



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **Trabajo Fin de Grado**

Grado en Física

Entrelazamiento

***Autor: Fernando Martínez García***

***Tutor: Marco Antonio Gigosos Pérez***



# Índice

<b>1. Introducción matemática</b>	<b>9</b>
1.1. Producto tensorial de espacios de estados	9
1.1.1. Significado físico de un estado producto tensorial	10
1.1.2. Significado físico de un estado que no es producto tensorial	10
1.2. Matriz densidad	10
<b>2. La paradoja EPR</b>	<b>12</b>
2.1. Planteamiento original de la paradoja	12
2.2. Caso concreto	14
2.3. Críticas sobre el planteamiento de la paradoja	15
<b>3. Variables ocultas locales y teorema de Bell</b>	<b>16</b>
3.1. Causalidad local	16
3.2. Teorema de Bell	17
3.2.1. Un ejemplo: Correlación EPRB	17
3.2.2. Argumento general	20
3.3. Conclusión	22
<b>4. Entrelazamiento cuántico y comunicación superlumínica</b>	<b>23</b>
4.1. Intentos básicos de comunicación superlumínica mediante entrelazamiento cuántico	23
4.1.1. Caso más general	24
4.1.2. Interpretación según la matriz densidad	26
4.2. Teorema de no clonación	27
<b>5. Experimentos realizados</b>	<b>28</b>
5.1. Aspect, Grangier y Roger (1981)	28
5.2. H. S. Poh, S. K. Joshi, A. Cerè, A. Cabello, C. Kurtsiefer (2015)	32
<b>6. Bibliografía</b>	<b>38</b>



## Resumen

El entrelazamiento cuántico es un fenómeno físico producido por la existencia de correlaciones entre los subsistemas que componen un sistema. Dos problemas surgen a la hora de tratar con este fenómeno. El primero consiste en ver cómo se comportan estas correlaciones, y el segundo se debe a que una vez estudiado el comportamiento de las correlaciones parece dejar abierta una posibilidad para realizar comunicación superluminal. El presente trabajo pretende establecer cuáles son las bases sobre las que aparecen dichos problemas para después argumentar cuál es la respuesta correcta.

Con el fin de aclarar la notación matemática que se va a utilizar en este trabajo y su significado físico, se presenta un primer apartado para explicar el tratamiento de sistemas compuestos mediante la notación de Dirac.

Una vez obtenidas las herramientas matemáticas necesarias, presentaremos un desarrollo histórico en el que se trata la problemática que aparece en la Mecánica Cuántica a la hora de tratar las correlaciones entre subsistemas comenzando con la denominada “Paradoja EPR” la cual hace la suposición de que el colapso de la función de onda no ocurre de forma instantánea en todo el espacio y con esta hipótesis se llega a la conclusión de que la Mecánica Cuántica no es una teoría completa. Siguiendo el desarrollo histórico, se presenta el llamado “Teorema de Bell” que explica las diferencias que se deben observar dependiendo de si la Mecánica Cuántica es la teoría correcta o si lo son las teorías que puedan surgir a partir de las conclusiones de la paradoja EPR.

Se han realizado experimentos con el fin de ver cuál de los dos esquemas teóricos es el correcto y se ha obtenido que las teorías originadas a partir de la paradoja EPR entran en clara contradicción con los resultados experimentales, mientras que la suposición de la existencia de un colapso instantáneo de la función de onda está en perfecto acuerdo con los resultados, por lo que la Mecánica Cuántica se considera el esquema correcto. Dedicaremos un apartado para explicar algunos de estos experimentos y sus resultados.

Finalmente, el tratamiento de la Mecánica Cuántica de los subsistemas correlacionados, teniendo en cuenta la existencia de un colapso instantáneo de la función de onda, parece dar lugar a la posibilidad de que se produzcan comunicaciones de velocidades superiores a la de la luz. Con el fin de presentar estas posibilidades y demostrar porque no son viables para comunicación superlumínica se presenta otro apartado.



## Abstract

Quantum entanglement is a physical phenomenon produced by the existence of correlations between the subsystems that compose a system. Two problems arise when one studies this phenomenon. The first consists in understand how does these correlations behave, the second is due to having understood the way these correlations behave, it seems to enable a way for superluminal communication. This work aims to set the basis on which said problems appear with the purpose of explaining what is the correct answer.

With the intention of clarify the mathematical notation that its going to be used in this work and its physical meaning, there is a first chapter dedicated to explain the treatment of composed systems with Dirac notation.

Once obtained the mathematical tools necessary, this work continues with a historical explanation of the problems that quantum mechanics has when treating correlations between subsystems starting with the so called “EPR paradox” which makes the assumption that the wave function collapse is not instantaneous in all the space and with this hypothesis it follows that quantum mechanics is not a complete theory. Following the historical development, the so called “Bell’s Theorem” is introduced, this theorem explains the differences that appear whether quantum mechanics is the correct theory or the theories that could derive from the conclusions of the EPR paradox.

Experiments dedicated to test which of these two theoretical schemes is correct have been realized and the result is that theories originated from EPR paradox conclusions are in clear contradiction with the experimental results while the supposition of a instantaneous collapse of the wave function is in perfect concordance with the results, so that quantum mechanics is considered the correct scheme. A chapter is dedicated to explain some of these experiments and their results.

Finally, the treatment of correlated subsystems with quantum mechanics, considering the existence of an instantaneous collapse of the wave function, seems to enable a way for superluminal communication. With the purpose of introducing these possibilities and proving that they are not viable for superluminal communication another chapter is introduced.





# 1. Introducción matemática

Este apartado se dedica al tratamiento, mediante la notación de Dirac, de sistemas cuyo espacio de estados esta compuesto por dos o más espacios de estados. Como a lo largo de este trabajo se van a usar sistemas compuestos, se tratarán estos espacios de estados como espacios de subsistemas. Todos los conceptos matemáticos presentados a continuación son desarrollados con un sistema formado por dos subsistemas (1) y (2) pero estos conceptos son fácilmente generalizables para sistemas formados por un número cualquiera de subsistemas.

## 1.1. Producto tensorial de espacios de estados

Sean dos espacios de estados,  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$ , correspondientes a los subsistemas (1) y (2) respectivamente. Se define el espacio vectorial  $\mathcal{E}$  como el producto tensorial de  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \quad (1)$$

si hay asociado para cada par de vectores,  $|\varphi(1)\rangle$  perteneciente a  $\mathcal{E}_1$  y  $|\chi(2)\rangle$  perteneciente a  $\mathcal{E}_2$ , un vector de  $\mathcal{E}$ , denotado por:

$$|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \text{ o también } |\varphi(1)\chi(2)\rangle \quad (2)$$

llamado producto tensorial de  $|\varphi(1)\rangle$  y  $|\chi(2)\rangle$ . De esta forma se puede llegar a que si  $\{|u_i(1)\rangle\}$  es una base de  $\mathcal{E}_1$  y  $\{|v_j(2)\rangle\}$  es una base de  $\mathcal{E}_2$ , el conjunto de vectores  $|u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$  forman una base de  $\mathcal{E}$ .

Si se realiza una medida en uno solo de los subsistemas, dada, por ejemplo, por un observable  $A(1)$  definido en  $\mathcal{E}_1$ , la extensión de este observable en  $\mathcal{E}$  vendrá dada por:

$$\tilde{A}(1) = A(1) \otimes \mathbb{1}(2) \quad (3)$$

De forma que el operador de proyección  $P_n(1)$  en un subespacio relacionado con el valor propio  $a_n$  de  $A(1)$  viene dado por:

$$P_n(1) = \sum_{i=1}^n |u_i(1)\rangle \langle u_i(1)| \quad (4)$$

donde  $|u_i(1)\rangle$  son los vectores propios de  $A(1)$  asociados con  $a_n$ . Esta proyección se podrá extender a  $\mathcal{E}$  operando de la siguiente forma:

$$\tilde{P}_n(1) = P_n(1) \otimes \mathbb{1}(2) \quad (5)$$

de forma que si se tiene un estado normalizado  $|\psi\rangle$  perteneciente a  $\mathcal{E}$ , se puede calcular la probabilidad  $\mathcal{P}^{(1)}(a_n)$  de obtener el resultado  $a_n$  en la medida de  $A(1)$  mediante la siguiente fórmula:

$$\mathcal{P}^{(1)}(a_n) = \langle \psi | \tilde{P}_n(1) | \psi \rangle \quad (6)$$

y según el postulado de reducción del paquete de ondas, si se mide el valor  $a_n$ , el estado después de la medida viene dado por:

$$|\psi'\rangle = \frac{\tilde{P}_n(1) |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \tilde{P}_n(1) | \psi \rangle}} \quad (7)$$

Una vez vistas estas propiedades generales de un sistema físico, se presentan las diferencias fundamentales entre dos tipos de estados.

### 1.1.1. Significado físico de un estado producto tensorial

Se dice que un estado  $|\psi\rangle$  es un estado producto tensorial si existen dos estados,  $|\varphi(1)\rangle$  y  $|\chi(2)\rangle$  pertenecientes a diferentes espacios de estados, expresados en las bases  $\{|u_i(1)\rangle\}$  y  $\{|v_j(2)\rangle\}$  respectivamente:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\rangle &= \sum_i a_i |u_i(1)\rangle \\ |\chi(2)\rangle &= \sum_j b_j |v_j(2)\rangle \end{aligned} \quad (8)$$

de forma que se cumpla:

$$|\psi\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \sum_{i,j} a_i b_j |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \quad (9)$$

Debido a la forma de este estado, es fácil comprobar que si se mide el observable  $A(1)$ , y se obtiene el resultado  $a_n$ , el estado despues de la medida viene dado por:

$$|\psi'\rangle = |\varphi'(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \quad (10)$$

con:

$$|\varphi'(1)\rangle = \frac{P_n(1) |\varphi(1)\rangle}{\sqrt{\langle \varphi(1) | P_n(1) | \varphi(1) \rangle}} \quad (11)$$

Por tanto, el estado del subsistema (1) ha cambiado debido a la medida, pero no el estado del subsistema (2). De esta forma, se ve que cuando un sistema se encuentra en un estado producto tensorial, todas las predicciones físicas relacionadas con uno sólo de los subsistemas son independientes del otro subsistema, por lo que este sistema se puede ver simplemente como la unión de dos subsistemas cuyas medidas son independientes y se dice que los subsistemas no están correlacionados.

### 1.1.2. Significado físico de un estado que no es producto tensorial

Se ha visto el significado físico de los sistemas que se encuentran en un estado dado por (9), sin embargo hay sistemas que no cumplen esta condición y están dados por:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \quad (12)$$

Donde no es posible expresar los coeficientes  $c_{i,j}$  como un producto  $a_i b_j$  para cualquier par de índices  $i, j$ . Esto implica que no es posible separar el estado  $|\psi\rangle$  en un producto tensorial de dos estados, lo que impide el uso de las fórmulas (10) y (11) para calcular el estado del sistema tras una medida. Para hacer cálculos con este estado hay que recurrir a la fórmula (7), y el hecho de que el estado inicial no sea producto tensorial, conlleva que la medidas sobre uno de los subsistemas altere el estado del otro. Debido a esto, se dice que en este caso los subsistemas están correlacionados o entrelazados.

## 1.2. Matriz densidad

Como ya se ha visto, en el caso de un estado que no es producto tensorial no es posible asociar un estado  $|\varphi\rangle$  (1) al subsistema (1). Para tratar al subsistema (1), se debe recurrir al formalismo de la matriz densidad.

