



**Universidad de Valladolid**



**ESCUELA DE INGENIERÍAS  
INDUSTRIALES**

**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID  
ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES**

**Grado en Ingeniería Mecánica**

**Incorporación de dispositivos TMD en una  
maqueta de edificio de 2 plantas. Diseño,  
construcción y sintonizado.**

**Autor: Rodríguez Celador, Jesús**

**Tutor: García Terán, José María**

**Departamento: Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería del  
Terreno, Mecánica de los medios Continuos y Teoría de  
Estructuras.**

**Valladolid, julio de 2016.**

## RESUMEN

En este trabajo se trata de la incorporación de un dispositivo de mitigación de vibraciones a una maqueta de edificio a escala. La maqueta está basada en dos módulos, uno de 500 mm de altura y otro de 750 mm, ambos con mínima rigidez lateral de modo que el conjunto puede vibrar con grandes amplitudes y bajo amortiguamiento en dicha dirección. Cada módulo se puede asimilar a un sistema discreto de 1 grado de libertad.

El trabajo ha consistido en la fabricación de los módulos en taller y su caracterización experimental. Tras ello, se incorpora el prototipo de TMD y se procede a su correcto sintonizado in situ mediante comparación de los resultados experimentales con los obtenidos mediante los correspondientes modelos de sistemas discretos. El prototipo de TMD también se asimila a un sistema de 1gdl.

A modo de verificación se comienza con el edificio de una sola planta constituido por el módulo de 750 mm. Tras su caracterización se añade el TMD y se simula y experimenta con el sistema de 2gdl resultante. Tras la verificación se procede a aplicar la metodología para el edificio de 2 plantas (módulo de 750 mm abajo y de 500 mm arriba), concluyendo que hay una buena concordancia entre los resultados experimentales y simulados.

### Palabras clave

Estructura, TMD, Frecuencia, Rigidez, Amortiguamiento.



## ÍNDICE

RESUMEN .....	1
<b>ÍNDICE</b> .....	3
Capítulo 1: Introducción .....	9
1.1    Objetivos .....	9
1.2    Organización del documento .....	9
Capítulo 2: Construcción de la maqueta y sensores de medida.....	11
2.1    Descripción, fabricación y montaje de los elementos de la estructura principal .....	11
2.1.1    Descripción de los elementos .....	11
2.1.2    Fabricación de la estructura principal .....	13
2.1.3    Montaje de la estructura principal .....	19
2.2    Descripción, fabricación y montaje del TMD .....	22
2.2.1    Descripción del TMD .....	23
2.2.2    Fabricación del TMD .....	24
2.2.3    Montaje del TMD .....	28
2.3    Dispositivos y proceso de medida.....	30
2.3.1    Introducción al método experimental .....	31
2.3.2    Instrumentos de medida .....	31
2.3.3    Dispositivo de registro de señal (tarjeta de adquisición) .....	34
2.3.4    Configuración del software .....	36
Capítulo 3: Modelado de sistemas vibratorios y simulación .....	41
3.1    Concepto de vibración y tipos de vibraciones .....	41
3.2    Vibración es sistemas de un grado de libertad.....	41
3.2.1    Sistema libre no amortiguado. Modelo m-k .....	42
3.2.2    Sistema libre amortiguado. Modelo m-k-c.....	46
3.3    Vibración en sistemas de dos grados de libertad .....	53
3.4    vibración en sistemas de varios grados de libertad .....	54
3.5    Simulación mediante Matlab .....	56

Capítulo 4: Metodología y ejemplo de verificación .....	59
4.1 Elección de la masa del TMD .....	59
4.2 Medida de la rigidez del piso.....	59
4.3 Medida de la masa.....	61
4.4 Obtención de la frecuencia y del amortiguamiento del piso.....	62
4.4.1 Frecuencia .....	62
4.4.2 Amortiguamiento.....	63
4.5 Incorporación y bloqueo del TMD .....	64
4.6 Liberación del TMD .....	64
4.7 Sintonizado del TMD .....	65
4.8 Registro del desplazamiento del edificio y comparación con la simulación...	68
4.9 Resumen de la metodología propuesta .....	70
Capítulo 5: Aplicación: sintonizado del TMD para el edificio de dos plantas.....	71
5.1 Elección de la masa de TMD .....	71
5.2 Medida de la rigidez.....	71
5.2.1 Piso de 750 mm .....	72
5.2.2 Piso de 500 mm .....	72
5.2.3 Piso de 750 mm + piso de 500 mm .....	72
5.2.4 Comprobación de la rigidez total .....	73
5.3 Medida de la masa.....	73
5.4 Obtención de las frecuencias y del amortiguamiento del edificio.....	73
5.4.1 Frecuencia .....	73
5.4.2 Amortiguamiento.....	74
5.5 Comprobación de masa, frecuencia, rigidez y amortiguamiento .....	74
5.6 Incorporación y bloqueo del TMD .....	75
5.7 Liberación del TMD .....	75
5.8 Sintonizado del TMD a frecuencia fija .....	76
5.9 Sintonizado del TMD a frecuencia y amortiguamiento óptimos .....	81
5.10 Registro del desplazamiento del edificio y comparación con la simulación	82
Capítulo 6: Conclusiones y líneas futuras.....	85
6.1 Conclusiones .....	85

6.2 Líneas futuras.....	85
Capítulo 8: Bibliografía .....	87
ANEXO A .....	89
ANEXO B .....	91
ANEXO C .....	95
ANEXO D.....	97
ANEXO E .....	99

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Expansión Módulo de 0,5 m .....	11
Figura 2. Estructura Catia módulos diferentes .....	12
Figura 3. Expansión de las uniones .....	13
Figura 4. Alineación del cabezal de la fresadora .....	14
Figura 5. Posicionamiento de la Broca .....	15
Figura 6. Selector de Velocidades de la Fresadora .....	15
Figura 7. Broca Posicionada para Realizar los Taladros Superiores/Inferiores .	16
Figura 8. Roscado con Macho de Roscar .....	16
Figura 9. Plantilla Unida a la Placa de Metacrilato .....	17
Figura 10. Base Marcada.....	18
Figura 11. Taladrado Base.....	18
Figura 12. Roscado Fijación Apoyos.....	19
Figura 13. Montaje Módulo.....	19
Figura 14. Detalle Unión .....	20
Figura 15. Tornillos Arandela y Tuerca para las Uniones.....	20
Figura 16. Unión entre Módulos .....	21
Figura 17. Apoyo Elástico.....	21
Figura 18. Apoyo Rígido.....	22
Figura 19. Edificio junto a Módulos.....	22
Figura 20. TMD .....	24
Figura 21. Inicio del doblado del bastidor .....	25

Figura 22.	Final del doblado del bastidor .....	25
Figura 23.	Taladro en la base del bastidor .....	26
Figura 24.	Taladro en la zona lateral del bastidor.....	26
Figura 25.	Corte de la barra de nylon.....	27
Figura 26.	Fresado de las piezas de nylon .....	27
Figura 27.	Unión de la regla con el bastidor.....	28
Figura 28.	Unión de las dos piezas de nylon .....	29
Figura 29.	Fijación del TMD al forjado .....	30
Figura 30.	TMD situado en el edificio .....	30
Figura 31.	Método de medida experimental. ....	31
Figura 32.	Sensor de desplazamiento láser utilizado en el registro de datos. ....	32
Figura 33.	Detalle del sensor de desplazamiento láser. ....	32
Figura 34.	Conector D-SUB. ....	33
Figura 35.	Alimentación del sensor láser.....	33
Figura 36.	Acelerómetro.....	34
Figura 37.	SIRIUS HD-STG.....	35
Figura 38.	Ejemplo de registro procesado.....	36
Figura 39.	Pantalla del software para seleccionar sensor láser. ....	37
Figura 40.	Menú de calibración de sensor de desplazamiento láser.....	37
Figura 41.	Calibración de sensor de desplazamiento láser. ....	38
Figura 42.	Diseño de pantalla. Añadir FFT.....	39
Figura 43.	Variación de la resolución con la frecuencia de muestreo.....	40
Figura 44.	Modelo masa-rigidez-amortiguamiento .....	42
Figura 45.	Sistema masa - resorte. ....	43
Figura 46.	Movimiento armónico simple. ....	44
Figura 47.	Posición, velocidad y aceleración de un sistema vibrante. Dominio temporal. 45	
Figura 48.	Procesado FFT de una onda vibratoria. ....	46
Figura 49.	Ejemplo de transformada rápida de Fourier (FFT). ....	46
Figura 50.	Sistema masa-resorte-amortiguamiento. ....	47
Figura 51.	Movimiento oscilatorio subamortiguado. ....	50

Figura 52.	Movimiento sobreamortiguado.....	52
Figura 53.	Movimiento críticamente amortiguado.....	53
Figura 54.	Modelo masa – rigidez – amortiguamiento con dos grados de libertad 53	
Figura 55.	Modelo masa – rigidez – amortiguamiento con tres grados de libertad 55	
Figura 56.	Dinamómetro .....	60
Figura 57.	Rigidez piso 750 mm .....	61
Figura 58.	Balanza.....	61
Figura 59.	FFT piso de 750 mm .....	63
Figura 60.	Amortiguamiento del piso de 750 mm .....	63
Figura 61.	Bloqueo del TMD .....	64
Figura 62.	Sintonizado 1 del TMD para piso de 750 mm.....	66
Figura 63.	Sintonizado 2 del TMD para piso de 750 mm.....	66
Figura 64.	Amortiguamiento máximo para TMD en piso de 750 mm .....	67
Figura 65.	Amortiguamiento óptimo para TMD en piso de 750 mm .....	68
Figura 66.	Vibración de piso de 750 mm con TMD sintonizado .....	69
Figura 67.	Metodología propuesta .....	70
Figura 68.	Vibración sin TMD del edificio de dos plantas.....	75
Figura 69.	Sintonizado 1 del TMD con frecuencia aproximada .....	77
Figura 70.	TMD sintonizado con frecuencia y amortiguamiento aproximados.....	78
Figura 71.	Registro de desplazamiento con TMD sintonizado a frecuencia y amortiguamiento aproximados.....	79
Figura 72.	TMD sintonizado con frecuencia aproximada y amortiguamiento óptimo. 80	
Figura 73.	Registro de desplazamiento con TMD sintonizado a frecuencia aproximada y amortiguamiento óptimo.....	80
Figura 74.	Sintonizado teórico del TMD con frecuencia y amortiguamiento óptimos. 81	
Figura 75.	Sintonizado real del TMD con frecuencia y amortiguamiento óptimos. 82	
Figura 76.	Vibración del edificio de dos pisos con TMD sintonizado.....	83



## Capítulo 1: Introducción

Actualmente la construcción tiende a edificios en los que predomina la altura y para su construcción se utilizan materiales ligeros y de gran resistencia, descuidando en ocasiones la rigidez. De este modo las estructuras resultante son ligeras, poco amortiguadas y susceptibles de experimentar desplazamientos apreciables ante las cargas que las soliciten (viento, terremotos,...). En ocasiones esto supone un problema ya que ante determinados fenómenos naturales se producen vibraciones lo que provoca la incomodidad de los usuarios e incluso puede dar lugar al fallo de la estructura. Es importante conocer las estructuras de los edificios para saber cuáles son sus posibles puntos débiles y estudiar métodos con los cuales minimizar los daños provocados.

En el caso concreto de vibraciones, sería deseable que su amplitud fuera pequeña y tuvieran un alto amortiguamiento. A esto contribuye de forma muy apreciable la incorporación de dispositivos TMD. TMD es un conjunto mecánico asemejable a un sistema de 1gdl definido por una masa móvil, una rigidez y un amortiguamiento que tiene la capacidad, una vez sintonizado adecuadamente con el edificio sobre el que se instala, de reducir el factor de amplificación dinámico entorno al modo de vibración que quiere mitigar y simultáneamente aumentar el coeficiente de amortiguamiento de ese modo.

### 1.1 Objetivos

El objetivo principal de este trabajo fin de grado (TFG) es la caracterización estática y modal de una maqueta de laboratorio que simula un edificio de dos plantas y la colocación en uno de sus forjados de un tuned mass damper (TMD).

Se pretende establecer una metodología de instalación in situ del TMD que permita asegurar su correcto sintonizado por comparación de la respuesta temporal experimental con respecto a la respuesta simulada del sistema discreto equivalente. Este procedimiento es el único que se puede seguir cuando no se tiene capacidad instrumental de calcular FRF's (funciones de respuesta en frecuencia) de forma experimental.

### 1.2 Organización del documento

Este TFG está dividido en varias partes, se comienza con una introducción en el primer capítulo, en el segundo capítulo se explica cómo se ha fabricado y montado cada pieza del edificio y del TMD, así como los instrumentos de medida que se utilizan, el tercer capítulo contiene los fundamentos teóricos en los que se basa la maqueta y las herramientas de simulación que se utilizan, el cuarto capítulo trata de verificar una metodología de trabajo valida que posteriormente pueda ser utilizada

en el capítulo 5 donde se realizan las medidas y comparaciones pertinentes entre lo obtenido mediante medida y mediante simulación, por último se encuentran las conclusiones y líneas futuras, la bibliografía y los anexos.

Durante todo el trabajo y con el fin de hacer más entendibles las explicaciones se han incorporado varias figuras, las que no se especifica su origen son de elaboración propia.

## Capítulo 2: Construcción de la maqueta y sensores de medida

### 2.1 Descripción, fabricación y montaje de los elementos de la estructura principal

La estructura principal está formada por dos pisos, unidos mediante tornillos, tuercas y arandelas. Ambos pisos están formados por dos placas de aluminio haciendo la función de columna y dos placas de metacrilato que funcionan como forjados. La altura del piso inferior es de 750 mm mientras que la del piso superior es de 500 mm. El piso inferior descansa atornillado a una placa de aluminio que se apoya en el suelo mediante cuatro soportes nivelables que pueden ser de goma o sustituirse por otras más rígidas metálicas.

#### 2.1.1 Descripción de los elementos

Las columnas son placas de 0,5 m o 0,75 m de longitud y 108,1 mm de anchura con 1,75 mm de espesor, fabricadas en aluminio.

Los forjados se consideran rígidos, las masas de los pisos incluyen la de los acelerómetros. El primer piso tiene una longitud de 0,32 m y una anchura de 0,108 m con un espesor de 2,4 cm. Su masa es de 1,16 kg. El segundo piso tiene la misma anchura y longitud con espesor de 1,2 cm. Su masa es de 0,68 kg.

En resumen se fabrican 4 módulos intercambiables que dan origen a 4 combinaciones de edificio de dos plantas o a 2 edificios de dos plantas por separado. En la Figura 2 se muestra la combinación de los módulos de 0,75 m + 0,5 m.

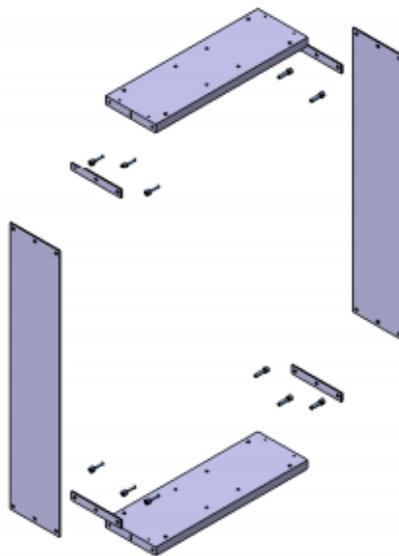
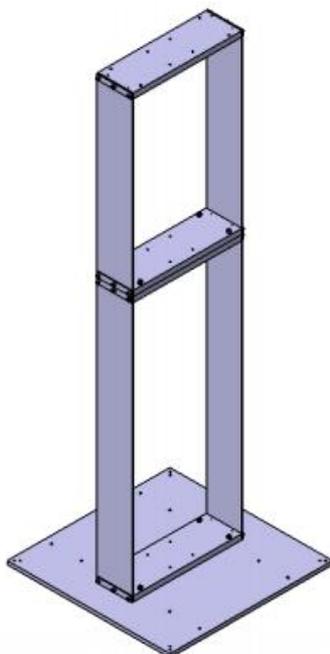


Figura 1. Expansión Módulo de 0,5 m



**Figura 2. Estructura Catia módulos diferentes**

Finalmente en la Figura 3 se muestra la expansión de la unión entre módulos y de la unión entre el modulo y la base, estas uniones se realizan de forma de que el intercambio entre módulos se realice de una forma rápida y sencilla.

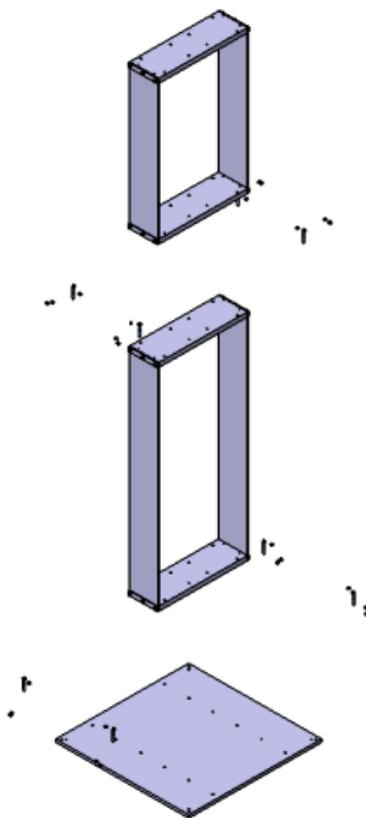


Figura 3. Expansión de las uniones

### 2.1.2 Fabricación de la estructura principal

La construcción de la maqueta se realiza en el taller de fabricación de la Escuela de Ingenierías Industriales con sede en Francisco Mendizábal de Valladolid en el que se dispone de toda la maquinaria y herramienta necesaria.

Inicialmente se compran las bases, las placas laterales y las pletinas de aluminio y los forjados de metacrilato cortados a las medidas deseadas. También se compra toda la tornillería necesaria.

Los taladros roscados de los laterales de los forjados se realizan con la fresadora para asegurar la perpendicularidad y el posicionamiento de los taladros en todas las placas de metacrilato.

Debido a que el cabezal de la fresadora respecto a la mordaza no está alineado se procede a la alineación de ambos con ayuda de galgas, un reloj comparador con soporte magnético y de un perfil patrón de acero.



**Figura 4. Alineación del cabezal de la fresadora**

Para ello se aflojan todas las tuercas de fijación del cabezal de la fresadora y de la mordaza manteniendo un apriete mínimo que evite movimientos bruscos. Mediante pequeños movimientos de giro de uno de los dos elementos y a continuación desplazando el carro en su dirección longitudinal el reloj comparador muestra la desviación presente que se mejora con el siguiente giro de uno de los elementos.

El procedimiento utilizado para realizar los taladros es:

Se coloca un portaherramientas en el cabezal de la fresadora y en este se coloca una broca de 4,2 mm de diámetro y se aprieta con la herramienta de apriete.

Primero se realizan los taladros centrales. Para posicionar la broca se toma como referencia la cara anterior y la superior. Se coloca cinta de carroceros en las caras como se ve en la Figura 5 y se lleva la broca en marcha hasta que comience a cortar la cinta de carroceros con el lateral de la broca. A continuación se desplaza el carro de la mordaza hasta llegar a la posición del taladro. Teniendo en cuenta que la broca es de 4,2 mm de diámetro y que como referencia se toma una cara de la broca. Primero posicionamos el eje vertical de los taladros desplazando el carro 9,6 mm en dirección horizontal desde la referencia de la cara anterior y a continuación desde la referencia de la cara superior desplazamos el carro 52,1 mm en dirección vertical. Una vez llegado a la posición deseada con ayuda de los selectores milimetrados se bloquean los carros y se realizan los taladros a las 4 placas por ambos lados, en total 8 taladros a una profundidad de 20 mm.

En la broca se coloca cinta de carroceros como se ve en la Figura 5 que marca la profundidad de 20 mm y facilita visualmente la operación.



**Figura 5. Posicionamiento de la Broca**

La velocidad del husillo portaherramientas seleccionada mediante el selector de velocidades (Figura 6) será de 950 rpm para que la velocidad de corte sea alta que junto con una velocidad de avance manual alta se consigue que el taladro se realice rápidamente evitando que la viruta producida se caliente y se funda pudiendo embozar la broca y perjudicar el taladrado.



**Figura 6. Selector de Velocidades de la Fresadora**

Los taladros superiores/inferiores se realizan de la misma forma. Con un desplazamiento vertical de 9,1 mm respecto de la cara superior se posiciona la broca. La diferencia está en que la pieza se gira respecto a su eje horizontal para

realizar el otro taladro y después se repite en el otro lado realizándose un total de 16 taladros.



**Figura 7. Broca Posicionada para Realizar los Taladros Superiores/Inferiores**

Una vez se realizan todos los taladros se limpia la arista con manualmente con una broca de mayor diámetro. Finalmente se roscan todos los taladros a M5 con ayuda de un macho de roscar (Figura 8). Para ello se pasan los tres machos. El taladro se rosca 15 mm de profundidad.



**Figura 8. Roscado con Macho de Roscar**

Los taladros pasantes de la cara superior se realizan con el taladro de columna y con ayuda de una plantilla. La plantilla se realiza con una placa de acero cortada con las mismas medidas que la placa de metacrilato y se marca la posición de los taladros con ayuda de una escuadra milimetrada, regla y punta de marcar. A continuación se hacen los taladros con la medida de diámetro correspondiente. Con la plantilla se

consigue que todos los taladros de todas las placas queden perfectamente situados y no haya problemas en el montaje.

Igual que en la fresadora la velocidad de corte y la velocidad de avance serán elevadas para evitar problemas con el calentamiento de la viruta y que esta se funda.

La sujeción de la plantilla a la placa de metacrilato se realiza mediante dos sargentos y una vez terminados dos taladros contrapuestos diagonalmente se colocan los tornillos y tuercas para poder retirar los sargentos y facilitar las posteriores operaciones.



**Figura 9. Plantilla Unida a la Placa de Metacrilato**

Los taladros de las placas y las pletinas se realizan con un taladro eléctrico de mano y con ayuda de una plantilla de acero sujeta con sargentos.

Los taladros de las bases también se realizan en el taladro de columna. Primero se marca la posición de todos los taladros en una de las bases (Figura 10) con ayuda de escuadra milimetrada regla y punta de trazar y se realizan los taladros con las diferentes medidas de diámetro. Finalmente se unen las dos bases con ayuda de sargentos y se repiten los taladros.



**Figura 10. Base Marcada**

La velocidad del portabrocas se ajusta mediante correas y también será elevada debido a que el aluminio se mecaniza con velocidades de corte altas.



**Figura 11. Taladrado Base**

Los taladros de las esquinas donde están situados los apoyos se roscan completamente a M6 con ayuda de los machos de roscar (Figura 12).



**Figura 12. Roscado Fijación Apoyos**

### **2.1.3 Montaje de la estructura principal**

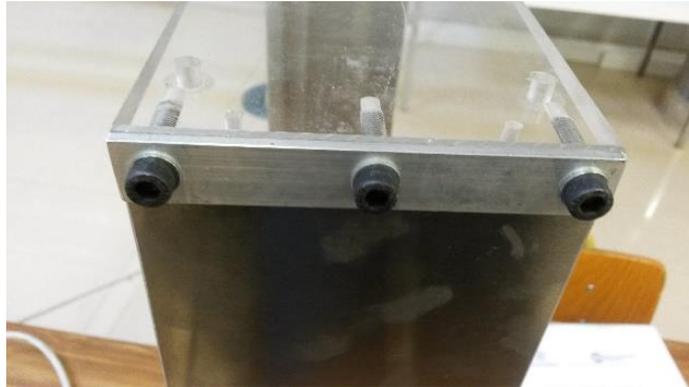
El montaje de los módulos se realiza individualmente para después poder intercambiarles rápidamente y formar la estructura deseada junto con la base.

Cada módulo constara de dos placas laterales de aluminio a modo de columnas junto con dos placas de metacrilato a modo de forjados y cuatro pletinas que aumentan la rigidez de las uniones. Todas las uniones se realizan con tornillos.

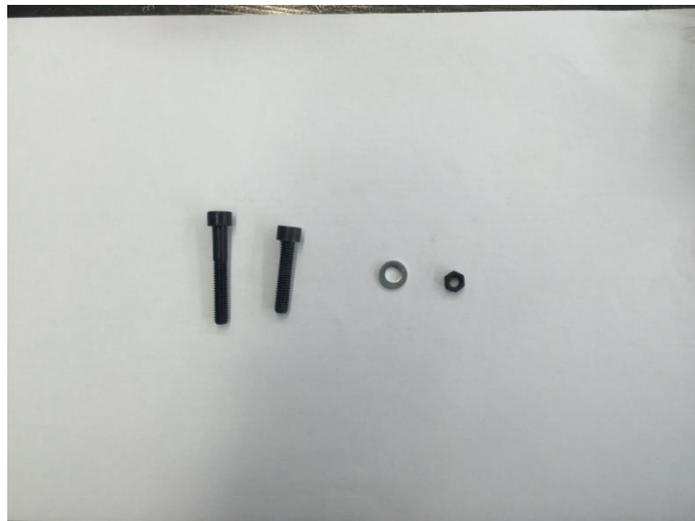


**Figura 13. Montaje Módulo**

La unión de las placas laterales con los forjados se realiza con tornillo de rosca M4 con arandela. La unión queda constituida por tornillo, arandela, pletina, placa lateral de aluminio y placa de metacrilato (Figura 14). Cada unión tiene un total de tres tornillos que se aprietan con llave allen del 4.

