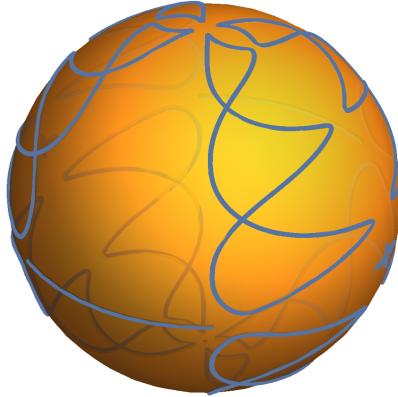


SISTEMAS SUPERINTEGRABLES EN MECÁNICA
CLÁSICA Y EN MECÁNICA CUÁNTICA
GENERALIZACIÓN EN LA ESFERA S^2 Y FORMULACIÓN GEOMÉTRICA DE LA
MECÁNICA.

Trabajo Fin de Grado



Por

ÁLVARO ROMANIEGA SANCHO

DIRIGIDO POR: MARIANO A. DEL OLMO MARTÍNEZ

14 de julio de 2016



Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Índice general

Agradecimientos.	I
Resumen.	III
Introducción.	V
1. Formulación geométrica de la mecánica.	1
1.1. Introducción.	1
1.2. Formulación lagrangiana.	1
1.2.1. El espacio de configuración, \mathbb{Q} .	1
1.2.2. El fibrado tangente $T\mathbb{Q}$.	3
1.2.3. Ecuaciones EL desde la formulación intrínseca.	9
1.3. Formulación hamiltoniana.	10
1.3.1. Formas simpléticas y canónicas.	11
1.3.2. Campos hamiltonianos.	13
1.3.3. Corchetes de Poisson, definición simplética.	13
1.4. Conexión entre ambas formulaciones. Teorema de Noether.	15
1.4.1. Derivada de fibras y campos lagrangianos.	15
1.4.2. Teorema de Noether.	18
1.5. Mecánica en variedades de Riemann.	18
1.5.1. Hamiltoniano y lagrangiano en variedades.	18
1.5.2. Ecuaciones del movimiento. Geodésicas.	20
2. Sistemas superintegrables.	23
2.1. Introducción.	23
2.2. Integrabilidad.	24
2.2.1. Integrabilidad en mecánica clásica.	24
2.2.2. Integrabilidad en mecánica cuántica.	25
2.3. Superintegrabilidad (polinomial).	27
2.3.1. Superintegrabilidad clásica.	28
2.3.2. Extensión a sistemas cuánticos.	29
2.4. Ejemplos importantes.	29
2.4.1. El problema de Kepler clásico.	30
2.4.2. Análogo de Kepler en la 2-esfera.	34
2.4.3. Contracción al espacio euclídeo \mathbb{E}^2 .	35
2.4.4. El problema cuántico de Coulomb-Kepler en \mathbb{E}^3 .	37

2.4.5.	El problema cuántico de Coulomb-Kepler en S^2 .	38
3.	Superintegrabilidad $U(3)$ generalizado: introducción.	43
3.1.	Introducción.	43
3.2.	Aplicación del método de separación de variables.	43
3.3.	Operadores <i>ladder</i> , <i>shift</i> y factorización.	45
3.3.1.	Operadores escalera y desplazamiento.	46
3.3.2.	Condición para las simetrías.	46
3.3.3.	Introducción teórica a la factorización.	49
4.	Análisis cuántico $U(3)$ generalizado.	53
4.1.	Operador escalera Ξ^\pm	53
4.2.	Factorización de H_ϕ^M .	55
4.2.1.	Un procedimiento sistemático para obtener factorizaciones.	55
4.2.2.	Relaciones de entrelazado.	61
4.2.3.	Proposición generalizada.	63
4.2.4.	Análisis de las soluciones.	65
4.3.	Resultados de referencia [13].	67
4.4.	Método alternativo para encontrar los operadores.	69
4.4.1.	Resultado teórico generalizado.	69
4.4.2.	Aplicación a nuestro sistema.	71
5.	Análisis clásico $U(3)$ generalizado.	73
5.1.	Conceptos generales.	73
5.2.	Funciones escalera Ξ^\pm	74
5.3.	Funciones desplazamiento S^\pm	75
5.3.1.	Análisis general de corchete de Poisson $\{H, S\}$	76
5.3.2.	Simetrías clásicas.	77
5.4.	Trayectorias clásicas.	79
5.4.1.	Cálculo algebraico.	79
5.4.2.	Representaciones gráficas en S^2 .	81
A.	Introducción al cálculo de variaciones	83
A.0.1.	El concepto de derivada en espacios de Banach.	83
A.0.2.	Derivada funcional y el cálculo de variaciones.	84
A.0.3.	Aplicación a un espacio de funciones con el funcional usual.	84
	Conclusiones.	87

Agradecimientos.

En primer lugar, me gustaría agradecer el trabajo de mi tutor, Mariano del Olmo. Sus consejos al desarrollo del trabajo, sus apreciaciones, recomendaciones de lecturas, explicaciones y un largo etcétera, han sido el cauce por el cual mi esfuerzo intelectual e ideas han fluido hasta desembocar en este trabajo. Además, la colaboración este último año, ha permitido que me inicie en el mundo de la investigación en Física Teórica, motivo por el cual siempre le estaré muy agradecido.

También, cómo no, agradecer el apoyo a mis amigos y familia. En especial, agradecerse a mis hermanos y, en particular, a mis padres. Agradecer su ayuda, educación, consejos, ilusión... que han servido para formarme como persona. También, agradecer su duro trabajo para proporcionarme la formación y los recursos que he necesitado. Sin ellos, no habría podido completar el grado en Física, y por su puesto, haber realizado este trabajo.

Por otro lado, estos últimos cuatro años en la Universidad de Valladolid, han permitido que forjara grandes amistades con personas que me han acompañado en esta etapa especial. Agradecerles a ellos su amistad, su compañía ha permitido que este recorrido haya sido una bonita experiencia que siempre llevaré conmigo. También, agradecer la labor de todos los profesores que han contribuido en mi formación como físico, y todo lo que esto conlleva, un servicio de un valor inmenso y por el cual les estoy muy agradecido.

Por último, agradecer al Ministerio de Educación, Cultura y Deporte la concesión de la Beca de Colaboración. Esta ha sido una motivación adicional muy importante para realizar este trabajo.

Resumen.

En este trabajo se abordan los sistemas superintegrables tanto en mecánica clásica como cuántica. Primero, y con cierta generalidad, se estudia una formulación geométrica de la mecánica. Estudiamos esta formulación moderna de la mecánica con teoría de variedades y cálculo tensorial. Debido a la complejidad/abstracción matemática inicial, intentamos dar una visión heurística de los resultados más básicos o importantes. Después, se realiza una introducción teórica a la superintegrabilidad, seguida por ejemplos importantes (Kepler y Coulomb en \mathbb{E}^3 y S^2) estudiados haciendo uso de sus propiedades como sistemas superintegrables.

En la segunda parte del trabajo, realizamos un estudio de una nueva familia de hamiltonianos en S^2 . Desarrollamos tanto un análisis del caso clásico como del cuántico. Utilizamos el formalismo de factorizaciones, operadores escalera (*ladder*) y desplazamiento (*shift*). Este estudio, consta de dos partes. Por un lado, proponemos una serie de resultados nuevos (con su correspondiente demostración) lo más generales posibles para que sean aplicables a otros sistemas físicos. Por otro lado, aplicamos esos resultados a nuestro sistema particular (hamiltoniano $U(3)$ generalizado) siguiendo las ideas de los sistemas TTW y mostramos sus propiedades asociadas a la superintegrabilidad.

Introducción.

“I would rather have questions that can't be answered than answers that can't be questioned.”

– Richard Feynman

Los sistemas clásicos hamiltonianos superintegrables, i.e., aquellos que tienen más de n integrales de movimiento funcionalmente independientes, siendo n los grados de libertad, son de gran interés en Física. Paralelamente, la versión cuántica de los sistemas hamiltonianos superintegrables exige la existencia de más de n operadores de simetría que conmuten con el hamiltoniano y que sean operadores algebraicamente independientes.

Así, por ejemplo, el problema de Kepler, el oscilador armónico son (maximalmente) superintegrables, tienen $2n-1$ integrales de movimiento (con el hamiltoniano). Estos sistemas físicos gozan de ciertas propiedades tales como que las trayectorias clásicas finitas son cerradas (periódicas) y que para los correspondientes sistemas cuánticos sus niveles de energía son degenerados, teniendo dicha degeneración una explicación grupo-teórica: su origen es la existencia de una simetría descrita por un grupo. En realidad, los sistemas superintegrables exhiben la máxima simetría posible. El descubrimiento de la serie de Balmer del átomo de hidrógeno mucho antes de la aparición de la Mecánica Cuántica fue debido a la superintegrabilidad del problema de Coulomb cuántico o átomo de hidrógeno. La superintegrabilidad tiene interés más allá del punto de vista teórico así, por ejemplo, la transferencia (de Hohmann) entre órbitas que permite la navegación en el espacio y el posicionamiento de naves y satélites en las órbitas adecuadas está ligada a la superintegrabilidad del sistema de Kepler.

Los sistemas superintegrables han sido desde hace muchos años un tema recurrente de investigación en Física Teórica. En estos últimos años ha habido un renacer del estudio de estos sistemas superintegrables, en particular de sistemas en espacios (de configuración) de curvatura constante. Así, por ejemplo, se ha estudiado familias de sistemas integrales en espacios de tipo $SO(p,q)$ tanto desde el punto de vista clásico como cuántico ([11],[12],[13],[14]). Entre los sistemas que aparecen en esta familia encontramos versiones del potencial Moser y del Pöschl-Teller tan importantes en Física. Para un revisión actualizada del tema consultar [4]. Más recientemente, en 2009, apareció una nueva familia (dependiente de un parámetro k) de sistemas integrales, el sistema de Tremblay-Turbiner-Winternitz (TTW), que ha incrementado el interés por tal tipo de sistemas entre la comunidad científica. Entre los principales motivos de este renovado interés cabe destacar el

escaso número de sistemas superintegrables conocidos, y el que esta nueva familia de TTW-Hamiltonianos contuviera como casos particulares otros sistemas bien conocidos.

En este trabajo pretendemos revisar estos tipos de sistemas superintegrables y posteriormente comprobar si existen generalizaciones de los sistemas superintegrables de ese tipo. Este trabajo se divide en cinco capítulos. En el primer capítulo presentamos una versión moderna de la mecánica clásica, es una introducción a esta desde el formalismo de teoría de variedades y cálculo tensorial. Ahí fundamentaremos las bases para el siguiente capítulo, donde haremos una introducción teórica a los sistemas superintegrables, además de presentar ejemplos para exhibir las propiedades especiales de este tipo de sistemas.

Después de estos capítulos introductorios, pasaremos al estudio de una familia de hamiltonianos, que contiene a un caso conocido, para determinar si tiene propiedades superintegrables. Por otro lado, también nos centramos en aspectos teóricos, utilizaremos este sistema para mostrar y probar resultados que nos permitirían el estudio de otros sistemas o familias de hamiltonianos. En el capítulo 3 introducimos la familia y sentamos la base teórica para el posterior estudio. En el capítulo 4 analizamos el caso cuántico, buscamos operadores escalera y de desplazamiento que nos permitan encontrar las simetrías que buscamos. Procedemos de varias maneras. En el capítulo 5 hacemos el análisis clásico del sistema: adaptamos los resultados cuánticos al caso clásico, haciendo las modificaciones oportunas, desarrollamos los conceptos teóricos necesarios y finalmente hacemos representaciones gráficas de las trayectorias en la esfera S^2 .

Capítulo 1

Formulación geométrica de la mecánica.

1.1. Introducción.

Antes de comenzar con el estudio de los sistemas superintegrables, vamos a hacer un pequeña incursión en el estudio de la mecánica clásica. Esto nos será útil, ya que parte del estudio que vamos a realizar va a ser sobre sistemas superintegrables clásicos. Este capítulo no es solo una base para el resto del trabajo, sino que aquí exploramos la mecánica desde un enfoque geométrico y con cierta generalidad, vamos a presentar la mecánica utilizando geometría diferencial. La utilidad de esta formulación es que es independiente de las coordenadas, el marco teórico es mucho menos “rígido” y el formalismo es el adecuado para deducir resultados teóricos más avanzados. La principal desventaja es que al inicio es más abstracto y las matemáticas no son sencillas.

El trabajo está pensado (obviamente, una lectura completa continua también es posible) para realizarse en dos lecturas (las marcas rojas, ********, determinan cuando empieza la segunda lectura y las verdes, *******, cuando reanudar la primera lectura). Esta lectura evita estos conceptos matemáticos y se centra en la parte heurística e interpretación de los resultados, y no tanto en la deducción formal. Por motivos de espacio, es imposible desarrollar aquí teoría de variedades y espacios de Banach, que es lo que usaremos para la formulación geométrica de la mecánica, por tanto, recomendamos al lector que no esté familiarizado que consulte la bibliografía para los resultados que desconozca cuando realice la segunda lectura, en concreto, puede consultarse [1]. A pesar de esto, sí que definiremos o comentaremos ciertos resultados que sean especialmente relevantes. Vamos a empezar por la parte más intuitiva, la formulación lagrangiana.

1.2. Formulación lagrangiana.

1.2.1. El espacio de configuración, \mathbb{Q} .

Una de las principales ventajas de la formulación lagrangiana es su tratamiento de las ligaduras dentro del modelo, a saber, las ligaduras se incluyen con el uso

de coordenadas generalizadas y no se computan como fuerzas. Vamos a formalizar un poco la idea de coordenadas generalizadas utilizando el concepto de variedades. Dado que este concepto es esencial en esta formulación vamos a presentarlo aquí. Primero vamos a dar una versión heurística de la definición. El objetivo básico es generalizar el concepto de superficie a dimensiones mayores¹ y no necesariamente “sumergidas”² en un espacio de dimensión mayor, aunque esto sea posible.

La idea es la siguiente³, supongamos que queremos tener una información detallada de la superficie terrestre (nuestra variedad aquí, que es una superficie). Sería poco práctico obtener la información directamente de la tierra (de la variedad). Por ello, podríamos obtener la información a través de mapas (cartas) que nos llevan una zona de la tierra (U) hasta un mapa ($\varphi(U)$). ¿Qué utilidad nos proporciona esto? Podemos hacer mediciones de distancias, ángulos⁴... y trabajar con ellos de manera mucho más cómoda (en los espacios de Banach tenemos distancias, cálculo diferencial... desarrollado). Pero notemos que para cartografiar la superficie terrestre necesitamos varios planos (por ejemplo, para S^1 necesitamos al menos dos cartas), pero estos planos deben ser en cierto modo compatibles. Si tenemos un mapa de España que muestra las islas Baleares y otro de Italia que también las muestra, debe haber cierta coherencia en esa zona común a ambos mapas ($U_i \cap U_j$), de modo que pueda pasar de un punto de las Baleares del mapa de Italia a al mismo del mapa de España de manera biunívoca y “suave” (la aplicación entre espacios de Banach, φ_{ij} , restringida a la intersección debe ser un difeomorfismo, no solo biyectiva, sino diferenciable hasta cierto orden k . Esto correspondería a la “suavidad” de la aplicación de paso). El conjunto de todos esos mapas con los que describimos la superficie terrestre lo denominamos *atlas* (esto es lo que podemos ver en la Figura 1.1). Después lo que haríamos sería tomar un conjunto de mapas, lo que sería el atlas, que al unirlos con otros mapas forman otro atlas mayor. La variedad diferenciable sería el conjunto de la superficie más ese conjunto de atlas que nos informan de su estructura, que llamamos *atlas maximal*.

Definición 1.1 (Cartas y atlas). Sea S un conjunto. Una *carta* es una biyección φ desde $U \subset S$ a un abierto de un espacio de Banach, lo denotamos por (U, φ) . Un C^k *atlas* en S es una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in \mathcal{I}\}$ tal que

1. $S = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$
2. Todo par de cartas sean compatibles. Si tenemos $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces, $\varphi_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$ debe tener un dominio abierto y ser un C^k difeomorfismo.

¹Incluso infinitas, trabajamos con una definición basada en espacios de Banach y no la más restrictiva de conjuntos localmente homeomorfos a \mathbb{R}^n con $n \in \mathbb{N}$. Pero si se quiere, puede sustituirse Banach por \mathbb{R}^n ya que trabajaremos en dimensión finita.

²Lo que en inglés se llama *embedding*.

³Presentamos el concepto usando un símil, en paréntesis señalo los elementos análogos del símil correspondientes a la variedad diferenciable.

⁴Un espacio de Banach no necesariamente tiene definidos los conceptos de ortogonalidad, i.e., ángulos. Para ello necesitaríamos un producto interno, para poder definir $\cos \theta$. Esto sí es inherente a un espacio de Hilbert.

Utilizando esto podemos definir el concepto de variedades diferenciables como sigue:

Definición 1.2 (Relación de equivalencia de atlas.). Dos C^k atlas, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ diremos que son equivalentes, $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$, si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es un C^k atlas. Es fácil ver que esto define una relación de equivalencia. Una *estructura diferenciable* \mathcal{D} es una clase de equivalencia de atlas de S . La unión de todos sus atlas, es un atlas, y lo llamamos *atlas maximal*.

Definición 1.3 (Variedad diferenciable). Llamaremos *variedad diferenciable* M a todo par del tipo (S, \mathcal{D}) . Llamaremos carta admisible a toda carta que pertenezca al *atlas maximal*. Con este concepto podemos definir la topología de la variedad.