Sea un estado puro  $|\psi\rangle$  cualquiera. La matriz densidad viene dada por:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (13)$$

Si en vez de un estado puro  $|\psi\rangle$  se tiene una mezcla estadística de estados  $|\psi_k\rangle$  con probabilidad  $p_k$ , la matriz densidad viene dada por:

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad (14)$$

En la base de estados ortogonales  $\{|u_i\rangle\}$ , los elementos diagonales de  $\rho$  vienen dados por:

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k |c_n^{(k)}|^2 \quad (15)$$

con:

$$c_n^{(k)} = \langle u_n | \psi_k \rangle \quad (16)$$

Por tanto,  $\rho_{nn}$  representa la probabilidad de encontrar al sistema en el estado  $|u_n\rangle$ . Por esta razón, a cada elemento diagonal  $\rho_{nn}$  se le llama “población” del estado  $|u_n\rangle$ . De forma similar, para los elementos no diagonales se tiene:

$$\rho_{np} = \sum_k p_k c_n^{(k)} c_p^{(k)*} \quad (17)$$

Estos elementos expresan los efectos de correlación (interferencias) que pueden aparecer entre  $|u_n\rangle$  y  $|u_p\rangle$ . Si  $\rho_{np}$  no es cero, existe una “coherencia” entre estos estados. Por ello a los elementos no diagonales se les llama *coherencias*.

Por otro lado, si se tiene un sistema formado por dos subsistemas (1) y (2), el espacio de estados del sistema total vendrá dado por una expresión como (1) (siguiendo la misma notación). La matriz densidad obtenida del sistema global es un operador que actúa sobre  $\mathcal{E}$ , pero a veces es interesante trabajar sobre sólo uno de los subsistemas. Para operar de ese modo, es necesario disponer de unas matrices densidad  $\rho(1)$  o  $\rho(2)$  que actúen sólo sobre  $\mathcal{E}(1)$  o  $\mathcal{E}(2)$  respectivamente. Para hallar estas matrices se realiza la llamada traza parcial mediante la cual:

$$\rho(1) \equiv Tr_2 \rho \quad (18)$$

de modo que la matriz  $\rho(1)$  tenga como elementos:

$$\langle u_n(1) | \rho | u_{n'}(1) \rangle = \sum_p \langle u_n(1) v_p(2) | \rho | u_{n'}(1) v_p(2) \rangle \quad (19)$$

De forma análoga se puede obtener  $\rho(2)$ . Estas matrices contienen la información sobre las predicciones físicas realizadas sobre uno de los subsistemas. Como se puede ver en (19), la matriz densidad del subsistema se ha obtenido promediando sobre el otro subsistema.

Sin embargo, al igual que tratando con estados se podía ver que hay estados que no se pueden poner como producto tensorial de estados, hay matrices densidad de un sistema total que no pueden ser expresadas como productos tensoriales de matrices densidad correspondientes a subsistemas. Para aclarar su significado se presenta el caso concreto de la siguiente matriz densidad de un sistema total:

$$\rho = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Al realizar las trazas parciales con respecto a dos subsistemas, se obtienen las matrices:

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ y } \rho(2) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Pero no siempre se da que:

$$\rho = \rho(1) \otimes \rho(2) \quad (22)$$

El significado de que se dé o no esta igualdad se puede ver fácilmente recordando que los elementos de la diagonal de la matriz densidad son las probabilidades de encontrar el estado correspondiente. Si se da la igualdad se tiene que:

$$\rho = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Es decir, la probabilidad  $a_{11}$  de que se encuentre el estado  $|u_1(1)v_1(2)\rangle$  es igual al producto de la probabilidad  $b_{11}$  de que el subsistema (1) se encuentre en el estado  $|u_1(1)\rangle$  por la probabilidad  $c_{11}$  de que el subsistema (2) se encuentre en el estado  $|v_1(2)\rangle$ , de la misma forma se obtienen los resultados para las demás componentes de la diagonal. Por lo que en el caso de que la matriz densidad total sea igual al producto tensorial de las matrices obtenidas mediante su traza parcial implica que la probabilidad de obtener un estado del sistema total es igual al producto de las probabilidades de obtener cada una de las componentes de este estado en cada subsistema, es decir, no existe correlación entre los subsistemas.

En el caso de que el sistema total no cumpla (22) se ve entonces que existen correlaciones entre los resultados posibles en cada subsistema, ya que entonces la probabilidad total ya no se puede expresar simplemente como el producto de probabilidades de cada subsistema.

## 2. La paradoja EPR

En 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen plantearon un experimento mental<sup>1</sup> con el propósito de demostrar que la teoría cuántica era incompleta. En ese planteamiento recurrían al uso de dos sistemas cuánticos en los cuales las medidas que se realizan están correlacionadas. Vamos a resumir aquí ese trabajo. Primero presentaremos el planteamiento de la paradoja usado por EPR y luego realizaremos una crítica sobre las hipótesis utilizadas y el modo de razonar.

### 2.1. Planteamiento original de la paradoja

Según EPR, a la hora de evaluar el éxito de una teoría física, hay que hacerse dos preguntas: ¿Es correcta la teoría? y ¿Es completa la descripción dada por la teoría?. Sólo si se puede responder afirmativamente a las dos preguntas puede decirse que los conceptos de la teoría son satisfactorios.

En cuanto a la cuestión sobre la corrección de la teoría, ésta se juzga por el grado de acuerdo entre las conclusiones de la teoría y la experiencia.

Sin embargo, los autores de la paradoja se centraron en el significado de la completitud de una teoría física y establecieron que el requisito fundamental para que una teoría fuera

<sup>1</sup>Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N. (1935). «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?». *Physical Review* 47: 777–780.

completa es que todo elemento de la realidad física debe tener una contrapartida en la teoría física. A esta condición la llamaron “condición de completitud”, y la usaron para evaluar si la Mecánica Cuántica es, o no, una teoría completa. Pero incluso con la condición de completitud, aún no se ha hecho una definición para los elementos de realidad física. Para ello establecieron el siguiente criterio: *Si, sin perturbar el sistema en modo alguno, se puede predecir con certeza (es decir, con probabilidad igual a la unidad) el valor de una magnitud física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a dicha magnitud física.*

Como ejemplo para facilitar la comprensión de estas ideas, se puede considerar el comportamiento de una partícula. Uno de los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica es el concepto de estado, que se supone completamente caracterizado por una función de onda  $\psi$ . A cada magnitud física  $A$  le corresponde un operador que se va a designar con la misma letra. Si  $\psi$  representa un estado que es propio del operador  $A$ , es decir, si:

$$A\psi = a\psi \quad (24)$$

entonces la partícula tiene con certeza el valor  $a$ , y, de acuerdo con el criterio de realidad anterior, existe un elemento de realidad física correspondiente a la magnitud física  $A$ . Por tanto, si una partícula con un grado de libertad está en un estado  $\psi$  que es propio del operador momento  $P$ , entonces el momento tiene realidad física. Sin embargo no se puede saber con certeza la posición. Para conocerla, habría que medirla pero esto haría que la partícula dejara de estar en el estado  $\psi$ . Con más generalidad: si los operadores correspondientes a dos magnitudes físicas no conmutan, el conocimiento preciso de una de ellas impide el conocimiento preciso de la otra.

De aquí se deduce que, o bien (1) la descripción mecano-cuántica de la realidad dada por la función de onda no es completa; o bien (2) cuando los operadores correspondientes a dos magnitudes físicas no conmutan, las dos magnitudes no pueden tener realidad simultánea. Pues si ambas magnitudes tuvieran realidad simultánea, estos valores entrarían en la descripción completa según la condición de completitud (es decir, la negación de (2) implica la afirmación de (1)). Por otro lado, si la función de onda proporciona una descripción completa de la realidad, y teniendo en cuenta que se ha demostrado que en Mecánica Cuántica es imposible el conocimiento preciso de dos magnitudes físicas que no conmutan, se llega a que dichas magnitudes no tienen realidad simultánea (es decir, la negación de (1) implica la afirmación de (2)).

A continuación se supondrá que la función de onda sí contiene una descripción completa de la realidad física del sistema en el estado al que corresponde, y se llegará a la conclusión de que esta hipótesis, junto al criterio de realidad, lleva a una contradicción.

Con este fin se supone la existencia de dos sistemas, I y II, los cuales interactúan durante un intervalo de tiempo, después del cual ya no hay ninguna interacción. Sean  $a_1, a_2, a_3, \dots$  los valores propios de una magnitud física  $A$  perteneciente al sistema I, y sean  $|u_1(1)\rangle, |u_2(1)\rangle, |u_3(1)\rangle, \dots$  los correspondientes estados propios. Entonces el estado del sistema total,  $|\Psi\rangle$ , después de la interacción, puede expresarse como:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |u_n(1)\rangle \otimes |\psi_n(2)\rangle \quad (25)$$

Donde los  $|\psi_n(2)\rangle$  son kets pertenecientes al espacio de estados del subsistema II, y los  $c_n$  son coeficientes que aseguran que el estado  $|\Psi\rangle$  está normalizado. Este estado no es un estado producto tensorial, por lo que si en este estado  $|\Psi\rangle$  se mide la magnitud  $A$  y se encuentra el valor  $a_k$ , entonces se deduce, por el postulado de reducción del paquete de ondas, que el sistema I se encuentra en el estado  $|u_k(1)\rangle$  y el sistema II en el estado  $|\psi_k(2)\rangle$ .

El conjunto de estados  $|u_n(1)\rangle$  está determinado por la elección de la magnitud física  $A$ . Si en lugar de ésta, se escoge otra magnitud perteneciente también al sistema I, llamada  $B$ , con valores propios  $b_1, b_2, b_3, \dots$  y estados propios  $|v_1(1)\rangle, |v_2(1)\rangle, |v_3(1)\rangle, \dots$  se obtiene que  $|\Psi\rangle$  puede venir dado también por:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} d_n |v_n(1)\rangle \otimes |\varphi_n(2)\rangle \quad (26)$$

Donde los  $|\varphi_n(2)\rangle$  son otros kets pertenecientes al espacio de estados del subsistema II, y diferentes de  $|\psi_n(2)\rangle$ . De la misma forma que antes, si en este estado se mide  $B$  y se obtiene el valor  $b_r$ , el sistema I se encuentra en el estado  $|v_r(1)\rangle$ , y el sistema II en el estado  $|\varphi_r(2)\rangle$ .

Se ve así que, como consecuencia de dos medidas diferentes realizadas sobre el primer sistema, el segundo sistema puede quedar en estados con dos funciones de onda diferentes. Además, puesto que en el instante de la medida los dos sistemas ya no interactúan, ningún cambio real puede tener lugar en el segundo sistema. Esta idea es fácil de ver si se supone que en el momento de la medida del sistema I éste se encuentra muy alejado del sistema II. Si la medida de I tuviera alguna consecuencia en II, no se respetaría la *causalidad local* según la cual la acción de un sistema sobre otro no se puede transmitir más rápido que la velocidad de la luz (según EPR, este principio se debe cumplir en el caso que se está tratando). Así pues, es posible asignar dos funciones de onda diferentes a la misma realidad.

Ahora bien, puede suceder que  $|\psi_k(2)\rangle$  y  $|\varphi_r(2)\rangle$  sean estados propios de dos operadores no conmutantes correspondientes a ciertas magnitudes físicas  $C$  y  $D$ , respectivamente. En el artículo original, se demuestra la posibilidad de que este caso ocurra, poniendo como ejemplo los operadores momento y posición de dos partículas.

