



Universidad de Valladolid



ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

**Diseño de un sistema móvil a escala para
simular las acciones verticales de los
peatones sobre las estructuras.**

Autor:

Guerra Pajares, Víctor

Tutor:

Lorenzana Ibán, Antolín
Dpto. C.A.I.T. Mecánica de los
Medios Continuos y Teoría de
Estructuras

Valladolid, Abril, 2016.

Agradecimientos

A mi Madre, a mi Padre, a mi Hermana y a mi novia, gracias por apoyarme.

A todo el departamento de Estructuras gracias por ponerme facilidades y hacer todo más sencillo.

Y a mis amigos por ser mis amigos siempre.

ÍNDICE

1	Introducción y objetivos.....	7
1.1	Problemática de las pasarelas ligeras.....	7
1.2	Objetivos	8
1.3	Metodología	10
1.3.1	Viga.....	10
1.3.2	Robot <i>Legó Mindstorm</i>	11
1.3.3	Caballetes y punto de apoyo	17
1.4	Instrumentación	18
2	Caracterización de la estructura.....	21
2.1	Dimensiones	21
2.2	Análisis teórico de la estructura	23
2.2.1	Análisis estático teórico.....	24
2.2.2	Análisis modal teórico: frecuencias y modos naturales.....	27
2.3	Análisis experimental de la estructura.....	31
2.3.1	Análisis estático experimental	31
2.3.2	Análisis modal experimental: frecuencias y modos naturales....	32
2.4	Comparativa.....	36
2.5	Ajuste dimensional	37
2.6	Amortiguamiento de la estructura	40
3	Caracterización de la viga con masa puntual no central.....	50
4	Caracterización del robot	54
4.1	Velocidad de avance	54
4.2	Frecuencia generada por el robot.....	56
4.2.1	Modo directo.....	56
4.2.2	Modo indirecto	56
5	Caracterización de la carga.....	62
6	Interacción de la estructura con el robot.....	67
6.1	Robot estático sobre la estructura.....	67
6.2	Robot avanzando sobre la estructura.....	73

6.3	Combinación de robot avanzando con excéntrica	75
7	Conclusiones	80
8	Líneas de Futuro	84
Anexo A.	Transformada rápida de Fourier (FFT).....	86
Anexo B.	Valor cuadrático medio (RMS).....	88
Anexo C.	Resonancia mecánica.....	89
Anexo D.	<i>Cosmos</i>	92

1 Introducción y objetivos

1.1 Problemática de las pasarelas ligeras

En los últimos años el número de pasarelas destinadas a peatones que se construyen en las ciudades ha aumentado considerablemente debido a la creciente demanda de nuevas vías de paso por parte de estos usuarios y de la conciencia de conseguir un modelo de movilidad más ecológico y sostenible.

Este tipo de estructuras tienen requisitos constructivos menos exigentes en comparación con aquellas destinadas a otros tipos de puentes, permitiendo el desarrollo de diseños más arriesgados, geometrías más complejas y empleo de nuevos materiales. Todo esto conduce a la construcción de estructuras esbeltas, ligeras y poco amortiguadas.

Las características de estas estructuras hacen que aumente la posibilidad de que se produzcan problemas de vibraciones asociados al tránsito de peatones que pueden afectar a la seguridad o estado de servicio de las mismas. En determinadas circunstancias los movimientos armónicos característicos del tránsito de peatones coinciden con alguna de las frecuencias propias de la estructura, pudiendo dar lugar a fenómenos de resonancia que se traducen en altos niveles de vibración.

Como respuesta a las particulares problemáticas de esta nueva generación de estructuras, las normativas de puentes y pasarelas comienzan a tratar con más profundidad los posibles problemas dinámicos, dando pautas para el diseño que aseguren el correcto estado de servicio de estas estructuras en el tiempo.

Es por ello que se han llevado a cabo multitud de estudios para conocer mejor el comportamiento de estas estructuras y poder evitar estos problemas antes de llevarse a cabo su construcción, tanto a nivel experimental a escala real, como por simulación.

En este trabajo se propone hacerlo mediante el uso de maquetas a escala reducida. Concretamente podría pensarse en una escala aproximada de 1:12, de tal manera que el puente real sería de unos 72 m de largo y el robot haría el papel del peatón que lo cruza.

1.2 Objetivos

El objetivo de este Trabajo Fin de Grado (TFG) es conocer cómo responde una estructura cuando es transitada por un robot que simula el tránsito de un peatón en tanto que tiene masa, se desplaza y además induce fuerzas verticales alternantes y así observar el comportamiento de la pasarela en el eje vertical, el eje Z.

En la ilustración 1 se presenta la estructura y el robot situado sobre la misma.



Ilustración 1. Conjunto general de estudio

Se sabe que, cuando la frecuencia de excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, tiene lugar un fenómeno de resonancia. La característica más importante de la resonancia es que da lugar a grandes desplazamientos al amplificar de manera importante las vibraciones del sistema, lo cual es un fenómeno indeseable ya que provoca la aparición de tensiones y deformaciones elevadas que pueden ocasionar el fallo del sistema. En consecuencia, estas condiciones deben tratar de ser evitadas en el diseño y construcción de cualquier sistema mecánico. En la mayor parte de los casos las frecuencias de excitación no pueden controlarse al venir impuestas por los requerimientos de carácter funcional del sistema.

Si la fuerza o fuerzas de excitación son de frecuencias conocidas será posible evitar las resonancias cambiando la frecuencia natural del sistema y alejándola de aquella o aquellas en la etapa de diseño. Sin embargo, en el caso de que el sistema tenga que operar en una determinada banda de frecuencias de excitación, puede que no resulte posible evitar la resonancia en todo el rango de condiciones de operación.

Toda estructura posee un amortiguamiento propio, lo cual es beneficioso porque reduce la respuesta de la estructura a excitaciones dinámicas, aunque en algunos casos no es suficiente. En esos casos, se podría tratar de aportar

amortiguamiento al sistema, habiendo distintas posibilidades. En primer lugar se podrían introducir amortiguadores viscosos conectando partes de la estructura que tengan un movimiento relativo significativo. Otra opción es introducir, donde sea posible, acoplamientos elastoméricos entre distintas partes de la estructura (apoyos de los forjados en los pilares, por ejemplo). Por último se pueden usar materiales estructurales con un alto amortiguamiento interno: hierro fundido, laminado, materiales tipo sándwich. Esto no es objeto de estudio en este TFG.

El estudio consta tanto de una parte preparatoria en la que conociendo las dimensiones y propiedades de la viga, ésta se caracteriza para obtener las frecuencias propias de la misma, centrándose en el primer y segundo modo y sus correspondientes amortiguamientos. Esta caracterización se realiza de manera teórica y experimental para así comprobar que de ambas formas se obtienen los mismos resultados.

También se caracteriza el robot para saber qué frecuencias es capaz de generar con su excéntrica, ya que es el que, generando esas frecuencias, va a excitar a la estructura, y para conocer qué rango de velocidades de avance va a ser capaz de alcanzar. La caracterización de las frecuencias inducidas por la excéntrica se realiza de manera teórica y experimental, siendo similares ambos procedimientos.

La parte experimental de este estudio consiste en llevar a la práctica todo lo que se ha calculado y observar el comportamiento más crítico de la pasarela, es decir, se hace circular el robot por la estructura induciendo diferentes frecuencias y a diferentes velocidades de avance, en busca de la combinación más pésima de ambas, la que excite más a la estructura, lo cual es el objetivo principal de este TFG.

Tabla 1. Objetivos del estudio

OBJETIVOS
Caracterizar la estructura tanto de manera teórica como experimental
Caracterizar el robot tanto de manera teórica como experimental
Encontrar las situaciones de tránsito del robot sobre la estructura más pésimas

1.3 Metodología

Todos los ensayos realizados en este estudio han sido llevados a cabo a escala reducida (1:12). No se han llevado a cabo a escala real debido a la dificultad que eso supone tanto en temas de espacio disponible en el laboratorio, como por temas económicos. Este estudio es un "estudio lowcost".

Para llevar a cabo el estudio se han utilizado una serie de elementos: viga de aluminio, robot *Lego Mindstorm* y dos caballetes. Seguidamente se describen las partes.

1.3.1 Viga

Es el elemento que, junto a los caballetes, forma un escenario que simula la pasarela peatonal. Se encuentra biapoyada entre los dos caballetes con un apoyo simple que permite el giro de la viga en ese punto pero no el desplazamiento.

La viga está fabricada en aluminio por extrusión, con un perfil 100*40*1.5 mm (ancho*canto*espesor) y 6 m de longitud, lacada en blanco.

Características aluminio:

- **Peso:** El aluminio es ligero, con una densidad de un tercio de la del acero 2700 kg/m³.
- **Resistencia:** El aluminio utilizado presenta un límite elástico de 80 MPa.
- **Elasticidad:** El módulo de elasticidad (módulo de Young) del aluminio es un tercio que el del acero (E=70.000 MPa). Esto significa que el momento de inercia debe ser tres veces mayor para lograr la misma deflexión que un perfil de acero para una misma carga, lo que da una idea de la amplitud de los desplazamientos que se pueden conseguir.

Las tolerancias dadas por el fabricante del perfil que se ha utilizado son:

- ± 10 % en el espesor (e).
- $\pm 0,30$ mm en la altura (h).
- $\pm 0,60$ mm en el ancho (b).

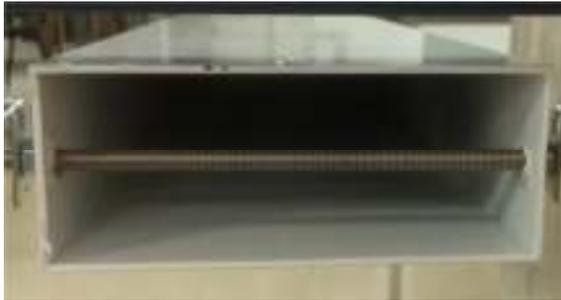


Ilustración 2. Apoyo del extremo de la viga

1.3.2 Robot *Legó Mindstorm*

Para poder llevar a cabo la parte experimental de este estudio fue necesaria la utilización de un dispositivo capaz de avanzar por la viga y simultáneamente capaz de generar vibraciones a la frecuencia deseada, de manera que se pueda controlar y generar la frecuencia que se necesite, de este modo se podría simular el paso de una persona a través de una pasarela peatonal.

Es por ello que se decidió emplear *Legó Mindstorm*, sencillo de construir y de programar, para lo cual tiene un software propio de fácil uso.



Ilustración 3. Conjunto de piezas del kit *Legó Mindstorm*

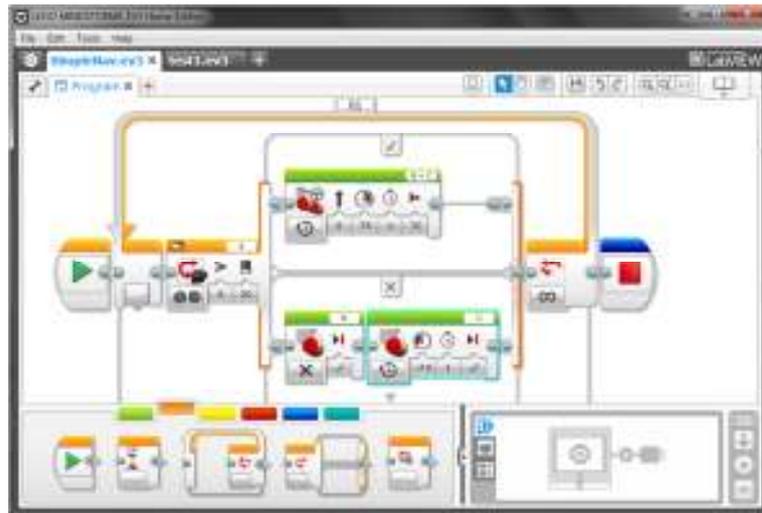


Ilustración 4. Captura del software de programación del Robot

1.3.2.1 Diseño del robot

El *Legó Mindstorm* dispone de gran variedad de piezas, lo cual permite construir un robot que se ajuste a las medidas y necesidades para la realización de este trabajo.

Fueron construidos varios modelos de robots hasta que se logró obtener el modelo ideal, el que mejor se adecuaba a las necesidades, y era lo suficientemente rígido como para transmitir las vibraciones generadas por la rueda excéntrica hasta la estructura.

En todos los diseños se utiliza como parte central la CPU del *Legó Mindstorm*, la cual funciona como chasis.



Ilustración 5. CPU del *Legó Mindstorm*

- En la ilustración 6 se muestra el primer modelo que se construyó, el cual consistía en un diseño muy primitivo que fue hecho para empezar a tomar contacto con el material y comenzar a diseñar el sistema de avance del robot. En este modelo se utilizó una esfera metálica en la parte trasera, en vez de ruedas fijas. Este modelo corresponde con el ejemplo que se propone en las instrucciones para introducirnos en este campo.



Ilustración 6. Modelo 1

- Después se llegó a un modelo más elaborado. Se le añadieron dos ruedas fijas (no pueden girar en hacia la derecha o izquierda, solo ir hacia delante o hacia atrás) en la parte trasera, lo cual ayuda a que el robot se desplazase en línea recta, que es lo que se necesita. En este diseño ya se había introducido la barra excéntrica, aunque todavía estaba situada en la parte delantera. Esto se tuvo que cambiar, al igual que el tipo de motor que la accionaba, como ya se explica más adelante y también el tipo de raíles que lo guían por la viga.



Ilustración 7. Modelo 2

- Este es el robot definitivo que ha sido utilizado, difiere del anterior en los raíles (se rediseñaron de manera que impide completamente la caída del robot de la estructura durante su tránsito) y la colocación del motor (se situó en la parte trasera para evitar que el robot de "saltos" porque se desequilibra al girar la excéntrica), además se añadieron más barras a la estructura para aumentar la rigidez del mismo y poder inducir mejor las vibraciones sobre la estructura. La masa final del robot fue de 0,710 Kg.



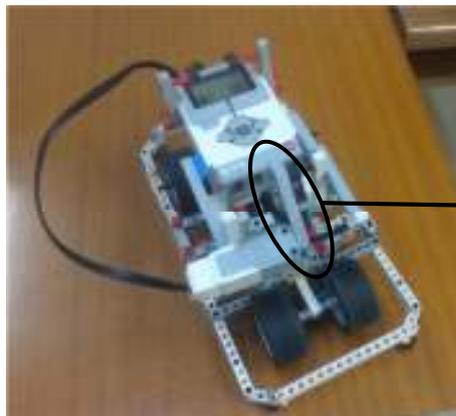
Ilustración 8. Modelo 3

1.3.2.2 Barra excéntrica

A la hora de elegir la barra excéntrica (longitud y tamaño), se decidió colocar la barra y la masa más ligera, que se muestran en la ilustración 9, porque lo que se necesitaba conseguir en este estudio era una determinada frecuencia, no la amplitud. Por ello se comprobó que con ese pequeño peso se conseguía excitar lo suficiente la viga. Poner una mayor masa habría sido un problema por el motor que mueve la barra, ya que no sería capaz de hacer girar la barra a una velocidad angular constante, al haber más masa giraría más lento en el ascenso y más rápido en el descenso.



Ilustración 9. Detalle barra excéntrica



Barra excéntrica

Ilustración10. Detalle de la disposición de la barra excéntrica en el robot

1.3.2.3 Motores

El robot está constituido por una CPU propia en la cual se introdujo el programa que se requiera para controlar su movimiento, es el que transmite las órdenes a los motores. El robot consta de tres servomotores; dos de mayor potencia mostrados en la ilustración 11 que son los encargados de mover las dos ruedas motrices delanteras, ya que las traseras no son motrices. En este caso se decidió colocar estos dos motores, uno para mover cada rueda, ya que debido al diseño del robot éstos eran los que mejor se ajustaban para esa finalidad. Tenían la forma adecuada. Fue necesario colocar los dos porque uno era insuficiente para mover el robot con la certeza de que la velocidad de avance fuera exactamente la que se le requería. Si se hubiera colocado solamente un servomotor es muy posible que esa velocidad fuese menor de lo que se pensaba o que no fuese constante en todo el tránsito.

El tercer motor mostrado en la ilustración 12 es de menor tamaño y es el que hace girar la barra excéntrica. En definitiva, es el que genera las vibraciones

con la frecuencia deseada. Este motor ha sufrido variaciones en la colocación y en el tipo, ya que al principio fue colocado en la parte delantera, pero esto provocaba que a altas revoluciones el robot se inclinara hacia adelante y diera pequeños saltos, los cuales daban errores en la lectura del acelerómetro. Es por esto que se decidió situarle en la parte trasera, y cambiar el tipo de motor utilizado. En un primer momento se utilizó el mismo que se usó en las ruedas, pero ocupaba un mayor espacio y era un problema para el diseño y construcción, así que se optó por colocar el otro motor de menor tamaño ya que se podían conseguir igualmente las frecuencias deseadas.

- **Motor ruedas motrices**



Ilustración 11. Motor ruedas motrices

- **Motor barra excéntrica**



Ilustración 12. Motor barra excéntrica

1.3.2.4 Raíles

Una vez construido el robot se le añadió unos raíles a lo largo de su perímetro que le rodean por completo para que fuese guiado por la viga sin que se cayera de la estructura. Estos raíles también han sufrido numerosas modificaciones hasta conseguir un diseño que asegure su funcionalidad a

cualquier velocidad de avance. Los raíles finalmente utilizados se muestran en las ilustraciones 13 y 14.

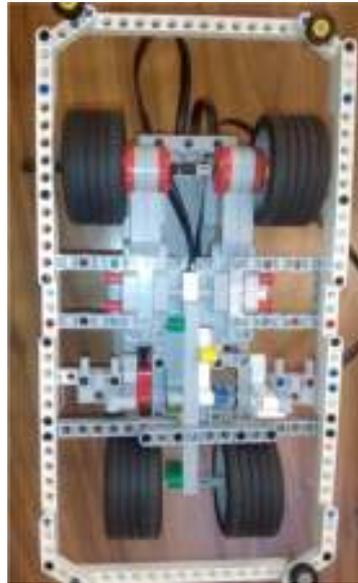


Ilustración 13. Detalle inferior raíl



Ilustración 14. Detalle lateral raíl

1.3.3 Caballetes y punto de apoyo

Se utilizaron dos caballetes de acero fabricados para este proyecto. Estos caballetes actúan como apoyo de la viga y el conjunto forma la estructura que se va a estudiar.

Para el punto de apoyo de la viga sobre el caballete, como se puede observar en la ilustración 15, se crea con un conjunto de varillas y pletinas de acero que se introducen en la viga por un taladro practicado en el eje de simetría horizontal del perfil. Hacen que la viga tenga un apoyo puntual, permitiendo únicamente el giro de la viga en el eje horizontal en el que se ha practicado

los taladros, pero no el desplazamiento. Este sistema de anclaje se considera rígido en comparación con la viga.



Ilustración 15. Detalle apoyo extremo de la viga



Ilustración 16. Detalle caballete

1.4 Instrumentación

Para poder medir la amplitud de la aceleración (m/s^2) de las vibraciones producidas en la viga fue necesario el uso de un acelerómetro. Se ha utilizado el acelerómetro integrado en el teléfono móvil para reducir costes ya que este tiene la suficiente precisión.

A partir de la aplicación *Accelerometer Monitor* (una aplicación gratuita para el sistema operativo *Android*), el acelerómetro fue capaz de registrar la señal con el fin de analizarla con el correspondiente programa en el ordenador.

Para medir la señal lo que se hace es configurar la aplicación para que registre los datos lo más rápido que pueda, que en este caso son unos 100 por segundo. La aplicación almacena la señal y luego se transfiere al

ordenador en forma de *Bloc de Notas* para su posterior tratamiento con el programa *Sigview*.

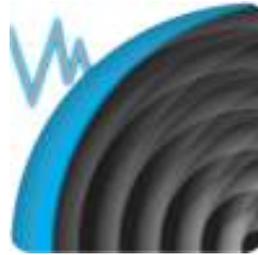


Ilustración 17. Aplicación *Accelerometer Monitor*

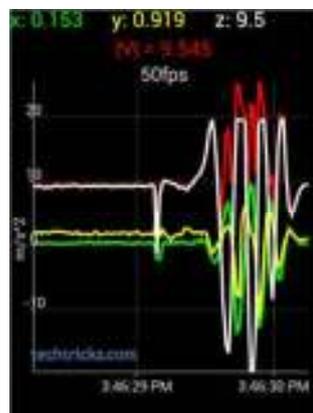


Ilustración 18. Detalle interfaz *Accelerometer monitor*

Las características del acelerómetro integrado en el móvil que se ha utilizado para las mediciones son:

- Tipo: BMA056 3-axis Accelerometer
- Resolución: 0,01 m/s²
- Rango: 456,88 m/s²
- Velocidad máxima: 100 Hz

La masa del teléfono móvil seleccionado es de 0,155 Kg. El modelo es *BQ Aquaris E4*, mostrado en la ilustración 19.



Ilustración 19. Teléfono móvil utilizado como acelerómetro

Una vez se tiene la señal registrada, se transfiere al ordenador y se emplea un programa creado para la aplicación *Matlab*, o el programa *Sigview*, y de esa manera se puede visualizar la señal en el tiempo, analizarla y obtener datos de ella como la Valor Cuadrático Medio (RMS) o la Transformada Rápida de Fourier (FFT).

2 Caracterización de la estructura

2.1 Dimensiones

Las dimensiones de la viga de aluminio con sus tolerancias proporcionadas por el fabricante están descritas en el apartado 1.3.1

Las medidas tienen una tolerancia dada por el fabricante, debido al proceso de fabricación y a que la viga esta lacada (la capa de pintura le aporta más grosor). Es por ello que una vez recibido el material lo primero que se hace es comprobar las dimensiones reales de la viga.

El equipo utilizado para realizar estas medidas es:

- **Calibre electrónico de fibra:**
 - Resolución: 0,1 mm
 - Tolerancia: $\pm 0,1$ mm



Ilustración 20. Calibre electrónico

- **Dinamómetro:**
 - Resolución: 5 g
 - Tolerancia: ± 5 g



Ilustración 21. Dinamómetro

- **Flexómetro:**
 - Resolución: 1 mm
 - Tolerancia: $\pm 1,9$ mm



Ilustración 22. Flexómetro

Se hacen 3 medidas de cada dimensión, para así obtener la media de las 3 mediciones.

Las medidas reales obtenidas se muestran en la tabla 2:

Tabla 2. Dimensiones del perfil

	b (mm)	h (mm)	e (mm)
	100,4	40,7	1,56
	100,2	40,6	1,51
	100,3	40,5	1,55
Media	100,3	40,6	1,54
Desviación estándar	0,10	0,10	0,03

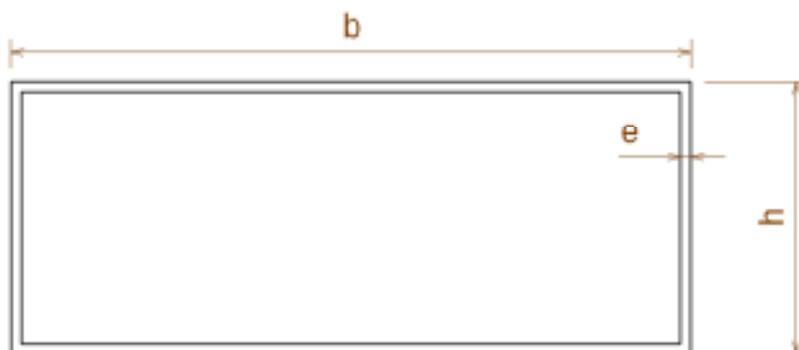


Ilustración 23. Detalle perfil viga

Varían con respecto a las proporcionadas por el proveedor.

Para caracterizar la viga también fue necesario conocer su masa, y para conocerla el sistema que fue elegido, debido a la dificultad de pesar un objeto de tan grandes dimensiones, es utilizar dos dinamómetros, uno en cada extremo de la viga.

El método consiste en sostener la viga con los dinamómetros agarrando la viga por unos orificios practicados en el eje vertical del perfil, como se puede observar en la ilustración 24, y entre dos personas levantar la viga y sumar la lectura de cada dinamómetro.