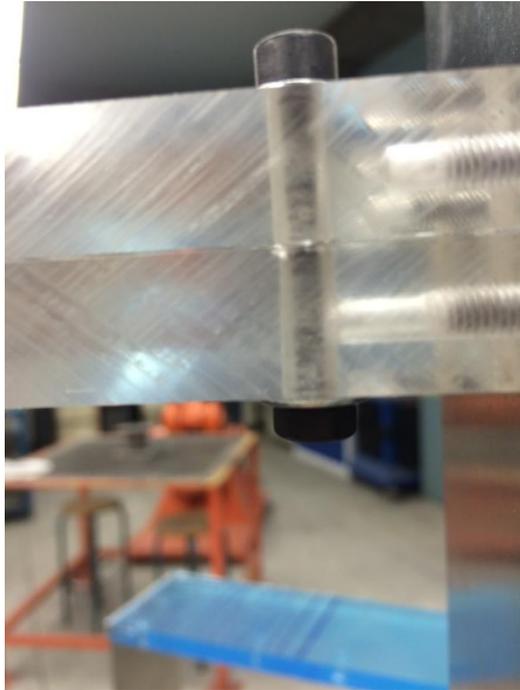


**Figura 14. Detalle Unión**



**Figura 15. Tornillos Arandela y Tuerca para las Uniones**

La unión entre los módulos y módulo base se utilizan tornillos de M5 junto con dos arandelas y una tuerca (Figura 16). Por cada unión se necesitan cuatro tornillos.



**Figura 16. Unión entre Módulos**

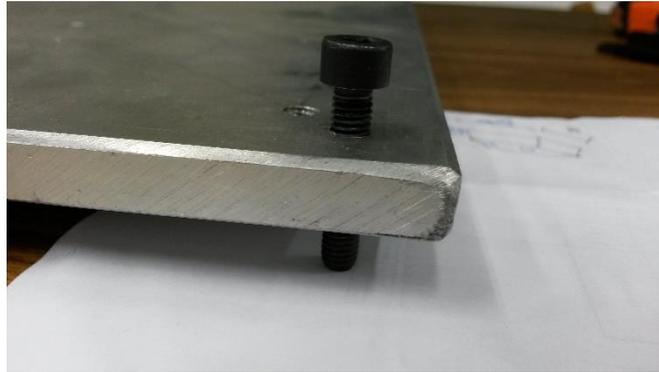
Para completar la estructura se colocan unos apoyos que van roscados a la base. Les hay de dos tipos:

- Elásticos: son unas patas de goma con terminación en un vástago roscado (Figura 17)



**Figura 17. Apoyo Elástico**

- Rígidos: son tornillos de rosca M6.(Figura 16)



**Figura 18. Apoyo Rígido**

Los apoyos llevan una tuerca que una vez nivelada la estructura evita que se muevan.

El resultado final es de cuatro módulos individuales e intercambiables con los que se puede crear diferentes combinaciones de estructuras de dos plantas en dos edificios por separado (Figura 19).



**Figura 19. Edificio junto a Módulos**

## **2.2 Descripción, fabricación y montaje del TMD**

El tuned mass damper (TMD) es un amortiguador de masa de fabricación propia. Consiste en un bastidor de aluminio en forma de L que en su lado corto sujeta una regla por un extremo pudiendo cambiar su longitud libre, en el otro extremo de esta hay un imán y una masa que se puede variar. En el extremo del lado largo del bastidor hay dos piezas de nylon y un tornillo que las une, la más interior tiene pegada una placa de aluminio que crea un campo magnético con el imán amortiguando la oscilación de la regla. Para variar el amortiguamiento se acerca o aleja la placa de aluminio al imán, para ello hay que mover las dos piezas de nylon, la del extremo sirve para un ajuste más grueso y la interior se mueve girando el tornillo que las une y sirve para un ajuste más fino.

El principio de funcionamiento de este amortiguador está basado en las corrientes de Foucault (Anexo A).

### **2.2.1 Descripción del TMD**

El bastidor está formado por una barra de aluminio de sección cuadrada de 11 mm x 11 mm con forma de L y longitud 300 mm. En su parte más larga lleva dos taladros para poder ser fijado al forjado del edificio y en esta parte es también donde se colocan las piezas de nylon. En su parte más corta lleva otros dos taladros donde se fija otra pequeña pieza de aluminio de la misma sección que el bastidor y que mediante dos tornillos hace que la regla quede aprisionada y no se mueva longitudinalmente.

La regla es de aluminio o de acero, dependiendo de la rigidez que se desee y sus medidas varían dependiendo del modelo de regla que se utilice. En su extremo libre se ha realizado un taladro para poder colocar un espárrago de plástico en el cual se pueden fijar tuercas. Colocando más o menos se puede variar la masa móvil del TMD. Unido magnéticamente a las tuercas está el imán.

Las piezas de nylon son dos prismas de 26 mm x 45 mm x 29 mm en su parte inferior se ha realizado una hendidura para que puedan deslizarse por la parte inferior del bastidor. Longitudinalmente ambos tienen un taladro por el que cruza un tornillo de plástico y que es el que permite el movimiento fino del prisma interior. En la parte inferior del prisma exterior hay un pequeño taladro que atraviesa un tornillo y mediante una mariposa le fija al bastidor impidiendo su desplazamiento.

La placa de aluminio tiene unas dimensiones de 50 mm x 30 mm y se fija mediante cinta adhesiva de doble cara y mediante una goma a la pieza interior de nylon. Es la parte más cercana al imán sin que haya contacto entre ambos.

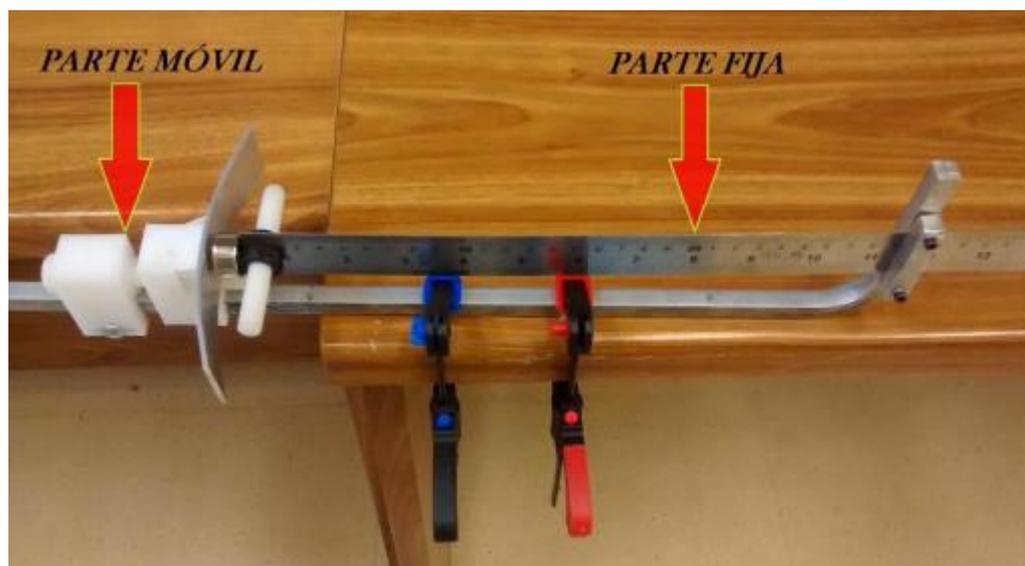


Figura 20. TMD

### 2.2.2 Fabricación del TMD

La construcción de la nueva maqueta se realiza en el taller de fabricación de la Escuela de Ingenierías Industriales con sede en Francisco Mendizábal de Valladolid en el que se dispone de toda la maquinaria y herramienta necesaria.

Inicialmente se compran las barras de aluminio, las piezas de nylon, las reglas y las placas de aluminio. También se compra toda la tornillería necesaria.

Para la fabricación de los bastidores mediante una plegadora se dobla en frío la barra de aluminio hasta que forme un ángulo ligeramente inferior a  $90^\circ$ . Se debe aumentar la carga de la plegadora de forma progresiva y lenta para evitar la fractura del material. La razón por la que el ángulo es ligeramente superior a  $90^\circ$  es porque cuando se retira la carga el material tiende a recuperar su forma inicial variando un poco el ángulo por lo que de esta manera conseguimos el ángulo recto deseado.



**Figura 21. Inicio del doblado del bastidor**



**Figura 22. Final del doblado del bastidor**

Para los taladros mediante los cuales se fija el bastidor al forjado se utiliza un taladro de columna para de esta manera asegurar la perpendicularidad. En este taladro también se realizan los agujeros para la posterior fijación de la regla, se realizan a la vez en el bastidor y la pequeña pieza de aluminio para así asegurar su coincidencia.



**Figura 23. Taladro en la base del bastidor**



**Figura 24. Taladro en la zona lateral del bastidor**

En la fabricación de las piezas de nylon se parte de una barra de este material, mediante una sierra eléctrica se cortan pequeños primas a partir de los cuales se construirán las piezas.



**Figura 25. Corte de la barra de nylon**

El primer paso para su construcción el limar ligeramente las caras que han sido expuestas a la sierra, posteriormente mediante una pequeña fresadora se construyen las canaletas que van a deslizar por el bastidor. Las canaletas de las dos piezas son de la misma anchura 10 mm pero de diferente profundidad, una es de 10 mm y otra de 20. Para esta retirada de material se selecciona la broca adecuada para esa anchura y ese material y se dan varias pasadas de 1 mm de profundidad cada una, para la pieza de profundidad 10 mm se necesitan 10 pasadas y para la de 20 mm 20 pasadas.



**Figura 26. Fresado de las piezas de nylon**

En la regla con un taladro manual en el que se coloca una broca adecuada para aluminio de diámetro 10 mm se realiza un agujero en un extremo de esta para que permita el paso de un esparrago roscado.

Para la plaquita de aluminio se parte de una lámina de aluminio de espesor 3 mm y con una sierra manual apta para aluminio se corta una placa de dimensiones 50 mm x 30 mm.

### 2.2.3 Montaje del TMD

En el montaje del TMD se quieren unir tanto la regla como los prismas de nylon con la placa de aluminio al bastidor y todo ello a uno de los forjados del edificio principal.

El primer paso es la unión de la regla al bastidor, para ello se utiliza la pequeña pieza de aluminio de la misma sección que el bastidor, esta pieza tiene dos taladros que coinciden con los que hay en la parte corta del bastidor, la regla va colocada entre estas dos piezas si se fija mediante dos tornillos M3, que se aprietan con llaves de allen, con sus correspondientes tuercas y arandelas. Aflojando estos tornillos y deslizando la regla se puede variar la longitud libre de esta.

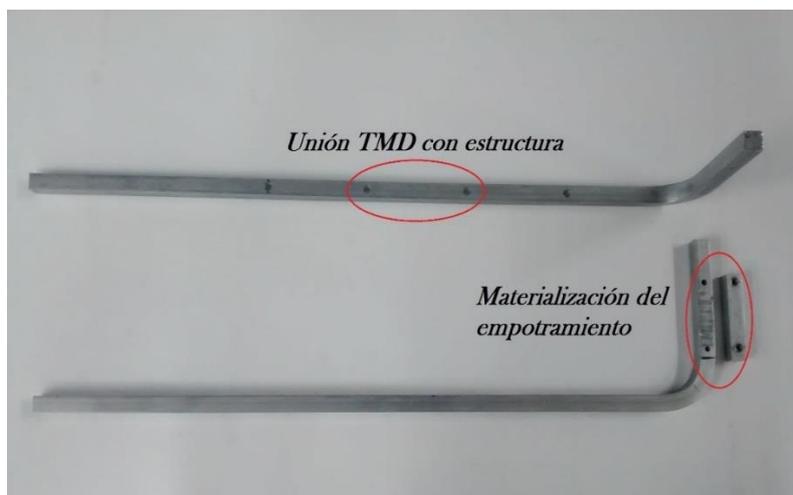
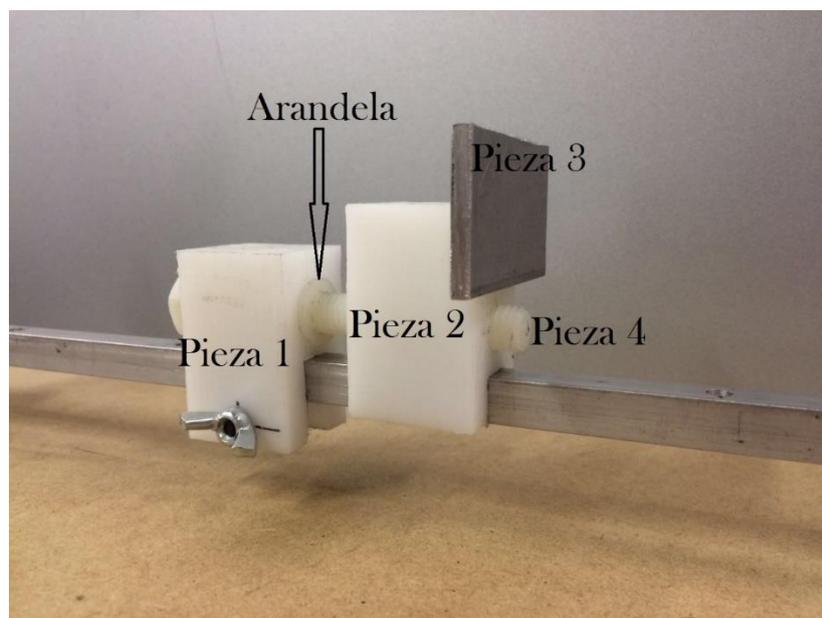


Figura 27. Unión de la regla con el bastidor

Lo siguiente es la unión de las dos piezas de nylon, se unen una a otra mediante un tornillo de plástico M10 que desliza por la pieza más exterior y rosca en la más interior para así poder jugar con la longitud existente entre ambas.



**Figura 28. Unión de las dos piezas de nylon**

Para fijar ambas piezas al bastidor se utiliza un tornillo M3 con su correspondiente mariposa que coloca en la parte inferior de la pieza exterior.

Se continúa con la fijación de la placa de aluminio, esta unión se realiza mediante cinta adhesiva de doble cara que une una cara de la placa con una cara de la pieza de nylon interior. Para asegurar la fijación se pone también una goma elástica que une ambas piezas.

Por último, para la fijación del TMD al forjado, en la parte inferior del bastidor del TMD hay unos taladros que coinciden con otros que hay en los forjados del edificio. A través de estos taladros se fija el TMD al edificio con dos tornillos de métrica M5, apretados con llave allen, y sus correspondientes tuercas y arandelas. Al ser una unión mediante tornillos se puede cambiar el TMD de sitio en el mismo forjado o ponerle en otro piso.



**Figura 29. Fijación del TMD al forjado**

Finalmente el TMD queda fijado a la maqueta del edificio de la forma que se ve en la Figura 29.



**Figura 30. TMD situado en el edificio**

### **2.3 Dispositivos y proceso de medida**

En este apartado se expone con que aparatos se realiza la medida de los distintos ensayos realizados sobre la maqueta, como es la configuración de estos aparatos y la forma de realizar el registro.

### 2.3.1 Introducción al método experimental

En la Figura 33 se puede ver montado el prototipo de TMD, y los aparatos de medida que se utilizan para el registro experimental de la frecuencia de resonancia del sistema.

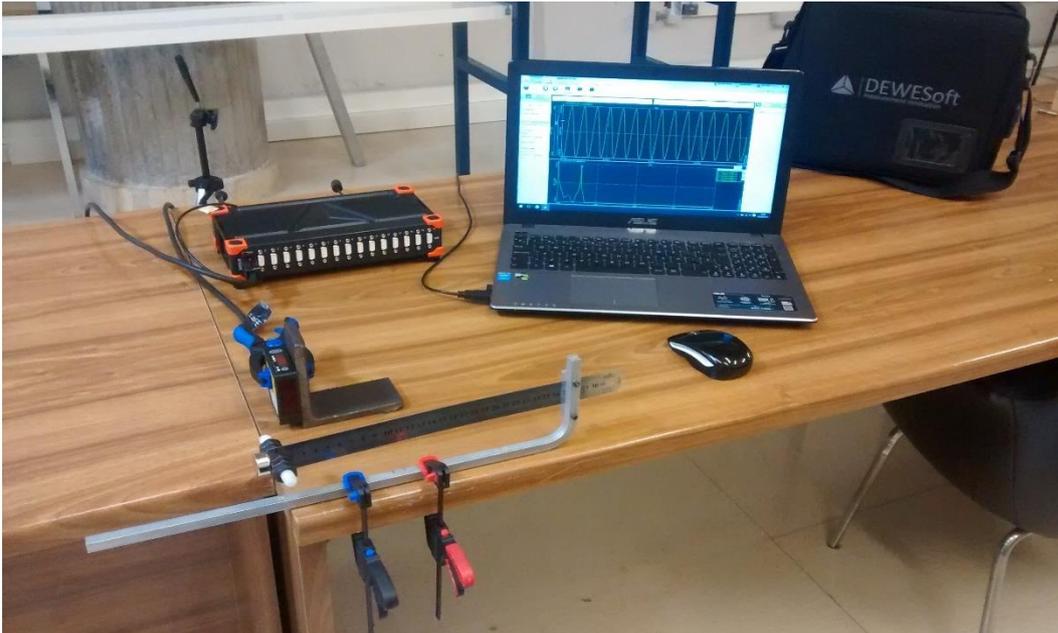


Figura 31. Método de medida experimental.

Antes de desarrollar el procedimiento seguido para la recogida de datos, se va a explicar brevemente, las características y configuración de los aparatos de medida utilizados.

### 2.3.2 Instrumentos de medida

El instrumental utilizado para la recogida de datos ha sido un sensor de desplazamiento o vibrómetro láser y un acelerómetro.

El láser es un instrumento de medida para la cuantificación de oscilaciones mecánicas en una, dimensión. Últimamente se ha relacionado con metrología de superficies de cuerpos relativamente medianos (meso) y microscópicos (micro) para ayudar a hacer análisis modal y correlacionar resultados experimentales con Análisis de Elementos Finitos.

El vibrómetro contiene un láser, que se enfoca a la superficie para medir. Debido al efecto Doppler, la frecuencia de la luz láser que se refleja varía si se desplaza la superficie enfocada.

Para este proyecto se ha utilizado un sensor laser de la marca Panasonic modelo HL-G112-A-C5, como el que se puede ver en la Figura 33.

El vibrómetro posee un rango de medida de  $\pm 60$  mm y una resolución de  $8\mu\text{m}$ , para una correcta toma de datos la distancia al centro de medición debe de ser de 120mm. En el anexo B se puede encontrar las especificaciones completas.



Figura 32. Sensor de desplazamiento láser utilizado en el registro de datos.



Figura 33. Detalle del sensor de desplazamiento láser.

El láser cuenta con un conector D-SUB de 9 pines como el de la Figura 34 con el que conectará al sistema de procesado de señal.



**Figura 34. Conector D-SUB.**

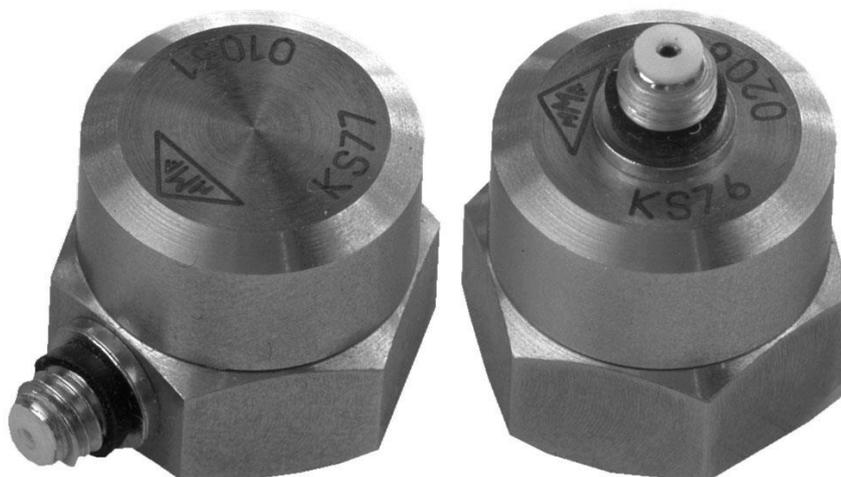
Al propio conector se le ha acoplado un cable que sirva de alimentación de energía para el sensor láser, que irá conectado también al dispositivo de procesado de datos. (Figura 35)



**Figura 35. Alimentación del sensor láser.**

El acelerómetro es un instrumento de medida capaz de registrar aceleraciones en una, dos y tres dimensiones.

El acelerómetro posee un pequeño agujero roscado a través del cual se fija un imán. Mediante este imán se realiza la fijación del aparato de medida a lugar donde se quieran medir las aceleraciones.



**Figura 36. Acelerómetro**

Para este trabajo se ha utilizado un acelerómetro piezoeléctrico IEPE-ICP METRA MMF KS76C.10/.100 como el de la Figura 36.

Las características principales del acelerómetro son:

- Rango: de  $\pm 40$  g hasta  $\pm 60$  g.
- Ancho de banda: de 0,12 a 33000 Hz.
- Sensibilidad: hasta 140 mV/g, con valores medios según modelo.
- Encapsulado: acero inoxidable con salida conector.

En el anexo C se puede encontrar las especificaciones completas.

El acelerómetro cuenta con un conector D-SUB de 9 pines como el de la Figura 34 con el que conectará al sistema de procesamiento de señal.

### **2.3.3 Dispositivo de registro de señal (tarjeta de adquisición)**

La adquisición de datos se ha llevado a través del hardware SIRIUS HD-STG desarrollado por el fabricante DEWEsoft, como el de la figura 37.



**Figura 37. SIRIUS HD-STG.**

Dicho dispositivo consta de 16 canales de entrada del tipo D-SUB, donde se podrá conectar el sensor láser de desplazamiento. Para poder procesar los datos registrados es necesario conectar el hardware (SIRIUS) a algún dispositivo donde se tenga instalado el software específico del sistema proporcionado por el fabricante (DEWEsoft), para ello el SIRIUS HD-STG dispone de un puerto usb 2.0. El resto de características y especificaciones aparecerán descritas en el anexo D.

La Figura 38 muestra un ejemplo de registro procesado con el software proporcionado por el fabricante.

Software: Dewesoft X2, versión SP5.



Figura 38. Ejemplo de registro procesado.

El software anterior nos permite visualizar la señal temporal registrada en tiempo real, así como la FFT. Además, se podrán grabar las señales y exportar los datos en distintos formatos como por ejemplo .txt o .xlsx.

### 2.3.4 Configuración del software

La toma de datos experimentales, en esta parte del trabajo se centrará en la obtención de la frecuencia propia del TMD para las distintas situaciones. Será un proceso que se puede hacer en modo online pues es software anteriormente mencionado lo permite, sin necesidad de postprocesar los datos registrados con otros programas.

Lo primero que hay que hacer, antes de nada, será seleccionar el sensor que queremos utilizar en el software, en este caso el sensor láser, esto se hará en la pestaña acquisition\Ch. setup\ analog in\, ahí se pueden ver todos los canales de entrada de que dispone el SIRIUS HD-STG, pues bien, para entrar configurar el láser, se accede desde el botón Setup del canal que este usado.

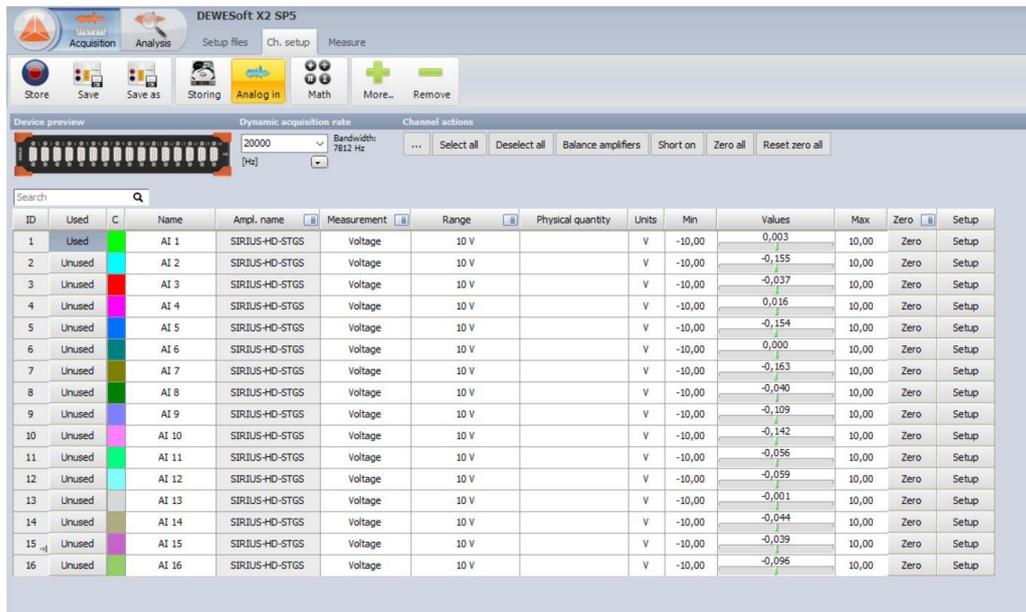


Figura 39. Pantalla del software para seleccionar sensor láser.

