ir cambiando las comisiones o gastos de cada préstamo hipotecario.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] Amodeo Ruiz, R. y Mercale Ibáñez, P. (2012): “Método de valoración de proyectos de inversión - tasa interna de rendimiento (TIR)”, *Mercaleblog: Un blog de Contabilidad, Empresa, Economía y Finanzas.* Disponible en: http://goo.gl/hajyt1

[2] Banco Santander (2016): *Simulador de hipotecas*. Disponible en: https://goo.gl/YS9Yrd

[3] Bankinter (2016): *Hipoteca fija*. Disponible en: https://goo.gl/MWcoVj

[4] Castedo Bartolomé, P. y Casillas Cuevas, A. (2015): *Matemáticas financieras*. Madrid. Disponible en: http://goo.gl/T5VFI2

[5] Consejo General del Notariado (2016): *Hipotecas y préstamos.* Disponible en: http://goo.gl/MF3Sxd

[6] de Pablo López, A. (2002): *Valoración Financiera*. Madrid.

[7] Finanzas para todos (2013): *El préstamo hipotecario*. Disponible en: http://goo.gl/iFTBT5

[8] Generación proyectos (2011): *Valor Presente Neto*. Disponible en: https://goo.gl/EVt3vZ

[9] Jiménez Bermejo, D. (2015): “Comparación entre VAN y TIR”, *Economipedia*. Disponible en: http://goo.gl/qVM1pt

[10] López López, M.D. (2010): *Fundamentos de Economía, Empresa, Derecho, Administración y Metodología de la Investigación Aplicada a la Rsc*. La Coruña.

[11] Mathews, J. y Fink, K. (2012): *Métodos numéricos con Matlab*.

[12] Método de Newton’s Blog (2010): *Método de Newton.* Disponible en: https://goo.gl/a44XnD

[13] Navarro E. y Nave J.M. (1994): *Fundamentos de matemáticas financieras.*

[14] Palacios, F. (2008): “Resolución aproximada de ecuaciones: Método de Newton-Raphson”, *Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Manresa (EPSEM)*. Disponible en: http://goo.gl/8RBAxb

[15] Tovar Jiménez, J. (2015): *Operaciones financieras. Teoría y problemas resueltos*. Madrid.

[16] Wikipedia (2016): *Matlab.* Disponible en: https://goo.gl/69NdV3

[17] Wikipedia (2016): *Método de la secante.* Disponible en: https://goo.gl/EzMfNM

[18] Wikipedia (2016): *Método de Newton.* Disponible en: https://goo.gl/EW7njZ

[19] Zona Económica (2012): *Problemas de la TIR*. Disponible en: http://goo.gl/f0I7uf