







**Universidad de Valladolid**



**ESCUELA DE INGENIERÍAS  
INDUSTRIALES**

**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES**

**Grado en Ingeniería Mecánica**

**Estudio del fenómeno de inestabilidad de  
abolladura de estructuras de barras de  
sección tipo doble T**

**Autor:**

**Frías del Corral, Eduardo**

**Tutor:**

**Cacho Pérez, Mariano  
Departamento de Construcciones  
Arquitectónicas, Ingeniería del  
Terreno y Mecánica de los Medios  
Continuos y Teoría de Estructuras**

**Valladolid, Julio 2016.**







## **RESUMEN**

En este trabajo se va a llevar a cabo el estudio del fenómeno de inestabilidad de abolladura en las paredes de estructuras de perfil IPE300 (perfil doble-T). Todo ello se va a desarrollar de tres maneras: en primer lugar, a través de procesos de programación computacionales, introduciendo todas las ecuaciones y condiciones necesarias para su demostración. En segundo lugar, por medio de un programa de análisis de elementos finitos, en el que se podrá ver de forma clara y rápida el resultado de aplicar ciertas condiciones de contorno. Por último, comprobaremos el pandeo y la abolladura mediante la utilización de la Instrucción de Acero Estructural.

## **PALABRAS CLAVE**

Ensayos, propiedades del perfil, placa esbelta, alma, carga crítica.





# ÍNDICE DE CONTENIDOS

<b>1. INTRODUCCIÓN AL PROYECTO.....</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción.....	1
1.2. Objetivos.....	1
1.3. Estructura de la memoria.....	2
<b>2. CONCEPTOS TEÓRICOS.....</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción.....	5
2.2. El problema de placas: formulaciones gruesa y delgada.....	6
2.2.1. Ecuaciones de gobierno.....	6
2.2.2. Condiciones de contorno.....	12
2.2.3. La aproximación irreducible en placas delgadas.....	13
2.2.4. Requisitos de continuidad para las funciones de forma (Continuidad $C_1$ ).....	15
2.3. Elementos rectangular con nodos de vértice (12 grados de libertad).....	16
2.3.1. Funciones de forma.....	16
2.3.2. Matrices de rigidez y de carga.....	19
<b>3. ESTUDIO DEL PANDEO/ABOLLADURA MEDIANTE LA UTILIZACIÓN DEL PROGRAMA WOLFRAM MATHEMATICA 8.0.....</b>	<b>23</b>
3.1. Introducción.....	23
3.2. Proceso de resolución de la carga crítica de pandeo .....	25
3.3. Resultados de la carga crítica de pandeo y de la abolladura.....	31
3.3.1. Resultado de la carga crítica de pandeo y de la abolladura para la mitad del ala .....	31
3.3.2. Resultado de la carga crítica de pandeo y de la abolladura para el alma .....	33

<b>4. ESTUDIO DEL PANDEO/ABOLLADURA MEDIANTE LA UTILIZACIÓN DEL PROGRAMA AUTODESK SIMULATION MECHANICAL 2014.....</b>	<b>35</b>
4.1. Introducción.....	35
4.2. Condiciones iniciales.....	38
4.3. Ensayos de pandeo/abolladura con fuerzas distribuidas .....	41
4.4. Ensayos de pandeo/abolladura con fuerzas puntuales.....	54
4.5. Ensayos de pandeo/abolladura en pórtico 3D.....	64
<b>5. ESTUDIO DEL PANDEO/ABOLLADURA MEDIANTE LA UTILIZACIÓN DE LA INSTRUCCIÓN DE ACERO ESTRUCTURAL (EAE).....</b>	<b>67</b>
5.1. Introducción.....	67
5.2. Condiciones iniciales.....	68
5.3. Estudio del pandeo sometido a compresión para el plano xy.....	70
5.4. Estudio del pandeo sometido a compresión para el plano xz.....	74
5.5. Abolladura del alma a cortante.....	77
<b>6. CONCLUSIONES.....</b>	<b>81</b>
<b>7. BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>83</b>





# **1. INTRODUCCION AL PROYECTO**

## **1.1. Introducción**

La abolladura es un fenómeno de inestabilidad elástica que afecta a elementos estructurales bidimensionales cuando éstos se someten a tensiones de compresión según su plano o superficie media. El problema de la abolladura no sólo se presenta en elementos propiamente bidimensionales como placas o láminas sino que también puede aparecer localmente en partes bidimensionales de elementos como el alma o las alas de una viga.

Es sabido que uno de los puntos críticos a tener en cuenta en el diseño de vigas armadas son los fenómenos de inestabilidad del alma, que suceden cuando se alcanza la tensión crítica de abolladura. Este tipo de vigas, formadas por elementos planos soldados, pueden verse afectadas por esa inestabilidad debido a las elevadas esbelteces de alas y almas. La pérdida de estabilidad, o pandeo local, de los elementos que componen el perfil hace que parte de su superficie se deforme normalmente a su plano medio, lo que reduce su capacidad resistente.

Hasta el momento, la forma habitual de abordar el estudio de la abolladura es, de manera conservativa, mediante el empleo de modelo a base de paneles de alma simplemente apoyados en sus cuatro bordes.

## **1.2. Objetivos**

Los objetivos que se van a llevar a cabo en esta memoria son los siguientes:

- Comprobación de la abolladura, tanto del ala como del alma del perfil, utilizando la programación como método resolutorio de cálculo.

- Comparación de barras tipo empotrado-libre de perfil IPE300, aplicando diferentes condiciones de contorno, ya sean de fuerza distribuida o de fuerza puntual, mediante el uso de un programa de elementos finitos.
- Comprobación de la abolladura en un pórtico de pilares y vigas de perfil IPE300 sometido a diferentes cargas puntuales.
- Comprobación del pandeo y de la abolladura en estructura de perfiles de doble T utilizando documentos oficiales de edificación.

### **1.3. Estructura de la memoria**

Para explicar todo el desarrollo del proyecto, este documento se estructura en cinco partes bien diferenciadas.

En primer lugar se hace una introducción a los conceptos y términos teóricos para adoptar una breve noción de ellos y entender mejor el proceso de los capítulos posteriores.

En la segunda parte se lleva a cabo el estudio del pandeo y de la abolladura por medio del programa *Wolfram Mathematica 8.0*, mostrando el proceso y resultado obtenidos.

A continuación, por medio de *Autodesk Simulation Mechanical 2014*, llevaremos a cabo los diferentes ensayos que comprueben el pandeo y la abolladura, tanto en perfiles individuales como en un pórtico.

En el cuarto bloque se procede a la demostración del pandeo y la abolladura a través de la Instrucción de Acero Estructural (EAE).

Por último, se expondrán las conclusiones y la bibliografía referente al trabajo.





## 2. CONCEPTOS TEÓRICOS

### 2.1 Introducción

El análisis de placas y láminas fue una de las primeras aplicaciones del método de elementos finitos a mediados del s.XX. Por entonces no se apreciaron las dificultades que aun en nuestros tiempos se siguen analizando e investigando de forma activa.

Las placas y las láminas no son más que formas particulares de un sólido de tres dimensiones y que no presentan dificultades teóricas, al menos en el caso elástico. Sin embargo, el espesor que tienen estas estructuras es mucho más pequeño comparado con las otras dimensiones, por lo que un tratamiento numérico tridimensional es muy costoso y además conllevaría serios problemas en el acondicionamiento de las ecuaciones. Para poder simplificar estos problemas se han introducido desde los primeros días una serie de simplificaciones, que hoy en día son clásicas para el modelado del comportamiento de las estructuras.

La teoría de placas delgadas se basa en las hipótesis realizadas por Kirchhoff y, evidentemente su nombre se relaciona con bastante frecuencia a esta teoría.

En la teoría de placas delgadas es posible representar el estado de deformación por una cantidad  $w$ . Éste es el desplazamiento lateral del plano medio de la placa. En la definición de de las deformaciones se introducen las segundas derivadas, por lo que vamos a tener que imponer continuidad entre los elementos, lo cual es condición necesaria para que la placa permanezca continua. En los nodos sobre los contornos laterales de los elementos habrá que imponer continuidad utilizando los valores de  $w$  y de sus derivadas primeras (sus pendientes).

Las funciones de forma para elementos rectangulares son las más sencillas de obtener para placas delgadas y serán las que tratemos en los análisis realizados a lo largo del proyecto.

La dificultad de imponer continuidad  $C_1$  en las funciones de forma ha llevado a buscar posibilidades o soluciones para poder evitar esta dificultad. Dos de las posibilidades más importantes son:

1. Interpolación independiente de los giros  $\theta$  y la flecha  $w$ , imponiendo la continuidad como una condición especial aplicada generalmente en puntos discretos solamente.
2. Introducción de variables lagrangianas u otras variables para evitar la necesidad de la continuidad  $C_1$ .

## 2.2. El problema de placas: formulaciones gruesa y delgada

### 2.2.1. Ecuaciones de gobierno

La mecánica de un problema de placas se ilustra mejor en una dimensión. Para ello se considera el problema de la flexión cilíndrica de placas (Figura 2.1). En este problema se supone que la placa se extiende de forma indefinida en una dirección (se supone la dirección  $y$ ) y está carga y soportada por condiciones independientes de la  $y$ .

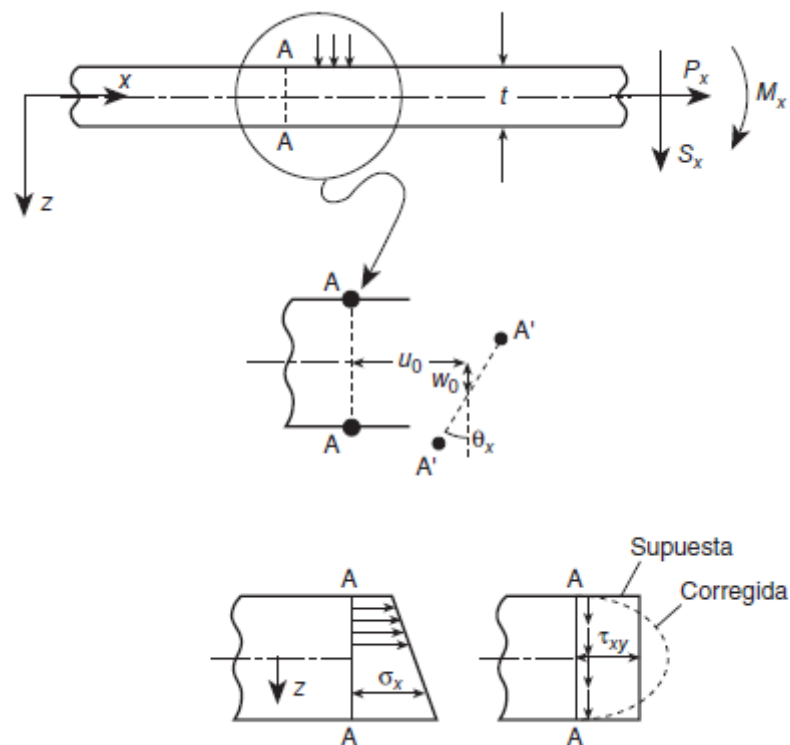


Figura 2.1 Desplazamientos en una viga.

Para las secciones normales, originalmente perpendiculares al plano medio de la placa, se puede usar la hipótesis de que las secciones planas permanecerán planas durante el proceso de deformación, siempre que éstas se encuentren alejadas de las zonas donde haya cargas concentradas o puntos de apoyo.

Las ecuaciones de las resultantes de tensiones de la figura, es decir, las ecuaciones de los esfuerzos en esa figura vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$P_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \quad (\text{Ec. 2.1})$$

$$S_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (\text{Ec. 2.2})$$

$$M_x = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad (\text{Ec. 2.3})$$

La primera hipótesis, y más importante, de la teoría de placas y laminas dice que las secciones normales al plano medio permanecen planas durante la deformación. La segunda hipótesis afirma que las tensiones en la dirección normal,  $z$ , son pequeñas, del orden de las cargas laterales aplicada  $q$ , por lo que, las tensiones normales pueden despreciarse en dicha dirección.

Es fácil observar con estas dos hipótesis que el estado total de deformación puede describirse mediante los desplazamientos  $u_0$  y  $w_0$  de la superficie media y el giro  $\theta_x$  de la normal. De este modo, los desplazamientos locales en las direcciones  $x$  y  $z$  son:

$$u_0(x, z) = u_0(x) - z\theta_x(x) \quad (\text{Ec. 2.4})$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (\text{Ec. 2.5})$$

A partir de aquí pueden calcularse las deformaciones en las direcciones  $x$  y  $z$  como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (\text{Ec. 2.6})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{Ec. 2.7})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{Ec. 2.8})$$

Para el problema de flexión cilíndrica se tiene un estado elástico lineal, de tensión plana para cada lámina, con las relaciones tensión-deformación

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x \quad y \quad \gamma_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (\text{Ecs. 2.9 y 2.10})$$

Las resultantes de tensiones son:

$$P_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz = B \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$S_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz = k G t \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_x \right) \quad (\text{Ec. 2.11})$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = \partial \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

Donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson,  $E$  y  $G$  son los módulos longitudinal y de cortante, respectivamente.

Esta formulación básica ha de completarse con tres ecuaciones de equilibrio. Se pueden calcular directamente a partir de un elemento diferencial de placa o por integración de las ecuaciones de equilibrio local. A partir de este método, y suponiendo fuerzas de volumen y de inercia nulas, se tiene:

$$\int_{-t/2}^{t/2} \left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right] dz = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz + \tau_{xz} \Big|_{t/2} - \tau_{xz} \Big|_{-t/2} = 0 \quad (\text{Ec. 2.12})$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = 0$$

donde se supone que las tensiones de corte en las superficies superior e inferior son nulas. El esfuerzo cortante se obtiene de forma similar:

$$\int_{-t/2}^{t/2} \left[ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right] dz = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz + \sigma_z \Big|_{\frac{t}{2}} - \sigma_z \Big|_{-\frac{t}{2}} = 0 \quad (\text{Ec. 2.13})$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + q_z = 0$$

donde  $q_z$ , carga transversal, aparece como resultante de las tensiones normales aplicadas en las superficies superior y/o inferior. Finalmente, el momento de equilibrio se obtiene de la siguiente forma:

$$- \int_{t/2}^{-t/2} z \left[ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right] dz = 0$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \int_{t/2}^{-t/2} z \sigma_z dz + \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz = 0 \quad (\text{Ec. 2.14})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + S_x = 0$$

Todas estas ecuaciones son típicas de vigas gruesas. Para la teoría de vigas delgadas se introduce una hipótesis adicional. Esta hipótesis simplemente es que la deformación transversal es nula y, por consiguiente,  $G = \infty$ . Por tanto tenemos que la Ec. 2.11 se convierte en:

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_x = 0 \quad (\text{Ec. 2.15})$$

Esta hipótesis para vigas de pequeño espesor es la conocida de Bernoulli-Euler, la cual dice que es equivalente a suponer que las normales al plano medio permanecen normales al mismo durante la deformación. Esta hipótesis es muy utilizada en la práctica y demuestra ser adecuada para numerosos problemas estructurales.

El problema unidimensional de vigas y la introducción de las hipótesis se traslada directamente al caso de placas. Suponiendo que  $u_0$  y  $v_0$  son cero, escribiremos en lugar de la Ec. 2.1, Ec. 2.2 y Ec. 2.3,

$$\begin{aligned} u &= -z\theta_x(x, y) \\ v &= -z\theta_y(x, y) \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (Ec. 2.16)$$

siendo  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $w_0$  funciones de  $x$  e  $y$  únicamente.

Ahora las deformaciones pueden separarse en sus componentes, obteniendo:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = -z\mathbf{L}\boldsymbol{\theta} \quad (Ec. 2.17)$$

y

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \nabla w - \boldsymbol{\theta} \quad (Ec. 2.18)$$

Se observa ahora que aparece un momento torsor, además de los momentos normales  $M_x$  y  $M_y$ , definido como

$$M_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (Ec. 2.19)$$

e introduciendo las relaciones adecuadas todos los momentos se pueden relacionar con las derivadas de los desplazamientos. Para una sección isótropa podemos escribir:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{DL}\boldsymbol{\theta} \quad (Ec. 2.20)$$

donde, suponiendo un estado de tensión plana en cada capa,

$$\mathbf{D} = D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^2}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.21})$$

siendo  $\nu$  el coeficiente de Poisson. Además, los esfuerzos cortantes son:

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(\nabla w - \boldsymbol{\theta}) \quad (\text{Ec. 2.22})$$

Para elasticidad isótropa tenemos

$$\boldsymbol{\alpha} = kGt\mathbf{I} \quad (\text{Ec. 2.23})$$

Las ecuaciones de comportamiento de placas delgadas y gruesas se completan mediante las ecuaciones de equilibrio. Suprimiendo el comportamiento en el plano, se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} + q = \nabla^T \mathbf{S} + q = 0 \quad (\text{Ec. 2.24})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = L^T \mathbf{M} + \mathbf{S} = 0 \quad (\text{Ec. 2.25})$$

Para las placas delgadas, en las que se elimina la deformación por cortante, se reescribe la Ec 2.22 de la siguiente forma:

$$\nabla w - \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (\text{Ec. 2.26})$$

Las relaciones deformación-desplazamiento se escriben ahora como:

$$\varepsilon = -zL\nabla w = -z \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (Ec. 2.27)$$

A partir de aquí se puede considerar sencillo eliminar  $M$ ,  $S$  y  $\theta$  y dejar únicamente  $w$  como variable independiente. Aplicando operadores e insertando diferentes ecuaciones anteriores, se puede obtener:

$$(L\nabla)^T DL\nabla w - q = 0 \quad (Ec. 2.28)$$

donde

$$(L\nabla) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (Ec. 2.29)$$

En el caso de isotropía, con  $D=\text{cte}$ , la ecuación anterior coincide con la conocida ecuación biarmónica de la teoría de placas.

$$D = \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q = 0 \quad (Ec. 2.30)$$

### 2.2.2. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno que han de imponerse en el problema incluyen las siguientes condiciones clásicas:

1. Contorno fijo: se especifican los valores de los desplazamientos en partes restringidas del contorno. Un borde empotrado es un caso especial en el que los valores prescritos de los desplazamientos son cero.
2. Contorno cargado: se especifican los valores de los esfuerzos. El borde libre es un caso especial en el que los valores prescritos de los esfuerzos son nulos.



3. Condiciones de contorno “mixtas”: donde se especifican tanto desplazamientos como esfuerzos. Un caso típico es el borde apoyado.

### 2.2.3. La aproximación irreducible en placas delgadas

La formulación de placas delgadas expresada en función de una única  $w$  es claramente irreducible y, de hecho, es típica de una formulación en desplazamientos. La Ec. 2.24 y Ec. 2.25 pueden escribirse conjuntamente como

$$(\mathbf{L}\nabla)^T M - q = 0 \quad (\text{Ec. 2.31})$$

La relación constitutiva (Ec. 2.20) puede reformularse utilizando la (Ec. 2.26),

$$M = DL\nabla w \quad (\text{Ec. 2.32})$$

La derivación de las ecuaciones de elementos finitos puede obtenerse bien a partir de la forma débil de la (Ec. 2.31), obtenida utilizando como pesos cualquier función arbitraria (por ejemplo,  $v = N\tilde{v}$  e integrando por partes (dos veces), o más directamente mediante la aplicación de la equivalencia de trabajo virtual. Utilizando este último procedimiento se puede escribir el trabajo virtual interno de la placa como

$$\delta\Pi_{\text{int}} = \int_{\Omega} (\delta\boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \delta w (\mathbf{L}\nabla)^T \mathbf{D} (\mathbf{L}\nabla) w d\Omega \quad (\text{Ec. 2.33})$$

donde  $\Omega$  designa el área de la superficie (media) de referencia de placa y  $\mathbf{D}$  es la rigidez de la placa, que en el caso isótropo viene dada por la (Ec. 2.21).

De forma similar, el trabajo externo es

$$\delta\Pi_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \delta w q d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta\theta_n \bar{M}_n d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \delta\theta_s \bar{M}_{ns} d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \delta w \bar{S}_n d\Gamma \quad (\text{Ec. 2.34})$$

donde  $\bar{M}_n$ ,  $\bar{M}_{ns}$  y  $\bar{S}_n$  son valores prescritos y  $\Gamma_q$ ,  $\Gamma_t$  y  $\Gamma_s$  son partes del contorno en la que se prescribe cada componente. Para placas delgadas con lados rectos, la ecuación (Ec. 2.26) da inmediatamente  $\theta_s = \delta w / \delta s$  y, por tanto, los dos últimos términos anteriores pueden combinarse de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma_t} \delta\theta_s \bar{M}_{ns} d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \delta w \bar{S}_n d\Gamma = \int_{\Gamma_s} \delta w \left( \bar{S}_n - \frac{\partial \bar{M}_{ns}}{\partial s} \right) d\Gamma + \sum_i \delta w_i R_i \quad (\text{Ec. 2.35})$$

donde  $R_i$  son fuerzas concentradas que pueden aparecer en las esquinas.

Sustituyendo en las ecuaciones (Ec. 2.33) y (Ec. 2.34) la discretización

$$w = \mathbf{N}\mathbf{a} \quad (\text{Ec. 2.36})$$

donde  $\mathbf{a}$  son parámetro apropiados, pueden obtenerse para el caso lineal las ecuaciones estándar de aproximación en desplazamientos

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (\text{Ec. 2.37})$$

con

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{a} \equiv \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{M} d\Omega \quad (\text{Ec. 2.38})$$

y

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T q d\Omega + \mathbf{f}_b \quad (\text{Ec. 2.39})$$

Donde  $\mathbf{f}_b$  es la contribución del contorno y

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a} \quad (\text{Ec. 2.40})$$

con

$$\mathbf{B} = (\mathbf{L}\nabla)\mathbf{N} \quad (\text{Ec. 2.41})$$

Es interesante advertir que cuando se prescriben las fuerzas en el contorno a valores no nulos, el termino de fuerzas  $f_b$  incluye todos los valores de  $M_n, M_{ns}$  y  $S_n$ , independientemente de si se utiliza una formulación delgada o gruesa. Se puede verificar que este término es

$$f_b = \int_{\Gamma} (N_n^T \bar{M}_{ns} + N_s^T \bar{M}_{ns} + N^T \bar{S}_n) d\Gamma \quad (\text{Ec. 2.42})$$

donde  $\bar{M}_n, \bar{M}_{ss}$  y  $\bar{S}_n$ , son valores prescritos, y para placas delgadas

$$N_n = \frac{\partial N}{\partial n} \quad y \quad N_s = \frac{\partial N}{\partial s} \quad (\text{Ec. 2.43})$$

### 2.2.4. Requisitos de continuidad para las funciones de forma (Continuidad $C_1$ )

La presencia de derivadas segundas indica de forma clara que se necesitará continuidad  $C_1$  de las funciones de forma para la formulación irreducible de placas delgadas. Esta continuidad es difícil de conseguir, por las razones que se explican a continuación.