Volviendo al caso general, si se supone que  $|\psi_k(2)\rangle$  es estado propio de  $C$  con valor propio  $c_k$ , y  $|\varphi_r(2)\rangle$  es estado propio de  $D$  con valor propio  $d_r$ , dependiendo de si se mide  $A$  o  $B$ , se puede estar en posición de predecir con certeza, y sin perturbar el segundo sistema, o bien el valor de la magnitud  $C$  (es decir  $c_k$ ) o bien el valor de la magnitud  $D$  (es decir  $d_r$ ). De acuerdo con el criterio de realidad, en el primer caso se debe considerar que a la magnitud  $C$  le corresponde un elemento de realidad, y en el segundo caso, que a la magnitud  $D$  le corresponde un elemento de realidad. Pero como se ha visto, tanto  $|\psi_k(2)\rangle$  como  $|\varphi_r(2)\rangle$  pertenecen a la misma realidad.

De este modo, partiendo de la hipótesis de que la función de onda da una descripción completa de la realidad física, se llega a la conclusión de que dos magnitudes físicas, cuyos operadores no conmutan, pueden tener realidad simultánea. Es decir, la negación de la hipótesis (1) (esto es, la afirmación de que la descripción mecano-cuántica de la realidad dada por la función de onda es completa) conduce a la negación de la única alternativa posible (2) (es decir, cuando los operadores correspondientes a dos magnitudes físicas no conmutan, las dos magnitudes pueden tener realidad simultánea). Esto obliga a concluir que la descripción mecano-cuántica de la realidad física dada por funciones de onda no es completa.

## 2.2. Caso concreto

Para aclarar las ideas expuestas en el artículo EPR que se han presentado, se va a estudiar un caso concreto de la paradoja EPR introducido por Bohm, llamado por ello EPRB y que consiste en el caso de un par de partículas sobre las que se realizan medidas de un observable con solo dos estados propios. Este es el caso en una pareja de partículas de espín  $\frac{1}{2}$  cuyo estado viene dado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1, -2\rangle_z - |-1, +2\rangle_z) \quad (27)$$

donde los signos  $+$  y  $-$  indican, respectivamente, los valores  $+\frac{1}{2}$  o  $-\frac{1}{2}$  para la proyección del spin sobre un eje (por ejemplo el  $z$ ) y el subíndice asociado a cada signo indica a cuál de las dos partículas se refiere. De esta forma se puede ver fácilmente la correlación, ya que si se mide un valor positivo de la proyección sobre el eje  $z$  de una partícula, en la otra se medirá un valor negativo y viceversa. De esta forma se simplifica el planteamiento general presentado en el subapartado anterior, ya que ahora solo se tratan dos posibles estados para cada subsistema, en vez de los  $n$  posibles estados que se usan en la demostración general. Este también puede ser el caso de una pareja fotones ya que tienen solo dos posibles estados de polarización.

Con este estado se va a desarrollar el proceso descrito por EPR. Se cogen las dos partículas que se encuentran en el estado anterior y se envían a sitios diferentes de forma que las partículas estén muy separadas. A continuación se puede elegir medir la proyección del spin sobre el eje  $z$  de la partícula I, si el resultado del experimento es por ejemplo que la proyección tiene un valor negativo, es decir la partícula I se encuentra en el estado  $|-1\rangle_z$ , entonces se medirá que la partícula II se encuentra en el estado  $|+2\rangle_z$ . De esta forma, EPR argumentan que como solo se ha actuado sobre el subsistema I, ningún cambio ha podido tener lugar en el subsistema II, de forma que este subsistema se encontraba en el estado  $|+2\rangle_z$  tanto antes como después de la medida.

Sin embargo se podría haber escogido medir la proyección de los spines sobre el eje  $x$ , se puede calcular (y esta calculado en un apartado mas avanzado de este trabajo) que el estado anterior expresado en estados propios del spin en el eje  $x$  viene dado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1, -2\rangle_x - |-1, +2\rangle_x) \quad (28)$$

Donde cada componente tiene el mismo significado que en el caso anterior, solo que en este caso es sobre el eje  $x$ . Si ahora se realiza la medida sobre el eje  $x$  y se obtiene por ejemplo un valor negativo para la proyección del spin de la partícula I, es decir la partícula I se encuentra en el estado  $|-1\rangle_x$ , entonces se medirá que la partícula II se encuentra en el estado  $|+2\rangle_x$ . De forma similar al caso anterior, se puede argumentar que la partícula II se encontraba en el estado  $|+2\rangle_x$  tanto antes como después de la medida.

De esta forma se ha llegado a que según este razonamiento se pueden asignar dos funciones de onda diferentes a la misma realidad. Sin embargo la proyección del spin sobre diferentes ejes son magnitudes físicas que no conmutan, por lo que se llega a la conclusión de que la negación de (1) implica la negación de (2).

### 2.3. Críticas sobre el planteamiento de la paradoja

Un argumento que se podría usar en contra de la conclusión de la paradoja EPR es que el criterio de realidad utilizado no es lo suficientemente restrictivo. Se podría modificar éste de forma que dijera que dos o más magnitudes físicas se pueden considerar elementos de realidad simultáneos sólo cuando se puede predecir el resultado de sus medidas *simultáneamente*. Esto implicaría que, por ejemplo, en el planteamiento anterior, de las magnitudes  $C$  y  $D$ , se pueda predecir o una u otra, pero no ambas simultáneamente, por lo que no serían reales simultáneamente y no se llegaría a la conclusión de que la Mecánica Cuántica es una teoría incompleta. Sin embargo, esto implicaría que la realidad de  $C$  y  $D$  dependiese del proceso de medida realizado en el sistema I, que no perturba en modo alguno al segundo sistema. Por lo que este criterio de realidad no parece razonable.

Sin embargo, la crítica fundamental fue sobre una de las hipótesis de la que los autores eran firmes defensores, según la cual la medida del sistema I no puede provocar ningún tipo

de alteración en el sistema II. Esto es, la idea de la *causalidad local*<sup>2</sup>. La defensa de dicha hipótesis llevo a muchos autores a intentar plantear una teoría dependiente de unas llamadas *variables ocultas* cuyo conocimiento permitiría tener certeza sobre el resultado de cualquier medida. Sería el desconocimiento de estas variables lo que provocaría el carácter estadístico de la Mecánica Cuántica. Se puede pensar en la relación entre la Mecánica Cuántica y la teoría de variables ocultas como análoga al estudio de una partícula de un gas clásico, donde la imposibilidad de conocer los valores de todas las variables hace necesario recurrir a la física estadística. Pero este carácter probabilístico a la hora de estudiar el gas no significa que una partícula de este gas no tenga un valor determinado de, por ejemplo, su velocidad.

### 3. Variables ocultas locales y teorema de Bell

Debido al artículo EPR, se intentó tanto desarrollar teorías de variables ocultas por parte de los que opinaban que la Mecánica Cuántica era incompleta, como demostrar errores en dichas teorías por parte de los defensores de la Mecánica Cuántica. Se pueden ver estas dos ideas opuestas como las consecuencias de mantener o no la ya mencionada idea de causalidad local. Con el fin de dejar clara la importancia de dicha idea dentro de la paradoja EPR, vamos a presentar un primer apartado dedicado a explicar esta idea. El siguiente apartado tratará sobre el teorema de Bell y finalmente estudiaremos las consecuencias que se pueden deducir de este teorema.

#### 3.1. Causalidad local

Es de gran importancia no caer en el error de que la paradoja contenida en el fenómeno del entrelazamiento cuántico tiene su origen en la aparición de correlaciones entre los resultados de las medidas. Dicha correlación no tiene mayor profundidad que el fenómeno macroscópico de escoger de entre una pelota roja y una azul (sólo una de las dos) y enviarla lejos a otro persona. A dicha persona le llegará una pelota, por ejemplo, la azul, y sabrá que quien le ha enviado la pelota, tiene una de color rojo. Esta experiencia no presenta ningún tipo de dificultad para ser comprendida, y pensar que es la parte problemática del entrelazamiento cuántico lleva a confusiones sobre su planteamiento.

La verdadera problemática a la hora de tratar esta paradoja es el hecho de que en Mecánica Cuántica, para conocer el estado de, por ejemplo, una partícula, se ha de realizar una medida sobre ésta y el resultado de dicha medida se basará en la probabilidad. Es como si en el ejemplo anterior se negara la realidad de haber enviado la pelota azul, de forma que hubiera que esperar a que el observador lejano recoja la pelota para que se estableciera si la pelota enviada es azul o roja, y, una vez observado el color, se fijara que la otra es de un color diferente. De esta forma surge la problemática de la paradoja: ¿Cómo escoge la pelota que se queda en tierra su color de forma que no sea el mismo que la enviada? ¿Cómo sabe esta pelota lo que le ha ocurrido a la otra?. Es en este contexto en el que surge la paradoja.

Para EPR, la solución pasa por atribuir propiedades reales anteriores a la observación al sistema, las cuales se encontrarían correlacionadas. Como dichas propiedades no aparecen en el formalismo cuántico, éste debería estar incompleto. Es importante darse cuenta de que el determinismo en el argumento EPR no se asume directamente como una hipótesis, si no que se deduce del principio de causalidad local (el cual es el principio que los autores no se cuestionaron): como el sistema I no puede afectar al sistema II en el instante en que se mide

---

<sup>2</sup>El no mantener la causalidad local significaría que una medida en I podría causar una alteración en II, y ello conllevaría la aparición de una “fantasmagórica acción a distancia” (“spooky action at a distance”), término que usó Einstein en una carta a Born para defender la necesidad de mantener la causalidad local.



el sistema I (ya que están alejados) entonces la única forma de explicar la existencia de las correlaciones sería mediante la existencia de variables ocultas locales.

De esta forma, queda más clara la diferencia entre los que defendían la Mecánica Cuántica (y asumían que era no local), y los que no veían ningún hecho que les hiciera abandonar la causalidad local, lo que les llevaba a tomar una concepción determinista de la Mecánica Cuántica. Estas son las teorías de variables ocultas locales. Se podría decir que los defensores de cada uno de estos dos puntos de vista se pueden ver reflejados en una de estas dos frases<sup>3</sup>:

“Dios no juega a los dados”

-A. Einstein

“Einstein, deje de decirle a Dios lo que hacer”

-N. Bohr

Las teorías de variables ocultas locales fueron objeto de numerosos ataques, como la prueba de Von-Neumann, la de Jauch y Piron o la de Gleason, cuyo objetivo era demostrar la imposibilidad de obtener las predicciones de la Mecánica Cuántica a partir de una teoría de variables ocultas locales, pero se descubrieron errores en sus argumentos o en la generalidad de sus conclusiones. La verdadera prueba de la imposibilidad de reproducir las Mecánica Cuántica a partir de teorías de variables ocultas vino de John S. Bell en 1964 <sup>4</sup> con el llamado “teorema de Bell”. Bell dedicó numerosos artículos a explicar su teorema. La explicación del teorema que viene a continuación está sacada de uno de los más famosos de estos artículos<sup>5</sup>.

## 3.2. Teorema de Bell

El teorema de Bell dice básicamente que, tomando las condiciones que debe cumplir una teoría de variables ocultas locales, no es posible construir un modelo que obtenga las predicciones dadas por la Mecánica Cuántica.

Para aclarar los conceptos, presentaremos aquí primero un ejemplo muy concreto y sencillo de uno de estos intentos. Ante el fracaso de obtener las predicciones cuánticas con este modelo, intentaremos construir el modelo más general posible, con el cual veremos que se fracasa de nuevo en el intento de obtener las predicciones cuánticas. Finalmente vamos a mostrar alguna conclusión sobre los resultados obtenidos.