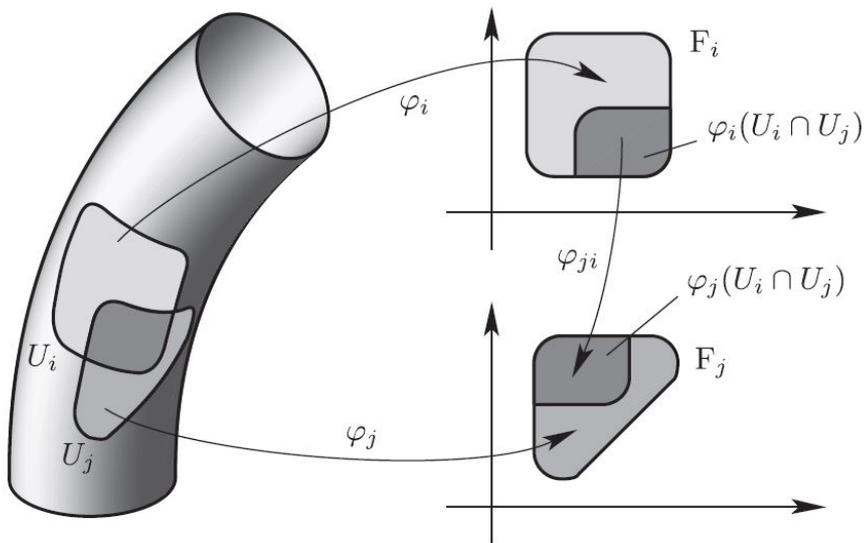


Figura 1.1: Cartas de una variedad.

Vayamos ahora al concepto de espacio de configuración. Supongamos que tenemos un sistema cuyo movimiento está restringido a una variedad, \mathbb{Q} , esa variedad será nuestro *espacio de configuración*. Por ejemplo, supongamos que tenemos una partícula moviéndose en una circunferencia de radio unidad, entonces⁵, $\mathbb{Q} = S^1$. Las *coordenadas generalizadas* serían las coordenadas asociadas a esas cartas incluidas en el atlas de esa variedad diferenciable.

1.2.2. El fibrado tangente $T\mathbb{Q}$.

Sabemos que los lagrangianos son funciones del tipo (ver Nota 1, más adelante, para la notación que usamos),

$$L(q, \dot{q}, t)$$

⁵Recordemos que S^1 es la circunferencia unidad, i.e., $S^1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / \|\vec{x}\| = 1\}$

Es decir, depende de las “velocidades”. Pero, ¿dónde están estas velocidades? Si pensamos en el caso de una partícula moviéndose en un espacio tridimensional (es decir, $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$) la respuesta es sencilla: en el mismo espacio $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$. Es decir, $(q, \dot{q}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Pero este no es el resultado general⁶. Pensemos en el ejemplo del apartado anterior, una partícula restringida a S^1 , en este caso, tenemos que las velocidades no están en $\mathbb{Q} = S^1$ (de hecho ahora S^1 no es un subespacio vectorial, p.e., el elemento neutro no está contenido). Ahora las posibles velocidades en un punto P de la circunferencia van a estar en la recta tangente a S^1 que pasa por el punto P (ya que el la partícula debe mantenerse en la circunferencia). En general, las posibles velocidades van a estar en el espacio tangente en ese punto. En el caso de la circunferencia a ese espacio lo denotaremos por $T_P S^1$ (el subíndice hace referencia al punto de la variedad y T a que es el espacio tangente), véase la Figura 1.2a, y de manera general, $T_q \mathbb{Q}$ será el espacio tangente a ese punto q de la variedad y $\dot{q} \in T_q \mathbb{Q}$. “Juntando” todos estos espacios tangentes, tendríamos el fibrado⁷ vectorial $T\mathbb{Q}$, al que llamaremos *fibrado tangente*. En el caso comentado, este fibrado sería la unión de la circunferencia con las rectas tangentes en cada punto.

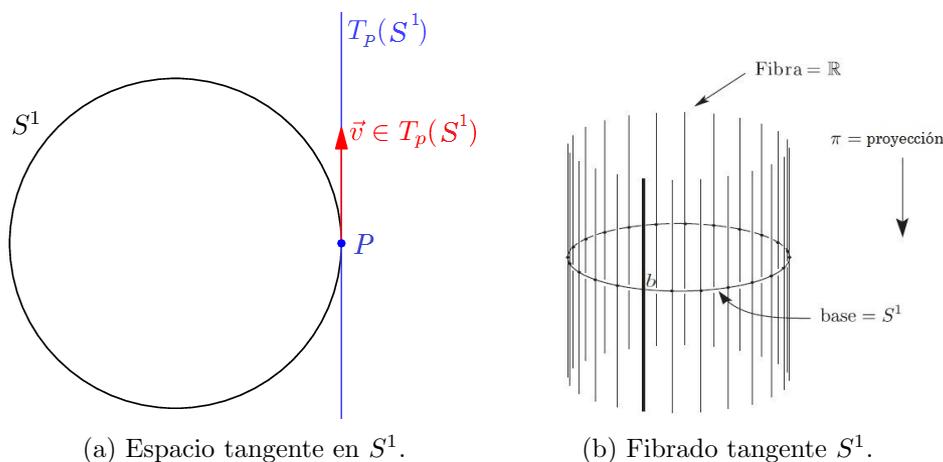


Figura 1.2: Fibrado vectorial de S^1 .

Hay distintas formas de introducir el fibrado tangente. Aquí, por similitud con el sistema físico que pretendemos modelizar, seguiremos el concepto de curva y su vector tangente.

Definición 1.4 (Curvas tangentes.). Sea M una variedad. Una *curva* en $m \in M$ es una aplicación C^1 ,

$$c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

⁶Se puede probar que el espacio tangente de un punto del espacio vectorial es isomorfo a ese espacio vectorial.

⁷El nombre viene de que a cada punto le asociamos un espacio vectorial, que es una “fibra”. Esto puede verse claro en S^1 . A cada punto le asociamos una recta (espacio vectorial de dimensión 1). Si “ponemos” esas fibras verticales, véase la Figura 1.2b, tal que formen un cilindro, tendremos una base, la circunferencia, y de cada punto de esta base salen unas “fibras”, las rectas asociadas a $T_P S^1$. Para una definición y estudio de estos objetos puede verse [1], capítulo 3 y 4.

con $c(0) = m$. Dos curvas, c_1, c_2 en m , serán *tangentes ssi*⁸ en una carta admisible (U, φ) , $m \in U$ $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$

En el caso de que nuestra variedad sea un espacio de Banach (p.e., sea \mathbb{R}^n) se reduce al caso conocido, la carta es la identidad y forma un atlas. Necesitamos los atlas para pasar al representante local y, por tanto, tener el concepto de diferenciabilidad bien definido.

Se puede probar que como las cartas son compatibles, la tangencia no depende de la carta escogida (luego está bien definido). Por otro lado, nos permite definir una *relación de equivalencia* (dos curvas son equivalente en un punto m de la variedad ssi son tangentes en ese punto) y, por tanto, clases de equivalencia que denotaremos por $[c]_m$.

Definición 1.5 (Fibrado tangente). Sea M una variedad y $m \in M$, el *espacio tangente* es:

$$T_m M := \{[c]_m | c(t) \text{ una curva en } m\}$$

Esto tiene estructura de espacio vectorial⁹. Llamaremos *fibrado tangente*, TM , a la unión disjunta

$$TM := \bigcup_{m \in M} T_m M$$

Se puede probar que este variedad en un fibrado vectorial, siendo la base la variedad inicial, M , y las fibras los espacios tangentes.

Si tenemos un aplicación $f : M \rightarrow N$ (siendo M, N dos variedades), que es C^1 , definimos la *tangente de f* , $Tf : TM \rightarrow TN$ como:

$$Tf([c]_m) := [f \circ c]_{f(m)}$$

Puede probarse que la aplicación está bien definida, i.e., que existe una única imagen por cada argumento.

Como ya comentamos, nuestro lagrangiano será una función del tipo, $L(q, \dot{q}, t)$. En vista a lo anterior, podemos entenderlo de mejor manera si lo expresamos como:

$$L : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

La parte \mathbb{R} del dominio hace referencia a la dependencia temporal del lagrangiano. Por ejemplo, continuando con nuestro ejemplo de S^1 , nuestra coordenada generalizada sería¹⁰ θ (es decir, la que nos indica en qué punto de la circunferencia estaría la partícula) y nuestra velocidad $\dot{\theta}$ (que nos indicaría con qué velocidad se movería la partícula, i.e., cuál es la velocidad dentro de la recta tangente a ese punto. Nos

⁸Utilizamos, “ssi” como abreviatura de “si y solo si”. En inglés es usual usar el “iff”.

⁹En el caso de ser M un espacio de Banach es evidente y lo relacionamos con la derivada (se probaría que existe una única curva lineal y ese término lineal está relacionado con la derivada.)

¹⁰Necesitaríamos al menos dos cartas para S^1 . No necesariamente tienen que ser proyecciones estereográficas o de coordenadas, podemos formar el atlas con dos cartas usando ángulos, aunque tendríamos que irnos a dominios del tipo $(-\epsilon, 2\pi + \epsilon)$

da la coordenada del vector velocidad y solo necesitamos una coordenada porque sabemos que la velocidad va a estar en la fibra, que aquí será de dimensión uno, una recta). En ese caso tendríamos, $L(\theta, \dot{\theta})$ (no hay dependencia explícita del tiempo).

Ahora nos enfrentaremos al problema de la dinámica, esto es, debemos responder a las preguntas, ¿cuáles son las trayectorias de las partículas? Hay distintas formas de resolver este problema. Las ecuaciones pueden deducirse a partir de las ecuaciones de Newton¹¹, pero aquí utilizaremos un método más genérico¹² que son los principios variacionales. La idea es relativamente sencilla, si fijamos dos puntos del espacio (q_1, q_2) y buscamos la curva real, i.e., la que físicamente recorren las partículas, esta debe cumplir algunas condiciones para que la podamos obtener. Postulamos que esta trayectoria cumple que es la de mínima acción¹³, i.e., si $q(t)$ es la curva, esta será la que cumpla que minimice la acción S ,

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

con $q(t_1) = q_1$ y $q(t_2) = q_2$. Para resolver este problema de extremos, dado que trabajamos con espacios de dimensión infinita (espacios de funciones) debemos usar las herramientas del cálculo diferencial en espacios de Banach. No lo describiremos en este capítulo, pero debido a su importancia dentro de la Física (en cualquier modelo de partículas o campos que se formule en términos lagrangianos), pueden verse ciertos resultados en el Anexo A. Aquí simplemente mostraremos ciertas proposiciones y definiciones importantes para nuestro propósito.

Vamos a formalizar un poco esta idea siguiendo los desarrollos de los párrafos anteriores. Empezaremos con el concepto de espacio de trayectorias o de caminos (emplearemos aquí c para referirnos a las distintas curvas).

Definición 1.6 (Espacio de trayectorias). Sea \mathbb{Q} una variedad y sea $L : T\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano regular. Dados dos puntos q_1 y q_2 y un intervalo de la recta real $[a, b]$ definimos *el espacio de trayectorias de q_1 a q_2* como,

$$\Omega(q_1, q_2, [a, b]) := \{c : [a, b] \rightarrow \mathbb{Q}/c \text{ es una curva: } C^2, c(a) = q_1, c(b) = q_2\}$$

También definimos la siguiente aplicación (concretamente, es un funcional) que llamaremos *acción*,

$$S[c] = \int_a^b L(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

siendo $\dot{c}(t)$ el vector tangente asociado a una de las clases de la Definición 1.5.

Veamos ahora un resultado interesante para lo que sigue sobre el espacio tangente de Ω .

¹¹Véase el capítulo 2 de [2] y ver el capítulo 3 de la misma referencia para su análisis.

¹²Es el modelo que se usa en otras partes de la física, como en teorías de campos, en las que no conocemos “las fuerzas”, pero sí tenemos ciertas ideas de simetrías que presenta el sistema. De ahí, construimos el lagrangiano y usando el principio variacional (o lo que es equivalente, las ecuaciones de Euler-Lagrange) obtenemos las ecuaciones.

¹³En realidad solo impondremos que cumpla la condición necesaria de extremo relativo.

Proposición 1.1. *El espacio tangente a $\Omega(q_1, q_2, [a, b])$ en una curva c de ese espacio es,*

$$T_c\Omega(q_1, q_2, [a, b]) = \{v : [a, b] \rightarrow T\mathbb{Q}/v \text{ es } C^2, \tau_{\mathbb{Q}} \circ v = c \text{ y } v(a) = 0, v(b) = 0\}$$

siendo $\tau_{\mathbb{Q}}$ la proyección del fibrado.

La idea básica de por qué esto es así es la siguiente. Supongamos que tenemos una familia de curvas del tipo c_λ , i.e., $c_\lambda(t)$ siendo t es parámetro de evolución de la curva y λ el parámetro de la familia. Un vector tangente sería del tipo,

$$v = \left. \frac{dc_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}$$

Pero si ahora evaluamos en un punto asociado al parámetro t tendríamos y definiendo una nueva familia de curvas $c_\lambda(t) =: c_t(\lambda)$,

$$v(t) = \left. \frac{dc_t(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}$$

Por tanto, estaría en el espacio tangente de $c_t(\lambda = 0)$, a esa curva la llamaremos c . En los extremos es cero, ya que al derivar sobre el extremo, como es fijo (constante), sale nulo.

Veamos ahora el resultado importante, la deducción de las ecuaciones de Euler-Lagrange. La idea de la demostración puede verse en el Anexo A.

Teorema 1.2 (Principio Variacional de Hamilton). *Sea $L : T\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano regular. Una curva del espacio de trayectorias es un punto crítico de la acción (i.e., cumple la condición necesaria de extremo), si y solo sí, se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange, i.e.,*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$$

siendo q_i las coordenadas locales.

La condición necesaria de extremo es equivalente a $dS(c) = 0$ siendo d la derivada, ver el Anexo A. Esto es lo que usualmente se escribe como:

$$\delta \int_a^b L(c(t), \dot{c}(t)) dt = 0$$

Para ligarlo con lo que se ve en el Anexo A, tengamos en cuenta que si ponemos $v = \left. \frac{dc_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}$ (trabajando en representantes locales¹⁴), entonces, usando la regla de la cadena (en espacios de Banach),

$$dS(c) \cdot v = dS(c) \cdot \left. \frac{dc_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{dS(c_\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}$$

¹⁴Recordemos que en muchas ocasiones las definiciones necesitan cartas para poder llevarse a cabo y, por tanto, necesitamos trabajar en representantes locales. Esto quiere decir que tenemos que pasar de la variedad, a los espacios de Banach (donde la diferenciabilidad sí está desarrollada)

Hemos visto que las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL) son,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$$

O lo que es lo mismo,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \ddot{q}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$$

ya que $L = L(q, \dot{q}, t)$.

Nota 1 (Convenio de sumación). En lo que sigue, utilizaremos el convenio usual de sumación de Einstein en índices repetidos donde los extremos de sumación se deducirán del contexto, en caso contrario, se indicará. Emplearemos el convenio en índices griegos, en índices latinos minúscula la sumación, de haberla, se señalará de manera explícita. Siguiendo este convenio,

$$\sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \ddot{q}^\beta \rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \ddot{q}^\beta$$

También usaremos la siguiente notación,

$$L(q, \dot{q}, t) := L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \quad \diamond$$

Esto es un conjunto de n ecuaciones diferenciales de segundo orden en q (siendo n el número de grados de libertad). Es decir, si trabajamos en \mathbb{Q} , pero podemos transformarlas en un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden si trabajamos en $T\mathbb{Q}$. En efecto, podemos reescribir las ecuaciones como sigue:

$$\frac{dq^\alpha}{dt} = \dot{q}^\alpha \quad \frac{d\dot{q}^\alpha}{dt} = f^\alpha(q, \dot{q}, t) \quad (1.2)$$

siendo

$$f^\alpha(q, \dot{q}, t) = - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \right) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\alpha} \right)^{-1}$$

donde suponemos que el último factor no es nulo. Es decir, al pasar del espacio de configuración, \mathbb{Q} , al fibrado tangente, $T\mathbb{Q}$, conseguimos reducir el orden de las ecuaciones (aumentando el número de estas). Notemos que el primer conjunto de ecuaciones de (1.2) en el espacio $T\mathbb{Q}$ deben interpretarse de la siguiente manera.

y luego volver a la variedad imagen. La idea la podemos ver en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ U \subset \mathbf{E} & \xrightarrow{f_{loc}} & V \subset \mathbf{F} \end{array} \quad (1.1)$$

siendo \mathbf{E}, \mathbf{F} los espacios de Banach modelo y φ, φ' las cartas de las variedades M y N , respectivamente. Tendríamos que $f_{loc} = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$

Supongamos que tenemos una curva del espacio de trayectorias. Para tener la solución completa dentro de $T\mathbb{Q}$ necesitamos conocer también las coordenadas de los vectores de la fibra, ya que $T\mathbb{Q}$ no era solo \mathbb{Q} , sino que también añadíamos el espacio tangente en cada punto. Por tanto, la ecuación nos dice que los vectores en cada fibra deben ser iguales al vector tangente a la curva en ese punto. Por los teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales lineales y dadas unas condiciones iniciales de nuestras $2n$ variables, podríamos obtener una solución, al menos, localmente.¹⁵

1.2.3. Ecuaciones EL desde la formulación intrínseca.

Vamos ahora a dar un enfoque geométrico a la formulación de la mecánica desde el punto de vista lagrangiano. Aquí nos centraremos simplemente en las ecuaciones de Euler-Lagrange. Una vez hayamos introducido la formulación de Hamilton, veremos más resultados y una reinterpretación de estos, como, conservación de energía, el teorema de Noether... En el desarrollo utilizamos análisis tensorial, luego se recomienda al lector que consulte la bibliografía si tiene alguna duda.¹⁶

Ecuaciones de Euler-Lagrange.

La idea es presentar las ecuaciones utilizando la uno-forma de Lagrange. Para ello, vamos antes a definir el campo Δ .