Para asegurar la continuidad de la flecha y su pendiente normal a lo largo de un contorno entre elementos debemos definir de manera única tanto  $w$  como  $\delta w/\delta n$  mediante parámetros nodales a lo largo de dicho contorno. Consideremos la Figura 2.2, que muestra los lados 1-2 de un elemento rectangular. La dirección normal  $n$  es, de hecho, la de  $y$ , y se desea que  $w$  y  $\delta w/\delta y$  estén definidos unívocamente por valores de  $w$ ,  $\delta w/\delta x$  y  $\delta w/\delta y$  en los nodos contenidos a lo largo de dicho lado.

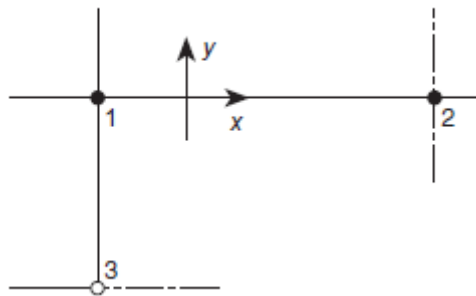


Figura 2.2 Condición de continuidad para las derivadas normales

A lo largo del lado 1-2 tendremos,

$$w = A_1 + A_2x + A_3y + \dots \quad (\text{Ec. 2.44})$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = B_1 + B_2x + B_3y + \dots \quad (\text{Ec. 2.45})$$

con el número preciso de constantes en cada expresión para determinar una solución única en función de los parámetros nodales asociados a la línea en cuestión.

Por ejemplo, si sólo hay dos nodos, estaría permitido que  $w$  fuera de tercer grado observando que  $\delta w/\delta x$  y  $w$  están definidos en cada nodo. De forma similar, sólo estaría permitido que  $\delta w/\delta x$  tuviese variación lineal, o de dos términos.

Sin embargo, puede efectuarse un ejercicio similar en la dirección  $y$ , manteniendo según la misma la continuidad de  $\delta w/\delta x$ . Tenemos que a lo largo del lado 1-2,  $\delta w/\delta y$  sólo depende de los parámetros nodales del lado 1-2, y a lo largo de 1-3,  $\delta w/\delta x$  sólo depende de los parámetros nodales del lado 1-3. Si diferenciamos la primera con respecto a  $x$ , obtenemos  $\delta^2 w/\delta x \delta y$  sobre la línea 1-2, que únicamente depende de los parámetros nodales del lado 1-2, y de la misma forma,  $\delta^2 w/\delta y \delta x$  sobre el lado 1-3, que sólo depende de los parámetros nodales del lado 1-3.

En el punto común 1, surge de forma inmediata una incongruencia, puesto que en él no podemos satisfacer automáticamente la condición necesaria de continuidad

$$\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \equiv \frac{\delta^2 w}{\delta y \delta x} \quad (Ec. 2.46)$$

para los valores arbitrarios de los parámetros de los nodos 2 y 3. Es, por tanto, imposible definir mediante expresiones polinómicas sencillas funciones de forma que aseguren una compatibilidad completa cuando en los nodos sólo se imponen los valores de  $w$  y sus derivadas primeras.

Por tanto, si se encuentran funciones que satisfagan la compatibilidad empleando tres variables nodales, éstas deben ser tales que en los nodos de vértice no tengan derivadas continuas y la derivada segunda cruzada no sea única. La demostración anterior se refería a un elemento rectangular.

## 2.3. Elemento rectangular con nodos de vértice (12 grados de libertad)

### 2.3.1. Funciones de forma

Consideraremos un elemento rectangular de placa  $ijkl$  coincidente con el plano  $xy$ , como el que se observa en la Figura 2.3. En cada nodo,  $n$ , se introducen los movimientos  $a_n$ , compuestos por tres componentes: el desplazamiento en la dirección  $z$ ,  $w_n$ , el giro alrededor del eje  $x$ ,  $(\hat{\theta}_x)_n$  y el giro alrededor del eje  $y$ ,  $(\hat{\theta}_y)_n$ .

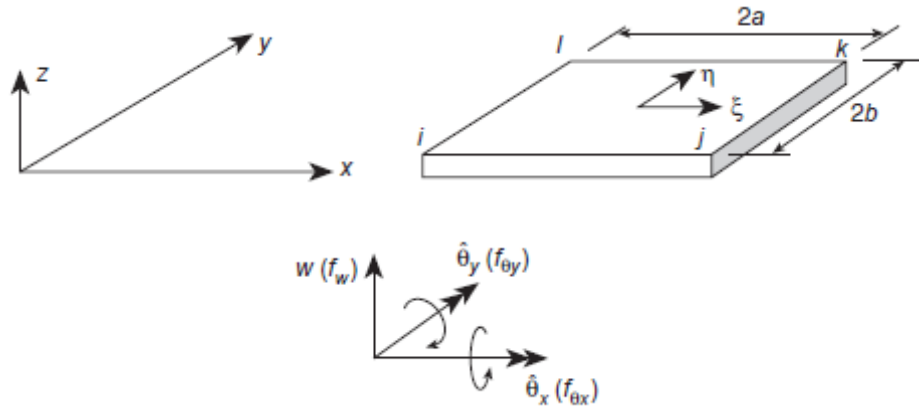


Figura 2.3 Elemento rectangular de placa

Los vectores de movimientos nodales se definen como  $a_i$ . Los movimientos del elemento vendrán dados, como siempre, por un vector que tiene ahora un total de doce componentes:

$$a^e = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_l \\ a_k \end{Bmatrix} \quad a_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \hat{\theta}_{xi} \\ \hat{\theta}_{yi} \end{Bmatrix} \quad (Ec. 2.47)$$

Es conveniente usar una expresión polinómica para definir las funciones de forma en función de los doce parámetros. Deben omitirse ciertos términos de un polinomio completo de cuarto grado. Al escribir

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3y + \alpha_{12} xy^3 \equiv P\alpha \quad (Ec. 2.48)$$

conseguimos algunas ventajas. En particular, a lo largo de cualquier recta  $x=\text{constante}$  o  $y=\text{constante}$ , el desplazamiento  $w$  variará según una expresión de tercer grado. Los contornos del elemento, o límites de separación, se componen de rectas como las mencionadas y, puesto que un polinomio de tercer grado queda definido unívocamente mediante cuatro constantes, los dos valores de los giros y los dos flechas en los extremos definirán de manera única los movimientos a lo largo de dichos contornos. Como dichos valores extremos son comunes para elementos adyacentes, quedará impuesta la continuidad de  $w$  a lo largo del límite de separación.

Se observa que el gradiente de  $w$  a lo largo de la normal a cualquiera de los contornos varía según tercera potencia. Puesto que en dichas líneas sólo están definidos los valores de la derivada normal, el polinomio de tercer grado no está definido de manera única y, en general, aparecerá una discontinuidad de aquélla. La función es, por tanto, “no conforme”.

Las constantes  $\alpha_1$  a  $\alpha_{12}$  se pueden calcular escribiendo las doce ecuaciones simultaneas que relacionan  $w$  y sus derivadas en los nodos cuando las coordenadas toman los valores apropiados. Por ejemplo:

$$w_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \dots$$

$$\left(\frac{\delta w}{\delta y}\right)_i = \hat{\theta}_{xi} = \alpha_3 + \alpha_5 x_i + \dots$$

$$-\left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)_i = \hat{\theta}_{yi} = -\alpha_2 - \alpha_5 y_i - \dots$$

Agrupando las doce ecuaciones, podemos escribir en forma matricial,

$$a^e = C\alpha \quad (Ec. 2.49)$$

donde  $C$  es una matriz  $12 \times 12$  función de las coordenadas nodales y  $\alpha$  es un vector formado por las doce constantes incógnitas. Invertiendo, tenemos

$$\alpha = C^{-1}a^e \quad (Ec. 2.50)$$

Esta inversión puede llevarla a cabo el ordenador o, si se desea una expresión explícita para las rigideces, etc., se puede efectuar algebraicamente.

Se puede ahora escribir la expresión de la flecha en el interior de un elemento en forma general como sigue

$$u \equiv w = Na^e = PC^{-1}a^e \quad (Ec. 2.51)$$

donde

$$P = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3)$$

La forma de matriz B se obtiene directamente de la ecuación  $B = (L\nabla)N$ . Así pues, tenemos

$$L\nabla w = Q\alpha = QC^{-1}a^e = Ba^e \quad (Ec. 2.52)$$

en donde

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad (Ec. 2.53)$$

Es de interés observar que la función de desplazamientos escogida permite, en realidad, la existencia de un estado de deformación constante.

Las funciones de forma N pueden escribirse sencillamente en función de las coordenadas normalizadas. Por tanto, para cualquier nodo podemos escribir

$$N_i^T = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \left\{ \begin{array}{l} 2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2 \\ b\eta_i(1 - \eta^2) \\ -a\xi_i(1 - \xi^2) \end{array} \right\} \quad (Ec. 2.54)$$

con las coordenadas normalizadas definidas como

$$\xi = \frac{(x - x_c)}{a} \quad \text{donde } \xi_0 = \xi\xi_i$$

$$\eta = \frac{(y - y_c)}{b} \quad \text{donde } \eta_0 = \eta\eta_i$$

Esta forma evita la inversión explícita de C; sin embargo, por sencillez, preferimos el uso directo de polinomios para deducir las matrices de rigidez.

### 2.3.2. Matrices de rigidez y de carga

Se puede seguir ahora el procedimiento general siendo casi innecesario explicar los detalles. La matriz de rigidez que relaciona las fuerzas nodales (dadas por una fuerza lateral y dos momentos en cada nodo) con los desplazamientos nodales correspondientes es

$$K^e = \int_{\Omega^e} B^T DB \, dx \, dy \quad (Ec. 2.55)$$

y sustituyendo la Ec. 2.52 en esta expresión

$$K^e = C^{-T} \left( \int_{-b}^b \int_{-a}^a Q^T D Q \, dx \, dy \right) C^{-1} \quad (\text{Ec. 2.56})$$

Se ha sacado fuera de la integral los términos que no contienen  $x$  o  $y$ . El integrando se puede multiplicar e integrar explícitamente sin dificultad si  $D$  es constante.

Las fuerzas exteriores en los nodos debidas a cargas distribuidas se pueden asignar “por inspección”, asignando un área específica como contribución para cada nodo. Sin embargo, es más lógico y preciso emplear de nuevo la expresión general para dicha asignación.

La contribución de estas fuerzas a cada nodo será

$$f_i = \begin{Bmatrix} f_{w_i} \\ f_{\theta_{xi}} \\ f_{\theta_{yi}} \end{Bmatrix} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a N^T q \, dx \, dy \quad (\text{Ec. 2.57})$$

o

$$f_i = -C^{-T} \int_{-b}^b \int_{-a}^a P^T q \, dx \, dy \quad (\text{Ec. 2.58})$$

De nuevo, la integral se calcula de manera sencilla. Se advierte ahora que, en general, las tres componentes de la fuerza exterior toman valores distintos de cero en todos los nodos. Esto no sería así de haber asignado las cargas exteriores de forma más sencilla. El vector de fuerzas nodales para una carga uniformemente distribuida  $q$  es

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{12} qab \begin{Bmatrix} 3 \\ b \\ -a \end{Bmatrix} \\ f_2 &= \frac{1}{12} qab \begin{Bmatrix} 3 \\ -b \\ -a \end{Bmatrix} \\ f_3 &= \frac{1}{12} qab \begin{Bmatrix} 3 \\ b \\ a \end{Bmatrix} \\ f_4 &= \frac{1}{12} qab \begin{Bmatrix} 3 \\ -b \\ a \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 2.59})$$



Puede encontrarse de manera similar el vector de fuerzas nodales debido a deformaciones iniciales y a tensiones iniciales. Con relación a esto, es preciso observar que la deformación inicial, como puede ser la originada por un incremento de temperatura, pocas veces se limita a las curvaturas. Normalmente, se introducen además deformaciones directas (en el plano de la placa) y el problema completo sólo puede resolverse considerando el problema de tensión plana superpuesto al de flexión.



### **3. ESTUDIO DEL PANDEO/ABOLLADURA MEDIANTE LA UTILIZACION DEL PROGRAMA WOLFRAM MATHEMATICA 8.0**

#### **3.1. Introducción**

A partir de los años 70 la matemática y la computación se han acompañado a nivel de desarrollo investigación y aplicación. Como sabemos la computación nace de la necesidad de los seres humanos de realizar complejos y largos cálculos matemáticos. Una vez que un cálculo podía describirse en pasos, éstos podían ser seguidos por un ordenador y solucionar así el problema. Conforme ha incrementado la tecnología en ambos campos, éstos han tendido a separarse no porque exista una brecha entre ellos, sino mas bien por la extensa gama de nichos de investigación y desarrollo que han abarcado.

A mediados de los años 90, Stephen Wolfram junto con su equipo de trabajo iniciaron la construcción de lo que resulto ser un poderoso y versátil sistema de algebra computacional. Desde mediados de los años 60 se contaba con la existencia de paquetes específicos para tareas matemáticas, sin embargo no existía un solo sistema que pudiera manejar diversas técnicas de matemática computacional de una forma coherente y unificada. A partir de aquí se genera el concepto Mathematica.

Esto se logró bajo la implementación de un lenguaje simbólico con la capacidad de manipular a la gran variedad de objetos necesarios para lograr la generalidad requerida en un sistema computacional con un mínimo numero de primitivas básicas.

Cuando Mathematica fue lanzado a finales de los 80 por la compañía Wolfram Research, fue aclamado por la comunidad técnica como una de las principales revoluciones intelectuales del momento. En un principio, el impacto del nuevo sistema se sintió mayormente en la matemática y la física, pero ha sido con el paso de los años donde se ha visto que ha crecido su importancia en estos campos, incluso aumentado el rango de estas áreas.

En el plano técnico, Mathematica es ampliamente considerado como una gran hazaña de la ingeniería de software. Es uno de los mayores programas de aplicación desarrollados, y cuenta con una amplia gama de algoritmos e importantes innovaciones que han sido desarrolladas y mejoradas a lo largo de sus versiones.

Ofrece un entorno completo para la enseñanza y la investigación, que combina a la perfección un potente motor de cálculo y visualización dinámica con una interfaz de usuario intuitiva que hace que empezar sea fácil para cualquier persona. Y, porque Mathematica también incluye documentación incorporada y herramientas de presentación, es perfecto para la creación de los materiales del curso y de proyectos

El programa se encarga de manejar los aspectos mecánicos de las matemáticas, permitiendo de esta forma a los usuarios concentrarse en las implicaciones que conllevan los trabajos, lo cual aísla para el usuario la forma de resolver los problemas presentando solo respuestas, trayendo de esta forma mayor eficacia y reduciendo en gran medida el tiempo y el esfuerzo del usuario brindando información concisa, pertinente y exacta que es de gran complejidad y muy útil para resolver toda una gama de problemas presentes en la sociedad actual.

En la actualidad los usuarios de Mathematica pueden dividirse en organizaciones comerciales o en instituciones académicas, cuyas utilidades varían desde las más comunes como la ingeniería, la física o la informática, hasta otras de gran complejidad como la biología o aplicaciones científicas, entre otras muchas.

Además juegan un papel significativo en el modelado de sofisticados sistemas financieros y de análisis general. Para ampliar la variedad de funcionalidades que posee hace uso de su propia herramienta de desarrollo de software, con un lenguaje altamente conocido y estudiado, lo cual permite no solo utilizar las funciones brindadas por los creadores sino implementar las propias de acuerdo a las diferentes necesidades.

### 3.2. Proceso de resolución de la carga crítica de pandeo

En este apartado vamos a explicar el proceso de programación llevado a cabo con el programa *Wolfram Mathematica 8.0* para la resolución de la carga crítica por la que se produce el fenómeno de abolladura. Este proceso va a ser el mismo tanto si analizamos la abolladura del ala de nuestro perfil IPE300 como si analizamos el del alma, variando únicamente sus dimensiones y los desplazamientos y fuerzas conocidos de éstos.

En primer lugar, vamos a definir nuestra placa delgada de acero. La vamos a dividir en 16 elementos rectangulares iguales, como el mostrado en la Figura 2.3 del capítulo anterior, siendo cada elemento coincidente con el plano  $xy$ . Las características y propiedades de la placa son las siguientes:

- $\nu E$  (Módulo de Young) =  $2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
- $\nu$  (coeficiente de Poisson) = 0,3
- $A$  (altura de ala o alma) = 4 m, en ambos casos.
- $B$  (ancho del ala o alma) = 0,075 m, para el caso de ala ya que estudiaremos la mitad de éste, y 0,3 m para el caso del alma.
- $t$  (espesor del ala o alma) =  $10,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , para el caso del ala, y  $7,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , para el caso del alma.

Cada nodo del elemento rectangular que hemos definido va a estar discretizado por las siguientes variables:

$$u_i = \{ u, v, w, \theta_x, \theta_y \}$$

Vamos a considerar la teoría de placas de Kirchhoff de grandes desplazamientos despreciando los efectos de las deformaciones transversales. Por tanto, haciendo  $E_{XY} = E_{YZ} = 0$ , tenemos que:

$$\theta_x = w_{,x} \quad y \quad \theta_y = w_{,y} \quad (\text{Ec. 3.1})$$

Por lo general, los ángulos de rotación en placas son pequeños a menos que se hagan también grandes las deformaciones en el plano. Los desplazamientos de la superficie media de la placa se pueden aproximar en la siguiente forma:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (Ec. 3.2)$$

donde  $\theta$  son pequeñas rotaciones representadas en la Figura 2.3 en el capítulo anterior.

La posición de la coordenadas de referencia en el plano  $X$  e  $Y$  cambia muy poco durante la deformación y se pueden reemplazar por las coordenadas actuales  $x$  e  $y$ . Por tanto, las deformaciones de Green-Lagrange se pueden representar en función de las deformaciones de la superficie media y de los cambios de curvatura como

$$\begin{pmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{pmatrix} = E^p - z \cdot K^b \quad (Ec. 3.3)$$

donde  $E^p$  marca las deformaciones de membrana en el plano y  $K^b$  el cambio de curvatura debido a la flexión. Según el Principio de los Trabajos Virtuales, la variación de las ecuaciones de la placa se puede expresar de la siguiente forma:

$$\delta\Pi = \int_V (\delta E^p) \alpha dV + \int_V (\delta K^b) \sigma_z dV - \delta\Pi_{ext} \quad (Ec. 3.4)$$

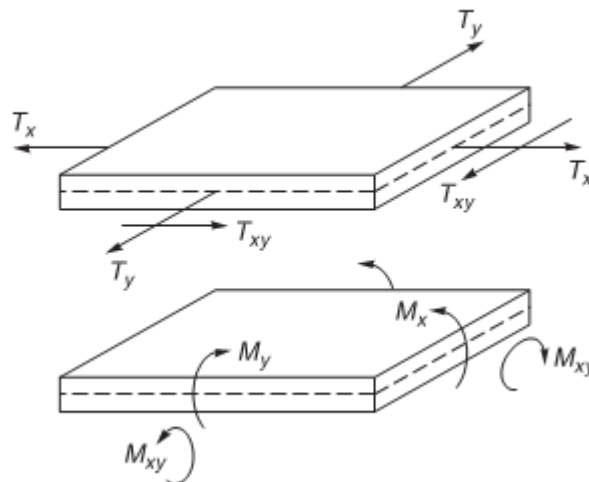


Figura 2.1 Esfuerzo de membrana y de flexión en placas.