Cuando se acceda al Setup, aparecerá una pantalla como la de la Figura 40, donde se añadirá la calibración requerida por el láser.

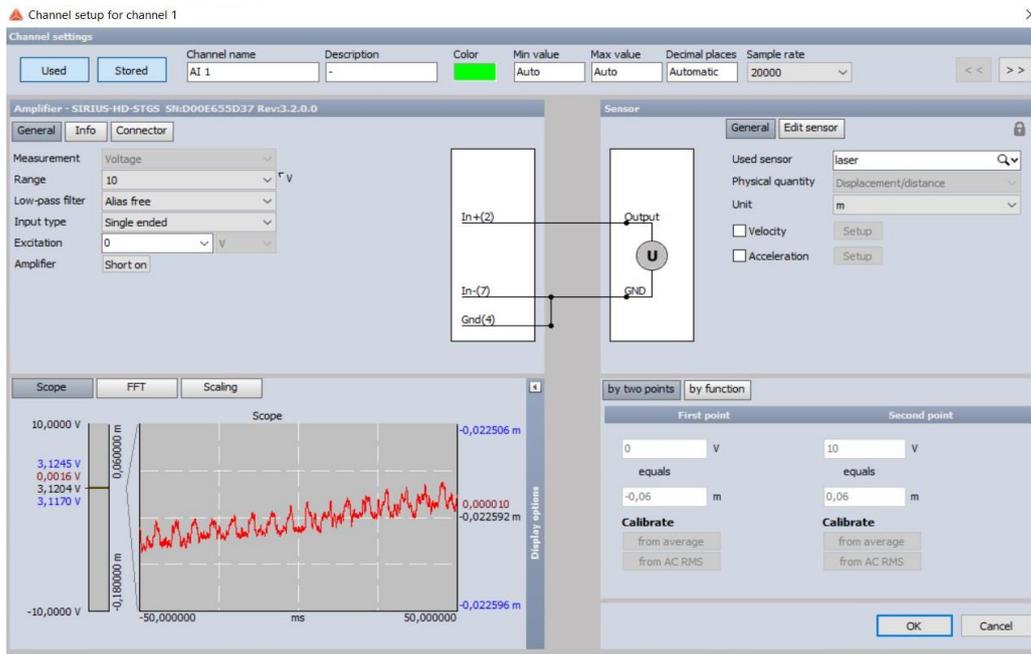


Figura 40. Menú de calibración de sensor de desplazamiento láser.

Como ya se mencionó en apartados anteriores el sensor de desplazamiento láser con el que se van a registrar las señales tiene un rango de medida, que se debe respetar para que la toma de datos sea la correcta. La calibración de instrumento de medición se ha adecuado para que situando el centro de medición a 120mm del láser la señal registrada entorne respecto al cero.

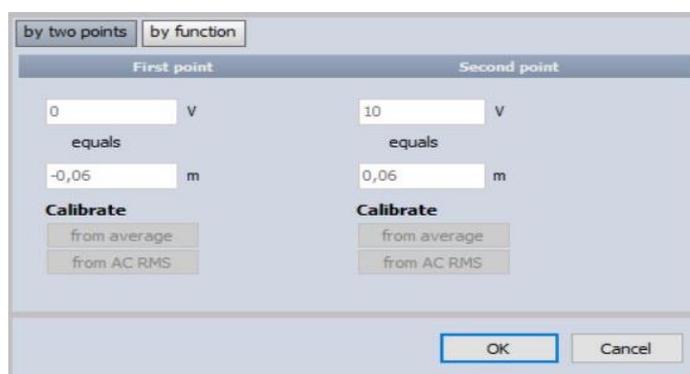


Figura 41. Calibración de sensor de desplazamiento láser.

En la Figura 41 aparecen los valores proporcionados por el fabricante para la calibración del instrumento de medida.

Para la configuración del acelerómetro se procede de la misma forma que para el láser eligiendo el canal correspondiente donde esté conectado el acelerómetro Figura 39.

Se accede al Setup del canal (Figura 40) y en el desplegable used sensor se selecciona acelerometer.

En el caso del acelerómetro no es necesaria la introducción de los datos de calibración ya que son tomados por defecto.

Una vez añadida la calibración de los sensores, se configurará la interfaz para que se muestre por pantalla los datos deseados de la señal registrada. En este caso se diseñará la pantalla para que se muestre la señal temporal y la FFT correspondiente. El software muestra por defecto solamente la señal temporal registrada, así que para que se muestre también la FFT, se accederá a la pestaña acquisition\design. En la Figura 42 se muestra como se añade esta opción.

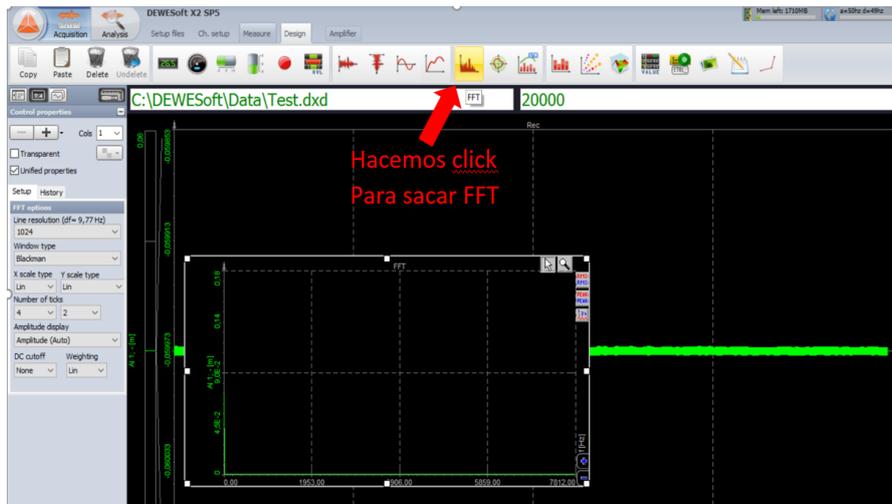


Figura 42. Diseño de pantalla. Añadir FFT.

Una cuestión importante para la ventana de la FFT, será que el eje de ordenadas debe de estar en escala logarítmica, también se pondrá la máxima resolución posible que acepte el sensor. Las configuraciones anteriores se harán desde la pestaña Setup que aparece en la parte izquierda de la pantalla.

Por último, un detalle a tener en cuenta, que no influye en el mal funcionamiento del software, pero si en la precisión del valor de la frecuencia natural mostrada por pantalla, será la frecuencia muestreo con la que se esté registrando la señal.

A modo de ilustrar lo mencionado anteriormente, si se muestre a 20000 datos por segundo se obtiene una resolución de 0.61Hz en cambio si se hace a 200 datos por segundo la resolución sería 0.0061 Hz.

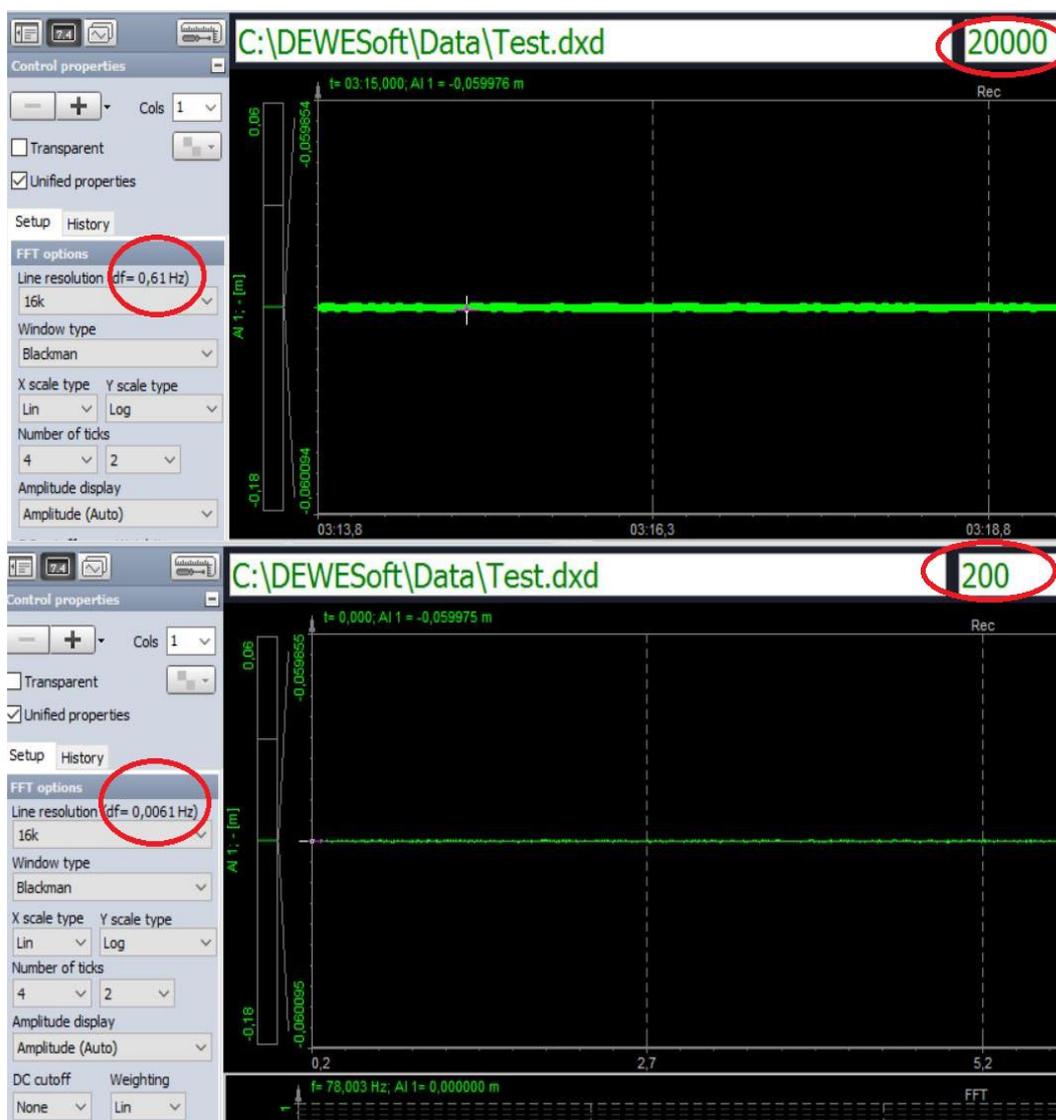


Figura 43. Variación de la resolución con la frecuencia de muestreo.

Para todos los experimentos realizados, se registrarán los datos siempre con una frecuencia de muestreo de 200 datos por segundo, para obtener una resolución aceptable. La desventaja de registrar a tan baja frecuencia será que se necesitará más tiempo para obtener la FFT ya que para su cálculo se necesita una cantidad significativa de datos.

## Capítulo 3: Modelado de sistemas vibratorios y simulación

### 3.1 Concepto de vibración y tipos de vibraciones

Movimiento vibratorio o vibración es la variación o cambio de configuración de un sistema en relación al tiempo, en torno a una posición de equilibrio estable, su característica fundamental es que es periódico, siendo frecuente el movimiento armónico simple, por lo que este movimiento adquiere una singular importancia en los estudios vibratorios.

Los sistemas mecánicos al ser sometidos a la acción de fuerzas variables con el tiempo, principalmente periódicas, responden variando sus estados de equilibrio y, como consecuencia, presentan cambios de configuración que perturban su normal funcionamiento, presentan molestias al personal que los maneja y acortan la vida útil de los mecanismos. Dependiendo de si actúan fuerzas o no sobre el sistema, se puede clasificar el movimiento vibratorio en:

- Vibraciones libres si no existen fuerzas o acciones exteriores directamente aplicadas al sistema a lo largo del tiempo.
- Vibraciones forzadas si existen acciones o excitaciones directamente aplicadas al sistema a lo largo del tiempo, además de las fuerzas o momentos internos.

Tanto las vibraciones libres como las forzadas pueden subdividirse, dependiendo de la existencia o no de fuerzas resistentes que amortiguan el movimiento vibratorio, en:

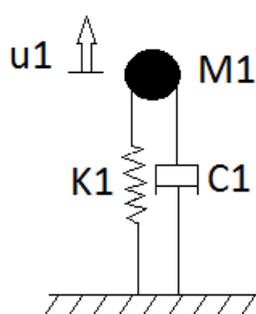
- Sin amortiguamiento: No existe resistencia pasiva al movimiento del sistema.
- Con amortiguamiento: Existen resistencias pasivas al movimiento del sistema, es decir, fuerzas o momentos disipativos que amortiguan el movimiento vibracional.

### 3.2 Vibración es sistemas de un grado de libertad

A la hora de intentar describir el comportamiento vibratorio mediante unas ecuaciones analíticas que describan el fenómeno, se comprueba que lleva a ecuaciones muy complejas y difíciles, tanto de resolver como de comprender. Por lo tanto, para hacer una primera aproximación del problema, se propone crear modelos más sencillos (modelos discretos), cuyas ecuaciones son más sencillas, tanto de resolver como de interpretar dicha resolución.

El modelo más sencillo que se puede crear y que además es el que nos interesa, para la resolución del comportamiento de un piso del edificio o del TMD, es un modelo de un grado de libertad.

A continuación se va a plantear el modelo masa – rigidez – amortiguamiento que se adaptará para caracterizar el sistema de disipación de vibraciones que se está tratando en el presente trabajo.



**Figura 44. Modelo masa-rigidez-amortiguamiento**

- **Masa (m):** es una masa puntual que representa la masa total del sistema.
- **Rigidez (k):** representado por un resorte ideal, sin masa, que manifiesta el hecho de que el sistema es elástico. Fuerzas iguales y de sentidos opuestos, trabajando en un rango lineal, fuerza proporcional a la deformación recuperadora hacia la posición de equilibrio.
- **Amortiguamiento (c):** amortiguador viscoso ideal, sin masa, de coeficiente de amortiguación  $c$ , que representa la disipación de energía que presenta todo fenómeno vibratorio, que es la responsable de que, en general, la vibración vaya disminuyendo a lo largo del tiempo. Fuerzas en los extremos iguales y de sentido opuesto, proporcional a la velocidad relativa entre extremos y recuperadora hacia el equilibrio.

El muelle y la masa almacenan y ceden energía (potencial y cinética respectivamente) y el amortiguador la disipa.

### 3.2.1 Sistema libre no amortiguado. Modelo m-k

Consideremos el sistema vibratorio más sencillo posible, esto es, uno formado por un resorte lineal  $k$  y una masa  $m$ , como el de la Figura 45. Al deformar el muelle

aparece una fuerza  $F$ , proporcional a la elongación del resorte, donde  $k$  es una constante de rigidez de muelle.

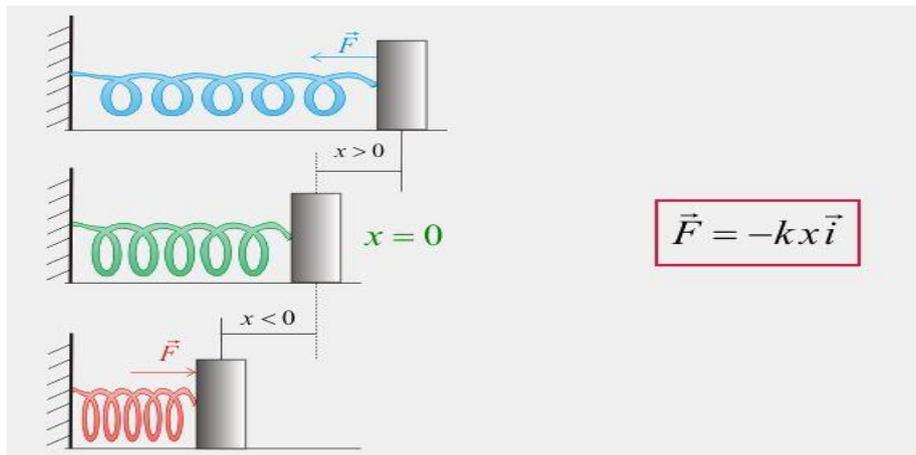


Figura 45. Sistema masa - resorte.

Se supone que la masa  $m$  puede ser desplazada lateralmente sin resistencia alguna, por esto se dice que es un sistema no amortiguado. Aplicando ahora la ley de Newton en la dirección del movimiento, se tiene:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1)$$

O sea,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

Esta ecuación diferencial rige el movimiento de la masa  $m$ . La solución general de esta ecuación será:

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sen\omega_n t \quad (3)$$

Donde  $A$  y  $B$  dependen de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad:  $x_0$  y  $\dot{x}_0$

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sen\omega_n t \quad (4)$$

Movimiento armónico simple de frecuencia natural:  $\omega_n$  (rad/s) ó fn (Hz) y periodo de oscilación T.

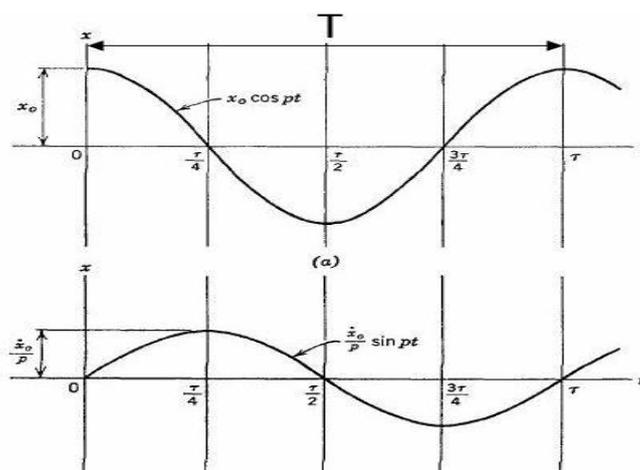


Figura 46. Movimiento armónico simple.

El comportamiento vibratorio de un sistema de un grado de libertad está caracterizado por la frecuencia natural, propia o de resonancia  $\omega_n$ , que es característica del sistema, es decir, sólo depende de sus propiedades mecánicas (masa y rigidez) y es independiente de parámetros externos, como las fuerzas que actúan sobre él.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (6)$$

A la hora de estudiar y cuantificar las vibraciones, se puede hacer tanto en el dominio temporal como en el dominio de frecuencias. Pero en la medida y caracterización de vibraciones, es más habitual y práctico trabajar en el dominio de frecuencias ya que en este dominio se entiende con más claridad qué es lo que está sucediendo, y por lo tanto, el estudio es más intuitivo.

Las magnitudes físicas que se utilizan para representar la vibración en el dominio temporal son, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

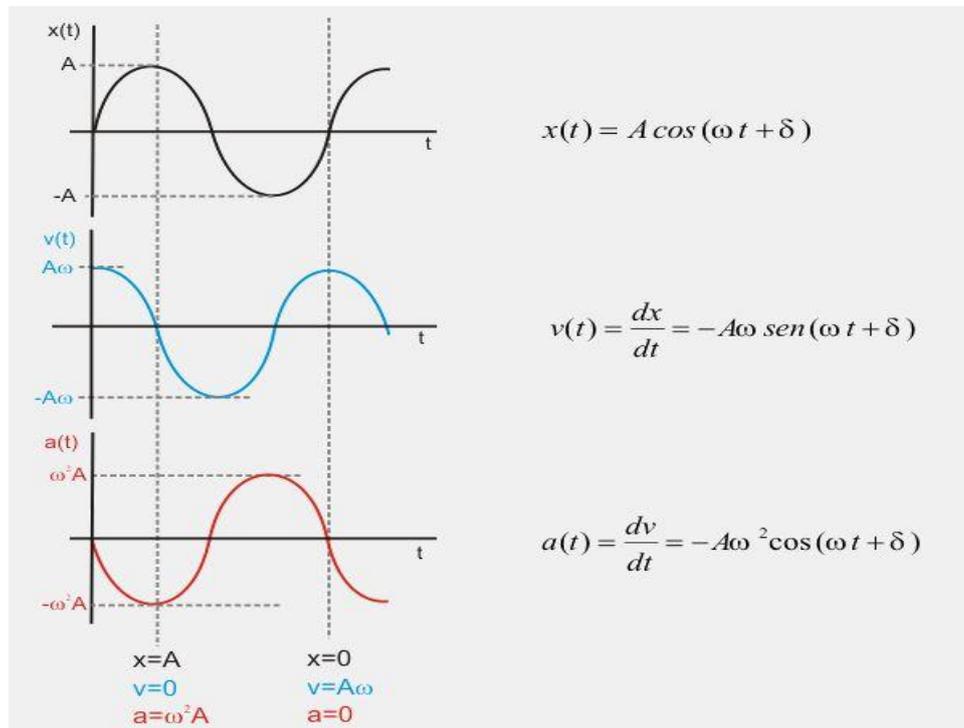


Figura 47. Posición, velocidad y aceleración de un sistema vibrante. Dominio temporal.

$\delta$  será una constante de fase y viene determinada por las condiciones iniciales. Como se puede ver en la Figura 47 la velocidad estará desfasada 90 grados y la aceleración 180 grados respecto de la posición.

Las vibraciones en el dominio del tiempo, que son las señales capturadas directamente del sistema, tienen plasmada toda la información acerca del comportamiento. Sin embargo, existe un problema a la hora de realizar un diagnóstico: estas señales están cargadas de mucha información en forma muy compleja. Existen otras formas para realizar un estudio de vibraciones, entre las cuales se encuentra analizar las señales en el dominio de la frecuencia. Para ello se emplea la gráfica de amplitud frente a frecuencia que es conocida con el nombre de espectro. Esta es la mejor herramienta que se tiene actualmente para el análisis de vibraciones.

Fue precisamente el matemático francés Jean Baptiste Fourier (1768 - 1830) quien encontró la forma de representar una señal compleja en el dominio del tiempo por medio de series de curvas sinusoidales con valores de amplitud y frecuencia específicos. Entonces lo que hace un analizador de espectros que trabaja con la transformada rápida de Fourier es capturar una señal de un sistema, calcular todas las series de señales sinusoidales que contiene la señal compleja y por último mostrarlas de forma individual en una gráfica de espectro.

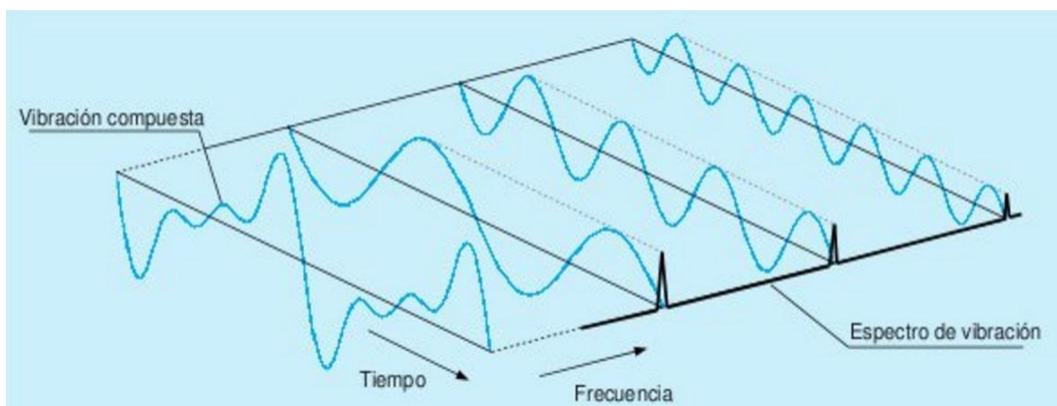


Figura 48. Procesado FFT de una onda vibratoria.