Definición 1.7 (Campo vectorial Δ). Sea $T\mathbb{Q}$ un fibrado tangente y sean q^α, \dot{q}^α las coordenadas (locales) de esta variedad. Entonces, definimos el *campo vectorial* Δ como:

$$\Delta := \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \ddot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha}$$

Donde utilizamos las derivadas como base de los campos vectoriales (y los representaremos (si son C^∞) por $\mathfrak{X}(M)$ siendo M la base del fibrado) en la manera usual.

La utilidad de este campo es la siguiente, supongamos que tenemos una función del tipo $F : T\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ (el conjunto de estas funciones las representaremos por $\mathcal{F}(M)$, suponiendo que son suficientemente suaves). Supongamos ahora que calculamos la derivada de Lie de esta función con el campo Δ ,

$$\mathfrak{L}_\Delta F = \dot{q}^\alpha \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} + \ddot{q}^\alpha \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{dF}{dt}$$

i.e., la derivada temporal. Veamos ahora el concepto al que aludíamos al inicio de este epígrafe.

¹⁵Para un desarrollo de teoría de flujos y teoremas de existencia y unicidad de estos, dentro de espacios de Banach, puede verse el capítulo 4 de [1].

¹⁶Pueden verse los capítulos 6 y 7 de [1]. Además, si se tienen dudas de notación (no aclaradas en el texto), seguiremos la que ahí se presenta.

Definición 1.8 (Uno-forma de Lagrange). Sea $L \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$. La *uno-forma de Lagrange* en coordenadas locales y en dimensión finite se escribe como:

$$\theta_L := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} dq_\alpha$$

siendo d la derivada exterior aplicada a una función (cero-forma).

Sabiendo esto, ya podemos ver las ecuaciones de Euler-Lagrange independientes de las coordenadas¹⁷. Empecemos calculando la derivada de Lie de la uno-forma en coordenadas,

$$\mathfrak{L}_\Delta \theta_L = \left(\mathfrak{L}_\Delta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} d(\mathfrak{L}_\Delta q_\alpha)$$

donde hemos utilizado que \mathfrak{L} es una derivación (por definición) y que conmuta con la derivada exterior. Aplicando el comentario que hicimos después de la Definición 1.7, tendremos:

$$\mathfrak{L}_\Delta \theta_L = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} d\dot{q}^\alpha$$

Ahora bien, utilizando las ecuaciones de EL (los dos pares de ecuaciones) y la aplicación de la derivada exterior a $L \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$ tendremos la expresión buscada:

$$\mathfrak{L}_\Delta \theta_L = dL \tag{1.3}$$

Esta formulación nos sería útil si quisiéramos hacer ciertas demostraciones teóricas, ya que no depende de la carta y trabajamos de manera más abstracta, pero cuando tengamos un sistema particular, será más práctico usar las ecuaciones en coordenadas. Esto nos será útil en el Teorema de Noether que veremos posteriormente.

1.3. Formulación hamiltoniana.

Una de las ventajas de describir la mecánica usando el fibrado tangente, $T\mathbb{Q}$, y no solo el espacio de configuración, \mathbb{Q} , es que tenemos ecuaciones de primer orden, lo que implica que dado un punto de $T\mathbb{Q}$ existe (al menos localmente) una única solución. Pero podemos usar otros fibrados para tener ecuaciones diferenciales de primer orden. Buscamos unas ecuaciones del tipo de (1.2), i.e., que sean

$$\frac{d\xi^I}{dt} = f^I(\xi) \tag{1.4}$$

y eventualmente también podrían depender del tiempo ($f^I(\xi, t)$) donde $I \in \{1, \dots, 2n\}$ y, además, $\xi^I = q^I$ cuando $I \in \{1, \dots, n\}$. Sabemos que otra forma de obtener ecuaciones del tipo (1.4) es usar el formalismo hamiltoniano. En este marco, las ecuaciones del movimiento son¹⁸

$$\frac{\partial H}{\partial q^j} = -\dot{p}_j, \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \tag{1.5}$$

¹⁷Aunque la deducción se haga localmente, los objetos a los que llegamos al final se definen con independencia de las cartas.

¹⁸Para una deducción de estas puede verse [2], capítulos 5 y 6.

También tenemos que $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ y los momentos son $p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$. Busquemos ahora las f, ξ de la ecuación (1.4). Es claro que nuestras variables serán¹⁹

$$\xi^I = q^I \quad I \in \{1, \dots, n\} \quad \xi^I = p_I \quad I \in \{n+1, \dots, 2n\}$$

Veamos ahora como quedan las ecuaciones del movimiento (1.5). Por motivos de simplicidad utilizaremos el grupo simpléctico real²⁰. En estos términos, usaremos la matriz simpléctica que se define como:

$$\mathbb{J} := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

siendo n el número de coordenadas generalizadas. Es fácil comprobar que las ecuaciones en este caso quedarían como:

$$\frac{d\xi^I}{dt} = \mathbb{J}^{IJ} \frac{\partial H}{\partial \xi^J}$$

O lo que es lo mismo²¹

$$\dot{\xi} = \mathbb{J} \cdot \nabla H$$

Pasemos ahora a ver en qué espacio estamos trabajando. Sabemos que de la Definición 1.8, en coordenadas locales y dimensión finita,

$$\theta = p_\alpha dq^\alpha \tag{1.6}$$

Pero esto corresponde a las coordenadas de una uno-forma de \mathbb{Q} , lo que representaremos por $\Omega^1(\mathbb{Q})$. Por la definición de las n -formas, sabemos que $\Omega^1(\mathbb{Q}) = \mathfrak{X}^*(\mathbb{Q})$, siendo esto último los campos vectoriales de $T^*\mathbb{Q}$, el *espacio cotangente*, que es el fibrado que se definiría igual que en la Definición 1.5 pero las fibras serían $T_q^*\mathbb{Q} := (T_q\mathbb{Q})^*$, indicando el asterisco el espacio dual²². A este espacio lo llamaremos *espacio de fases*. Empecemos a trabajar en este espacio. Como siempre, lo primero son ciertas definiciones:

1.3.1. Formas simplécticas y canónicas.

Definición 1.9 (Forma simpléctica). Una *forma simpléctica* de una variedad P , modelada en un espacio de Banach \mathbf{E} , será una dos-forma (i.e., $\omega \in \Omega^2(P)$) que es : i) cerrada, $d\omega = 0$, ii) para cada $z \in P$ tenemos que $\omega_z : T_zP \times T_zP \rightarrow \mathbb{R}$ es débilmente no degenerada²³.

¹⁹Utilizaremos índices latinos en mayúscula cuando los índices vayan de 1 a $2n$ (porque aquí sí hay sumación).

²⁰Las isometrías de esta matriz (es decir, de la forma bilineal cuya matriz asociada en la base es esa) definirían el grupo simpléctico real, como veremos en adelante, tiene gran conexión con la formulación hamiltoniana de la mecánica.

²¹Aquí usaríamos la métrica euclídea para construir el gradiente. No necesariamente tiene por qué ser así.

²²Recordemos que el espacio tangente tiene estructura de espacio vectorial, luego su dual está bien definido.

²³En el Anexo A definimos este concepto.

Utilizando el teorema de Darboux y ciertos resultados de Álgebra Lineal, podemos probar el siguiente resultado²⁴

Proposición 1.3. *Sea P de dimensión finita y ω una forma simpléctica, entonces:*

i) $\dim P = 2n$,

ii) *localmente existen coordenadas $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$ tal que $\omega = dx^\mu \wedge dy^\mu$.*

Siendo \wedge el producto exterior. A estas coordenadas las llamaremos coordenadas canónicas.

Sigamos ahora con la idea que comentamos al inicio de la uno-forma de Lagrange (ver Definición 1.8). Vamos a generalizarlo (puede ser un poco abstracta la definición, puede verse directamente la expresión en coordenadas si se quiere) y a tratarlo dentro de $T^*\mathbb{Q}$.

Definición 1.10 (Formas canónicas). Sea \mathbb{Q} una variedad modelada en un espacio de Banach \mathbf{E} . Sea $T^*\mathbb{Q}$ el fibrado cotangente y π su proyector. La *uno-forma canónica* de $T^*\mathbb{Q}$ será:

$$\theta(\alpha_q)w_{\alpha_q} := \alpha_q \cdot T\pi(w_{\alpha_q})$$

con $\alpha_q \in T_q^*\mathbb{Q}$, $w \in T_{\alpha_q}(T^*\mathbb{Q})$. La *dos-forma canónica* será $\omega := -\mathbf{d}\theta$.

Localmente, esto tendrá la forma de:

$$\theta(x, \alpha) \cdot (e, \beta) = \alpha(e)$$

siendo $\varphi(q) = x \in U \subset \mathbf{E}$, $T_q^*\varphi(\alpha_q) = \alpha \in \mathbf{E}^*$, $T_{\alpha_q}T^*\varphi(w_{\alpha_q}) = (e, \beta) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E}^*$ las coordenadas siendo (U, φ) la carta. En el caso de dimensión finita, se reduce a la expresión (1.6) donde q serían las coordenadas de x y p serían las de α . En el caso de ω tendremos que:

$$\omega(x, \alpha)((e_1, \beta_1), (e_2, \beta_2)) = \beta_2(e_1) - \beta_1(e_2)$$

Pero en el caso finito podemos ver que tendremos la típica estructura de forma simpléctica. En efecto, usando que \mathbf{d} es una antiderivación y que p_μ es una cero-forma,

$$\mathbf{d}\theta = \mathbf{d}(p_\mu dq^\mu) = dp_\mu \wedge dq^\mu + p_\mu \wedge \mathbf{d}dq^\mu \longrightarrow \omega = -\mathbf{d}\theta = dq^\mu \wedge dp_\mu$$

ya que $\mathbf{d}^2 = 0$ y el producto exterior es antisimétrico. También por $\mathbf{d}^2 = 0$ vemos que la dos-forma es cerrada.

Sabido esto, vayamos ahora al estudio de las ecuaciones de Hamilton en este formalismo.

²⁴Las demostraciones de esta sección pueden verse en [3], capítulo 3. No entraremos aquí en ellas por falta de espacio.

1.3.2. Campos hamiltonianos.

Definición 1.11 (Campos hamiltonianos). Sea (P, ω) una variedad simpléctica, i.e., una variedad con una forma simpléctica asociada. Un campo vectorial $X : P \rightarrow TP$ se dirá *hamiltoniano* si \exists una función C^1 que es $H : P \rightarrow \mathbb{R}$, que llamaremos *hamiltoniano*, tal que:

$$\mathbf{i}_X \omega = \mathbf{d}H$$

siendo \mathbf{i} el producto interior.

Veamos ahora cómo deducimos de aquí las ecuaciones de Hamilton. Esto lo hacemos en la siguiente proposición. Denotaremos por X_H a los campos asociados a un determinado hamiltoniano, que es lo que solemos conocer. En nuestro caso tendremos que $P = T\mathbb{Q}$

Proposición 1.4 (Ecuaciones de Hamilton). *Sea ω en coordenadas canónicas, i.e., $\omega = dq^\mu \wedge dp_\mu$. En estas coordenadas,*

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q^j} \right) = \mathbb{J} \mathbf{d}H$$

La última igualdad se debe a la definición de \mathbb{J} . Es decir, que una curva integral de este campo del tipo $(q^\mu(t), p_\mu(t))$ lo será, ssi, cumple las ecuaciones de (1.5).

Demostración. En efecto, introduciendo ω en la fórmula y suponiendo que nuestro campo, desconocido, es $X_H = A^\mu \partial / \partial q^\mu + B^\mu \partial / \partial p_\mu$

$$\mathbf{i}_{X_H} \omega = \mathbf{i}_{X_H} (dq^\mu \wedge dp_\mu) = (\mathbf{i}_{X_H} dq^\mu) dp_\mu - (\mathbf{i}_{X_H} dp_\mu) dq^\mu = A^\mu dp_\mu - B^\mu dq^\mu$$

Hemos usado, que \mathbf{i} es una antiderivación y en la última igualdad las propiedades de la base de $\Omega^1 = \mathfrak{X}^*$. Como los dq^μ, dp_μ son base de las uno-formas $\Omega^1(T^*\mathbb{Q} = P)$, los coeficientes en la Definición 1.11 deben ser iguales. Sabiendo que,

$$\mathbf{d}H = \frac{\partial H}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} dp_\mu$$

tenemos la primera parte de la Proposición. Por otro lado, las curvas integrales, c , del campo cumplen que:

$$\frac{dc(t)}{dt} = X_H(c(t))$$

y llevándolo a nuestras coordenadas, se sigue el resultado. ■

Vayamos ahora con un concepto importante, que nos será de gran ayuda en nuestro análisis posterior, los corchetes de Poisson.

1.3.3. Corchetes de Poisson, definición simpléctica.

Vamos a presentar los corchetes de Poisson con ayuda de la forma simpléctica.

Definición 1.12 (Corchetes de Poisson). Sean $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, U abierto en P , el corchete de Poisson se define como,

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$$

Donde, recordemos, X_f es tal que $\mathbf{i}_{X_f}\omega = \mathbf{d}f$. Sabiendo esto, y que el producto interior cumple que $\mathfrak{L}_{X_g} = \mathbf{i}_X \mathbf{d}g$ es fácil ver que,

$$\{f, g\} = \mathfrak{L}_{X_g} f$$

Vamos a ver ahora una proposición que nos será útil por dos motivos: para calcular los corchetes de Poisson en coordenadas, para relacionar los corchetes con derivadas temporales.

Proposición 1.5 (Propiedades de los corchetes de Poisson). *Sea X_H un campo vectorial hamiltoniano en la variedad simpléctica (P, ω) . Entonces,*

i) *Si la curva $c(t)$ es una curva integral del campo X_H , se tiene que:*

$$\frac{d}{dt}f(c(t)) = \{f, g\}(c(t))$$

ii) *En coordenadas canónicas, tenemos*²⁵

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \mathbb{J}^{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial z^\nu} = (\nabla f)^T \cdot \mathbb{J} \cdot \nabla g$$

Demostración. (i) Por la regla de la cadena, $df(c(t))/dt = \mathbf{d}f(c(t))c'(t)$. Usando ahora la definición de derivada de Lie para funciones,

$$\{f, g\}(c(t)) = (\mathfrak{L}_{X_H} f)(c(t)) = \mathbf{d}f(c(t))X_H(c(t))$$

Como $c(t)$ es una curva integral de X_H , se sigue el resultado.

(ii) Misma idea,

$$\{f, g\} = \mathfrak{L}_{X_g} f = \mathbf{d}f \cdot X_g$$

Ahora bien, esto en coordenadas será, $\partial f / \partial \xi^I X_g^I$. Utilizando ahora que $X_g^I = \mathbb{J}^{IJ} \partial g / \partial \xi^J$ (misma prueba que en Proposición 1.4, solo cambia la función) obtenemos el resultado. ■

Podría probarse que el corchete de Poisson junto con el \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathcal{F}(P)$ forman un *álgebra de Lie.*, i.e., $\{\cdot, \cdot\}$ es \mathbb{R} -bilineal, $\{f, f\} = 0$ y cumple la identidad

²⁵Aquí definimos el gradiente suponiendo una métrica euclídea, i.e., la definición usual. Ya lo usamos anteriormente.

de Jacobi²⁶. Las variación temporal de las funciones de la variedad se escribe ahora como,

$$\dot{f} = \{f, H\}$$

Notemos por último que si $H : P \rightarrow TP$, es decir, no depende explícitamente del tiempo, este se conserva (ya que $\{H, H\} = 0$). La conservación de la energía puede verse también como,

$$H \circ F_t = H \quad \forall t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

siendo F_t el flujo asociado al campo X_H , que ahí viene a actuar como un operador evolución.

Es decir, para nuestros cálculos usaremos que nuestros corchetes de Poisson serán:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \mathbb{J}^{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial z^\nu}$$

Después, para funciones que no dependen explícitamente del tiempo tendremos:

$$\dot{f} = \{f, H\}$$

1.4. Conexión entre ambas formulaciones. Teorema de Noether.

Sabemos que la formulación lagrangiana se formula en $T\mathbb{Q}$ y la formulación hamiltoniana lo hace en $T^*\mathbb{Q}$. Queremos pasar de la última a la primera. Para ello vamos a definir una aplicación de $T\mathbb{Q} \rightarrow T^*\mathbb{Q}$, esta será la *derivada de fibras*. Con ella podremos pasar de una formulación a otra.

1.4.1. Derivada de fibras y campos lagrangianos.

Definición 1.13 (Derivada de fibras.). Sea \mathbb{Q} una variedad y $L \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$. La *derivada de fibras* se define como:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}L : T\mathbb{Q} &\longrightarrow T^*\mathbb{Q} \\ (q, w_q) &\longmapsto (q, DL_q(q, w_q)) \end{aligned}$$

siendo DL_q la derivada con las coordenadas de la fibra fijas, restringidos a la fibra de $q \in \mathbb{Q}$. Notemos que $DL_q(q, w_q)$ es una aplicación lineal de $T_q\mathbb{Q}$ a \mathbb{R} , por tanto, en el dual del dominio.

²⁶ Además, los corchetes satisfacen las siguientes propiedades, para $f, g, h \in \mathcal{F}(T^*\mathbb{Q})$ y a, b constantes.

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{f, gh\} &= \{f, g\}h + g\{f, h\}, \\ \{F(f), g\} &= F'(f)\{f, g\} \end{aligned}$$

Estas se asocian con antisimetría, regla de Leibniz o derivación y “regla de la cadena”. Las coordenadas canónicas satisfacen,

$$\{p_j, p_k\} = \{q_j, q_k\} = 0, \quad \{p_j, q_k\} = \delta_{jk}$$

Nota 2. Aplicado a un vector,

$$\mathbb{F}L(v) \cdot w = \left. \frac{d}{dt} L_q(v + tw) \right|_{t=0}$$

Y en coordenadas,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}L : T\mathbb{Q} &\longrightarrow T^*\mathbb{Q} \\ (q, \dot{q}) &\longmapsto \left(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \end{aligned}$$

y es lo que llamamos *transformada de Legendre*. ◇

Nuestra idea ahora es pasar de la dos-forma simpléctica a una dos-forma que nos de los campos lagrangianos, al igual que la dos-forma simpléctica nos daba los campos hamiltonianos, ver Definición 1.11. Vemos que $\mathbb{F}L$ va del fibrado tangente al cotangente. Nosotros queremos una dos-forma que esté en el fibrado tangente. Necesitamos “traer” la dos-forma simpléctica, que estaba en el cotangente, de vuelta al tangente. Sabemos que herramienta debemos usar, el *pull-back*.