Si definimos los esfuerzos (Figura 2.1) como las integrales a través del espesor en función de las fuerzas de membrana,  $T^P$

$$T^P = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \underline{\sigma} dz = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (Ec. 3.5)$$

y los momentos flectores

$$M_b = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \underline{\sigma} \cdot z dz = - \int_{-t/2}^{t/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \cdot z dz \quad (Ec. 3.6)$$

se obtiene la expresión del trabajo virtual de la placa:

$$\delta\Pi = \int_A (\delta E^P) T^P dA + \int_A (\delta K^b) M_b z dA - \delta\Pi_{ext} \quad (Ec. 3.7)$$

Para continuar con el desarrollo es necesario establecer expresiones para las matrices de elementos finitos  $\mathbf{B}$  (matriz deformación) y  $\mathbf{K}_T$  (matriz tangente). Las aproximaciones para los desplazamientos presentan la forma:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = N_\alpha \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} \quad (Ec. 3.8)$$

$$w = N_\alpha^w w_\alpha + N_\alpha^{\theta_x} \theta_{x\alpha} + N_\alpha^{\theta_y} \theta_{y\alpha} \quad (Ec. 3.9)$$

Las expresiones para las matrices de deformación-desplazamiento presentan la forma

$$\begin{aligned} \delta E^P &= \begin{pmatrix} N_{\alpha,x} & 0 \\ 0 & N_{\alpha,y} \\ N_{\alpha,y} & N_{\alpha,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_\alpha \\ \delta v_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{pmatrix} G_\alpha \begin{pmatrix} \delta w_\alpha \\ \delta \theta_{x\alpha} \\ \delta \theta_{y\alpha} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{a} N_{\alpha,\xi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} N_{\alpha,\eta} \\ \frac{1}{b} N_{\alpha,\eta} & \frac{1}{a} N_{\alpha,\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_\alpha \\ \delta v_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{a} w_{,\xi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} w_{,\eta} \\ \frac{1}{b} w_{,\eta} & \frac{1}{a} w_{,\xi} \end{pmatrix} G_\alpha \begin{pmatrix} \delta w_\alpha \\ \delta \theta_{x\alpha} \\ \delta \theta_{y\alpha} \end{pmatrix} = B_\alpha \delta \underline{u}_\alpha + B_\alpha^L \delta \underline{w}_\alpha \end{aligned} \quad (Ec. 3.10)$$

donde  $G_\alpha$ , debido a la forma de la interpolación de  $w$ , tiene la forma

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} N_{\alpha,x}^w & N_{\alpha,x}^{\theta_x} & N_{\alpha,x}^{\theta_y} \\ N_{\alpha,y}^w & N_{\alpha,y}^{\theta_x} & N_{\alpha,y}^{\theta_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} N_{\alpha,\xi}^w & \frac{1}{a} N_{\alpha,\xi}^{\theta_x} & \frac{1}{a} N_{\alpha,\xi}^{\theta_y} \\ \frac{1}{b} N_{\alpha,\eta}^w & \frac{1}{b} N_{\alpha,\eta}^{\theta_x} & \frac{1}{b} N_{\alpha,\eta}^{\theta_y} \end{pmatrix} \quad (Ec. 3.11)$$

La variación de la curvatura para placas delgadas es

$$\delta K^b = \begin{pmatrix} N_{\alpha,xx}^w & N_{\alpha,xx}^{\theta_x} & N_{\alpha,xx}^{\theta_y} \\ N_{\alpha,yy}^w & N_{\alpha,yy}^{\theta_x} & N_{\alpha,yy}^{\theta_y} \\ 2N_{\alpha,xy}^w & 2N_{\alpha,xy}^{\theta_x} & 2N_{\alpha,xy}^{\theta_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta w_\alpha \\ \delta \theta_{x\alpha} \\ \delta \theta_{y\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} N_{\alpha,\xi\xi}^w & \frac{1}{a^2} N_{\alpha,\xi\xi}^{\theta_x} & \frac{1}{a^2} N_{\alpha,\xi\xi}^{\theta_y} \\ \frac{1}{b^2} N_{\alpha,\eta\eta}^w & \frac{1}{b^2} N_{\alpha,\eta\eta}^{\theta_x} & \frac{1}{b^2} N_{\alpha,\eta\eta}^{\theta_y} \\ \frac{2}{ab} N_{\alpha,\xi\eta}^w & \frac{2}{ab} N_{\alpha,\xi\eta}^{\theta_x} & \frac{2}{ab} N_{\alpha,\xi\eta}^{\theta_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta w_\alpha \\ \delta \theta_{x\alpha} \\ \delta \theta_{y\alpha} \end{pmatrix} = B_\alpha^b \delta \underline{w}_\alpha \quad (Ec. 3.12)$$

Agrupando los términos de fuerzas en la forma

$$\sigma = \begin{Bmatrix} T^P \\ M^B \end{Bmatrix} \quad (Ec. 3.13)$$

y las matrices de deformación como

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} B_\alpha & B_\alpha^L \\ 0 & B_\alpha^b \end{bmatrix} \quad (Ec. 3.14)$$

se puede escribir la expresión del trabajo virtual en forma compacta como

$$\delta \Pi = \delta \tilde{a}_\alpha^T \int_A \bar{B}_\alpha^T \bar{\sigma} dA - \delta \Pi_{\text{ext}} \quad (Ec. 3.15)$$

Por lo que el problema no lineal que debe resolverse es el siguiente:

$$f_\alpha - \int_A \bar{B}_\alpha^T \bar{\sigma} dA = 0 \quad (Ec. 3.16)$$



Este problema puede resolverse utilizando un procedimiento de Newton-Raphson para el cual se necesita de una matriz tangente.

La matriz tangente se puede calcular para la formulación no lineal de placas mediante la linealización de la (Ec.3.15). Ésta puede escribirse de la siguiente forma:

$$d(\delta\Pi) = \delta \underline{a}_\alpha^T \int_A \left[ d(\overline{B}_\alpha^T) \overline{\sigma} + \overline{B}_\alpha^T \cdot d(\overline{\sigma}) \right] dA - d(\delta\Pi_{ext}) = 0 \quad (Ec. 3.17)$$

Por simplicidad supondremos que la carga es conservativa, por lo que  $d(\delta\Pi_{ext}) = 0$ , por tanto, los únicos términos que deben ser linealizados son la matriz deformación-desplazamiento y la relación tensión-deformación. Si se supone comportamiento elástico lineal, la relación entre las fuerzas en la placa y las deformaciones se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} T^p \\ M^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^p & 0 \\ 0 & D^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^p \\ K^b \end{pmatrix} \quad (Ec. 3.18)$$

donde, para una placa homogénea e isotrópica, las constantes elásticas son

$$D^p = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{pmatrix} \quad D^b = \frac{t^2}{12} D^p \quad (Ec. 3.19)$$

La linealización correspondiente de la ecuación constitutiva es:

$$d(\overline{\sigma}) = \begin{Bmatrix} d(T^p) \\ d(M^p) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} D^p & 0 \\ 0 & D^b \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d(E^p) \\ d(K^b) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_\beta^p & B_\beta^L \\ 0 & B_\beta^b \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d(\underline{u}_\beta) \\ d(\underline{w}_\beta) \end{Bmatrix} \quad (Ec. 3.20)$$

Utilizando este resultado, la parte material de la matriz tangente es

$$(K_M)_{\alpha\beta} = \int_A \begin{pmatrix} B_\alpha^p & B_\alpha^L \\ 0 & B_\alpha^b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D^p & 0 \\ 0 & D^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\beta^p & B_\beta^L \\ 0 & B_\beta^b \end{pmatrix} dA = \begin{pmatrix} (K_M^p)_{\alpha\beta} & (K_M^L)_{\alpha\beta} \\ (K_M^L)^T_{\alpha\beta} & (K_M^b)_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (Ec. 3.21)$$

siendo los componentes de la matriz los siguientes:

$$\begin{aligned} (K_M^p)_{\alpha\beta} &= ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B_\alpha^p)^T D^p B_\beta^p d\xi d\eta; \quad \alpha, \beta = 1 \dots 4 \\ (K_M^b)_{\alpha\beta} &= ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B_\alpha^b)^T D^b B_\beta^b d\xi d\eta; \quad \alpha, \beta = 1 \dots 4 \\ (K_M^L)_{\alpha\beta} &= ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B_\alpha^p)^T D^p B_\beta^L d\xi d\eta; \quad \alpha, \beta = 1 \dots 4 \end{aligned} \quad (Ec. 3.22)$$

El resto del cálculo de la matriz tangente consiste en la linealización de la parte no lineal de la matriz de deformación-desplazamiento,  $B_\alpha^L$ . Este término lo escribiremos de la siguiente forma:

$$d(B_\alpha^L) \Gamma^p = G_\alpha^T \begin{pmatrix} d(w, x) & 0 & d(w, y) \\ 0 & d(w, y) & d(w, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{pmatrix} = G_\alpha^T \begin{pmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(w, x) \\ d(w, y) \end{pmatrix} \quad (Ec. 3.23)$$

Puede ahora reescribirse éste en función de las interpolaciones de elementos finitos para obtener la parte geométrica o de tensión inicial de la matriz tangente:

$$(K_G^L)_{\alpha\beta} = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_\alpha^T \begin{pmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{pmatrix} G_\beta d\xi d\eta; \quad \alpha, \beta = 1 \dots 4 \quad (Ec. 3.24)$$

que se introduce en la tangente geométrica total en la forma

$$(K_G)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (K_G^L)_{\alpha\beta} \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta = 1 \dots 4 \quad (Ec. 3.25)$$

dando como resultado final, una vez acopladas, la siguiente matriz:

$$(K_T)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (K_M^p)_{\alpha\beta} & (K_M^L)_{\alpha\beta} \\ (K_M^L)^T_{\alpha\beta} & (K_M^b + K_G^L)_{\alpha\beta} \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta = 1 \dots 4 \quad (Ec. 3.26)$$

Una vez obtenida la matriz de rigidez, el siguiente paso es introducir las condiciones de contorno, es decir, el vector de fuerzas y de desplazamientos. Dependiendo de si estamos analizando la abolladura en el ala o en el alma, conoceremos unos términos u otros de los vectores mencionados anteriormente, considerando el resto como incógnitas.

Para que el programa nos resuelva las incógnitas del vector de fuerzas y de desplazamientos, tendremos que hacer que nos resuelva la siguiente ecuación:

$$F = K \cdot u \quad (\text{Ec. 3.27})$$

Por último, para obtener la carga crítica de pandeo a partir de la cual se produce la abolladura, aplicaremos el método de la secante que nos resolverá el problema y del que obtendremos ese multiplicador crítico de la carga inicial que buscamos.

### 3.3. Resultados de la carga crítica de pandeo y de la abolladura

#### 3.3.1. Resultado de la carga crítica de pandeo y de la abolladura para la mitad del ala

Para el caso en el que el elemento de análisis de la comprobación del fenómeno de abolladura sea la mitad del ala del perfil IPE300 tenemos el siguiente resultado:

$$\lambda_{crit} = 24,0388$$

$$P_0 = 10^5 \text{ N}$$

$$P_{crit} = \lambda_{crit} \cdot P_0 = 2,40 \cdot 10^6 \text{ N}$$

Los resultados gráficos de la mitad del ala que se consiguen para esa carga crítica de pandeo, con escala desproporcionada entre el eje de abscisas y el de ordenadas, son:

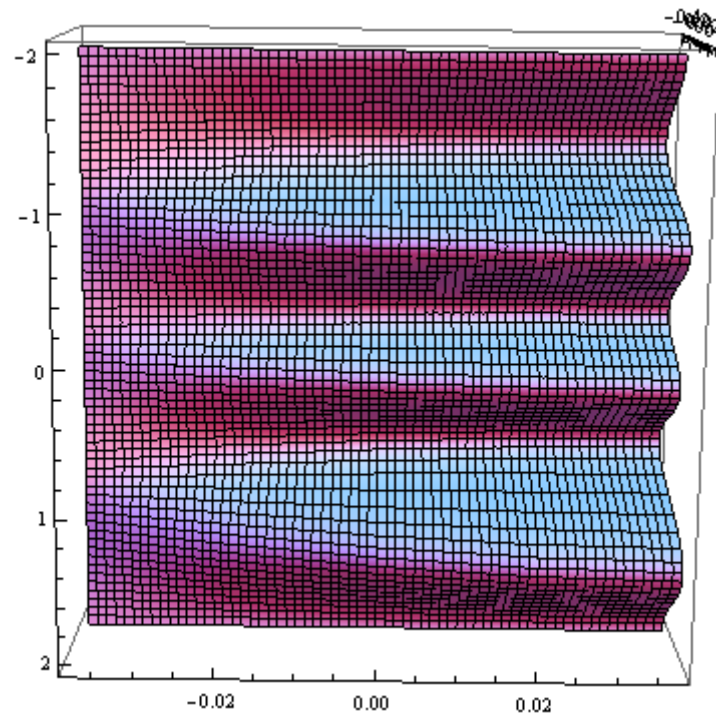


Figura 3.2 Vista de alzado de la mitad del ala

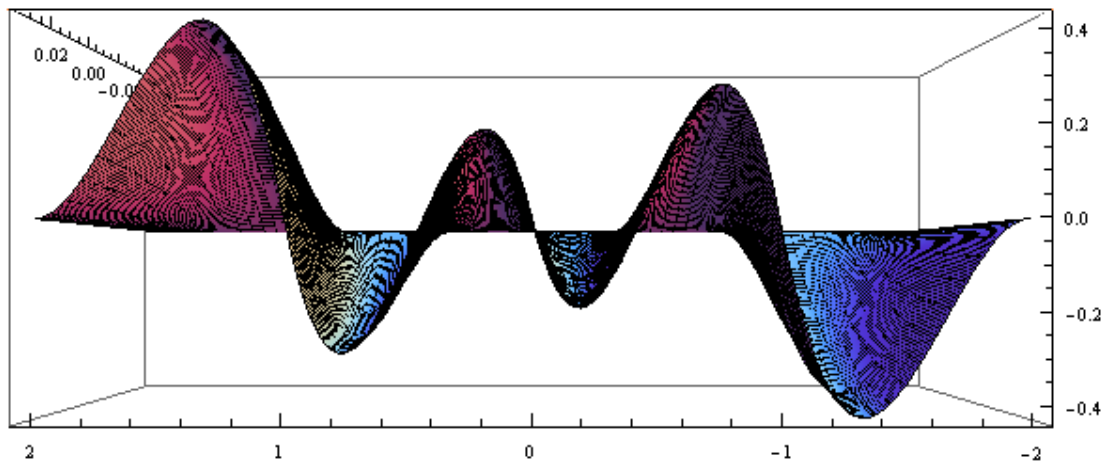


Figura 3.3 Vista de perfil de la mitad del ala

### 3.3.2. Resultado de la carga crítica de pandeo y de la abolladura para el alma

Para el caso en el que el elemento de análisis de la comprobación del fenómeno de abolladura sea el alma del perfil IPE300 tenemos el siguiente resultado:

$$\lambda_{crit} = 2,36805$$

$$P_0 = 10^5 N$$

$$P_{crit} = \lambda_{crit} \cdot P_0 = 236805 N$$

Nuevamente, los resultados gráficos del alma que se consiguen para esa carga crítica de pandeo, con escala desproporcionada entre el eje de abscisas y el de ordenadas, son:

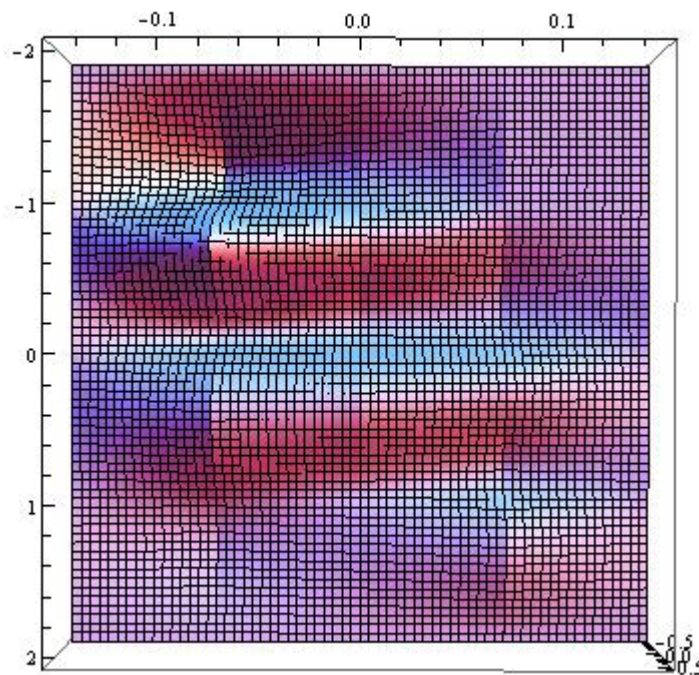


Figura 3.4 Vista de alzado del alma

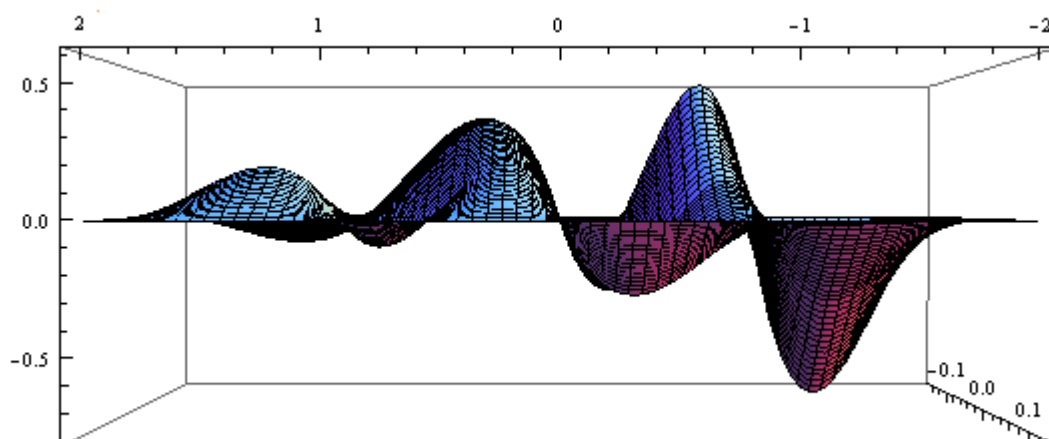


Figura 3.5 Vista de perfil del alma

## **4. ESTUDIO DEL PANDEO/ABOLLADURA MEDIANTE LA UTILIZACION DEL PROGRAMA AUTODESK SIMULATION MECHANICAL 2014.**

### **4.1. Introducción**

El análisis de elementos finitos (FEA), también llamado método de elementos finitos (FEM) es un método de resolución numérica de problemas de campo. Los problemas de campo requieren la solución espacial de una o más variables dependientes, tales como una distribución de temperatura, la distribución de desplazamiento, tensión y deformación de una pieza.

Los problemas de campo se describen bajo ecuaciones diferenciales o expresiones integrales. Las ecuaciones de los elementos finitos están integradas en programas comerciales con los que se puede realizar un análisis sin tener apenas conocimiento. Las consecuencias de ello es el poder cometer errores desastrosos.

Las porciones de elemento finitos se pueden visualizar como piezas pequeñas de una estructura que serán utilizadas en el cálculo. En cada elemento finito una magnitud del campo se aproxima a una única simple variación espacial (generalmente descrita por polinomios  $x$ ,  $y$ ,  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$ ). Como la solución exacta en cada elemento es, en la mayoría de las veces, muy complicada, FEA proporciona una aproximación a la solución. La solución se da para los nodos, que son los puntos que forman el elemento diferencial, dando lugar en su conjunto a la estructura (cuerpo o región). Esta unión se denomina malla.

Numéricamente la malla de elementos finitos se representa mediante un sistema algebraico de ecuaciones que se resuelve solamente en los nodos cuyos valores nodales desconocidos son los de la variable de campo.

Aunque un FEA no proporciona una solución exacta por las simplificaciones que se hagan y los errores matemáticos cometidos en el cálculo, la solución da una buena idea de qué es lo que ocurre en la estructura.

FEA presenta una serie de ventajas que no presentan otros métodos de análisis numérico, tales como:

- Es aplicable a cualquier problema de campo: transmisión de calor, análisis de tensiones, campos magnéticos, etc.
- No hay restricciones geométricas ni de condiciones de contorno ni de cargas aplicadas.
- Los materiales no están restringidos únicamente a propiedades isótropos, sino que pueden realizarse cálculos para materiales anisótropos.
- Se pueden combinar componentes que tengan diferente comportamiento y descripción matemática, tales como: bar, beam, plate, cable, etc.
- La estructura mallada se parece mucho a la estructura real.
- La solución puede ser mejorada adaptando la malla donde haya gradientes elevados de la variable de campo.

A la hora de introducirnos en un programa de análisis de elementos finitos, tenemos que tener en cuenta tres aspectos fundamentales: clasificación, modelado y discretización.

- Clasificación

El primer paso para resolver un problema es identificarlo, saber cuál es el fenómeno más importante que tiene lugar, si el problema depende o no del tiempo, si el problema es lineal o no, que resultado se espera, cual es el fin de la estructura que se analiza, qué resultados se quieren y con qué precisión, si se tienen pequeñas o grandes deformaciones, etc.

Un problema complicado puede no responder únicamente a una categoría. Tal es el caso de la interacción entre fluido y estructura (terremoto, por ejemplo). Todas las decisiones que se tomen en este apartado traen consigo un inevitable error de la estructura que se va a realizar con respecto de la original.

- Modelado

Un modelo matemático es una idealización, una geometría y propiedades del material, cargas y condiciones de contorno que se simplifican pero que no se corresponden perfectamente con las reales. Los materiales no son perfectamente isótropos ni tienen un comportamiento perfectamente elástico, la carga distribuida puede no coincidir exactamente con la simulada, los puntos de unión entre elementos son difíciles de simular de forma precisa, etc.



- Discretización

El modelo matemático se discretiza dividiendo en elementos finitos (diferenciales generalmente) un cuerpo para dar lugar a una malla con un número determinado de nodos en los que se realizará el cálculo de las variables de campo. Obviamente la discretización introduce una nueva aproximación que traerá como consecuencia un error de discretización. Estos errores se pueden reducir sin más que ampliar el número de elementos. Sin embargo, un número muy extenso de ellos puede traer derivar en errores, en este caso matemáticos, por operar con número cercanos a cero.

Resolver un problema práctico mediante el uso de FEA involucra saber mucho acerca del problema, preparar un modelo matemático adecuado y discretizarlo, tener un ordenador que lo calcule y chequee los resultados. El tiempo de espera de cálculo es una fracción muy pequeña de tiempo pero el analista debe entender perfectamente qué es lo que está haciendo el ordenador.

Es necesario tener una solución preliminar obtenida mediante cálculos simples, experimentos, experiencia previa de confianza, etc. Posteriormente se realiza un análisis por elementos finitos que se compone de tres fases fundamentales:

- Preprocesado. Se define la geometría, el mallado, los materiales y sus propiedades, las cargas, las condiciones de contorno, etc.
- Resolución numérica. La realiza el ordenador de forma automática con las ecuaciones que se estudiarán en el tema siguiente.
- Postprocesado. Análisis de resultados, tensiones, deformaciones, etc.

Por último, será necesario examinar si los resultados parecen o no correctos y comprobar los errores que se han tenido en las fases de modelización y discretización. Generalmente se pueden hacer comprobaciones superficiales rápidas tales como observar tensiones de compresión o de tracción, deformaciones positivas o negativas, etc.

## 4.2. Condiciones Iniciales

En este bloque vamos a abordar el análisis de pandeo/abolladura tanto de pilares individuales como de un pórtico, ambos utilizando perfil IPE300. Antes de proceder al estudio por medio del programa 'Autodesk Simulation Mechanical 2014', necesitamos modelar la estructura (pilar o pórtico) utilizando el programa 'Inventor Fusion 2013 R1'.

Las principales dimensiones del perfil de nuestra estructura son las siguientes:  $h \equiv$  altura del perfil,  $b \equiv$  ancho del perfil,  $e \equiv$  espesor del alma,  $e_1 \equiv$  espesor del ala, que para nuestra sección IPE300 son los siguientes valores numéricos.

- $h \equiv 300 \text{ mm}$
- $b \equiv 150 \text{ mm}$
- $e \equiv 7,1 \text{ mm}$
- $e_1 \equiv 10,7 \text{ mm}$

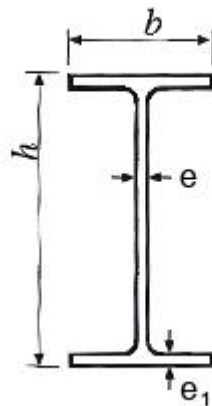


Figura 4.1 Dimensiones del perfil IPE300.

A lo largo de esta parte de análisis de elementos finitos de las diferentes estructuras, en lo que al estudio de los pilares se refiere, modificaremos la altura de los mismos para realizar las comparaciones oportunas al variar ésta.