### 3.2.1. Un ejemplo: Correlación EPRB

Para introducir el teorema de Bell, se va a estudiar el caso concreto de correlaciones EPRB que ya ha sido presentado. Se tiene una pareja de partículas de espín  $\frac{1}{2}$  cuyo estado viene dado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1, -2\rangle - |-1, +2\rangle) \quad (29)$$

Donde cada componente de esta fórmula tiene el mismo significado que cuando se presentó este estado por primera vez. Se considerará que se mide sobre el eje  $z$  por ejemplo, por lo que se omite el subíndice que indica el eje.

<sup>3</sup>Frases dichas en el quinto congreso Solvay, durante uno de los debates de Einstein con Bohr.

<sup>4</sup>J. S. Bell. «On the Einstein Podolsky Rosen Paradox», *Physics*, 1 (1964), pp. 195-200.

<sup>5</sup>J. S. Bell. «Bertlmann's socks and the nature of reality» *Colloque C2*, Tome 42 (1981)

Se busca tratar este problema desde el punto de vista de las variables ocultas locales. Con este fin se supone una partícula con momento magnético definido atravesando un campo magnético. Esta partícula sentiría una fuerza dada por:

$$F \cos \theta \quad (30)$$

Sin embargo el resultado de emitir partículas con momento magnético aleatorio que luego fueran sometidas a esta fuerza darían lugar a un continuo de resultados. Esto no está de acuerdo con el resultado del experimento de Stern y Gerlach, en el que resulta un conjunto discreto de resultados, por lo que para una partícula de spin  $\frac{1}{2}$  se puede considerar que la fuerza viene dada por:

$$\frac{F \cos \theta}{|\cos \theta|} \quad (31)$$

De esta forma se obtienen dos posibles resultados para la posición de la partícula tras atravesar el campo, que dependen de la fuerza a la que sea sometida:  $+F$  si su momento magnético está apuntando más en la dirección del campo, o  $-F$  si esta apuntando más en dirección opuesta. Obviamente esta modificación añadida al comportamiento de la fuerza que experimenta la partícula carece completamente de sentido dentro del marco de la física clásica y no se intenta dar ningún tipo de explicación física que justifique este cambio. Simplemente es una modificación *ad hoc* para obtener a partir de este planteamiento clásico los resultados de la teoría cuántica y ver los resultados que se obtendrían. Con esta fuerza se pueden obtener las correlaciones EPRB simplemente con asumir que las dos partículas emitidas por la fuente tienen momento magnético en direcciones opuestas. De este modo, si una de las partículas tiene el momento magnético más alineado en la dirección del campo, la otra lo tendrá más en sentido opuesto. Esta idea se puede ver fácilmente en la figura 1.

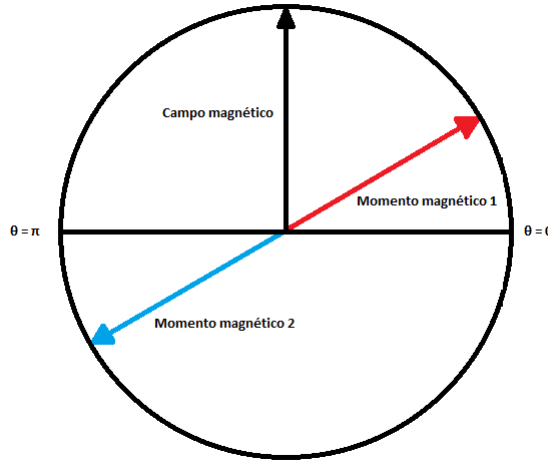


Figura 1: Correlación entre partículas con momento magnético opuesto en este modelo de variables ocultas cuando los campos de los Stern-Gerlach son paralelos

Como se puede ver en este ejemplo, la partícula 1 será desviada en un sentido y la 2 en el sentido contrario. Además, debido a la elección que se ha hecho para la fuerza, para cualquier pareja de partículas con esta correlación, las partículas con momento magnético apuntando más en la dirección del campo acabarían siempre en el mismo lugar, y las que apuntan

más en sentido contrario irían todas al mismo lugar. De esta forma, se consiguen imitar las correlaciones EPRB. Sin embargo, sólo se ha demostrado esto para el caso concreto de que las dos partículas sean desviadas por dos aparatos Stern-Gerlach que tengan sus campos en el mismo sentido.

En la figura 2 se representa lo que ocurre en un caso más general. Como se puede ver,

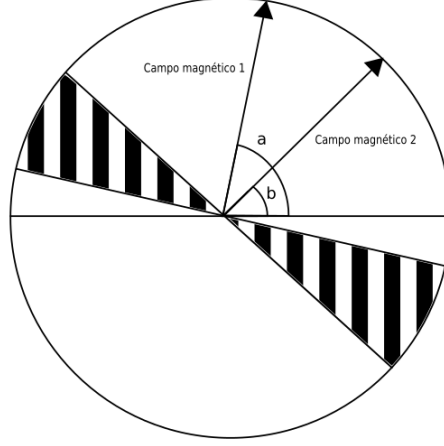


Figura 2: Correlación entre partículas con momento magnético opuesto en este modelo de variables ocultas cuando los campos de los Stern-Gerlach no son paralelos

la aparición de un ángulo  $a - b$  entre las orientaciones de los dos aparatos de Stern-Gerlach provoca que haya una zona (marcada con líneas negras en la anterior figura) en la cual, si se orienta uno de los momentos magnéticos, los resultados de las medidas dejarán de estar anticorrelacionados. Por tanto en este modelo, para los diferentes resultados, y suponiendo una distribución de probabilidad constante para la orientación del momento magnético, se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(\text{arriba,arriba}) = P(\text{abajo,abajo}) = \frac{|a - b|}{2\pi} \quad (32)$$

$$P(\text{arriba,abajo}) = P(\text{abajo,arriba}) = \frac{1}{2} - \frac{|a - b|}{2\pi} \quad (33)$$

Donde “arriba” y “abajo” están definidos con respecto al campo magnético de cada Stern-Gerlach. Sin embargo, según la Mecánica Cuántica, las probabilidades son:

$$P(\text{arriba,arriba}) = P(\text{abajo,abajo}) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{a - b}{2} \quad (34)$$

$$P(\text{arriba,abajo}) = P(\text{abajo,arriba}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{a - b}{2} \quad (35)$$

Por tanto, el modelo ad hoc utilizado solo reproduce los resultados mecano-cuánticos para  $a - b = 0$ ,  $a - b = \frac{\pi}{2}$  y  $a - b = \pi$ , pero no para ángulos intermedios. De este modo se encuentra una diferencia fundamental en las predicciones de este modelo de variables ocultas locales y la Mecánica Cuántica. Como el objetivo inicial era obtener las predicciones de la Mecánica Cuántica a partir de un modelo de variables ocultas locales, se puede decir que este modelo ha fracasado.

Por supuesto, este modelo es simplemente un modelo básico y sin ningún tipo de generalidad. La pregunta que surge es la siguiente: ¿Se puede idear un modelo de variables ocultas locales que reproduzca completamente las predicciones cuánticas? La respuesta es que no. A esta conclusión se puede llegar con el siguiente experimento propuesto por Bell.

### 3.2.2. Argumento general

Hasta ahora se ha tratado el caso concreto de partículas de spin  $\frac{1}{2}$ . Con el fin de obtener la demostración más general posible no se va a hablar de spin  $\frac{1}{2}$ . De hecho no se va a hablar ni de spin; ni siquiera de partículas, ni de sistemas mecánico-cuánticos. La posibilidad de recurrir a este nivel de generalidad se debe a que la dificultad real del entrelazamiento cuántico se encuentra en el mecanismo de correlación de las medidas de ciertos montajes experimentales. Por tanto, se considera el montaje esquematizado en la figura 3.

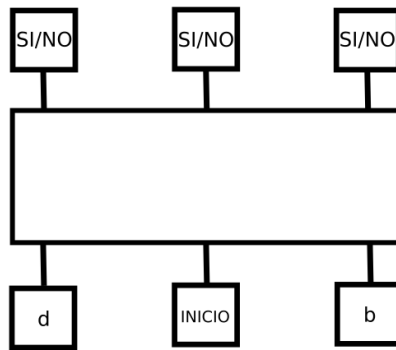


Figura 3: Montaje EPR general, con tres entradas y tres salidas.

Para evitar detalles sin importancia, se representa simplemente como una caja larga con tres entradas y tres salidas. La entrada central es simplemente una señal que inicia el experimento en un tiempo  $t_1$ . Poco después de activarse el experimento, la salida central niega o confirma si el experimento se realiza en las condiciones esperadas (en el caso EPRB sería que las partículas van cada una a un lado y que están preparadas de forma adecuada por ejemplo). Para un tiempo  $t_1 + T$  las otras salidas muestran un “sí” o un “no” (en el caso de EPRB podría verse la medida del spin  $+\frac{1}{2}$  como el “sí” y el  $-\frac{1}{2}$  como el “no”), pero antes de esta medida, entran dos señales “d” y “b” (en el caso EPRB serían los ángulos de los Stern-Gerlach) en un tiempo  $t_1 + T - \delta$  con  $c\delta \ll L$  donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $L$  el largo de la caja. De esta forma se esperaría que estas señales no tengan influencia sobre las salidas del lado opuesto.

Con el fin de aclarar las propiedades de las probabilidades que se van a utilizar en el desarrollo de este apartado, se presenta el siguiente ejemplo. Consideremos una empresa que se dedica a la venta de helados. Con el fin de estudiar el mercado, realiza un estudio en Cádiz y en Almería. Dicho estudio busca hallar cual es la probabilidad de que en un día determinado se produzca una venta de helados superior a la media en las dos zonas. Con este fin se denota con la letra  $A$  al resultado de ventas en Cádiz.  $A$  puede tomar dos valores: 1 si la venta ese día es superior a la media, o  $-1$  si la venta es menor. De forma similar se introduce  $B$  para el caso de Almería. Un hecho que tienen claro las empresas de helados es que la venta de estos aumenta con los días en los que la temperatura es mayor, por lo que al estudio se añade la variable  $a$  y la  $b$ , correspondientes a las temperaturas en Cádiz y en Almería respectivamente. Además, se supondrá que es cierto que las ventas en una zona no

dependen de la temperatura de la otra. Al realizar el estudio resulta que se observa que el número de ventas con respecto a la media en Cádiz y en Almería están correlacionadas, es decir:

$$P(A, B|a, b) \neq P_C(A|a)P_A(B|b)$$

Donde  $P_C(A)$  representa la probabilidad de que en Cádiz se produzcan o no un número de ventas superior a la media (dependiendo del valor de  $A$ ), y  $P_A(B)$  tiene el mismo significado pero para el caso de Almería. Resulta que cuando el número de ventas en una zona es superior a la media, también lo es en la otra. Esta correlación en los resultados se puede intentar explicar incluyendo varios factores, por ejemplo, Cádiz y Almería pertenecen a la misma comunidad autónoma, por lo que comparten gran parte de los medios de comunicación por los que realizar publicidad. Si la empresa de helados realiza una campaña publicitaria determinado día, las ventas subirán en las dos zonas a la vez, por lo que el factor de publicidad se podría incluir en las fórmulas anteriores llamandola  $\lambda_1$ . Otro factor a tener en cuenta es que en los días no laborables (los cuales comparten en su mayoría estas dos zonas) la gente tiene más tiempo libre y esto fomenta la venta de helados. A la dependencia de las ventas con el día se le llama  $\lambda_2$ . De esta forma se pueden ir añadiendo factores causales cuyo efecto es un aumento (o reducción) de las ventas en las dos zonas de forma que si se tienen en cuenta todos y se engloban dentro de una variable  $\lambda$ , esta se puede fijar, y de esta forma ya se tiene:

$$P(A, B|a, b, \lambda) = P_C(A|a, \lambda)P_A(B|b, \lambda)$$

En este ejemplo se han mostrado factores que añaden una correlación, es decir, aumentan o disminuyen las ventas en las dos zonas, pero también pueden existir factores que añadan una anticorrelación, es decir que aumenten las ventas en una zona y la disminuyan en otra.