Definición 1.14 (Dos forma de Lagrange). Sea ω la forma simpléctica de $T^*\mathbb{Q}$ y sea $L \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$. Se define,

$$\omega_L := (\mathbb{F}L)^*\omega$$

y $\omega_L \in \Omega^2(T\mathbb{Q})$ será la *dos-forma de Lagrange*.

Se puede probar, que en coordenadas locales, esta dos-forma tendrá la siguiente expresión:

$$\omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\mu \partial \dot{q}^\nu} dq^\mu \wedge dq^\nu + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\mu \partial \dot{q}^\nu} dq^\mu \wedge d\dot{q}^\nu$$

siendo (q, \dot{q}) las coordenadas locales estándar de $T\mathbb{Q}$. Como comentábamos antes, queremos formular las ecuaciones de Lagrange siguiendo el formalismo de las de Hamilton. Entonces, necesitamos un análogo al hamiltoniano. Esta será la *energía*. Pasemos a la definición.

Definición 1.15 (Energía). Sea \mathbb{Q} una variedad y $L \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$. La *energía* la definimos por

$$E(x, v) := \mathbb{F}L(x, v) \cdot v - L(x, v)$$

siendo $x \in Q$, $v \in T_x\mathbb{Q}$. En dimensión finita y coordenadas, tendrá la forma²⁷

$$E(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} \dot{q}^\mu - L(q, \dot{q})$$

Ya estamos en disposición de presentar los campos lagrangianos. Recordemos que lo haremos de manera similar a como lo hicimos en Definición 1.11, pero ahora hacemos los siguientes cambios, $\omega \rightarrow \omega_L$ y de $H \rightarrow E$. Veamos.

²⁷Si pusieramos las velocidades en función de las coordenadas y momentos, tendríamos lo que en la literatura también se conoce por *transformada de Legendre*, pero esto no es lo que nosotros hemos llamado transformada de Legendre.

Definición 1.16 (Campos Lagrangianos). Sea $L \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$ el lagrangiano. Diremos que Z es un *campo lagrangiano* si se cumple la siguiente condición:

$$\mathbf{i}_Z \omega_L = \mathbf{d}E$$

Equivalentemente, $\omega_L(q, v)(Z(v), w) = \mathbf{d}E(q, v) \cdot w$ con $\forall q \in \mathbb{Q}, v \in T_q\mathbb{Q}, w \in T_{(q,v)}T\mathbb{Q}$.

Veamos ahora que lo que hemos definido encaja con la que ya obtuvimos en la sección 1.2.3. Ya que el lagrangiano no depende del tiempo, la energía debería ser constante. Por otro lado, las curvas de este campo vectorial (i.e., aquellas que cumplan $dc/dt(t) = Z(c(t))$) deben ser las mismas que las que obteníamos del principio de Hamilton, ver Teorema 1.2. Esto lo comprobamos en la siguiente proposición.

Proposición 1.6 (Resultados de campos lagrangianos). *Sea Z un campo lagrangiano para $L \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$ y sea $(u(t), v(t)) \in U \times \mathbf{E}$ una curva integral del sistema, en cartas. Entonces,*

i) $E(u(t), v(t))$ es constante en t .

ii) Si Z es una ecuación de segundo orden (i.e., en cartas, $Z(u, e) = (u, e, e, Z_2(u, e))$) para una aplicación del tipo $Z_2 : U \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$). Entonces, la curva integral satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, i.e.,

$$\frac{du}{dt}(t) = v(t) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{D}_2 L(u(t), v(t))) \cdot w = \mathbf{D}_1 L(u(t), v(t)) \cdot w$$

para todo $w \in \mathbf{E}$. Siendo $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ las parciales usuales²⁸

Demostración. Vamos a probar simplemente la primera parte, la derivada temporal es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u(t), v(t)) &= \mathbf{d}E(u(t), v(t)) \cdot (u'(t), v'(t)) = \mathbf{d}E(u(t), v(t)) \cdot Z(u(t), v(t)) = \\ &= \omega_L(u(t), v(t))(Z(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t))) = 0 \end{aligned}$$

Donde hemos usado: regla de la cadena, que es curva integral del campo Z , condición de campo lagrangiano, ω es antisimétrica por definición (es una dos-forma). ■

Por último notemos que en el caso finito, las ecuaciones se reducen a las ecuaciones de EL “usuales”, i.e., a:

$$\frac{d}{dt} q(t) = \dot{q}(t) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$$

que son las que ya vimos, ver Teorema 1.2 o las ecuaciones de (1.2).

²⁸Derivada en el sentido que desarrollamos en el Anexo A.

1.4.2. Teorema de Noether.

Por último, vamos a presentar el teorema de Noether. Sabemos que el Teorema de Noether viene a decirnos que si tenemos un lagrangiano que presenta una simetría, entonces, existe una magnitud que se conserva en el movimiento. La pregunta es, ¿qué significa que el lagrangiano tenga una simetría? ¿Qué cantidad se conserva? Esto es lo que vamos a responder en el siguiente teorema.

Teorema 1.7 (Teorema de Noether). *Sea Z un campo vectorial Lagrangiano del lagrangiano $L \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$ y Z es una ecuación diferencial de segundo orden. Sea Φ_t un grupo uniparamétrico de difeomorfismos en \mathbb{Q} generados por el campo vectorial $Y : \mathbb{Q} \rightarrow T\mathbb{Q}$ (recordemos que vienen a ser como operadores evolución). Supongamos que $\forall t, L \circ T\Phi_t = L$. Entonces, la función $P(Y) : T\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $P(Y)(v) = \mathbb{F}L(v) \cdot Y$ es constante a lo largo de las curvas integrales de Z .*

1.5. Mecánica en variedades de Riemann.

1.5.1. Hamiltoniano y lagrangiano en variedades.

Hasta ahora no nos hemos preocupado de qué lagrangianos o hamiltonianos debemos de tomar para modelar el comportamiento de las partículas en la mecánica clásica. En esta sección vamos a responder a esas preguntas. Estamos acostumbrados a trabajar en espacios euclídeos, aquellos en los cuales la métrica es la usual, a saber, $g_{ij} = \delta_{ij}$. En estos casos, el lagrangiano de una partícula libre es:

$$L = L(\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

y las coordenadas son $q_i = x_i$ ya que estamos en un espacio vectorial, las cartas son la identidad. ¿Cuál es nuestro hamiltoniano? Sería la energía, pero dado que la partícula es libre, no hay potencial, coincide con la energía cinética, que aquí es el lagrangiano. En este caso, sabemos que los momentos son²⁹ $p_i = mv^i$. Por tanto, si expresamos la energía en función de estos nos queda:

$$H = H(p) = \frac{p^2}{2m}$$

Podríamos preguntarnos ahora, ¿qué tiene que ver la métrica? La respuesta puede intuirse si reexpresamos L y H como sigue,

$$L = \frac{1}{2}m\delta_{ij}v^i v^j \quad H = \frac{1}{2m}\delta^{ij}p_i p_j$$

y recordemos que $g_{ij} = \delta_{ij}$ en nuestro caso. Además, usamos los índices arriba para representar la inversa. Ahora sí hay sumación en índices latinos y estos van de 1 a 3.

²⁹Parace que el criterio de índices no “encaja”, r.h.s con los índices arriba y l.h.s abajo. Sin embargo, es porque la métrica está camuflada. En efecto, si lo expresamos como

$$p_i = m\delta_{ij}v^j$$

tenemos coordenadas del mismo tipo a ambos lados. Luego se entenderá mejor este paso.

Intuyendo la relación con la métrica, supongamos que trabajamos en coordenadas que no son las cartesianas, localmente dadas por $q^\alpha = q^\alpha(x)$ y también invertibles y suaves. En ese caso, veamos como se transforma el lagrangiano³⁰,

$$L = \frac{1}{2}m\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}m\delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial q^\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = \frac{1}{2}mg_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta$$

donde hemos utilizado las primeras ecuaciones de (1.2). Obtenemos que ahora el lagrangiano depende de la métrica. Veamos como quedan los momentos con este lagrangiano.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial v^i} = p'_\alpha \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i}$$

Por tanto,

$$H = \frac{1}{2m}g^{\alpha\beta}p'_\alpha p'_\beta$$

Ejemplo 1. Supongamos que nuestra partícula se mueve en la esfera de radio unidad, S^2 . En ese caso la ligadura es $r = 1$, luego las coordenadas generalizadas serán las cartas de la esfera, supongamos que dadas por θ, ϕ . En esféricas, la velocidad es:

$$\mathbf{v} = r\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Luego nuestro lagrangiano será,

$$L = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta)$$

y sustituiríamos $r = 1$. Esto coincide con lo que comentamos arriba sabiendo que la métrica de la esfera es: $ds^2 = r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$ (métrica presentada como una forma cuadrática). Recordemos que el espacio tangente era T_pS^2 y este puede verse en la Figura 1.3

Después, añadiríamos un potencial que solo depende de las coordenadas (y podría depender del tiempo) del tipo $V(q)$. Este estaría restando el L y sumando el H de la manera usual.

Vamos a formalizar un poco lo que hemos comentado arriba. Primero, las definiciones. Por simplicidad supondremos³¹ que $m = 1$.

Definición 1.17. Sea \mathbb{Q} una variedad pseudo-riemanniana³², siendo el campo tensorial métrico $g = \langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{Q})$. Definimos el *lagrangiano*, $L \in \mathcal{F}(T\mathbb{Q})$, será $L(v) := \frac{1}{2}\langle v, v \rangle - V(\pi_{\mathbb{Q}}v)$ con $v \in T\mathbb{Q}$ siendo $\pi_{\mathbb{Q}}$ el proyector del fibrado. Por otro lado, el *hamiltoniano* lo definimos como: $H := E \circ (\mathbb{F}L)^{-1}$.

Por tanto, es fácil ver que, $\mathbb{F}L(v) \cdot w = \langle v, w \rangle$. Entonces, la energía será:

$$E(v) = \langle v, v \rangle - \frac{1}{2}\langle v, v \rangle + V(\pi_{T\mathbb{Q}}v) = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle + V(\pi_{T\mathbb{Q}}v)$$

³⁰También puede verse la métrica como la inducida por el *pull-back*, la primera forma fundamental.

³¹O suponemos que el sistema de unidades es tal que la masa de nuestra partícula es la unidad.

³²Es decir, solo imponemos no degeneración y no definida positiva.

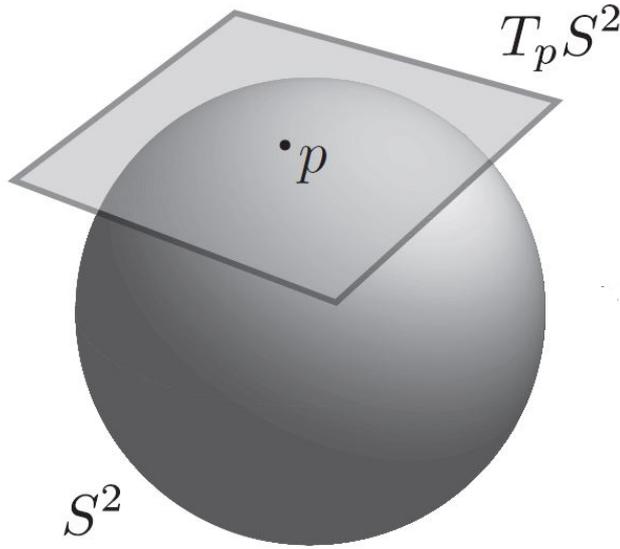


Figura 1.3: S^2 y espacio tangente en un punto.

Por otro lado, podemos dar una expresión explícita del hamiltoniano haciendo uso de los *isomorfismos musicales*, que nos permiten “subir y bajar” índices. En efecto, dado que $\mathbb{F}L(v) = v^\flat$, tendremos que $(\mathbb{F}L)^{-1}(\alpha) = \alpha^\sharp$ con $\alpha \in T_q^*\mathbb{Q}$. Como la derivada entre fibras preserva la fibra tendremos,

$$H(\alpha) = \frac{1}{2} \langle \alpha^\sharp, \alpha^\sharp \rangle + V(\pi_{\mathbb{Q}}^* \alpha)$$

Para ver que recuperamos lo que comentamos al inicio, supongamos que trabajamos localmente y en dimensión finita.

$$L(v) = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j - V(q) \quad H(\alpha) = \frac{1}{2} g^{ij} \alpha_i \alpha_j + V(q)$$

1.5.2. Ecuaciones del movimiento. Geodésicas.

Ya hemos definido el lagrangiano y tenemos las funciones relevantes de las que hablamos en las secciones anteriores a este tema. Allí también comentamos cómo se regía la dinámica del sistema, seguía las ecuaciones de Euler-Lagrange, si trabajamos en el formalismo lagrangiano. En este punto, tenemos las dos piezas básicas de nuestro puzzle, el lagrangiano y sus ecuaciones del movimiento. Lo que vamos a hacer ahora es resolver esas ecuaciones, en realidad, dar una ecuación equivalente.

Teorema 1.8. *Sea L de Definición 1.17. Entonces, $c(t)$ es una curva integral del campo lagrangiano (ver Definición 1.16), ssi, satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (ver Proposición 1.6) y esto se dará, si y solo si,*

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = -(\text{grad}V)(c(t))$$

siendo ∇ la derivada covariante (suponemos que la conexión es la que se deriva del Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana, la conexión de Levi-Civita)

Demostración. Vamos a ver la demostración en coordenadas. Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange, y la definición de derivada covariante,

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\dot{q}^j) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^k - \frac{\partial V}{\partial q^i}$$

Operando obtenemos,

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = -g^{ij} \frac{\partial V}{\partial q^j}$$

Los símbolos de Christoffel son los usuales de la conexión de Levi-Civita. Notemos que el gradiente se define de acuerdo a la métrica, como ya comentamos en la Nota al pie 25. ■

Corolario. 1.8.1. En el caso de una partícula libre, la trayectoria de la partícula será una *geodésica* según la métrica de la variedad. Es decir, cumple que:

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$$

Cuyas ecuaciones serían, en coordenadas,

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = 0$$

Nota 3. Tenemos que en el caso de partículas libres, se siguen las mismas ecuaciones que aquellas partículas que minimizan la longitud de la curva³³. Hay cierta conexión³⁴ con la Relatividad General, donde las trayectorias de las partículas que solo sufren interacción gravitatoria minimizan el tiempo propio (son las geodésicas del espacio tiempo con la métrica que impone las ecuaciones de campo de Einstein-Hilbert.).

Para acabar, demos una definición sobre el caso particular de sistemas con potencial nulo. Es otra forma de ver las ecuaciones para este caso.

Definición 1.18 (Spray geodésico). Sea g el campo tensorial métrico de \mathbb{Q} y sea el lagrangiano $L(v) = \frac{1}{2}g(q)(v_q, v_q)$ siendo $v = (q, v_q) \in T_q\mathbb{Q}$. El campo asociado al lagrangiano, Z , según la Definición 1.16, se denomina *spray* geodésico y su flujo será el *flujo geodésico*.

Notemos que la forma de este *spray* $Z : T\mathbb{Q} \rightarrow T^2\mathbb{Q}$ será, localmente,

$$Z(x, v) = (x, v, v, \gamma(x, v))$$

siendo $\gamma^i(x, v) = -\Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k$ Por lo comentado arriba. Las geodésicas serán, por tanto, las proyecciones, $\pi_{\mathbb{Q}}$, de las curvas integrales de Z .

³³Sería en parámetro natural, i.e., la longitud de la curva. En otro parámetro las ecuaciones se modifican, pero esto no influye en la longitud, es invariante bajo reparametrizaciones. Notemos que nuestro lagrangiano, al ser la norma al cuadrado del vector tangente, no lo es.

³⁴No total, en un caso es la longitud espacial en el otro caso el tiempo propio. Y la métrica se obtiene de formas distintas. Pero sí hay conexión en las ecuaciones del movimiento.

Capítulo 2

Sistemas superintegrables.

2.1. Introducción.

1***

El objetivo último de la Física es encontrar modelos que nos permitan explicar y predecir² la realidad. Estos modelos son usualmente matemáticos, i.e., el modelo se basa en un conjunto de relaciones matemáticas entre las magnitudes de interés. Esto podría verse como:

$$f^i(m_1, \dots, m_n) = 0 \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

siendo f^i las relaciones del modelo y m_1, \dots, m_n las magnitudes físicas relevantes. La realidad física es modelada, usualmente, a través de expresiones que son ecuaciones diferenciales (ED), tanto ordinarias como en derivadas parciales (es decir, que en nuestra expresión de arriba tendríamos términos del tipo $m_j = \partial_{x^\mu} m_j$). El problema es que estos sistemas de ecuaciones diferenciales pueden ser complejos, y por tanto, no poder obtener soluciones analíticas, lo cual nos lleva a usar métodos aproximados (numéricos, perturbativos...) para obtener soluciones (aproximadas). Pocos sistemas pueden ser resueltos analíticamente, los que sí admiten solución analítica se conocen como *sistemas integrables*. En estos sistemas podemos conocer las magnitudes de interés, como trayectorias (clásico), espectros (cuántico), funciones de onda... en función de ciertos parámetros exógenos al modelo, como la carga, posición inicial o masa de la partícula. Pero dentro de este grupo de sistemas, existe un subconjunto de sistemas cuya resolución puede hacerse también de manera algebraica, no solo resolución de ED, estos son los *sistemas (maximalmente) superintegrables*. De manera laxa, un sistema superintegrable es aquel que tiene más constantes del movimiento que grados de libertad. Lo que distingue a estos sistemas es que admiten el máximo grado de simetrías, y por tanto, esto “fuerza” a que pueda resolverse tanto analíticamente como algebraicamente (nos referimos a las trayectorias y al espectro).