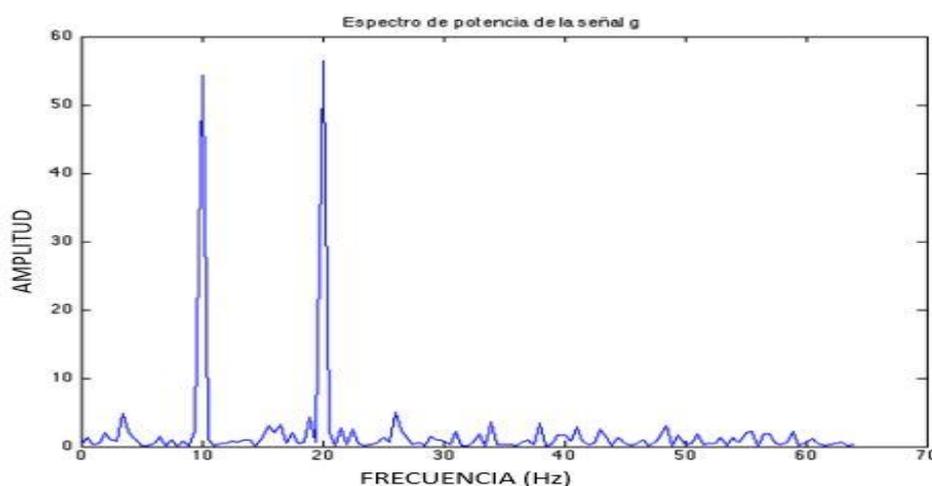


Figura 49. Ejemplo de transformada rápida de Fourier (FFT).

En la Figura 49 se puede ver un ejemplo de una FFT en la que se aprecia fácilmente que el sistema tiene dos frecuencias predominantes. Esta herramienta será una de las que se utilizará en la parte experimental del TFG para la caracterización de las frecuencias naturales del TMD.

### 3.2.2 Sistema libre amortiguado. Modelo m-k-c

El sistema ahora consta de un elemento disipador, que en el modelo m-k no poseía. En este apartado se planteará un modelo para sistemas libres con amortiguamiento viscoso, que es el que se utilizará para estimar el amortiguamiento de nuestro amortiguador de masa sintonizado. Existen otros tipos de amortiguamiento, como el histerético o el amortiguamiento de Coulomb, pero en estos no se entrará en detalles en este trabajo.

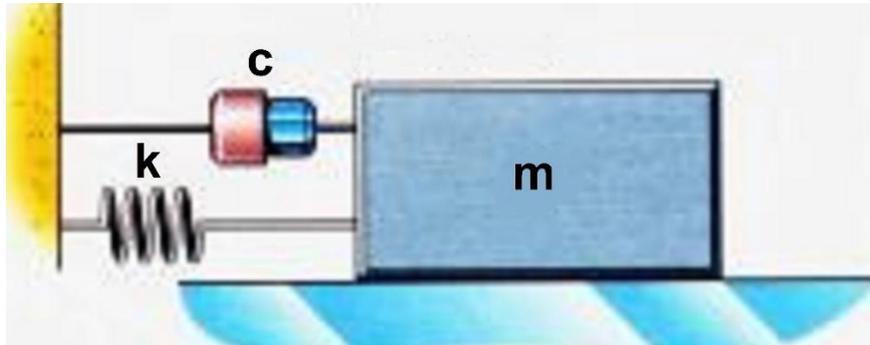


Figura 50. Sistema masa-resorte-amortiguamiento.

En la ecuación del movimiento del modelo anterior sólo se tenían en cuenta las fuerzas de inercia y la fuerza de la deformación del resorte, pues bien, para este modelo se tendrá que tener en cuenta otra fuerza más, que será la producida por el amortiguamiento viscoso.

La fuerza que surge por la incorporación al sistema de un amortiguador, será proporcional a la velocidad de vibración mediante un coeficiente de amortiguación.

A partir de la ecuación del modelo  $m - k$ , se obtendrá la ecuación del movimiento para este modelo, añadiendo la fuerza producida por el elemento disipador de energía. La nueva ecuación del movimiento que regirá este modelo será:

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = 0 \quad (7)$$

Cuya solución es del tipo:

$$x = Ae^{\lambda t} \quad (8)$$

Donde A es una constante; derivando respecto del tiempo resulta:

$$\dot{x} = A\lambda e^{\lambda t} = \lambda x \quad (9)$$

Volviendo a derivar la velocidad respecto del tiempo:

$$\ddot{x} = \lambda \dot{x} = \lambda^2 x \quad (10)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencia de movimiento, nos quedara una ecuación algebraica de la forma:

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)x = 0 \quad (11)$$

Y como en general la elongación  $x \neq 0$ , queda:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (12)$$

Cuyas raíces son:

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4km} \quad (13)$$

Las dos raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , serán de la forma:

- Complejos conjugados si  $\Delta < 0$
  - Reales negativos si  $\Delta > 0$
  - Raíz doble si  $\Delta = 0$
- $$\Delta = c^2 - 4km \quad (14)$$

El sistema poseerá un amortiguamiento crítico que dependerá de la masa y la frecuencia propia. Dicho amortiguamiento se puede calcular con la siguiente expresión:

$$c_c = 2m\omega_n \quad (15)$$

El coeficiente de amortiguación  $c$ , es dimensional, tiene unidades de [Ns/m] ó [kg/s], así que se va a introducir otro coeficiente para cuantificar el amortiguamiento del

sistema, llamado factor de amortiguamiento ( $\zeta$ ) que será adimensional. Este nuevo coeficiente relacionará el amortiguamiento que tenemos en el sistema con su amortiguamiento crítico.

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (16)$$

Una vez que se ha definido el factor de amortiguamiento ( $\zeta$ ), se podrá expresar las soluciones de la ecuación (12),  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , en función de dicho factor y de la frecuencia natural del sistema.

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (17)$$

Después de todo lo definido hasta ahora, se podrá clasificar el tipo de amortiguamiento que tiene el sistema, según el valor que tome el factor de amortiguamiento ( $\zeta$ ), existirán tres tipos:

- **Subamortiguado**  $0 \leq \zeta < 1$

Si  $\zeta^2 - 1 < 0$ , se tendrán como soluciones de la ecuación (12) dos raíces complejas conjugadas,

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} j \quad y \quad \lambda_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} j .$$

La solución de la ecuación diferencial (7) será de la forma:

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \quad a_1 \text{ y } a_2 \text{ complejos} \quad (18)$$

Utilizando la fórmula de Euler,

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha) \quad (19)$$

Se puede reescribir la solución general como:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \text{sen}(\omega_d t)] \quad (20)$$

$$x(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \quad (21)$$

En las ecuaciones (20) y (21) aparece otra frecuencia distinta de la de resonancia, llamada frecuencia amortiguada, que se puede calcular de la siguiente manera:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (22)$$

Como se puede deducir de la ecuación (22), esta nueva frecuencia coincidirá con la frecuencia propia si el amortiguamiento es nulo, por lo que, para cualquier amortiguamiento en el sistema, por pequeño que sea  $\omega_d < \omega_n$  lo que implica que el periodo amortiguado sea mayor que el periodo natural.

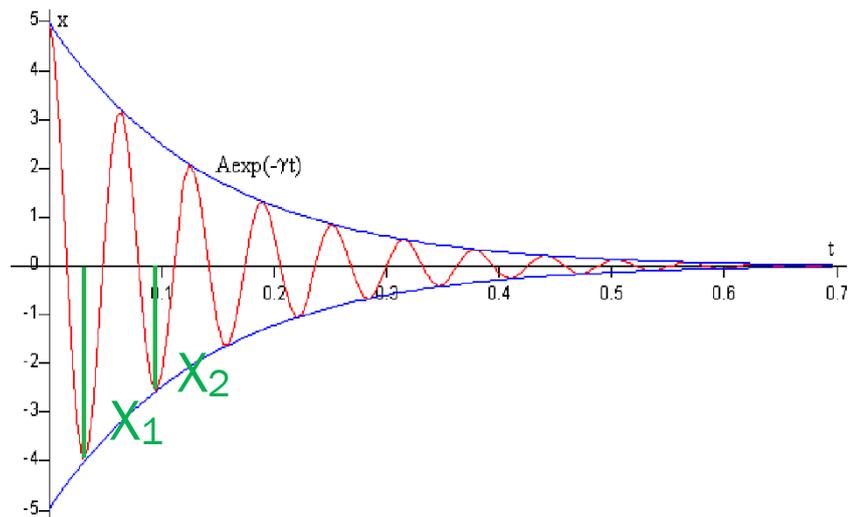


Figura 51. Movimiento oscilatorio subamortiguado.

Un método que se utilizará para calcular el amortiguamiento del sistema será el decremento logarítmico, la expresión (23) se indica el método para calcularlo.

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = \zeta \omega_n T = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta \quad (23)$$

Si el amortiguamiento es débil implica que  $\delta$  sea pequeño.

- **Sobreamortiguado  $\zeta > 1$**

En este caso  $\zeta^2 - 1 > 0$ , entonces las soluciones de la ecuación (12), serán raíces reales negativas,

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad y \quad \lambda_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} .$$

La solución general para este caso será una combinación lineal de las posibles soluciones, quedará de la forma:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ A_1 e^{-\omega_n t \sqrt{\zeta^2 - 1}} + A_2 e^{\omega_n t \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right] \quad (24)$$

En un sistema con este tipo de amortiguamiento, el sistema no oscila, vuelve a su posición de equilibrio de manera exponencial.

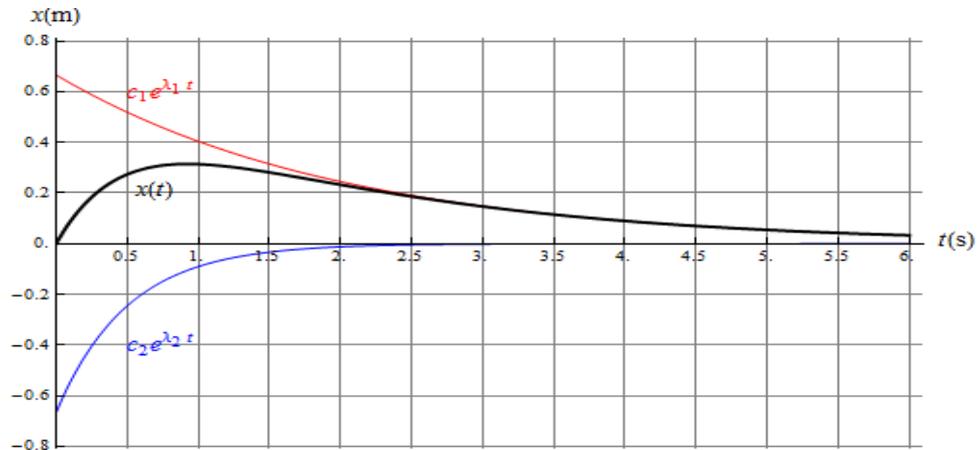


Figura 52. Movimiento sobreamortiguado.

- **Critico**  $\zeta = 1$

El factor de amortiguamiento en este caso es la unidad, lo que condiciona que  $\zeta^2 - 1 = 0$ , con lo cual se obtendrá una raíz doble como solución de la ecuación (7), de valor,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

Para un amortiguamiento crítico la solución general será de la forma:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t} \quad (25)$$

El sistema no oscila, la masa recupera la posición de equilibrio en el menor tiempo posible, es el caso límite entre la oscilación y la no oscilación.

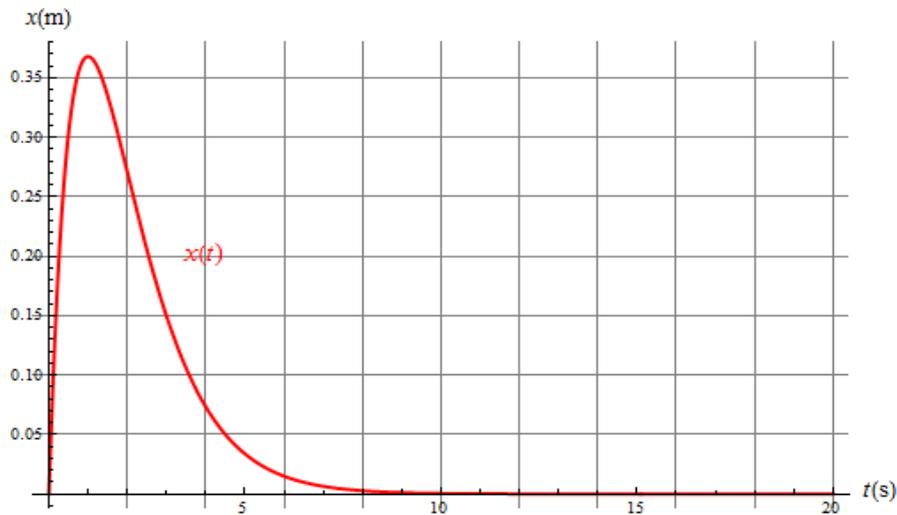


Figura 53. Movimiento críticamente amortiguado.

### 3.3 Vibración en sistemas de dos grados de libertad

Para el caso de dos pisos, uno situado encima de otro, o el caso de un piso con TMD lo que nos interesa es un modelo de dos grados de libertad.

A continuación se va a plantear el modelo masa – rigidez – amortiguamiento que se adaptará para caracterizar el sistema de disipación de vibraciones que se está tratando en el presente trabajo.

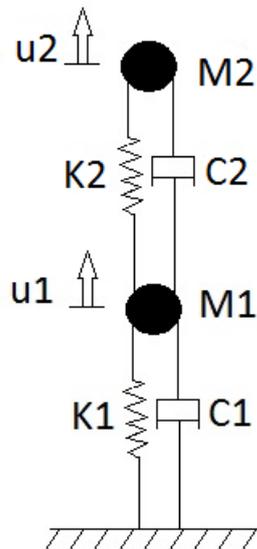


Figura 54. Modelo masa – rigidez – amortiguamiento con dos grados de libertad

$$m1\ddot{x}_1 - (c1 + c2)\dot{x}_1 - c2\dot{x}_2 + (k1 + k2)x_1 + k2x_2 = F1 \quad (26)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = F_2 \quad (27)$$

Expresando la ecuación 26 de forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

La matriz que contiene los términos m es la conocida como matriz de masa, la que contiene los términos c como matriz de amortiguamiento y la que contiene los términos k como matriz de rigidez.

Dividiendo las ecuaciones 26 y 27 entre  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente se obtiene lo siguiente:

$$\ddot{x}_1 - \frac{(c_1 + c_2)}{m_1}\dot{x}_1 - \frac{c_2}{m_1}\dot{x}_2 + \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 = \frac{F_1}{m_1} \quad (29)$$

$$\ddot{x}_2 - \frac{c_2}{m_2}\dot{x}_1 + \frac{c_2}{m_2}\dot{x}_2 - \frac{k_2}{m_2}x_1 + \frac{k_2}{m_2}x_2 = \frac{F_2}{m_2} \quad (30)$$

En forma matricial queda lo siguiente:

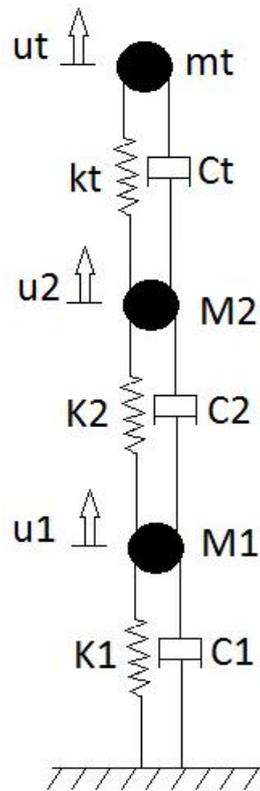
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{(c_1 + c_2)}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

La ecuación 31 es una ecuación de estado.

### 3.4 vibración en sistemas de varios grados de libertad

Para el caso de más pisos, uno situado encima de otro, o el caso de varios TMD lo que nos interesa es un modelo de varios grados de libertad, cada piso y cada TMD es un grado de libertad.

A continuación se va a plantear el modelo masa - rigidez - amortiguamiento que se adaptará para caracterizar el sistema de disipación de vibraciones que se está tratando en el presente trabajo, para ello se dibuja el sistema de tres grados de libertad, que corresponde a un edificio de dos pisos con un TMD.



**Figura 55. Modelo masa - rigidez - amortiguamiento con tres grados de libertad**

Se va a trabajar con las ecuaciones para un sistema de múltiples grados de libertad, sin especificar para un número determinado, de esta forma estas ecuaciones serán válidas para un edificio con un número de pisos y de TMD's deseado.

La forma general de la ecuación de movimiento es:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \quad (32)$$

M representa la matriz de masa.

C representa la matriz de amortiguamiento.

K representa la matriz de rigidez

X es el vector de coordenadas de posición.

F es el vector de fuerzas que actúan sobre el sistema (en caso de que exista alguna fuerza).

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (36)$$

En las ecuaciones 33, 34 y 35 los términos situados en las diagonales deben ser positivos.

Las matrices M, C y K tienen que ser simétricas.

En el Anexo C se profundiza sobre estos sistemas de uno, dos o más grados de libertad y se explica la función de transferencia y el espacio de estados en el que se basan las FRF que posteriormente se utilizarán mediante la aplicación de Matlab.

### 3.5 Simulación mediante Matlab

Se ha creado una aplicación de Matlab que permite simular la maqueta del edificio y variar sus grados de libertad y sus propiedades.

Esta aplicación divide la pantalla en dos partes, la parte de la izquierda es en la que se introducen los datos y la parte de la derecha está reservada para las gráficas.

Los datos a introducir son el número de pisos que tiene el edificio que queremos simular, en cada uno de estos pisos hay que meter la masa que corresponde a su forjado, es decir, en el piso uno se introduce la mitad de la masa del piso uno más la mitad de la masa del piso dos más la masa fija del TMD si hay algún TMD colocado en este forjado y así sucesivamente, otro dato que se pide es la rigidez y el amortiguamiento de cada piso que tienen que haber sido calculados previamente mediante una de las formas explicadas en apartados anteriores.

En la parte de propiedades de TMD hay que introducir el número de TMD que tiene el edificio simulado y en el piso en que estos están colocados, pudiendo introducir cero si no hay ningún TMD, los datos a introducir en el caso de que sí que exista alguno son su masa móvil, su frecuencia y su factor de amortiguamiento.

En la parte de propiedades de la simulación hay que elegir si se quiere ver en la parte de las gráficas la respuesta temporal o la respuesta en frecuencias.

En caso de elegir la respuesta en frecuencias hay que elegir que rango de frecuencias se quiere graficar y que se quiere ver, es decir, sí que quiere ver la FRF de desplazamientos, velocidades o aceleraciones, pudiendo elegir esto de uno o varios pisos simultáneamente y de uno o varios TMD.

Si se elige respuesta temporal hay que introducir el rango de tiempo que se quiere ver en la gráfica y si lo que se quiere ver es desplazamiento, velocidades o aceleraciones de uno a varios pisos simultáneamente o de uno o varios TMD, en el caso de elegir respuesta temporal también hay que introducir las condiciones iniciales de cada piso y de cada TMD, estas propiedades son desplazamiento inicial y velocidad inicial.

Esta aplicación permite ir variando las propiedades que se consideren ir viendo las gráficas que se quieran y como estas varían al variar las propiedades, el número de pisos o el número de TMD.

Otra característica muy interesante de la aplicación es la de poder establecer de fondo en la zona de las gráficas un registro de desplazamientos, velocidades o aceleraciones, previamente realizado con el sirius y exportado en .txt y así ver si lo simulado por Matlab coincide con lo obtenido experimentalmente sobre la maqueta del edificio.

Además también permite guardar los ficheros de Matlab con las propiedades y graficas deseadas para poder abrirlos en otro momento.



## Capítulo 4: Metodología y ejemplo de verificación

Antes de trabajar en el TMD para el edificio de dos pisos se comienza con un edificio de un solo piso, en este caso el de 750 mm, esto se hace con el fin de comprobar que los resultados teóricos y los experimentales coincidan en cierta medida y una vez hecha esta comprobación empezar a trabajar para el TMD del edificio de dos plantas.

### 4.1 Elección de la masa del TMD

Como se vio en la parte de construcción y montaje del TMD la masa móvil de este se puede variar añadiendo o quitando tuercas del espárrago colocado en su extremo libre. Lo deseable es que esta masa sea aproximadamente del 10% de la masa del piso del edificio, para esto como se sabe que el piso de 750 mm pesa 1,950 Kg en este caso se utiliza un TMD con 6 tuercas lo que supone un peso total de todo el TMD de 0,29 Kg.

### 4.2 Medida de la rigidez del piso

En el cálculo estático experimental se determina la rigidez de cada módulo y la rigidez de la estructura completa. Se tiene que tener en cuenta que en el momento en el que los apoyos son elásticos se va a tener una rigidez desconocida que se trata como la rigidez de la cimentación y se supone a la hora de calcular la rigidez total.

Para determinar la rigidez se relaciona la fuerza con el desplazamiento mediante la ecuación.

$$F = K \cdot x$$

$$K = \frac{F}{x}$$

Para poder medir la fuerza y el desplazamiento se monta un sistema de medición que consiste en un dinamómetro que mide la fuerza y un láser que mide el desplazamiento.

El equipo que se utiliza es:

- Laser (Figura 33):
- Dinamómetro (Figura 56):
  - Resolución: 5 g
  - Tolerancia:  $\pm 5$  g



**Figura 56. Dinamómetro**

Para poder medir la rigidez de cada piso se procede de la siguiente forma. Lo primero es colocar un imán al dinamómetro y fijarlo magnéticamente a la parte superior del piso, a continuación se coloca el láser a unos 12-18 cm de distancia de la parte superior de este piso, el siguiente paso es tirar del dinamómetro para provocar una pequeña precarga y situar en este punto el cero tanto en el láser como en el dinamómetro, para finalizar se tira del dinamómetro hasta provocar la carga deseada y se anota para esa carga el desplazamiento que registra el láser, esto se repite varias veces y se calcula la rigidez de cada medida para después obtener la media que será con la rigidez del piso que se trabajara.

- Medidas:

F(kg)	desp(m)	F(N)
0,445	0,1722	4,36545
0,63	0,1785	6,1803
0,26	0,1666	2,5506
0,355	0,1692	3,48255

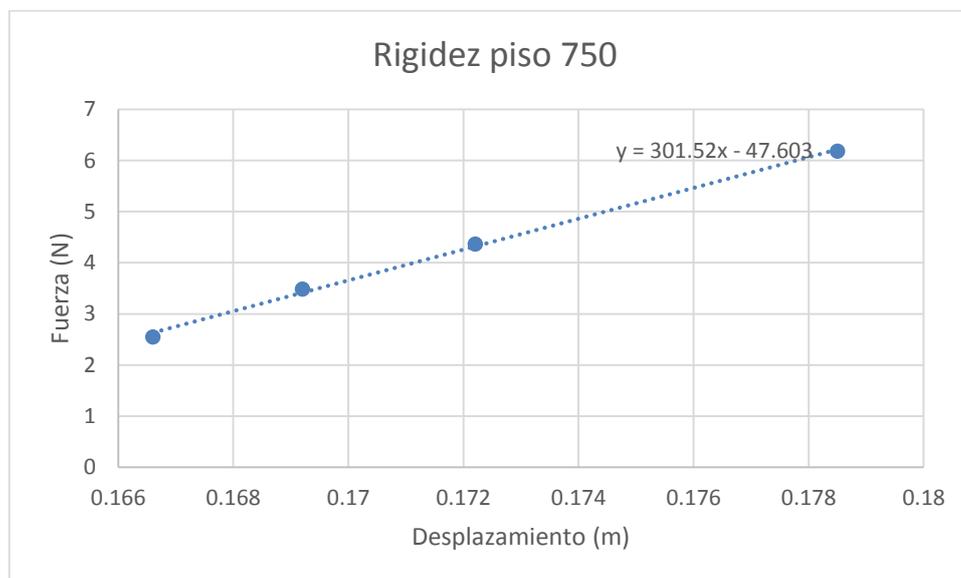


Figura 57. Rigidez piso 750 mm

Rigidez = 301,52 N/m

### 4.3 Medida de la masa

Para el cálculo de la masa de los pisos del edificio utilizamos una balanza de las siguientes características:

- Balanza (Figura 58):
  - Resolución: 0,01 g
  - Precisión:  $\pm 0,01$  g



Figura 58. Balanza

Los datos medidos son los siguientes:

- Piso de 750 mm: 1,950 Kg

#### **4.4 Obtención de la frecuencia y del amortiguamiento del piso**

En este apartado todavía no se ha añadido en TMD, es decir, con lo que trabajamos es con el piso de 750 mm atornillado a la base para obtener su frecuencia y su amortiguamiento.

##### **4.4.1 Frecuencia**

La frecuencia se determina de la siguiente forma, se coloca el acelerómetro, el láser o ambos en la parte superior del piso, se separa ligeramente de su posición de equilibrio y se deja vibrar libremente, en pantalla se muestra la FFT de uno de los aparatos de medida o de ambos y al cabo de cierto tiempo aparece un pico a una determinada frecuencia que es la frecuencia natural del edificio de 750 mm.

En este caso la frecuencia obtenida es de 2,884 Hz.

Otra forma de calcular esta frecuencia es hacer un registro por medio del láser del desplazamiento de la parte superior del piso, de la misma forma que anteriormente, se separa ligeramente de su posición de equilibrio, se comienza el registro y se deja vibrar libremente un determinado tiempo. Una vez se tiene este registro el sirius permite exportarlo en formato .txt y con este formato introduciéndolo en un archivo de Matlab se puede obtener su FFT donde se puede ver el pico que se obtiene en su frecuencia natural.