Una vez aclaradas las expresiones que se van a utilizar, se vuelve al caso del experimento de la figura 3. Si se realizan muchas medidas se puede obtener la probabilidad condicional  $P(A, B|a, b)$  de obtener el resultado  $A$  (que puede ser sí o no) en un lado y  $B$  (que también puede ser sí o no) en el otro para unas entradas  $a$  y  $b$ . Sin embargo, se busca tratar el experimento cuando existe una correlación entre  $A$  y  $B$ , esto se traduce en que  $P$  no se separa en un producto de factores independientes:

$$P(A, B|a, b) \neq P(A|a)P(B|b) \quad (36)$$

Para explicar la correlación se puede suponer, como hemos visto en el anterior ejemplo, la existencia de una serie de variables representadas por  $\lambda$ , las cuales una vez identificadas y fijadas permiten obtener la verdadera expresión de la probabilidad como:

$$P(A, B|a, b, \lambda) = P_1(A|a, \lambda)P_2(B|b, \lambda) \quad (37)$$

Escrito de esta forma resulta sencillo observar que en este planteamiento está incluida la causalidad local, ya que a la derecha de (37) se ha escrito el primer factor de forma que sea independiente de  $b$ , y el segundo de  $a$ . Si se considera una función de distribución de probabilidad para  $\lambda$  dada por  $f(\lambda)$ , se puede obtener:

$$P(A, B|a, b) = \int f(\lambda)P(A, B|a, b, \lambda)d\lambda \quad (38)$$

Y es esta probabilidad para la que se tienen predicciones mecánico-cuánticas.

Sin embargo no todas las probabilidades  $P(A, B|a, b)$  pueden ser expresadas en la forma de (38). Se puede demostrar (la demostración aparece en un apéndice al final de este trabajo)

que las probabilidades con esta forma, para cualquier  $\lambda$  y cualquier distribución  $f(\lambda)$  deben cumplir la desigualdad de Clauser-Holt-Shimony-Horne<sup>6</sup> (CHSH) dada por:

$$|E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| \leq 2 \quad (39)$$

Donde:

$$E(c, d) = P(\text{si, si}|c, d) + P(\text{no, no}|c, d) - P(\text{si, no}|c, d) - P(\text{no, si}|c, d) \quad (40)$$

$E(c, d)$  es una función que expresa el nivel de correlación de las medidas: si  $E(c, d)$  es +1, las medidas dan el mismo resultado, y si  $E(c, d)$  es -1, las medidas dan resultados opuestos. Obviamente esta función también puede tomar valores intermedios. Por tanto, si el entrelazamiento cuántico se pudiera explicar mediante variables ocultas locales, esta teoría debería producir las predicciones de la Mecánica Cuántica y cumplir la desigualdad (39). Sin embargo, para el caso del experimento EPRB se tiene:

$$E(c, d) = \sin^2 \frac{c-d}{2} - \cos^2 \frac{c-d}{2} = -\cos(c-d) \quad (41)$$

Si se toma por ejemplo:

$$a = 0^\circ, a' = 90^\circ, b = 45^\circ, b' = -45^\circ \quad (42)$$

se obtiene:

$$|E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| = 2\sqrt{2} \quad (43)$$

lo cual entra en contradicción con (39). Por tanto, las correlaciones cuánticas no se pueden explicar de forma local. El valor máximo que permite la Mecánica Cuántica es precisamente el valor  $2\sqrt{2}$ , por tanto esta teoría predice:

$$|E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| \leq 2\sqrt{2} \quad (44)$$

Con estos resultados se llega al siguiente resultado, que resume el teorema de Bell.

**“Ninguna teoría física de variables ocultas locales puede reproducir todas las predicciones de la Mecánica Cuántica.”**

### 3.3. Conclusión

Para evitar el problema con la desigualdad CHSH, se podría permitir que en (37)  $P(A|a, \lambda)$  dependa también de  $b$  y  $P(B|b, \lambda)$  de  $a$ , lo cual significaría permitir una influencia que se transmita a mayor velocidad que la luz, es decir, se podría intentar construir una teoría de *variables ocultas no locales*. Sin embargo la motivación inicial de la introducción de variables ocultas era, al menos en lo que incumbe a la paradoja EPR, eliminar esta acción a distancia. Esta posibilidad se ha negado con el teorema de Bell.

Una vez obtenidos las predicciones dadas por el teorema de Bell, basta con realizar medidas experimentales y ver si el límite superior dado por (39) realmente existe. En el apartado 5 “Experimentos realizados” se explican experimentos realizados con este fin, y de los cuales se obtiene que es posible sobrepasar este límite (por lo cual las teorías de variables ocultas no son posibles), y además se obtiene un valor límite muy cercano al valor dado por (44), por lo que la Mecánica Cuántica vuelve a estar de acuerdo con los resultados experimentales.

<sup>6</sup>J.F. Clauser, R.A. Holt, M.A. Horne y A. Shimony, Phys. Rev. Letters 23 (1969) 880

Como se ha explicado, las teorías de variables ocultas no locales no entran en el contenido de este trabajo, pero para finalizar este apartado, hay que mencionar que se han desarrollado teorías de variables ocultas no locales, de entre las cuales una de las más conocidas es la teoría de Bohm-de Broglie. Para profundizar más en teorías de variables ocultas, se pueden leer los artículos<sup>7,8</sup> publicados por David Bohm.

## 4. Entrelazamiento cuántico y comunicación superlumínica

Como se ha explicado, en Mecánica Cuántica el estado de un sistema colapsa instantáneamente cuando se realiza una medida de un observable para el cual el estado inicial no era un estado propio. Este colapso instantáneo hace surgir la siguiente pregunta: ¿Es posible utilizar este proceso para transmitir información a una velocidad mayor que la de la luz?. La respuesta a esta pregunta es negativa. En este apartado se tratan diferentes mecanismos por los cuales podría parecer posible comunicarse de forma superlumínica.

### 4.1. Intentos básicos de comunicación superlumínica mediante entrelazamiento cuántico

Supongamos que se tienen a dos personas en diferentes lugares: Alice en la Tierra y Bob en Marte. Cada uno tiene una partícula que está “entrelazada” con la otra (se usará el índice 1 para referirse a la partícula de Alice y el 2 para la de Bob). Si Alice mide el spin de su partícula y lo encuentra con orientación positiva esto no significa que la partícula estuviera en el estado  $|\uparrow\rangle_1$  (las flechas que están hacia arriba y las que están hacia abajo indican estados propio del spin en el eje  $z$  con valor propio positivo y negativo respectivamente). Es el proceso de medida el que convirtió el estado inicial dado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1, \downarrow_2\rangle - |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle) \quad (45)$$

en el estado:

$$|\Psi'\rangle = |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle \quad (46)$$

Como se puede ver, el proceso de medida realizado por Alice cambia el estado de la partícula de Bob.

De esta forma parece ser que hay un intercambio de información instantáneo sobre el cambio que ocurre en la Tierra que cambia la situación en Marte. Pero esta conclusión es errónea: no se transmite ningún tipo de información de forma instantánea. Esto se debe a que los cambios discutidos son de carácter estadístico. Al realizar Alice la medida, si se obtiene  $|\uparrow\rangle_1$ , entonces Alice sabe que cuando Bob mida obtendrá  $|\downarrow\rangle_2$ , sin embargo Bob no sabe que Alice ha medido, por lo que él supone que tiene un 50 % de probabilidades de medir  $|\uparrow\rangle_2$  y un 50 % de medir  $|\downarrow\rangle_2$ . Sin duda cuando Bob mida, encontrará  $|\downarrow\rangle_2$ , pero Bob puede considerar que se ha debido al 50 % de probabilidad que tenía desde el principio. O puede pensar que se debe a que Alice ha medido y por tanto era el único resultado posible. Pero Bob no obtiene ninguna información de si Alice ha medido o no.

Como los resultados de estas medidas son estadísticos por naturaleza, la única forma de asegurar que se está produciendo una comunicación superlumínica es observando una

<sup>7</sup>«A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I» Phys. Rev., 85, n°2 (1952)

<sup>8</sup>«A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II» Phys. Rev., 85, n°2 (1952)

diferencia en las distribuciones estadísticas de Bob cuando Alice mide y cuando no. Para ver si hay una diferencia vamos a plantear dos experimentos.

En los dos experimentos se preparan conjuntos de pares de partículas entrelazadas, en el estado (45) por ejemplo. De cada pareja se envía una a Marte y la otra a la Tierra. Sin embargo, en el primer experimento se mide el spin de las partículas de Marte sin haber actuado sobre los de la Tierra. Por tanto la distribución de resultados será 50:50. Para el segundo experimento, se mide primero el spin de las partículas en la Tierra, Alice no tiene forma de controlar el resultado del experimento que realiza por tanto obtendrá una distribución del 50:50 para sus medidas, lo cual se traduce en un 50:50 cuando mida Bob.

Por tanto los resultados obtenidos por Bob son idénticos en los dos casos: las medidas en la Tierra no producen ningún cambio en los resultados colectivos en Marte.

Sin embargo, existe otra posibilidad para la transmisión de un mensaje. Alice puede escoger entre medir el spin de su partícula en el eje  $z$  (como se estaba considerando hasta ahora) o medir el spin en otro eje, por ejemplo el eje  $x$  cuya base de estados propios viene dada por:

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad (47)$$

$$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \quad (48)$$

Usamos una notación que establece la flecha a la derecha para el valor propio positivo de la medida en el eje  $x$  y la izquierda, para el negativo. A diferencia del caso anterior, en el que Alice no podía elegir el resultado de su medida, ahora Alice puede elegir en qué eje decide medir el spin. De esta forma, si la elección del eje que haga Alice provoca diferentes distribuciones en los resultados de Bob, sería posible una comunicación superlumínica.

Para estudiar esta posibilidad, se supone que Alice mide el spin en el eje  $x$  y obtiene el estado  $|\rightarrow_1\rangle$ . Esto significa que la partícula de Bob colapsa al estado  $|\leftarrow_2\rangle$ . Pero Bob solo mide en el eje  $z$  y según (47), existe una probabilidad del 50% de que colapse en un estado arriba o uno abajo (la misma distribución de probabilidades se obtiene si Alice hubiera obtenido el estado  $|\leftarrow_1\rangle$ ). Por tanto la distribución de probabilidades para las medidas de Bob es la misma si Alice escoge el eje  $z$  o el  $x$ , aunque por diferentes razones. Para el caso en el que Alice escoge el eje  $x$ , la partícula de Bob se encuentra en una superposición de estados arriba y abajo. En el caso de que Alice escoge el eje  $z$ , la partícula de Bob se encuentra en un estado definido o arriba o abajo, pero él no lo sabe hasta que realiza la medida. De todas formas, aunque sean procesos distintos, el resultado de los experimentos es el mismo, por lo que Bob no puede distinguir la decisión de Alice y este proceso no se puede utilizar para comunicación superlumínica.

#### 4.1.1. Caso más general

En el anterior caso, se ha demostrado que no se puede transmitir información solo para el caso en el que Alice escoge un eje perpendicular al eje  $z$ . A continuación se demuestra que este resultado es general para cualquier eje que se escoja.