¹En este capítulo, debido que es introductorio y las matemáticas son de menor nivel que el anterior, no hemos añadido las partes de primera lectura o de segunda. Si se quiere, pueden dejarse las demostraciones, de las distintas proposiciones que veremos, para la segunda lectura.

²Es importante que el modelo pueda hacer predicciones que puedan ser falsadas, lo que nos permite descartar o mantener provisionalmente esos modelos, siguiendo el criterio de falsación de Popper.

Este capítulo es una introducción³ al tema de superintegrabilidad. Primero, estableceremos ciertas definiciones y resultados básicos. Después, trataremos dos ejemplos muy conocidos: el problema de Kepler y el átomo de hidrógeno (cuyos hamiltonianos son el análogo clásico/cuántico uno del otro). Utilizando lo que veremos de superintegrabilidad, deduciremos sus trayectorias, espectro, las leyes de Kepler... Por último, y como puente al próximo capítulo, en estos dos ejemplos vamos a considerar su problema análogo en S^2 . Esto nos permitirá también profundizar en la resolución usando propiedades inherentes a la superintegrabilidad del sistema.

2.2. Integrabilidad.

Primero, como paso previo a la superintegrabilidad, vamos a introducir brevemente la integrabilidad. Esta sección nos sirve, también, para introducir notación y ciertas nociones básicas.

2.2.1. Integrabilidad en mecánica clásica.

Recordemos del tema anterior, que nuestro hamiltoniano, localmente, tendrá la siguiente expresión en coordenadas (haciendo la suma explícita):

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{j,k} g^{jk}(q) p_j p_k + V(q) \quad (2.1)$$

donde, recordemos, g_{jk} es la métrica de la variedad riemanniana, que será nuestro espacio de configuración. También, $g^{-1} = \det(g^{jk}) \neq 0$, $g^{jk} = g^{kj}$. Como ya comentamos, la relación entre el momento y las velocidades, será: $p_j = m \sum_{\ell=1}^n g_{j\ell} \dot{q}^\ell$, tal que, el término de energía cinética queda,

$$T = \frac{1}{2m} \sum_{j,k} g^{jk}(q) p_j p_k = \frac{m}{2} \sum_{\ell,h=1}^n g_{\ell h}(q) \dot{q}^\ell \dot{q}^h$$

Vayamos ahora con un concepto importante sobre la independencia de funciones. La idea es generalizar el concepto de independencia lineal.

Definición 2.1 (Funcionalmente independientes). Sea $\{f_1(q, p), \dots, f_N(q, p)\}$ un conjunto de N funciones definidas localmente y analíticamente en una región del espacio de fases de dimensión $2n$. Decimos que el conjunto es *funcionalmente independiente* si la matriz $N \times 2n$

$$\left(\frac{\partial f_\ell}{\partial q_j}, \frac{\partial f_\ell}{\partial p_k} \right)$$

tiene rango N en la región. El conjunto es *funcionalmente dependiente* si el rango es estrictamente menor que N en la región.

Otra forma de expresarlo es la siguiente. Si un conjunto de funciones son funcionalmente dependientes, entonces, localmente existe una función F de las N funciones tal que:

³Otras introducciones pueden verse en [4], [5] (francés, pero se entiende bien), [8].

i) Para todo abierto del entorno existe⁴ un x dentro de ese abierto tal que:

$$F(x) \neq 0$$

ii) $F(f_1, \dots, f_n) = 0$ es idénticamente nula en el entorno.

Se puede probar que esta definición es equivalente a la anterior. Por la definición de rango, un conjunto con $N > 2n$ funciones, será funcionalmente independiente (el rango máximo es $2n < N$). Vayamos ahora a la definición de sistema integrable.

Definición 2.2 (Sistema integrable). Un sistema regido por H es *integrable* si $\exists n$ funciones ($\in \mathcal{F}(\mathcal{T}^*\mathbb{Q})$) $\mathcal{P}_1 = H, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ que:

i) Son constantes del movimiento y están en involución, es decir,

$$\{\mathcal{P}_j, \mathcal{P}_k\} = 0, \quad 1 \leq j, k \leq n$$

ii) Son funcionalmente independientes.

La ventaja de los sistemas así definidos es que podemos integrar las ecuaciones de Hamilton y obtener analíticamente las trayectorias. Por otro lado, el formalismo hamiltoniano es el que vamos a usar en la siguiente sección para introducir la mecánica cuántica.

2.2.2. Integrabilidad en mecánica cuántica.

Vamos empezar aquí la parte cuántica. Antes de nada, vamos a hacer un breve introducción para fijar ideas y la notación. En mecánica cuántica un *estado físico* se representa por un vector del espacio de Hilbert, que usualmente⁵ serán funciones cuya imagen está en los complejos. En realidad, se representa por un subespacio (quitando al elemento neutro) de dimensión uno del Hilbert. Es decir, por conjuntos del tipo $[\psi] := \{\varphi = a\psi \text{ con } a \in \mathbb{C} - \{0\}\}$. Es fácil ver que $\varphi = a\psi$ con $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ define una *relación de equivalencia*. Cualquier estado de esta clase de equivalencia puede representar al estado físico. Si consideramos funciones normalizadas, las constantes solo podrían ser fases, $e^{i\phi}$. Es fácil ver que esto de nuevo define una relación de equivalencia, aunque ahora no es un \mathbb{C} subespacio.

En el espacio euclídeo de dimensión n , la función de estado será $\phi(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y el *producto interno* está dado por:

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}, t) \overline{\phi(\mathbf{x}, t)} d^n x$$

Como siempre, podemos definir una norma a partir del producto interno y trabajar con vectores normalizados, $\|\psi\|^2 := \langle \psi, \psi \rangle = 1$. Un *operador autoadjunto* cumple que $\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A\psi, \phi \rangle$ (tendrá autovalores reales y serán candidatos a *observables*). En este espacio, el *principio de correspondencia* es:

$$q_j \rightarrow X_j = x_j \quad p_j \rightarrow P_j = -i\hbar \partial_{x_j}$$

⁴Si esto no se diera, la existencia de la función sería trivial, $F(x) := 0$ para todos los puntos del entorno. Pero esto no es lo que buscamos.

⁵Si hay espín, serían espinores.

Aplicando este principio al hamiltoniano en un espacio euclídeo⁶

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + V(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Recordemos que la probabilidad de medir el autovalor λ , en un espectro discreto, se calcula como:

$$\sum_i |\langle \psi_\lambda^i, \varphi \rangle|^2$$

siendo φ un estado arbitrario medido y ψ_λ^i los posibles autovectores con autovalor λ . El análogo a los corchetes de Poisson en mecánica cuántica son los conmutadores de operadores, que se definen de manera usual $[A, B] := AB - BA$. Esta aplicación entre operadores satisface las mismas relaciones que satisfacían los corchetes de Poisson, que vimos en la Nota al pie 26 del capítulo anterior. En particular,

$$[X_j, X_k] = [P_j, P_k] = 0, \quad [X_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk}, \quad (2.4)$$

Las ecuaciones (2.4) definen un *álgebra de Heisenberg*⁷, \mathfrak{h}_n , en un espacio de dimensión n .

Como es sabido, la evolución del sistema (no relativista) se rige por *ecuación de Schrödinger*,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \phi(t) = H\phi(t). \quad (2.5)$$

Usando el operador evolución, un estado en el tiempo t estará dado por $\phi(t) = U(t)\phi(0)$. Si ese estado inicial es autovector del hamiltoniano, i.e., $H\phi_E(0) = E\phi_E(0)$, la evolución vendrá dada por $\phi_E(t) = U(t)\phi_E(0) = e^{iEt/\hbar}\phi_E(0)$. Llegamos por tanto a:

$$H\phi = E\phi \quad (2.6)$$

⁶De manera más general, podríamos considerar sistemas cuánticos en variedades riemannianas, en analogía con (2.1). En ese caso, nuestro hamiltoniano sería:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g}g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + V(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_n + V \quad (2.2)$$

donde Δ_n es el *operador Laplace-Beltrami* de la variedad. Este operador se define como $\nabla_n := \text{div} \circ \text{grad}$ donde el gradiente se construye como ya hemos comentado en variedades no necesariamente euclídeas ($\text{grad } f := (df)^\sharp$), y la divergencia cumple:

$$\mathfrak{L}_X \mu = (\text{div} X)\mu$$

siendo μ el elemento estándar de volumen. En el caso especial de variedad con métrica euclídea, (2.2) se reduce (2.3). Para una prueba de (2.2), es decir, como una consecuencia de la definición en coordenadas, puede verse [1], tema 7-8.

⁷Este álgebra de Lie se define como sigue: es el álgebra de dimensión $2n + 1$ cuyos elementos de la base son:

$$B = \{X_i, P_j, C\} \quad |B| = 2n + 1$$

El corchete de Lie se define como:

$$[X_j, X_k] = [X_j, C] = [P_j, C] = [C, C] = [P_j, P_k] = 0, \quad [X_j, P_k] = C\delta_{jk}$$

que es la *ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo*. Notemos que la evolución de un estado expresado en una base de autovectores del hamiltoniano es “simplemente” añadir los factores de fase.

El valor esperado de un observable A en un estado $\phi(t)$ obedece la siguiente relación,

$$\frac{d}{dt}\langle\phi, A\phi\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\phi, [H, A]\phi\rangle + \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle \quad (2.7)$$

Tenemos una relación similar a la vista con los corchetes de Poisson (ver 1.5). Sabiendo esto, extendamos ahora el concepto de constante del movimiento.

Definición 2.3 (Constante del movimiento). Sea A un observable sin dependencia del tiempo. Diremos que es una *constante del movimiento* si conmuta con el hamiltoniano, i.e., $[H, A] = 0$.

Ya tenemos los conceptos básicos para pasar al análogo cuántico de la integrabilidad. En efecto.

Definición 2.4 (Integrabilidad cuántica). Un sistema mecánico cuántico de dimensión n se dice integrable si $\exists n$ constantes del movimiento, L_j $j = 1, \dots, n$, tal que satisfacen:

- i) Son operadores hermíticos bien definidos en el álgebra envolvente⁸ del álgebra de Heisenberg \mathfrak{h}_n o series convergentes de $X_j, P_j, j = 1, \dots, n$.
- ii) Algebraicamente independientes (ver explicación más abajo).
- iii) Los L_j conmutan por pares.

Vamos a definir la *independencia algebraica* de los operadores S_1, \dots, S_h . Diremos que lo son si no existe un polinomio de Jordan que se anula idénticamente, i.e., no existen un polinomio P en h variables que no conmutan que se anule idénticamente $P(S_1, \dots, S_h) \equiv 0$. Por simetrizado nos referimos a que si $\alpha S_j S_k$ aparece en P se simetriza de la forma $\alpha(S_j S_k + S_k S_j)/2$. De la misma forma con otros monomios. Si aparece un monomio del tipo $S_{i_1} \cdots S_{i_m}$ pasamos a:

$$\sum_{P \in S_m} \frac{1}{m!} S_{i_{\sigma(1)}} \cdots S_{i_{\sigma(m)}}$$

siendo P_m el grupo de m -permutaciones.

2.3. Superintegrabilidad (polinomial).

En esta sección vamos a centrarnos en sistemas cuyas constantes del movimiento sean polinomios en los momentos, que son los más usuales y los que usaremos nosotros en el resto de capítulos. Trabajaremos por tanto, con la *definición polinomial de superintegrabilidad*. En cuántica, estas constantes serán operadores diferenciales de orden finito, luego tendremos superintegrabilidad de orden-finito. Empecemos por el caso clásico.

⁸Básicamente, el álgebra universal envolvente está formado por todos los polinomios ordenados generados a partir de la base del álgebra.

2.3.1. Superintegrabilidad clásica.

Por lo comentado arriba, veamos la definición de sistemas polinomialmente integrables. Por *globalmente definido* nos referimos a definidos salvo en singularidades de la variedad.

Definición 2.5 (Polinomialmente integrables). Un sistema hamiltoniano es (*polinomialmente*) *integrable* si es integrable y las constantes del movimiento son polinomios en los momentos globalmente definidos.

Ahora bien, si exigimos más simetrías, i.e., con más constantes del movimiento, tendremos los sistemas superintegrables. Cuando el sistema tenga las máximas, será maximalmente superintegrable.

Definición 2.6 (Superintegrable). Un sistema hamiltoniano clásico en n dimensiones es *polinomialmente superintegrable* si admite $n + k$ con $k = 1, \dots, n - 1$ constantes del movimiento funcionalmente independientes que son polinomios en los momentos. Será *polinomialmente superintegrable mínimo* si $k = 1$ y *polinomialmente superintegrable máximo* si $k = n - 1$.

Se puede probar que cualquier función del espacio de fases que es constante del movimiento (i.e., satisface $\{S, H\} = 0$) se puede expresar como función de $2n - 1$ constantes del movimiento funcionalmente independientes. Notemos que las condiciones son algo especiales, ya que no nos vale con que esas funciones estén definidas localmente, deben estar definidas globalmente, y además, estas funciones deben ser polinomios en los momentos.

Como ya comentamos, la ventaja de estos sistemas (maximalmente superintegrables) es que las trayectorias seguidas por el sistema pueden determinarse de *manera algebraica*, veamos esto de manera intuitiva. A lo largo de una trayectoria las funciones son constantes: $\mathcal{L}_s = c_s$, $s = 1, \dots, 2n - 1$. Cada ecuación del tipo $\mathcal{L}_s(q, p) = c_s$ determina una hipersuperficie del espacio de las fases, i.e., de dimensión $2n - 1$. Por tanto, dado que son funcionalmente independientes y están globalmente definidas (como polinomios en los momentos) la trayectoria debe estar en $2n - 1$ hipersuperficies tal que su intersección es de dimensión 1, i.e., la trayectoria del movimiento. Veamos ahora una propiedad importante de las constantes del movimiento.

Proposición 2.1 (Álgebra de las constantes). *Sea H el hamiltoniano y \mathcal{L}, \mathcal{K} constantes del movimiento. Entonces, $\alpha\mathcal{L} + \beta\mathcal{K}$, $\mathcal{L}\mathcal{K}$ y $\{\mathcal{L}, \mathcal{K}\}$ son también constantes del movimiento.*

Demostración. Es fácil de probar si tenemos en cuenta que serán constantes del movimiento ssi $\{H, \mathcal{L}'\} = 0$. Usando las propiedades de la Nota al pie de página 26 del capítulo anterior y que los corchetes definen un álgebra de Lie, tenemos que la suma es cero por ser bilineal, el producto por la regla de Leibniz y el corchete por la identidad de Jacobi. Por desarrollar una en detalle, veamos la última:

$$\{H, \{\mathcal{L}, \mathcal{K}\}\} = -\{\mathcal{K}, \{\mathcal{H}, \mathcal{L}\}\} - \{\mathcal{L}, \{\mathcal{K}, \mathcal{H}\}\} = 0 + 0$$

Por la identidad de Jacobi, y por ser constantes del movimiento. ■

Esto nos dice que podemos generar un álgebra de simetría dadas unas constantes del movimiento a partir de las posibles combinaciones lineales de multiplicaciones esclares, sumas, productos y corchetes de Poisson de los generadores. Notemos que en sistemas superintegrables no todas las constantes estarán en involución.

Definición 2.7 (Orden). Sea \mathcal{L} una constante del movimiento que es polinomio en los momentos. El *orden* de \mathcal{L} que representaremos por $O(\mathcal{L})$ es el grado del polinomio en los momentos de \mathcal{L} . De un conjunto de generadores $F_k = \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k\}$, $O(F_k)$ se define como

$$O(F_k) := \text{máx}\{O(\mathcal{L}_1), \dots, O(\mathcal{L}_k) \text{ con } \mathcal{L}_i \neq H\}$$

2.3.2. Extensión a sistemas cuánticos.

Teniendo en cuenta el paso que hicimos de los sistemas clásicos a cuánticos en la sección anterior, el paso de los conceptos previamente definidos es relativamente directo.

Definición 2.8 (Integrable de orden finito). Un sistema cuántico es *integrable de orden finito* si es integrable y las integrales del movimiento L_k son operadores diferenciales de orden finito.

Ahora los sistemas superintegrables (polinomiales).

Definición 2.9 (Superintegrabilidad cuántica). Un sistema de dimensión n es *superintegrable de orden finito* si admite $n+k$ con $k = 1, \dots, n-1$ operadores diferenciales de orden finito algebraicamente independientes $L_1 = H, \dots, L_{n+k}$ en las variables \mathbf{x} globalmente definidos tal que $[H, L_j] = 0$. Será *mínimamente superintegrable de orden finito* si $k = 1$ y *maximalmente superintegrable de orden finito* si $k = n-1$.

Tenemos una proposición análoga a la del sistema clásico.

Proposición 2.2. Sea H el hamiltoniano con integrales del movimiento L, K , y α, β escalares. Entonces, $\alpha L + \beta K$, LK y $[L, K]$ son también integrales del movimiento.

Demostración. Análoga a la del caso clásico porque los conmutadores comparten las propiedades que usamos allí de los corchetes de Poisson. ■

Los conceptos de simetría y orden se extienden de manera análoga sustituyendo grado por orden del operador.

2.4. Ejemplos importantes.

En mecánica clásica nos interesan, entre otras cosas, las trayectorias seguidas por el sistema. En mecánica cuántica, nos interesan, entre otras cosas, los autovalores del hamiltoniano (el espectro de energías). En esta sección vamos a tratar de obtener estas dos cosas en dos sistemas físicos paradigmáticos: Kepler y el átomo de

hidrógeno. Pero lo haremos, como es lógico, utilizando que son sistemas superintegrables. También trataremos este problema en distintas situaciones. Trataremos los problemas en tres dimensiones, 3D (espacio plano), y también en espacios de dos dimensiones con curvatura constante positiva (S^2), que serán similares al estudio que realizaremos en el siguiente capítulo.