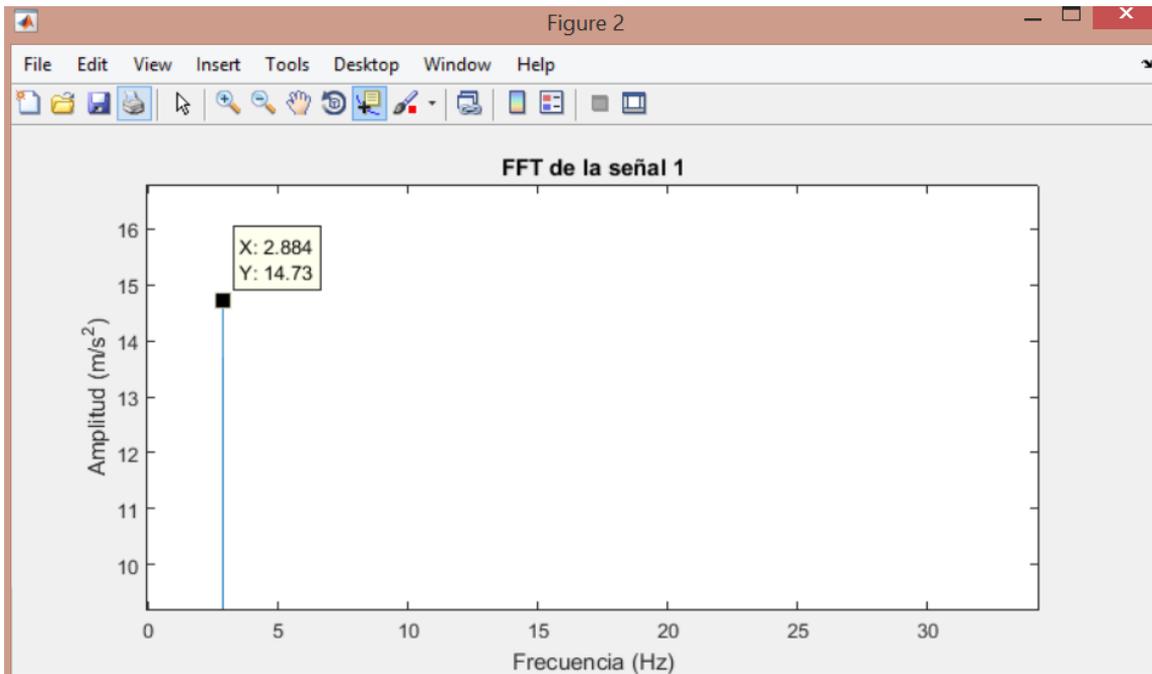


Figura 59. FFT piso de 750 mm

#### 4.4.2 Amortiguamiento

Para el cálculo del amortiguamiento se utiliza el mismo registro de desplazamiento realizado por el láser en el apartado 4.4.1, este archivo .txt se introduce en otro archivo de Matlab realizado previamente, este archivo pide introducir la frecuencia de resonancia, en este caso se introduce 2,884 Hz, el siguiente paso permite ver las crestas del registro del desplazamiento y quitar los puntos más alejados, todos los que queramos, una vez conforme con el resultado deseado se da a obtener amortiguamiento y en este caso se ha obtenido para el piso de 750 mm un amortiguamiento de 0,0019, es decir, un 0,19%.

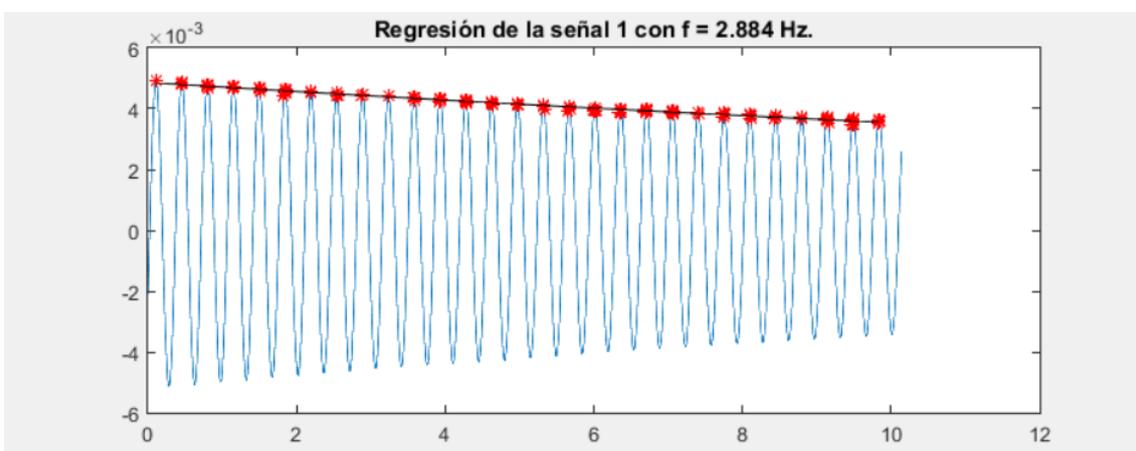


Figura 60. Amortiguamiento del piso de 750 mm

#### 4.5 Incorporación y bloqueo del TMD

Para añadir el TMD se fija el bastidor al forjado superior del piso mediante dos tornillos con sus correspondientes tuercas.

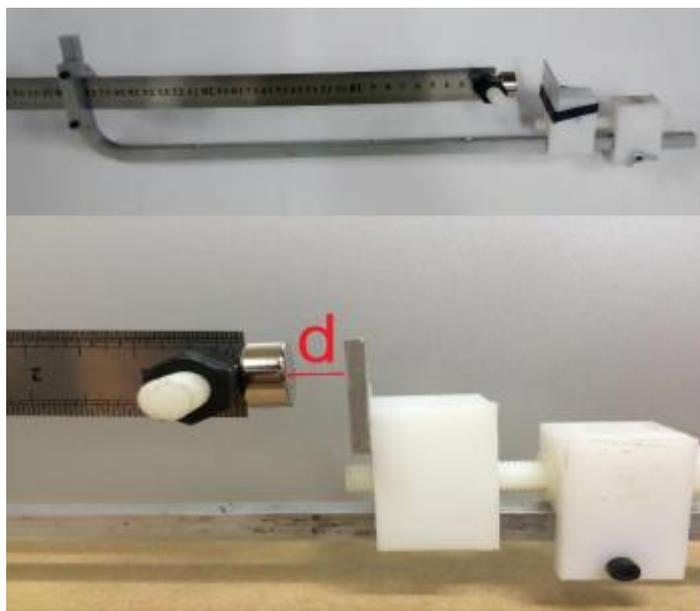


Figura 61. Bloqueo del TMD

Para este apartado se bloquea el TMD de la siguiente forma, se acerca la parte móvil que contiene la plaquita de aluminio hasta que haga contacto con el imán (distancia  $d = 0$ ), de esta forma se elimina el grado de libertad que tenía el TMD y el edificio + TMD pasa a tener un solo grado de libertad, si no estuviera bloqueado tendría dos grados de libertad.

Una vez bloqueado se pasa a calcular la frecuencia ya que al añadir el TMD se ha añadido masa lo que implica que la frecuencia cambia.

El cálculo de la frecuencia se realiza de la misma forma que las veces anteriores, esta vez se obtiene una frecuencia de 2,411 Hz.

#### 4.6 Liberación del TMD

Se libera separando la parte que contiene la plaquita de aluminio del imán unido a la regla, una vez separado el edificio pasa a tener dos grados de libertad, uno de ellos correspondiente al piso y el otro al TMD.

Hay que determinar que parte de la masa del TMD se mueve, masa móvil, y que parte de la masa del TMD no se mueve, masa fija.

La regla utilizada pesa 52,23 g y su longitud es de 39 cm por lo que su densidad es de 1,33923077 g/cm, se sabe que la parte móvil de la regla es el 24% por lo tanto 6,24 cm y su peso es de 8,3568 g.

Por lo tanto la masa móvil total es la suma de los 80 g que pesan el esparrago, el imán y las tuercas más los 8,3568 g que pesa la parte móvil de la regla, lo que supone una masa móvil de 88,3568 g.

La masa que se supone en el forjado superior del piso para su modelado es la mitad de la masa del piso (la otra mitad se supone en el forjado inferior) más la masa fija del TMD, como la masa total del TMD es 0,29 kg (de los cuales 88,3568 g son masa móvil) y la masa de medio piso más un acelerómetro y su parte correspondiente de cable es 1,0235 Kg, la masa total que se supone en el forjado superior tras liberar el TMD es 1,2251 Kg.

#### **4.7 Sintonizado del TMD**

En este punto se comienza a utilizar la aplicación de Matlab que en el apartado 3.5 se explicó su funcionamiento.

Una vez fijada su masa móvil y su masa fija se quiere variar la frecuencia y el amortiguamiento para que el TMD quede sintonizado de tal forma que al separar el edificio de su posición de equilibrio este pare de vibrar lo más rápido posible.

Para ver cuáles son está frecuencia y este amortiguamiento óptimos se introduce en la aplicación de Matlab los datos del piso 1 (masa, rigidez y amortiguamiento) y en el TMD se introduce la masa móvil y eligiendo la gráfica de FRF de aceleraciones se van variando la frecuencia y el factor de amortiguamiento hasta que en la gráfica aparezcan dos crestas lo más pequeñas posibles y con la altura de las dos lo más similar que se pueda.

Cambiando las propiedades hasta obtener valores aproximados a los deseados se consigue lo siguiente.

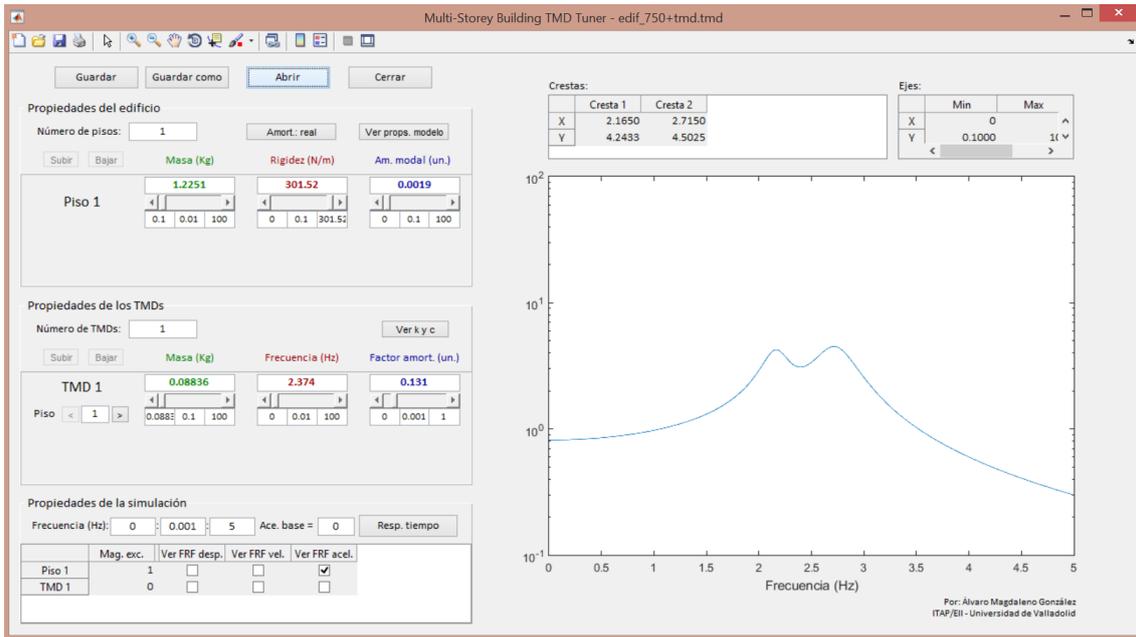


Figura 62. Sintonizado 1 del TMD para piso de 750 mm

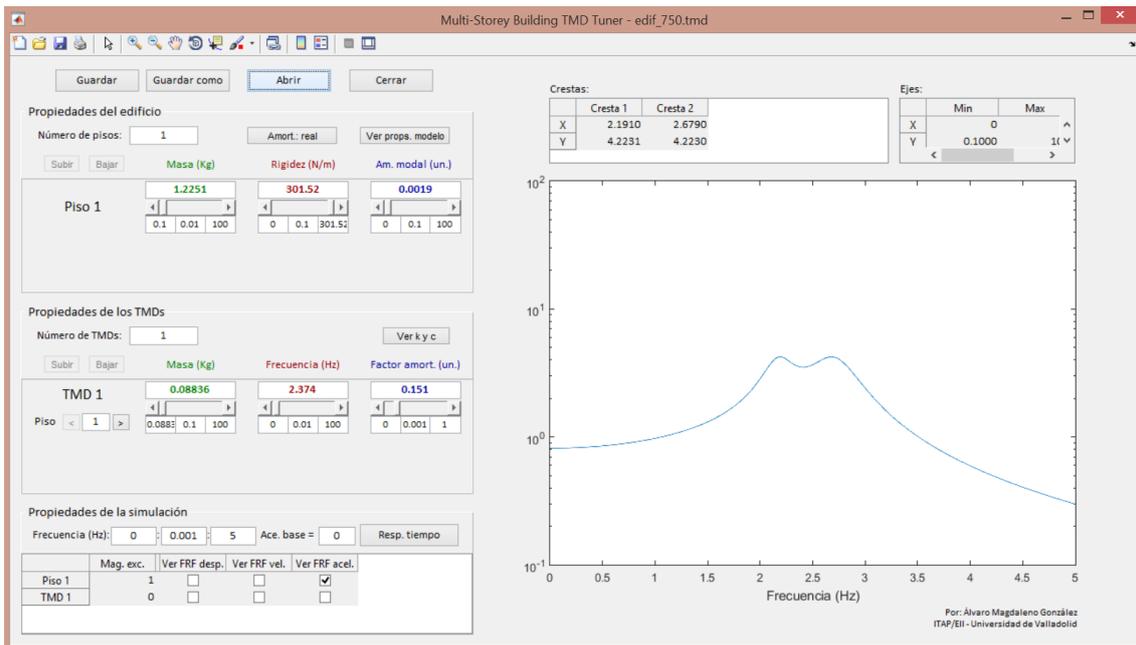


Figura 63. Sintonizado 2 del TMD para piso de 750 mm

Como se puede ver con una frecuencia para el TMD de 2,374 Hz y un amortiguamiento unitario de 0,1331 las crestas son similares y no demasiado grandes, al pasar para esta misma frecuencia a un amortiguamiento de 0.151 ambas crestas siguen teniendo máximos similares pero son bastante más pequeñas

que en el caso anterior por lo que para estas propiedades el TMD estaría bien sintonizado.

Lo siguiente es conseguir estas propiedades simuladas en el TMD real.

Para conseguir la frecuencia hay que variar la longitud móvil de la regla y mediante el láser y su FFT (con el edificio bloqueado y sin que el imán tenga interacción magnética con la plaquita de aluminio) ver en qué frecuencia se encuentra la regla e ir variando su longitud hasta conseguir la deseada, en este caso 2,374 Hz.

Para conseguir el amortiguamiento deseado se sigue trabajando con el edificio bloqueado de forma que lo único que se mueva sea la regla del TMD, en este caso se acerca la plaquita de aluminio lo más posible al imán sin que haya contacto entre ambos, se separa la regla de su posición de equilibrio y se registra con el láser, con este registro exportado a .txt se fija de fondo en la parte gráfica de la aplicación de Matlab y para ver en qué amortiguamiento está se introduce en propiedades un piso (aunque se esté trabajando con el TMD se pone que es un piso en vez de TMD ya que hay que poner mínimo un piso para obtener resultados), se elige la gráfica de desplazamientos del piso uno con condición inicial en desplazamiento lo que se haya separado la regla de su posición de equilibrio, en masa se pone la masa móvil del TMD, en frecuencia su frecuencia y en amortiguamiento se va variando hasta que la gráfica establecida de fondo coincida con la gráfica del modelo, ese amortiguamiento para el que coincidan es el amortiguamiento unitario en el que se encuentra el TMD.

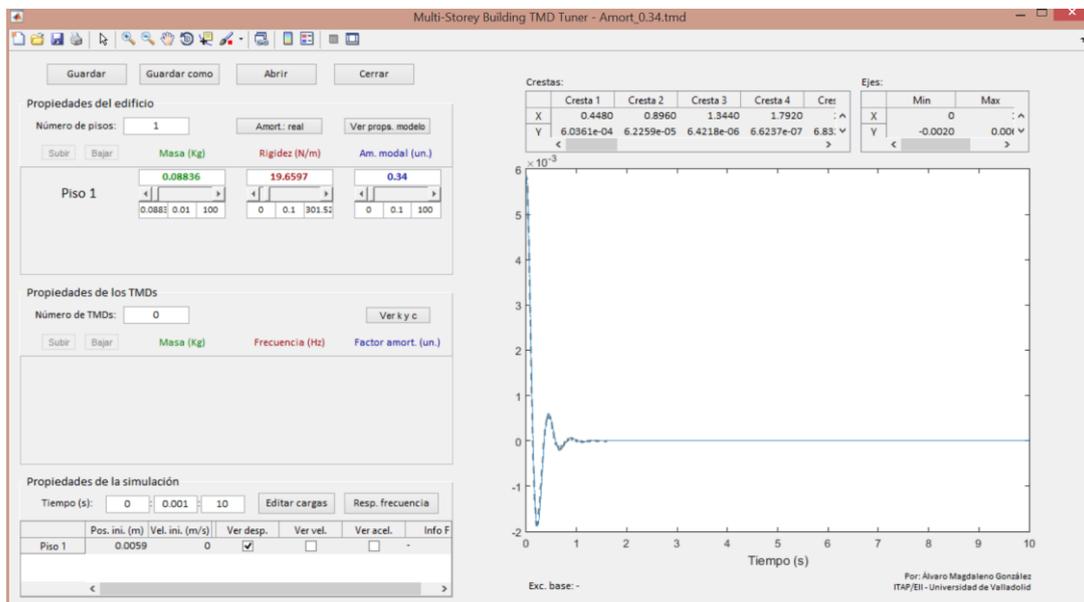


Figura 64. Amortiguamiento máximo para TMD en piso de 750 mm

Como se puede ver 0,34 es el amortiguamiento unitario máximo, un 34%, ya que la plaquita ha sido colocada lo más cerca posible del imán sin que haya contacto entre ambos, por lo tanto en amortiguamiento unitario óptimo de 0.151 del que se hablaba anteriormente se puede conseguir alejando la plaquita una distancia determinada hasta que se esté en este amortiguamiento, para ello es necesario iterar las operaciones de registro y comparación de graficas mediante la aplicación hasta llegar a un amortiguamiento similar al deseado.

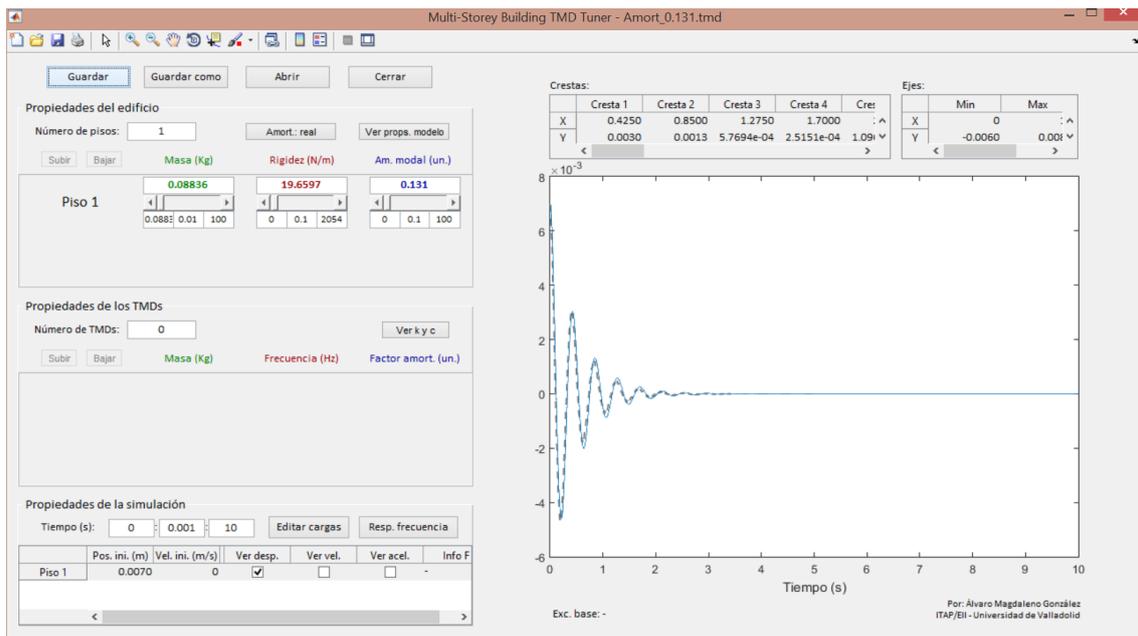


Figura 65. Amortiguamiento óptimo para TMD en piso de 750 mm

En este caso se ha conseguido un amortiguamiento unitario de 0,131 bastante aproximado al 0,151 que se buscaba.

Llegados a este punto el TMD está correctamente sintonizado para el piso de 750 mm.

#### 4.8 Registro del desplazamiento del edificio y comparación con la simulación

Una vez que el TMD queda sintonizado lo último que hay que hacer para ver que los resultados son los correctos es hacer vibrar el edificio y ver que su vibración se para mucho antes que con el TMD sin sintonizar, además para asegurar que el resultado es el correcto se hace una comparación para ver que al registrar la vibración mediante el láser y comparar su gráfica con la del edificio simulado con las propiedades reales tanto del piso como del TMD las gráficas son similares.

Llegados aquí hubo un problema de desintonizado del TMD y se trabajó con uno que no era el óptimo pero aun así sirvió para ver que el edificio tardaba mucho menos en detener su vibración y que el registro del láser y la simulación proporcionaban gráficas similares.

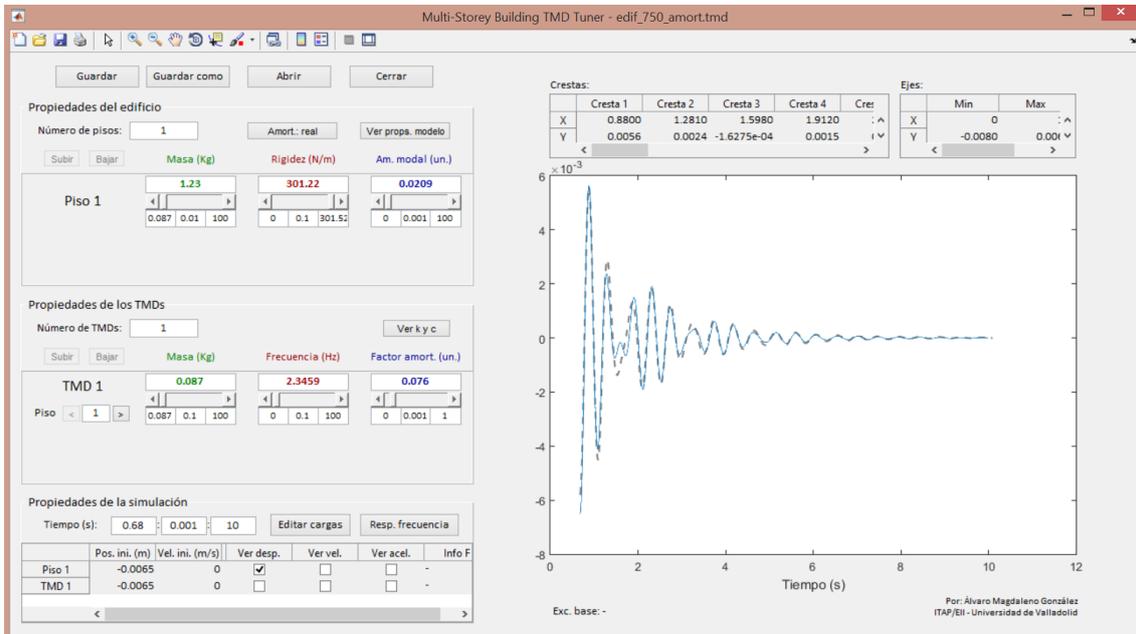


Figura 66. Vibración de piso de 750 mm con TMD sintonizado

Una vez comprobado que este método de trabajo es el correcto y que los resultados obtenidos son satisfactorios se pasa a trabajar con el edificio de dos plantas siguiendo los mismos pasos que para el piso de una sola planta.