Ilustración 24. Detalle de la forma en la que se ha pesado la viga

Este proceso se ha realizado 4 veces para ser más exactos. Los datos obtenidos se muestran en la tabla 3:

Tabla 3. Masa medida con cada dinamómetro y masa total

	Masa dinamómetro 1(kg)	Masa dinamómetro 2(kg)	Masa total Viga (kg)
	3,28	3,23	6,51
	3,27	3,25	6,52
	3,29	3,37	6,66
	3,29	3,30	6,59
Media			6,57
Desviación estándar			0,07

2.2 Análisis teórico de la estructura

El análisis estático y dinámico de los sistemas estructurales es, en general, un problema complejo debido a su condición de sistema continuo y a la

existencia de fuerzas de inercia y amortiguamiento. El sistema estructural estudiado en el presente TFG es, como todas las estructuras reales, un sistema continuo.

2.2.1 Análisis estático teórico

Para analizar el comportamiento estático de una viga isostática biapoyada, y con la intención de estudiar una característica significativa que sea de interés para este estudio, se comprobarán las deformaciones que sufre la viga cuando está sometida a determinadas sollicitaciones. El estudio de las deformaciones que se producen en una estructura es importante a la vista de que, en la normativa, al igual que las tensiones, los desplazamientos están sujetos a restricciones por razones de seguridad, confort o estética. Así, en muchas ocasiones, los elementos estructurales se dimensionarán además de por su resistencia, para que las deformaciones máximas no sobrepasen unos valores admisibles.

En este apartado se presenta la solución analítica de los desplazamientos verticales de los distintos puntos de la viga, para el caso en el que la viga está sometida a una carga uniformemente distribuida como puede ser su peso propio, y para una carga puntual dispuesta en el centro de la misma.

La flecha en el centro de la viga debida a su peso propio se obtiene con la ecuación 1:

$$\delta = \frac{5 q L^3}{384 E I_z}$$

Ecuación 1

La flecha producida por una masa puntual en el centro de una viga se obtiene con la ecuación 2:

$$\delta = \frac{m_{puntual} * L^3}{48 * E * I_z}$$

Ecuación 2

q: es la carga producida por el peso propio de la viga

$$q = \rho A g$$

Ecuación 3

A: área del perfil de la viga

g: gravedad (9,81 m/s²)

m_{puntual}: masa que disponemos en el centro de la viga.

L: longitud de la viga, 6 m.

E: módulo de elasticidad, se toman 70 GPa.

I_z: momento de inercia en el eje Z, el cual es el que interesa porque es en el que va a oscilar la viga. Se obtiene con la ecuación 4.

$$I_z = \frac{1}{12} b * h^3 - \frac{1}{12} * (b - 2 * e) * (h - 2 * e)^3$$

Ecuación 4

La flecha debido al peso propio se muestra en la tabla 4:

Tabla 4. Flecha debido al peso propio

Flecha (mm)	21,0
--------------------	------

La flecha debida al peso propio no se puede medir de manera experimental, no con los medios de los que se dispone, por eso se calcula de manera teórica utilizando la ecuación 1.

Se calcula también la flecha producida por las diferentes masas que situamos en el centro de la viga. Los resultados se muestran en la tabla 5:

Tabla 5. Flecha teórica debida a masas puntuales

	P1+P2 (3,355 Kg)	P2 (1,785 Kg)	P1 (1,57 Kg)
Flecha (mm)	17,08	9,09	7,99

Esta flecha sí que se puede medir de manera experimental, pero también se va a realizar de manera teórica utilizando la ecuación 2, para comprobar si de ambas maneras se obtienen los mismos resultados y con ello validar las constantes y parámetros que intervienen en las fórmulas.

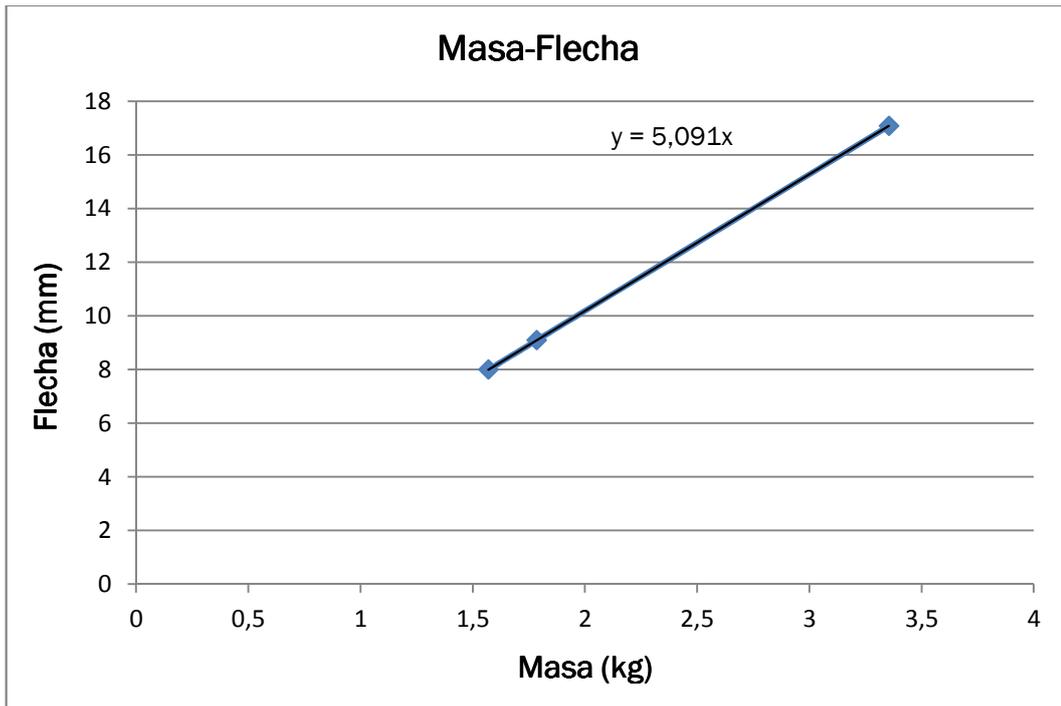


Figura 1. Flecha teórica producida por diferentes masas puntuales

Si se aplica una regresión a los puntos de la figura 1, la pendiente de esa regresión es 5,091. La ordenada en el origen en este caso es nula.

Estas masas son:

- P1: esfera de acero de 1,57 Kg.



Ilustración 25. Detalle de masa P1

- P2: perfil IPN de 1,785 Kg.



Ilustración 26. Detalle de masa P2

- P1 +P2: situar al mismo tiempo la esfera de acero y el perfil IPN.
Suma 3,355 Kg



Ilustración 27. Detalle de masa P1 junto con P2

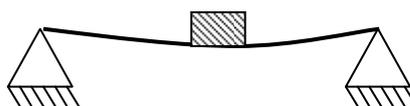


Ilustración 28. Esquema de la flecha debida a masas puntuales

2.2.2 Análisis modal teórico: frecuencias y modos naturales

A continuación se presenta y resuelve el problema modal de la viga flexible anteriormente descrita. En primera instancia se planteará el desarrollo matemático que conduce a la expresión teórica que permite el cálculo de las frecuencias propias y los modos de vibración de la misma, es decir, se realizará un análisis modal.

Estos valores son inherentes de cada estructura y quedan completamente determinados por las propiedades físicas de la misma (geometría, masa, rigidez, uniones etc.) y por sus condiciones de contorno, independientemente de las fuerzas que actúan sobre ella.

Resulta imprescindible hacer un análisis de estas características para poder analizar el comportamiento dinámico de un sistema estructural esbelto, ya que por un lado, en estructuras esbeltas los periodos propios de estas aumentan, pudiendo coincidir con la cadencia típica de paso de los peatones. El paso de peatones a determinadas velocidades puede generar fuerzas de carácter dinámico que podrían hacer entrar en resonancia al sistema.

El primer paso en el análisis de la respuesta dinámica del modelo será realizar un análisis modal, es decir, evaluar sus frecuencias y modos propios de vibración.

Los modos de vibración de un sistema mecánico son los posibles movimientos armónicos que pueden tener lugar en el sistema en condiciones de excitación nula.

Existirán tantos modos propios como grados de libertad tenga el sistema. El modelo utilizado es un sistema continuo. Por tanto, en teoría el sistema presentaría infinitos modos de vibración, aunque en la práctica solo se podrán detectar los primeros. Si se desplaza el sistema respecto de su posición de equilibrio estático según uno de sus modos naturales, el sistema comienza a oscilar armónicamente alrededor de dicha posición de equilibrio, siendo la posición adoptada por el sistema en cualquier instante de tiempo el resultado de multiplicar el modo natural correspondiente por un valor escalar. Estas oscilaciones se producen a la frecuencia natural asociada a ese modo.

Una vez conocidas las frecuencias propias de la viga, y para continuar con el proceso de determinación de las características dinámicas de un sistema mecánico, es importante conocer los modos propios de vibración, que también dependen de la distribución de la masa y la rigidez del sistema.

En la ilustración 29 se pueden ver los 3 modos teóricos de vibración de una viga simple.

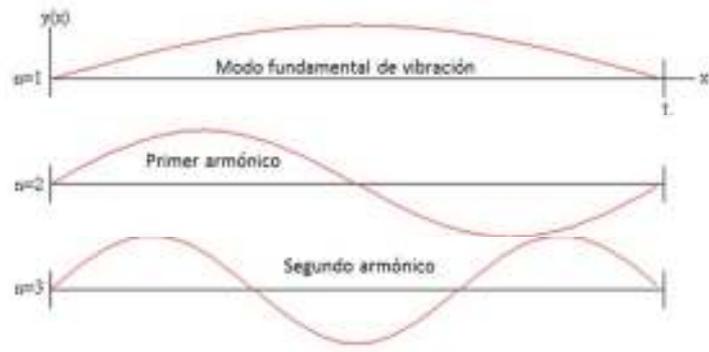


Ilustración 29. Modos de vibración de una viga biapoyada simple

Las frecuencias naturales de la viga biapoyada de cualquier modo sin ninguna masa sobre ella, se obtienen utilizando la ecuación 5:

$$\lambda_i = i \cdot \pi$$

$$\lambda_i = i \cdot \pi$$

$i=1,2,3,\dots$ es el número del modo que vayamos a calcular.

ρ : es la densidad del aluminio, 2700 kg/m^3 .



Ilustración 30. Esquema viga biapoyada

De esta manera se calculan los dos primeros modos de la viga biapoyada mostrada en la ilustración 30 utilizando la ecuación 5:

$$\omega_1 = 3,86 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 15,44 \text{ Hz}$$

Cuando se añade una masa puntual a la viga, estas frecuencias cambian.

Esta situación interesa en este estudio porque la masa del robot más la del acelerómetro suman $0,865 \text{ kg}$, y no se pueden despreciar frente a la masa de

la viga ya que la masa conjunta de robot más el acelerómetro representan el 13,2% de la masa de la viga. Lo que hace que el conjunto de la viga más el robot más el acelerómetro sea una estructura distinta a medida que el robot se mueve.

En este caso sólo hay fórmulas teóricas para calcular la primera frecuencia, dada por la ecuación 6.

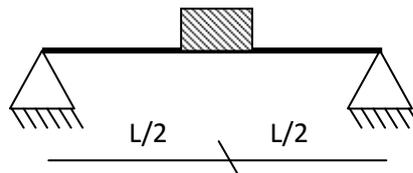


Ilustración 31. Esquema viga biapoyada con masa puntual en posición central

$$\omega \text{ (Hz)} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{3 E I_z}{L^3 (M_i + 0,4857 m_b)} \right]^{1/2}$$

Ecuación 6

M_i: masa concentrada en el centro de la viga, en este caso son 0,865 Kg, que es la masa del robot (0,710 Kg) más la masa del acelerómetro(0,155 Kg).

m_b: masa de la viga

Resultando la frecuencia para el primer modo en el caso en la masa conjunta del robot más el acelerómetro esté situada en el centro de la estructura:

$$\omega_{1**}=3,47 \text{ Hz}$$

También interesa el caso en el que solamente se encuentre el acelerómetro(0,155 kg) en el centro de la estructura, porque es la situación que se dio para caracterizar el primer modo de la viga biapoyada, ya que para obtenerlo hubo que situar el acelerómetro en el centro de la viga para captar la señal. El primer modo obtenido de esta manera y utilizando la ecuación 6:

$$\omega_{1*}=3,79 \text{ Hz}$$

2.3 Análisis experimental de la estructura

2.3.1 Análisis estático experimental

En este apartado se presenta la solución experimental de los desplazamientos verticales del punto central de la viga, para el caso en el que la viga está sometida a una carga puntual dispuesta en el centro de la misma.

Se mide la flecha producida por una masa dispuesta en el centro de la estructura, utilizando un calibre unido a un soporte, y dejando que su extremo apoye sobre la viga. Como este calibre tiene rozamiento mínimo, con su propio peso cae y proporciona la medida de la flecha.

Se mide la flecha producida por las diferentes masas P1, P2, y P1+P2.



Ilustración 32. Detalles de masa P1 más P2

Se hacen 3 medidas para cada masa cuyos resultados se muestran en la tabla 6. Con la precisión de los aparatos utilizados no se aprecian diferencias entre las mediciones:

Tabla 6. Flecha experimental debida a masas puntuales

P1+P2 (mm)	P2 (mm)	P1 (mm)
18,1	9,5	8,4
18,1	9,5	8,4
18,1	9,5	8,4

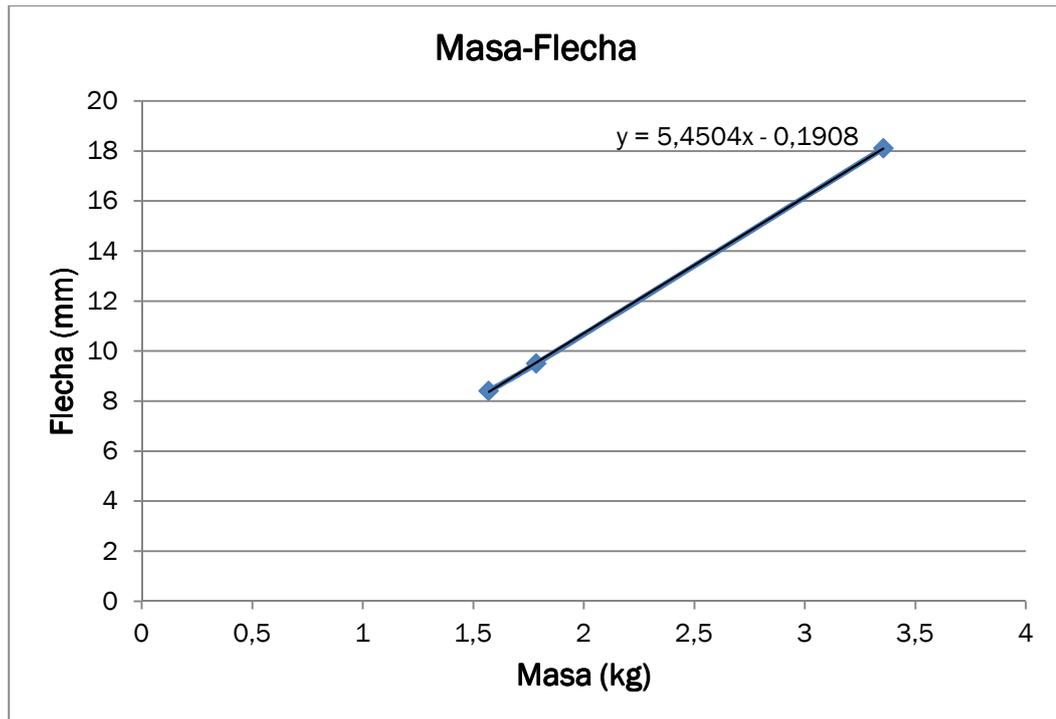


Figura 2. Flecha debida a masa puntual en la posición central

Como se puede observar en figura 2, la flecha debido a una masa puntual dispuesta en el centro de la viga sigue una distribución lineal, como era de esperar. Si aplicamos una regresión a los puntos de la figura 2, la pendiente de la regresión es 5,45.

No obstante, la ordenada en el origen no es nula, lo cual revela cierta falta de precisión en las medidas (por debajo de las décimas de milímetro). Asimismo, comparando con los resultados teóricos del apartado 2.2.1, también hay diferencia entre las pendientes, 5,45 frente a 5,09, lo cual indica que serán necesarios ajustes.

2.3.2 Análisis modal experimental: frecuencias y modos naturales

Para obtener las frecuencias armónicas de la viga (ω_1 y ω_2) de forma experimental se hace de dos maneras.

La primera consiste en poner el acelerómetro en el centro de la estructura, con la aplicación activada para el registro de las aceleraciones, dar un ligero toque a la viga en el centro de manera que esta empiece a oscilar. El acelerómetro registra las aceleraciones en los tres ejes, pero solo interesan

las producidas en el eje vertical, el eje Z, son las que son objeto de estudio en este TFG. Al analizar esta señal con la aplicación *Sigview* en el ordenador, obtenemos la FFT y de ahí sacamos que la primera frecuencia armónica es $\omega_{1*}=3,67$ Hz. Hay una cierta diferencia con la frecuencia obtenida de manera teórica ($\omega_{1*}=3,79$ Hz) por lo que se va a tener que realizar un ajuste dimensional.

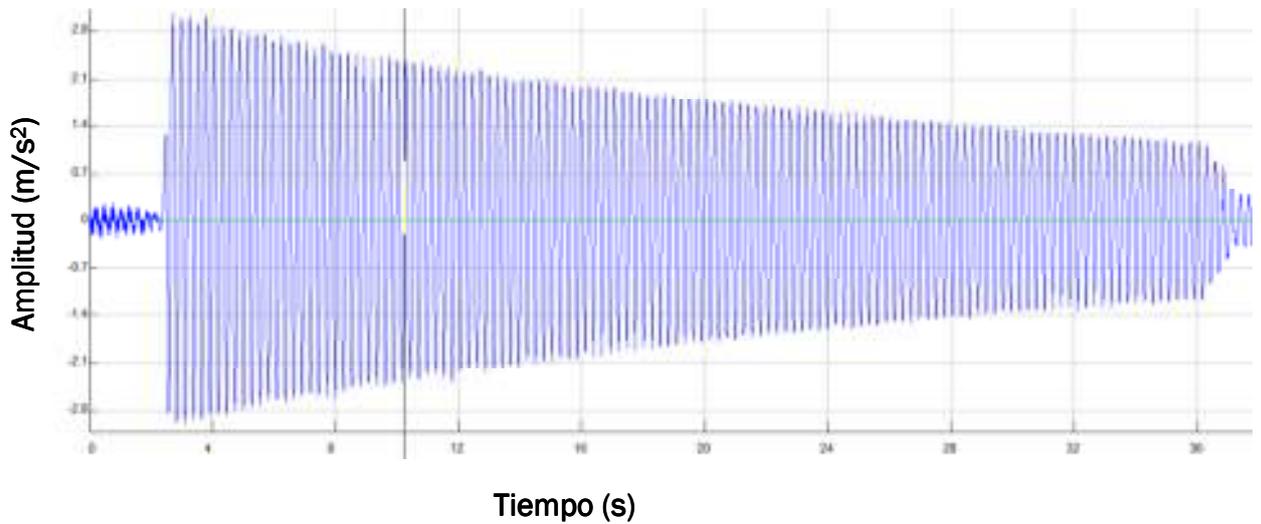


Figura 3. Señal registrada de una excitación sobre la viga simplemente biapoyada para obtener la frecuencia del primer modo

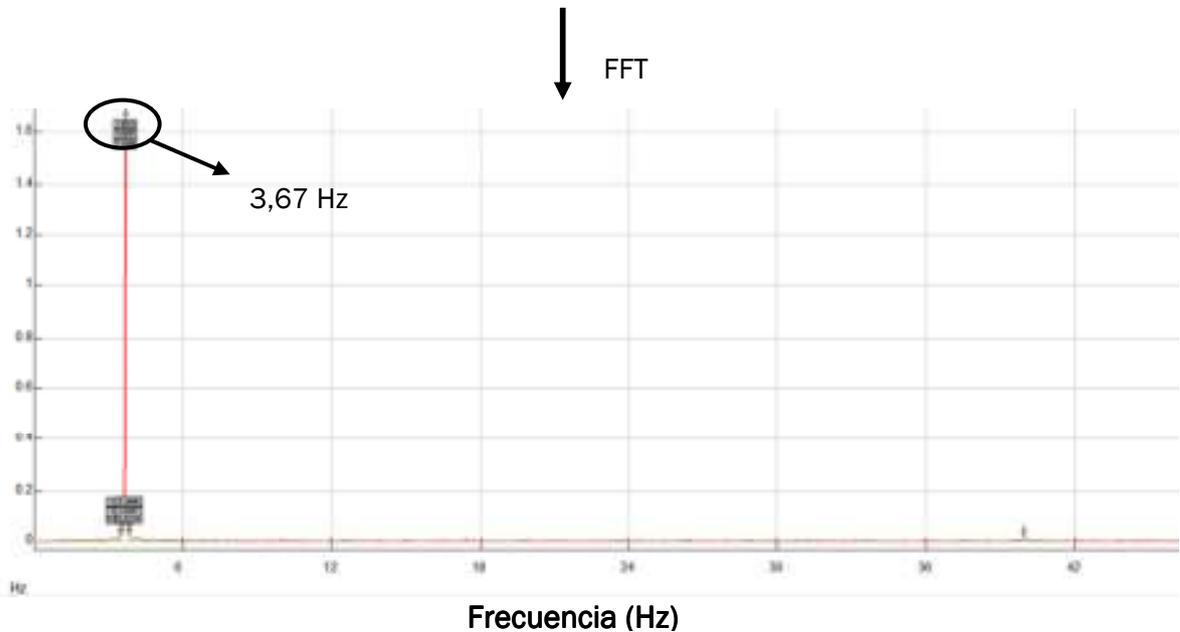


Figura 4. FFT de la señal registrada de una excitación sobre la viga simplemente biapoyada

Es necesario tener en cuenta que en el caso de estudio el robot y el acelerómetro se encuentran en el centro de la estructura, y tienen una masa (0,865 kg) que hay q añadir a la propia de la viga.

Se repite exactamente el mismo procedimiento que antes, y se obtiene la nueva frecuencia del primer modo, $\omega_{1**}=3,35$ Hz. Hay una cierta diferencia con la frecuencia obtenida de manera teórica ($\omega_{1**}=3,47$ Hz) por lo que se va a tener que realizar un ajuste dimensional.