2.4.1. El problema de Kepler clásico.

El problema de Kepler es un problema clásico de la mecánica⁹, trata la interacción de dos cuerpos con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Del estudio de este problema, que se puede aplicar con cierto grado de error¹⁰ al movimiento planetario, se deducen las famosas leyes de Kepler que veremos más adelante. Debido a la conservación del momento angular, podemos considerar el movimiento en un plano. El hamiltoniano sería:

$$\mathcal{L}_1 := H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}, \quad \alpha > 0. \quad (2.8)$$

Es decir, la energía asociada a la fuerza gravitatoria (que será una constante del movimiento por no depender explícitamente del tiempo) donde hemos supuesto, como ya comentamos en otras ocasiones, que $m = 1$. Las ecuaciones de Hamilton, con ese hamiltoniano serían, como ya conocemos:

$$\dot{q}^i = p_i, \quad \dot{p}_i = \frac{\alpha q^i}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}$$

Aquí no las resolveremos, sino que usaremos lo que hemos comentado en secciones anteriores de superintegrabilidad. Aquí¹¹ $n = 3$, por tanto, $2n - 1 = 5$. Necesitamos 5 constantes del movimiento independientes. Por el teorema de Noether, recordemos que es una fuerza central, tenemos que el momento angular se conserva. Visto de otro modo,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

⁹Para un estudio de este sistema sin superintegrabilidad puede verse [2], capítulo 2.

¹⁰De partida hay cierto error debido a la interacción de otros cuerpos. Es razonable despreciar este efecto por ser el Sol mucho más masivo, pero estos cuerpos sí producirán efectos que se pueden calcular por métodos perturbativos. Otro factor es que no estamos ante partículas puntuales. Pero hay correcciones que van más allá de la mecánica, la precesión anómala del perihelio de Mercurio se explica con Relatividad General y es un espaldarazo a esta teoría del espacio tiempo.

¹¹Algunos autores directamente tratan el problema de Kepler en el plano, aquí justificamos por qué la superintegrabilidad en $n = 3$ y $n = 2$ en este caso es equivalente. Como veremos, el movimiento necesariamente se da en un plano.

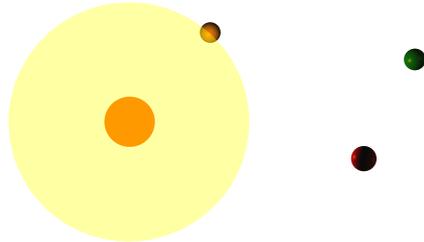


Figura 2.1: Problema de Kepler como aproximación de las trayectorias planetarias. Dibujo no a escala.

Pero ambos sumandos son cero, por la definición del momento angular en cartesianas y porque la fuerza tiene la dirección del vector posición. Por otro lado, $\vec{l}(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$ y $\vec{l}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0 \forall t$, luego, como el vector es constante, fijamos el momento angular orbital tal que esté en la dirección perpendicular al plano que forman la velocidad y el vector posición (que supondremos que es el xy). Entonces, $\vec{l} = (0, 0, l)$ y el movimiento se dará en un plano. Es decir, ya hemos encontrado tres constantes del movimiento, y además, dos de ellas son nulas. Es decir, $\varepsilon_{2ij}q_i p_j = \varepsilon_{2ij}q_i p_j = 0$. La tercera componente será:

$$\mathcal{L}_2 := l_3 = \sum_{ij} \varepsilon_{3ij} q_i p_j = q_1 p_2 - q_2 p_1$$

se puede comprobar que $\{H, \mathcal{L}_2\} = 0$. Pero sabemos que en este problema existen dos constantes más del movimiento, esta es el vector de *Laplace-Runge-Lenz* que se define como:

$$(\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4) := \vec{e} \equiv \vec{p} \times \vec{L} - \frac{\alpha \vec{r}}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} = \left(\mathcal{L}_2 p_2 - \frac{\alpha q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}, -\mathcal{L}_2 p_1 - \frac{\alpha q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \right)$$

este vector es paralelo al vector que forma el origen con el punto de máximo acercamiento (perihelio, que es invariante). Tenemos seis constantes del movimiento, que son más que las $2n - 1$ que comentamos, luego algunas deben depender funcionalmente de las otras. Lo podemos ver en que $\vec{e} \cdot \vec{L} = 0$. También puede probarse que:

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = \mathcal{L}_3^2 + \mathcal{L}_4^2 = 2\mathcal{L}_2^2 H + \alpha^2. \quad (2.9)$$

Podemos usar las constantes $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_4\}$ para generar el álgebra de simetría. Los corchetes no nulos serían¹²

$$\{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\} = +\mathcal{L}_4, \quad \{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4\} = -\mathcal{L}_3, \quad \{\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4\} = -2\mathcal{L}_2 H. \quad (2.10)$$

Notemos, como era de esperar, que todos los corchetes con \mathcal{L}_1 son nulos. Vamos ahora a centrarnos en la búsqueda de trayectorias. Hacemos los siguientes supuestos o fijación de valores:

- $\mathcal{L}_1 := E$, la energía.
- $\mathcal{L}_2 := l$, el momento angular.
- Fijamos¹³ el sistema de referencia tal que el vector de Runge-Lenz sea del tipo $\mathcal{L}_4 = 0$, $\mathcal{L}_3 = e_1 > 0$

¹²No forma un álgebra de Lie debido al término cuadrático que aparece. Se puede probar que en un algebra de Lie, si $[,]$ es el corchete de Lie y $\{L_1, \dots, L_n\}$ es la base del álgebra, se tiene que:

$$[L_i, L_j] = c_{ij}^k L_k$$

y las constantes c_{ij}^k son las constantes de estructura del álgebra.

¹³Obviamente, esto no afecta a la fijación original de los ejes tal que el momento angular fuera paralelo al eje z . Todavía nos queda libertad para rotar sobre ese eje los vectores de $x - y$.

Partiendo de estas condiciones, veamos como quedan las trayectorias. Primero, $e_1^2 = 2\ell^2 E + \alpha^2$ por la relación de (2.9). Sustituyendo ahora el vector de Runge-Lenz obtenemos los momentos lineales en función de las coordenadas,

$$p_1 = -\frac{\alpha q_2}{\ell\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \quad p_2 = \frac{e_1}{\ell} + \frac{\alpha q_1}{\ell\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$$

Sustituyendo ahora esto en la expresión del momento angular, obtenemos:

$$\ell = \frac{q_1 e_1}{\ell} + \frac{\alpha q_1^2}{\ell\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} + \frac{\alpha q_2^2}{\ell\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} = \frac{q_1 e_1}{\ell} + \frac{\alpha\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{\ell},$$

Teniendo en cuenta que $q_1 = r \cos \phi$ llegamos a la siguiente ecuación:

$$r(\phi) = \frac{l^2}{\alpha(1 + \epsilon \cos \phi)} \quad \text{siendo } \epsilon := \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\alpha^2}} \quad (2.11)$$

donde hemos utilizado la relación (2.9). Sabemos que esta ecuación representa las cónicas en polares, siendo ϵ la excentricidad de la cónica. En la Figura 2.2 mostramos las distintas cónicas solución al problema. Estamos ahora en posición de deducir la leyes de Kepler.

Proposición 2.3 (Leyes de Kepler). *Sea un sistema del tipo Kepler, i.e., el planteado arriba. Entonces, se cumplen las siguientes leyes:*

- 1ª:** *Las trayectorias, de los posibles planetas modelados por ese sistema, son elipses.*
- 2ª:** *La órbita del planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (ver definición de esto en la demostración).*
- 3ª:** *Si T es el periodo y R es el semieje mayor de la elipse, entonces T^2/R^3 es constante.*

Demostración. La primera ley es sencilla, las únicas trayectorias cerradas son las elipses. Para la segunda ley tengamos en cuenta que el área será:

$$A(t) = \int_{S(t)} dS = \int_{\phi(0)}^{\phi(t)} \int_0^{r(\phi)} r dr d\phi = \frac{1}{2} \int_{\phi(0)}^{\phi(t)} r^2(\phi) d\phi$$

Usando el jacobiano en polares. Utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{dA(\phi(t))}{dt} = \frac{dA(\phi)}{d\phi} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{l}{2}$$

donde en la segunda igualdad hay que tener en cuenta que el Teorema Fundamental del Cálculo y (2.11), después operar (usando la definición de l y que aquí $\vec{v} = \vec{p}$, $m = 1$). No necesitamos conocer $\phi = \phi(t)$, y es constante por ser l una constante del movimiento. Finalmente, para la tercera ley, suponiendo que es una elipse (está implícito en la ley) y usando ii),

$$A = \frac{lT}{2} \rightarrow \pi^2 a^2 b^2(a) = l^2 T^2 / 4 \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{\alpha} R^3$$

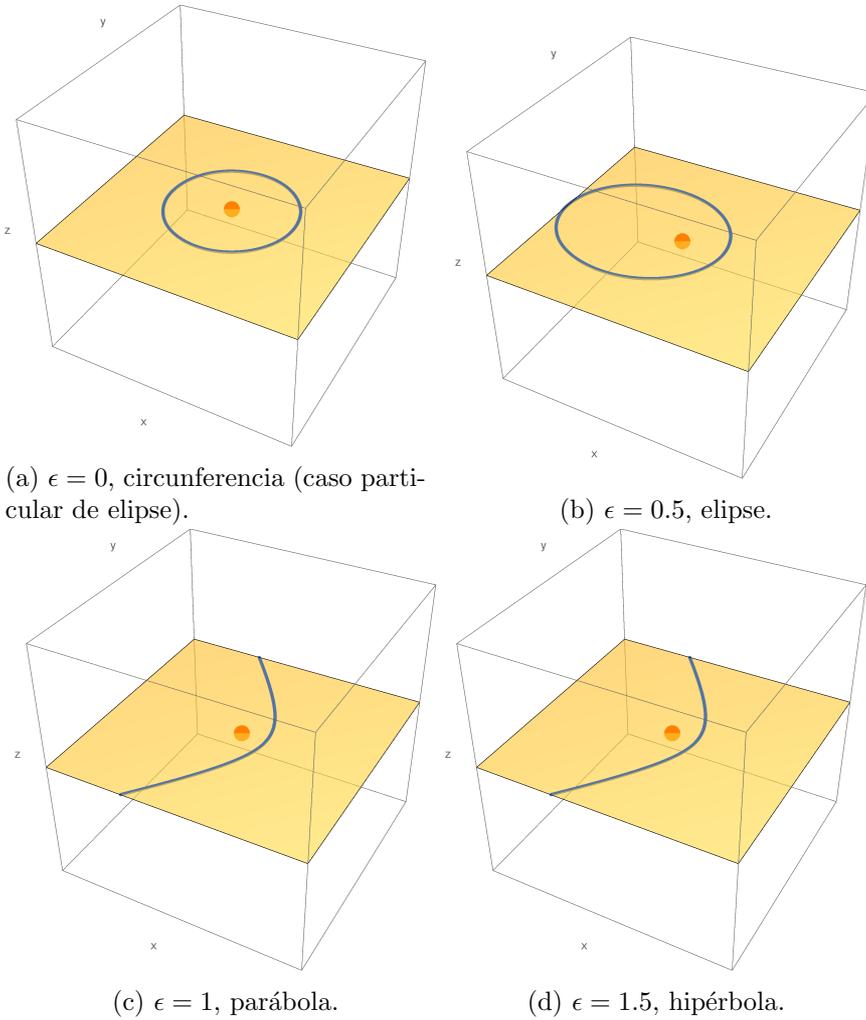


Figura 2.2: Distintas cónicas solución a problema de Kepler. En todos los casos $l^2/\alpha = 1$

Con $R = a$ y b es el semieje menor y usamos propiedades de la elipse. Notamos, por tanto, que la constante no depende ni del l , ni de E ni de otras constantes de la partícula. ■

Nota 4 (Teorema de Bertrand). Aquí es equivalente decir acotado a cerrado. Pero esto no es general, solo en los potenciales centrales tridimensionales de Kepler-Coulomb y oscilador isótropo tenemos que todas las órbitas acotadas están cerradas. Este es el *Teorema de Bertrand*. Ambos sistemas son superintegrables.

Nota 5 (Tercera ley aproximada). En realidad sí dependería de la masa de la partícula. Aquí hemos supuesto que el Sol está fijo, pero en realidad también estaría moviéndose. Si lo tuviéramos en cuenta, el problema relativo (lo separamos en el problema del centro de masas (trivial) y problema del movimiento relativo relativo) dependería de la masa reducida (nosotros hemos supuesto que la masa es 1, pero esto será en distintos sistemas de unidades según el planeta). En nuestro caso, el

último cálculo dependería de $(m + M)$. Obviamente, entre los distintos planetas ese parámetro es similar, $M \gg m$ para cualquier planeta. Es decir, es una ley aproximada, aunque error muy pequeño.

2.4.2. Análogo de Kepler en la 2-esfera.

Vamos a considerar el análogo al problema de Kepler en un espacio de curvatura constante y positiva, vamos a considerar S^2 . Este problema es interesante, ya que en el siguiente capítulo también trabajaremos en la 2-esfera, aunque con otro hamiltoniano y utilizando otros métodos. De nuevo, veremos como usando la superintegrabilidad podemos obtener las trayectorias y además, veremos como en cierto límite recuperamos el problema de la sección anterior. Como ciertas cosas son iguales a las de la sección anterior, no lo comentaremos con tanto detalle. Vamos a considerar a la esfera encajada en el espacio euclideo de dimensión 3. Sean x_1, x_2, x_3 las coordenadas cartesianas, entonces, la ecuación de la esfera de radio unidad es: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Pero notemos que también tenemos otra restricción en nuestro espacio de las fases, los momentos deben estar en el espacio tangente a esa esfera. En nuestro caso, eso se traduce a: $\sum_{i=1}^3 p_i x_i = 0$. El hamiltoniano viene dado por:

$$H = \mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + \mathcal{J}_3^2 + \frac{\alpha x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (2.12)$$

con¹⁴ $\alpha < 0$ y $\mathcal{J}_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j p_k$, por ejemplo, $\mathcal{J}_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$ y esto corresponde al momento angular. Notemos que si utilizamos los corchetes de Poisson con las coordenadas y momentos usuales, tenemos:

$$\left\{ H, \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right\} = 0 \quad \left\{ H, \sum_{i=1}^3 x_i p_i \right\} = 0$$

Por otro lado, se puede comprobar que existe la siguiente relación entre ambos hamiltonianos¹⁵,

$$H' = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{\alpha x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{H + (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3)^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

Imponiendo nuestras condiciones, ambos hamiltonianos coinciden. En analogía con lo visto en la sección anterior, podemos comprobar que las siguientes funciones son constantes del movimiento:

$$\mathcal{L}_1 = 2\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_3 - \frac{\alpha x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \mathcal{L}_2 = 2\mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3 - \frac{\alpha x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \mathcal{X} = \mathcal{J}_3. \quad (2.13)$$

Además, las relaciones del álgebra de simetría son:

$$\{\mathcal{X}, \mathcal{L}_1\} = +\mathcal{L}_2, \quad \{\mathcal{X}, \mathcal{L}_2\} = -\mathcal{L}_1, \quad \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\} = -4(H - 2\mathcal{X}^2)\mathcal{X}, \quad (2.14)$$

¹⁴ Antes $\alpha > 0$

¹⁵ Ahora suponemos que la masa es tal que $m/2 = 1$.

Y su dependencia funcional viene dada por:

$$\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + 4\mathcal{X}^4 - 4H\mathcal{X}^2 - \alpha^2 = 0. \quad (2.15)$$

Si al módulo del vector $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ lo llamamos κ , i.e., $\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 =: \kappa^2$, tendremos $\kappa^2 = \alpha^2 + 4H\mathcal{X}^2 - 4\mathcal{X}^4$. Obviamente, $\kappa \geq 0$. Como hicimos con el caso de Kepler, escogemos un sistema de referencia x_1, x_2, x_3 el vector análogo al de Runge-Lenz apunte siempre (es constante) en la dirección del eje x_1 , es decir, $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = (\kappa, 0)$. Teniendo esto en cuenta y sustituyendo las constantes del movimiento en (2.12), llegamos a¹⁶

$$\left(H\mathcal{X}^2 - \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) - \mathcal{X}^4 \right)^2 (x_1^2 + x_2^2) - \alpha^2 \left(\frac{\kappa x_1}{2} + \mathcal{X}^2 x_3 \right)^2 = 0 \quad (2.16)$$

Fijadas las constantes, (2.16) describiría un cono. Pero recordemos que también teníamos la condición de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, luego la trayectoria será la intersección de ambas superficies, como puede verse en la Figura 2.3a¹⁷. En el resto de imágenes de la Figura 2.3 lo que vemos es la solución en los distintos casos asociados a las distintas cónicas. Esta asociación la hacemos debido a lo que vamos a ver en la siguiente subsección.