Una vez diseñado nuestro modelo a analizar, y dado que ambos programas están relacionados y son compatibles el uno con el otro, lo cargaremos para comenzar a introducir las condiciones de contorno que harán que nuestro objeto de observación actúe de una manera u otra.

Con nuestro diseño en el programa *Autodesk Simulation Mechanical 2014*, lo primero que tenemos que hacer es proceder a mallarlo, ya que sin ello no podremos imponer las condiciones de contorno, tanto de fuerzas como de desplazamientos.

Dirigiéndonos en el programa a la pestaña 'Mesh' (Mallado), introduciremos los ajustes de mallado oportunos ('3D Mesh Settings'). El tipo de mallado que elegiremos de aquí en adelante será 'Plate/Shell' (Figura 4.2), el cual se generará como si de una envoltura se tratara alrededor de todo el perímetro del diseño introducido para analizar.

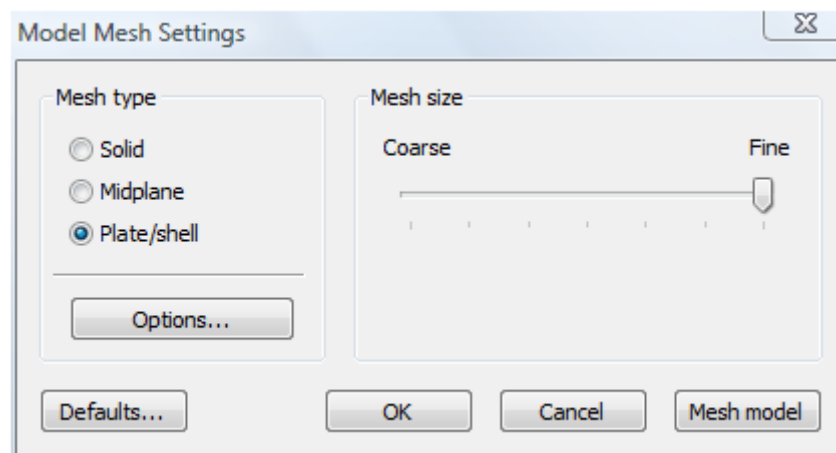


Figura 4.2 Ventana de características de mallado.

En cuanto al tamaño del mallado (Figura 4.2), vamos a afinarlo al máximo, ya que a pesar de que posteriormente el proceso de simulación en el ordenador sea mucho más lento debido a esa minuciosidad en las dimensiones de la celda, el resultado en los puntos que vamos a considerar en el análisis será mucho más preciso y detallado.

Para el caso del estudio del pandeo/abolladura con cargas puntuales sobre nuestro perfil IPE300, tendremos que introducir previamente al mallado los puntos donde se vayan a aplicar esas fuerzas y éstos formaran un conjunto junto al modelo diseñado que el programa, a la hora de tejer la malla, detectará como uno sólo. (Figuras 4.3 y 4.4)

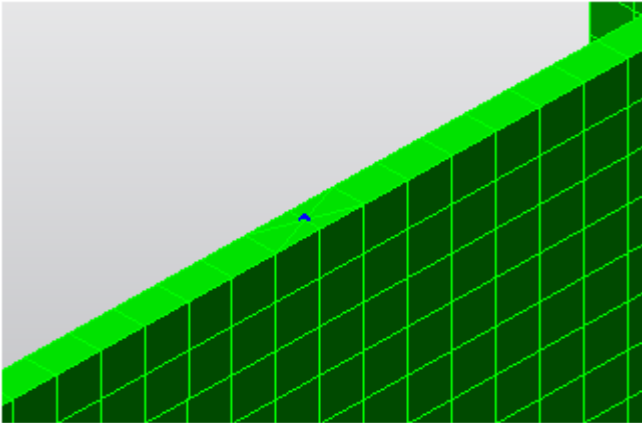


Figura 4.3 Punto para fuerza puntual vertical.

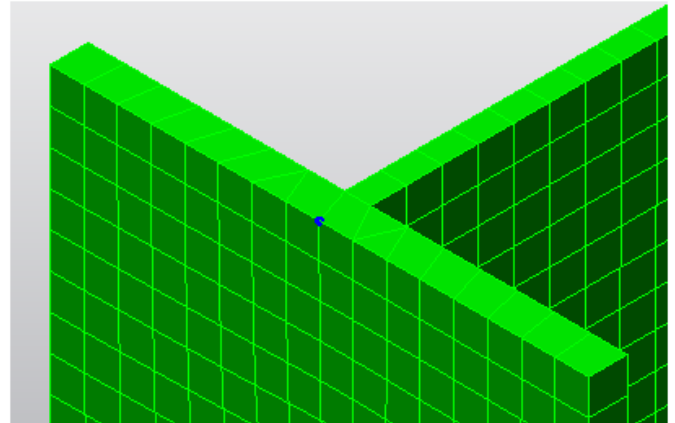


Figura 4.4 Punto para fuerza puntual horizontal.

Una de las cosas más importantes que tenemos que tener claras es conocer donde está situado el sistema de coordenadas. El origen del sistema de coordenadas se sitúa en la intersección de la línea imaginaria longitudinal que divide el alma del perfil en dos partes iguales con la arista exterior del ala perteneciente a la cara donde aplicamos la fuerza puntual o distribuida, dependiendo del caso de estudio. El eje X será paralelo al eje transversal del perfil IPE300, el eje Y paralelo a su eje longitudinal y el eje Z será perpendicular a ambos.

El sistema de unidades que usaremos en el programa será el *mmks* (milímetro, kilogramo, segundo), en lugar de utilizar el SI, Sistema Internacional, *mks* (metro, kilogramo, segundo), ya que a la hora de realizar comparaciones entre diferentes modelos, los desplazamientos de éstos serán muy pequeños y se mostrarán mejor en milímetros.

El tipo de análisis que vamos a elegir para que nos muestre el pandeo/abolladura de nuestros modelos es el que en el programa se denomina '*Critical Buckling Load*', mostrándonos los diferentes modos de pandeo y su evolución en el proceso de deformación.

Para nuestro correcto estudio vamos a activar en el programa la opción de la aceleración de la gravedad,  $9814 \text{ mm/s}^2$  en nuestro sistema de unidades, lo que hará que el ensayo se asemeje aún más a la realidad.

Las condiciones de contorno que aplicaremos para el análisis de nuestros modelos son los siguientes:

- Empotramiento en su base, haciendo nulo el desplazamiento o giro de cualquiera de esos puntos
- Una fuerza lateral y otra superior, ambas de compresión, que tendrán un valor de  $F_0 = 10^5 N$ .

Por último, vamos a concretar las propiedades del material del que vamos a suponer que es nuestro modelo de estudio. El material del que vamos a considerar que está fabricado es el acero, con las siguientes propiedades:

- Módulo de Elasticidad ( $E$ ):  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
- Densidad másica ( $\rho$ ):  $7850 \text{ Kg/m}^3 = 7,85 \cdot 10^{-6} \text{ Kg/mm}^3$
- Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ): 0,3
- Coeficiente de expansión térmica ( $\alpha$ ):  $1,2 \cdot 10^{-5} /^\circ C$

### **4.3. Ensayos de pandeo/abolladura con fuerzas distribuidas.**

En este apartado procederemos a realizar los ensayos de pandeo/abolladura de los pilares de perfil IPE300, aplicando las condiciones de contorno expuestas en el apartado anterior, aunque con las fuerzas de forma distribuida en las caras superior e izquierda del modelo.

Para introducir las fuerzas distribuidas que van a actuar sobre el modelo a analizar, lo vamos a hacer incorporándolas como presiones trabajando en su

totalidad en la cara sobre la que aplicarán el esfuerzo, repartiendo éste equitativamente.

Lo haremos aplicando la fórmula básica

$$P = F/S,$$

que en función de la altura del pilar de estudio, en la cara donde se aplique la presión lateral (cara izquierda), ésta variará por la modificación de  $h$ , y por consiguiente, la superficie.

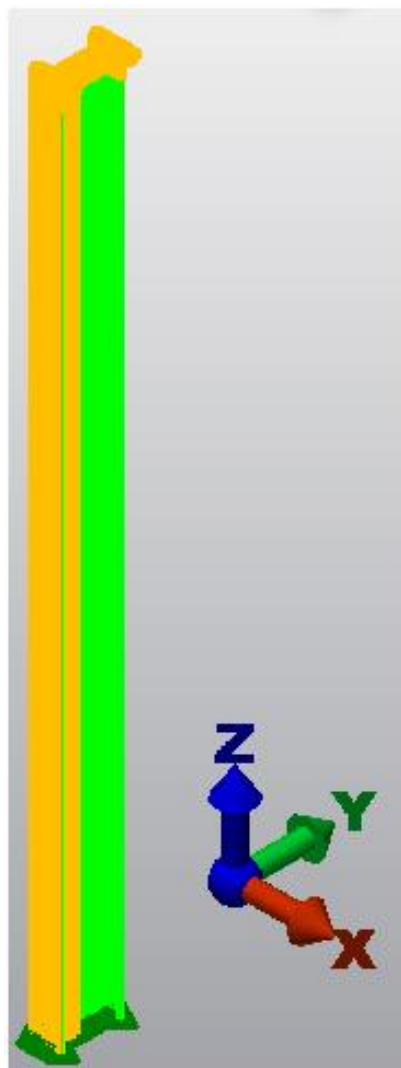


Figura 4.5 Modelo con fuerzas distribuidas en forma de presión para  $h=4\text{m}$ .

Para el caso del análisis de nuestro ejemplo que presenta una altura de 4 metros, los valores de las presiones que se aplican son los siguientes:

- Presión de compresión superior: invariable para cualquier altura que presente nuestro objeto de estudio.

$$P = F/S = 10^5 N / (2 \cdot 150 \cdot 10,7) mm^2 + (278,6 \cdot 7,1) mm^2 = 19,275 \text{ N/mm}^2$$

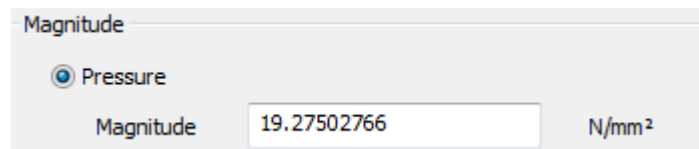


Figura 4.6 Valor de la presión superior sobre el pilar de

- Presión de compresión lateral: es función de la altura que asignemos a nuestro prototipo de análisis. Para el caso en el que  $h = 4m$ , la presión tiene el valor:

$$P = F/S = 10^5 N / (150 \cdot 4000) mm^2 = 0,166 \text{ N/mm}^2$$

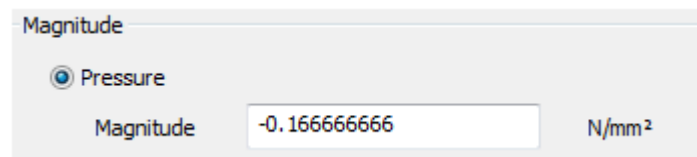


Figura 4.7 Valor de la presión lateral sobre el pilar de  $h=4m$ .

Como se puede ver en la Figura 4.7, al valor de compresión que se ejerce lateralmente, que se aplica en la dirección del eje Y, tenemos que colocarlo el signo negativo para darle el sentido adecuado.

A continuación, se mostrarán las imágenes de los cinco diferentes modos de pandeo, aplicando las condiciones de contorno expuestas anteriormente, que nos

ofrece el programa de análisis para una estructura de perfil IPE300 con una altura de  $h = 4m$ . (Figuras 4.8 a 4.17)

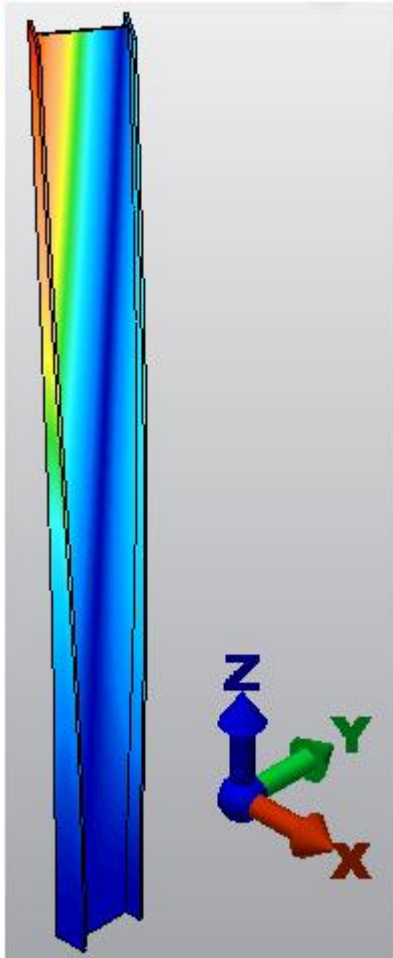


Figura 4.8 Modo 1 de pandeo en 3D para  $h=4m$ .

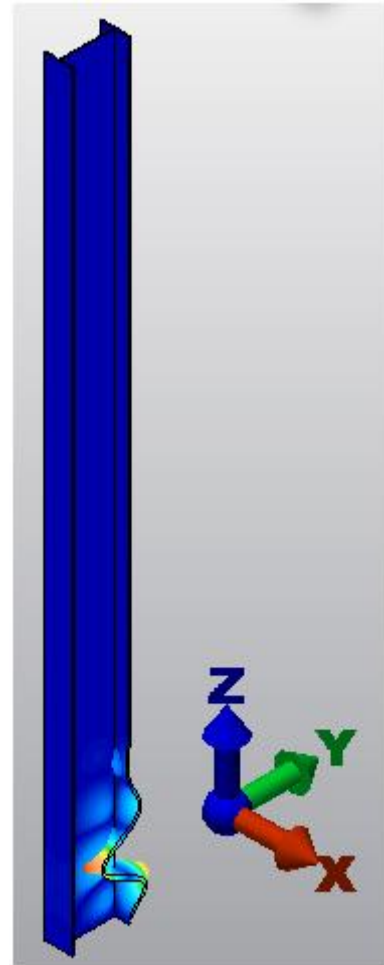


Figura 4.9 Modo 2 de pandeo en 3D para  $h=4m$ .

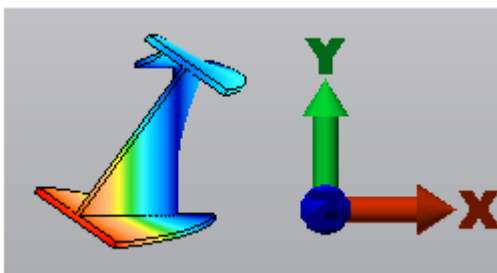


Figura 4.10 Planta del Modo 1 de pandeo para  $h=4m$ .

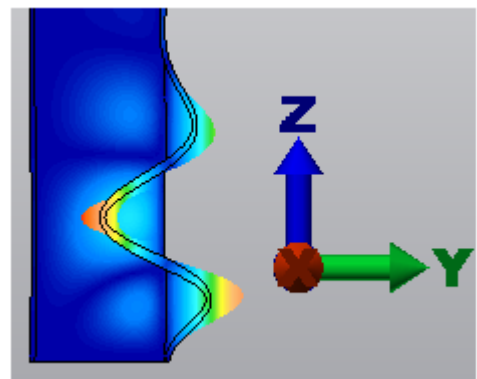


Figura 4.11 Vista frontal de la base del pilar del Modo 2 de pandeo para  $h=4m$ .



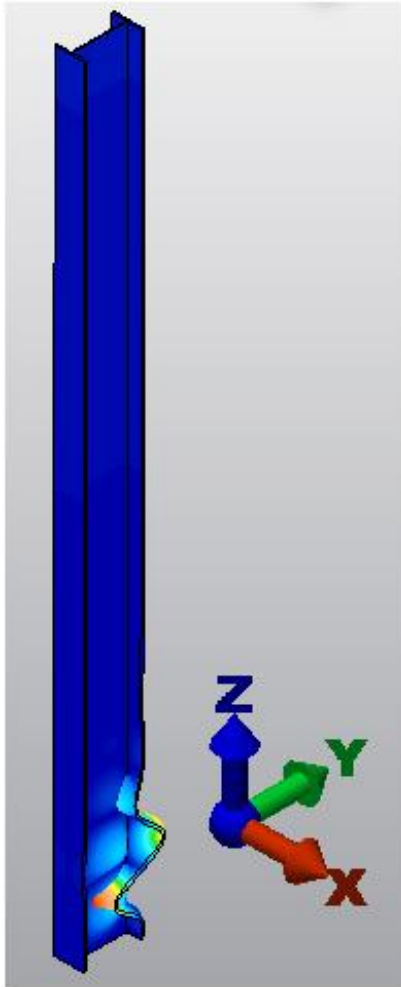


Figura 4.12 Modo 3 de pandeo en 3D  
para  $h=4m$ .

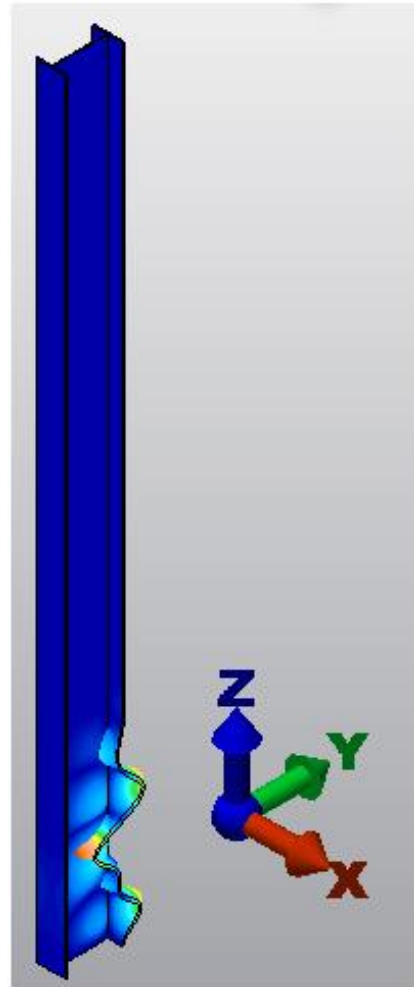


Figura 4.13 Modo 4 de pandeo en 3D  
para  $h=4m$ .

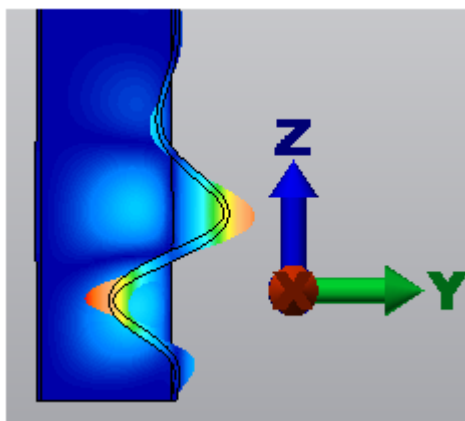


Figura 4.14 Vista frontal de la base del  
pilar del Modo 3 de pandeo para  $h=4m$ .

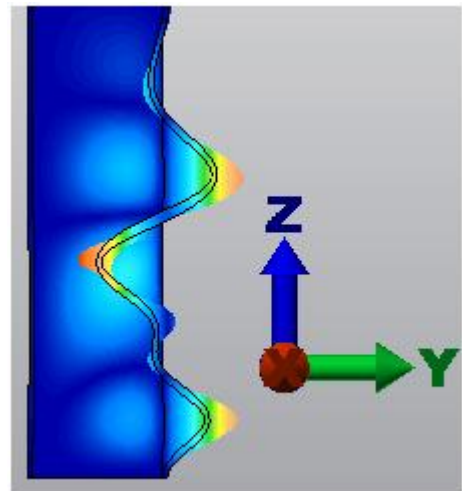


Figura 4.15 Vista frontal de la base del  
pilar del Modo 4 de pandeo para  $h=4m$ .

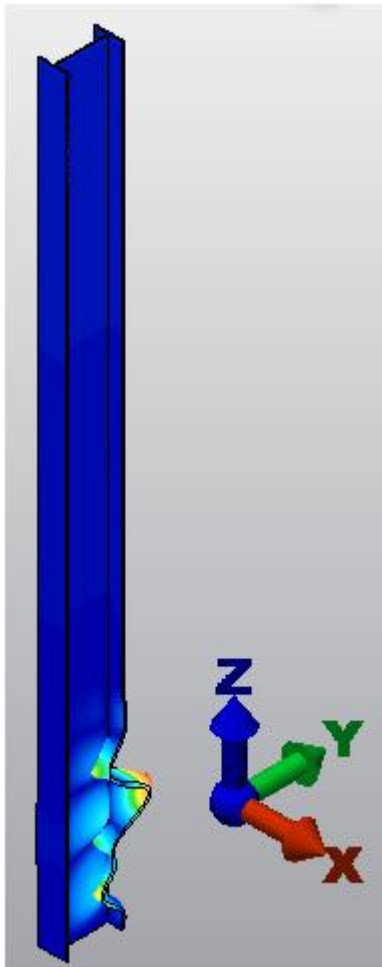


Figura 4.16 Modo 5 de pandeo en 3D para  $h=4m$ .

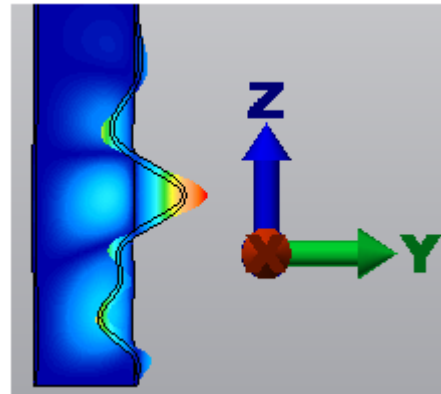


Figura 4.17 Vista frontal de la base del pilar del Modo 5 de pandeo para  $h=4m$ .

Lo que observamos en las figuras anteriores es que la abolladura aparece relativamente pronto, en el segundo modo de pandeo, como consecuencia de la corta altura de diseño estimada para este ensayo. A menor altura de nuestro pilar, la abolladura va a hacer acto de presencia mucho antes que en modelos con alturas más elevadas, como veremos posteriormente.

Observamos que inicialmente la respuesta del modelo es a salirse del plano y comienza a pandear. Los puntos más críticos en el Modo 1 de pandeo son los que se encuentran en la parte superior izquierda, donde confluyen tanto la presión superior como la lateral, con tendencia a trasladarse hacia atrás comenzando a retorcerse.