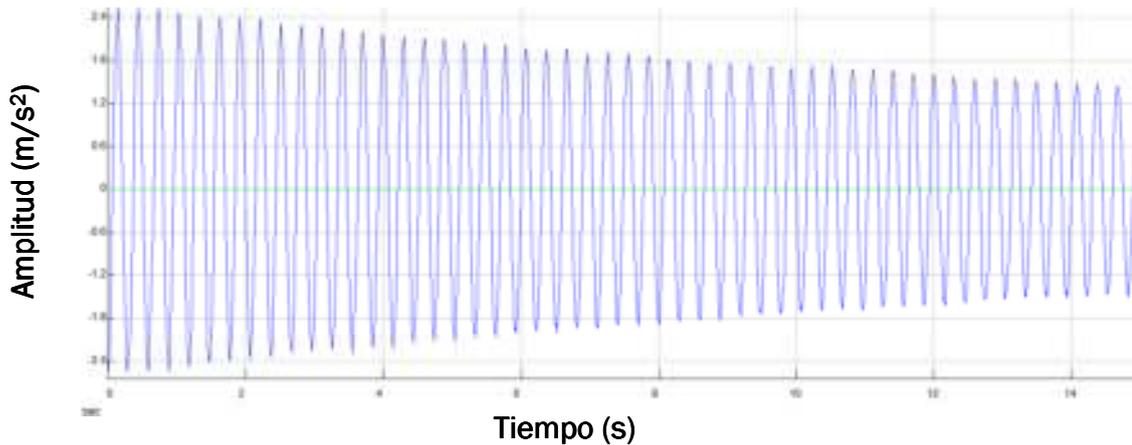


Figura 5. Señal registrada de una excitación sobre la viga simplemente biapoyada con masa puntual (0,865 kg) en la posición central para obtener la frecuencia del primer modo

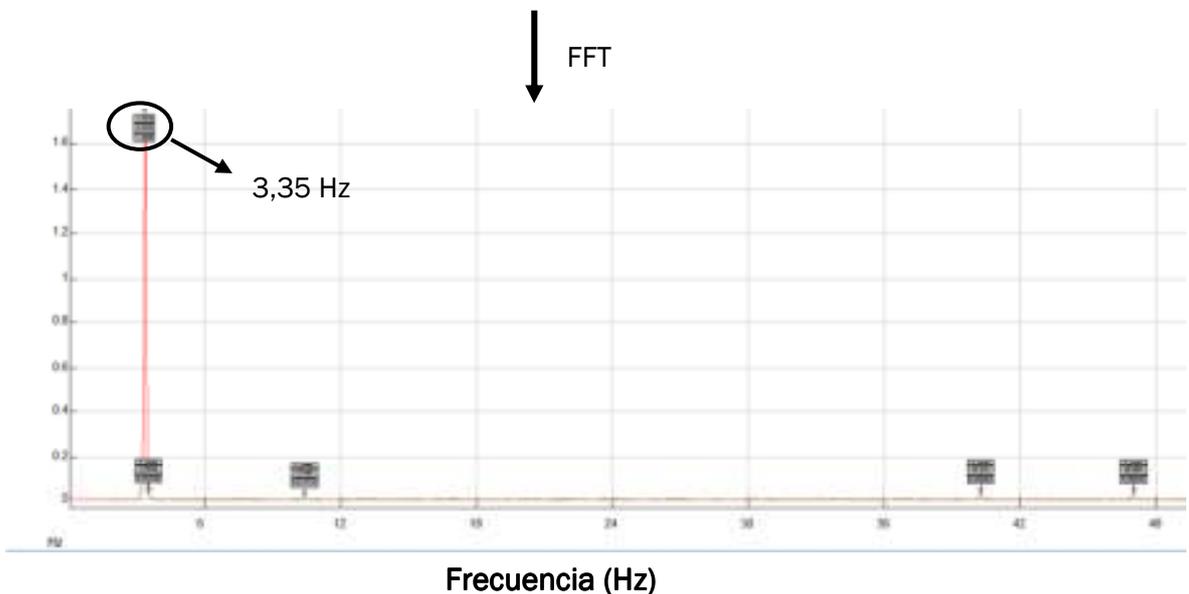


Figura 6. FFT de la señal registrada de una excitación sobre la viga simplemente biapoyada con masa puntual (0,865 kg) en la posición central

Como era previsible, al aumentar de masa la viga, esta disminuye su primera frecuencia armónica. Esto se puede ver en la ecuación 9, al aumentar M_i , se reduce el ω_1 .

Para obtener el segundo armónico (ω_2) se coloca el acelerómetro midiendo la aceleración a un cuarto de uno de los extremos de apoyo de la viga, ya que como el vano del segundo modo se encuentra en el centro de la estructura, si se dispone el acelerómetro en el centro este no detectará el ω_2 , y debido a que este segundo modo tiene forma sinusoidal, a la distancia de un cuarto del extremo es donde se encuentra el valor máximo de la amplitud en ese modo. Para que la distribución de masas sea simétrica se pone otra masa igual a la del acelerómetro (0,155 Kg) a un cuarto del otro extremo de apoyo, de manera que se mantiene la distribución simétrica de masas. Se excita ligeramente la estructura golpeándola a una distancia de un cuarto de longitud del extremo y se registra la señal. Así, al analizar la señal y obtener la FFT se puede obtener el segundo armónico.

El valor del segundo armónico es $\omega_2=14,64$ Hz. Este valor es mayor que el teórico para la viga sin masas ($\omega_2=15,44$ Hz) debido a las dos razones ya indicadas. Por una parte aún no se ha ajustado el modelo y por otra se han dispuesto dos masas adicionales de 155 g cada una. Este valor de frecuencia es muy alto, no interesa porque un peatón nunca va a inducir una frecuencia de ese valor al caminar.

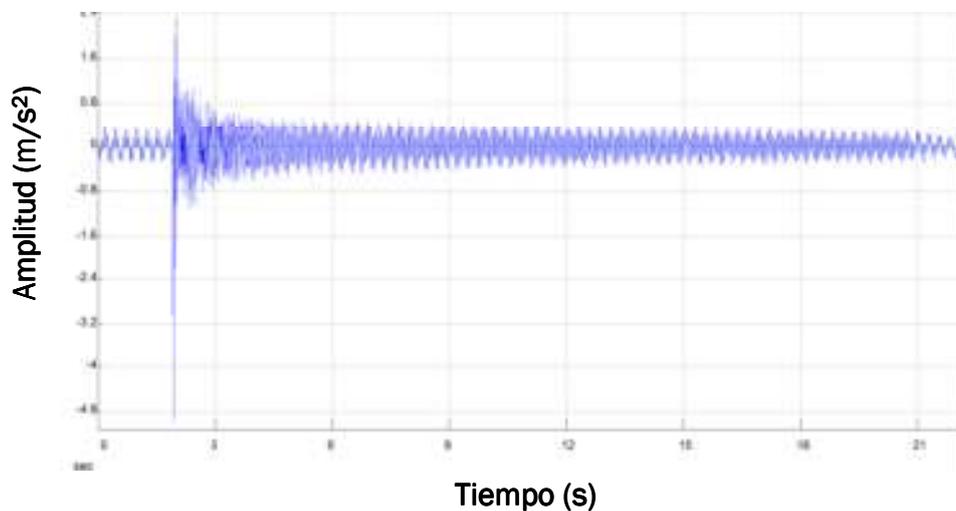


Figura 7. Señal registrada de una excitación a un cuarto del extremo, sobre la viga simplemente biapoyada para obtener la frecuencia del segundo modo



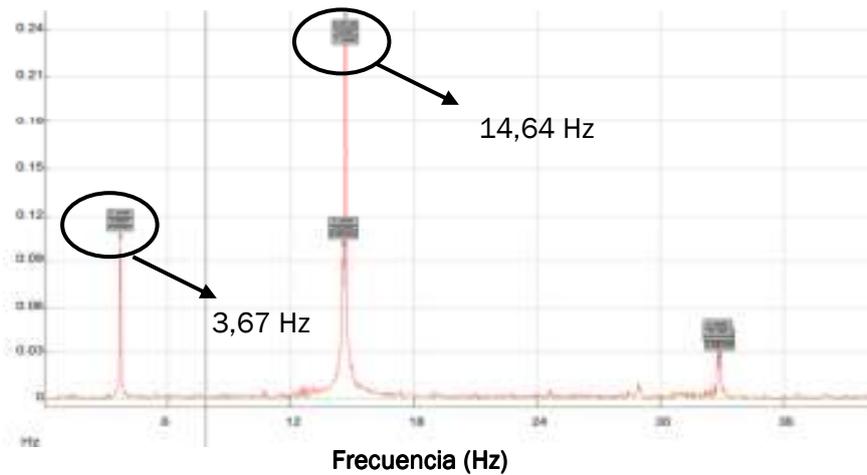


Figura 8. FFT de la señal registrada de una excitación a un cuarto del extremo, sobre la viga simplemente biapoyada para obtener la frecuencia del segundo modo

En la ilustración 33 se muestra como se dispusieron las masas sobre la estructura.



Ilustración 33. Detalle de la toma de datos para el segundo armónico

2.4 Comparativa

Al hacer una comparativa entre los valores obtenidos de modo teórico y de modo experimental que se han obtenido para las flechas y frecuencias de los modos 1 y 2, se puede ver que existe una diferencia entre ellos.

Tabla 7. Comparación entre flecha teórica y experimental

	Teórico	Experimental	Error (%)
Flecha P1+P2 (mm)	17,08	18,10	5,97
Flecha P2 (mm)	9,09	9,50	4,51
Flecha P1 (mm)	7,99	8,40	5,13
Pendiente de la flecha	5,09	5,45	6,58
ω_1(Hz)	3,86	3,69	4,40

$\omega_2(\text{Hz})$	15,43	14,64	5,16
$\omega_{1*}(\text{Hz})$	3,79	3,67	3,26
$\omega_{1**}(\text{Hz})$	3,47	3,35	3,46

ω_{1*} = frecuencia del primer modo con la masa puntual del acelerómetro en el centro de la viga (0,155 Kg)

ω_{1**} = frecuencia del primer modo con la masa puntual del robot en el centro de la viga (0,865 Kg)

Para conseguir que los valores sean iguales fue necesario realizar un ajuste en las dimensiones de la viga, tal y como se explica en el siguiente apartado.

Los valores teórico y experimental de ω_1 y ω_2 de la viga aislada (sin masa puntual en el centro) no se pueden comparar porque nos son situaciones similares. En cálculo teórico se considera la viga aislada sin masas puntuales, pero en el cálculo experimental, es necesario disponer el acelerómetro en el centro de la viga, por lo que su masa (0,155 kg) afecta a la frecuencia del modo 1 y 2 disminuyéndolas. Es por esto hay diferencias.

2.5 Ajuste dimensional

El ajuste consistió en modificar alguna de las dimensiones o características de la viga dentro de las tolerancias admisibles, para disminuir las diferencias entre los resultados teóricos y los medidos experimentalmente. Este proceso se hará para la viga sin masas, confiando que una vez hecho también se van a conseguir mejores resultados para el caso de que se añadan masas puntuales.

En este caso se mantiene constante el valor del módulo de elasticidad ($E=70$ GPa), de manera que los parámetros que se han variado son b , h y e (por el efecto desconocido del lacado aplicado).

Solo se pueden tener tres incógnitas porque únicamente se dispone de dos ecuaciones: ecuación de la masa de la viga (ecuación 7), ecuación de la flecha (ecuación 2), y una forma de obtener ω_{1*} (ecuación 6), que no es ecuación como tal (dependen de la masa y las dimensiones), por ello el otro parámetro se mantiene fijo.

La ecuación por la que se obtiene la masa de la estructura es:

$$m = \rho A L$$

Ecuación 7

m= masa de la viga (kg)

ρ = densidad (2700 kg/m³)

A= área de la sección (m²). Ecuación 8.

L= longitud (m)

$$A = b \cdot h - (b - 2e) \cdot (h - 2e)$$

Ecuación 8

$$\delta = \frac{m_{puntual} * L^3}{48 * E * I_z}$$

Ecuación 2

$$\omega \text{ (Hz)} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{3 E I_z}{L^3 (M_i + 0,4857m_b)} \right]^{1/2}$$

Ecuación 6

El valor de la inercia también va a ser necesario para realizar este ajuste. La inercia depende de las dimensiones del perfil, como se puede observar en la ecuación 4:

$$I_z = \frac{1}{12} b * h^3 - \frac{1}{12} * (b - 2 * e) * (h - 2 * e)^3$$

Ecuación 4

Para realizar el ajuste se utiliza un algoritmo de *Matlab*; lo que hace es iterar las posibles combinaciones de valores de los parámetros que se le pide (b, h y e) para calcular la masa de la viga, la flecha y la ω_1 , hasta hacer que sus valores teóricos tengan un error con los experimentales (que son los valores que le hemos introducido) de 0,2% como máximo, y nos muestra para qué valores de b, h, y e se obtienen los mismos valores teóricos que los experimentales que se le han dado.

Se utiliza un valor obtenido experimentalmente de la flecha. En este caso se optó por el valor de la flecha cuando la se dispone en el centro de la viga la masa P1, aunque se podría haber tomado el valor de la flecha con cualquier otra masa, ya que se utiliza la misma fórmula, ecuación 2.

Se utiliza el valor de ω_{1*} (frecuencia del primer modo con la masa puntual del acelerómetro en el centro de la estructura) porque se necesita el valor de una frecuencia cuando se dispone una masa puntual sobre la viga, ya que es la única forma de hacer que coincidan las frecuencias calculadas tanto teóricamente como experimentalmente. Se podría haber tomado ω_{1**} (frecuencia del primer modo con la masa puntual del robot en el centro de la estructura). El valor de esta frecuencia se calcula con la ecuación 6. Se utiliza el valor de ω_{1*} en vez del ω_1 de la viga aislada (sin masa puntual) porque éste nunca se va a poder obtener de forma experimental, ya que para poder calcularlo en este caso es necesario disponer el acelerómetro en el centro de la estructura, lo cual afecta a la frecuencia del primer modo disminuyéndola.

Los valores introducidos de masa, flecha y ω_{1*} obtenidos experimentalmente y que se introducen en *Matlab* son:

- $m=6,57$ kg
- $\delta=7,99$ mm
- $\omega_{1*}=3,67$ Hz

Los valores de las dimensiones obtenidos con este método de ajuste son:

- $b=0,1067$ m
- $h=0,038676$ m
- $e=0,001421$ m

Los valores obtenidos no están dentro de las tolerancias dadas por el proveedor, pero son los valores que hacen que todo cuadre (con error promedio menor de 0,2%), por lo que serán los que se tomen como correctos a partir de ahora.

Al haberse modificado las dimensiones del perfil también lo ha hecho el momento de inercia en torno al eje Z ya que éste depende de las dimensiones del perfil. El nuevo valor de la inercia calculada con la ecuación 4:

- $I_z=1,16 \times 10^{-7} \text{m}^4$

Una vez se han obtenido estos valores, se calcula de manera teórica con las mismas fórmulas empleadas anteriormente tanto la flecha como la frecuencia

propia de la estructura, y se ve cómo efectivamente está correctamente ajustado, ya que los valores teóricos coinciden con los experimentales. Los valores teóricos de la flecha se muestran en la tabla 8:

Tabla 8. Flecha debido a masa puntual después de ajuste dimensional

	Flecha (mm)
P1 +P2	18,1
P2	9,63
P1	8,47

El valor teórico de la frecuencia del primer modo de la estructura con la masa del robot y el acelerómetro situado en el centro utilizando la ecuación 6: $\omega_{1**} = 3,35$ Hz.

Tabla 9. Comparación de flechas teóricas y experimentales después de ajuste dimensional

	Ajustada	Experimental	Error (%)
Flecha P1+P2 (mm)	18,10	18,10	0,00
Flecha P2 (mm)	9,50	9,50	0,00
Flecha P1 (mm)	8,40	8,40	0,00
Pendiente	5,45	5,45	0,00
ω_{1*} (Hz)	3,67	3,67	0,00
ω_{1**} (Hz)	3,35	3,35	0,00

ω_{1*} = frecuencia del primer modo con la masa puntual del acelerómetro en el centro de la viga (0,155 Kg)

ω_{1**} = frecuencia del primer modo con la masa puntual del robot en el centro de la viga (0,865 Kg)

Como se puede observar en la tabla 9, los errores después de haber realizado el ajuste son nulos, se consigue exactamente el mismo valor de manera teórica que de manera experimental.

2.6 Amortiguamiento de la estructura

Para caracterizar completamente la estructura fue necesario conocer el amortiguamiento de la misma, lo cual se hace de forma experimental.

La absorción y disipación de la energía (y por tanto el amortiguamiento estructural) del sistema son atribuidas a:

- La energía absorbida y disipada por la propia histéresis de la viga. Se ocasiona por la fricción interna molecular del material que tiende a conservar su forma inicial, en ausencia del estímulo que lo ha generado, cuando se deforma la viga.
- El posible rozamiento en los giros respecto al eje en el que se apoya la viga.
- La interacción del sistema con el aire. La energía disipada por el aire es mucho menor que la energía disipada por otros medios y generalmente suele despreciarse.

El método elegido para cuantificar el amortiguamiento ha sido **Ajuste de la envolvente de la caída temporal de la señal**.

Este cálculo se realiza mediante una rutina realizada con el programa *Matlab* de la siguiente forma: partiendo de la respuesta temporal de la señal y de la frecuencia propia, se identifican las crestas de las oscilaciones y se ajusta la función exponencial del tipo que mejor se aproxima a dichas crestas ($A e^{-\xi\omega t}$).

Se parte de la ecuación 9, que es la definición de la aceleración de una señal amortiguada:

$$a = A e^{-\xi\omega t}$$

Ecuación 9

- **a** = aceleración (m/s²)
- **A** = amplitud de la aceleración en ese instante
- **ω** = frecuencia propia del modo del cual queremos saber el amortiguamiento (Hz)
- **t** = tiempo de cada instante (s)
- **ξ** = índice de amortiguamiento

De la cual se conocen todos los datos excepto el ξ , por lo que aplica logaritmo neperiano en la ecuación, lo resuelve y obtiene el amortiguamiento.

$$\ln(a) = \ln(A) - \omega \xi t$$

Ecuación 10

Lo primero que se hace es obtener el amortiguamiento del primer modo, que es el que más interesa en este estudio. A partir de la señal obtenida por el acelerómetro cuando éste se sitúa en el centro de la estructura (véase ilustración 34) y se hace vibrar.



Ilustración 34. Detalle del acelerómetro en el centro de la estructura

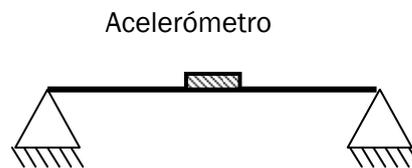


Ilustración 35. Esquema disposición del acelerómetro sobre la viga para registrar el modo 1

Se introduce la señal registrada en un código de *Matlab*.

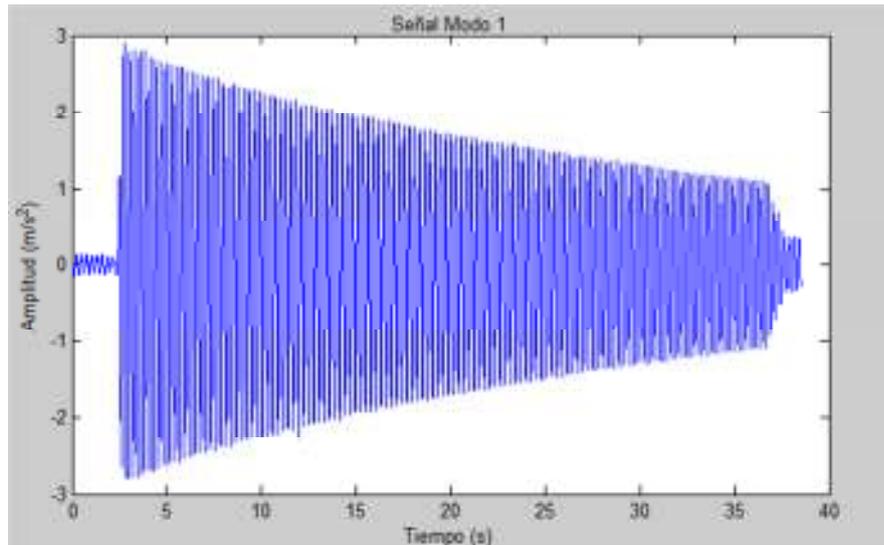


Figura 9. Señal registrada para conocer el amortiguamiento del modo 1

El código de *Matlab* registra las crestas de la señal, que son los puntos de mayor amplitud, a partir de la cresta de mayor valor en adelante. De esta manera elimina la cabeza de la señal, la cual no interesa porque la señal que va a captar es de movimientos residuales de anteriores medidas o por el simple hecho de colocar el acelerómetro.

También registra algún punto que no interesa debido a que al retirar el acelerómetro se generan movimientos que son registrados, por lo que se eliminaron.

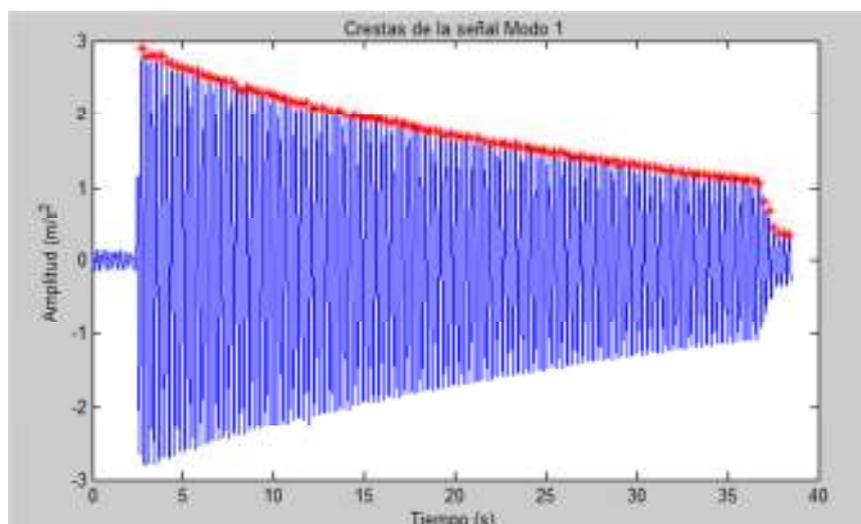


Figura 10. Envoltorio de las crestas de la señal registrada para saber el amortiguamiento del modo 1

Eliminando esas crestas erróneas se obtiene el siguiente ajuste (línea en negro):

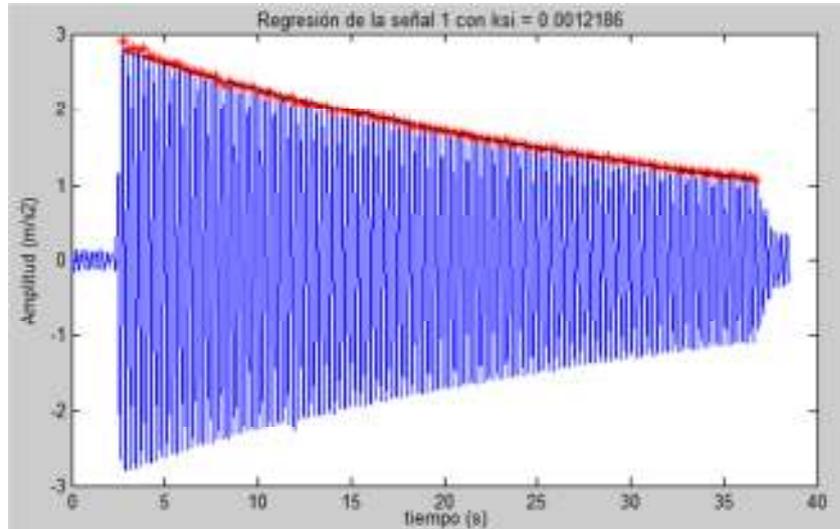


Figura 11. Regresión de la envolvente de las crestas de la señal registrada para saber el amortiguamiento del modo 1

El amortiguamiento para este primer modo, el cual es $\xi=0,12186\%$ para una frecuencia del natural del primer modo $\omega_1=3,67$ Hz.

Para obtener el amortiguamiento del segundo modo se colocó el acelerómetro de la misma manera que se hizo para obtener el valor de ω_2 .

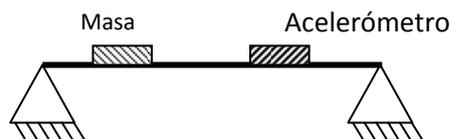


Ilustración 36. Esquema de la colocación del acelerómetro y la masa puntual (0,155kg) para registrar la señal y conocer el amortiguamiento del segundo modo

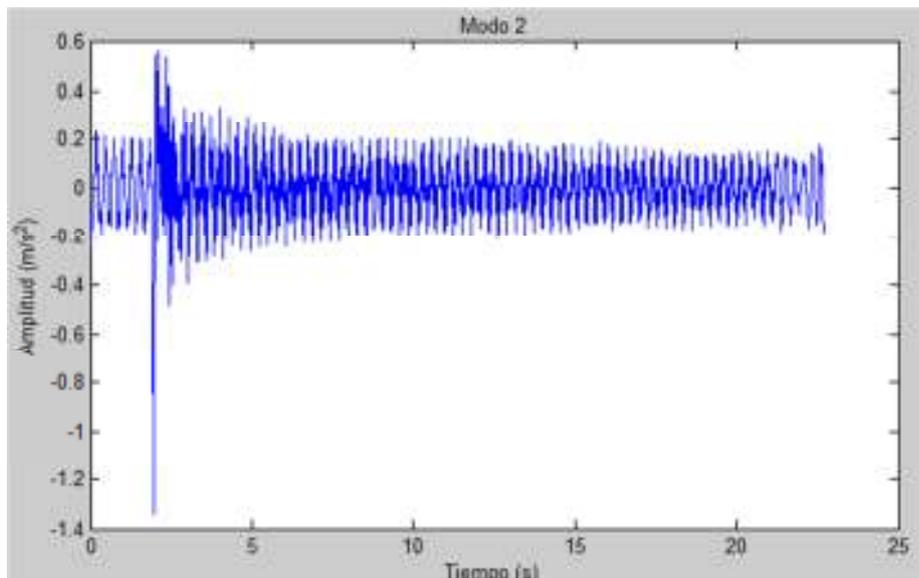


Figura 12. Señal registrada para conocer el amortiguamiento del segundo modo

La figura 12 representa la señal registrada, en la cual, si se obtiene su FFT, (figura 13) se pueden observar las frecuencias de los modos 1 y 2, las cuales son $\omega_1=3,67$ Hz y $\omega_2=14,65$ Hz.