2.4.3. Contracción al espacio euclídeo \mathbb{E}^2

Como vemos en la expresión de nuestro hamiltoniano, ver (2.12), tiene un comportamiento atractivo ($\alpha < 0$) cuando estamos en el polo norte ($x_1, x_2 \approx 0, x_3 \approx 1$). Vamos a suponer que tenemos un observador situado en el polo norte de nuestra esfera y que tenemos la situación descrita líneas arriba, lo que puede verse como:

$$r^2 := x_1^2 + x_2^2 \ll 1 \quad (2.17)$$

Aplicando estas condiciones, veamos como quedan nuestras coordenadas (imponiendo las restricciones que vimos en la sección anterior del espacio de las fases). Primero definimos las nuevas coordenadas de este observador:

$$\begin{aligned} x &:= x_1, & y &:= x_2, \\ p_x &:= p_1, & p_y &:= p_2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por otro lado, veamos como quedaría la coordenada x_3 ,

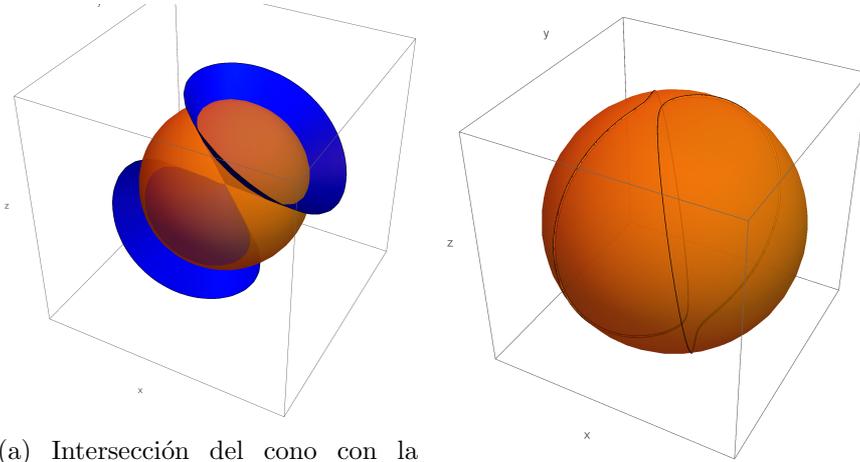
$$x_3 = + \left(1 - \frac{r^2}{1} \right)^{1/2} = 1 + o(r^2) \approx 1$$

Donde hemos desarrollado en orden cero. También, dada la otra restricción en los momentos,

$$p_3 = -\frac{1}{s_3}(xp_x + yp_y) = -(1 + o'(r^2))(xp_x + yp_y) \approx -(xp_x + yp_y)$$

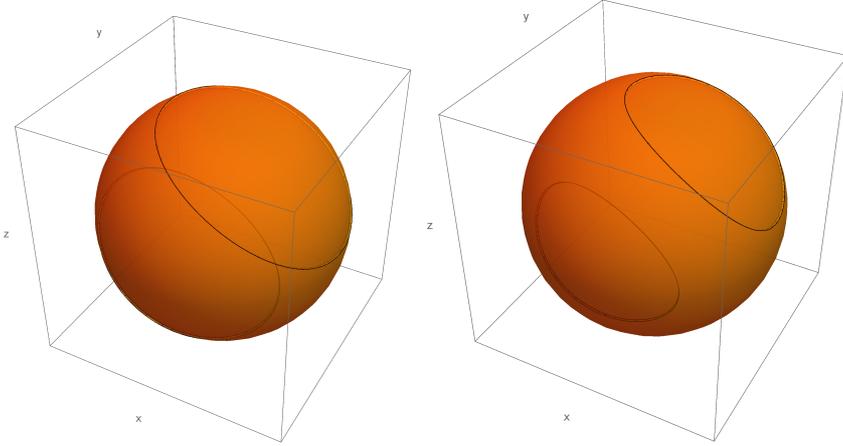
¹⁶Basta con sustituirlo, operar y separar la raíz y después elevar al cuadrado

¹⁷Este sería el análogo a la primera ley de Kepler en S^2 . Para el resto de leyes, puede verse [4]



(a) Intersección del cono con la esfera. Los parámetros son: $\alpha = -8, \mathcal{X} = 1.5, H = 1$

(b) Caso asociado a la hipérbola.



(c) Caso asociado a la parábola.

(d) Caso asociado a la elipse.

Figura 2.3: Distintas soluciones al problema de Kepler en S^2 .

Si definimos las constantes (serán constantes porque son combinaciones lineales de constantes, ver Proposición 2.1) β, h por

$$\alpha = \beta, \quad H - \mathcal{X}^2 = h$$

Ahora, sustituyendo en (2.12) y utilizando de nuevo la condición (2.17) encontramos:

$$p_x^2 + p_y^2 + \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + y^2}} = h. \quad (2.19)$$

Veamos ahora que encontramos los mismos¹⁸ resultados que vimos en la sección del problema de Kepler: $\mathcal{X} = xp_y - yp_x = l$, y el vector de Runge-Lenz

$$\mathcal{L}_1 = e_1 = -2\mathcal{X}p_y - \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \mathcal{L}_2 = e_2 = 2\mathcal{X}p_x - \frac{\beta y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

¹⁸A la hora de comparar, tengamos en cuenta que ahora la masa es $m = 2$, antes $m = 1$ y que $\beta < 0$, pero en el primer caso, $\alpha > 0$.

Los corchetes nos quedan:

$$\{\mathcal{X}, \mathcal{L}_1\} = +\mathcal{L}_2, \quad \{\mathcal{X}, \mathcal{L}_2\} = -\mathcal{L}_1, \quad \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\} = -4h\mathcal{X}, \quad \mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 - 4h\mathcal{X}^2 - \beta^2 = 0.$$

La ecuación de las trayectorias sería,

$$[h\mathcal{X}^2 - (\frac{\beta^2}{4} + \frac{k^2}{4})]^2(x^2 + y^2) - \beta^2(\frac{kx}{2} + \mathcal{X}^2)^2 = 0. \quad (2.20)$$

Las soluciones de (2.20) son las usuales, secciones cónicas: intersección de un plano con un cono.

2.4.4. El problema cuántico de Coulomb-Kepler en \mathbb{E}^3 .

Vayamos ahora a la parte cuántica. Vamos a tratar el problema de Coulomb-Kepler cuántico, i.e., el átomo de hidrógeno con la ecuación de Schrödinger. Primero, escribimos el hamiltoniano de la manera usual:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{\alpha}{r}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \alpha > 0, \quad (2.21)$$

siendo p_i los operadores del momento lineal. Veamos ahora las constantes del movimiento. Sabemos, dado que el potencial es central, que conmuta con los operadores de momento angular,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.22)$$

además, con el análogo cuántico de vector de Runge-Lenz¹⁹

$$\vec{A} = \frac{1}{2m}(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}) - \frac{\alpha}{r}\vec{r}. \quad (2.23)$$

Las relaciones de conmutación entre los operadores son (además de $[\vec{L}, H] = [\vec{A}, H] = 0$):

$$[L_j, L_k] = i\varepsilon_{jkl}L_\ell \quad [L_j, A_k] = i\varepsilon_{jkl}A_\ell \quad [A_j, A_k] = -\frac{2i}{m}\varepsilon_{jkl}L_\ell H \quad (2.24)$$

A partir de aquí podemos obtener los autovalores de E de manera algebraica. Para ello definimos los siguientes operadores,

$$\vec{K} := \beta\vec{A} \quad \vec{g} := \frac{1}{2}(\vec{L} + \vec{K}) \quad \vec{q} := \frac{1}{2}(\vec{L} - \vec{K})$$

Con $\beta := \sqrt{\frac{-m}{2E}}$. A partir de (2.24) podemos obtener las nuevas relaciones de conmutación, que son:

$$[g_i, g_j] = \varepsilon_{ijk}g_k \quad [q_i, q_j] = \varepsilon_{ijk}q_k \quad [g_i, q_j] = 0$$

Es decir, tenemos las mismas relaciones de conmutación que el momento angular²⁰, i.e., $SO(3)$. Los casimires serán,

$$C_- = 4q^2 \quad C_+ = 4g^2$$

¹⁹Para vectores de este tipo en este sistema y en otros, puede verse [7].

²⁰Véase, por ejemplo, [6].

Operando,

$$C_{\pm} = L^2 + \beta^2 K^2 \pm 2\beta \vec{L} \cdot \vec{A} \quad (2.25)$$

Es fácil ver que $\vec{L} \cdot \vec{A} = 0$, ya que si tenemos sumandos del tipo $\varepsilon_{ijk} p_j L_k L_i = 0$, tenemos una suma de una parte simétrica (L repetido) y otra antisimétrica (los dos índices asociados al pseudotensor de Levi-Civita). De la definición se puede probar que,

$$R^2 = \alpha^2 + (L^2 + 1) \frac{2H}{m}$$

Si ahora lo aplicamos a un estado con energía E a (2.25) usando la ecuación anterior, las partes del momento angular se cancelan ²¹ y obtenemos (usando los autovalores del Casimir),

$$C\psi = \left(-1 - \frac{\alpha^2 m}{2E}\right) = 4q(q+1)$$

Lo que finalmente obtenemos es:

$$E = \frac{-m\alpha^2}{2n^2}$$

siendo $n = 2q + 1 \in \mathbb{N}$. Recordemos que trabajamos con $\hbar = 1$. Es decir, obtenemos el espectro del átomo de hidrógeno.

2.4.5. El problema cuántico de Coulomb-Kepler en S^2 .

Vamos a estudiar el problema de Kepler en S^2 , el análogo cuántico al problema de la sección anterior. Este problema es interesante, ya que en el siguiente capítulo también trabajaremos en la 2-esfera, aunque con otro hamiltoniano y añadiendo nuevos métodos. Empezamos por el hamiltoniano, que será:

$$H = \sum_{i=1}^3 J_i^2 + \frac{\alpha x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (2.26)$$

con $J_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_j \partial_k$, p.e., $J_1 = x_2 \partial_3 - x_3 \partial_2$. Nuestro objetivo es encontrar los estados ligados de $H\psi = E\psi$ para funciones $\psi(\mathbf{x})$ de cuadrado integrables en la esfera de radio unidad, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Como antes, trataremos el caso en coordenadas euclídeas x_1, x_2, x_3 , y las funciones las restringiremos a la 2-esfera. Lo primero que necesitamos es la base de simetrías, que la conseguiremos aplicando el simetrizador (como explicamos al inicio de este capítulo) a las simetrías clásicas y aplicando el principio de correspondencia:

$$L_1 = J_1 J_3 + J_3 J_1 - \frac{\alpha x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad L_2 = J_2 J_3 + J_3 J_2 - \frac{\alpha x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad X = J_3,$$

también H . Las relaciones de estructura y el Casimir son:

$$\begin{aligned} [X, L_1] &= -L_2, \quad [X, L_2] = L_1, \quad [L_1, L_2] = 4HX - 8X^3 + X, \\ L_1^2 + L_2^2 + 4X^4 - 4HX^2 + H - 5X^2 - \alpha^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

²¹Esto está relacionado con la degeneración accidental del átomo de hidrógeno.

Para deducir el espectro es conveniente obtener unas nuevas simetrías. Dado que por la Proposición 2.2, las combinaciones lineales también serán simetrías definimos: $L_0 = iX$, $L^+ = L_1 - iL_2$, $L^- = L_1 + iL_2$. Definidos así, L^\pm son uno el adjunto del otro. Más tarde veremos su significado. Primero, las nuevas relaciones y Casimir:

$$[L_0, L^\pm] = \pm L^\pm, [L^+, L^-] = 8HL_0 + 16L_0^3 + 2L_0, \quad (2.28)$$

$$L^+L^- - (4HL_0 + 8L_0^3 + L_0) = -4L_0^4 - 4HL_0^2 - H - 5L_0^2 + \alpha^2. \quad (2.29)$$

Notemos que (2.29) puede escribirse como (utilizando el conmutador de $[L^+, L^-]$):

$$L^-L^+ + (4HL_0 + 8L_0^3 + L_0) = -4L_0^4 - 4HL_0^2 - H - 5L_0^2 + \alpha^2 \quad (2.30)$$

Veamos ahora qué podemos deducir de las relaciones de simetría. Lo primero es que todas las simetrías son constantes del movimiento, i.e., conmutan con el hamiltoniano, por tanto, podemos encontrar una base común de autovectores²². Esto nos simplificará los cálculos bastante. Para ver la utilidad de los corchetes de L^\pm veamos la siguiente proposición.

Proposición 2.4 (Operadores L^\pm). *Sea $\psi \in V_E$, siendo este último un subespacio, finito, de autovectores con energía E . Además, ψ es autovector de L_0 con autovalor λ . Entonces, se cumplen las siguientes proposiciones:*

- i) *Estos operadores dejan invariante V_E , i.e., no modifican el autovalor de la energía.*
- ii) *O bien, $L^+\psi = \psi_0$ (elemento neutro) o $L^+\psi$ es autovector de L_0 con autovalor $\lambda + 1$.*
- iii) *O bien, $L^-\psi = \psi_0$ o $L^-\psi$ es un autovector de L_0 con autovalor $\lambda - 1$.*

Demostración. Usando $H\psi = E\psi$,

$$HL^\pm\psi = L^\pm H\psi = E(L^\pm\psi)$$

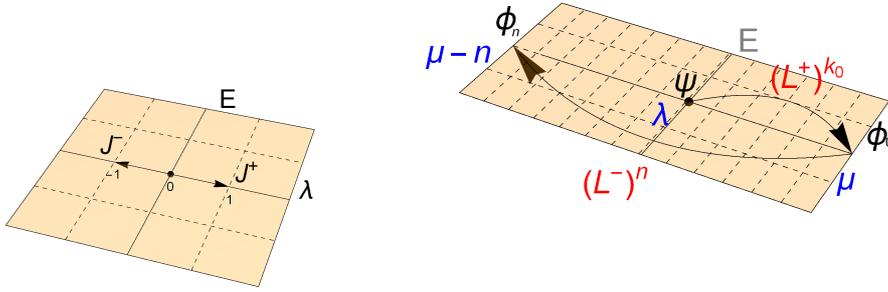
y queda i) probado (esta parte es válida para cualquier operador que conmute con el hamiltoniano). Vayamos con los otros. Utilizando las relaciones de estructura veamos qué pasa con los autovalores de L_0 . Si tenemos $L_0\psi = \lambda\psi$ y utilizando (2.28) tenemos:

$$L_0(L^\pm\psi) = (L^\pm L_0 \pm L^\pm)\psi = (\lambda \pm 1)(L^\pm\psi)$$

Luego suben y bajan los autovalores de L_0 ²³. Ahora bien, como estamos en un subespacio finito, la degeneración de este no puede ser infinita, luego deben existir ψ tal que $L^\pm\psi = \psi_0$ y, por tanto, al seguir aplicando L^\pm no obtengamos un conjunto infinito de autovalores de L_0 (ya que quedaría $(\lambda \pm 1)\psi_0 = \psi_0$, el autovalor es 0). La idea de esta prueba puede verse en la Figura 2.4a. ■

²²Véase [6], capítulo 2.

²³En el siguiente capítulo desarrollaremos con más detalle operadores de este tipo.



(a) Esquema de la actuación de los operadores L^\pm en el plano de $\lambda - E$. Estos operadores no modifican la energía.

(b) Esquema de los “movimientos” que hacemos con los operadores L^\pm en el razonamiento. En azul, autovalores, en negro, autovectores y en rojo operadores. Nos mantenemos en el subespacio con la energía fijada.

Figura 2.4: Distintos esquemas para los operadores L^\pm .

Veamos ahora como podemos obtener el espectro. Sea $\psi \in V_E$ con autovalor λ de L_0 . Definimos

$$L_0^k \psi := \left(\prod_{i=1}^k L_0 \right) \psi$$

para $k = 1, 2, \dots$. Como V_E tiene dimensión finita, $\exists k$ tal que $(L^+)^{k+1} \psi = \psi_0$. Sea k_0 el mínimo de estos y definimos $\phi_0 := (L^+)^{k_0} \psi$. Por lo visto en la Proposición 2.4, ϕ_0 es autovector de L_0 , $L_0 \phi_0 = \mu \phi_0$ con $\mu = \lambda + k_0$. Aplicando L^- a ϕ_0 podemos ir generando los distintos autovectores, que denotamos por $\phi_j := (L^-)^j \phi_0$. Por lo comentado en la demostración anterior, $\exists n$ tal que $L^- \phi_n = \psi_0$. Entonces, los autovectores serán:

$$L_0 \phi_j = (\mu - j) \phi_j, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad L^- \phi_j = \phi_{j+1}, \quad j = 0, \dots, n - 1.$$

Una idea del razonamiento puede verse en la Figura 2.4b. Para obtener la energía aplicamos las relaciones que nos faltan. Simplemente utilizaremos las relaciones anteriores y que $H \phi_j = E \phi_j$ Primero las aplicamos (2.29) a ϕ_j :

$$L^+ \phi_{j+1} = ((4E + 1)(\mu - j) + 8(\mu - j)^3 - 4(\mu - j)^4 - (4E + 5)(\mu - j)^2 - E + \alpha^2) \phi_j$$

Si aplicamos cuando $j = n$ se obtiene

$$(4E + 1)(\mu - n) + 8(\mu - n)^3 - 4(\mu - n)^4 - (4E + 5)(\mu - n)^2 - E + \alpha^2 = 0. \quad (2.31)$$

Ahora aplicamos (2.30) a ϕ_0 para obtener $-(4E + 1)\mu - 8\mu^3 - 4\mu^4 - (4E + 5)\mu^2 - E + \alpha^2 = 0$. Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, si resolvemos para E

$$E = -\frac{1}{4}(2\mu + 1)^2 + \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{(2\mu + 1)^2}, \quad (2.32)$$

Ahora usamos la ecuación anterior en (2.31) y obtenemos la ecuación:

$$(n - 2\mu)(n + \sqrt{(n+1)^2 + 2i\alpha} - 2\mu)(n + \sqrt{(n+1)^2 - 2i\alpha} - 2\mu) \quad (2.33)$$

$$\times (n - \sqrt{(n+1)^2 + 2i\alpha} - 2\mu)(n - \sqrt{(n+1)^2 - 2i\alpha} - 2\mu) = 0.$$

Esto es igual a cero, ssi, al menos uno de ellos es igual a cero. Como son autoadjuntos, solo pueden ser aquellos reales, i.e., $\mu = n/2$. Finalmente, la energía para V_E será:

$$E_n = -\frac{1}{4}(n+1)^2 + \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{(n+1)^2}. \quad (2.34)$$

Capítulo 3

Superintegrabilidad de hamiltoniano tipo $U(3)$ generalizado.