Tomemos un eje dado por un cierto vector  $\hat{u}$  cualquiera (ver figura 4). Con respecto a este nuevo eje, los vectores propios del spin en el eje  $z$  se escriben como:

$$|\uparrow\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |+\rangle_{\hat{u}} - \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |-\rangle_{\hat{u}} \quad (49)$$

$$|\downarrow\rangle = \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |+\rangle_{\hat{u}} + \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |-\rangle_{\hat{u}} \quad (50)$$



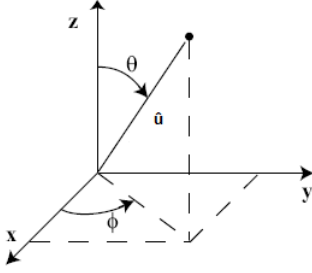


Figura 4: Ángulos del eje  $\hat{u}$  con los ejes cartesianos

Y los vectores propios del spin en el eje  $\hat{u}$  se escriben como:

$$|+\rangle_{\hat{u}} = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |\uparrow\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |\downarrow\rangle \quad (51)$$

$$|-\rangle_{\hat{u}} = -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |\uparrow\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |\downarrow\rangle \quad (52)$$

De esta forma se obtiene:

$$|\uparrow_1, \downarrow_2\rangle = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle_{\hat{u}} |+\rangle_{\hat{u}} + \cos^2 \frac{\theta}{2} |+\rangle_{\hat{u}} |-\rangle_{\hat{u}} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle_{\hat{u}} |-\rangle_{\hat{u}} - \sin^2 \frac{\theta}{2} |-\rangle_{\hat{u}} |+\rangle_{\hat{u}} \quad (53)$$

$$|\downarrow_1 \uparrow_2\rangle = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle_{\hat{u}} |+\rangle_{\hat{u}} - \sin^2 \frac{\theta}{2} |+\rangle_{\hat{u}} |-\rangle_{\hat{u}} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle_{\hat{u}} |-\rangle_{\hat{u}} + \cos^2 \frac{\theta}{2} |-\rangle_{\hat{u}} |+\rangle_{\hat{u}} \quad (54)$$

Como se parte del estado (45), se obtiene:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_{\hat{u}} |-\rangle_{\hat{u}} - |-\rangle_{\hat{u}} |+\rangle_{\hat{u}}) \quad (55)$$

Como la forma del estado singlete es uniforme en cualquier orientación, se puede decir que es un estado isótropo. De forma que si Alice decide medir el spin según el eje  $\hat{u}$  tiene un 50 % de probabilidades de medir  $|+\rangle_{\hat{u}}$ , por lo que el estado de Bob será el  $|-\rangle_{\hat{u}}$  que al medirse según el eje  $z$  tiene, según (52), una probabilidad igual a  $\sin^2 \frac{\theta}{2}$  de medir el estado  $|\uparrow_2\rangle$  y según (51) una probabilidad igual a  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$  de medir el estado  $|\downarrow_2\rangle$ . Pero Alice tenía otro 50 % de probabilidades de medir el estado  $|-\rangle_{\hat{u}}$ , por lo cual Bob tendría el estado  $|+\rangle_{\hat{u}}$ , y con ello, una probabilidad igual a  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$  de medir el estado  $|\uparrow_2\rangle$  y una probabilidad igual a  $\sin^2 \frac{\theta}{2}$  de medir el estado  $|\downarrow_2\rangle$ . Por lo tanto Bob tiene las siguientes probabilidades de medir los estados arriba y abajo:

$$\mathcal{P}(\uparrow_2) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \quad (56)$$

$$\mathcal{P}(\downarrow_2) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \quad (57)$$

De esta forma se ve que para cualquier rotación del aparato de medida de Alice se obtiene el mismo resultado. Por tanto queda demostrado con más generalidad que este proceso de rotación no se puede usar para transmitir información.

#### 4.1.2. Interpretación según la matriz densidad

Todo este proceso para analizar la posible transmisión de información de forma instantánea se puede llevar a cabo en el formalismo de la matriz densidad.

Sea un estado singlete dado por (45). La matriz densidad que lo describe en la base de estados propios del spin en el eje  $z$  viene dada por:

$$\rho_z = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Si a esta matriz se le realiza la traza parcial con respecto a Alice, se obtiene la matriz densidad del subsistema de Bob:

$$\rho_z^B = \text{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{Bz} \quad (59)$$

De forma similar se puede obtener la matriz densidad del sistema total en el caso de que Alice mida el spin en un eje arbitrario. Según (55) se tiene:

$$\rho_{\hat{u}} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Y realizando la traza parcial se tiene:

$$\rho_{\hat{u}}^B = \text{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} (|+2\rangle_{\hat{u}}\langle+2|_{\hat{u}} + |-2\rangle_{\hat{u}}\langle-2|_{\hat{u}}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{B\hat{u}} \quad (61)$$

Con (51) y (52) se puede expresar este operador en la base del eje  $z$  y se obtiene:

$$\rho_{\hat{u}}^B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{Bz} \quad (62)$$

Es decir, la matriz densidad es la misma en todos los casos, por lo que la distribución estadística es la misma en cualquier caso, y se obtiene el resultado demostrado en los anteriores apartados: no se puede usar este proceso para transmitir información de forma instantánea. Se puede observar que la matriz densidad describe la mezcla estadística de los dos posibles estados que emergen después de romperse el entrelazamiento.

Con el fin de aclarar el significado físico del proceso seguido, es recomendable realizar dicho proceso en el caso general en el que el estado viene dado por:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow_1, \leftarrow_2\rangle + e^{i\varphi} |\leftarrow_1, \rightarrow_2\rangle) \quad (63)$$

Como se puede ver, la diferencia de fase  $\varphi$  es arbitraria en este caso. Calculando la matriz densidad se obtiene:

$$\rho_{\hat{u}} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Si se realiza la traza parcial con respecto a Alice se tiene:

$$\rho_x^B = \text{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{Bx} \quad (65)$$

Si el estado anterior se hubiera expresado por ejemplo en la base del spin en el eje  $z$  se tendría:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \frac{\varphi}{2} |\uparrow_1, \uparrow_2\rangle - i \sin \frac{\varphi}{2} |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle + i \sin \frac{\varphi}{2} |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle - \cos \frac{\varphi}{2} |\downarrow_1, \downarrow_2\rangle) \quad (66)$$

Y se tendría la siguiente matriz densidad:

$$\rho_{\hat{a}} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\varphi}{2} & i \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} & -i \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} & -\cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ -i \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} & \sin^2 \frac{\varphi}{2} & -\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} & i \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ i \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} & -\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} & \sin^2 \frac{\varphi}{2} & -i \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\cos^2 \frac{\varphi}{2} & -i \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} & i \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} & \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \quad (67)$$

Y realizando la traza parcial con respecto a Alice se obtiene:

$$\rho_x^B = \text{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{Bz} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{Bx} \quad (68)$$

Como se puede ver, al realizar la traza parcial sobre la matriz densidad de estos estados no aparecen términos de coherencia. En definitiva, la imposibilidad de usar este proceso para comunicación superlumínica se debe a que ésta se basaría en medidas en subsistemas de un sistema total y con este subsistema es imposible saber si se está tratando con un estado formado por una superposición o con una mezcla estadística de estados puros. Es evidente que se podría intentar realizar medidas sobre el sistema completo para ver si aparecen términos de coherencia en la matriz densidad total. De esta forma se podría distinguir entre el caso de mezcla estadística de estados puros y estado superposición puro, pero esta medida, que tendría que ser realizada sobre el sistema total, es la que no sería instantánea por lo que no habría comunicación superlumínica.

## 4.2. Teorema de no clonación

Podría parecer que aun existe una vía para conseguir la comunicación superlumínica a pesar de todos los argumentos presentados. Por lo que se ha visto, la imposibilidad de producirse este tipo de comunicación, por ejemplo en el caso en el que Alice decidiera medir en el eje  $x$  o el  $z$ , se debe a la incapacidad de Bob de saber si la partícula que tiene está en un estado superposición o no. Sin embargo si existiera un mecanismo con el cual clonar el estado de la partícula de Bob, éste podría realizar el número de medidas que quisiera sobre el mismo estado y entonces sí podría distinguir el estado en el que se encontraba su partícula. Esto permitiría la existencia de un canal para comunicarse a una velocidad superior que la de la luz. Sin embargo esta clonación no es posible. Este es el resultado del llamado “teorema de no clonación” y se demuestra a continuación.

Sea un estado  $|\Psi\rangle$  dado por una superposición de estados  $|\psi_j\rangle$  con amplitudes  $a_j$ :

$$|\Psi\rangle = \sum_j a_j |\psi_j\rangle \quad (69)$$

Como no se conoce el estado  $|\Psi\rangle$ , la partícula (en un estado original cualquiera  $|\Omega\rangle$ ) que se va a clonar a este estado debe interactuar con la partícula original mediante un operador

$U$  que realice la siguiente transformación:

$$U |\Psi\rangle |\Omega\rangle = |\Psi\rangle |\Psi\rangle = \left( \sum_j a_j |\psi_j\rangle \right)^2 \quad (70)$$

Pero como  $U$  es un clonador capaz de copiar cualquier estado, también debe ser capaz de clonar cada uno de los estados de la superposición (69), es decir:

$$U |\psi_j\rangle |\Omega\rangle = |\psi_j\rangle |\psi_j\rangle \quad (71)$$

De forma que si se aplican primero las propiedades de linealidad de  $U$  y luego se usa este clonador se tiene:

$$U |\Psi\rangle |\Omega\rangle = U \left( \sum_j a_j |\psi_j\rangle \right) |\Omega\rangle = \sum_j U a_j |\psi_j\rangle |\Omega\rangle = \sum_j a_j |\psi_j\rangle |\psi_j\rangle \quad (72)$$

Como se puede ver, (70) y (72) no son iguales, por lo que un operador  $U$  que cumpla con las condiciones necesarias: no es posible la clonación.

## 5. Experimentos realizados

A lo largo de este trabajo se ha hablado de varios experimentos ideales y de los resultados que se esperaba obtener. En esos experimentos nos hemos referido al uso de parejas de partículas de spin  $\frac{1}{2}$  con sus spines correlacionados. Sin embargo, en la práctica, los experimentos resultan ser más sencillos de realizar con fotones que tengan sus polarizaciones correlacionadas. Como las polarizaciones posibles de los fotones son dos (al igual que el número de proyecciones del spin cuando el spin es  $\frac{1}{2}$ ) el desarrollo de los resultados obtenidos en este trabajo para partículas es similar al caso de fotones.

Los experimentos más interesantes son los dirigidos a obtener un resultado que confirme o desmienta el teorema de Bell. Como ya se ha visto, el planteamiento seguido por Bell lleva a una desigualdad que debería cumplirse si la naturaleza se pudiera explicar mediante variables ocultas locales. Esto entra en contradicción con las predicciones de la Mecánica Cuántica para algunos de los montajes experimentales. A partir del trabajo de Bell, se pueden obtener varias desigualdades que se deberían cumplir de ser cierta la teoría de variables ocultas.

En los experimentos que se van a mostrar se realizan medidas de las correlaciones entre las polarizaciones de una pareja de fotones. Estas correlaciones se utilizan para determinar si se cumple la desigualdad dada por (39). De darse el caso de que esta desigualdad no se cumpla, quedaría determinado que este tipo de correlaciones no se pueden explicar de una forma clásica.