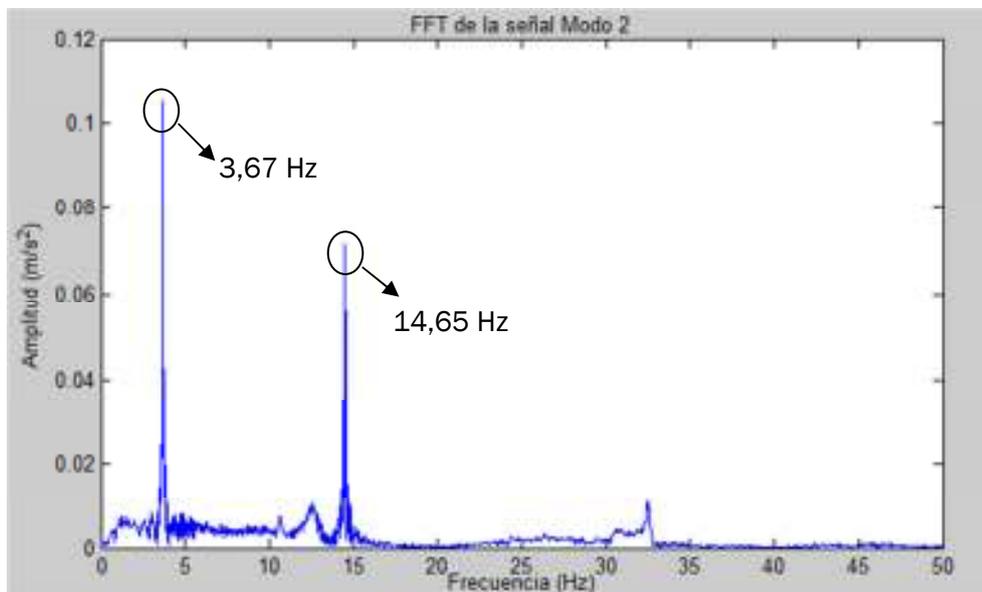


Figura 13. FFT de la señal registrada para conocer el amortiguamiento del modo 2

El código registra las crestas de la señal, y se puede observar en la figura 14, que ambos modos se solapan, por lo que es imposible obtener el amortiguamiento de esta manera.

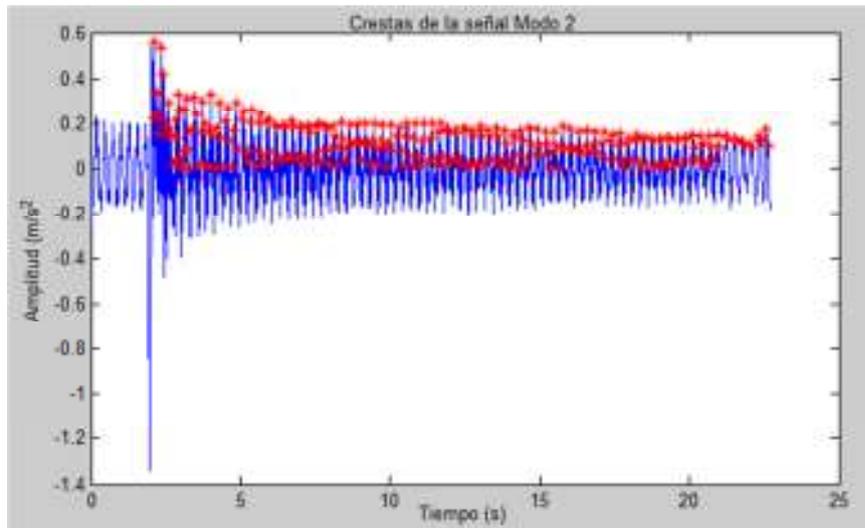


Figura 14. Crestas de la señal registrada para conocer el amortiguamiento del modo 2

Se aplica una regresión a estas crestas y se observa que no se obtienen resultados válidos.

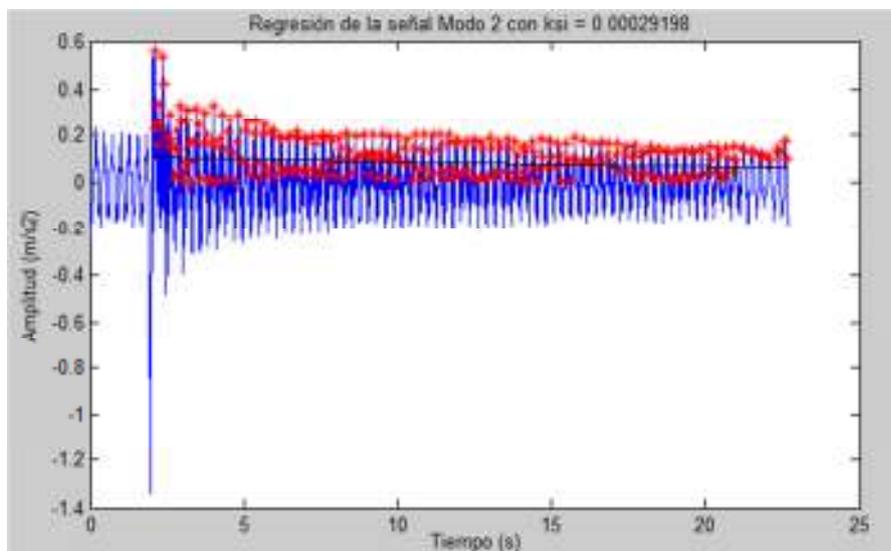


Figura 15. Regresión de las crestas de la señal registrada para conocer el amortiguamiento del modo 2

Para poder solventar este problema, se mantuvo el acelerómetro y la masa puntual en las mismas posiciones, y se bloquea de alguna manera el modo 1, para lo cual en este caso se ha optado por poner un apoyo puntual en el

centro de la estructura, de manera que impide a la viga desplazarse en su posición central, pero esta sí que puede girar. De esta forma se bloquea el modo 1 y solo se registra el modo 2.

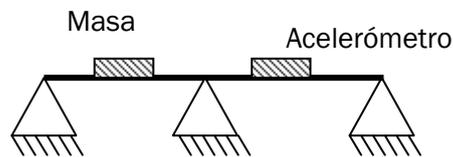
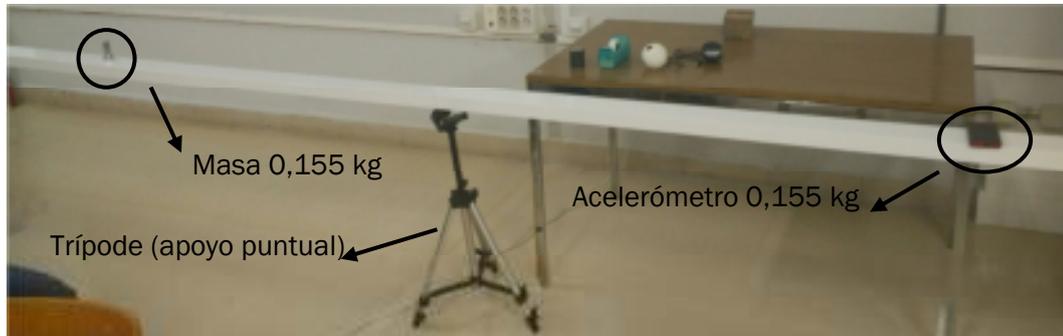


Ilustración 37. Detalle de la disposición de la masa puntual (0,155 kg), del acelerómetro, y del trípode

La señal obtenida por el acelerómetro en este caso, una vez introducida en *Matlab* es la siguiente:

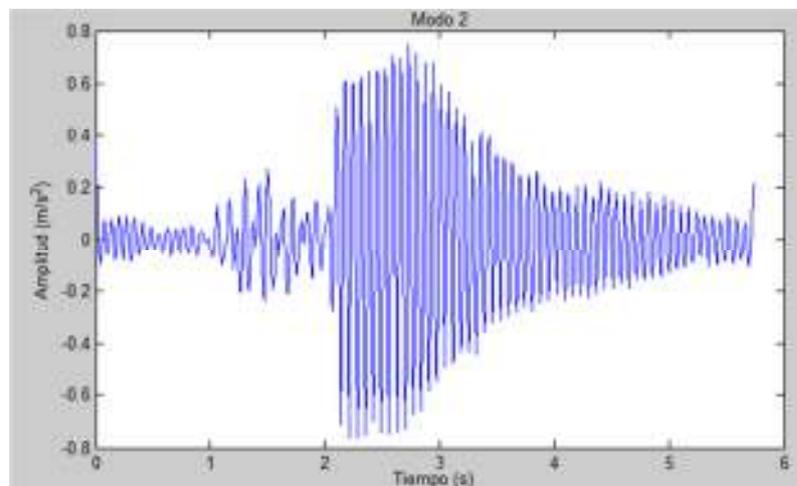


Figura 16. Señal registrada para obtener el amortiguamiento del modo 2

Se detectan las crestas de esta señal de la misma manera que se hizo anteriormente.

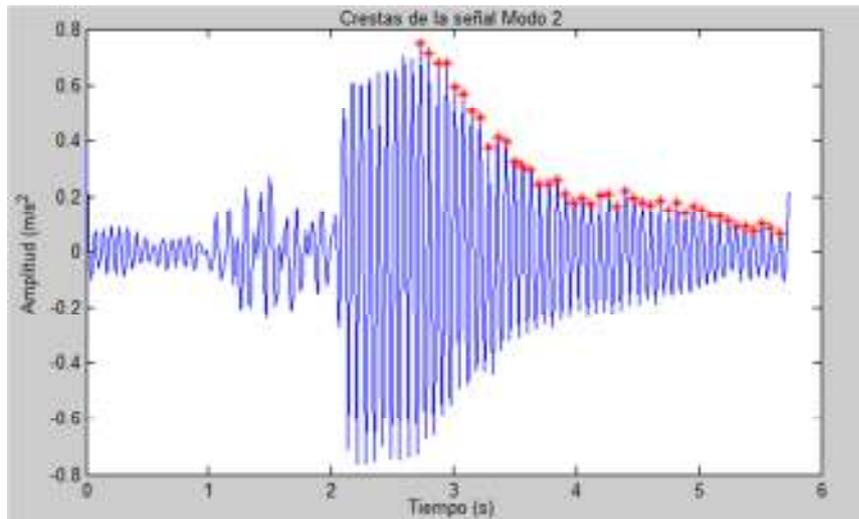


Figura 17. Crestas de la señal obtenida para conocer el amortiguamiento del modo 2

Se aplica regresión a las crestas y se obtiene un valor de $\xi=0,79395\%$

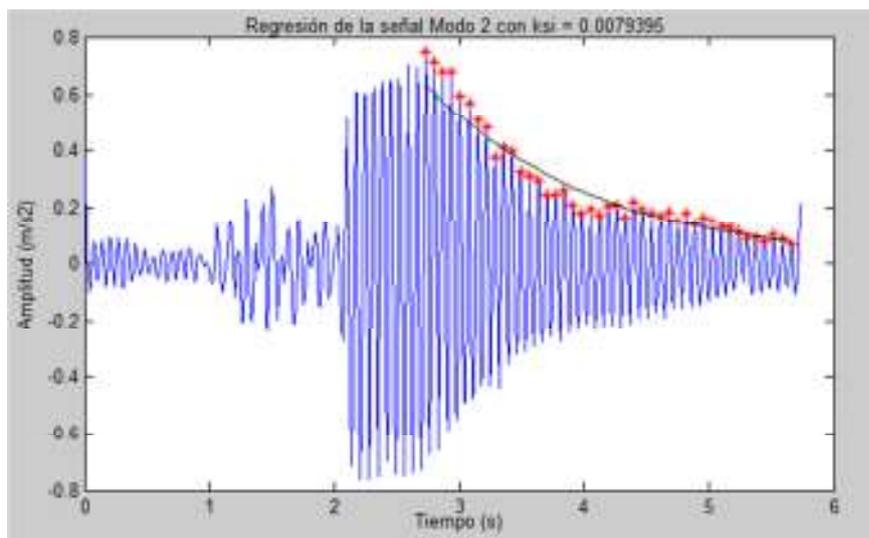


Figura 18. Envolvente de las crestas de la señal registrada para obtener el amortiguamiento del modo 2

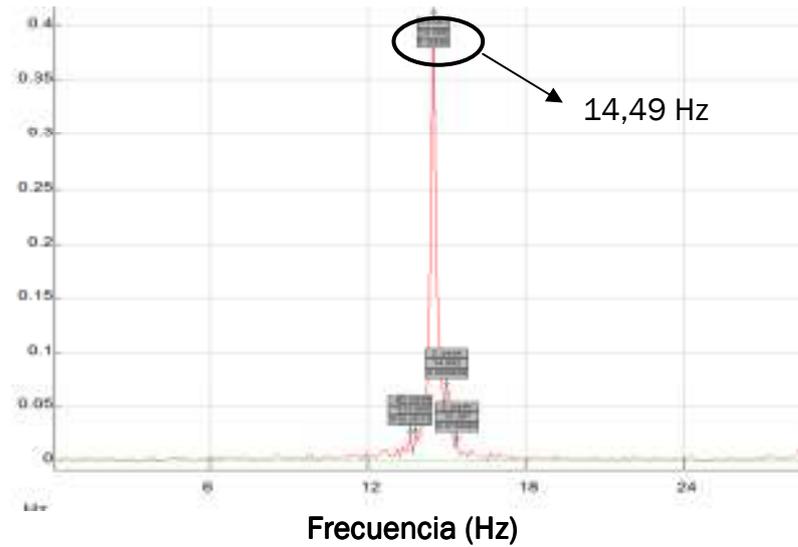


Figura 19. FFT de la señal registrada para conocer el amortiguamiento del modo 2

El amortiguamiento obtenido para el modo 2 es mayor que el obtenido para el modo 1, esto puede ser debido a la fricción en el apoyo central o a la propia estructura del trípode, con patas de goma.

Como se puede observar en la figura 19, la FFT de la señal muestra solamente la frecuencia del segundo modo, $\omega_2=14,65$ Hz, se ha bloqueado el primero. El valor de esta frecuencia del segundo modo es ligeramente menor al obtenido sin colocar el trípode, pero la diferencia no es importante y puede ser debido a la colocación del trípode, no está perfectamente colocado en el centro y modifica la estructura.

3 Caracterización de la viga con masa puntual no central

Cuando se coloca una masa puntual sobre la viga la frecuencia natural de la misma varía en función de la posición de la masa. Y este es nuestro caso de estudio, ya que el robot se desplaza por la viga, así que en cada momento la viga va tener una frecuencia natural diferente.

La frecuencia natural de la estructura biapoyada se puede calcular de manera teórica con las ecuaciones 11, 12 y 13. Para la posición $x=3$ m, utilizando las dimensiones ya ajustadas del apartado 2.5, $\omega_1=3,35$ Hz, la cual es la misma a la calculada con la ecuación 6. Pero para posiciones de la masa puntual no centrales el resultado es solamente aproximado. En $x=1,5$ m, utilizando las ecuaciones 11, 12 y 13 se obtiene un valor de $\omega_1=3,69$ Hz, mientras que mediante Cosmos el resultado es $\omega_1=3,54$ Hz. Para realizar todos estos cálculos se utilizaron las dimensiones ajustadas que se obtuvieron en el apartado 2.5.

Por lo que se eligió la utilización de Cosmos para así obtener resultados exactos.

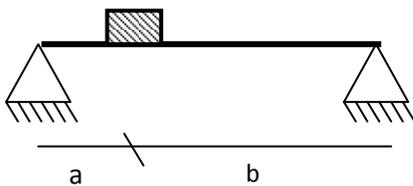


Ilustración 38. Esquema de viga biapoyada con masa puntual en diferentes posiciones

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{3EIz(a+b)}{a^2b^2[M_i + [\alpha + \beta]m_b]} \right]^{1/2}$$

Ecuación 11

$$\alpha = \frac{a}{a+b} \left[\frac{(2b+a)^2}{12b^2} + \frac{a^2}{28b^2} - \frac{a(2b+a)}{10b^2} \right]$$

Ecuación 12

$$\beta = \frac{b}{a+b} \left[\frac{(2a+b)^2}{12a^2} + \frac{b^2}{28a^2} - \frac{b(2a+b)}{10a^2} \right]$$

Ecuación 13

Para calcular las frecuencias del primer modo para cada posición de la masa puntual se utiliza el programa Cosmos, el cual permite calcular la frecuencia del primer y segundo modo rápidamente, además del desplazamiento, deformada etc.

Las frecuencias del segundo modo no son de interés porque son demasiado altas ($\omega_2=14,65$ Hz para la viga aislada, sin masa puntual) como para que un

peatón las induzca en el tránsito sobre la estructura. Aun así se optó por obtenerlas.

El código utilizado para simular en *Cosmos* se muestra en el anexo D.

Cosmos permite el análisis estático y modal de una estructura mediante el método de los elementos finitos. En el programa se escribe un código en el que se le introdujeron las dimensiones de la viga (longitud, densidad, módulo elástico y perfil con las dimensiones anteriormente ajustadas con *Matlab*), cómo está apoyada, en cuantos elementos se divide, la masa puntual que apoya sobre ella (0,710 Kg más 0,155Kg en este caso), la posición de la masa y qué información se quiere obtener, que en este caso es la frecuencia del primer y segundo modo.

De esta manera se obtienen las diferentes frecuencias de los modos 1 y 2 para cada posición del robot en la figura 20, figura 21 y en la tabla 10:

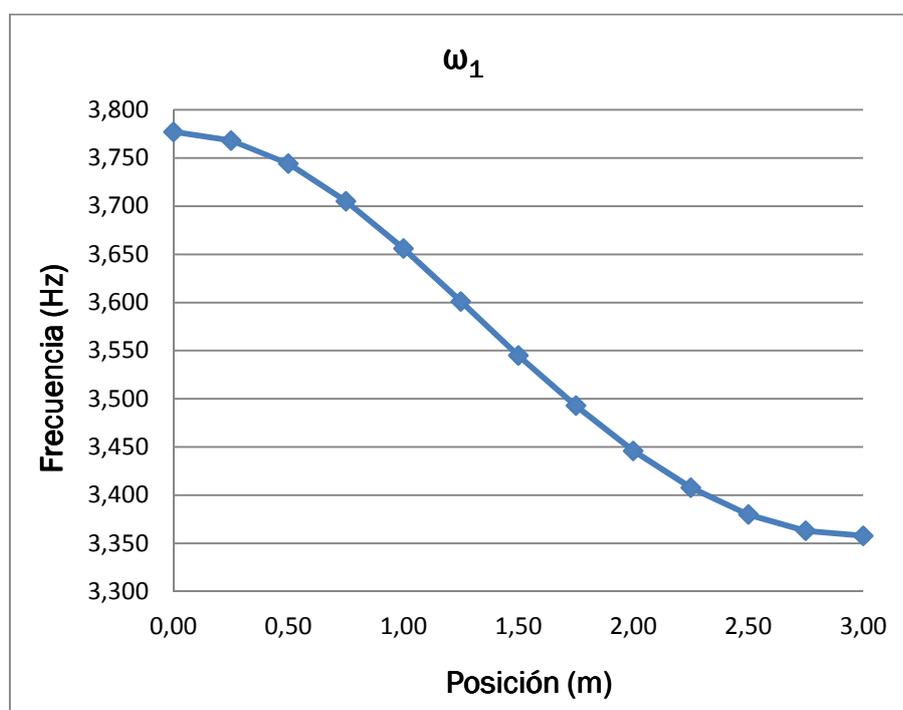


Figura 20. Frecuencia del primer modo de la viga para diferentes posiciones de la masa puntual

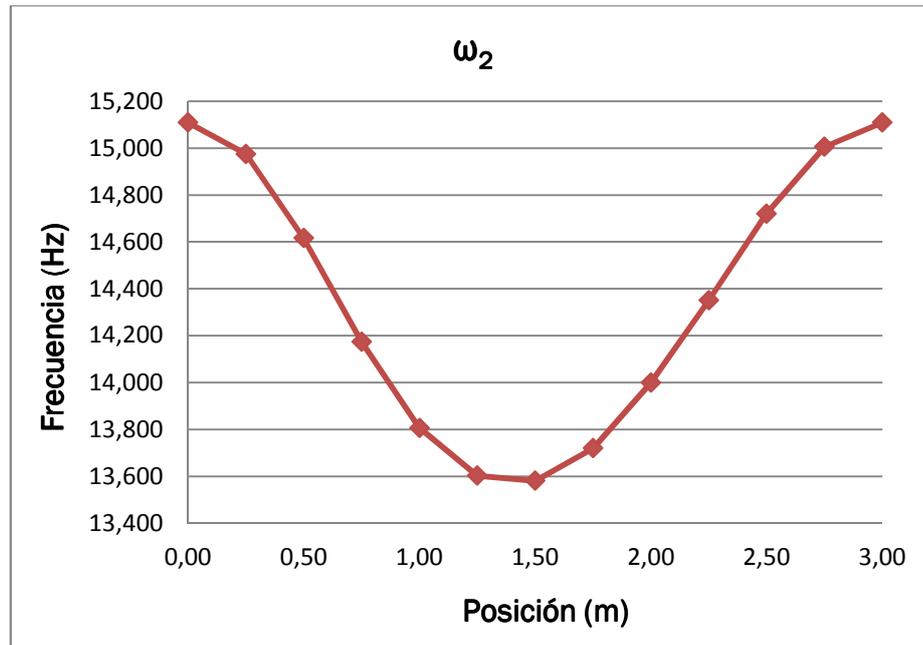


Figura 21. Frecuencia del segundo modo de la viga para diferentes posiciones de la masa puntual

Tabla 10. Frecuencia primer y segundo modo con masa puntual en diferentes posiciones

x (m)	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)
0,00	3,777	15,109
0,25	3,768	14,975
0,50	3,744	14,616
0,75	3,705	14,174
1,00	3,656	13,806
1,25	3,601	13,603
1,50	3,545	13,581
1,75	3,493	13,720
2,00	3,446	13,999
2,25	3,408	14,350
2,50	3,380	14,720
2,75	3,363	15,005
3,00	3,358	15,109

En el caso del primer modo se puede observar en la figura 20 y en la tabla 10 que la frecuencia del primer modo disminuye a medida que la masa se desplaza hacia el centro de la viga, siendo la mayor frecuencia cuando la masa está situada justo encima del apoyo, se comporta como si no existiera tal masa, $\omega_1=3,777$ Hz, hasta que llega al centro que es el punto de menor

frecuencia, es el caso crítico $\omega_1=3,358$ Hz. La frecuencia del primer modo cuando la masa se desplaza desde el centro de la viga ($x=3$ m) hasta el otro extremo ($x=6$ m) sigue una distribución simétrica.

En el caso del segundo modo, su frecuencia disminuye conforme avanza la masa, como se puede observar en la figura 21 y en la tabla 10. Encontrándose el máximo en el inicio del tránsito cuando se encuentra justo encima del apoyo, porque es la situación en la que la estructura se comporta como si no hubiera ninguna masa sobre ella, $\omega_2=15,109$ Hz. Y el mínimo se encuentra cuando $x=1,5$ m, porque la cresta de la deformada del segundo modo se encuentra a $L/4$ del extremo, $\omega_2=13,581$ Hz.