#### 4.9 Resumen de la metodología propuesta

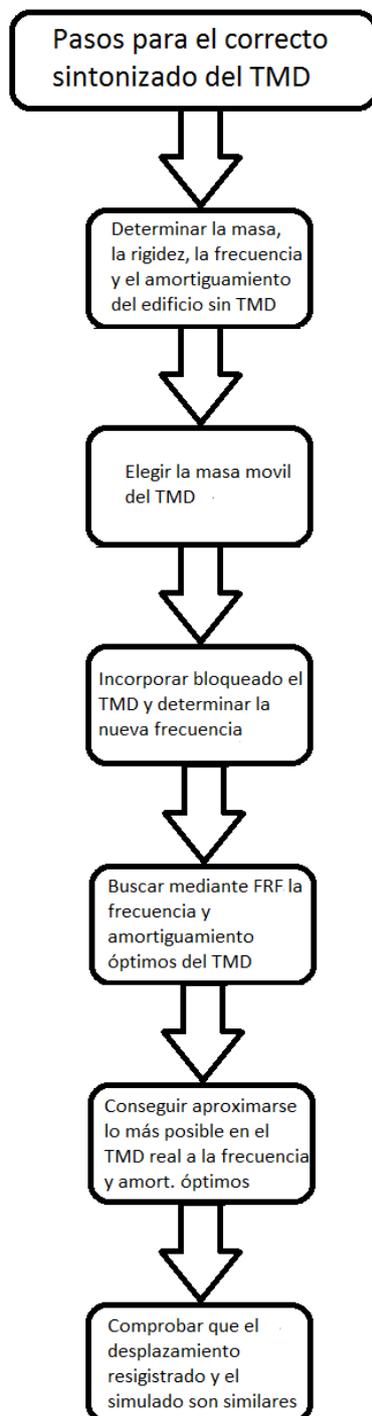


Figura 67. Metodología propuesta

## **Capítulo 5: Aplicación: sintonizado del TMD para el edificio de dos plantas**

Una vez realizadas las comprobaciones previas con el edificio de una sola planta se monta el edificio formado por dos pisos, el de 750 mm en el piso inferior y el de 500 mm en el piso superior.

### **5.1 Elección de la masa de TMD**

Como se vio en la parte de construcción y montaje del TMD la masa móvil de este se puede variar añadiendo o quitando tuercas del esparrago colocado en su extremo libre. Lo deseable es que esta masa sea aproximadamente del 10% de la masa del piso del edificio, para esto como se sabe que el piso de 750 mm pesa 1,950 Kg y el de 500 mm pesa 1,670 Kg, su masa total es de 3,62 Kg en este caso se utiliza un TMD con 13 tuercas y dos espárragos lo que supone un peso total de todo el TMD de 0,4508 Kg.

### **5.2 Medida de la rigidez**

Para poder medir la rigidez de cada piso se procede de la siguiente forma. Lo primero es colocar un imán al dinamómetro y fijarlo magnéticamente a la parte superior del piso inferior del edificio, a continuación se coloca el láser a unos 12-18 cm de distancia de la parte superior de este piso, el siguiente paso es tirar del dinamómetro para provocar una pequeña precarga y situar en este punto el cero tanto en el láser como en el dinamómetro, para finalizar se tira del dinamómetro hasta provocar la carga deseada y se anota para esa carga el desplazamiento que registra el láser, esto se repite varias veces y se calcula la rigidez de cada medida para después obtener la media que será con la rigidez que se trabajara.

Para el cálculo de la rigidez del piso superior el procedimiento es el mismo pero situando tanto el láser como el dinamómetro en la parte superior de este piso y una de dos o se bloquea el piso inferior de modo que se impida su desplazamiento o se coloca el piso superior él solo sobre la base y se atornilla para a continuación tomar las medidas.

Una vez obtenida la rigidez de ambos pisos se procede a calcular la rigidez del conjunto, es decir, de los dos piso unidos, para ello se coloca tanto el dinamómetro como el láser en la parte superior del piso de arriba con ambos pisos sin bloquear y se procede a la toma de datos de la misma forma que se hace para pisos individuales. La inversa de la rigidez total tiene que ser igual a la suma de las inversas de cada rigidez por separado:

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

### 5.2.1 Piso de 750 mm

Carga (N)	Desplazamiento (m)	Rigidez (N/m)
2,4525	9,149*10 <sup>-3</sup>	268,06
2,0111	7,691*10 <sup>-3</sup>	261,48
5,9841	0,0022634	264,39
3,2373	0,01219	265,57

Rigidez media = 264,875 N/m

### 5.2.2 Piso de 500 mm

Carga (N)	Desplazamiento (m)	Rigidez (N/m)
2,943	2,955*10 <sup>-3</sup>	995,94
3,2864	3,34*10 <sup>-3</sup>	983,937
4,6598	4,595*10 <sup>-3</sup>	1014,09
2,8939	2,831*10 <sup>-3</sup>	1022,24
4,0221	3,957*10 <sup>-3</sup>	1016,45

Rigidez media = 1006,53 N/m

### 5.2.3 Piso de 750 mm + piso de 500 mm

Carga (N)	Desplazamiento (m)	Rigidez (N/m)
3,4335	0,016208	211,84
3,2864	0,015697	209,36
3,9731	0,018907	210,14
2,4525	0,011891	206,24
4,0221	0,018755	214,45

Rigidez media = 210,406 N/m

#### 5.2.4 Comprobación de la rigidez total

Según la teoría la inversa de la rigidez total y es igual a la suma de las inversas de cada una de las rigideces, con el fin de comprobar que las medidas han sido correctas se ha medido la rigidez de cada uno de los pisos por separado (apartados 5.2.1 y 5.2.2) y la de los dos pisos unidos (apartado 5.2.3), se comprueba que la teoría se cumple:

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$\frac{1}{210,406} = 4,75 * 10^{-3} \text{ m/N}$$

$$\frac{1}{264,875} + \frac{1}{1006,53} = 4,77 * 10^{-3} \text{ m/N}$$

Efectivamente la inversa de la rigidez total da un resultado muy parecido a la suma de las inversas de las rigideces de cada piso.

### 5.3 Medida de la masa

Los datos medidos con la balanza son los siguientes:

- Piso de 750 mm: 1,950 Kg
- Piso de 500 mm: 1,670 Kg

### 5.4 Obtención de las frecuencias y del amortiguamiento del edificio

En este apartado todavía no se ha añadido en TMD, es decir con lo que trabajamos es con el edificio de dos plantas atornillado a la base para obtener su frecuencia y su amortiguamiento.

#### 5.4.1 Frecuencia

La frecuencia se determina de la misma forma que se hizo en apartados anteriores, es decir, se coloca el acelerómetro, el láser o ambos en la parte superior del edificio, se separa ligeramente de su posición de equilibrio y se deja vibrar libremente, en pantalla se muestra la FFT de uno de los aparatos de medida o de ambos y al cabo

de cierto tiempo aparecen dos picos a una determinada frecuencia que son las frecuencias naturales del edificio.

En este caso las frecuencias obtenidas son de 1,587 Hz y de 7,446 Hz.

Otra forma de calcular esta frecuencia es hacer un registro por medio del láser del desplazamiento de la parte superior del piso, de la misma forma que anteriormente, se separa ligeramente de su posición de equilibrio, se comienza el registro y se deja vibrar libremente un determinado tiempo. Una vez se tiene este registro el sirius permite exportarlo en formato .txt y con este formato introduciéndolo en un archivo de Matlab se puede obtener su FFT donde se puede ver los picos que se obtienen en sus frecuencias naturales.

#### **5.4.2 Amortiguamiento**

Para el cálculo del amortiguamiento se utiliza el mismo registro de desplazamiento realizado por el láser en el apartado anterior, este archivo .txt se introduce en otro archivo de Matlab realizado previamente, este archivo pide introducir la frecuencia de resonancia, en este caso se introduce 1,587 Hz, el siguiente paso permite ver las crestas del registro del desplazamiento y quitar los puntos más alejados, todos los que queramos, una vez conforme con el resultado deseado se da a obtener amortiguamiento y en este caso se ha obtenido para el edificio de dos plantas un amortiguamiento de 0,0026, es decir, un 0,26%, este dato se introducirá posteriormente en cada uno de los dos pisos.

#### **5.5 Comprobación de masa, frecuencia, rigidez y amortiguamiento**

Estos datos son con los que se va a trabajar posteriormente todo el tiempo, con el fin de comprobar que están bien se procede a ver que los datos registrados y los simulados son semejantes.

Para ello se registra la vibración libre de la planta superior edificio mediante el láser e introduciendo las propiedades calculadas y el desplazamiento inicial del edificio en ambos pisos se compara la gráfica de desplazamientos del piso dos con el registro del láser.

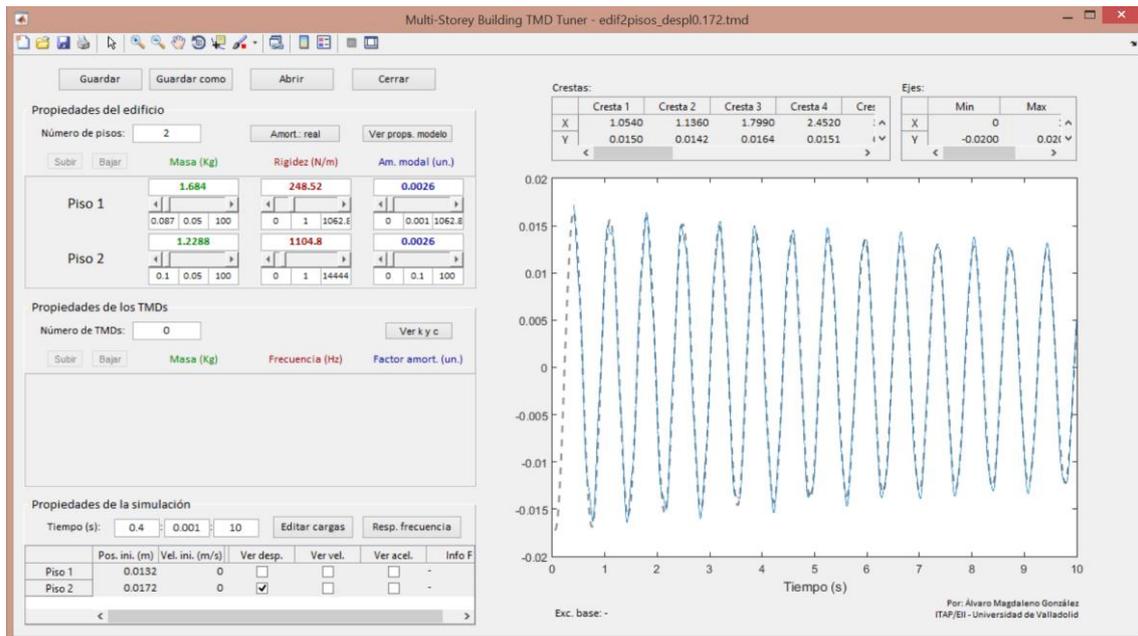


Figura 68. Vibración sin TMD del edificio de dos plantas

Como se puede ver ambas graficas son prácticamente iguales por lo que se validan las propiedades de ambos pisos previamente calculadas y se comienza a trabajar con ellas.

## 5.6 Incorporación y bloqueo del TMD

Para añadir el TMD se fija el bastidor al forjado superior del segundo piso mediante dos tornillos con sus correspondientes tuercas.

Para este apartado se bloquea el TMD de la siguiente forma, se acerca la parte móvil que contiene la plaquita de aluminio hasta que haga contacto con el imán, de esta forma se elimina el grado de libertad que tenía el TMD y el edificio + TMD pasa a tener dos grado de libertad, si no estuviera bloqueado tendría tres grados de libertad.

Una vez bloqueado se pasa a calcular las frecuencias ya que al añadir el TMD se ha añadido masa lo que implica que las frecuencias cambian.

El cálculo de las frecuencias se realiza de la misma forma que las veces anteriores, esta vez se obtienen unas frecuencias de 1,440 Hz y 6,4 Hz.

## 5.7 Liberación del TMD

Se libera separando la parte que contiene la plaquita de aluminio del imán unido a la regla, una vez separado el edificio pasa a tener tres grados de libertad, dos de ellos correspondientes a cada piso y el otro al TMD.

Hay que determinar que parte de la masa del TMD se mueve, masa móvil, y que parte de la masa del TMD no se mueve, masa fija.

Se sabe que la parte móvil de la regla es el 24% de su longitud libre y se ha calculado que esta masa es de 10,01 g.

Por lo tanto la masa móvil total es la suma de los 164 g que pesan los esparrago, el imán y las 13 tuercas más los 10,01 g que pesa la parte móvil de la regla, lo que supone una masa móvil de 174,01 g.

La masa que se supone en el forjado superior del primer piso para su modelado es la mitad de la masa del primer piso (la otra mitad se supone en el forjado inferior), más la mitad de la masa del segundo piso, más la masa de los elementos de unión de ambos pisos, es decir, 4 tornillos, 4 tuercas y 8 arandelas. Esto supone una masa de 1,846 Kg.

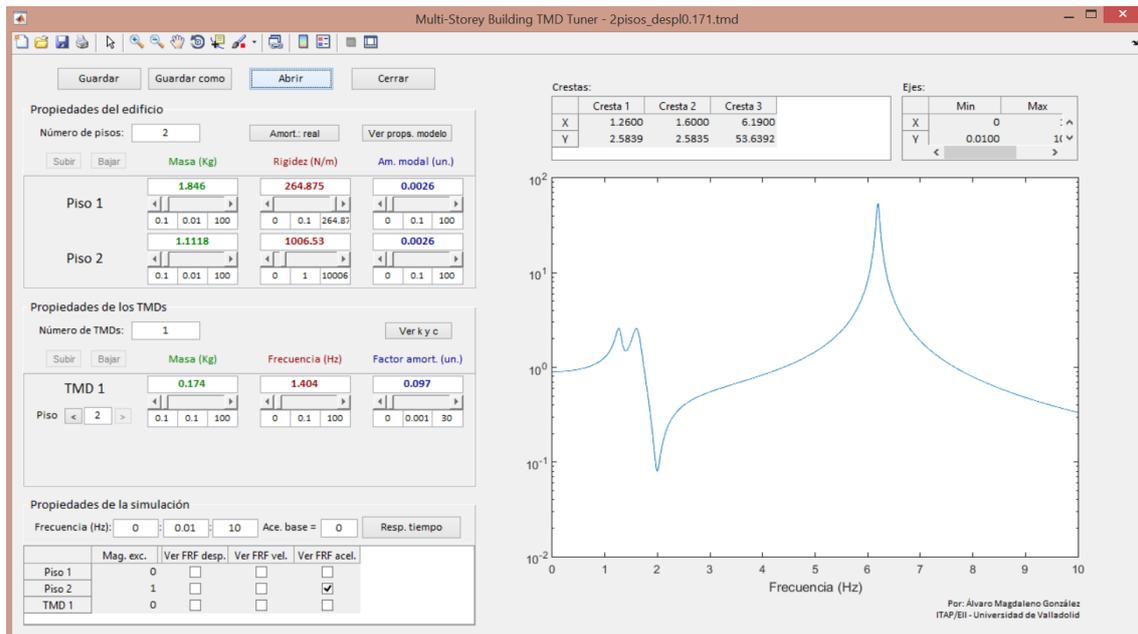
La masa que se supone en el forjado superior del segundo piso para su modelado es la mitad de la masa del segundo piso (la otra mitad se supone en el forjado del primer piso), más la masa fija del TMD, como la masa total del TMD es 0,4508 kg (de los cuales 174,01 g son masa móvil), la masa total que se supone en el forjado superior tras liberar el TMD es 1,1118 Kg.

## 5.8 Sintonizado del TMD a frecuencia fija

Una vez fijada su masa móvil y su masa fija se quiere variar la frecuencia y el amortiguamiento para que el TMD quede sintonizado de tal forma que al separar el edificio de su posición de equilibrio este pare de vibrar lo más rápido posible.

Para ver cuáles son está frecuencia y este amortiguamiento óptimos se introduce en la aplicación de Matlab los datos del piso 1 y del piso 2(masa, rigidez y amortiguamiento) y en el TMD se introduce la masa móvil y eligiendo la gráfica de FRF de aceleraciones del piso 2 que es donde está colocado el TMD se fija una frecuencia ligeramente inferior a la frecuencia 1 obtenida con el TMD bloqueado, esto no se realizó para el edificio de una sola planta y su único objetivo es ir haciendo las cosas paso a paso para ir comprobando que todos los resultados son correctos, en este caso como esa frecuencia 1 era de 1,440 Hz se ha elegido para el TMD un frecuencia de 1,404 Hz y el factor de amortiguamiento se va variando hasta que en la gráfica aparezcan dos crestas lo más pequeñas posibles y con la altura de las dos lo más similar que se pueda.

Cambiando el amortiguamiento hasta obtener valores aproximados a los deseados se consigue lo siguiente.



**Figura 69. Sintonizado 1 del TMD con frecuencia aproximada**

Como se puede ver con una frecuencia para el TMD de 1,404 Hz y un amortiguamiento unitario de 0,097 las crestas son similares y no demasiado grandes.

Lo siguiente es conseguir estas propiedades simuladas en el TMD real para ver si los resultados coinciden y se están haciendo bien las cosas.

Para conseguir la frecuencia hay que variar la longitud móvil de la regla y mediante el láser y su FFT (con el edificio bloqueado y sin que el imán tenga interacción magnética con la plaquita de aluminio) ver en qué frecuencia se encuentra la regla e ir variando su longitud hasta conseguir la deseada, en este caso 1,404 Hz.

Para conseguir el amortiguamiento deseado se sigue trabajando con el edificio bloqueado de forma que lo único que se mueva sea la regla del TMD, en este caso se acerca la plaquita de aluminio lo más posible al imán sin que haya contacto entre ambos, se separa la regla de su posición de equilibrio y se registra con el láser, con este registro exportado a .txt se fija de fondo en la parte gráfica de la aplicación de Matlab y para ver en qué amortiguamiento está se introduce en propiedades un piso (aunque se esté trabajando con el TMD se pone que es un piso en vez de TMD ya que hay que poner mínimo un piso para obtener resultados), se elige la gráfica de desplazamientos del piso uno con condición inicial en desplazamiento lo que se haya separado la regla de su posición de equilibrio, en masa se pone la masa móvil del TMD, en frecuencia su frecuencia y en amortiguamiento se va variando hasta que la

gráfica establecida de fondo coincida con la gráfica del modelo, ese amortiguamiento para el que coincidan es el amortiguamiento unitario en el que se encuentra el TMD.

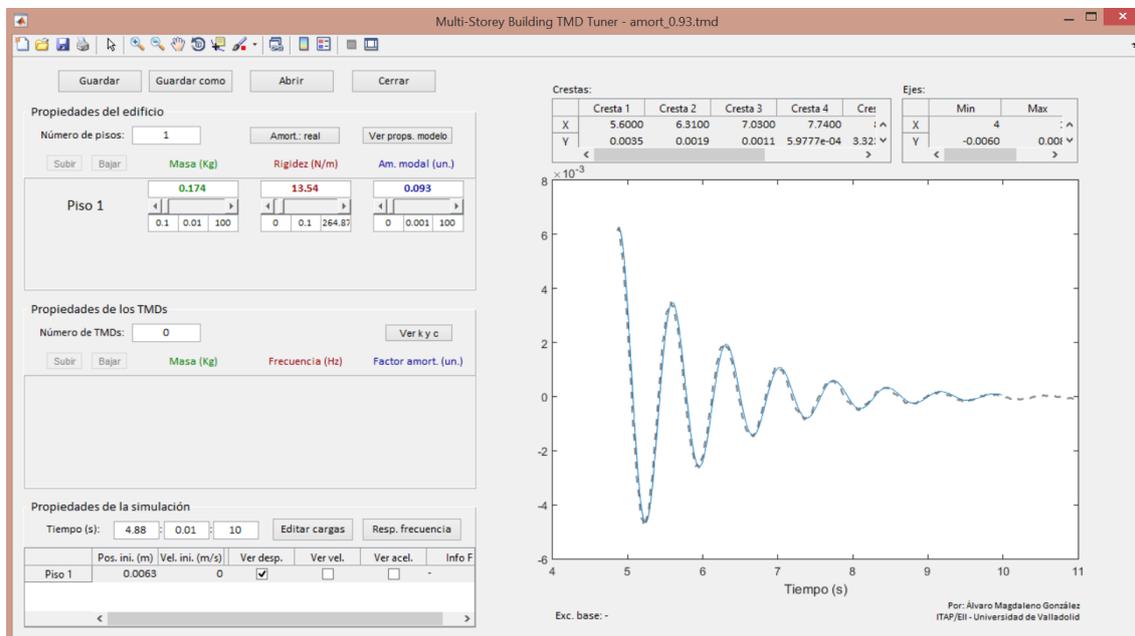
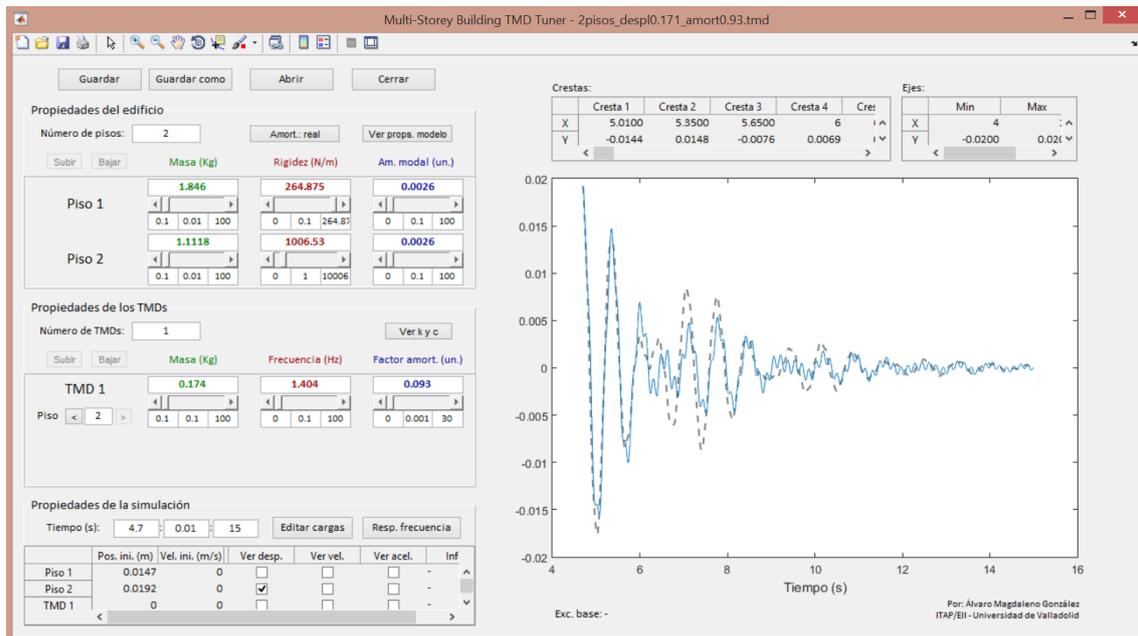


Figura 70. TMD sintonizado con frecuencia y amortiguamiento aproximados.

A partir de aquí se debería iterar hasta conseguir un amortiguamiento unitario más próximo al 0,097 que se ha visto que para esta frecuencia aproximada es el mejor, sin embargo antes se hace un registro del desplazamiento del edificio con el TMD sintonizado en este punto para comprobar que se va por buen camino, el resultado al comparar el registro con la simulación es el siguiente.



**Figura 71. Registro de desplazamiento con TMD sintonizado a frecuencia y amortiguamiento aproximados.**

Como se puede ver ambas gráficas dan resultados semejantes y la vibración del edificio ya tarda mucho menos en detenerse que cuando no tenía TMD lo que quiere decir que el camino seguido hasta el momento es el correcto.

El siguiente paso es conseguir un amortiguamiento más similar al óptimo para esta frecuencia y comprobar que los resultados son buenos.

Para conseguir el amortiguamiento iteramos de la misma forma que antes hasta que obtenemos lo siguiente.