### 5.1. Aspect, Grangier y Roger (1981)

Como ya se ha explicado, el teorema de Bell predice una diferencia en las medidas de sistemas correlacionados en el caso de que estas correlaciones puedan ser explicadas clásicamente o de que su explicación correcta se realice mediante la Mecánica Cuántica. De esta forma, los experimentos que se explican tienen la finalidad de medir la estadística de las correlaciones entre los resultados de medidas sobre sistemas “entrelazados”.

En 1981, Aspect, Grangier y Roger diseñaron un experimento<sup>9</sup> para observar el verdadero comportamiento de las correlaciones con el fin de hallar cual de las teorías era correcta. El montaje experimental utilizado viene representado en la figura 5.

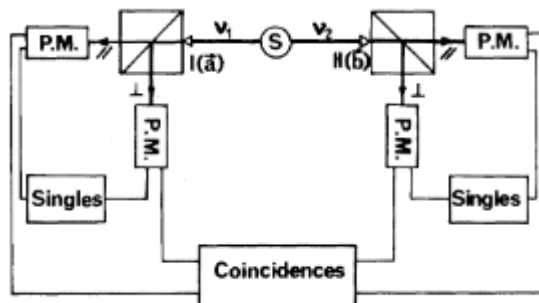


Figura 5: Montaje experimental. Una fuente de fotones entrelazados emite dos fotones (uno hacia cada uno de los lados) que inciden en cada caso sobre un cubo polarizador (las orientaciones de ambos cubos se indican por los ángulos  $a$  y  $b$ ). Se dispone de un detector en cada una de las salidas junto con un sistema electrónico que determina las correlaciones entre las lecturas de ambos.

La idea fundamental del experimento es la siguiente: Se producen parejas de fotones entrelazados de los cuales cada uno va hacia un lado y cada uno llega a un polarizador distinto cuyos ejes de transmisión están formando ángulos  $a$  y  $b$  en un cierto sistema de referencia. Cada fotón puede llegar a dos fotodetectores diferentes dependiendo de si es transmitido o reflejado en el polarizador. En el caso de que los dos fotones de la pareja sean detectados, se registra una medida de coincidencia que depende de qué par de fotodetectores sean los que han hecho el registro. Estas medidas de coincidencia son las que más adelante se llaman  $R$ . Como la medida de cada fotodetector corresponde a un estado de polarización de cada fotón, esta medida de coincidencia tiene información sobre la relación entre las polarizaciones de la pareja de fotones dependiendo de los ángulos  $a$  y  $b$  de cada cubo polarizador.

Vamos a dar detalles del experimento.

Los fotones entrelazados proceden de la transición en cascada (figura 6)  $(J=0) \rightarrow (J=1) \rightarrow (J=0)$  de calcio-40 excitada mediante el uso de dos láseres. Como resultado se obtienen pares de fotones de longitudes de onda  $\lambda_1 = 551,3$  nm y  $\lambda_2 = 422,7$  nm con sus polarizaciones correlacionadas y a un ritmo de  $5 \cdot 10^7 s^{-1}$ .

Una vez emitidos los pares de fotones, cada uno se dirige hacia un cubo polarizador formado por dos prismas unidos con una lámina dieléctrica situada en la cara en la que están unidos, de forma que permite pasar los fotones cuya polarización es paralela a la superficie y refleja los que tienen una polarización perpendicular. Para tener en cuenta los efectos producidos por la imperfección de los polarizadores, se miden los coeficientes de transmisión  $T$  y de reflexión  $R$ . En el montaje empleado se obtuvo  $T_1^{\parallel} = R_1^{\perp} = 0,950$  y  $T_1^{\perp} = R_1^{\parallel} = 0,007$  para  $\lambda_1$  y  $T_2^{\parallel} = R_2^{\perp} = 0,930$  y  $T_2^{\perp} = R_2^{\parallel} = 0,007$  para  $\lambda_2$ , donde los superíndices especifican si son para fotones con polarización perpendicular o paralela a la superficie.

Cada polarizador se encuentra situado sobre un mecanismo que permite su rotación y cuenta con dos fotomultiplicadores; uno que se encarga de medir los fotones que han

<sup>9</sup>Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gerard Roger. «Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities» Phys. Rev., 49, nº2 (1982)

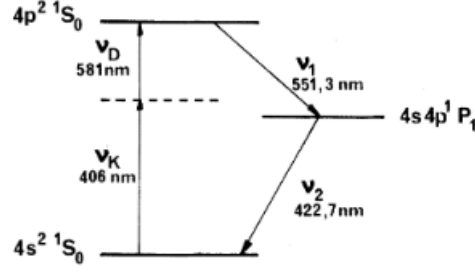


Figura 6: Cascada  $(J=0) \rightarrow (J=1) \rightarrow (J=0)$  del calcio-40. Como resultado se obtienen dos fotones entrelazados.

atravesado el polarizador y otro que mide los que se han reflejado. Además, se colocan filtros monocromadores ante cada fotomultiplicador para medir sólo los fotones entrelazados de forma que los fotomultiplicadores de un lado solo pueden medir fotones de longitud de onda  $\lambda_1$  y los del otro solo pueden medir los de longitud de onda  $\lambda_2$ . Con esta fuente se detectaron  $10^4$  fotones por segundo en cada polarímetro. Finalmente, se utiliza un sistema de correlación que distingue intervalos de tiempo de 20 ns: cuando cada fotodetector realiza una medida en el mismo intervalo se considera una coincidencia, que se caracteriza por la polarización de cada fotón. Como cada fotón puede tener dos estados de polarización, existen cuatro posibles medidas de coincidencia:  $R_{++}(a, b)$ ,  $R_{+-}(a, b)$ ,  $R_{-+}(a, b)$  o  $R_{--}(a, b)$  dependiendo de qué fotodetectores sean los que la hayan registrado. En el caso de este experimento, los “-” indican que el fotón ha sido reflejado en el cubo polarizador y ha sido detectado, mientras que el “+” da cuenta del proceso en el que el fotón ha atravesado el cubo polarizador y ha sido registrado. Los valores  $a$  y  $b$  son los ángulos que forman los polarímetros en una configuración determinada del montaje experimental. Como la vida media del estado intermedio de la cascada (5 ns) es menor que el del intervalo de 20 ns, se considera que se miden todas las coincidencias. Además se añade otro circuito con un intervalo de 20 ns pero retrasado 100 ns de forma que las coincidencias que se observen entre este canal retardado con el canal sin retardar se considerarán coincidencias accidentales y se restarán de las medidas finales. En este experimento, los valores de  $R_{\pm\pm}(a, b)$  se encontraron entre 0 y 40 coincidencias por segundo.

Con el fin de aclarar este montaje experimental y el proceso que se mide describiremos el caso concreto de una medida.

La medida comienza con la emisión de un par de fotones con polarizaciones correlacionadas. Como delante de los fotodetectores de un lado hay un filtro que deja pasar fotones con longitud de onda  $\lambda_1$  y en el del otro lado hay un filtro que deja pasar longitud de onda  $\lambda_2$  solo interesa el caso en el que cada fotón va hacia el lado del montaje que puede atravesar. Se supone que este es el caso. Cuando el fotón de longitud de onda  $\lambda_1$  llega al cubo polarizador, puede ser transmitido o reflejado (con mayor o menor probabilidad dependiendo del ángulo del polarímetro de este lado, llamado  $a$ ). Supongamos que este fotón es transmitido (es decir, se representará con un “+”) y medido por el fotomultiplicador correspondiente y que, además, este fotón es el primero del par en ser detectado. Entonces comienza una cuenta atrás de 20 ns en los que se observa si en el polarímetro del otro lado se mide un fotón (que al restar errores accidentales se supone que es el otro fotón de la pareja). Si dentro de este intervalo de tiempo el otro fotón que llega a su correspondiente cubo polarizador (el cual está formando un ángulo  $b$ ) es por ejemplo reflejado (es decir, se representará con un

“ - ”) y es detectado por su correspondiente fotomultiplicador, se sumará una medida al valor experimental  $R_{+-}(a, b)$ .

Ahora que se tienen medidas sobre las correlaciones entre las polarizaciones de los fotones, se busca una expresión para la correlación. La fórmula (40) requiere conocer la probabilidad de obtener cada una de las combinaciones posibles de las polarizaciones de los fotones para determinados ángulos  $a$  y  $b$  de los polarímetros. Esta probabilidad se obtiene experimentalmente realizando un conteo del número de veces que se produce un proceso y dividiendo entre el número de intentos. Estos conteos son los que se obtienen con el montaje experimental explicado, de forma que la expresión (40) toma la forma:

$$E(a, b) = \frac{R_{++}(a, b) + R_{--}(a, b) - R_{+-}(a, b) - R_{-+}(a, b)}{R_{++}(a, b) + R_{--}(a, b) + R_{+-}(a, b) + R_{-+}(a, b)} \quad (73)$$

Obviamente cuantos más intentos se realicen, más exacto será el sustituir la probabilidad por el resultado de dividir el número de conteos entre el número de intentos y mejor será la sustitución de (40) por (73). Finalmente con estos valores de las correlaciones para diferentes montajes se busca calcular el valor  $S$  máximo dado por:

$$S = |E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| \quad (74)$$

Este será el valor experimental  $S$  que usaremos en la desigualdad CHSH.

Volviendo al experimento, Aspect, Grangier y Roger consiguieron realizar medidas simultáneas y directas de los valores  $R_{\pm\pm}(a, b)$  en medidas de 100 s de duración para configuraciones de los polarímetros con diferentes ángulos relativos. Los valores de correlación  $E(a, b)$  obtenidos a partir de estas medidas están representados en figura 7.

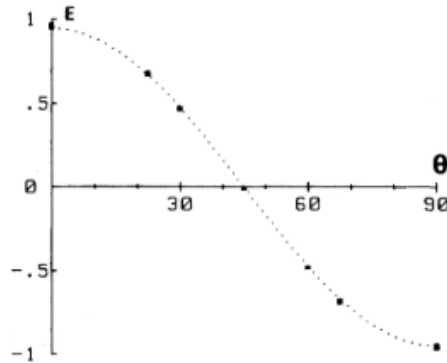


Figura 7: Valores de  $E(a, b)$  en función del ángulo relativo  $(b - a)$ . La línea de puntos finos son los valores predichos por la Mecánica Cuántica y los puntos gruesos, los valores experimentales.

Midiendo para los ángulos en los que se espera la mayor violación de la desigualdad (39), que son:  $(a, b) = (b, a') = (a', b') = 22,5^\circ$  y  $(a, b') = (a', b) = 67,5^\circ$ , obtuvieron el siguiente valor:

$$S_{exp} = 2,697 \pm 0,015 \quad (75)$$

Además, si se tienen en cuenta las imperfecciones de los aparatos utilizados se obtiene que para este experimento, el valor de  $S$  predicho por la Mecánica Cuántica es:

$$S_{MC} = 2,70 \pm 0,05 \quad (76)$$

Por tanto los resultados experimentales no solo violan claramente los límites impuestos por las teorías de variables ocultas, sino que están en perfecto acuerdo con los resultados predichos por la Mecánica Cuántica (las diferencias entre estos resultados experimentales y las predicciones de la Mecánica Cuántica son del orden de un 1%).

## 5.2. H. S. Poh, S. K. Joshi, A. Cerè, A. Cabello, C. Kurtsiefer (2015)

Aunque los resultados obtenidos en el experimento anterior son muy satisfactorios a la hora de descartar teorías de variables ocultas y elegir la Mecánica Cuántica, se han seguido realizando experimentos para intentar acercarse lo máximo posible al límite dado por (43). Uno de los más recientes<sup>10</sup> ha sido realizado el 30 de Octubre de 2015 por las personas que dan nombre a este subapartado.