La grafica sólo representa la mitad de las posiciones debido a que la otra mitad es simétrica.

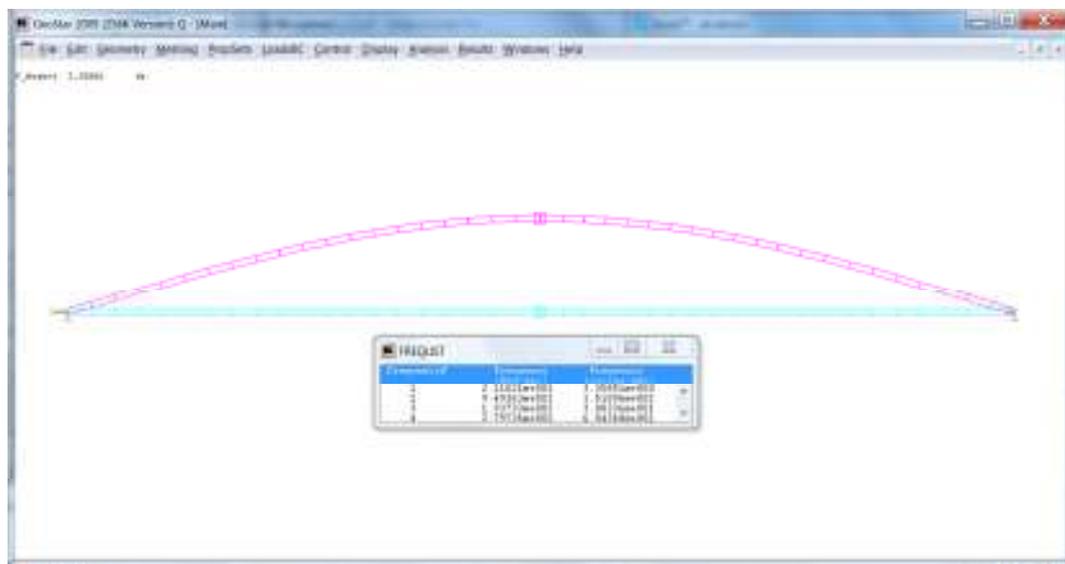


Ilustración 39. Detalle de la simulación de la estructura en Cosmos con la masa puntual de 0,865 kg en el centro

En la ilustración 39 se muestra el interfaz de Cosmos, éste nos proporciona las frecuencias de los modos 1, 2, 3 y 4 y la deformada del primer modo para la situación en que la masa de 0,865 kg está dispuesta en el centro de la estructura.

4 Caracterización del robot

Para poder llevar a la práctica este estudio fue necesario caracterizar también el robot, conocer cuáles eran sus limitaciones. De esta manera se conoce qué velocidad de avance puede alcanzar y el rango de frecuencias que es capaz de generar con la barra excéntrica que tiene.

4.1 Velocidad de avance

Con el fin de medir la velocidad de avance que es capaz de alcanzar lo que se hizo fue marcar una distancia de un metro en la viga y probar diferentes potencias de los motores de las ruedas de avance, la misma potencia en cada motor.

La potencia, tanto de los motores de avance como del motor de la excéntrica, se varía a través del software de *Legó* y tiene un rango de 0 a 100.

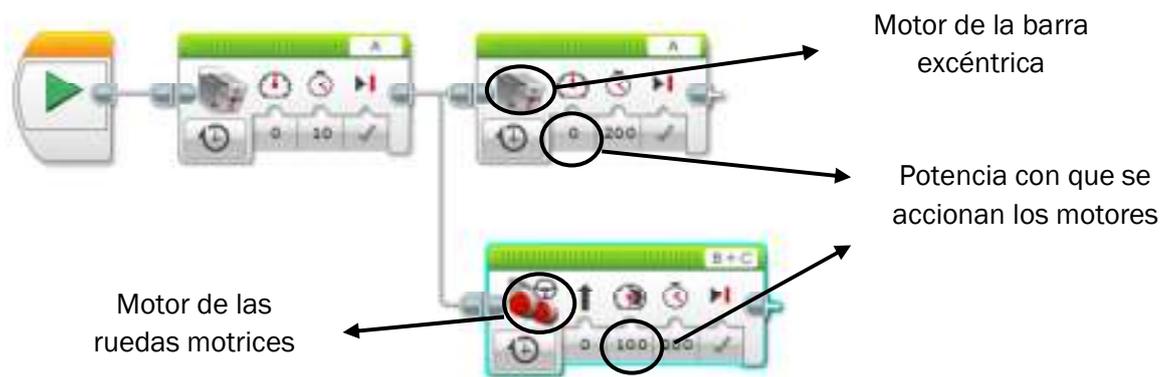


Ilustración 40. Interfaz del software de Legó

Se cronometró el tiempo que tarda en recorrer la distancia de un metro y con la ecuación 14 se calcula cuál es su velocidad.

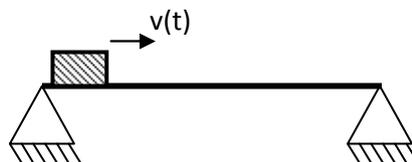


Ilustración 41. Detalle de avance del robot por la estructura

En el caso de este estudio el robot va a mantener siempre una velocidad constante.

$$v \left[\frac{m}{s} \right] = \frac{e}{t}$$

Ecuación 14

e: espacio recorrido en metros

t: tiempo que tarda en recorrer ese espacio

Tabla 11. Rango velocidades de avance del robot

Distancia (m)	Potencia	Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
1,00	10%	19,82	0,05
1,00	20%	9,91	0,10
1,00	30%	6,65	0,15
1,00	40%	5,00	0,20
1,00	50%	4,21	0,24
1,00	60%	3,64	0,27
1,00	70%	3,26	0,31
1,00	80%	2,96	0,34
1,00	90%	2,79	0,36
1,00	100%	2,63	0,38

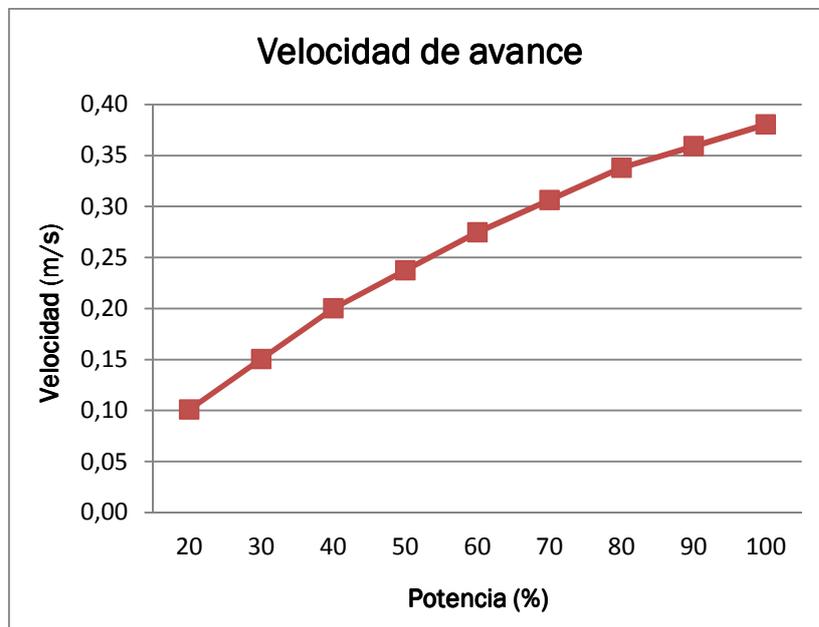


Figura 22. Rango de velocidades de avance del robot

En la figura 22 se observa como la velocidad lineal que puede alcanzar el robot no sigue una distribución lineal, si no que se satura conforme se aumenta la potencia. Esto puede ser debido a las limitaciones mecánicas de los motores *Legó*.

4.2 Frecuencia generada por el robot

El siguiente paso consiste en caracterizar la frecuencia que el robot es capaz de generar con la barra excéntrica.

La medida de la frecuencia inducida por el motor se puede calcular de dos maneras.

4.2.1 Modo directo

El cálculo de la frecuencia inducida de este modo es muy sencillo, consiste en aplicar una sencilla formula que relaciona el número de vueltas que da la barra con el tiempo total que tarda en dar esas vueltas. Lo que se halla es el inverso del periodo, la frecuencia.

$$f \text{ (Hz)} = \frac{n}{t}$$

Ecuación 15

n: número de vueltas que da la barra

t: tiempo total que invierte en dar esas vueltas

En este estudio se ha tomado como número de vueltas 85, que es un número lo suficientemente alto como para disminuir los errores debido a la toma manual del tiempo. Además de que con este número de vueltas se asegura una señal lo suficientemente larga para analizar posteriormente mediante el modo indirecto.

4.2.2 Modo indirecto

La obtención de la frecuencia por este método consiste en registrar con el acelerómetro las vibraciones producidas por el motor que mueve la barra excéntrica.

Para poder llevar a cabo esta medida lo que se hace fue colocar el robot sobre una base construida con el propio *Legó* que le amortigüe, para que la rigidez del conjunto no interfiera en la señal que se quiere medir, la cual tiene que ser solamente la oscilación producida por la barra excéntrica con el fin de que el ruido de los propios engranajes del motor no interfieran en el registro de la señal.

El problema es que, aun así, el sistema sigue siendo demasiado rígido y el registro de la señal es incorrecto, el acelerómetro capta mucho ruido en la señal, por lo que no se pudo analizar.

Con el fin de solucionar este problema se separó del robot el motor que mueve la barra excéntrica. Se colocó sobre dos planchas de espuma para amortiguar al máximo todo ese ruido, y se construyó una base que sujetó al motor y sobre la que se colocó una masa para mantener al motor fijo sin que se moviera de su posición, como se muestra en la ilustración 42.

Se colocó el acelerómetro cerca del motor y se registró la señal para distintas potencias del motor, manteniendo siempre la misma barra excéntrica, la cual eligió por producir una amplitud suficiente para excitar la viga, pero no demasiado grande como para dañar la viga, o con demasiado masa como para que el motor no pudiese moverla a velocidad constante.



Ilustración 42. Detalle de toma de datos para conocer las frecuencias que puede inducir el motor de la excéntrica

De esta manera el acelerómetro no capta tanto ruido proveniente del motor, se ha amortiguado con la espuma.

Una vez se tienen todas las señales medidas, se analizan con *Sigview*, el cual además de analizar la señal permite tomar el tramo de señal que interesa, para sí eliminar la cabeza y la cola de la señal, que no interesa porque son datos de cuando el motor todavía no está girando.

Obteniendo sus FFT, observamos una serie de picos que se repiten a intervalos de frecuencia iguales, esa es la frecuencia inducida por la barra excéntrica al girar, la cual depende de la velocidad a la que gire.

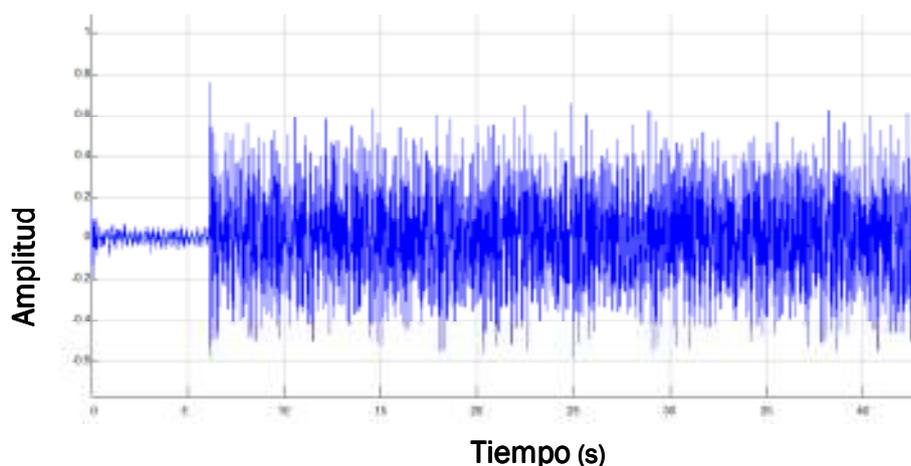


Ilustración 43. Ejemplo de una señal registrada

En la ilustración 43 se puede observar la señal captada por el acelerómetro, en ella se muestra la amplitud de aceleración (m/s^2) para cada tiempo (s), analizada con *Sigview* para una potencia del 40% del motor. Se cortan la cabeza y la cola ya que se observa que tiene una amplitud muy baja, porque es cuando el motor no está girando.

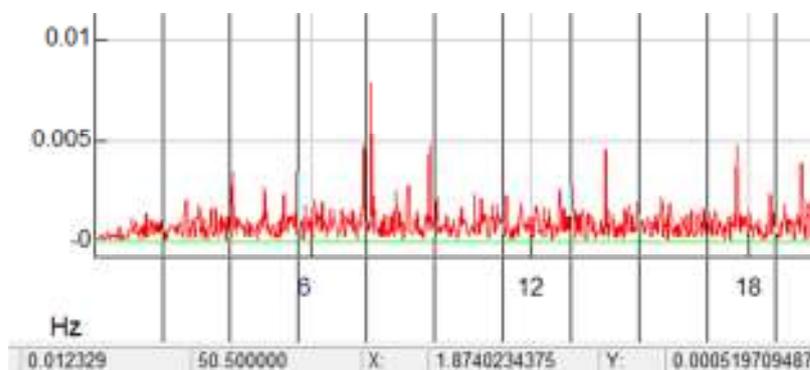


Ilustración 44. Ejemplo de uso de la herramienta "Harmonic ruler"

Al obtener la FFT de esta frecuencia se ve en la ilustración 44 cómo hay picos de amplitud a intervalos iguales de frecuencia. Esto se puede ver utilizando una herramienta llamada "Harmonic Ruler", de manera que cada intervalo en este caso está separado 1,874023 Hz, son los diferentes modos de la frecuencia que induce el motor a esa potencia. Esa es la frecuencia inducida por el motor a esa potencia. De este modo se obtuvieron las frecuencias generadas por cada una de las potencias del motor, las cuales se muestran en la tabla 12.

Tabla 12. Rango frecuencias generadas por la excéntrica del robot

Potencia	Hz (directa)	Hz (indirecta)	Error (%)
10%	0,465	0,524	12,618
20%	0,907	0,974	7,329
30%	1,349	1,393	3,254
40%	1,809	1,862	2,936
50%	2,237	2,305	3,058
60%	2,685	2,737	1,948
70%	3,148	3,156	0,257
80%	3,447	3,392	1,596
90%	3,542	3,645	2,908
100%	3,593	3,698	2,925

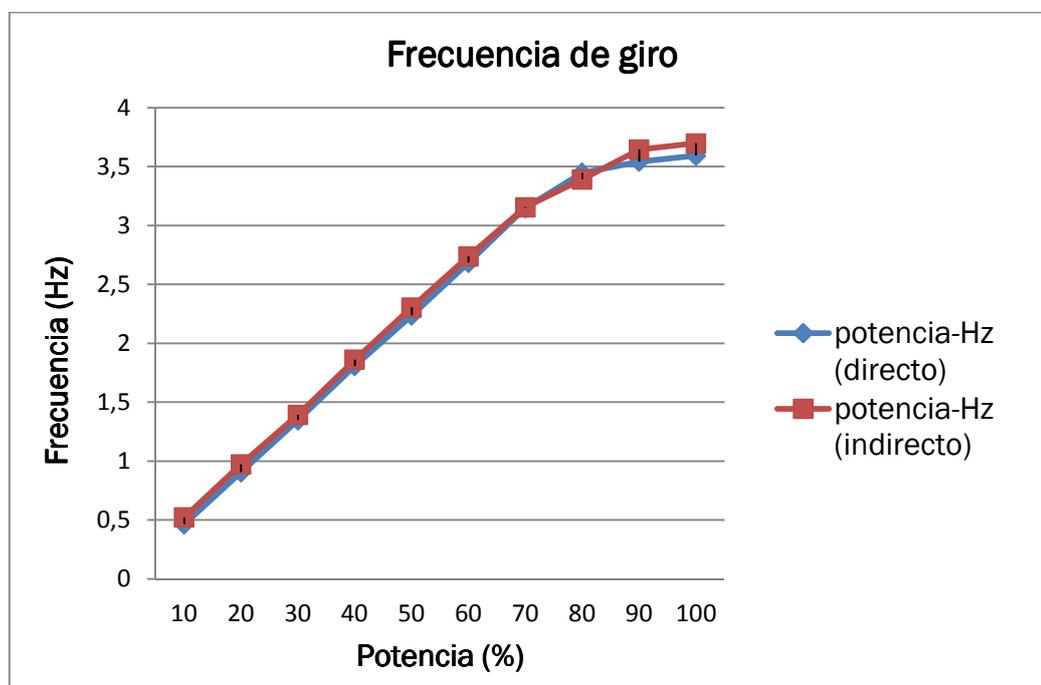


Figura 23. Rango de frecuencias generadas por la excéntrica

La frecuencia calculada tanto con el cronómetro como medida con el acelerómetro es prácticamente similar. El error es pequeño en la mayoría de los casos, como se puede observar en la tabla 12.

Como se muestra en la Figura 23, cuando la potencia pasa del 80% la frecuencia varía muy poco, ya no sigue la distribución lineal que seguía anteriormente. La frecuencia se satura y aunque varíe mucho la potencia del motor, la frecuencia inducida varía poco. Esto puede ser debido a las limitaciones mecánicas del motor.

Viendo los resultados se aprecia que la frecuencia máxima que se va a poder inducir con este motor va a ser de 3,70 Hz según la medida directa obtenida al analizar la señal con *Sigview*, la cual es suficiente para excitar nuestra estructura cuando el robot se encuentra en el centro ($\omega_1=3,35$ Hz). Sabiendo esto se programa el motor con una potencia entre el 70% y 80%, la cual luego, de forma experimental, se determinará de forma más exacta.

Para saber de manera más concreta la frecuencia inducida entre las potencias del 70% y el 80%, se hace las mismas pruebas experimentales que anteriormente para las potencias de 71%, 73%, 75%, 77%, 79%, y se obtienen los siguientes resultados mostrados en la tabla 13.

Tabla 13. Rango frecuencias generadas por la excéntrica del robot

Potencia	Hz (directa)	Hz (indirecta)	Error (%)
71%	3,134	3,179	1,436
73%	3,196	3,228	1,006
75%	3,224	3,263	1,220
77%	3,290	3,350	1,834
79%	3,322	3,377	1,673

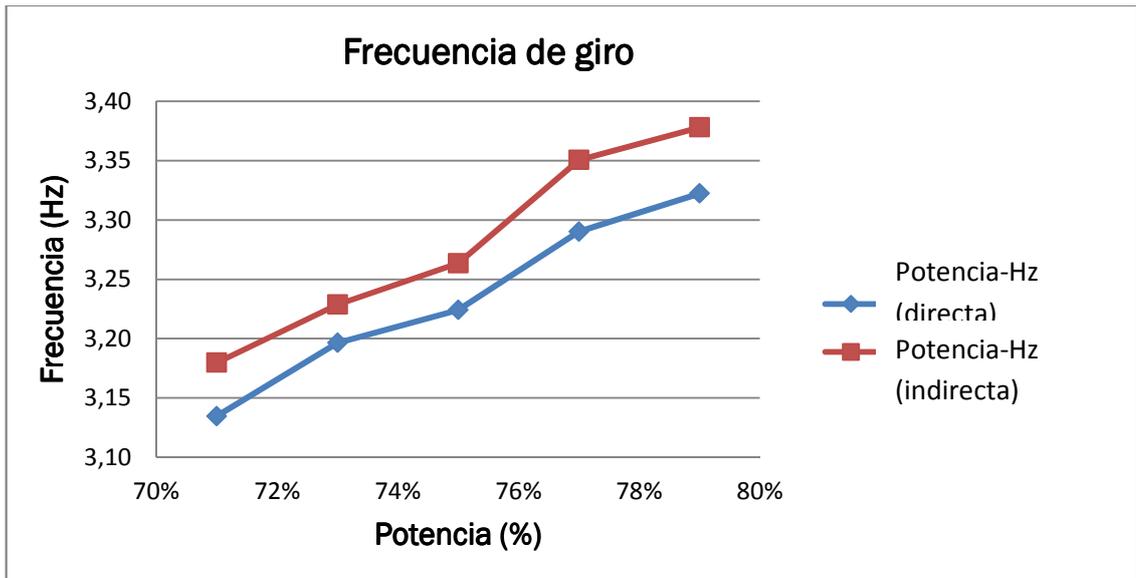


Figura 24. Comparación de potencias generadas por la excéntrica calculadas de modo directo y de modo indirecto

Como se puede ver en la figura 24, las frecuencias obtenidas de modo directo e indirectos son similares. Ahora que se tienen estos datos, se puede saber de una manera más exacta la frecuencia con la que se va a excitar la viga al hacer transitar el robot con la barra excéntrica.

5 Caracterización de la carga

La caracterización de la carga que se ejerce sobre la estructura se podría realizar de forma sencilla si fuera una masa puntual a una distancia x , y la varilla que sostiene la masa se pudiera considerar como un elemento infinitamente rígido y de masa despreciable frente a la masa puntual. Como se esquematiza en la ilustración 45.

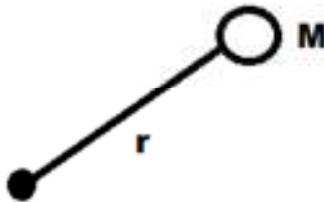


Ilustración 45. Varilla ideal infinitamente rígida con masa puntual

Si se pudiera hacer esta simplificación, la fuerza se calcularía con la ecuación 16:

Ecuación 16

Pero en este caso la barra excéntrica tiene masa distribuida, y la masa del extremo no es significativamente mayor que la varilla que la une al eje rotor, por lo que esta aproximación no puede realizarse.

Como consecuencia, se utilizó un código de *Matlab* que resuelve el problema teórico de una carga armónica desplazándose a una determinada velocidad por una viga biapoyada.

En este caso se parte del caso más sencillo para caracterizar la carga que se le induce, se parte del caso en que el robot se encuentra en la posición central de la estructura, sin velocidad de avance. Como se puede observar en la ilustración 46.

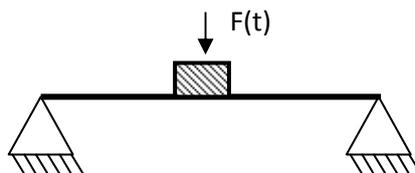


Ilustración 46. Esquema de un objeto induciendo una fuerza sobre la estructura

Se busca la situación en la que la estructura entra en resonancia para así obtener una señal con amplitud estacionaria la cual se pueda comparar con la amplitud de la señal simulada con *Matlab*. Se busca esta situación porque es la más sencilla para comparar las señales.

La potencia del motor de giro de la barra excéntrica se varió hasta que se consiguió dar con la potencia de giro con la que, debido a la interacción de la excéntrica girando y la estructura oscilando, la estructura entró en resonancia (Potencia motor excéntrica=75%) (La interacción robot-estructura se explicará más detalladamente en el apartado 7). De esta manera la señal registrada alcanza una amplitud estacionaria, la cual es la que se mide y se compara con la obtenida con la simulación de *Matlab*.

En el código de *Matlab* se introdujo todos los datos de nuestra viga, medidas del perfil ya ajustadas, longitud total, masa de la viga, masa puntual del robot situado en el centro de la estructura, amortiguamiento del primer modo, frecuencia armónica, número de elementos de la malla y el tiempo que se quiere que dure la simulación.