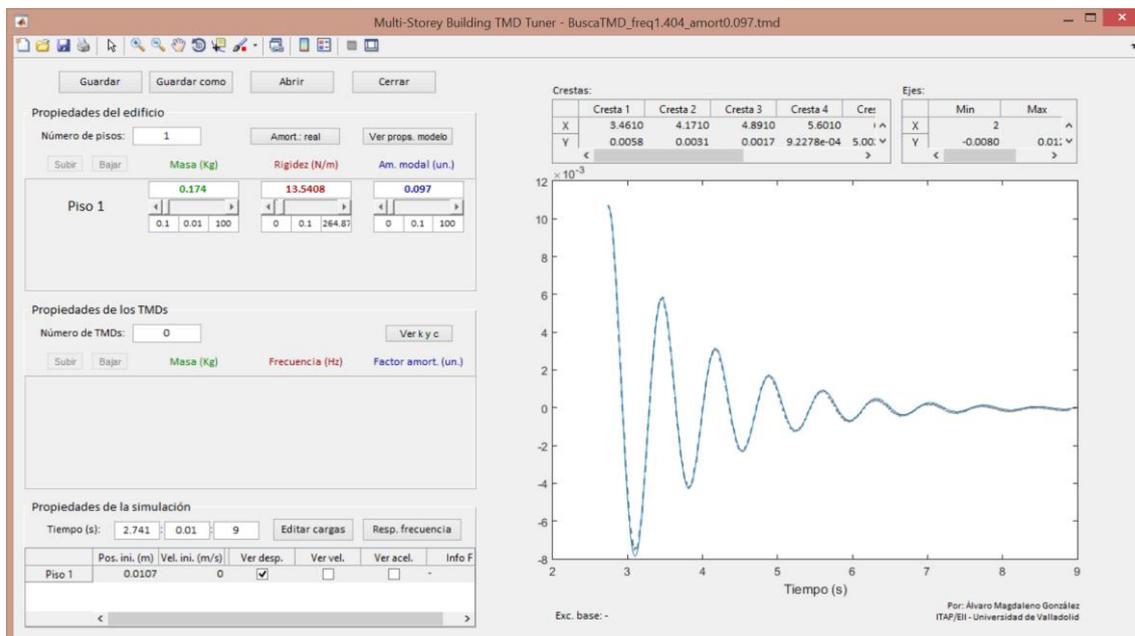


Figura 72. TMD sintonizado con frecuencia aproximada y amortiguamiento óptimo.

Ahora el TMD ya está sintonizado a su amortiguamiento óptimo, se comprueba el registro de desplazamiento con el desplazamiento simulado de la misma forma que antes.

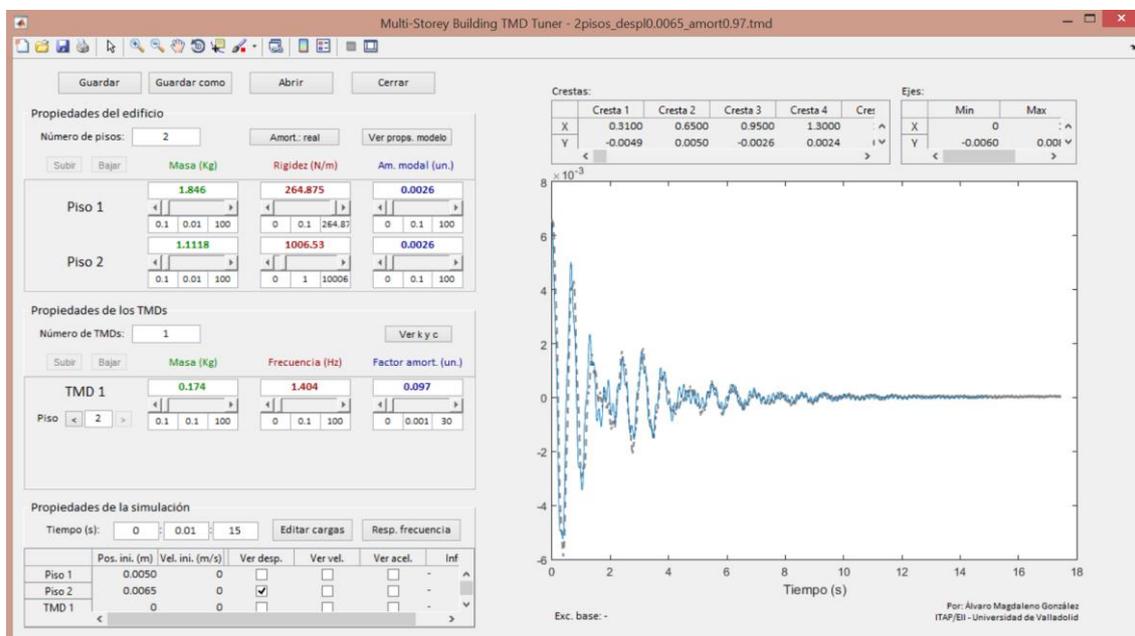


Figura 73. Registro de desplazamiento con TMD sintonizado a frecuencia aproximada y amortiguamiento óptimo.

Se ve que se sigue aproximando a la solución deseada ya que lo registrado con lo simulado sigue dando gráficas muy similares y el edificio cada vez tarda menos en detener su vibración.

### 5.9 Sintonizado del TMD a frecuencia y amortiguamiento óptimos

Llegados hasta aquí, esta ya sería una buena solución para la vibración del edificio sin embargo se puede mejorar ya que la frecuencia del TMD ha sido fijada de forma aproximada basándose en la experiencia de que debe de estar ligeramente por debajo de la frecuencia del edificio, sin embargo no es la frecuencia óptima.

Para conseguir la frecuencia y el amortiguamiento óptimos se va a la FRF de aceleraciones del piso dos y se varían estos dos parámetros hasta conseguir en la gráfica dos crestas lo más pequeñas e iguales posibles.

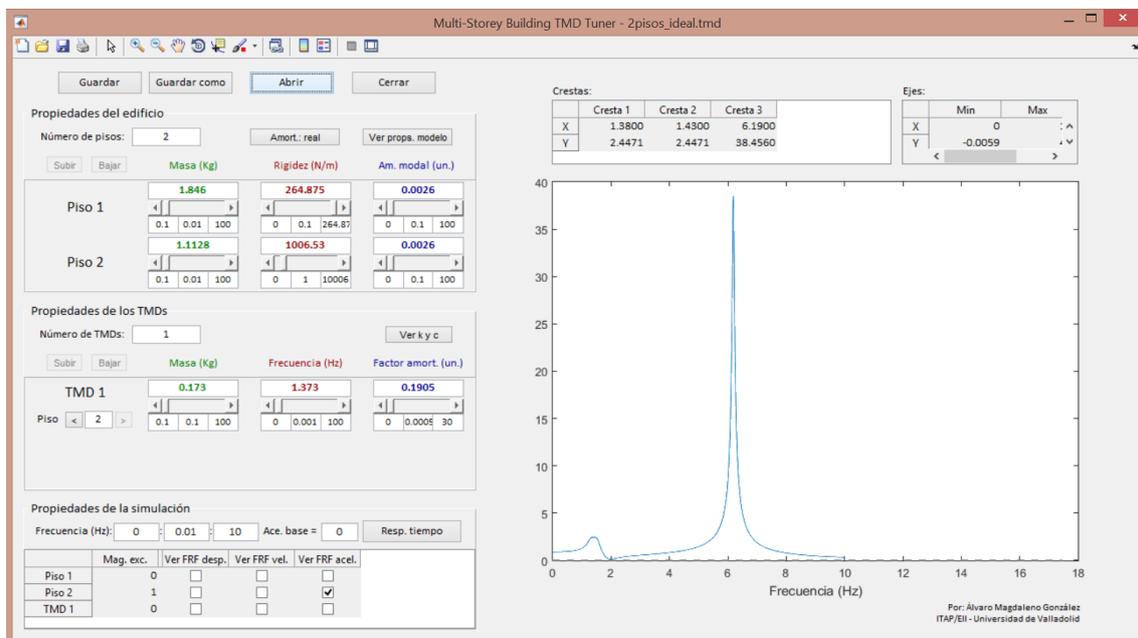


Figura 74. Sintonizado teórico del TMD con frecuencia y amortiguamiento óptimos.

Se puede ver que lo óptimo es una frecuencia del TMD de 1,373 Hz y un amortiguamiento unitario de 0,1905.

Para conseguir la frecuencia se varía la longitud libre de la regla como se ha dicho antes hasta llegar a esa frecuencia.

Para conseguir el amortiguamiento se itera variando la distancia entre el imán y la plaquita hasta tener un amortiguamiento aproximado al óptimo.

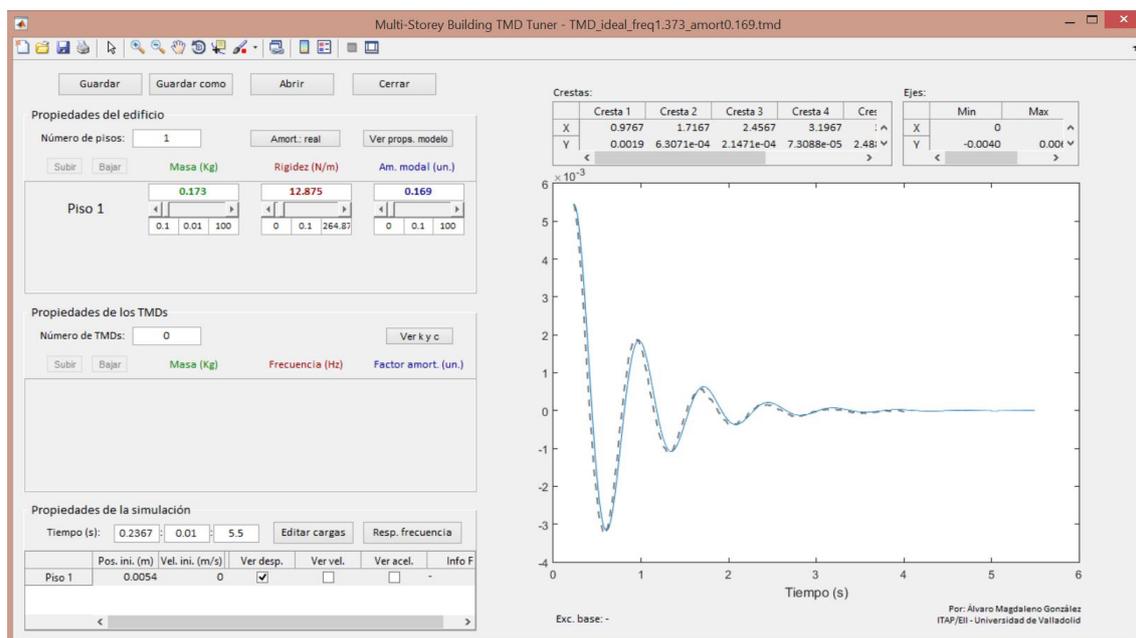


Figura 75. Sintonizado real del TMD con frecuencia y amortiguamiento óptimos.

Se comprueba que el TMD se encuentra a la frecuencia de 1,373 Hz que es la óptima y a un amortiguamiento unitario de 0,169 que está bastante aproximado al óptimo.

### 5.10 Registro del desplazamiento del edificio y comparación con la simulación

Una vez que el TMD queda sintonizado lo último que hay que hacer para ver que los resultados son los correctos es hacer vibrar el edificio y ver que su vibración se para mucho antes que con el TMD sin sintonizar, además para asegurar que el resultado es el correcto se hace una comparación para ver que al registrar la vibración mediante el láser y comparar su gráfica con la del edificio simulado con las propiedades reales tanto del edificio como del TMD las gráficas son similares.

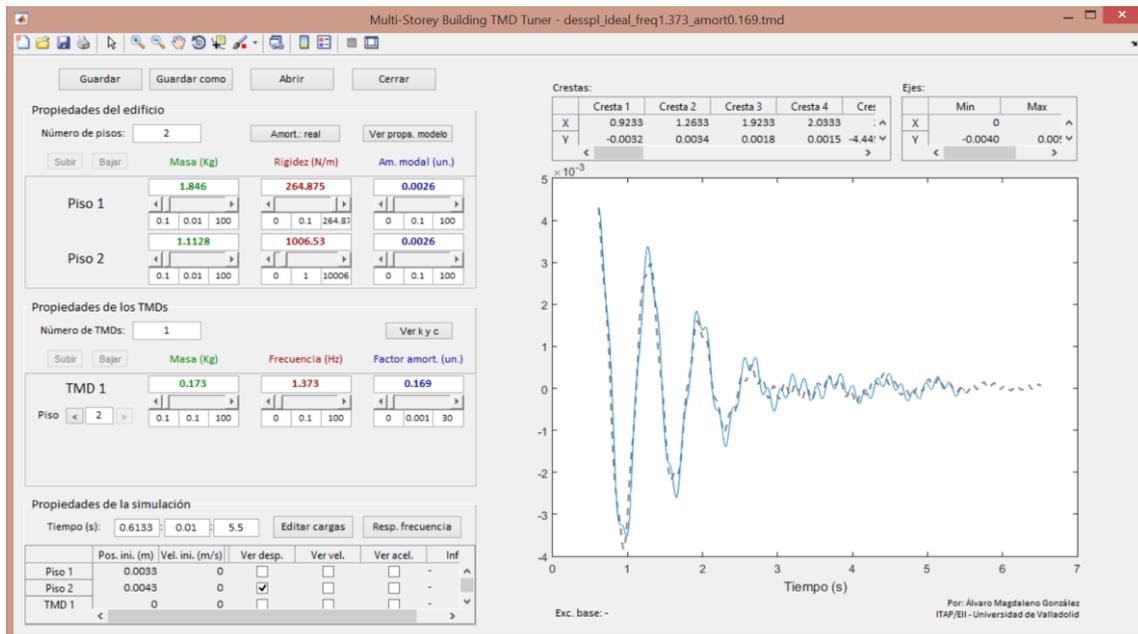


Figura 76. Vibración del edificio de dos pisos con TMD sintonizado

Como se puede ver ambas graficas son muy similares y el edificio detiene su vibración en aproximadamente 5 segundos por lo que la solución es la correcta.



## Capítulo 6: Conclusiones y líneas futuras

### 6.1 Conclusiones

Los objetivos marcados en un principio en este TFG han sido conseguidos ya que se ha logrado la construcción tanto de la maqueta del edificio de dos pisos como de un TMD capaz de variar su frecuencia y amortiguamiento de un modo sencillo. Se ha podido caracterizar la maqueta y modelar en espacio de estados mediante Matlab, de donde posteriormente se han obtenido los valores óptimos de las diferentes variables. Mediante los correspondientes ajustes de parámetros se ha logrado que el modelo simulado por Matlab y la maqueta real tengan comportamientos similares. Se ha conseguido establecer una metodología para el sintonizado del TMD y se ha validado mediante la comparación de los registros temporales obtenidos por simulación con los obtenidos mediante los equipos instrumentales disponibles.

En cuanto a las competencias adquiridas durante el desarrollo del TFG destacan, el trabajo en equipo tanto en la parte de construcción como de toma de medidas en el laboratorio, el conocimiento y utilización de nuevas herramientas de taller, la programación en Matlab, el uso de elementos instrumentales como láser y acelerómetro piezoeléctrico y el aprendizaje de la existencia y utilización de nuevos programas comerciales como Dewesoft.

### 6.2 Líneas futuras

A partir de los datos obtenidos de este trabajo se puede seguir investigando sobre la misma maqueta.

Una de las cosas sobre las que se puede trabajar es incorporando más de un TMD e irlos cambiando de forjado para poder ver cómo interactúan uno con los demás y la eficiencia de este método de trabajo para comprobar si los resultados son mejores o peores que con un solo TMD y si el método de trabajo se complica en exceso.

También se puede incorporar a la maqueta un dispositivo que provoque una vibración durante un tiempo determinado para así simular de forma más real un terremoto o un huracán e intentar reducir sus efectos mediante uno o varios TMD's.

Otra de las líneas de investigación puede ser añadir a cada forjado distintas masas simulando variar el peso de casa piso por el aumento de objetos o personas y a partir de ahí ver cómo ha afectado esta variación de masa sobre el sintonizado del TMD y ver cuál es el nuevo sintonizado óptimo.



## Capítulo 8: Bibliografía

Balachandran, B. Vibraciones. Thomson (2006).

Tipler, P. Mosca, G. Física para ciencia y tecnología vol.1: mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica. Reverte 6ª Edición.

Tipler, P. Mosca, G. Física para ciencia y tecnología vol.2: electricidad y magnetismo. Reverte 6ª Edición.

Ambrosini, D, Cuitiño, G, Rebeco, J. Eficiencia de amortiguadores de masa sintonizados en estructuras sismorresistentes (2004)

Oviedo, J.A., Duque, M. Sistemas de control de respuesta sísmica en edificaciones (2006).

Pineda, F.A. Identificación y Control Activo de Vibraciones Mecánicas: Análisis de un Modelo Reducido de Máquina. Maestría de matemáticas aplicadas, Universidad EAFIT (2005).

Aliante, E.J. control de efectos torsionales en un edificio asimétrico de hormigón armado con amortiguadores de masa sintonizados. Tesis, Universidad Austral de Chile (2009).



## ANEXO A

Las corrientes de Foucault o corrientes parásita es un fenómeno eléctrico descubierto por el físico francés Léon Foucault en 1851. Se produce cuando un conductor atraviesa un campo magnético variable, o viceversa. El movimiento relativo causa una circulación de electrones, o corriente inducida dentro del conductor. Estas corrientes circulares de Foucault crean electroimanes con campos magnéticos que se oponen al efecto del campo magnético aplicado. Cuanto más fuerte sea el campo magnético aplicado o mayor la conductividad del conductor, o mayor la velocidad relativa de movimiento, mayores serán las corrientes de Foucault y los campos opositores generados. En los núcleos de bobinas y transformadores se generan tensiones inducidas debido a las variaciones de flujo magnético a que se someten aquellos núcleos. Estas tensiones inducidas son causa de que se produzcan corrientes parásitas en el núcleo, que no son óptimas para la buena eficiencia eléctrica de éste. Las corrientes de Foucault crean pérdidas de energía a través del efecto Joule. Más concretamente, dichas corrientes transforman formas útiles de energía, como la cinética, en calor no deseado, por lo que generalmente es un efecto inútil, cuando no perjudicial. A su vez disminuyen la eficiencia de muchos dispositivos que usan campos magnéticos variables, como los transformadores de núcleo de hierro y los motores eléctricos. Pero no son siempre perjudiciales, pues tienen utilidades que se pueden aprovechar para nuestro beneficio, como por ejemplo el frenado magnético que poseen algunos trenes o vehículos pesados. Esta aplicación consiste en que, durante el frenado, las llantas de metal en las ruedas están expuestas al campo magnético de un electroimán, que genera corrientes de Foucault en los núcleos y llantas de las ruedas. Las corrientes de Foucault encuentran resistencia mientras circulan a través del metal, y disipan energía en forma de calor, haciendo que las ruedas disminuyan su velocidad. Cuanto más rápido giren las ruedas, más fuerte será el efecto, resultando que a medida que el tren disminuye su velocidad, también lo hará la fuerza de frenado, consiguiéndose un frenado suave proporcional a la velocidad de las ruedas. Si se coloca un disco de aluminio, que gira de forma libre, frente a un imán, el campo magnético producido por el imán reduce sensiblemente la velocidad de rotación del disco, es decir, produce un par de frenado proporcional a la velocidad del disco. Este efecto de frenado es también debido a las corrientes de Foucault, y se aplica en numerosos aparatos de medida, como por ejemplo, en los vatíhorímetros o contadores de energía eléctrica. Hay que puntualizar que esta acción de frenado sólo se manifiesta en planos perpendiculares a las líneas de inducción, ya que los circuitos abrazan la mayor parte del flujo, experimentando el máximo efecto de las variaciones cuando está de forma perpendicular. Haciendo uso de la idea expuesta de frenado magnético, se utilizará el principio físico de las corrientes de Foucault para introducir al TMD un amortiguamiento.



## ANEXO B

**Panasonic**

### HL-G112-A-C5 | Compact Laser Displacement Sensor HL-G1



※Photo may vary from actual product.

RoHS compliant

Product Number	HL-G112-A-C5
Part Number	HL-G112-A-C5
Product	Compact Laser Displacement Sensor
Details	Sensor head (Standard type)
Product name	Compact Laser Displacement Sensor HL-G1
Features	High performance CMOS Laser Displacement Sensors

As of July 04, 2016

### Spec Detail

Item	Specifications
Product Number	HL-G112-A-C5
Part Number	HL-G112-A-C5
Features	High performance CMOS Laser Displacement Sensors
Type	Standard type
Measurement center distance	120 mm 4.724 in
Measuring range	± 60 mm ± 2.362 in
Resolution	8 μm 0.315 mil
Linearity	± 0.1 % F.S.
Temperature characteristics	± 0.08 % F.S. / °C
Light source	Red semiconductor laser, Class 2 (IEC / JIS / FDA, Laser Notice No. 50) Max. output: 1 mW (Peak emission wavelength: 655 nm 0.026 mil)
Beam diameter	1.0 x 1.5 mm 0.039 x 0.059 in (Note) This beam diameter is the size at the measurement center distance. These values were defined by using 1/e <sup>2</sup> (13.5 %) of the center light intensity. If there is a slight leakage of light outside the normal spot diameter and if the periphery surrounding the sensing point has a higher reflectivity than the sensing point itself, then the results may be affected.
Receiving element	CMOS image sensor
Supply voltage	24 V DC ± 10 % including ripple 0.5 V (P-P)
Current consumption	100 mA or less
Sampling rate	200 μs, 500 μs, 1 ms, 2 ms

## Incorporación de dispositivos TMD en una maqueta de edificio de 2 plantas

Analog output : Voltage	Output range: 0 to +10.5 V (normal), 11 V (alarm) Output impedance: 100 Ohm
Analog output : Current	Output range: 3.2 to 20.8 mA (normal), 21.6 mA (alarm) Load impedance: 300 Ohm or less
Output (OUT 1, OUT 2, OUT 3)	Judgment output or alarm output (Setting can be selected.) Selectable NPN transistor open-collector or PNP transistor open-collector <In case of using NPN output> -Maximum sink current: 50 mA -Applied voltage: 3 to 24 V DC (between output and 0 V) -Residual voltage: 2 V or less (at 50 mA of sink current) <In case of using PNP output> -Maximum source current: 50 mA -Residual voltage: 2.8 V or less (at 50 mA of source current)
Output (OUT 1, OUT 2, OUT 3) : Output operation	Opened when the amount of light is insufficient.
Output (OUT 1, OUT 2, OUT 3) : Short circuit protection	Incorporated (automatic restoration)
Output polarity setting input	NPN open collector output operates when 0 V is connected. PNP open collector output operates when 24 V DC is connected.
Timing input	NPN output operates when 0V is connected and NPN is set. (It depends on the setting.) PNP output operates when external power + is connected and PNP is set. (It depends on the setting.)
Multi input	Zero set, zero set off, reset, memory switching, teaching, saving, and laser control according to the input time. In case NPN output is selected, Function varies according to the time 0 V is connected NPN. In case PNP output is selected, Function varies according to the time external power + is connected.
Indicator : Laser emission	Green LED (lights up during laser emission)
Indicator : Alarm	Orange LED lights up when this product cannot measure because of insufficient or excessive light intensity.
Indicator : Measurement range	Three yellow LED
Digital display	Red LED 5 digit display

## Incorporación de dispositivos TMD en una maqueta de edificio de 2 plantas

Degree of pollution	2
Operating altitude	2,000 m 6561 ft or less
Environmental resistance : Protection	IP67
Environmental resistance : Ambient temperature	-10 to +45 °C +14 to +113 °F (No dew condensation), Storage: -20 to +60 °C -4 to +140 °F
Environmental resistance : Ambient humidity	35 to 85 % RH, Storage: 35 to 85 % RH
Environmental resistance : Ambient illuminance	Incandescent light: 3,000 lux or less at the light-receiving face (Note) The fluctuation by ambient illuminance is $\pm 0.1$ % F.S. or less.
Environmental resistance : Insulation resistance	20 M $\Omega$ , or more, with 250 V DC between all supply terminals connected together and enclosure
Environmental resistance : Voltage withstandability	1,000 V AC one min. between all supply terminals connected together and enclosure
Environmental resistance : Vibration resistance	10 to 55 Hz (period: 1 min.) frequency, 1.5 mm 0.059 in amplitude in X,Y and Z directions for two hours each
Environmental resistance : Shock resistance	500 m/s <sup>2</sup> acceleration (50 G approx.) in X,Y and Z directions for three times each
Material	Enclosure: PBT Front cover: Acrylic Cable: PVC
Cable	0.1mm <sup>2</sup> 10-core cable, 5 m 16.404 ft long
Weight	Net weight: 70 g approx. (not including cable), 320 g approx. (including cable) Gross weight: 380 g approx.
Accessory	Warning label: 1 set
Remark	Where measurement conditions have not been specified precisely, the conditions used were as follows: supply voltage 24 V DC, ambient temperature +20 °C +68 °F, sampling rate 500 $\mu$ s, average number of samples: 1024, measurement center distance, object measured is made of white ceramic and analog measurement values.