En el Modo 2 de pandeo comienza a aparecer la abolladura tanto en el alma del perfil como en el ala donde no se aplica la presión distribuida. Todo ello se muestra en la parte inferior del modelo, cercano al empotramiento, ya que es la parte inmóvil de la estructura y es ahí donde acaban transmitiéndose los esfuerzos internos generando ese efecto.

En los posteriores modos de pandeo se percibe que la longitud del perfil que se abolla en el eje Z, tanto del alma como del ala, es mayor, destacando su aumento en la zona central del alma, intensificando tanto en número como en el desplazamiento que se genera en la dirección del eje X. Los desplazamientos que se generan en el ensayo, a pesar de parecer éstos muy significativos, se encuentran en torno a 1 mm.

A continuación, se mostrarán los resultados del estudio de pandeo/abolladura para perfil IPE30 que presentan las mismas condiciones de contorno (fuerzas superior y lateral en forma de presiones y empotramiento en su base), pero en esta ocasión, variaremos la altura del pilar, que será  $h = 5m$ .

Como comentábamos en el caso  $h = 4m$ , la presión de la parte superior no iba a variar a lo largo de nuestros ensayos, pero sí la presión que se ejerce lateralmente, debido a la modificación en la altura. Por tanto:

$$P = F/S = 10^5 N / (150 \cdot 5000) mm^2 = 0,133 N/mm^2$$

Nuevamente, a esta presión la impondremos un valor negativo para orientarla hacia nuestros intereses ensayísticos (Figura 4.17).

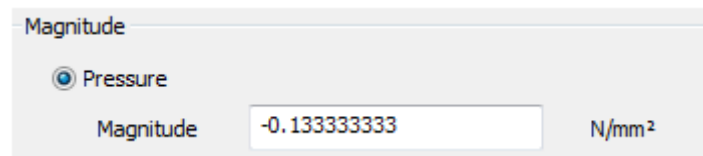


Figura 4.18 Valor de la presión lateral sobre el pilar de  $h=5m$ .

Por tanto, los resultados de los cinco modos de pandeo del análisis de pandeo/abolladura de la estructura con  $h = 5m$  son los siguientes (Figuras 4.19 a 4.28):

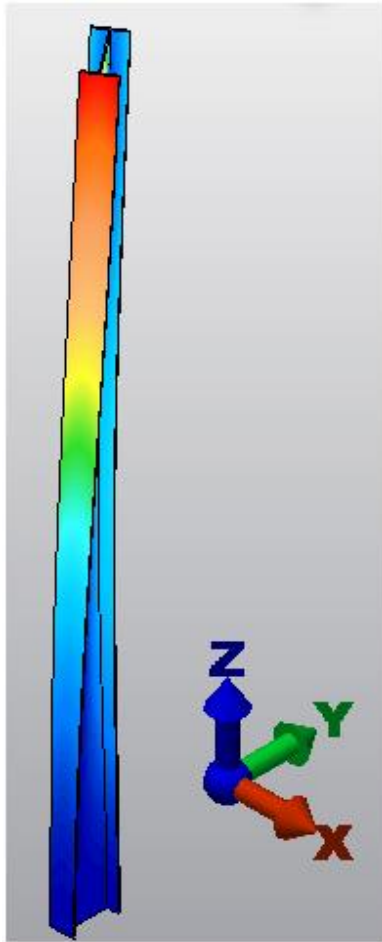


Figura 4.19 Modo 1 de pandeo en 3D para  $h=5m$ .

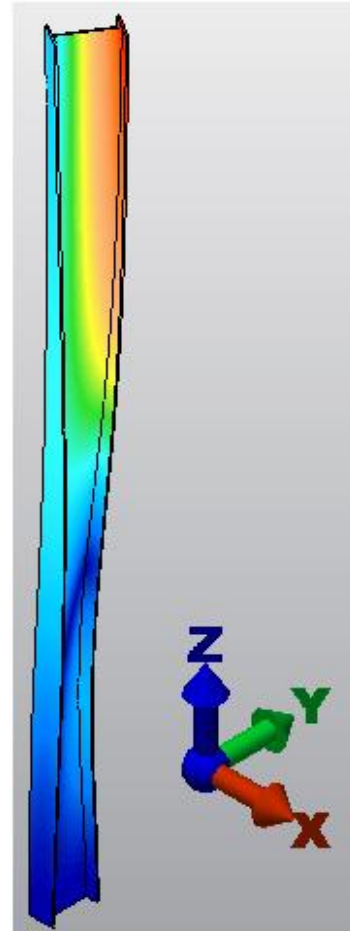


Figura 4.20 Modo 2 de pandeo en 3D para  $h=5m$ .

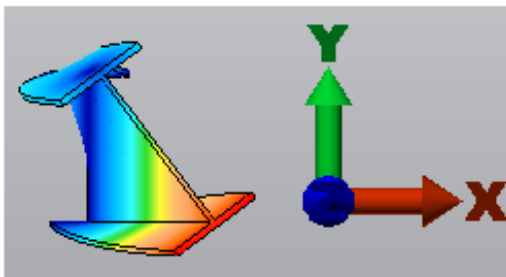


Figura 4.21 Planta del Modo 1 de pandeo para  $h=5m$ .

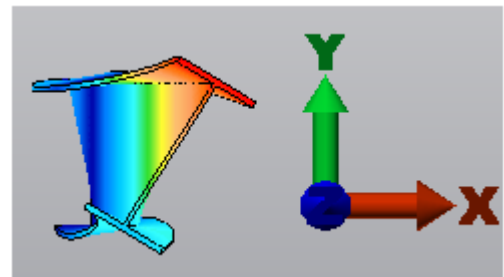


Figura 4.22 Planta del Modo 2 de pandeo para  $h=5m$ .

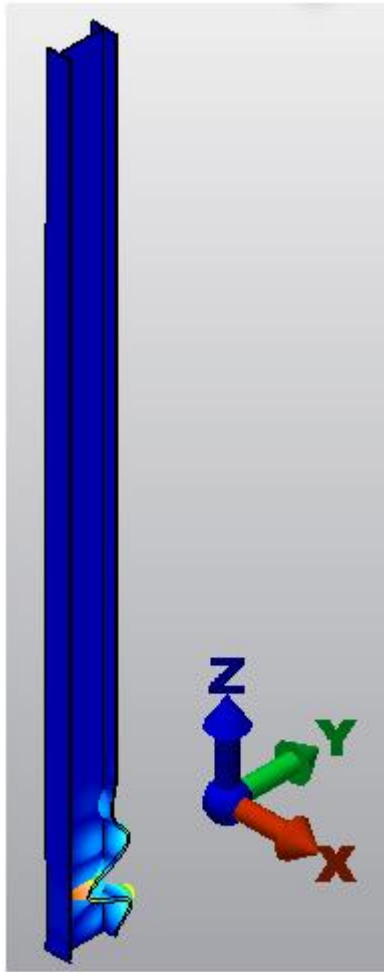


Figura 4.23 Modo 3 de pandeo en 3D  
para  $h=5\text{m}$ .

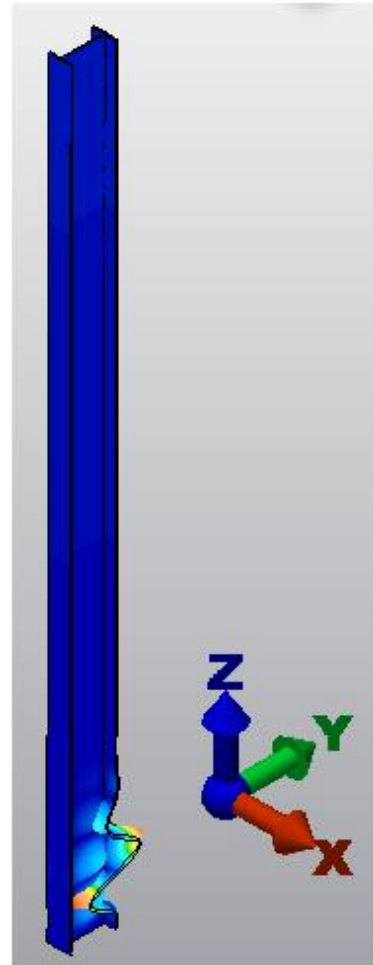


Figura 4.24 Modo 4 de pandeo en 3D  
para  $h=5\text{m}$ .

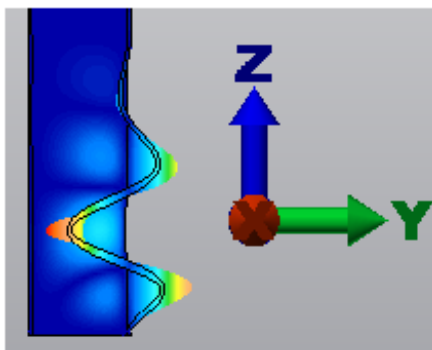


Figura 4.25 Vista frontal de la base del  
pilar del Modo 3 de pandeo para  $h=5\text{m}$ .

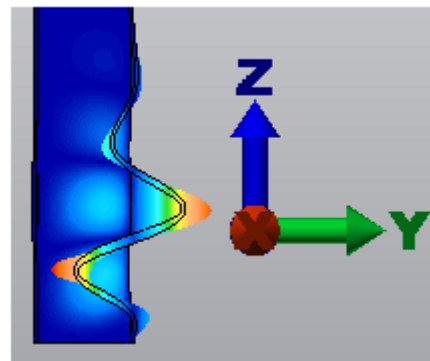


Figura 4.26 Vista frontal de la base del  
pilar del Modo 4 de pandeo para  $h=5\text{m}$ .

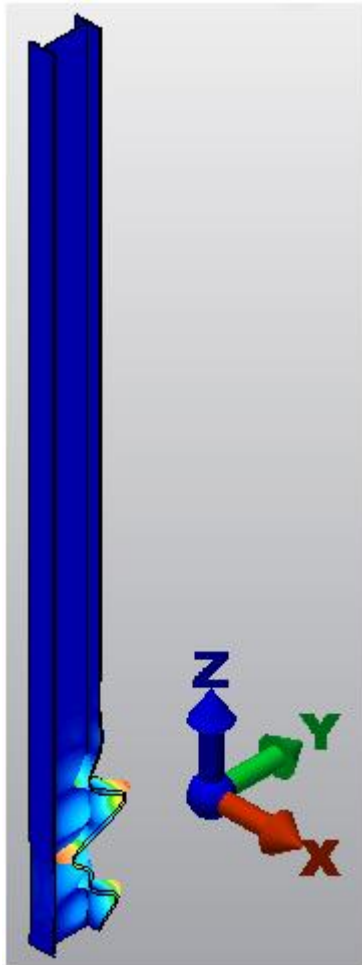


Figura 4.27 Modo 5 de pandeo en 3D para  $h=5m$ .

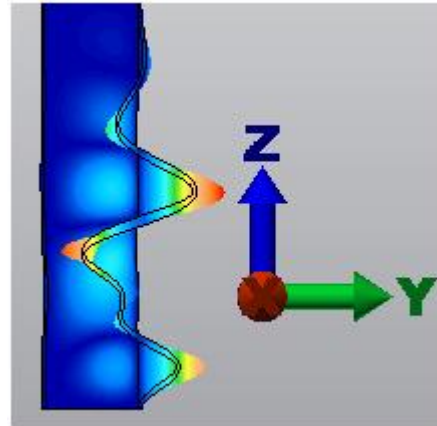


Figura 4.28 Vista frontal de la base del pilar del Modo 5 de pandeo para  $h=5m$ .

La principal diferencia que se observa al comparar el análisis de la estructura para  $h = 5m$  con el de  $h = 4m$  es que la abolladura en su parte inferior se produce más tarde, en este caso en el modo 3 de pandeo. El modelo está más tiempo pandeando debido a la influencia en el aumento de la altura.

Como consecuencia de esto se percibe que el multiplicador de pandeo, para el mismo modo de pandeo, es inversamente proporcional al aumento de la altura de las estructuras, es decir, que cuantos más altos sean nuestros pilares, menor es la fuerza que tenemos que aplicar para que se produzca el fenómeno de pandeo.

Por último, vamos a presentar los resultados del ensayo de pandeo/abolladura para una estructura IPE300 de  $h = 6m$ . Para ello, nuevamente,

nos variará la presión ejercida sobre la cara lateral del modelo, que como venimos diciendo, es función de su altura. En este caso, tendremos que:

$$P = F/S = 10^5 N / (150 \cdot 6000) mm^2 = 0,111 N/mm^2$$

También en esta ocasión pondremos el signo negativo delante del valor de la presión en el programa informático para adecuarla a nuestras condiciones de ensayo. Los resultados de los cinco modos de pandeo son (Figuras 4.29 a 4.38):

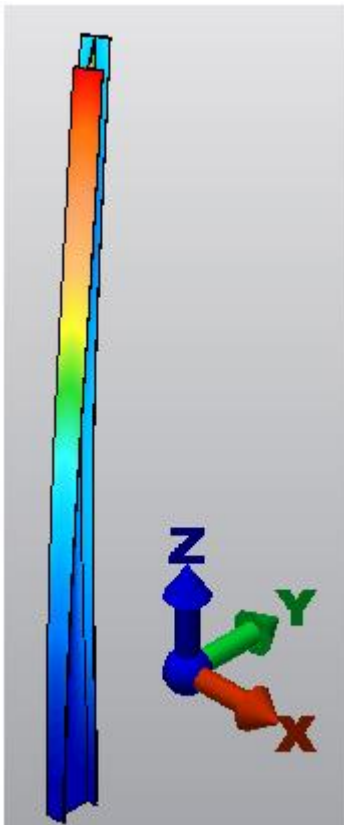


Figura 4.29 Modo 1 de pandeo en 3D para h=6m.

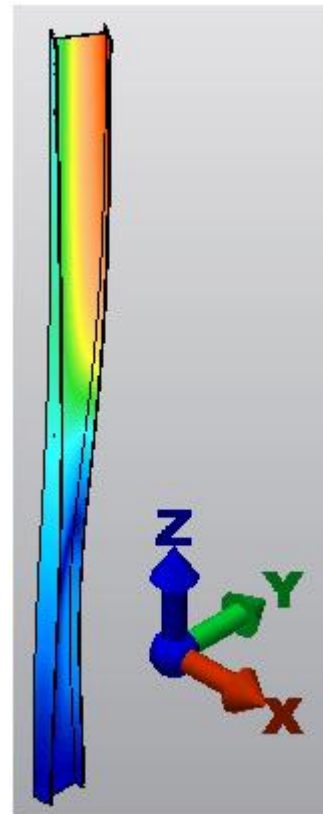


Figura 4.30 Modo 2 de pandeo en 3D para h=6m.

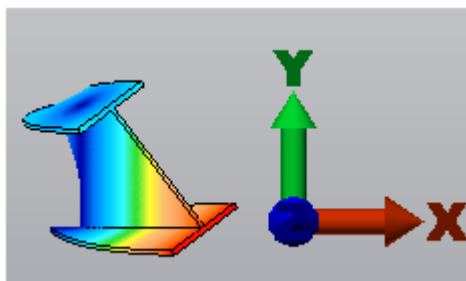


Figura 4.31 Planta del Modo 1 de pandeo para h=6m.

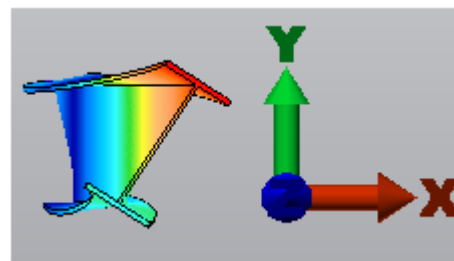


Figura 4.32 Planta del Modo 2 de pandeo para h=6m.

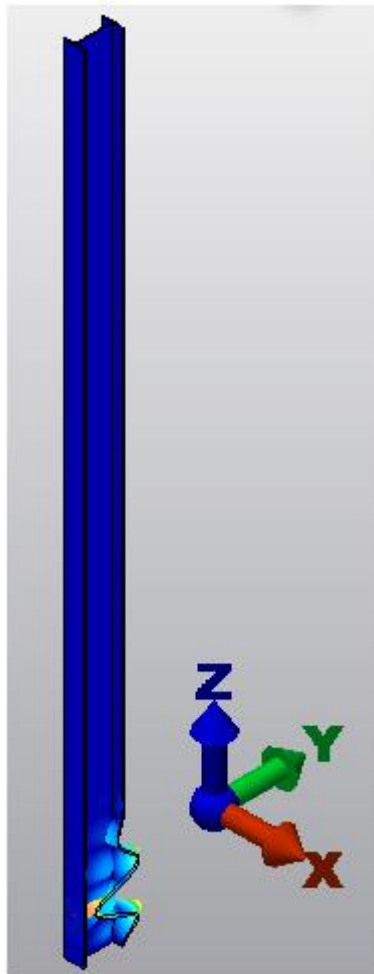


Figura 4.33 Modo 3 de pandeo en 3D para  $h=6\text{m}$ .

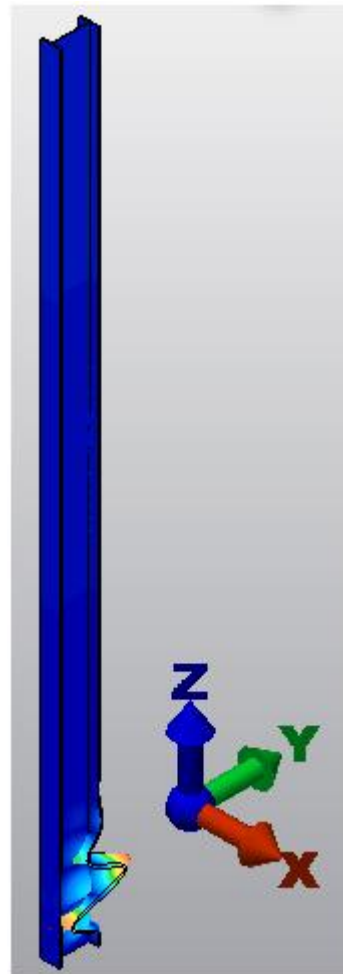


Figura 4.34 Modo 4 de pandeo en 3D para  $h=6\text{m}$ .

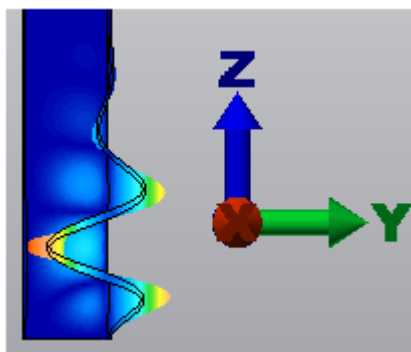


Figura 4.35 Vista frontal de la base de Modo 3 de pandeo para  $h=6\text{m}$ .

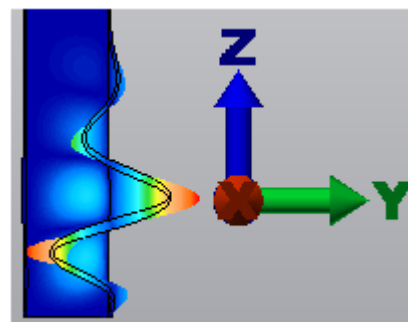


Figura 4.36 Vista frontal de la base de Modo 4 de pandeo para  $h=6\text{m}$ .



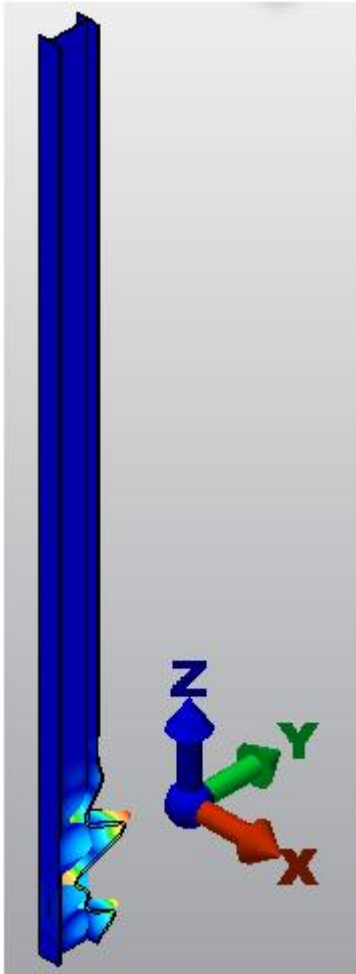


Figura 4.37 Modo 5 de pandeo en 3D  
para  $h=6m$ .

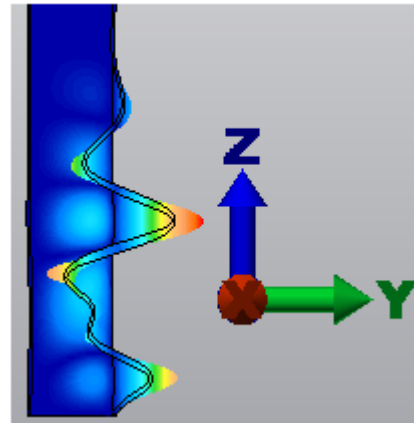


Figura 4.38 Vista frontal de la base de  
Modo 5 de pandeo para  $h=6m$ .

Como venimos observando, el aumento de la altura en nuestra estructura retrasa la aparición de la abolladura estando en más modos en fase de pandeo. Por ejemplo, para el caso que la altura del pilar fuera  $h = 10m$  (ensayo realizado a mayores de nuestro objeto de estudio), en el modo 3 del análisis de pandeo todavía no estaría en fase de abolladura, confirmando que cuanto más altura, menor es la fuerza que hay que aplicar para que pandee debido a la disminución del multiplicador de pandeo y hará que la abolladura aparezca en los últimos modos que nos ofrece el programa de elementos finitos.

De nuevo, aunque a simple vista nos parezcan desmesurados los desplazamientos que se producen en los cinco modos de pandeo, los máximos valores que se dan son en torno a 1 mm.

#### 4.4. Ensayos de pandeo/abolladura con fuerzas puntuales.

En este apartado vamos a llevar a cabo el análisis de pandeo/abolladura de nuestra estructura de perfil IPE300 aplicando las condiciones de contorno respectivas, que serán las siguientes:

- Empotramiento en la base del pilar, inhabilitando en giro y desplazamiento a toda ella.
- Fuerza superior puntual de compresión de valor  $F = 10^5 N$ .
- Fuerza lateral puntual de compresión de valor  $F = 10^5 N$ .

Para poder aplicar las fuerzas sobre nuestro modelo objeto de ensayo, tal y como podemos ver en las Figuras 4.3 y 4.4 que se mostraban en páginas anteriores, tenemos que introducir los puntos donde aplicamos las fuerzas antes de mallar el pilar para que el programa lo detecte todo como un único conjunto y pueda generar las numerosas celdas teniendo estos puntos en cuenta.