A continuación se muestra un extracto del código:

```
10 % PARTE 1: Introducción de los datos
11 - L = 6; % Longitud de la viga (m)
12 - b = 0.1067; % Ancho del perfil tubular rectangular (m)
13 - h = 0.038676; % Canto del perfil tubular rectangular (m)
14 - e = 0.001421; % Espesor de pared del perfil (m)
15
16 - A = b*h - (b-2*e)*(h-2*e); % Área (m2)
17 - I = (b*h^3 - (b-2*e)*(h-2*e)^3)/12; % Momento de inercia de la sección (m4)
18
19 - E = 70e9; % Módulo de Young (Pa)
20 - rho = 2700; % Densidad (kg/m3)
21
22 - ke1 = 0.0012186; % Amortiguamiento modal
23
```

Ilustración 47. Extracto del código

```

34 % Datos acerca de la(s) fuerza(s)
35 % ¿Es masa no estructural? Si sí, no es necesario incluir P.
36 - m = 0.865;
37 % Carga como fuerza
38 %P = @(t) -9.80665*1.5; % N
39 - P = @(t) 0.07077*sin(2*pi*3.35*t);
40 % Velocidad
41 - cf = 0; % m/s
42 % Posición inicial
43 - x0 = 3; % metros relativos al extremo izquierdo de la viga
44 % Instante de inicio
45 - tf0 = 0; % s
46
47 - CARGA = [struct('m',m,'f',P,'x0',x0,'c',cf,'t0',tf0)];
48
49 % Número de elementos para mallar
50 - Nelem = 4;
51 % Tiempo de simulación
52 - t0 = 0;
53 - tf = 35;

```

Ilustración 48. Extracto del código

Para conocer la fuerza que se aplica a la viga se procedió a ir variando la amplitud F_0 de la fuerza alternante que utiliza *Matlab* hasta que la respuesta simulada se parezca a la experimental:

Ecuación 17

- $F(t)$ = carga aplicada a la estructura en cada instante (N)
- F_0 = carga aplicada por la rueda excéntrica (N). Es el dato que se está buscando.
- ω = frecuencia de giro de la barra excéntrica (rad/s)
- t = tiempo

Utilizando ese código *Matlab* calcula la aceleración del punto central de la estructura en el tiempo. Se varía el F_0 hasta que la amplitud de la aceleración de la señal estacionaria simulada en *Matlab* coincide con la de la señal medida cuando se sitúa el robot en el centro de la estructura y gira la excéntrica con una potencia del 75% de manera que la estructura entra en resonancia. De esta manera se obtiene de manera aproximada el valor de F_0 .

- Señal real medida

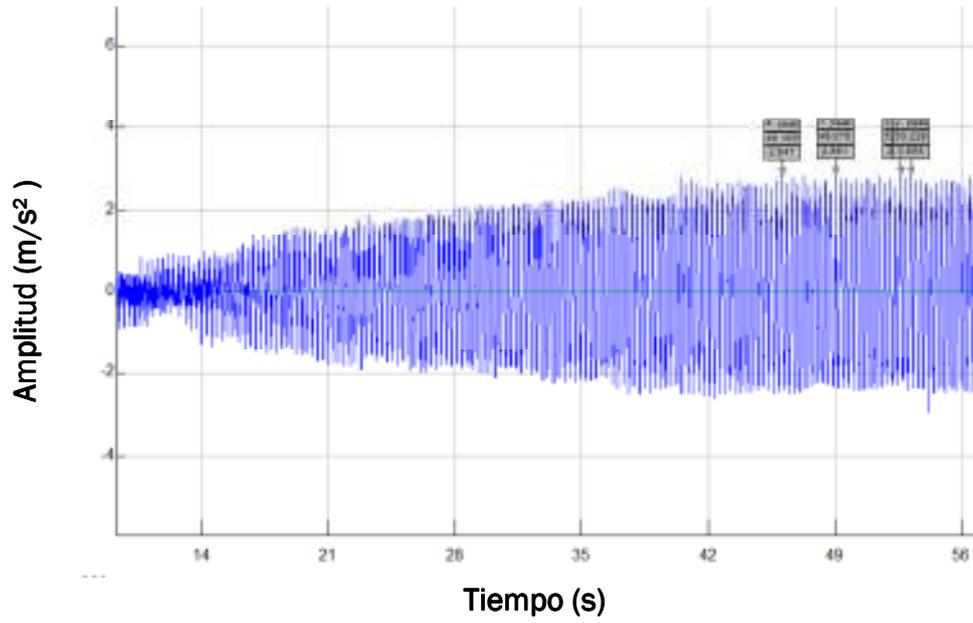


Figura 25. Señal registrada cuando la potencia del motor de la excéntrica es el 75% y la estructura entra en resonancia

↓ FFT

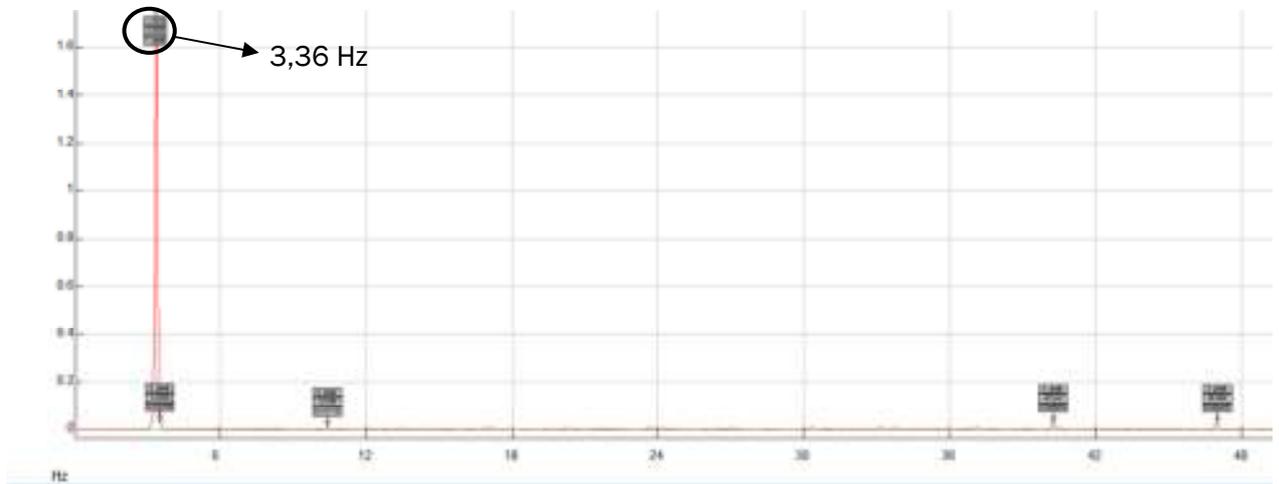


Figura 26. FFT de la señal real medida con un $\omega_1=3,36$ Hz

- Señal simulada con Matlab para $F_0=0,07077$ N

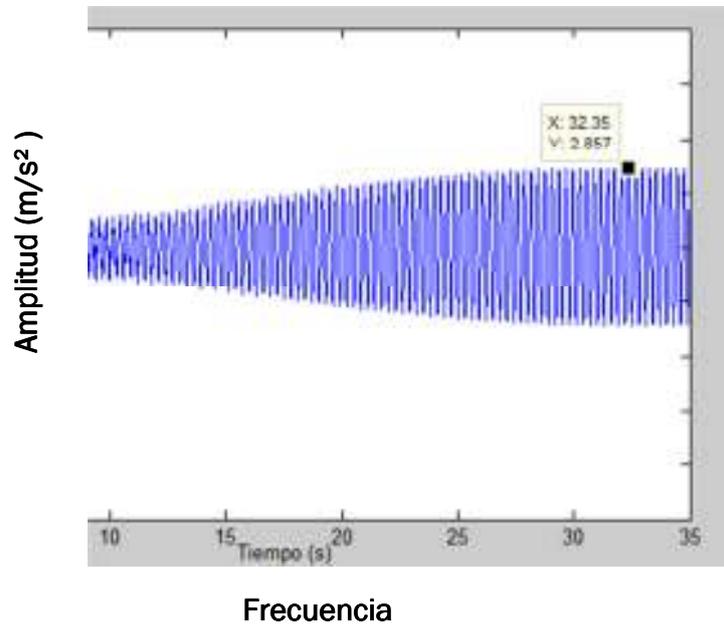


Figura 27. Señal simulada por Matlab cuando se excita la estructura con una F_0 de 0,07077 N a una frecuencia de 3,35 Hz y la estructura entra en resonancia

Por lo que se puede decir que la carga con que se excita la estructura es:
 $F_0=0,07077$ N.

Conocida la amplitud y la frecuencia, de la ecuación 17 se puede despejar $M \cdot r$ (su valor no cambia), y por tanto se conoce la fuerza para cada frecuencia mediante la expresión: $F=0,07077 \cdot \omega^2$

6 Interacción de la estructura con el robot

El siguiente paso consiste en llevar a cabo ensayos con el robot sobre la estructura combinando la velocidad de avance y el giro de la excéntrica y ver cómo interactúan.

Este ensayo se divide en tres partes.

6.1 Robot estático sobre la estructura

El primer ensayo consiste en mantener el robot quieto en el centro de la estructura, activar el motor de la barra excéntrica y ver si la estructura se excita.

Se prueban varias potencias y se ve con cuál de ellas se produce la resonancia. Se mide tres veces para cada potencia y se obtiene el valor medio de las tres mediciones.

Para poder saber con qué potencia se produce una amplificación de la excitación, es necesario establecer algún indicador de la señal que se mide. En este caso se elige el RMS (véase Anexo B), se mide el RMS de cada señal.



Ilustración 49. Robot quieto en el centro de la estructura con la excéntrica funcionando

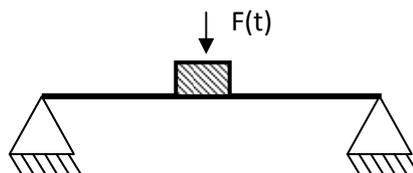


Ilustración 50. Esquema de un objeto induciendo una fuerza sobre la estructura

Se hacen tres registros para cada potencia.

Debido a que anteriormente se ha caracterizado la viga y el robot, se sabe que la estructura con una masa de 0,865 Kg en el centro tiene una frecuencia natural de 3,35 Hz, y también se sabe que el robot es capaz de proporcionar dicha frecuencia, por lo que se puede estimar que la frecuencia de excitación va a estar entre el 70% y el 80%, pero para sacar el valor exacto se prueba en la viga y se mide la señal de excitación, cuando la RMS de la señal medida sea la de mayor valor quiere decir que se está amplificando, es decir, ha entrado en resonancia. Se toma como referencia la potencia del motor de la excéntrica en vez de la frecuencia que genera porque la potencia va a ser siempre constante, pero esa frecuencia que genera se ha obtenido cuando el robot estaba aislado, pero en esta situación el robot interactúa con la estructura, la cual oscila, por lo que no se sabe qué frecuencia estaba induciendo a la estructura. En la tabla 14 se muestran los valores de la RMS de las señales para cada potencia, y la frecuencia de la FFT para cada señal.

Tabla 14. Amplitud registrada para cada potencia del motor de la excéntrica

Frecuencia (Hz)	Potencia excéntrica	RMS (m/s ²)
0,000	0%	0,000
3,378	30%	0,122
3,820	60%	0,245
3,809	70%	0,309
3,285	73%	0,359
3,390	74%	0,753
3,360	75%	1,386
3,427	76%	0,810
3,464	77%	0,389
3,630	90%	0,337
3,680	100%	0,219

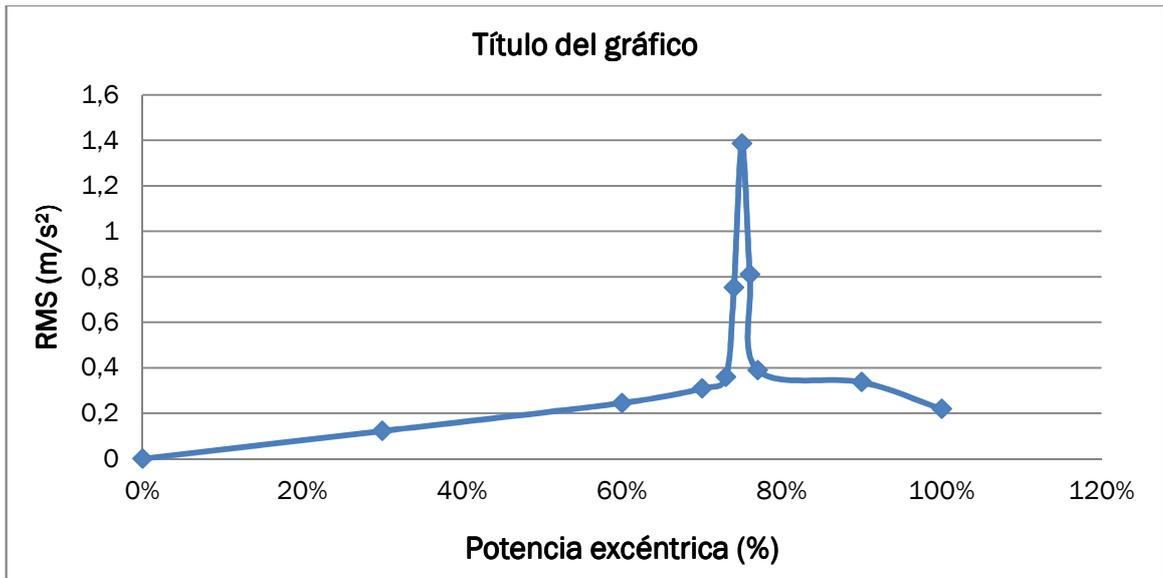


Figura 28. Amplitud de la señal registrada en la estructura para diferentes potencias del motor de la excéntrica con el robot detenido en el centro de la estructura

Como se ve según los valores de RMS obtenidos en la tabla 14y la figura 28, a la potencia del 75%se produce la mayor amplitud con diferencia, se amplifica la señal, por lo que ha entrado en **resonancia**. Ese es el valor de potencia que se está buscando.

Observando la señal medida para este caso en Sigview se ve como se amplifica la amplitud, esta va aumentando hasta que llega a un valor en el que se mantiene aproximadamente constante. No es completamente constante debido al equipo del que se dispone para generar la señal.

Como se ve en la FFT de la señal registrada, se genera una frecuencia de excitación de 3,36 Hz, que es prácticamente el valor de la frecuencia del primer modo cuando se sitúa una masa de 0,865 Kg en el centro de la misma.

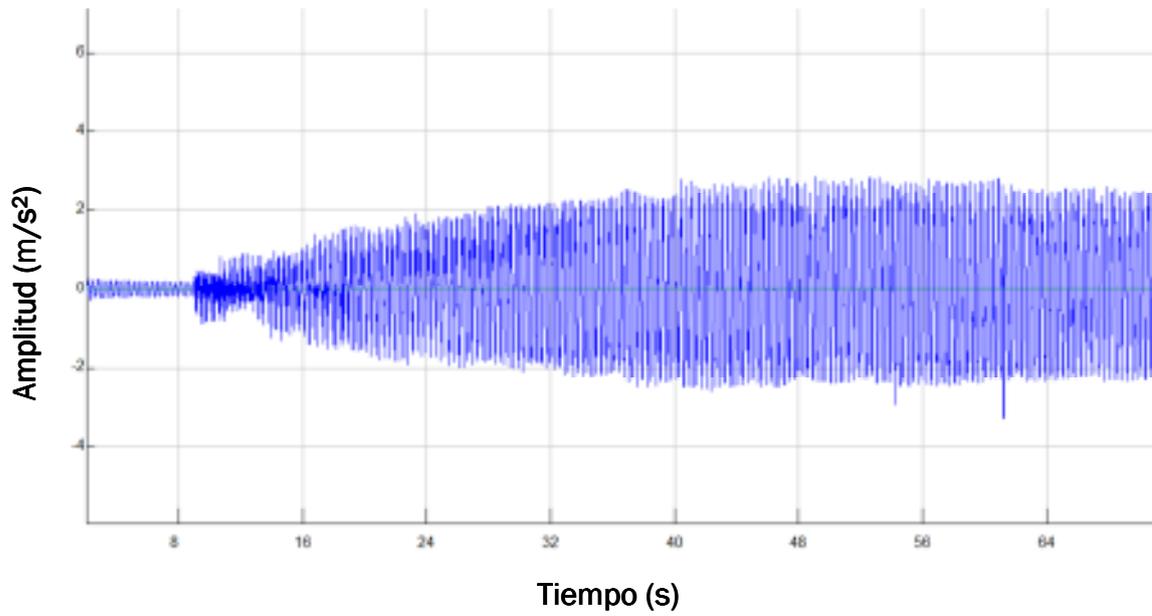


Figura 29. Señal registrada cuando se trata de excitar la estructura con una potencia de giro de la excéntrica del 75% y entra en resonancia

↓ FFT

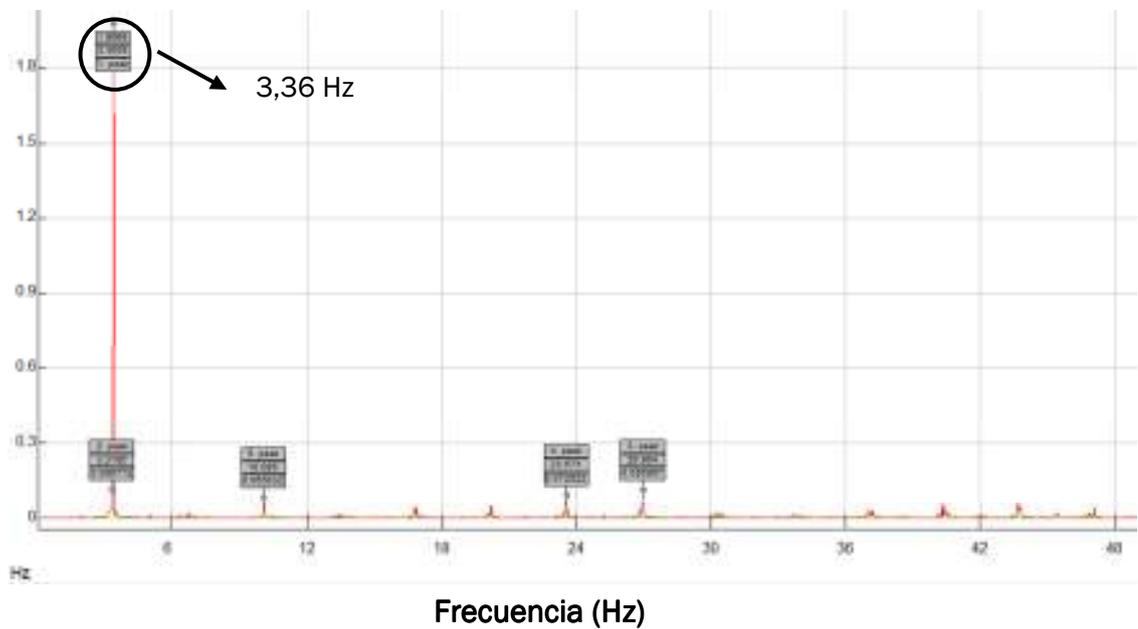


Figura 30. FFT de la señal registrada cuando la estructura entra en resonancia

Si se compara esta señal con la producida a una potencia de 74% se puede ver como esta no amplifica la señal, ni produce una amplitud constante, si no que oscila en el tiempo y se obtiene una amplitud máxima menor. Eso es porque su frecuencia de excitación para esa potencia ya no excita la viga, no produce resonancia aunque está cercana a la frecuencia natural de la viga. Por ello produce una señal con esa forma pulsante típica, la estructura se excita y a continuación se para y se vuelve a excitar, y así continuamente.

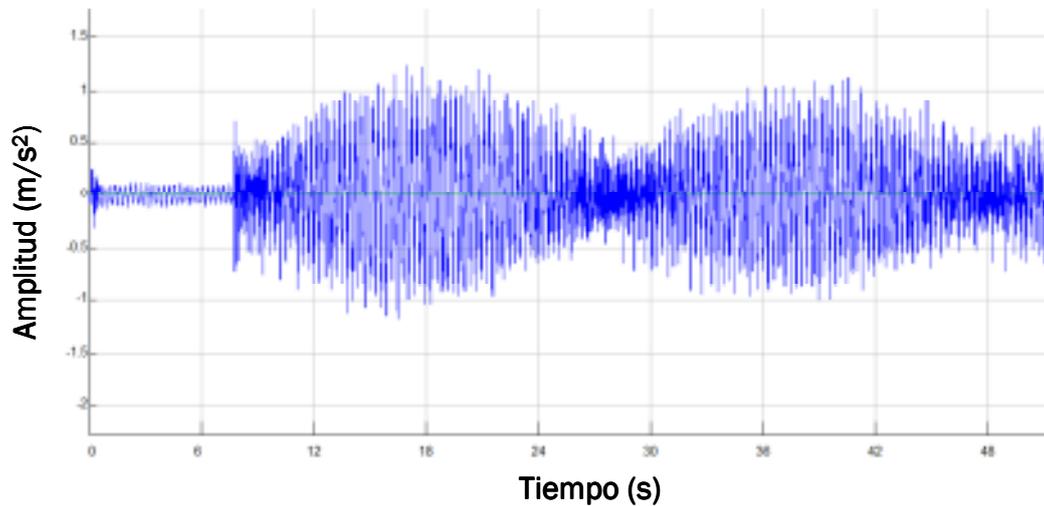


Figura 31. Señal registrada cuando se trata de excitar la estructura con una potencia de giro de la excéntrica del 74%

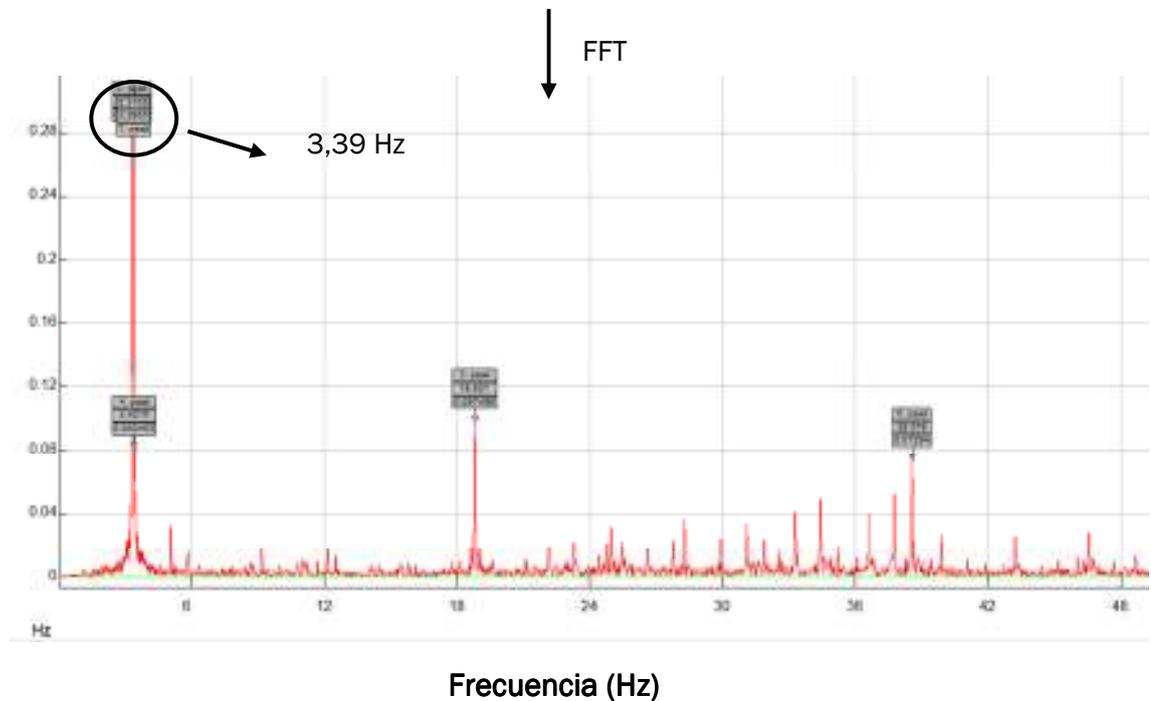


Figura 32. FFT de la señal registrada con una potencia de giro de la excéntrica del 74%

Si se prueba otra potencia del motor de excitación, la potencia máxima 100%, se ve como apenas excita la estructura y la señal es caótica. Difiere mucho de la señal obtenida cuando esta resonando. Se obtiene una amplitud mucho menor que cuando la estructura entra en resonancia. Esto es porque es una frecuencia alejada de la de la frecuencia de resonancia.