El resultado experimental que se busca es el mismo que en el experimento anterior, pero el montaje es algo más complejo. El experimento tiene como fin realizar conteos de medidas de coincidencia de las polarizaciones de un par de fotones entrelazados de la misma forma que en el experimento anterior, y está representado en la figura 8.

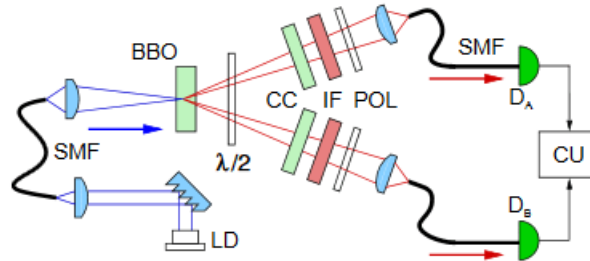


Figura 8: Esquema del montaje experimental.

Se emplea un haz láser de longitud de onda 405 nm y de 80  $\mu\text{m}$  de diámetro que incide contra un cristal de borato de bario beta (BBO) de 2 mm de espesor. En el cristal se produce una conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC) de tipo II, proceso por el cual a partir de un fotón se obtienen dos, uno con la polarización del fotón inicial (fotón ordinario) y otro con polarización perpendicular (fotón extraordinario), de forma que el haz inicial se divide en dos haces cónicos que salen del cristal con diferentes ángulos de forma que se puede hacer que los conos se intersequen en dos direcciones<sup>11</sup> como se puede ver en la figura 9.

En dichas direcciones la luz puede describirse mediante el siguiente estado entrelazado:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_1, V_2\rangle + e^{i\alpha}|V_1, H_2\rangle) \quad (77)$$

Donde  $H$  y  $V$  representan fotones horizontal y verticalmente polarizados respectivamente. La fase relativa  $\alpha$  surge de la birrefringencia del cristal ya que la luz de diferentes polarizaciones debe recorrer caminos diferentes. Se busca conseguir el caso en el que  $\alpha = \pi$  y para ello hay que tener en cuenta todos los procesos de desfase. El desfase producido longitudinalmente se

<sup>10</sup>H. S. Poh, S. K. Joshi, A. Cerè, A. Cabello, C. Kurtsiefer. «Approaching Tsirelson's Bound in a Photon Pair Experiment» Phys. Rev., 115, Iss. 18 (2015)

<sup>11</sup>Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. «New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs» Phys. Rev., 75, nº24 (1995)



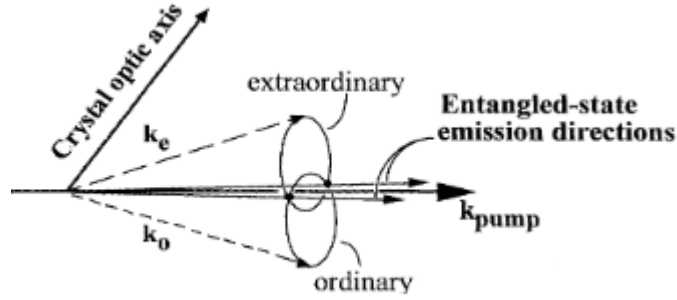


Figura 9: Proceso de conversión paramétrica descendente espontánea de tipo II.

desprecia ya que se considera que los fotones se producen coherentemente a lo largo de todo el cristal. También se produce un desfase transversal debido a las diferentes velocidades que tienen debido a la birrefringencia. Este desfase será máximo para pares creados a la entrada del cristal (un desfase de  $\varphi$ ), y nulo en los pares creados a la salida. Finalmente, se produce un desfase espacial a la salida del cristal, debido también a la birrefringencia.

Para conseguir el estado que se busca, situaron una lámina  $\lambda/2$  a la salida del cristal, con lo cual cambian la polarización de los fotones de horizontal a vertical y viceversa y situaron un cristal de compensación (CC) en cada dirección, idéntico al cristal de BBO ya utilizado, pero con la mitad de espesor. De esta forma, los pares creados en la mitad del primer BBO ven su desfase transversal totalmente corregido; los pares creados a la entrada del BBO ven su desfase transversal corregido en  $\frac{\varphi}{2}$ ; y los pares creados a la salida se desfazan en  $\frac{\varphi}{2}$ . Con este mismo montaje también se corrige parcialmente el desfase espacial producido en el primer BBO. Por tanto se obtiene una distribución de valores del desfase  $\alpha$  centrado en un valor que se puede escoger para ser  $\pi$ .

A continuación se coloca un analizador en cada camino, lo que permite elegir la polarización. Finalmente se sitúan fibras ópticas que dirigen la luz hacia los detectores (fotodiodos de avalancha). De forma similar al experimento de Grangier, Aspect y Roger, si cada detector registra una cuenta en un intervalo de 1,2 ns, se considera una coincidencia. A diferencia del experimento anterior en el que se podía medir  $R_{++}(a, b)$ ,  $R_{+-}(a, b)$ ,  $R_{-+}(a, b)$  o  $R_{--}(a, b)$  a la vez, con este montaje sólo se puede medir uno de estos valores por cada configuración del montaje. Aún así, los resultados son muy buenos ya que la fuente de fotones es muy estable y produce un número constante de fotones entrelazados por segundo.

Con este montaje experimental se realizaron medidas, pero no para los ángulos teóricos de mayor violación de la desigualdad CHSH, si no que se llevó a cabo un proceso de optimización para reducir los efectos producidos por los defectos del montaje. El resultado de esta optimización fue:

$$a_0 = 1,9^\circ, \quad b_0 = 22,9^\circ, \quad a_1 = 46,8^\circ, \quad b_1 = 67,7^\circ \quad (78)$$

A continuación tomaron varias medidas para cada una de las 16 posibles combinaciones durante 1 minuto cada medida. Como resultado obtuvieron:

$$S = 2,82759 \pm 0,00051$$

Obviamente esta medida sobrepasa el límite dado por la desigualdad CHSH, y la diferencia con respecto al valor máximo predicho por la Mecánica Cuántica es:

$$2\sqrt{2} - S = 0,00084 \pm 0,00051$$

por lo que con este experimento se obtiene un valor más preciso y a la vez más cercano al límite dado por la Mecánica Cuántica que el dado por el experimento anterior.

## Apéndice: Demostración de la desigualdad CHSH

Como se ha explicado en la demostración del teorema de Bell, se tiene que:

$$E(a, b) = P(\text{si}, \text{si}|a, b) + P(\text{no}, \text{no}|a, b) - P(\text{si}, \text{no}|a, b) - P(\text{no}, \text{si}|a, b) \quad (79)$$

donde:

$$P(A, B|a, b) = \int f(\lambda)P(A, B|a, b, \lambda)d\lambda \quad (80)$$

fórmula para la cual A y B pueden ser “si” o “no”. También se tiene:

$$P(A, B|a, b, \lambda) = P_1(A|a, \lambda)P_2(B|b, \lambda) \quad (81)$$

por lo que los elementos de la parte de la derecha de (79) son:

$$\begin{aligned} P(\text{si}, \text{si}|a, b) &= \int f(\lambda)P_1(\text{si}|a, \lambda)P_2(\text{si}|b, \lambda)d\lambda \\ P(\text{no}, \text{no}|a, b) &= \int f(\lambda)P_1(\text{no}|a, \lambda)P_2(\text{no}|b, \lambda)d\lambda \\ P(\text{si}, \text{no}|a, b) &= \int f(\lambda)P_1(\text{si}|a, \lambda)P_2(\text{no}|b, \lambda)d\lambda \\ P(\text{no}, \text{si}|a, b) &= \int f(\lambda)P_1(\text{no}|a, \lambda)P_2(\text{si}|b, \lambda)d\lambda \end{aligned} \quad (82)$$

Sustituyendo en (79) se obtiene:

$$E(a, b) = \int d\lambda f(\lambda)\hat{A}(a, \lambda)\hat{B}(b, \lambda) \quad (83)$$

donde  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  vienen dados por:

$$\begin{aligned} \hat{A}(a, \lambda) &= P_1(\text{si}|a, \lambda) - P_1(\text{no}|a, \lambda) \\ \hat{B}(b, \lambda) &= P_2(\text{si}|b, \lambda) - P_2(\text{no}|b, \lambda) \end{aligned} \quad (84)$$

Como las funciones  $P_1$  y  $P_2$  son probabilidades, se tiene:

$$0 \leq P_1 \leq 1 \text{ y } 0 \leq P_2 \leq 1 \quad (85)$$

Por tanto:

$$|\hat{A}(a, \lambda)| \leq 1 \text{ y } |\hat{B}(b, \lambda)| \leq 1 \quad (86)$$

A partir de (83) se obtiene que:

$$E(a, b) \pm E(a, b') = \int d\lambda f(\lambda)\hat{A}(a, \lambda)(\hat{B}(b, \lambda) \pm \hat{B}(b', \lambda)) \quad (87)$$

Y teniendo en cuenta la acotación dada por (86) se tiene:

$$|E(a, b) \pm E(a, b')| \leq \int d\lambda f(\lambda)|\hat{B}(b, \lambda) \pm \hat{B}(b', \lambda)| \quad (88)$$

Y de forma similar:

$$|E(a', b) \mp E(a', b')| \leq \int d\lambda f(\lambda)|\hat{B}(b, \lambda) \mp \hat{B}(b', \lambda)| \quad (89)$$

Sumando estas dos ecuaciones se obtiene:

$$|E(a, b) \pm E(a, b')| + |E(a', b) \mp E(a', b')| \leq \int d\lambda f(\lambda) (|\hat{B}(b, \lambda) \pm \hat{B}(b', \lambda)| + |\hat{B}(b, \lambda) \mp \hat{B}(b', \lambda)|) \quad (90)$$

Usando otra vez (86) se tiene que:

$$|\hat{B}(b, \lambda) \pm \hat{B}(b', \lambda)| + |\hat{B}(b, \lambda) \mp \hat{B}(b', \lambda)| \leq 2 \quad (91)$$

Y como la función de distribución de probabilidad  $f(\lambda)$  está normalizada, es decir:

$$\int d\lambda f(\lambda) = 1 \quad (92)$$

se obtiene:

$$|E(a, b) \pm E(a, b')| + |E(a', b) \mp E(a', b')| \leq 2 \quad (93)$$

A partir de esta desigualdad y teniendo en cuenta las propiedades del valor absoluto se obtiene la desigualdad CHSH:

$$|E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| \leq 2 \quad (94)$$

## 6. Bibliografía

- Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Lalœ. «Quantum Mechanics».
- Moses Fayngold, Vadim Fayngold. «Quantum Mechanics and Quantum Information».
- J. S. Bell. «Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics».
- Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N. (1935). «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?». *Physical Review* 47: 777–780.
- J. S. Bell. «On the Einstein Podolsky Rosen Paradox», *Physics*, 1 (1964), pp. 195-200.
- J. S. Bell. «Bertlmann's socks and the nature of reality» *Colloque C2*, Tome 42 (1981).
- J.F. Clauser, R.A. Holt, M.A. Horne y A. Shimony, *Phys. Rev. Letters* 23 (1969) 880.
- Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gerard Roger. «Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities» *Phys. Rev.*, 49, n<sup>o</sup>2 (1982).
- H. S. Poh, S. K. Joshi, A. Cerè, A. Cabello, C. Kurtsiefer. «Approaching Tsirelson's Bound in a Photon Pair Experiment» *Phys. Rev.*, 115, Iss. 18 (2015).
- Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. «New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs» *Phys. Rev.*, 75, n<sup>o</sup>24 (1995).