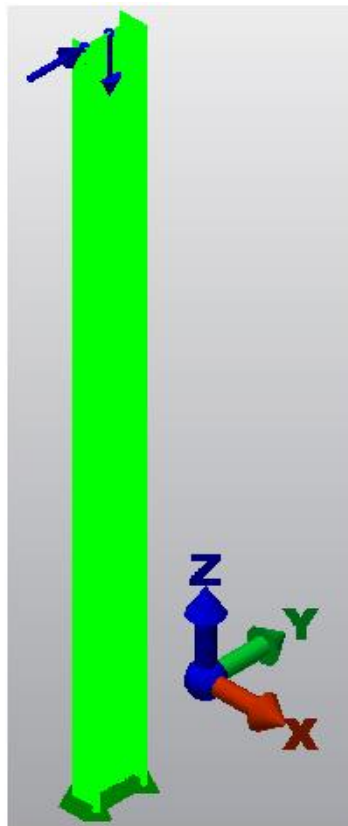


Figura 4.39 Modelo con fuerzas puntuales para  $h = 4m$ .

Las fuerzas puntuales que va a tener que soportar el modelo se van a situar, para el caso de  $h = 4m$ , en los siguientes puntos concretos: la fuerza lateral puntual estará ubicada en el punto  $(0,0,4000)$ , mientras que la superior estará en el punto  $(0,150,4000)$  (Figura 4.39).

Los resultados gráficos del estudio de pandeo/abolladura para el caso de fuerzas puntuales y  $h = 4m$  son los siguientes (Figuras 4.40 a 4.49):

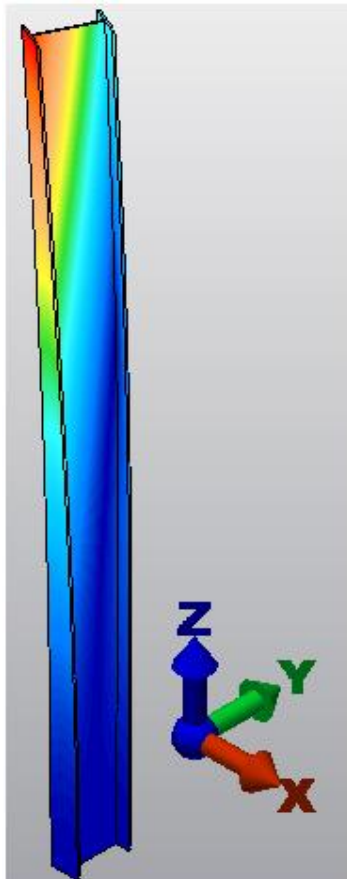


Figura 4.40 Modo 1 de pandeo en 3D para  $h=4m$ .

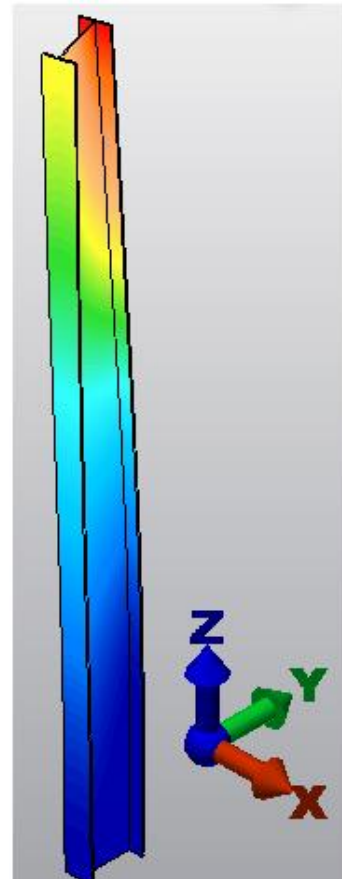


Figura 4.41 Modo 2 de pandeo en 3D para  $h=4m$ .

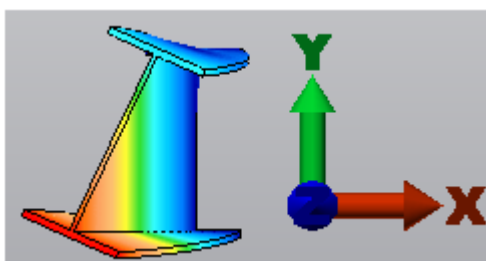


Figura 4.42 Planta del Modo 1 de pandeo para  $h=4m$ .

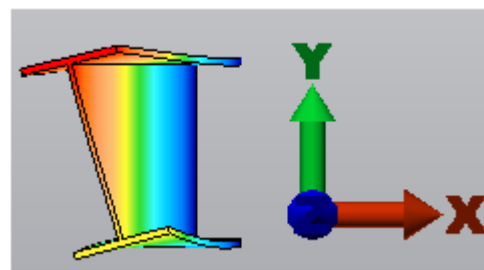


Figura 4.43 Planta del Modo 2 de pandeo para  $h=4m$ .

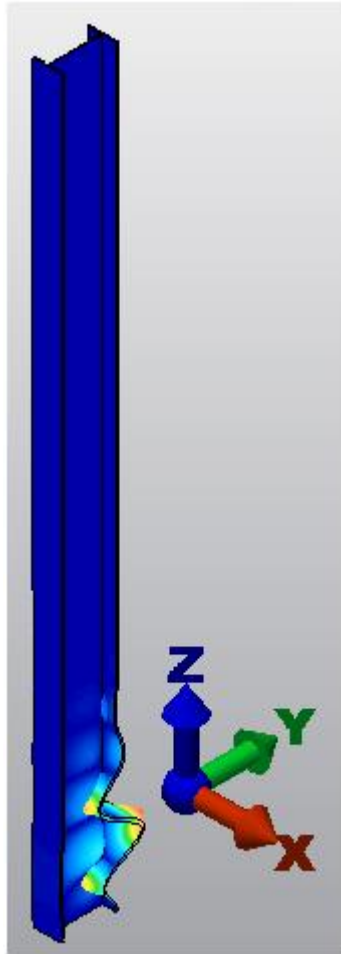


Figura 4.44 Modo 3 de pandeo en 3D para  $h=4\text{m}$ .

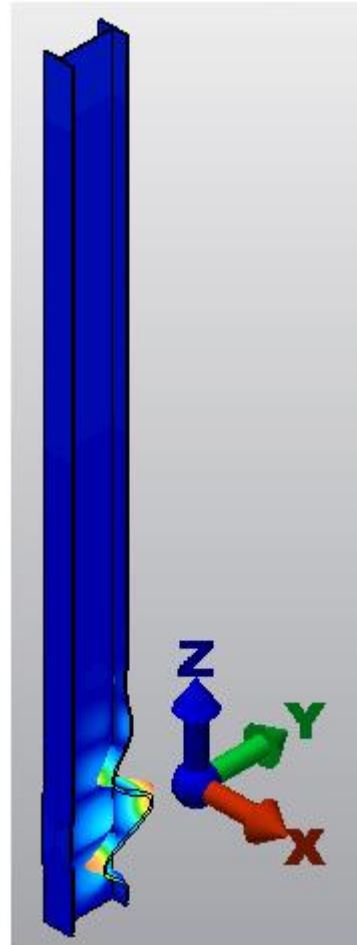


Figura 4.45 Modo 4 de pandeo en 3D para  $h=4\text{m}$ .

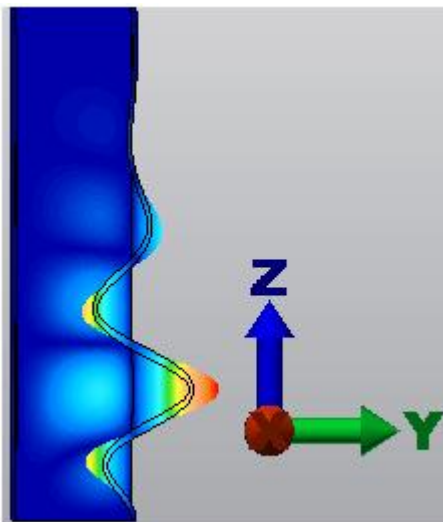


Figura 4.46 Vista frontal de la base de Modo 3 de pandeo para  $h=4\text{m}$ .

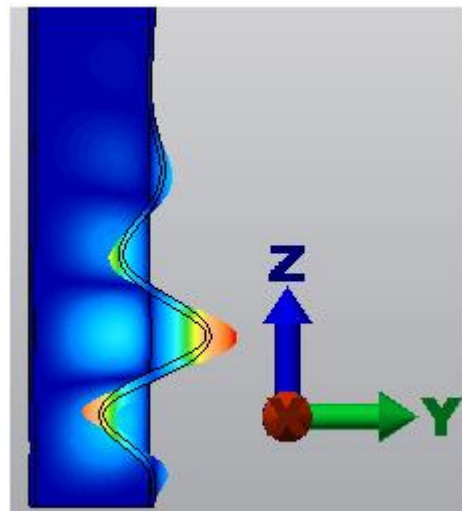


Figura 4.47 Vista frontal de la base de Modo 4 de pandeo para  $h=4\text{m}$ .

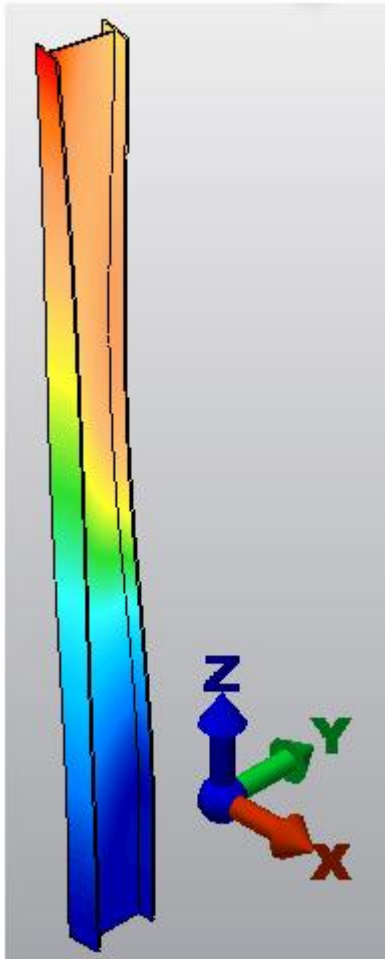


Figura 4.48 Modo 5 de pandeo en 3D  
para  $h=4m$ .

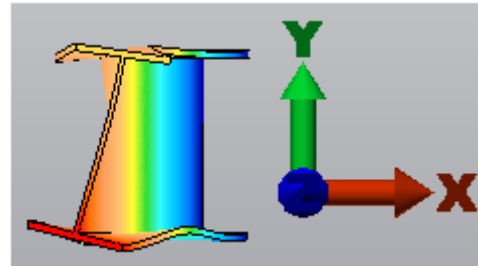


Figura 4.49 Planta del Modo 5 de  
pandeo para  $h=4m$ .

Lo primero y más chocante que observamos de los resultados del ensayo aplicando fuerzas puntuales para  $h = 4m$  es que en el último modo de pandeo, en el que hasta ahora siempre se había dado el caso de abolladura en la parte próxima al empotramiento, no lo tenemos, y en su lugar se muestra un nuevo caso de pandeo del pilar. Obviamente, no he omitido este resultado, aunque no se corresponda con el modo operacional habitual llevado hasta ahora (primero se muestra el pandeo del pilar hasta que éste abolla).

Se puede reconocer que en los primeros modos de pandeo la estructura tiene a salirse del plano, comportándose de forma más brusca en el segundo modo (desaparecen los tonos azules en la parte superior del pilar). En los siguientes modos, a excepción del modo 5, aparece la abolladura del alma y el pandeo del ala contrario al que se le aplica la fuerza puntual, siendo cada vez más acusado.

Al igual que en los casos anteriores, a pesar de la amplificación que muestran los desplazamientos, éstos están en torno a 1 mm.

Los resultados visuales del estudio para el caso que la estructura presente una altura de  $h = 5m$  son (Figuras 4.50 a 4.59):

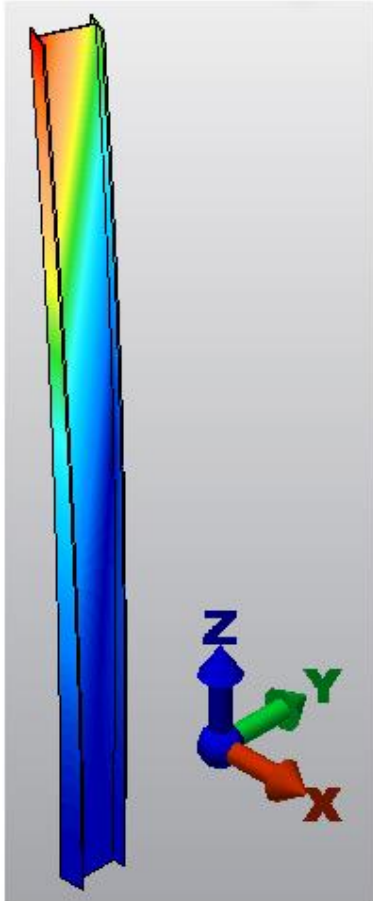


Figura 4.50 Modo 1 de pandeo en 3D para  $h=5m$ .

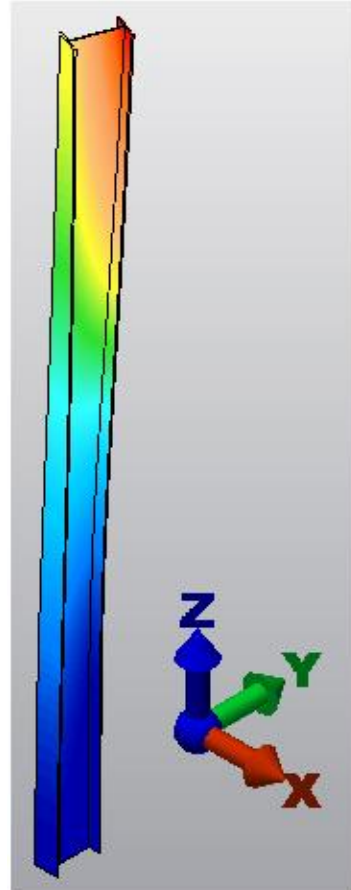


Figura 4.51 Modo 2 de pandeo en 3D para  $h=5m$ .

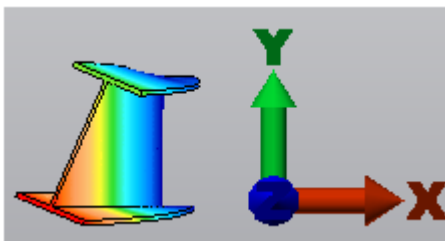


Figura 4.52 Planta del Modo 1 de pandeo para  $h=5m$ .

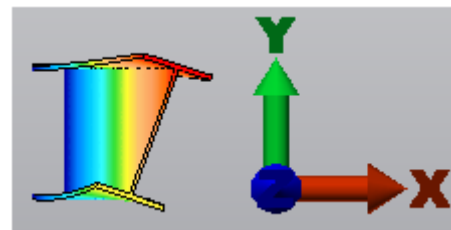


Figura 4.53 Planta del Modo 2 de pandeo para  $h=5m$ .

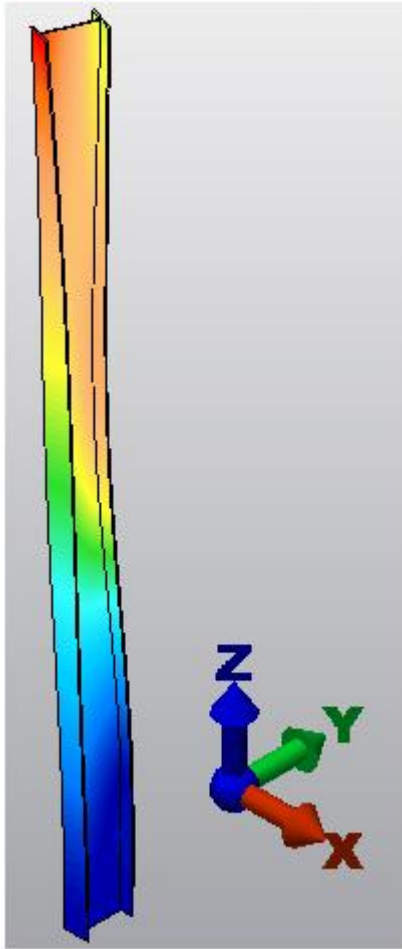


Figura 4.54 Modo 3 de pandeo en 3D  
para  $h=5m$ .

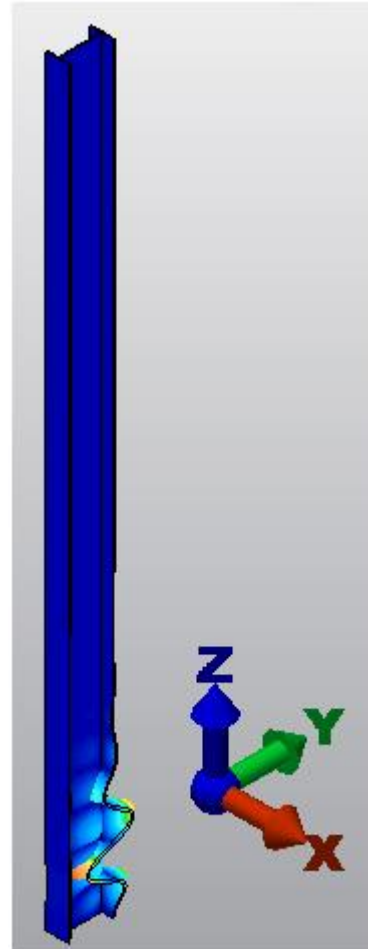


Figura 4.55 Modo 4 de pandeo en 3D  
para  $h=5m$ .

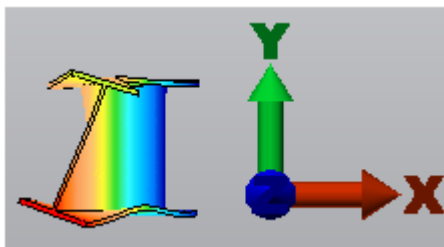


Figura 4.56 Planta del Modo 3 de  
pandeo para  $h=5m$ .

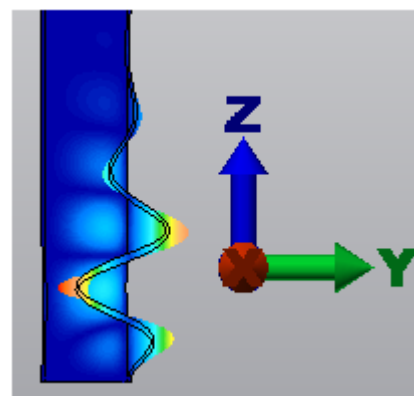


Figura 4.57 Vista frontal de la base de  
Modo 4 de pandeo para  $h=5m$ .

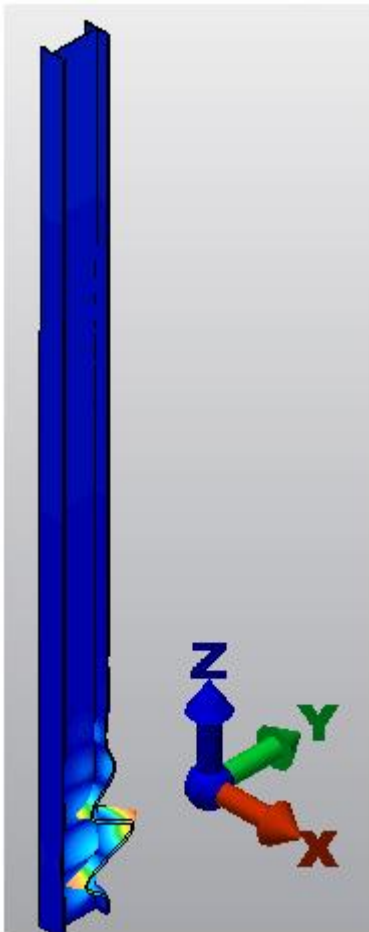


Figura 4.58 Modo 5 de pandeo en 3D para  $h=5m$ .

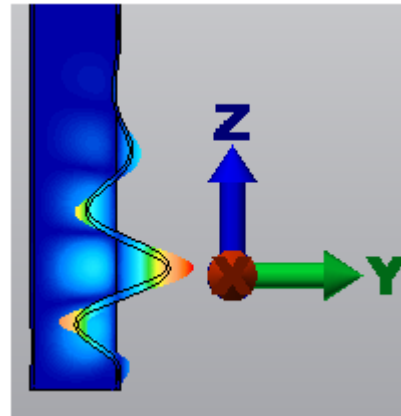


Figura 4.59 Vista frontal de la base de Modo 5 de pandeo para  $h=5m$ .

En esta ocasión, el pandeo se mantiene durante más tiempo llegando a aparecer en el modo 3, como consecuencia de la influencia del incremento de la altura de la estructura. Del modo 1 al modo 3 se puede observar que en la parte superior del pilar la progresión de los colores rojizos va en aumento debido al incremento de la inestabilidad en esa zona por el pandeo, ya que la influencia de las fuerzas dada su cercanía de aplicación es máxima.

Comparando el multiplicador de la carga de pandeo para el mismo modo, por ejemplo el modo 2, para  $h = 4m$  tenemos un valor de 2,729 mientras que para  $h = 5m$  el valor es 1,839, demostrando de nuevo a mayor altura de nuestra estructura menor es la carga de pandeo necesaria para que se produzca este fenómeno.



Para el caso de  $h = 6m$ , los resultados pictóricos son los siguientes (Figuras 4.60 a 4.69):

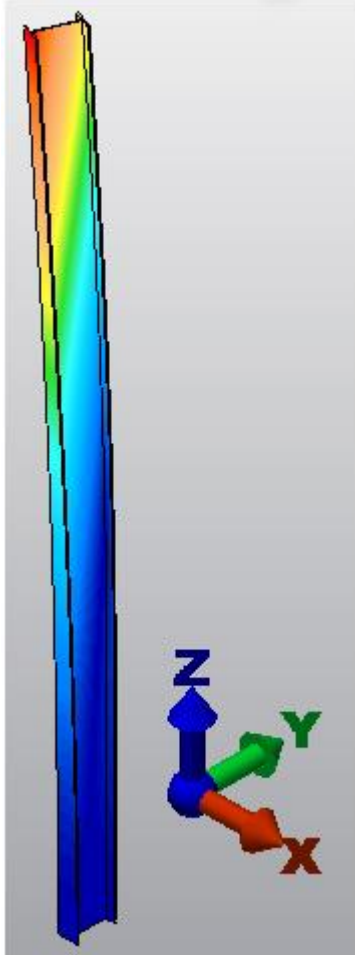


Figura 4.60 Modo 1 de pandeo en 3D para  $h=6m$ .