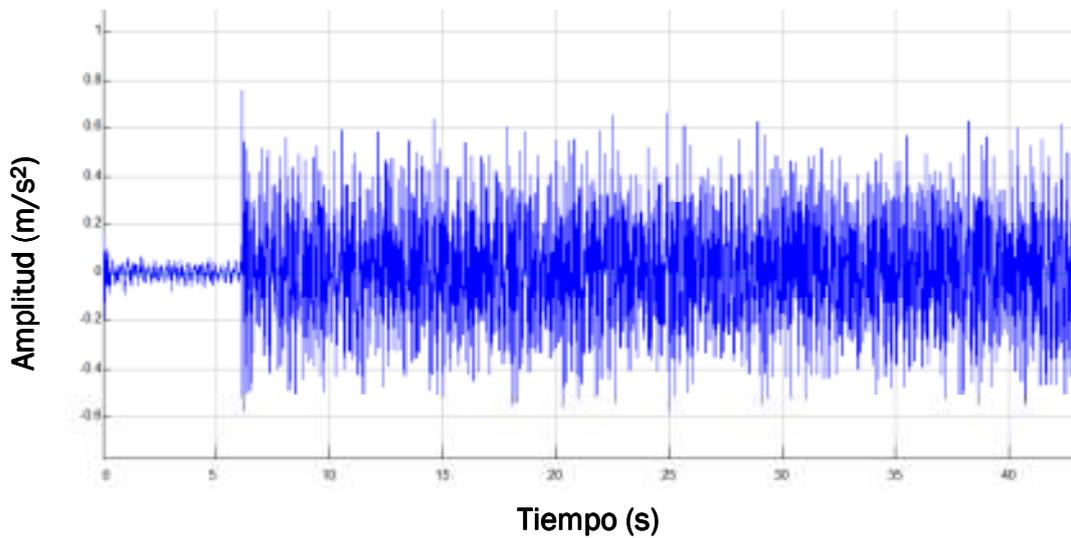


Figura 33. Señal registrada cuando se trata de excitar la estructura con una potencia de giro de la excéntrica del 100%

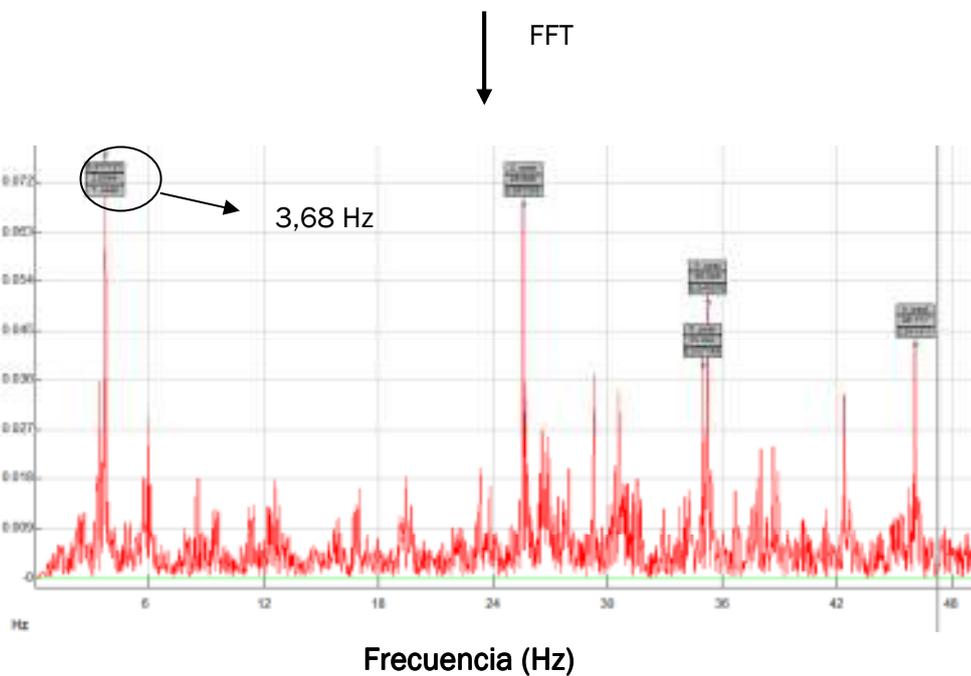


Figura 34. FFT de la señal registrada con una potencia de giro de la excéntrica del 100%

6.2 Robot avanzando sobre la estructura

El siguiente ensayo consistió en hacer avanzar al robot por la viga, sin que el motor de la barra excéntrica se mueva, para así ver cómo se comporta la estructura ante el tránsito del robot y ver si hay alguna velocidad crítica.

Se prueba un amplio rango de potencias para los motores de las ruedas motrices, se registra la señal con el acelerómetro y evalúa el valor RMS mediante *Sigview*, cuyos resultados se muestran en la tabla 15.

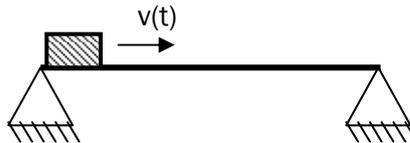


Ilustración 51. Esquema del robot avanzando por la estructura sin funcionar la rueda excéntrica

Tabla 15. Amplitud registrada en la viga por el simple avance del robot

Velocidad (m/s)	Potencia(%)	RMS (m/s ²)
0,000	0%	0
0,050	10%	0,184
0,100	20%	0,370
0,150	30%	0,386
0,200	40%	0,636
0,240	50%	0,665
0,270	60%	0,843
0,310	70%	0,993
0,340	80%	0,740
0,360	90%	0,720
0,380	100%	0,674

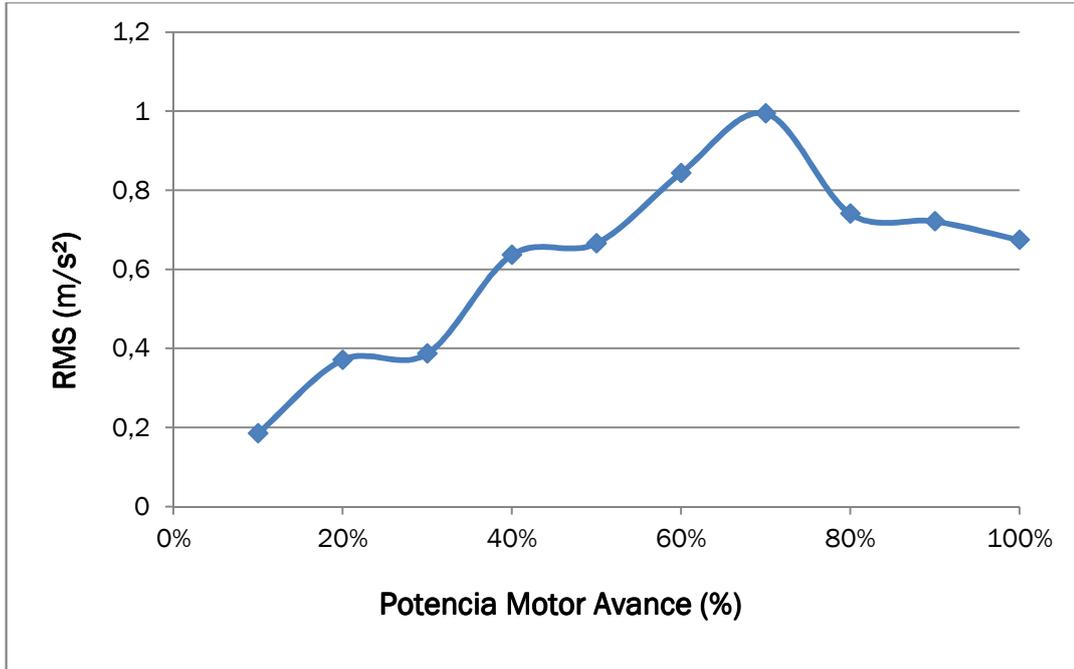


Figura 35. Amplitud de la señal registrada al avanzar el robot por la estructura con diferentes potencias de los motores de avance

Como se puede ver en la figura 35 y en la tabla 15, según los datos obtenidos hay una velocidad a la que se genera una mayor amplitud, se produce con una potencia de avance del 70% (0,3063 m/s).

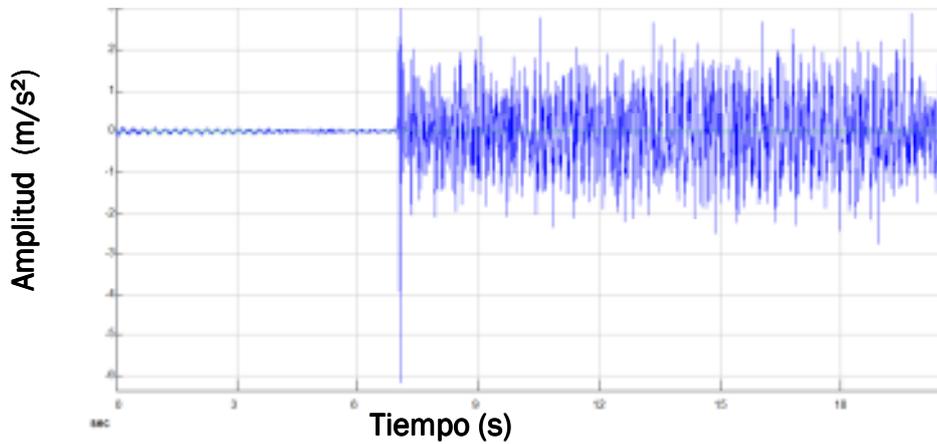


Figura 36. Señal registrada al avanzar el robot por la estructura a a una velocidad de avance de 0.3063 m/s

En la figura 36 se muestra la señal registrada para una potencia de avance del 70% (0,3063 m/s). Induce una frecuencia predominante de 5,44 Hz, como

se ve en su FFT, la cual no corresponde a ninguna frecuencia natural. Nótese que en este caso estamos ante un problema transitorio y por tanto no tiene mucho sentido interpretar la FFT de la señal de respuesta.

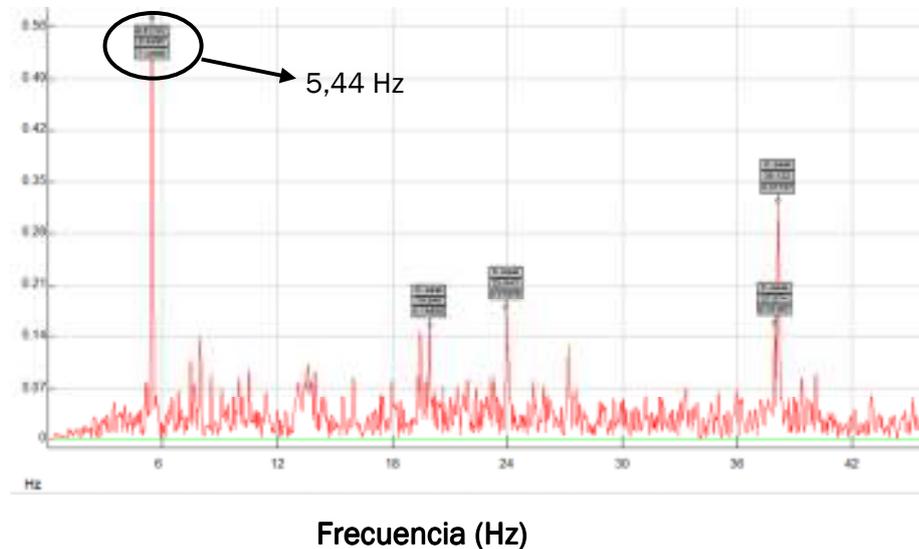


Figura 37. FFT de la señal registrada al avanzar el robot por la estructura a diferentes velocidades de avance

6.3 Combinación de robot avanzando con excéntrica

Una vez realizados las dos caracterizaciones anteriores (apartados 6.1 y 6.2) se puede saber aproximadamente cual es la situación más crítica, y así se puede realizar el último ensayo el cual consiste en hacer pasar el robot sobre la estructura con la barra excéntrica girando, de esta manera se combina el efecto de la barra excéntrica con el producido por el propio avance del robot. De modo que el robot avanzaba y a la vez excitaba la estructura, debido a la barra excéntrica y también al propio paso del robot al avanzar.

Se situó el acelerómetro sobre el robot y se activó mientras el robot circuló sobre la estructura, registrando de esta manera la señal que producía la oscilación de la viga.

De este modo lo que se intentó fue buscar la situación más desfavorable, la situación en la que la estructura se excitara con mayor amplitud, es decir, se buscó la combinación pésima de la excitación producida por la barra excéntrica y por las ruedas de avance del robot.

Gracias a la caracterización anterior del robot, se sabe que la potencia de la excéntrica tendría que estar en torno a 71% y 79%, es por eso que se probaron varias potencias entorno a esos valores, y a la vez un amplio rango

de potencias de avance, desde el 10% hasta el 100%, las cuales producían unas velocidades entre los 0,0505 m/s y los 0,3802 m/s.

Observando la figura 35 se podría pensar en que los resultados más interesantes aparecerán en torno a la potencia de 70%, pero se amplió el rango para saber si se capta algún resultado más interesante.

Se hicieron tres registros de señal con el acelerómetro para cada combinación, y se analizan con la aplicación Sigview obteniendo el valor de la RMS de la amplitud de cada una de las señales.

En la tabla 16 se representan las tres muestras tomadas para cada combinación de potencias, y la media de las tres. Para cada una de las potencias de los motores de avance consideradas (10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90%, 100%), se han probado 5 potencias del motor de la excéntrica (71%, 73%, 75%, 77%, 79%).

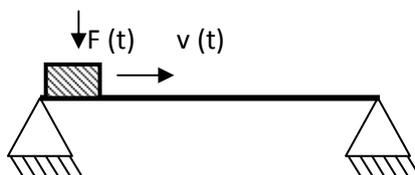


Ilustración 52. Esquema del robot avanzando por la estructura funcionando la rueda excéntrica

Tabla 16. Amplitud registrada por la acción combinada de velocidad de avance y la excéntrica

Potencia Motores Avance (%)	Potencia Excéntrica (%)	RMS 1	RMS 2	RMS 3	RMS Media (m/s ²)
10	71	0,327	0,301	0,312	0,314
	73	0,339	0,393	0,280	0,337
	75	0,360	0,360	0,375	0,365
	77	0,571	0,571	0,544	0,562
	79	0,511	0,511	0,508	0,510
20	71	0,489	0,497	0,475	0,487
	73	0,538	0,573	0,549	0,553
	75	0,514	0,513	0,643	0,557
	77	0,596	0,579	0,609	0,595
	79	0,534	0,536	0,546	0,539
30	71	0,431	0,449	0,426	0,435
	73	0,460	0,444	0,445	0,449
	75	0,581	0,595	0,567	0,581
	77	0,589	0,583	0,557	0,576

	79	0,565	0,559	0,547	0,557
40	71	0,550	0,581	0,569	0,567
	73	0,603	0,612	0,605	0,607
	75	0,620	0,675	0,598	0,631
	77	0,571	0,525	0,595	0,563
	79	0,557	0,532	0,523	0,537
50	71	0,579	0,522	0,531	0,544
	73	0,629	0,551	0,533	0,571
	75	0,571	0,525	0,595	0,563
	77	0,649	0,607	0,603	0,620
	79	0,561	0,585	0,573	0,573
60	71	0,645	0,621	0,639	0,635
	73	0,685	0,572	0,767	0,675
	75	0,757	0,752	0,635	0,715
	77	1,090	1,070	1,108	1,089
	79	0,758	0,728	0,735	0,740
70	71	0,794	0,804	0,799	0,799
	73	1,105	1,050	1,120	1,092
	75	1,168	1,065	1,127	1,120
	77	0,800	0,700	0,755	0,752
	79	0,735	0,769	0,742	0,748
80	71	0,711	0,704	0,696	0,704
	73	0,720	0,724	0,714	0,720
	75	1,460	1,440	1,360	1,420
	77	0,718	0,737	0,800	0,752
	79	0,645	0,699	0,649	0,664
90	71	0,706	0,694	0,712	0,704
	73	0,712	0,751	0,708	0,724
	75	0,890	0,723	0,789	0,801
	77	0,804	0,713	0,790	0,769
	79	0,762	0,765	0,754	0,760
100	71	0,705	0,714	0,690	0,703
	73	0,735	0,754	0,715	0,735
	75	0,756	0,789	0,748	0,764
	77	0,772	0,731	0,706	0,736
	79	0,712	0,707	0,760	0,726

Visualizando estos datos en la tabla 16 y la figura 38 y la figura 39, la cual también representa el error para cada punto, se puede observar como para ciertas velocidades de avance existen unos máximos en la amplitud de la aceleración. Esto se analizara más profundamente en el apartado siguiente.

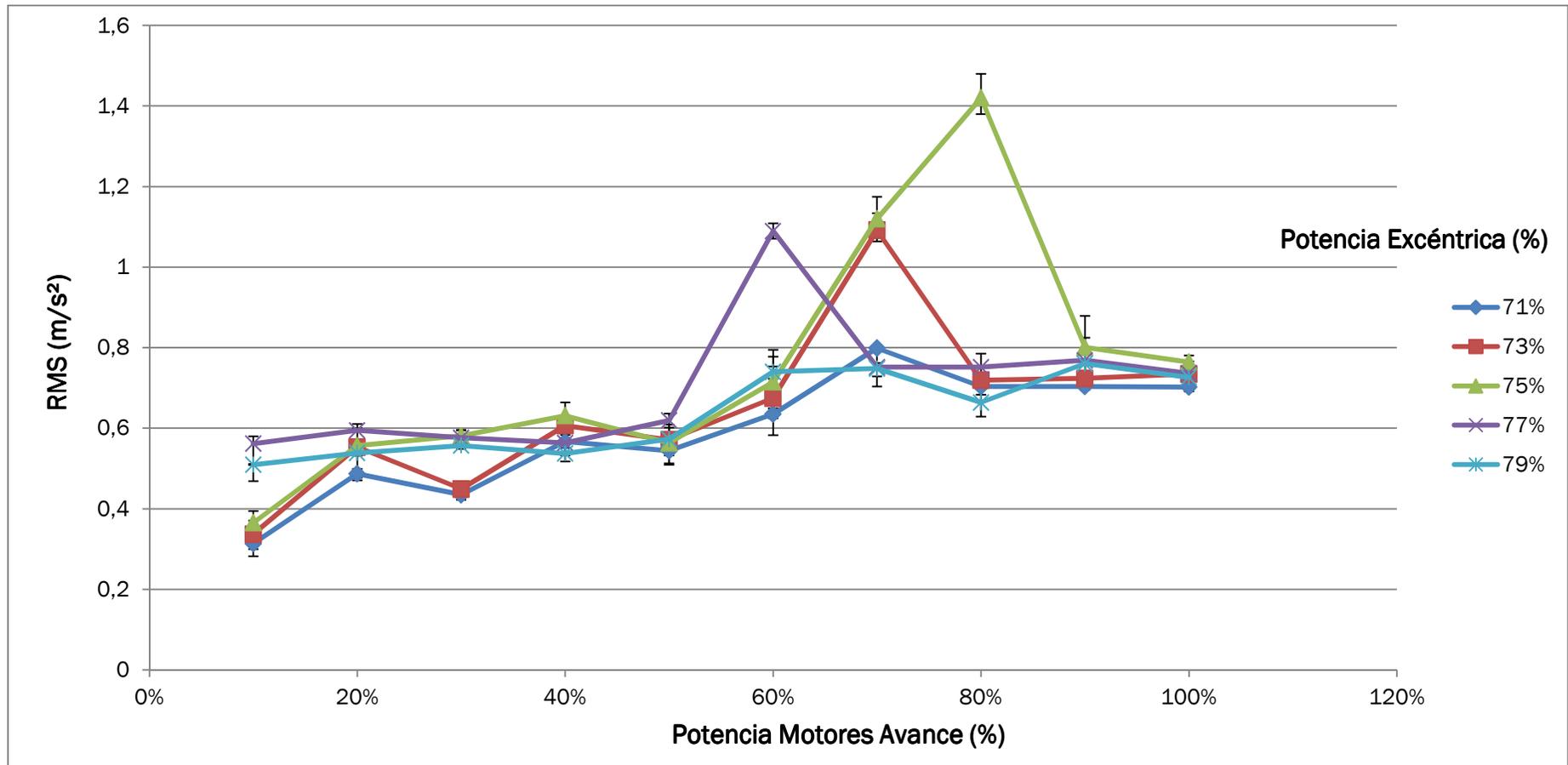


Figura 38. Amplitud de las señales registradas al avanzar el robot por la estructura con diferentes combinaciones de potencia de los motores de avance y potencia de excéntrica

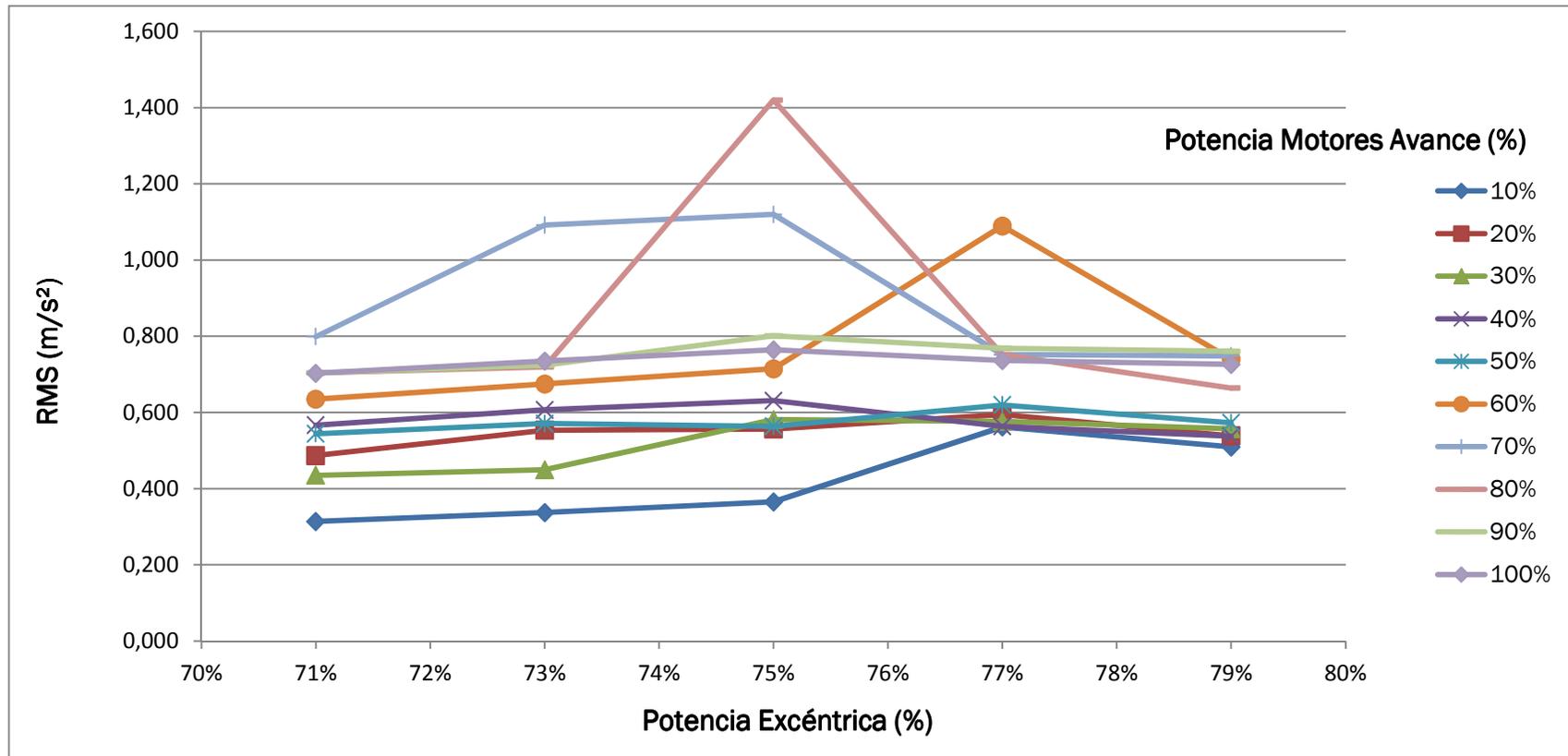


Figura 39. Amplitud de las señales registradas al avanzar el robot por la estructura con diferentes combinaciones de potencia de los motores de avance y potencia de excéntrica

7 Conclusiones

1) Analizando los diferentes resultados obtenidos para unas mismas condiciones de excitación, tanto de velocidad de avance como frecuencia inducida por la excéntrica, se llega a la conclusión de que hay dispersión, falta de repetitividad en los valores de la amplitud de la señal registrada producida por la excitación que induce la excéntrica del robot sobre la estructura. Esto puede ser debido a la posición de la barra excéntrica en el inicio del recorrido. El resultado puede depender de si la barra al empezar a circular el robot se encontraba en la posición superior, inferior o en alguna intermedia, lo cual no se ha tenido en cuenta. Es por ello que para unas mismas condiciones de velocidad de avance y de frecuencia inducida, se obtengan valores considerablemente distintos en cada muestra.