## ANEXO C

# Universal-Beschleunigungsaufnehmer General Purpose Accelerometers

## 1.1 Sensoren Sensors

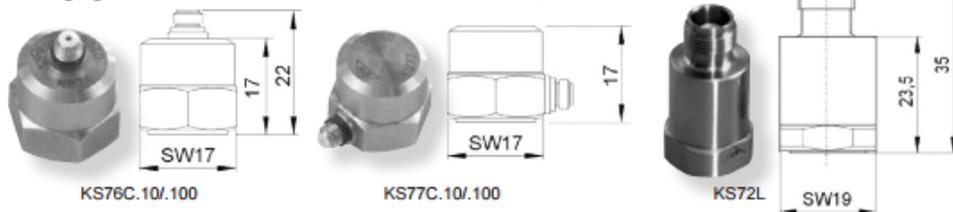
**KS76C10**  
**KS76C100**  
**KS77C10**  
**KS77C100**  
**KS72L**

### Eigenschaften

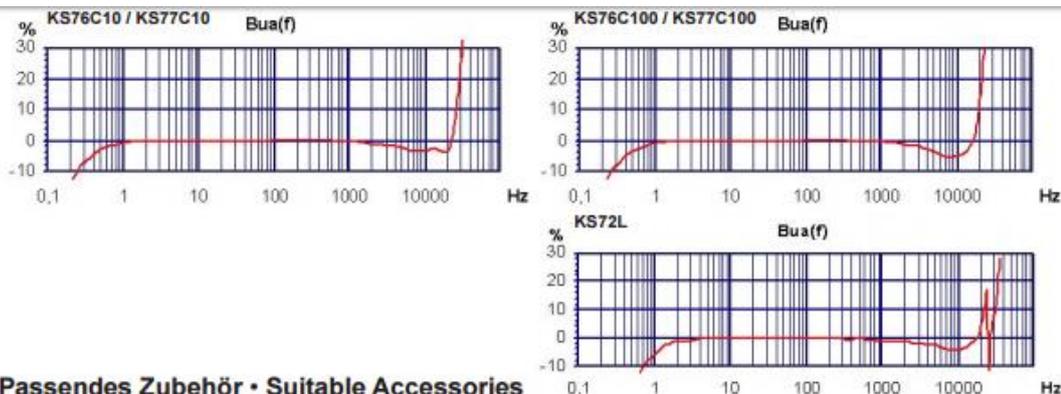
- Universalaufnehmer mit Scherkeramik
- Zwei Empfindlichkeitsvarianten
- Unempfindlich gegen Temperaturänderung
- Unempfindlich gegen Messobjektdehnung
- IEPE-Spannungsausgang erlaubt große Kabellängen
- KS72L mit Low-Power-IEPE-Ausgang
- Hohe lineare Bandbreite bis 37kHz
- Rauscharm, hohe Auflösung
- Robustes Edelstahlgehäuse
- Befestigung mit M5-Gewinde im Boden

### Properties

- General purpose shear-type accelerometer
- Two sensitivity versions
- Low sensitivity to temperature transients
- Low influence of base bending effects
- IEPE compatible output allows long cables
- KS72L with low-power IEPE output
- High linear band width up to 37 kHz
- Low noise, high resolution
- Sturdy stainless steel housing
- M5 mounting thread in base



		KS76C10	KS76C100	KS77C10	KS77C100	KS72L	
Ausgang • Output		IEPE	IEPE	IEPE	IEPE	LP-IEPE	
Piezosystem • Piezo design		Schersprinzip • Shear design					
Spannungsübertragungsfaktor • Voltage sensitivity		$B_{out}$	10 ± 5 %	100 ± 5 %	10 ± 5 %	100 ± 5 %	20 ± 10 %
Messbereich • Range		$a_s / a_n$	± 600	± 60	± 600	± 60	± 90
Bruchbeschleunigung • Destruction limit		$a_{max}$	6000	6000	6000	6000	5000
Lineare Frequenzbereich • Linear frequency range		$f_{3dB}$ $f_{10%}$ $f_{5%}$	0,12-33k 0,25-26k 0,35-24k	0,13-24k 0,3-19k 0,4-18k	0,12-33k 0,25-26k 0,35-24k	0,13-24k 0,3-19k 0,4-18k	0,3-37k 0,7-20k 1,0-17k
Resonanzfrequenz • Resonant frequency		$f_r$	>50(+25dB)	>32(+25dB)	>50(+25dB)	>32(+25dB)	>50(+25dB)
Querrichtungsfaktor • Transverse sensitivity		$I_{90MAX}$	< 5	< 5	< 5	< 5	< 5
Eigenrauschen (Effektivwert; 0,5 Hz - 20 kHz) • Residual noise (RMS; 0,5 Hz - 20 kHz)		$a_{n \text{ wide band}}$	< 2000	< 300	< 2000	< 300	< 2000
Rauschdichten • Noise densities		0,1 Hz $a_{n,1}$ 1 Hz $a_{n,2}$ 10 Hz $a_{n,3}$ 100 Hz $a_{n,4}$	100 60 20 2	30 10 3 1	100 60 20 2	30 10 3 1	60 20 5 2
Konstantstromversorgung • Constant current supply		$I_{CONST}$	2 .. 20	2 .. 20	2 .. 20	2 .. 20	0,5 .. 6
Arbeitspunktspannung • Output bias voltage		$U_{BIAS}$	12 .. 14	12 .. 14	12 .. 14	12 .. 14	5,8 .. 6,8
Ausgangsimpedanz • Output impedance		$r_{OUT}$	<130	<130	<130	<130	<200
<b>Verhalten gegenüber Umgebungseinflüssen • Environmental characteristics</b>							
Arbeitstemperaturbereich • Operating temperature range		$T_{min}/T_{max}$	-20 / 120	-20 / 120	-20 / 120	-20 / 120	-30 / 120
Temperaturkoeffizient • Temperature coefficient		-20 .. 0 °C; KS72L: -20 .. 10 °C 0 .. 30 °C; KS72L: 10 .. 40 °C 30 .. 120 °C; KS72L: 40 .. 120 °C	TK( $B_{out}$ ) ±0,02 -0,06	0,05 ±0,02 -0,07	0,06 ±0,02 -0,06	0,05 ±0,02 -0,07	0,05 ±0,02 -0,1
Temperatursprungempfindlichkeit • Temperature transient sensitivity		$b_{BT}$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,01
<b>Mechanische Daten • Mechanical data</b>							
Masse ohne Kabel • Weight without cable		m	20 / 0,7	23 / 0,8	20 / 0,7	23 / 0,8	35 / 1,23
Gehäusematerial • Case material			Edelstahl • Stainless steel				
Kabelanschluss • Cable connection			axial	axial	radial	radial	axial
Buchse • Socket			UNF 10-32			TNC	
Befestigung • Mounting			M5-Bodengewinde • M5 thread in base				



**Passendes Zubehör • Suitable Accessories**

	KS76C10/100; KS77C10/100	KS72L
Anschluss-zubehör	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 009-UNF-UNF-1,5: Kabel 2 x UNF 10-32; 1,5 m lang</li> <li>• 009-UNF-BNC-1,5: Kabel UNF 10-32 / BNC; 1,5 m lang</li> <li>• 010-UNF-BNC-5/10: Kabel UNF 10-32 / BNC; 5 / 10 m lang</li> <li>• 016: Kupplung für 2 UNF 10-32-Stecker</li> <li>• 017: Adapter UNF 10-32 / BNC (männlich)</li> <li>• 117: Adapter UNF 10-32 / BNC (weiblich)</li> <li>• 025: Adapter UNF 10-32 / TNC (männlich)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 010-TNC-BNC-1,5: Kabel TNC / BNC; 1,5 m lang</li> <li>• 010-UNF-BNC-5/10: Kabel UNF 10-32 / BNC; 5 / 10 m lang</li> <li>• 025: Adapter UNF 10-32 / TNC (männlich)</li> </ul>
Connection accessories	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 009-UNF-UNF-1,5: cable 2 x UNF 10-32; 1,5 m long</li> <li>• 009-UNF-BNC-1,5: cable UNF 10-32 / BNC; 1,5 m long</li> <li>• 010-UNF-BNC-5/10: cable UNF 10-32 / BNC; 5 / 10 m long</li> <li>• 016: Coupler for 2 UNF 10-32 plugs</li> <li>• 017: Adapter UNF 10-32 / BNC (male)</li> <li>• 117: Adapter UNF 10-32 / BNC (female)</li> <li>• 025: Adapter UNF 10-32 / TNC (male)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 010-TNC-BNC-1,5: cable TNC / BNC; 1,5 m long</li> <li>• 010-UNF-BNC-5/10: cable UNF 10-32 / BNC; 5 / 10 m long</li> <li>• 025: Adapter UNF 10-32 / TNC (male)</li> </ul>
Befestigungs-zubehör	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 001: Tastspitze M5</li> <li>• 003: Gewindestift M5</li> <li>• 006: Isolierflansch M5</li> <li>• 029: Isolierendes Klebepad M5</li> <li>• 045: Gewindeadapter M5 / UNF 10-32</li> <li>• 046: Gewindeadapter M5 / 1/4"-28</li> <li>• 008: Haftmagnet M5</li> <li>• 030: Triaxial-Befestigungswürfel M5</li> <li>• 700: Unterwasser-Druckgehäuse</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 001: Tastspitze M5</li> <li>• 003: Gewindestift M5</li> <li>• 006: Isolierflansch M5</li> <li>• 029: Isolierendes Klebepad M5</li> <li>• 045: Gewindeadapter M5 / UNF 10-32</li> <li>• 046: Gewindeadapter M5 / 1/4"-28</li> <li>• 008: Haftmagnet M5</li> <li>• 030: Triaxial-Befestigungswürfel M5</li> <li>• 700: Unterwasser-Druckgehäuse</li> </ul>
Mounting accessories	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 001: Probe M5</li> <li>• 003: Mounting stud M5</li> <li>• 006: Insulating flange M5</li> <li>• 029: Insulating adhesive pad M5</li> <li>• 045: Thread adapter M5 / UNF 10-32</li> <li>• 046: Thread adapter M5 / 1/4"-28</li> <li>• 008: Magnetic base M5</li> <li>• 030: Triaxial mounting cube M5</li> <li>• 700: Underwater pressure hull</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 001: Probe M5</li> <li>• 003: Mounting stud M5</li> <li>• 006: Insulating flange M5</li> <li>• 029: Insulating adhesive pad M5</li> <li>• 045: Thread adapter M5 / UNF 10-32</li> <li>• 046: Thread adapter M5 / 1/4"-28</li> <li>• 008: Magnetic base M5</li> <li>• 030: Triaxial mounting cube M5</li> <li>• 700: Underwater pressure hull</li> </ul>

**Bestellinformation • Ordering Information**

KS76C10/01; KS77C10/01: Aufnehmer mit Zubehörtset; Inhalt: Kabel 009-UNF-UNF-1,5 (KS72L: 010-TNC-BNC-1,5), Adapter 017 (nur KS76/77), Gewindestift 003, Klebewachs  
 KS76C100/01; KS77C100/01; KS72L/01: 002, Isolierflansch 006 mit Schlüssel, Tastspitze 001, Haftmagnet 008, Bedienungsanleitung, Kennblatt  
 Sensor with accessories kit including cable 009-UNF-UNF-1,5 (KS72L: 010-TNC-BNC-1,5), adapter 017 (KS76/77 only), mounting stud 003, adhesive wax 002, insulating flange 006 with wrench, probe 001, magnetic base 008, instruction manual, data sheet

KS76C10; KS77C10: Aufnehmer mit Kennblatt  
 KS76C100; KS77C100; KS72L: Sensor with data sheet

Hinweis: Auf Wunsch liefern wir unsere Aufnehmer mit einem kostengünstigen DKD-Kalibrierzertifikat. Preise auf Anfrage.

Note: Our transducers can be supplied with an attractively priced calibration certificate of DKD. Prices on demand.

Änderungen vorbehalten.

Specifications subject to change without prior notice.

Manfred Weber

**Metra Meß- und Frequenztechnik in Radebeul e.K.**

Meißner Str. 58  
 D-01445 Radebeul  
 Tel. +49-(0)351-836 2191

P.O.Box 01 01 13  
 D-01435 Radebeul  
 Fax: +49-(0)351-836 2940

Ausgabe / Edition: 01/12

Internet: www.MMF.de  
 Email: Info@MMF.de

## ANEXO D

### SIRIUS HD-STG.



Los módulos para extensometría SIRIUS STG permiten la adquisición de señales procedentes de bandas extensométricas en cuarto de puente, medio puente y puente completo.

También acondicionan señales analógicas estándar desde +/- 100 mV hasta +/-50 V, así como las procedentes de potenciómetros, RTD y termopares. El ancho de banda, como en toda la serie SIRIUS es de 200kHz por canal, con una resolución de 24 bits.

Sus características son:

ADC type	24 bit sigma delta dual core with anti-aliasing filter
Data rate	Simultaneous 200kS/s
Isolation voltage [V]	1000 V (non-isolated version available)
Power consumption	max 4 W
Connectors	DB9
Direct inputs	Voltage, full/half/quarter bridge strain, potentiometer, RTD, resistance, IEPE (with MSI), thermocouple (with MSI), charge (with MSI)

Incorporación de dispositivos TMD en una maqueta de edificio de 2 plantas

Dual core ranges	+/-50 V, +/-10 V, +/-1 V, +/- 100 mV
Bridge ranges	+/-500 mV/V, +/-200 mV/V, +/- 20 mV/V, +/-2 mV/V
Dynamic range @ 10 kS	152dB (dual core)
Input coupling	DC
Excitation voltage	SW programmable 0 to 20V (100mW)
Excitation current	SW programmable 0 to 45mA (100mW)
Bridge connection type	3,4,5,6 wire connection
Internal bridge completion	half bridge 1kOhm, quarter bridge 120 and 350 Ohm, SW selectable
Short	SW selectable
Shunt	SW selectable (59.88kOhm, 175kOhm)
TEDS support	yes
TEDS chip	DS2406, DS2430A, DS2432, DS2433
Overvoltage protection	In+ to In-: 50 V continuous, 200 V peak (10 msec)
Input impedance	10 MOhm for 50 V range, all other ranges 1 GOhm

## ANEXO E

### Funciones de transferencia para sistemas de un grado de libertad

Considérese de nuevo el diagrama mostrado en la Figura 2.1. Ya que la masa solo puede desplazarse en una sola dirección (un sólo grado de libertad), la ecuación de movimiento del sistema queda representada por la ecuación 2.1:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = F(t)$$

Supóngase que la fuerza  $F(t)$  es variable, de tipo senoidal. Al aplicar la transformada de Laplace a cada uno de los términos de la ecuación, se obtiene:

$$\mathcal{L}[m\ddot{z}(t)] = m [s^2 z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)], \quad (2.68)$$

$$\mathcal{L}[c\dot{z}(t)] = c [sz(s) - z(0)], \quad (2.69)$$

$$\mathcal{L}[kz(t)] = k [z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)], \quad (2.70)$$

$$\mathcal{L}[F(t)] = F(s), \quad (2.71)$$

donde  $z(0)$  y  $\dot{z}(0)$  representan las condiciones de posición y velocidad iniciales respectivamente y  $z(s)$  es la transformada de Laplace de  $z(t)$ .

Ya que se desea obtener la función de transferencia del sistema que represente la respuesta en estado estacionario del sistema a una entrada senoidal, puede suponerse que las condiciones iniciales están ajustadas a cero.

La transformada de Laplace de la ecuación de movimiento del sistema representado por la ecuación 2.1, donde  $F(s)$  representa la transformada de Laplace de  $F(t)$  es:

$$m s^2 z(s) + c s z(s) + k z(s) = F(s) \quad (2.72)$$

Con base en la anterior ecuación, se obtiene la función de transferencia:

$$\frac{z(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (2.73)$$

La ecuación 2.73 puede simplificarse si se tienen en cuenta las siguientes condiciones:

1.  $\omega_n^2 = k/m$ , donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural no amortiguada del sistema en  $rad/s$
2.  $C_c = 2\sqrt{km}$ , donde  $C_c$  es el amortiguamiento crítico
3.  $\zeta$  es el amortiguamiento proporcional, calculado como un porcentaje del amortiguamiento crítico
4.  $c/m = 2\zeta\omega_n$

Con las anteriores sustituciones, la ecuación 2.73 queda:

$$\frac{z(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.74)$$

La ecuación 2.74 representa la relación entre  $z(s)$  y  $F(s)$ , o lo que es lo mismo, la relación entre la respuesta del sistema de un grado de libertad  $z(s)$  y la perturbación definida por  $F(s)$ , que se define como la función de transferencia del sistema.

## Respuesta en frecuencia para sistemas de un grado de libertad

Para calcular la respuesta en frecuencia, basta reemplazar los términos “ $j\omega$ ” por “ $s$ ” en la ecuación 2.74, donde “ $j$ ” es el operador imaginario:

$$\begin{aligned}\frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{j\omega^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + 2\zeta\omega\omega_n j + \omega_n^2} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m\omega^2}}{-1 + \frac{2\zeta\omega_n j}{\omega} + \frac{\omega_n^2}{\omega^2}} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m\omega^2}}{\left[\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 - 1\right] + j2\zeta\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)}\end{aligned}\quad (2.75)$$

La ecuación 2.75 muestra que la relación ( $z/F$ ) depende de la frecuencia  $\omega$ . Esta relación es un número complejo que tiene propiedades diferentes para valores diferentes de la relación ( $\omega_n/\omega$ ).

A bajas frecuencias, relativas a la frecuencia de resonancia,  $\omega_n^2 \gg \omega \omega_n \gg \omega^2$ , con lo cual la función de transferencia se convierte en:

$$\begin{aligned}\frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + 2\zeta\omega\omega_n j + \omega_n^2} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &\cong \frac{\frac{1}{m}}{\omega_n^2} = \frac{1}{m\omega_n^2} = \frac{1}{m\frac{k}{m}} = \frac{1}{k}\end{aligned}\quad (2.76)$$

Ya que la respuesta en frecuencia es un número complejo, puede calcularse la magnitud y la fase de la siguiente forma:

$$\left| \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} \right| = \frac{1}{k} \quad (2.77)$$

$$\angle \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} = 0^\circ \quad (2.78)$$

Por lo tanto, la ganancia a bajas frecuencias es un número constante ( $1/k$ ), es decir, la inversa de la constante elástica del resorte. El ángulo de fase es  $0^\circ$  debido a que el signo es positivo.

A altas frecuencias,  $\omega^2 \gg \omega\omega_n \gg \omega_n^2$ , con lo cual la función de transferencia se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + 2\zeta\omega\omega_n j + \omega_n^2} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &\cong \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2} = \frac{-1}{m\omega^2} \end{aligned} \quad (2.79)$$

En este caso la magnitud y la fase se convierten en:

$$\left| \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} \right| = \left| \frac{-1}{m\omega^2} \right| = \frac{1}{m\omega^2} \quad (2.80)$$

$$\angle \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} = -180^\circ \quad (2.81)$$

A altas frecuencias la ganancia está dada por  $1/(m\omega^2)$  y la fase es  $-180^\circ$  debido a que el signo es negativo.

Cuando la frecuencia coincide con la resonancia, esto es  $\omega = \omega_n$ , la función de transferencia está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + 2\zeta\omega\omega_n j + \omega_n^2} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{\frac{1}{m}}{2\zeta\omega\omega_n j} = \frac{\frac{1}{m}}{2\zeta\omega_n^2 j} = \frac{1}{2\zeta\omega_n^2 m j} \\ \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} &= \frac{1}{\frac{2\zeta k m j}{m}} = \frac{1}{2\zeta k m j} = \frac{\frac{1}{k}}{2\zeta j} = \frac{-j}{2\zeta} \end{aligned} \quad (2.82)$$

La magnitud y la fase en condiciones de resonancia se convierten en:

$$\left| \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} \right| = \left| \frac{-j}{2\zeta} \right| = \frac{1}{2\zeta} \frac{1}{m\omega^2} \quad (2.83)$$

$$\angle \frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} = -90^\circ \quad (2.84)$$

En este caso, la magnitud es la ganancia a bajas frecuencia  $1/k$  dividida por  $2\zeta$ . Ya que  $\zeta$  normalmente es un número pequeño, se observa que la magnitud de resonancia se amplifica. El ángulo de fase en condiciones de resonancia es de  $90^\circ$ .

## Modelo en el espacio de estados para sistemas de un grado de libertad

Considérese de nuevo la Figura 2.1. La ecuación diferencial del sistema está dada por 2.1:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = F(t)$$

Como el sistema es de segundo orden, contiene por lo tanto dos integradores. Las variables de estado pueden definirse como:

$$x_1(t) = z(t)$$

$$x_2(t) = \dot{z}(t)$$

Con base en lo anterior se obtiene:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) = x_2(t) \quad (2.85)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t) \quad (2.86)$$

La ecuación de salida es:

$$z = x_1 \quad (2.87)$$

En forma matricial, las ecuaciones 2.85 y 2.86 se escriben:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) \quad (2.88)$$

Por lo tanto, la ecuación de salida se puede escribir como:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

La ecuación 2.88 es una ecuación de estado y la ecuación 2.89 es una ecuación de salida para el sistema. Estas ecuaciones están en la forma estándar

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.90)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \quad (2.91)$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

Las transformadas de Laplace de las ecuaciones (2.90) y (2.91) se obtienen de la siguiente forma:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (2.92)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) \quad (2.93)$$

Como la función de transferencia se define como la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando las condiciones iniciales son cero, se tiene que  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ . Por lo tanto,

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

o lo que es lo mismo,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

Multiplicando ambos lados de la última ecuación por  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  se obtiene:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \quad (2.94)$$

Reemplazando la ecuación 2.94 en la 2.93 se encuentra que

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]U(s) \quad (2.95)$$

La función de transferencia para el sistema en términos de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ , denominada  $G(s)$ , es entonces

$$G(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] \quad (2.96)$$

En este punto, puede verificarse fácilmente que para el sistema de un grado de libertad, la función de transferencia dada por la ecuación 2.96 es

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

la cual equivale a la misma expresión que se obtuvo para la función de transferencia en la ecuación 2.73.

## Funciones de transferencia para sistemas de dos grados de libertad

Como el sistema planteado por las ecuaciones 2.97 y 2.98 es de dos grados de libertad (2 entradas, 2 salidas), se obtienen 4 funciones de transferencia asociadas con las diferentes combinaciones de entradas-salidas del sistema, las cuales son:

$$\frac{z_1}{F_1}, \quad \frac{z_1}{F_2}, \quad \frac{z_2}{F_1}, \quad \frac{z_2}{F_2}$$

Con base en lo anterior, la ecuación 2.96 puede utilizarse para calcular la matriz de transferencia del sistema (matriz que contiene las cuatro funciones de transferencia ya mencionadas) en términos de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ , denominada  $G(s)$ :

$$G(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] \quad (2.107)$$

Si se utilizan los datos indicados en las ecuaciones 2.105 y 2.106, se obtienen los siguientes resultados para las funciones de transferencia:

$$\frac{z_1}{F_1} = \frac{m_2s^2 + c_2s + k_2}{m_1m_2s^4 + (c_1m_2 + c_2(m_1 + m_2))s^3 + (k_1m_2 + k_2(m_1 + m_2) + c_1c_2)s^2 + (c_2k_1 + k_2c_1)s + k_1k_2} \quad (2.108)$$

$$\frac{z_1}{F_2} = \frac{c_2s + k_2}{m_1m_2s^4 + (c_1m_2 + c_2(m_1 + m_2))s^3 + (k_1m_2 + k_2(m_1 + m_2) + c_1c_2)s^2 + (c_2k_1 + k_2c_1)s + k_1k_2} \quad (2.109)$$

$$\frac{z_2}{F_1} = \frac{c_2s + k_2}{m_1m_2s^4 + (c_1m_2 + c_2(m_1 + m_2))s^3 + (k_1m_2 + k_2(m_1 + m_2) + c_1c_2)s^2 + (c_2k_1 + k_2c_1)s + k_1k_2} \quad (2.110)$$

$$\frac{z_2}{F_2} = \frac{m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)}{m_1m_2s^4 + (c_1m_2 + c_2(m_1 + m_2))s^3 + (k_1m_2 + k_2(m_1 + m_2) + c_1c_2)s^2 + (c_2k_1 + k_2c_1)s + k_1k_2} \quad (2.111)$$

## Funciones de transferencia para sistemas de múltiples grados de libertad

Tomando como referencia el sistema de ecuaciones planteado en 2.112, deben resolverse las  $(n \times n)$  posibles funciones de transferencia que resultan de todas las combinaciones de grados de libertad que se derivan de las posibles fuerzas aplicadas (*salidas*  $\times$  *entradas*). La solución de estas  $(n \times n)$  funciones de transferencia no es fácil de obtener cuando el sistema de  $n$  grados de libertad es  $n > 2$ , por lo que en estos casos es de gran ayuda la utilización de programas de matemática simbólica como Maple o Matlab.

Sin embargo, el procedimiento es similar que en los casos anteriores:

1. Con base en el sistema de ecuaciones, se definen los vectores de salida y entrada del sistema, es decir los vectores

$$U = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \dots \quad F_n]^T$$
$$Y = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_n \quad \dot{z}_1 \quad \dot{z}_2 \quad \dots \quad \dot{z}_n]^T$$

2. Se escriben las ecuaciones del sistema en la forma de ecuaciones de estado
3. A partir de las ecuaciones de estado, se determinan los valores de las matrices **A**, **B**, **C** y **D**, trabajando con las ecuaciones en la forma estándar indicada en 2.90 y 2.91. Esto es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

4. La matriz de transferencia del sistema, que contiene las  $(n \times n)$  funciones de transferencia del sistema, se obtiene con la utilización de la ecuación 2.96

$$G(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]$$