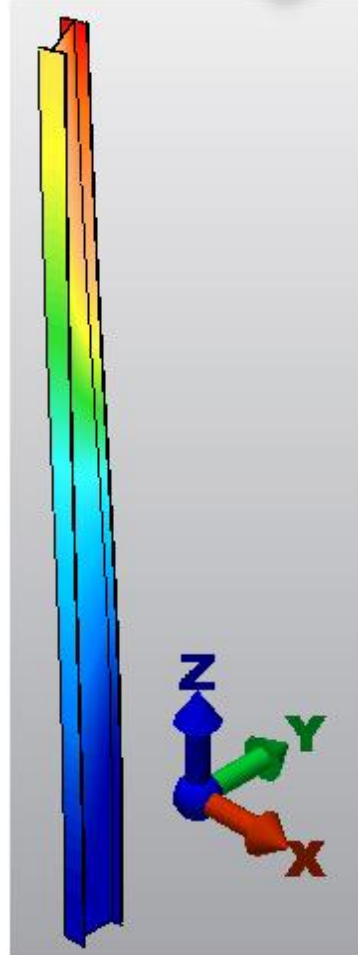


Figura 4.61 Modo 2 de pandeo en 3D para  $h=6m$ .

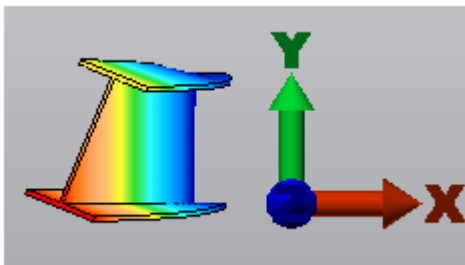


Figura 4.62 Planta del Modo 1 de pandeo para  $h=6m$ .

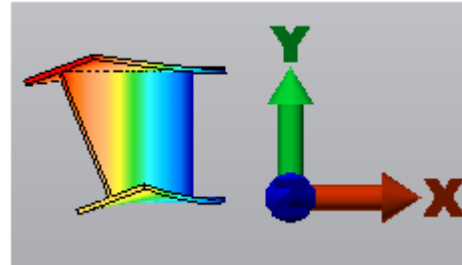


Figura 4.63 Planta del Modo 2 de pandeo para  $h=6m$ .

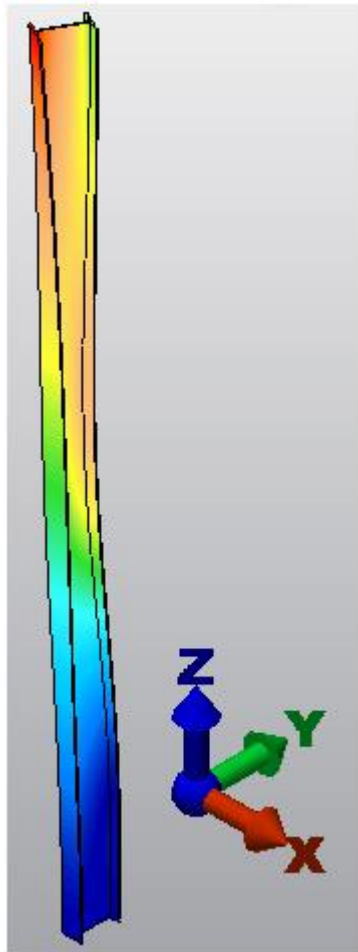


Figura 4.64 Modo 3 de pandeo en 3D para  $h=6m$ .

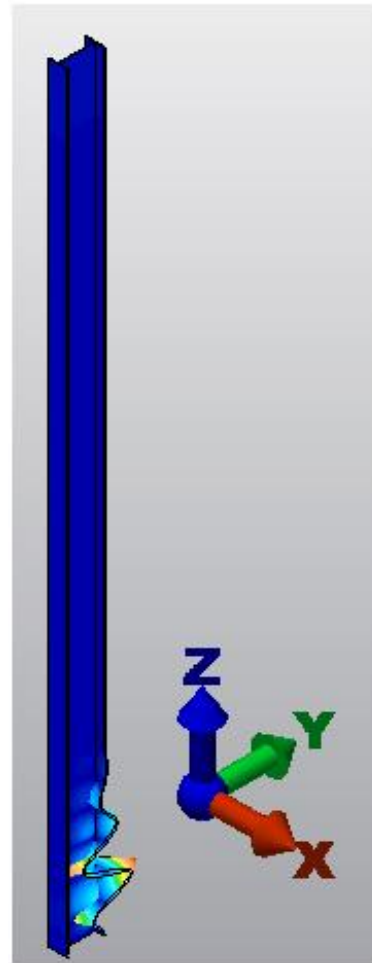


Figura 4.65 Modo 4 de pandeo en 3D para  $h=6m$ .

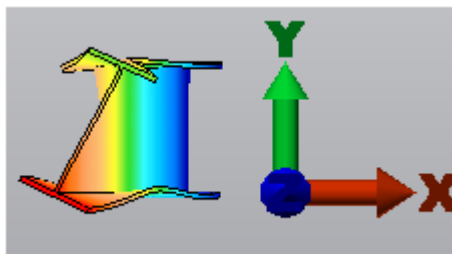


Figura 4.66 Planta del Modo 3 de pandeo para  $h=6m$ .

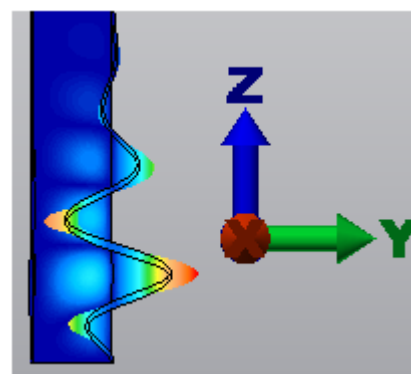


Figura 4.67 Vista frontal de la base de Modo 4 de pandeo para  $h=6m$ .

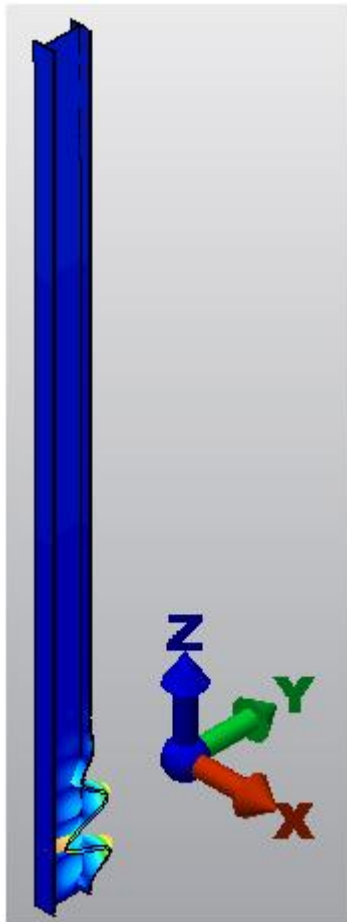


Figura 4.68 Modo 5 de pandeo en 3D  
para  $h=6m$ .

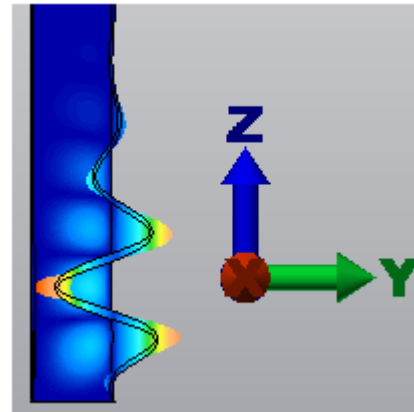


Figura 4.69 Vista frontal de la base de  
Modo 5 de pandeo para  $h=6m$ .

Se demuestra que la influencia de la altura de la estructura tiene un peso muy importante en los resultados del programa de análisis de elementos finitos. Como ejemplo decir que el multiplicador de la carga de pandeo para  $h = 6m$  continúa disminuyendo (en el modo 2 de pandeo para  $h = 6m$  el valor es 1,2967, mientras que para  $h = 5m$  es 1,839), por la que las fuerzas necesarias para el pandeo/abolladura cada vez son menores.

#### 4.5. Ensayos de pandeo/abolladura en pórtico 3D.

En este apartado vamos a examinar el comportamiento que ocurre en un pórtico formado por cuatro pilares y cuatro vigas, todas ellas de perfil IPE300, aplicando varias fuerzas puntuales según la Figura 4.70:

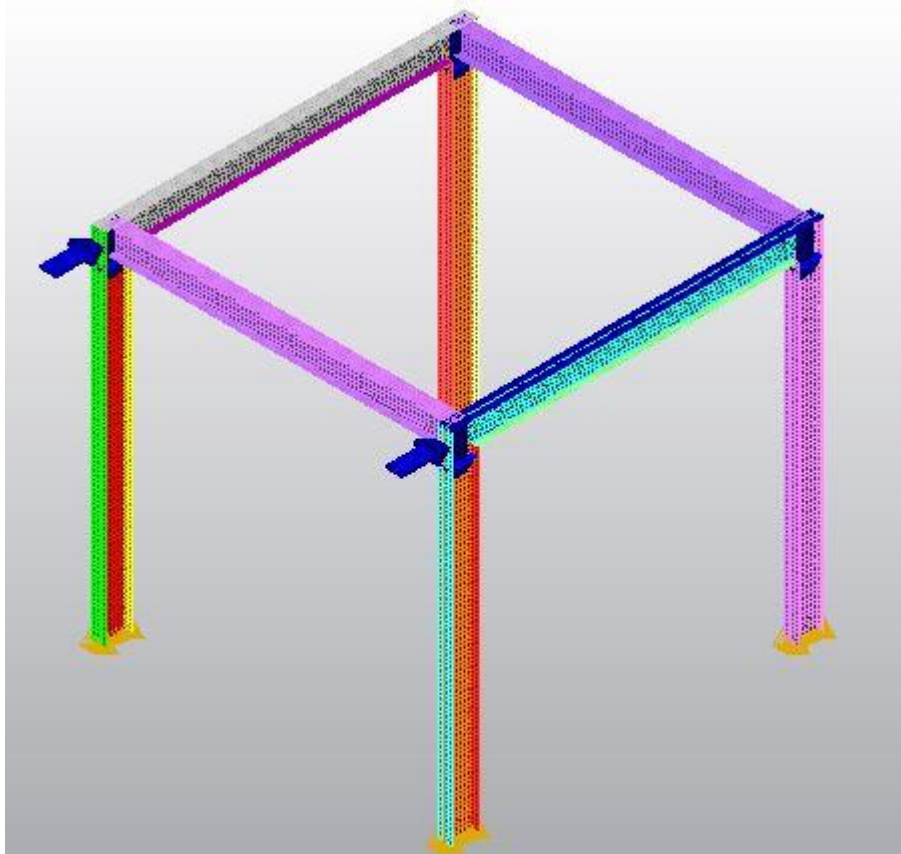


Figura 4.70 Pórtico 3D de ensayo

Podemos observar que esos grupos de fuerzas puntuales de valor total  $F_0 = 10^5 \text{ N}$  se aplican en las uniones de las vigas en forma de compresión en el eje  $Z$  y en la parte superior de dos pilares, haciendo esa compresión en la dirección del eje  $Y$ . Lo que se pretende buscar al introducir la fuerza que se quiere ejercer sobre la estructura, descompuesta en otras de valor inferior, es que toda la zona de unión entre pilar-viga o entre viga-viga esté sometida a ese empuje sin concentrarse en un único punto.

Una vez realizada la simulación y observado los diez modos de pandeo que se obtienen, se alcanza el multiplicado crítico de la carga de pandeo presenta un valor de 10,8333, haciendo que la carga crítica de pandeo sea  $P_{crit} = 10,83 \cdot 10^5 N$ . Para este valor, el ensayo presenta el siguiente resultado:

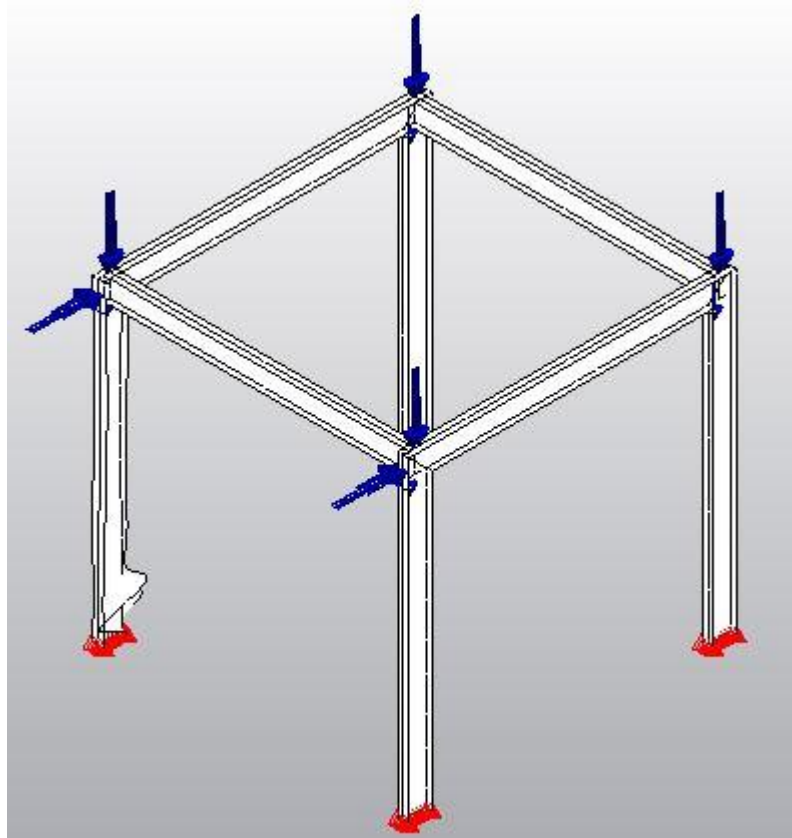


Figura 4.71 Modo 10 de pandeo para el Pórtico 3D

En la Figura 4.71 se observa que, en las condiciones anteriormente descritas, se produce la abolladura de uno de los pilares que presenta la influencia de dos fuerzas en su parte superior. En esta ocasión, el punto que más se desplaza en la parte inferior de ese pilar que muestra el fenómeno de abolladura, tiene una valor de desplazamiento en torno a los 7 cm en la dirección, muy por encima de los valores que se daban cuando analizábamos el pilar individual tanto para carga distribuida como para carga puntual.



## **5. ESTUDIO DEL PANDEO/ABOLLADURA MEDIANTE LA UTILIZACIÓN DE LA INSTRUCCIÓN DE ACERO ESTRUCTURAL (EAE).**

### **5.1 Introducción**

El Código Técnico de la Edificación es el marco normativo por el que se regulan las exigencias básicas de calidad que deben cumplir los edificios y las estructuras, incluidas sus instalaciones, para satisfacer los requisitos básicos de seguridad y habitabilidad.

El CTE establece dichas exigencias básicas para cada uno de los requisitos básicos de “seguridad estructural”, “seguridad en caso de incendio”, “seguridad de utilización”, “higiene, salud y protección del medio ambiente”, “protección contra el ruido” y “ahorro de energía y asilamiento térmico”.

Las exigencias básicas deben cumplirse en el proyecto, la construcción, el mantenimiento y la conservación de los edificios y sus instalaciones.

Para nuestro trabajo vamos a utilizar el documento básico de seguridad estructural, concretamente en el caso para la utilización del acero en perfiles para la edificación.

Este documento básico se destina a verificar la seguridad estructural de los elementos metálicos realizados con acero en edificación. No se contemplan, por tanto aspectos propios de otros campos de la construcción (puentes, silos, chimeneas, antenas, etc.). Tampoco se tratan aspectos relativos a elementos que, por su carácter específico, requieren consideraciones especiales.

Este documento básico se refiere únicamente a la seguridad en condiciones adecuadas de utilización, incluidos los aspectos relativos a la durabilidad. La satisfacción de otros requisitos queda fuera de su alcance. Los aspectos relativos a la fabricación, montaje, control de calidad, conservación y mantenimiento se tratan, exclusivamente, en la medida necesaria para indicar las exigencias que se deben cumplir en concordancia con las hipótesis establecidas en el proyecto edificación.

## 5.2. Condiciones Iniciales

El último ensayo que llevamos a cabo para la comprobación del pandeo en nuestra barra de pared delgada de perfil IPE 300 es por medio de la formulación existente en numerosos documentos específicos para la edificación.

Para que la barra soporte el posible pandeo producido por un esfuerzo de compresión, la resistencia de cálculo a pandeo del elemento comprimido,  $N_{b,Rd}$ , tiene que ser mayor al valor de cálculo del esfuerzo axial de compresión,  $N_{c,Ed}$ .

El problema que tenemos que resolver es el de una barra aislada de sección constante en compresión centrada y axial constante, por tanto, puede tomarse la siguiente ecuación:

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot A \cdot f_{yd} \quad (Ec. 5.1)$$

siendo

- $\chi$  coeficiente de reducción de pandeo, cuyo valor puede obtenerse en función de la esbeltez reducida y de la curva de pandeo propia al caso.
- $A$  área de la sección transversal
- $f_{yd}$  resistencia de cálculo del acero, tomando  $f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$  (Ec. 5.2), donde
  - $f_y$  tensión del límite elástico del material. No se considera el efecto de endurecimiento derivado del conformado en frío o de cualquier otra operación.
  - $\gamma_{M1}$  coeficiente parcial de seguridad relativo a los fenómenos de inestabilidad, cuyo valor es 1,1.

Para llevar a cabo el proceso de cálculo necesitamos conocer los siguientes datos de partida:

- Longitud de la barra:  $L$
- Vínculos de los extremos de la barra
- Tipo de acero:  $E, f_y$



- Sección (serie y perfil):  $A, I_y, I_z$
- Esfuerzo axial actuante,  $N_{c,Ed}$

El sistema de ejes con el que vamos a trabajar a lo largo de la resolución manual del problema será:

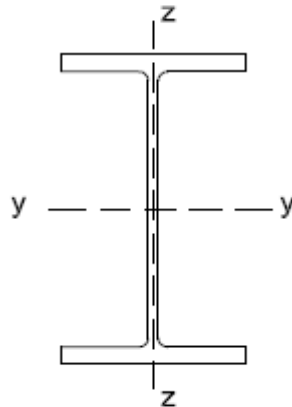


Figura 5.1 Perfil de la barra.

Comprobaremos si el dimensionamiento es correcto desde el punto de vista del pandeo, tanto en el plano  $xy$  (siendo eje de giro  $z$ ) como en el plano  $xz$  (eje de giro  $y$ ). En ambos casos el procedimiento es idéntico, exceptuando que para el eje de giro  $y$  usaremos  $I_z$ , mientras que  $I_y$  será utilizado para el plano  $xz$ .

Los datos iniciales del problema que debemos tener, siguiendo las instrucciones anteriores son:

- Longitud de la barra:  $L = 4 \text{ m}$
- Nuestra barra tendrá un empotramiento en uno de sus extremos, siendo el otro de ellos libre.
- Acero S275,  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$  y  $f_y = 275 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
- IPE 300,  $A = 53.8 \text{ cm}^2$ ,  $I_y = 8360 \text{ cm}^4$ ,  $I_z = 604 \text{ cm}^4$
- $N_{c,Ed} = 10^5 \text{ N}$

### 5.3. Estudio del pandeo sometido a compresión para el plano xy

Para la comprobación de pandeo en compresión simple vamos a seguir siete pasos con los que alcanzaremos de forma sencilla el objetivo final. Los posteriores cálculos que se realicen serán para la resolución del plano xy (eje de giro z).

#### 1. Longitud de pandeo

Para la determinación de esta constante utilizaremos la siguiente fórmula:

$$L_k = \beta \cdot L \quad (\text{Ec. 5.3})$$

Debido a que estamos comprobando el comportamiento de una barra aislada, el coeficiente de pandeo  $\beta$ , vendrá impuesto por la siguiente tabla:

Condiciones de extremo	biarticulada	biempotrada	empotrada articulada	biempotrada desplazable	en ménsula
Longitud $L_k$	1,0 L	0,5 L	0,7 L	1,0 L	2,0 L

Tabla 5.1 Longitud de pandeo de barras canónicas.

En este caso, como nuestro empotramiento no es articulado, tomaremos como longitud de pandeo el valor doble de la longitud de la barra, es decir, estamos en el caso “en ménsula”. Por tanto, el valor numérico de la longitud de pandeo será:

$$L_k = 2 \cdot 4 \text{ m} = 8 \text{ m}$$

#### 2. Resistencia a pandeo de Euler

Su valor viene dado por la fórmula:

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{L_k}\right)^2 \cdot E \cdot I_z \quad (\text{Ec. 5.4})$$

El valor numérico de la compresión crítica por pandeo es:

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{8 \text{ m}}\right)^2 \cdot (2.1 \cdot 10^{11}) \text{ Pa} \cdot (604 \cdot 10^{-8}) \text{ m}^4 = 195603.22 \text{ N}$$

### 3. Esbeltez reducida

Es la relación entre la resistencia plástica de la sección de cálculo y la compresión crítica por pandeo y, para la comprobación por flexión en elementos sometidos a compresión, viene dada por:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} \quad (\text{Ec. 5.5})$$

Por tanto, el valor de esta constante será:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{(53.8 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^2 \cdot (275 \cdot 10^6) \text{ Pa}}{195603.22 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2}} = 2.75$$

### 4. Curva de pandeo y coeficiente de imperfección $\alpha$

Lo primero que necesitamos conocer es la tensión del límite elástico del material y la sección del pilar, que son:  $f_y = 275 \text{ MPa}$  e IPE 300, cuyas dimensiones del perfil son las mostradas en la siguiente tabla:

Perfil	h (mm)	b (mm)	t <sub>ala</sub> (mm)
IPE 300	300	150	10.7

Tabla 5.2 Dimensiones del perfil IPE 300.

Lo siguiente que necesitamos conocer es la curva de pandeo. Esta curva va a ser función de la sección transversal de nuestra viga. Por tanto, con los datos dimensionales de nuestro perfil, podremos introducirnos en la tabla 5.2 para obtener la curva buscada.