También puede ser debido a que cuando el robot inicia el avance la estructura puede que no esté en reposo absoluto en algunos casos, ya que el método que se ha utilizado para detener la excitación que se produce en la estructura es completamente manual, se sujeta la viga con la mano hasta que parece que está completamente parada, pero pueden existir vibraciones inapreciables para el tacto y la vista que afectan a la hora del avance del robot, una forma de solucionar este problema sería utilizar un método mecánico para detener la estructura, o bien utilizar una estructura lo suficientemente larga como para que esas vibraciones residuales no afecten al estudio.

2) Observando la figura 38, figura 39 y tabla 16 se extrae la conclusión de que existen ciertas combinaciones de frecuencias de excitación inducidas por la excéntrica y excitación generada por el avance del robot, que producen picos de amplitud en la aceleración de la respuesta de la estructura.

Concretamente, las situaciones más destacables son:

- Potencia motor excéntrica=73%
Potencia motor avance = 70%
Amplitud = 1,092 m/s²
- Potencia motor excéntrica=75%
Potencia motor avance = 80%
Amplitud = 1,42 m/s²

Esta es la situación en la que se consigue una mayor respuesta de la estructura, es la situación más crítica que podemos obtener.

Es la situación más pésima.

- Potencia motor excéntrica=75%
Potencia motor avance = 70%
Amplitud = 1,12 m/s²
- Potencia motor excéntrica=77%
Potencia motor avance = 60%
Amplitud = 1,089 m/s²

Estas 4 combinaciones de velocidad de avance más frecuencia inducida por la barra excéntrica son las situaciones en las que se obtiene una mayor excitación de la estructura. Se producen 4 picos, especialmente con una potencia del 75%, que es la frecuencia con la que se había conseguido que la estructura entrara en resonancia cuando se situaba el robot detenido en el centro y se hacía girar la barra excéntrica a esa potencia, por lo que es lógico que ahora se obtenga una mayor amplitud en ese caso. Estos 4 picos se pueden observar en ambas figuras, 38 y 39, comparando la potencia de motor de avance con el RMS generado, y comparando la potencia del motor de la excéntrica con el RMS generado.

Aunque el robot se desplace sobre la estructura con el motor de la excéntrica al 75% no se puede decir que la estructura entre en resonancia, porque al desplazarse el robot, se desplaza su masa, por lo que la frecuencia propia de la estructura varía con cada posición, en cada instante va a ser diferente y la frecuencia que se está generando es constante en todo el recorrido, por lo que la estructura en la situación mencionada (correspondiente al apartado 6.3) nunca va a llegar a la resonancia.

3) Observando la tabla 15 y la tabla 16 se extrae la conclusión de que cuando se combina la velocidad de avance y la barra excéntrica, la RMS de algunas amplitudes registradas son menores que cuando se hace circular al robot a esa misma potencia de avance pero sin que actúe la barra excéntrica, cuando se supone que deberían ser mayores al combinarse ambos efectos. Esto puede ser debido a que ambos efectos en vez de sumarse, en algún caso se anula, las vibraciones son opuestas. Por ejemplo, cuando el robot circula con una potencia en los motores de avance=40%:

Tabla 17. Amplitud registrada para diferentes potencias del motor de la excéntrica y una misma potencia del motor de las ruedas de avance (40%)

	Amplitud (m/s²)
Potencia motor excéntrica=0%	0,636
Potencia motor excéntrica=71%	0,567
Potencia motor excéntrica=73%	0,607
Potencia motor excéntrica=75%	0,631
Potencia motor excéntrica=77%	0,563
Potencia motor excéntrica=79%	0,537

Como se puede observar en la tabla 17, a la potencia de los motores de avance del 40%, la mayor amplitud se obtiene cuando el robot circula sin que la barra excéntrica gire, esta no induce ninguna frecuencia a la estructura. Aunque en los casos en los que se obtienen los picos de respuesta de la estructura (mencionados en la conclusión 2), estos son todos superiores a los que se obtienen debido únicamente al tránsito del robot.

4) Comparando las tablas 12 y 13 y las figuras 23, 24 con la tabla 14 y figura 28, se extrae la conclusión de que la frecuencia generada por el motor de la excéntrica con el robot aislado que se caracterizó de modo directo e indirecto, es diferente de la que se obtuvo al situar el robot sobre el centro de la estructura y hacer girar la excéntrica. Para una misma potencia de giro del motor se han obtenido diferentes valores de frecuencia. Para una potencia de la excéntrica del 75% la frecuencia del primer modo obtenida al caracterizar el robot aislado de modo indirecto es de 3,236 HZ y de modo directo es 3,224 Hz, mientras que la frecuencia del primer modo obtenida al situar el robot quieto en el centro de la estructura y girar la excéntrica a una potencia del 75% es de 3,36 Hz, algo mayor que la frecuencia del primer modo para esta misma situación pero con la excéntrica sin girar.

Esto puede ser debido a la interacción estructura-robot. Cuando la estructura oscila provoca que el robot también se mueva, y este movimiento oscilatorio afecta al motor de la excéntrica provocando que este tenga más dificultad en mover la barra excéntrica, por ello genera una frecuencia mayor. Éste motor tiene la característica que se le introduce la potencia a la que se quiere que gire, pero debido al movimiento oscilatorio de la estructura no es capaz de girar a las mismas revoluciones (para una misma potencia) que cuando se caracterizó de forma aislada, por lo que gira más lento y genera una frecuencia mayor.

Esta teoría se refuerza si se observa la señal generada cuando el motor de la excéntrica gira al 100%. En esta situación apenas excita la estructura, por lo

ésta se mueve poco y no afecta al giro de motor como ocurría a la potencia del 75% por ejemplo. Por lo que la frecuencia de la FFT de la señal generada (3,680 Hz) es muy similar a la medida de modo indirecto (3,698 Hz) y directo (3,593 Hz) cuando se caracterizó el robot.

Éste motor no tiene encoder, por lo que siempre le llega la misma potencia, si tiene algún impedimento para mover la excéntrica no aumenta esta potencia para conseguir un par constante. Esta interacción robot-estructura es la que interesa en este estudio.

5) Comparando la FFT de la figura 28 con la FFT de la figura 6, se observa que pese a ser situaciones similares, la frecuencia del primer modo es ligeramente diferente. Esto es debido a que en la situación de la figura 6 el robot se encontraba completamente quieto sobre el centro de la estructura con la excéntrica sin girar. En esta situación la frecuencia del primer modo es 3,35 Hz, mientras que en la situación de la figura 28 el robot se encontraba quieto en el centro de la estructura pero con la excéntrica girando a una potencia del 75%. En ésta situación la frecuencia del primer modo es del 3,36 Hz.

La diferencia entre ambas frecuencias puede ser debido a que en la situación en la que la excéntrica está quieta toda la masa (0,865 kg) es masa fija, por lo que es una masa puntual situada en el centro de la viga y disminuye la frecuencia del primer modo. Mientras que en la situación en la que la excéntrica gira, la masa de la excéntrica (0,0038 kg) deja de ser masa fija y pasa a ser masa móvil, por lo que la masa fija se reduce y aumenta la frecuencia del primer modo.

8 Líneas de Futuro

Las líneas de investigación en un futuro tendrían que ir dirigidas a conseguir un sistema que pueda generar una frecuencia de manera que no se vea afectado por la oscilación de la estructura, que genere la misma frecuencia independientemente de la situación, es decir, utilizar encoders para mantener la frecuencia constante en todo el tránsito. También sería conveniente utilizar algún dispositivo mecánico que asegure que la estructura se detenga completamente entre cada tránsito del robot, para que las oscilaciones residuales que puedan quedar no afecten a la siguiente toma de datos.

Otra línea de investigación interesante podría ser incorporar un sistema TMD que amortigüe la oscilación de la estructura y disminuya la respuesta de ésta para las mismas situaciones.

A nivel estético, sería interesante mejorar el robot de manera que simule el tránsito de un peatón, que tenga articulaciones y se muevan al ritmo del tránsito.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] D. Dimaragonas, Andrew. (1992) *Vibration for Engineers*. Washington: Pertice Hall international editions.
- [2] Meirovich, Leonard. (1976) *Elements of Vibration Analysis*. Virginia: McGraw-Hill Book Company
- [3] Penzien, Joseph. W.Clough, Ray.(1975) *Dynamics of Structures*.Berkeley: McGraw-Hill Book Company.
- [4] Jiménez Muñoz, Alberto. (2014) *Simulación Dinámica mediante WorkingModel 2D del Tránsito de Ciclistas por Estructuras Esbeltas*. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- [5] Cadiñanos García, Víctor.(2014)*Sistema de mitigación de vibraciones estructurales mediante TMD con amortiguamiento magnético*. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- [6] Ibán Lorenzana, Norberto.(2011)*Parámetros que afectan a un amortiguador de masa aplicado a un mástil*. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- [7] Magdaleno González, Álvaro. (2015)*Simulación del tránsito peatonal en pasarelas esbeltas*. Valladolid: Universidad de Valladolid

ANEXO A. Transformada rápida de Fourier (FFT).

La respuesta en el tiempo de cualquier sistema bajo cargas dinámicas se puede representar como una señal variable en el tiempo. La respuesta se puede medir en términos cinemáticos (desplazamientos, velocidades, aceleraciones) o estáticos (esfuerzos o tensiones). Desde el punto de vista experimental, estas señales se registran disponiendo de sensores y sistemas de adquisición de datos adecuados. Numéricamente, mediante simulación, también se puede disponer de estas representaciones. Sea cual sea el origen de las señales, es necesario disponer de técnicas de análisis que permitan conocer el contenido en frecuencias de las mismas. Entre estas técnicas se encuentra la denominada “Transformada Rápida de Fourier”, FFT de sus siglas en inglés, Fast Fourier Transform, que a partir de cualquier registro, calcula, para cada frecuencia, la correspondiente densidad espectral. Se basa, de forma resumida, en que cualquier función puede ser descompuesta en suma de funciones circulares (senos y cosenos), cada uno de ellos de una determinada frecuencia, fase y amplitud. Cuanto mayores sean las contribuciones de estas funciones a la función original (o señal), mayor será su densidad espectral. Una señal de “ruido blanco” tiene igual contenido en todas las frecuencias, siendo por tanto su FFT una recta horizontal. Una señal pura armónica solo tiene una frecuencia, siendo su FFT nula para todas las frecuencias excepto para la considerada, que tomará un valor infinito.

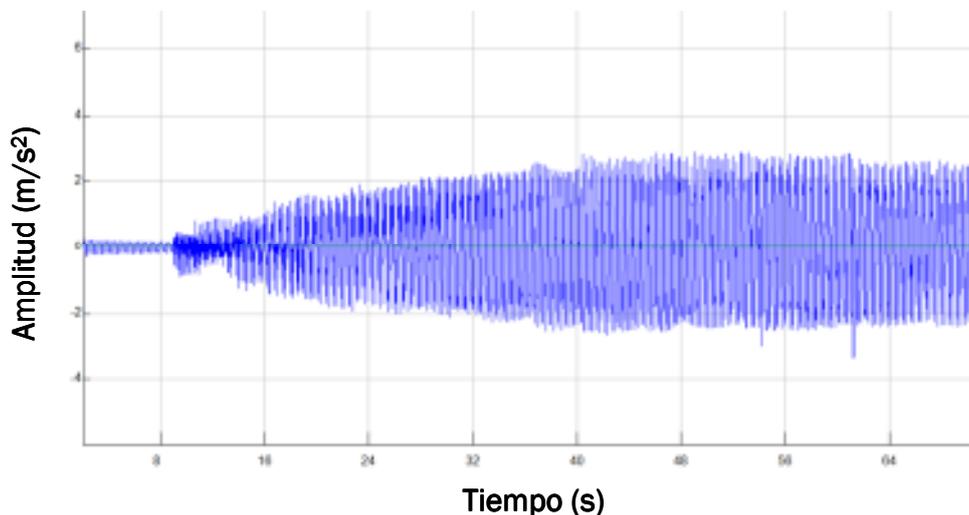


Figura 40. Señal registrada cuando se excita la estructura y entra en resonancia

En la figura anterior se muestra una señal de la estructura de estudio en resonancia y en la siguiente, su correspondiente FFT, donde se puede resaltar un pico que corresponde a determinadas frecuencias naturales o/y de excitación.

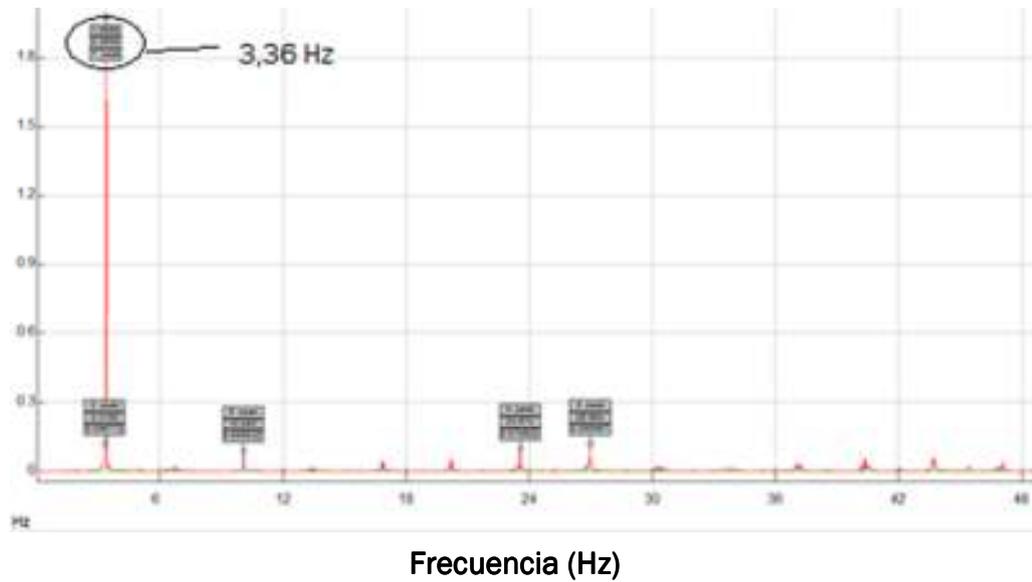


Figura 41. FFT de la señal registrada cuando se excita la estructura y entra en resonancia

En este TFG se emplea esta herramienta para analizar el contenido en frecuencias de las respuestas. Se ha usado una implementación FFT del paquete de cálculo *Sigview*.

ANEXO B. Valor cuadrático medio (RMS).

En matemáticas, la **media cuadrática**, **valor cuadrático medio** o **RMS** (del inglés *root mean square*) es una medida estadística de la magnitud de una cantidad variable. Puede calcularse para una serie de valores discretos o para una función matemática de variable continua. El nombre deriva del hecho de que es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los valores.

A veces la variable toma valores positivos y negativos, como ocurre, por ejemplo, en los errores de medida. En tal caso se puede estar interesado en obtener un promedio que no recoja los efectos del signo. Este problema se resuelve, mediante la denominada media cuadrática. Consiste en elevar al cuadrado todas las observaciones (así los signos negativos desaparecen), en obtener después su media aritmética y en extraer, finalmente, la raíz cuadrada de dicha media para volver a la unidad de medida original.

Es lo que ocurre con la señal tomada en este estudio, la amplitud que se registra en el tránsito del robot sobre la estructura tiene valores negativos y positivos, por ello se aplica la RMS.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

Ecuación 18

ANEXO C. Resonancia mecánica.

La **resonancia** es un fenómeno que se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a la acción de una fuerza periódica, cuyo periodo de vibración se acerca al periodo de vibración característico de dicho cuerpo, en el cual, una fuerza relativamente pequeña aplicada en forma repetida hace que una amplitud de un sistema oscilante se haga muy grande.

La elasticidad es la propiedad que tienen los cuerpos de deformarse bajo la acción de fuerzas externas y de recuperar su forma una vez que desaparecen estas fuerzas; dentro de ciertos rangos la deformación para todos los cuerpos es proporcional a la fuerza deformante aplicada. Por tanto, antes de alcanzar otra vez su estado de equilibrio, los cuerpos desarrollarán un cierto número de oscilaciones; y cada cuerpo, dependiendo de su forma, de su masa, del material de que esté hecho, así como de las restricciones a que esté sometido, oscilará con ciertas frecuencias propias a las que se les denomina frecuencias naturales.

Un sistema resorte masa tiene una sola frecuencia natural de vibración; una cuerda tensa sujeta por sus dos extremos presenta una cantidad infinita de frecuencias naturales, todas ellas múltiplos de una frecuencia básica; las placas de metal o de vidrio o las membranas de cuero también presentan frecuencias naturales; si bien no todas ellas son múltiplos de una frecuencia básica; estructuras como los puentes también presentan frecuencias naturales.

Cuando un cuerpo entra en resonancia y no tiene ningún amortiguamiento interno, la amplitud se amplifica de forma lineal. Ver figura 42:

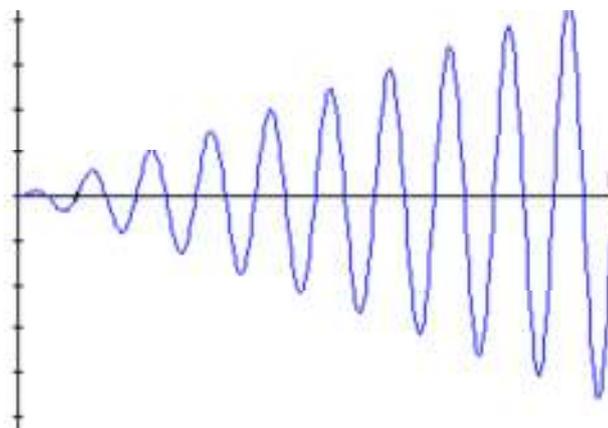


Figura 42. Ejemplo de una señal de un cuerpo en resonancia sin amortiguamiento interno

Cuando un cuerpo entra en resonancia y tiene amortiguamiento interno, su amplitud se amplifica hasta un valor estacionario, se mantiene constante. Ver figura 43.

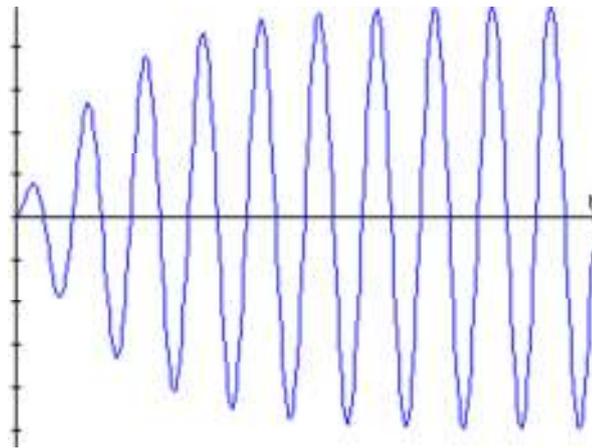


Figura 43. Ejemplo de una señal de un cuerpo en resonancia con amortiguamiento interno

RESONANCIA EN LA VIDA REAL

Pese a la apariencia de quietud del suelo que pisamos, de los edificios, de los puentes y de muchas otras estructuras arquitectónicas que nos rodean, en realidad están en continuo cambio y movimiento, y un tipo especial del movimiento es el debido a las fuerzas mecánicas oscilantes, es sencillo enumerar una gran cantidad de ellas:

- Los diversos sonidos ambientales son vibraciones de tipo mecánico, ya que son las variaciones periódicas de la presión del aire o de las cosas que nos rodean las que generan los sonidos.
- Los edificios en que habitamos o en que trabajamos son estructuras elásticas que permanentemente están vibrando debido al paso cercano de los automotores pesados o a los mismos impulsos mecánicos producidos por quienes los habitan, al caminar, al bailar, al mover muebles, etc.
- El suelo mismo en que nos movemos experimenta movimientos oscilatorios todos los días, tal como nos lo indica el reporte diario del

Servicio Sismológico Nacional, simplemente que son de tan pequeña magnitud que en general no los alcanzamos a percibir

- Las vibraciones que parten del motor de los automóviles someten a todas las partes de un auto y a sus ocupantes a continuas oscilaciones mecánicas.
- El mundo laboral está lleno de máquinas de diferentes tamaños que van desde los taladros de mano hasta máquinas más potentes que producen toda una variedad de vibraciones mecánicas.

Hay varios casos en los que el aire al incidir sobre un puente a una velocidad constante, genera una frecuencia que es similar a la frecuencia natural del puente, haciendo que este oscile violentamente, e incluso llegando a derribarlo. Del mismo modo, las tropas al pasar por un puente no caminan en formación, porque la frecuencia de sus pasos podría coincidir con la frecuencia natural del puente.

ANEXO D. *Cosmos*.

En el presente anexo se muestra el código (.ses) utilizado para obtener los resultados de las frecuencias con *Cosmos*:

c* viga biapoyada con 1 o 2 masas intermedias

new, q;

c* material

parassign,me,real,.70E11

parassign,rho,real,2700

c* sección

parassign,h,real,0.038676

parassign,b,real,0.1067

parassign,t,real,0.001421

c* longitud y posición de las masas

parassign,L,real,5.988

parassign,L1,real,L/4 c* posición de la primera masa ($L1 < L/2$)

parassign,L2,real,3*L/4 c* posición de la segunda masa ($L1 > L/2$)

c* masas

parassign,m1,real,0.155+0.710 c* masa1

parassign,m2,real,0 c* masa2

c* mallado

parassign,n,int,40

c* GEOMETRIA

PT,1,0,0,0

VIEW,0,0,1,0

CREXTR,1,1,1,X,L1

CREXTR,2,2,1,X,L/2-L1

CREXTR,3,3,1,X,L2-L/2

CREXTR,4,4,1,X,L-L2

SCALE,0

C*ELEMENTO FINITO TIPO BARRA

EGROUP,1,BEAM2D,0,0,0,0,0,0,0,0

MPROP,1,EX,me;

MPROP,1,DENS,rho;

BMSECDEF,1,1,4,1,9,h,b,t,t,0,0,0,0,0

M_CR,1,1,1,2,n*L1/L+1,1

M_CR,2,2,1,2,n*(L/2-L1)/L+1,1

M_CR,3,3,1,2,n*(L2-L/2)/L+1,1

M_CR,4,4,1,2,n*(L-L2)/L+1,1

C* CONDICIONES DE CONTORNO

DPT,1,Au,0,1,1,rx

DPT,5,AU,0,5,1,

C*ELEMENTO FINITO TIPO MASA

EGROUP,2,MASS,0,0,0,0,0,0,0,0

RCONST,2,2,1,7,m1,m1,m1,0,0,0,0

M_PT,2,2,1

RCONST,2,3,1,7,m2,m2,m2,0,0,0,0

c*M_PT,4,4,1

nmerge;

c**c*analysis estático

c**FPT,3,FY,-3.355*9.81,3,1;

c**r_static;

c**DISMAX,1,UY;

c**ACTSTR,1,VON,2,1,0,0

c**STRPLOT,0,1,elmax,1,1;

c*análisis modal

A_FREQUENCY,10,S;

r_freq;

freqlist;

DEFPLOT;