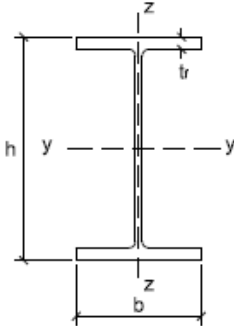
Tipo de sección	Tipo de acero		S235 a S355		S450	
	Eje de pandeo		y	z	y	z
<b>Perfiles laminados en I</b> 	$h/b > 1,2$	$t \leq 40 \text{ mm}$	a	b	$a_0$	$a_0$
		$40 \text{ mm} < t \leq 100 \text{ mm}$	b	c	a	a
	$h/b \leq 1,2$	$t \leq 100 \text{ mm}$	b	c	a	a
		$t > 100 \text{ mm}$	d	d	c	c

Tabla 5.3 Curvas de pandeo en función de la sección transversal.

Por tanto, estamos en el caso siguiente:  $h/b > 1,2$ ,  $t \leq 40 \text{ mm}$ , eje de pandeo z, tipo de acero S235 a S275. La curva de pandeo a utilizar para el plano xy es la curva 'b'. Una vez conocida la curva de pandeo, sabremos cual es el coeficiente de imperfección  $\alpha$  con el que operaremos a través de la siguiente tabla:

Curva de pandeo	$a_0$	a	b	c	d
Coeficiente de imperfección $\alpha$	0.13	0.21	0.34	0.49	0.76

Tabla 5.4 Valores del coeficiente de imperfección  $\alpha$ .

Para este caso, el coeficiente de imperfección  $\alpha = 0.34$ .

##### 5. Coeficiente de reducción $\chi$

Existen dos formas de obtener este coeficiente: la primera, por medio de ecuaciones; la segunda, a través de la interpretación de una gráfica.

La primera manera de obtener el coeficiente de reducción  $\chi$  es aplicar la siguiente ecuación:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1 \quad (\text{Ec. 5.6})$$

donde

$$\Phi = 0.5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2] \quad (\text{Ec. 5.7})$$

De manera que:

$$\Phi = 0.5 \cdot [1 + 0.34 \cdot (2.75 - 0.2) + 2.75^2] = 4.71475$$

$$\chi = \frac{1}{4.71475 + \sqrt{4.71475^2 - 2.75^2}} = 0.117 \approx 0.12$$

La segunda forma para calcular  $\chi$  consiste en que, una vez conocidos la esbeltez reducida y la curva de pandeo, nos metamos en la siguiente figura y, de forma visual, obtengamos el valor concreto.

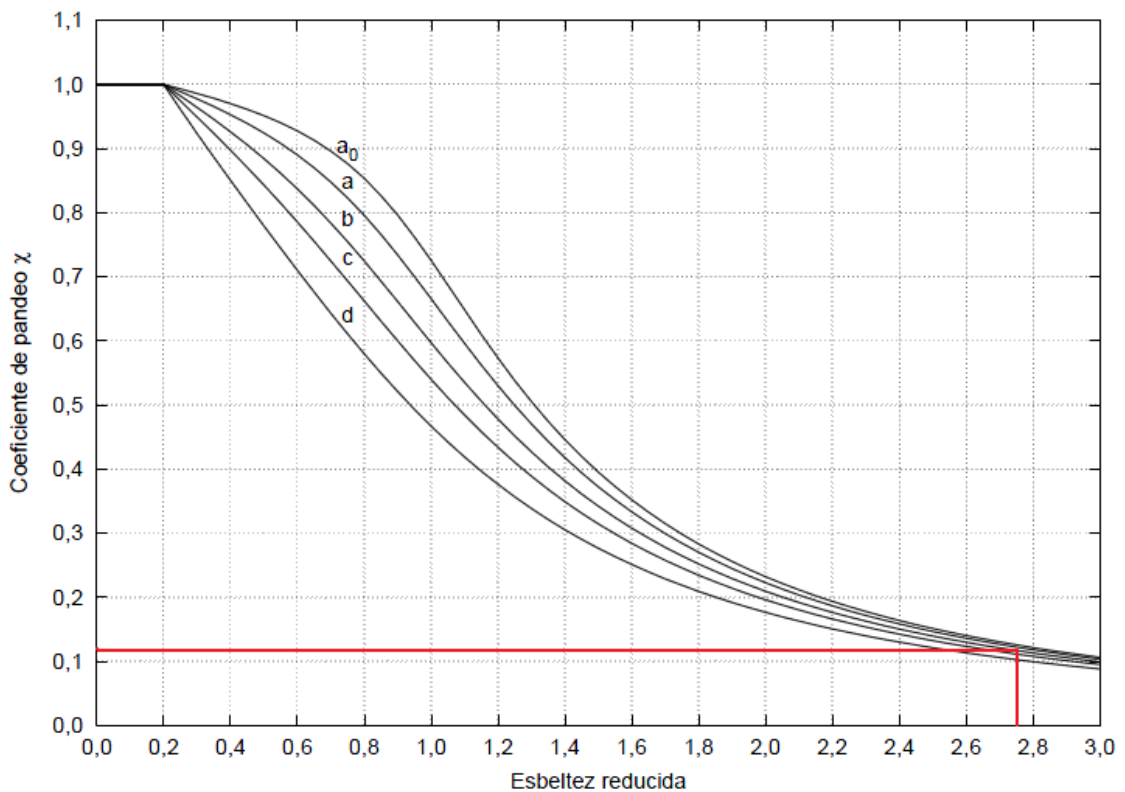


Figura 5.2 Obtención de  $\chi$  para el plano xy en las curvas de pandeo.

De forma aproximada, se puede llegar a la conclusión de que el valor es igual al obtenido mediante el cálculo matemático y, por tanto,  $\chi = 0.12$ .

#### 6. Resistencia última a pandeo

Su valor viene dado por la fórmula:

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot A \cdot f_{yd} \quad (Ec. 5.8)$$

El valor de la resistencia última a pandeo es:

$$N_{b,Rd} = 0.12 \cdot (53.8 \cdot 10^{-4}) m^2 \cdot \frac{(275 \cdot 10^6) Pa}{1.1} = 1.614 \cdot 10^5 N$$

#### 7. Comprobación de pandeo en compresión simple

Para comprobar si nuestro pilar es resistente al posible pandeo que se pueda producir en él, ha de darse que:

$$N_{c,Ed} \leq N_{b,Rd} \quad (Ec. 5.9)$$

En nuestro caso, según los resultados obtenidos, tenemos que:

$$10^5 N \leq 1.614 \cdot 10^5 N$$

Por tanto, se puede asegurar que el pilar analizado sometido a una compresión simple centrada de  $10^5 N$ , no va a sufrir deformación por el efecto del pandeo en el plano xy.

### 5.4. Estudio del pandeo sometido a compresión para el plano xz

Para la comprobación de la existencia de pandeo en el pilar que estamos analizando en el plano xz (eje de giro y), los pasos que debemos seguir van a ser los mismos que en el plano xy. La única variación que se va a experimentar en los próximos cálculos es la aplicación del momento de inercia  $I_y$ .

### 1. Longitud de pandeo

Para el plano xz, la longitud de pandeo no varía con respecto al caso anterior, ya que tanto  $\beta$  como  $L$  siguen siendo idénticos, porque son datos independientes del eje de pandeo sobre el que se lleve a cabo la comprobación. Por tanto:

$$L_k = 2 \cdot 4 = 8 \text{ m}$$

### 2. Resistencia a pandeo de Euler

En este apartado es donde introducimos el cambio que comentábamos anteriormente. La fórmula a aplicar quedará de la siguiente forma:

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{L_k}\right)^2 \cdot E \cdot I_y \quad (\text{Ec. 5.10})$$

El resultado de la resistencia a pandeo de Euler en el plano xz es:

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{8 \text{ m}}\right)^2 \cdot (2.1 \cdot 10^{11}) \text{ Pa} \cdot (8360 \cdot 10^{-8}) \text{ m}^4 = 2.707 \cdot 10^6 \text{ N}$$

### 3. Esbeltez reducida

En este caso, la esbeltez reducida es:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{(53.8 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^2 \cdot (275 \cdot 10^6) \text{ Pa}}{2.707 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2}} = 0.739 \approx 0.74$$

### 4. Curva de pandeo y coeficiente de imperfección $\alpha$

Mantenemos las mismas condiciones dimensionales:  $h/b = 2 > 1.2$ ,  $t \leq 40 \text{ mm}$ . El acero es S275, por lo que  $f_y = 275 \text{ MPa}$ . Eje de pandeo y. Observando en la tabla de la curvas de pandeo en función de la sección transversal comprobamos que tenemos que quedarnos con la curva 'a'.

El coeficiente de imperfección, introduciéndonos en la tabla 5.4, es  $\alpha = 0.21$ .

### 5. Coeficiente de reducción $\chi$

Como ya sabemos, tenemos dos formas de calcularlo: numéricamente y gráficamente.

Para la primera forma de calcularlo vamos a aplicar las ecuaciones correspondientes:

$$\Phi = 0.5 \cdot [1 + 0.21 \cdot (0.74 - 0.2) + 0.74^2] = 0.8305$$

$$\chi = \frac{1}{0.8305 + \sqrt{0.8305^2 - 0.74^2}} = 0.828 \approx 0.83$$

Para la segunda forma nos introduciremos en la figura de las curvas de pandeo, ya que conocemos tanto la esbeltez reducida  $\bar{\lambda}$  como el coeficiente de reducción  $\chi$ .

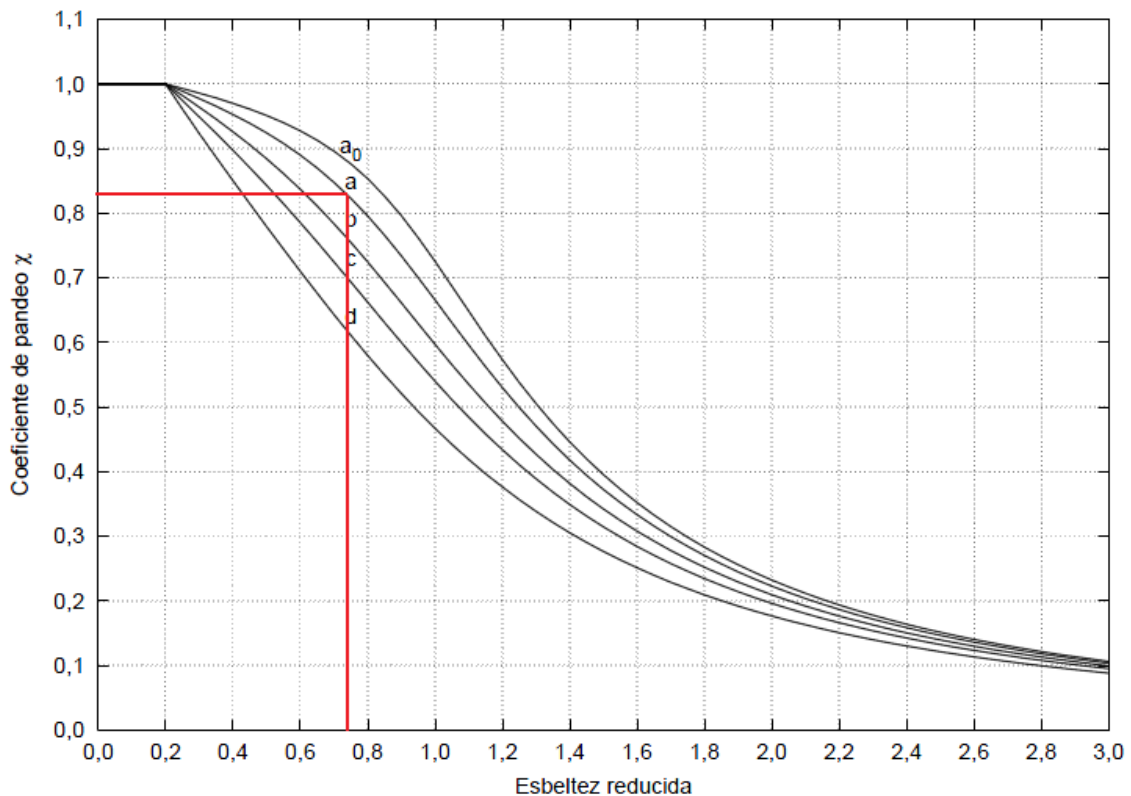


Figura 5.3 Obtención de  $\chi$  para el plano xz en las curvas de pandeo.



Nuevamente, se puede comprobar que el resultado final es muy aproximado o prácticamente similar al calculado por medio de las ecuaciones. Por lo que, en el plano xz, el coeficiente de reducción será  $\chi = 0.83$ .

#### 6. Resistencia última a pandeo

La máxima resistencia que va a soportar a pandeo nuestro pilar IPE 300 va a ser la siguiente:

$$N_{b,Rd} = 0.83 \cdot (53.8 \cdot 10^{-4}) m^2 \cdot \frac{(275 \cdot 10^6) Pa}{1.1} = 1.116 \cdot 10^6 N$$

#### 7. Comprobación de pandeo en compresión simple

Comprobamos el esfuerzo axial actuante y la resistencia última a pandeo:

$$N_{c,Ed} \leq N_{b,Rd} , \text{ luego, } 10^5 N \leq 1.116 \cdot 10^6 N$$

Tampoco en el plano xz se produce el fallo por pandeo del pilar analizado.

### 5.5. Abolladura del alma a cortante

En este apartado se consideran los efectos de abolladura de paneles ocasionados por las tensiones tangenciales, que cumplen las siguientes hipótesis:

- Los paneles son rectangulares.
- Pueden existir rigidizadores en la dirección longitudinal y/o transversal.
- Todos los agujeros son pequeños.
- Los elementos son de sección constante.

La comprobación de abolladura del alma por cortante habrá que realizarla cuando su esbeltez sea:

$$\frac{h_w}{t_w} > \frac{72}{\eta} \varepsilon \quad \text{para paneles de almas no rigidizadas}$$

$$\frac{h_w}{t_w} > \frac{31}{\eta} \varepsilon \sqrt{k_\tau} \quad \text{para paneles de almas rigidizadas}$$

donde:

$h_w$  altura del panel del alma (distancia interior entre alas).

$t_w$  espesor del alma.

$k_\tau$  coeficiente de abolladura por cortante.

$\eta$  coeficiente que permite considerar la resistencia adicional que ofrece en régimen plástico el endurecimiento por deformación del material. Se recomienda adoptar el valor de  $\eta = 1,2$ .

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

Los perfiles normalizados tienen almas con esbelteces menores que las indicadas anteriormente y por tanto, generalmente, no es necesaria su comprobación frente a abolladura por cortante

Si se superan los valores de esbeltez indicados anteriormente será necesario disponer rigidizadores transversales en las secciones de apoyo.

Para almas sometidas a cortante, con o sin rigidizadores, el valor de cálculo del esfuerzo cortante que discurre por el alma deberá verificar:

$$V_{Ed} \leq V_{b,Rd} \quad (Ec. 5.11)$$

donde

$V_{Ed}$  Valor de cálculo del esfuerzo cortante incluyendo el cortante inducido por torsión.

$V_{b,Rd}$  Resistencia de cálculo frente a abolladura del alma

De esta forma, tenemos la siguiente ecuación:

$$V_{b,Rd} = \frac{\chi_w \cdot (f_{yw} / \sqrt{3}) \cdot h_w \cdot t_w}{\gamma_{M1}} \quad (Ec. 5.12)$$

donde

$f_{yw}$  Límite elástico del acero del alma

$\gamma_{M1}$  Coeficiente de seguridad para fenómenos de inestabilidad, tomando para los cálculos posteriores  $\gamma_{M1} = 1,05$ .

Para obtener el coeficiente  $\chi_w$  para la contribución del alma a la resistencia frente a abolladura por cortante tendremos que introducirnos en la *Figura 5.4*. Para conocer éste, tendremos que saber el valor de la esbeltez adimensional,  $\bar{\lambda}_w$ , del alma.

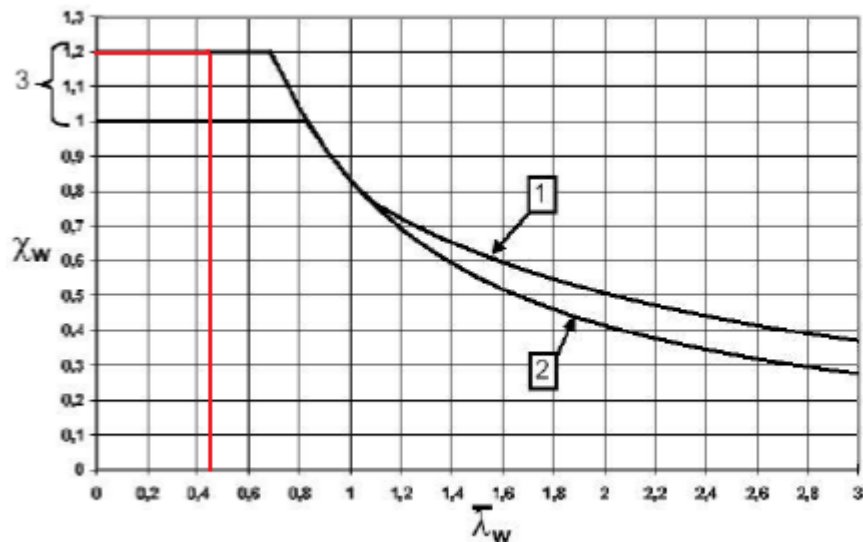


Figura 5.4 Coeficiente  $\chi_w$  para la contribución del alma frente a abolladura por cortante

Para el caso particular en el que tengamos almas sin rigidizadores transversales intermedios, el valor de la esbeltez del alma vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$\overline{\lambda}_w = \frac{h_w}{86,4 \cdot t_w \cdot \epsilon} \quad (\text{Ec. 5.13})$$

por lo que su valor será:

$$\overline{\lambda}_w = \frac{249 \text{ mm}}{86,4 \cdot 7,1 \text{ mm} \cdot \sqrt{\frac{235 \text{ N/m}^2}{275 \text{ N/m}^2}}} = 0,439$$

Una vez calculado el valor de la esbeltez adimensional del alma, nos colaremos en la Figura 5.4 de la página anterior, y podremos encontrar que  $\chi_w = 1,2$ .

Una vez calculados todos los términos necesarios, podemos decir que la resistencia frente a abolladura del alma es el siguiente:

$$V_{b,Rd} = \frac{1,2 \cdot [(275 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2) / \sqrt{3}] \cdot 0,249 \text{ m} \cdot (7,1 \cdot 10^{-3}) \text{ m}}{1,05} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Por tanto, el alma de nuestro pilar analizado, según lo calculado, no sufrirá el fenómeno de abolladura a cortante ya que:

$$V_{Ed} \leq V_{b,Rd} \Rightarrow 10^5 \text{ N} \leq 3,2 \cdot 10^5 \text{ N}$$

## 6. CONCLUSIONES

Según lo visto a lo largo de este trabajo, el fenómeno de inestabilidad de abolladura se puede llegar a comprobar de diversas formas muy diferentes entre sí, sobre todo a la hora de introducir nuestros modelos de estudio y sus condiciones de contorno. Son programas de cálculo muy potentes que nos dan una solución muy real de los procesos que se ensayan.

Se ha podido comprobar en el primer bloque mediante la programación con la herramienta *Wolfram Mathematica 8.0* que introduciendo correctamente todas las ecuaciones matriciales necesarias, se pueden obtener las cargas críticas de pandeo que hacen que nuestra estructura abolle.

El estudio con programas de análisis de elementos finitos permite analizar un fenómeno muy complejo mediante una metodología sencilla y visualizar sus resultados de una forma muy clarividente. Se ha demostrado que en los ensayos comparativos de cargas distribuidas frente a cargas puntuales, la carga crítica de pandeo de los segundos es notablemente menor, haciendo que se produzca la abolladura mucho antes. También comparando el mismo ensayo para diferentes alturas de nuestra estructura, se observa que la carga de pandeo necesaria para que se produzca la abolladura es inversamente proporcional al aumento de la altura del pilar. El análisis con esta herramienta es la que mejor muestra donde y como se producen estos fenómenos, de ahí su aplicación en numerosos campos de la ingeniería.

El bloque en el que se utilizan los códigos principales de la edificación no es tan visible y claro como los anteriores. Son menos didácticos que los anteriores a la hora de poder evaluar los resultados que ofrecen. Conlleva la correcta aplicación de los requisitos que se marcan, pudiendo llegar a realizar comprobaciones de pandeo y abolladura, pero está claro que no es la mejor manera de comprobar estos procesos de inestabilidad teniendo programas computacionales tan potentes como los utilizados en esta memoria.



## 7. BIBLIOGRAFÍA

- O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor, El método de los elementos finitos. Volumen 2. Mecánica de Sólidos, 5ª ed., CINME, Barcelona, 2004.
- E. Manuel Fedriani Martel, A. García Hernandez-Díaz, Guía rápida para el usuario de Mathematica 5.0, Universidad Pablo de Olavide, Mayo 2004.
- J. Salvador Cánovas Peña, Programación con Mathematica, Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena, Noviembre 2010.
- C. Nabte, A. Martínez, M. Moreno Díaz, S. Ramírez, Tutorial Básico de Mathematica 2011.
- Cook, Malkus, Plesha, Witt, 'Concepts & Appls of Finite Element Anal', 4ª ed, J. Wiley, 2002.
- <http://www.autodesk.es/products/simulation/overview>.
- M. Cacho Pérez, A. Lorenzana Ibán, Abolladura de estructuras de barras de sección tipo doble-T, Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 2016.
- A. Teruel Sicart, Abolladura por cortante en vigas armadas rigidizadas longitudinalmente, 2007.
- Monfort, J.; Estructuras Metálicas para Edificación adaptado al CTE, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, 2006.
- Web del Área de Mecánica de Medios Continuos e Teoría de Estructuras de la Universidad Da Coruña, E.T.S. de Enxeñeiros de camiños, Canais e Portos -> [http://caminos.udc.es/info/asignaturas/grado\\_itop/411/](http://caminos.udc.es/info/asignaturas/grado_itop/411/)

- Tema 5.- Compresión y pandeo. Concepto de inestabilidad. Pandeo por flexión. Pilares de pórticos. de la asignatura Estructuras Metálicas del Grado de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Valladolid.
  
- E. Hernández Montes, L. Martín Gil Martín, Acero Estructural, Universidad de Granada, 2005.
  
- Código Técnico de la Edificación (CTE). DB SE-A Seguridad Estructural: Acero, Ministerio de Vivienda, 2006.
  
- Instrucción de Acero Estructural (EAE), Ministerio de Fomento, 2010.