3.1. Introducción.

Una vez introducidos los sistemas superintegrables y los ejemplos importantes en el capítulo anterior, nos proponemos en este capítulo un estudio de un sistema particular con cierto detalle. El propósito de este capítulo es definir una familia de hamiltonianos a partir de uno conocido, y estudiar si estos son superintegrables. El método que usaremos en este capítulo se basa en la factorización del hamiltoniano. Después, utilizando ciertos resultados teóricos (que aquí proponemos y probamos) comprobaremos que existen ciertos operadores que conmutan con el hamiltoniano. También analizaremos el análogo clásico de este hamiltoniano, obteniendo al final del proceso, y hallaremos las trayectorias del sistema de manera algebraica.

Por otro lado, otro de los objetivos de este capítulo es deducir parte del marco teórico necesario para trabajar con el método de factorización, en particular, del estudio de los operadores *shift* y *ladder*. Probamos ciertos resultados teóricos nuevos, con la mayor generalidad posible, que nos permitirían estudiar otros sistemas. También presentamos detalladamente del proceso de obtención de los operadores *shift*, que es aplicable en otros casos.

3.2. Aplicación del método de separación de variables.

Al igual que hicimos en el capítulo anterior, definidos en la esfera, pero esta sumergida en un espacio de dimensión superior, \mathbb{E}^3 Nuestro hamiltoniano de partida es:

$$H_a := - \sum_{i=0}^2 J_i^2 + \frac{l_i^2 - 1/4}{s_i^2}$$

donde hemos tomado como coordenadas (s_0, s_1, s_2) y definimos $J_i := \varepsilon_{ijk}s_j\partial_k$. Si trabajamos en coordenadas esféricas con ángulos ϕ_1, ϕ_2 el problema de autovalores

$$H_a\phi = E\phi$$

se transforma en el siguiente,

$$H_a = -\partial_\phi^2 + \tan \phi_1 \partial_{\phi_1} + \frac{l_2^2 - 1/4}{\sin^2 \phi_1} + \frac{1}{\cos^2 \phi_1} \left[-\partial_{\phi_2}^2 + \frac{l_0^2 - 1/4}{\cos^2 \phi_2} + \frac{l_1^2 - 1/4}{\sin^2 \phi_2} \right]$$

Nosotros no vamos a trabajar con ese hamiltoniano, sino que vamos a modificarlo añadiendo un parámetro k , con el que podemos definir la *familia uniparamétrica de hamiltonianos* como sigue:

$$H_k := -\partial_\phi^2 + \tan \phi_1 \partial_{\phi_1} + \frac{l_2^2 - 1/4}{\sin^2 \phi_1} + \frac{k^2}{\cos^2 \phi_1} \left[-\frac{\partial_{\phi_2}^2}{k^2} + \frac{l_0^2 - 1/4}{\cos^2 k\phi_2} + \frac{l_1^2 - 1/4}{\sin^2 k\phi_2} \right]$$

En primer lugar, vamos a buscar soluciones separables por los métodos habituales. Procedamos a hacer los siguientes cambios de variable:

$$\begin{aligned} \cdot \phi &:= \phi_1 \\ \cdot \theta &:= k\phi_2 \end{aligned}$$

Entonces, nuestro hamiltoniano queda¹;

$$H = -\partial_\phi^2 + \tan \phi \partial_\phi + \frac{l_2^2 - 1/4}{\sin^2 \phi} + \frac{k^2}{\cos^2 \phi} \left[-\partial_\theta^2 + \frac{l_0^2 - 1/4}{\cos^2 \theta} + \frac{l_1^2 - 1/4}{\sin^2 \theta} \right]$$

Procedamos ahora con la separación de variables. Sea $\Psi(\theta, \phi) = \psi(\theta)\varphi(\phi)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} H\psi(\theta)\varphi(\phi) &= -\psi(\theta)\partial_\phi^2\varphi(\phi) + \psi(\theta)\tan \phi\partial_\phi\varphi(\phi) + \psi(\theta)\frac{l_2^2 - 1/4}{\sin^2 \phi}\varphi(\phi) + \\ &+ \varphi(\phi)\frac{k^2}{\cos^2 \phi} \left[-\partial_\theta^2\psi(\theta) + \frac{l_0^2 - 1/4}{\cos^2 \theta}\psi(\theta) + \frac{l_1^2 - 1/4}{\sin^2 \theta}\psi(\theta) \right] \end{aligned}$$

Pero $H\Psi = E\Psi$,

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\varphi(\phi)}\partial_\phi^2\varphi(\phi) + \frac{1}{\varphi(\phi)}\tan \phi\partial_\phi\varphi(\phi) + \frac{1}{\varphi(\phi)}\frac{l_2^2 - 1/4}{\sin^2 \phi}\varphi(\phi) + \\ & + \frac{1}{\psi(\theta)}\frac{k^2}{\cos^2 \phi} \left[-\partial_\theta^2\psi(\theta) + \frac{l_0^2 - 1/4}{\cos^2 \theta}\psi(\theta) + \frac{l_1^2 - 1/4}{\sin^2 \theta}\psi(\theta) \right] = E \end{aligned}$$

Si definimos;

$$\blacksquare H_\phi := -\partial_\phi^2 + \tan \phi \partial_\phi + \frac{l_2^2 - 1/4}{\sin^2 \phi}$$

¹Omitiremos el subíndice k para no cargar la notación, pero tengamos en mente que tenemos una familia uniparamétrica de hamiltonianos.

$$\blacksquare H_\theta := -\partial_\theta^2 + \frac{l_0^2 - 1/4}{\cos^2 \theta} + \frac{l_1^2 - 1/4}{\sin^2 \theta}$$

se puede reescribir como sigue (no expresamos, ahora, la dependencia explicita de cada función),

$$\frac{1}{\varphi} H_\phi \varphi + \frac{k^2}{\cos^2 \phi} \frac{1}{\psi} H_\theta \psi = E$$

Entonces,

$$\frac{1}{\psi} H_\theta \psi = \left(E - \frac{1}{\varphi} H_\phi \varphi \right) \left(\frac{k^2}{\cos^2 \phi} \right)^{-1}$$

Pero lo que tenemos son dos funciones tal que,

$$f(\theta) = g(\psi) \rightarrow \frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{dg(\psi)}{d\psi} = 0 \rightarrow f(\theta) = g(\psi) = E'$$

Por tanto,

$$\frac{1}{\psi} H_\theta \psi = E' \equiv \text{cte} \rightarrow H_\theta \psi = E' \psi \quad (3.1)$$

Entonces,

$$\left(H_\phi + \frac{k^2 E'}{\cos^2 \phi} \right) \varphi = E \varphi \quad (3.2)$$

Finalmente, si definimos (también, $M := k\sqrt{E'}$),

$$H_\phi^M := -\partial_\phi^2 + \tan \phi \partial_\phi + \frac{l_2^2 - 1/4}{\sin^2 \phi} + \frac{M^2}{\cos^2 \phi} \rightarrow H_\phi^M \varphi = E \varphi$$

podremos expresar el hamiltoniano total como:

$$H = H_\phi^M + \frac{k^2 (H_\theta - E')}{\cos^2 \phi} \quad (3.3)$$

Lo que finalmente hemos conseguido es un sistema de dos ecuaciones de autovalores, (3.2) y (3.1), una para cada variable con los (sub)hamiltonianos que previamente hemos definido. Definiremos β tal que $E' = \beta^2$.

3.3. Operadores *ladder*, *shift* y factorización.

El objetivo es encontrar operadores *ladder* (es decir, operadores que nos conecten, de algún modo, los autoestados del hamiltoniano con distintos autovalores, pero manteniéndolo dentro de la familia) y operadores *shift* (es decir, operadores que nos conecten autoestados de distintos hamiltonianos de la familia, pero manteniendo el autovalor). Estos operadores los aplicamos a las distintas funciones que componen la función total (la parte de ϕ y de θ) tal que para ciertos valores de k la aplicación de operadores escalera y desplazamiento a cualquier autovector haga que la nueva función siga siendo autovector del hamiltoniano con la misma energía, aunque “internamente” haya cambiado de autovalor del subhamiltoniano o el valor del parámetro de la familia de hamiltonianos. Esto nos permite construir dos simetrías independientes, para probar que es superintegrable. Véase la Figura 3.1 para una visualización gráfica de lo que buscamos.

3.3.1. Operadores escalera y desplazamiento.

Formalmente, vamos a dar una definición precisa de qué entendemos por estos operadores.

Definición 3.1 (Operador *ladder* o escalera). Sea H un operador. Sea $\psi_{\lambda'} \in \mathcal{H}_{\lambda'}$, siendo el último el subespacio de autovectores con autovalor $\lambda = f(\lambda')$ ². Entonces, si el operador L cumple que:

$$\begin{aligned} L_{\pm} : \mathcal{H}_{\lambda'} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\lambda' \pm 1} \\ \psi_{\lambda'} &\longmapsto \psi_{\lambda' \pm 1} = L_{\pm} \psi_{\lambda'} \end{aligned}$$

lo denominaremos como *operador escalera* o *ladder*. Generalizando,

$$\begin{aligned} L_{\pm n} : \mathcal{H}_{\lambda'} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\lambda' \pm n} \\ \psi_{\lambda'} &\longmapsto \psi_{\lambda' \pm n} = L_{\pm n} \psi_{\lambda'} \end{aligned}$$

Definición 3.2 (Operador *shift* o desplazamiento). Sea $\{H_m\}_{m \in \mathcal{I}}$ una familia de operadores. Sea $\psi_{\lambda}^m \in \mathcal{H}_{\lambda}^m$, siendo el último el conjunto de autovectores de H_m con autovalor λ . Entonces, si el operador S cumple que:

$$\begin{aligned} S_{\pm} : \mathcal{H}_{\lambda}^m &\longrightarrow \mathcal{H}_{\lambda}^{m \pm 1} \\ \psi_{\lambda}^m &\longmapsto \psi_{\lambda}^{m \pm 1} = S_{\pm} \psi_{\lambda}^m \end{aligned}$$

lo denominaremos como *operador desplazamiento* o *shift*. Generalizando,

$$\begin{aligned} S_{\pm n} : \mathcal{H}_{\lambda}^m &\longrightarrow \mathcal{H}_{\lambda}^{m \pm n} \\ \psi_{\lambda}^m &\longmapsto \psi_{\lambda}^{m \pm n} = S_{\pm n} \psi_{\lambda}^m \end{aligned}$$

Esto encaja con la idea intuitiva que presentamos atrás.

3.3.2. Condición para las simetrías.

Veamos ahora el teorema básico de este capítulo y la posterior demostración que damos. Este resultado nos da la guía teórica para encontrar las simetrías.

Teorema 3.1 (Condición suficiente para $\exists_{=2}$ simetrías). *Sea nuestro sistema (con el hamiltoniano de (3.3)). Supongamos que existen operadores “ladder” y “shift” como sigue*³,

$$\begin{aligned} L_{\pm 2n} : \mathcal{H}_{\beta}^{\theta} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\beta \pm 2n}^{\theta} \\ \psi_{\beta} &\longmapsto \psi_{\beta \pm 2n} = L_{\pm 2n} \psi_{\beta} \end{aligned}$$

²Por ejemplo, puede ser que $\lambda = C\lambda'$ y el operador afecta a λ' . Este es el caso de los operadores escalera en el momento angular y de los que vimos en el capítulo anterior con el estudio de Coulomb en S^2 . En nuestro caso será $E = f(\beta) = \beta^2$

³Modificamos ligeramente la notación que usamos en la Definición 3.2 y omitimos el autovalor, que sabemos que se mantiene invariante, y expresamos simplemente como subíndice el valor de M , que hace referencia al hamiltoniano de la familia. Reservamos ahora los superíndices para hacer referencia a los dos hamiltonianos que hemos definido para nuestro sistema.

$$\begin{aligned} S_{\pm 2m} : \mathcal{H}_M^\phi &\longrightarrow \mathcal{H}_{M\pm 2m}^\phi \\ \varphi_M &\longmapsto \varphi_{M\pm 2m} = S_{\pm 2m}\varphi_M \end{aligned}$$

Siendo $\psi_\beta \in \mathcal{H}_\beta$ cualquier un autovector de (3.1) con autovalor β^2 y $\varphi_M \in \mathcal{H}_M$ un autovector del hamiltoniano de (3.2) cuyo valor de $k\beta = M$. Entonces, si $k = m/n$ existen, dos simetrías adicionales al hamiltoniano (por tanto, existen $2 \cdot 2 - 1$ simetrías).

Demostración. Para probar que es superintegrable basta con probar que existen dos operadores independientes $\{X_i\}_{i=1,2}$ (trabajamos en dos dimensiones) tal que,

$$[H, X_i] = 0$$

Veamos que es fácil construirlos partiendo de los operadores *ladder* y *shift*. Definimos,

- $X_1 := X^+ \equiv L_{+2n}S_{+2m}$
- $X_2 := X^- \equiv L_{-2n}S_{-2m}$

De forma compacta,

$$X^\pm = L_{\pm 2n}S_{\pm 2m}$$

Veamos que estos operadores conmutan con el hamiltoniano, $\forall M, \beta, E$

$$[H, X^\pm]\varphi_M\psi_\beta = (HL_{\pm 2n}S_{\pm 2m} - L_{\pm 2n}S_{\pm 2m}H)\varphi_M\psi_\beta = (H - E)X^\pm\varphi_M\psi_\beta \quad (3.4)$$

La última igualdad se debe a que $\varphi_M\psi_\beta$ es un autovector con autovalor E (véase (3.3)) por ser un autovector del hamiltoniano total con autovalor E . Veamos $X^\pm\varphi_M\psi_\beta$.

$$X^\pm\varphi_M\psi_\beta = L_{\pm 2n}S_{\pm 2m}\varphi_M\psi_\beta = L_{\pm 2n}\psi_\beta S_{\pm 2m}\varphi_M = \psi_{\beta\pm 2n}\varphi_{M\pm 2m}$$

Pero tengamos en cuenta que usando (3.3), podemos poner H como:

$$H = H_\phi^M + \frac{k^2(H_\theta - E')}{\cos^2 \phi} = H_\phi + \frac{M^2}{\cos^2 \phi} + \frac{k^2(H_\theta - \beta^2)}{\cos^2 \phi}$$

Si expresamos H_ϕ^M en función de $H_\phi^{M\pm 2m}$

$$\begin{aligned} H &= H_\phi + \frac{(M \pm 2m)^2}{\cos^2 \phi} - \frac{(2m)^2}{\cos^2 \phi} \mp \frac{4Mm}{\cos^2 \phi} + \frac{k^2(H_\theta - \beta^2)}{\cos^2 \phi} = \\ &= H_\phi^{M\pm 2m} - \frac{(2m)^2}{\cos^2 \phi} \mp \frac{4Mm}{\cos^2 \phi} + \frac{k^2(H_\theta - \beta^2)}{\cos^2 \phi} \end{aligned}$$

Pero, entonces tendremos que $HX^\pm\varphi_M\psi_\beta$ que es igual a $H\psi_{\beta\pm 2n}\varphi_{M\pm 2m}$ nos queda,

$$H_\phi^{M\pm 2m}\varphi_{M\pm 2m}\psi_{\beta\pm 2n} - \left(\frac{(2m)^2}{\cos^2 \phi} \mp \frac{4Mm}{\cos^2 \phi} \right) \psi_{\beta\pm 2n}\varphi_{M\pm 2m} + \varphi_{M\pm 2m} \frac{k^2(H_\theta - \beta^2)}{\cos^2 \phi} \psi_{\beta\pm 2n}$$

Luego,

$$HX^\pm\varphi_M\psi_\beta = \left(E - \frac{(2m)^2}{\cos^2 \phi} \mp \frac{4Mm}{\cos^2 \phi} + \frac{k^2(\beta^2 \pm 4n\beta + 4n^2 - \beta^2)}{\cos^2 \phi} \right) \psi_{\beta\pm 2n}\varphi_{M\pm 2m}$$

Recordemos que $M = k\beta$ y si definimos $k := m/n$, por hipótesis del teorema, tendremos que;

$$HX^\pm \varphi_M \psi_\beta = E \varphi_{M \pm 2m} \psi_{\beta \pm 2n}$$

Sin más que sustituir en (3.4) tendremos que el conmutador es cero. ■

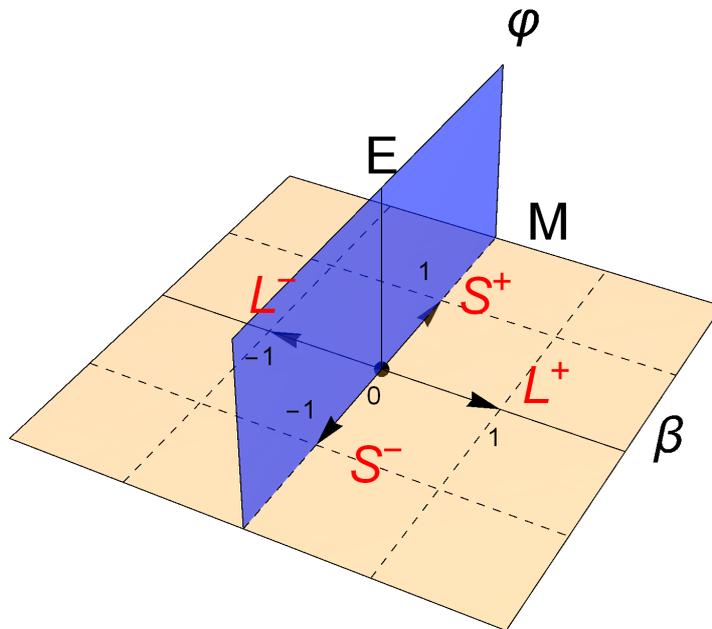


Figura 3.1: Operadores escalera y desplazamiento en el plano $\beta - M - E$, siendo β el valor asociado a los autovalores y M a la familia uniparamétrica. El plano $M - E$ está relacionado con los autovalores y familia de la parte φ de la función total (el autovalor E también es el de la función total).

Nota 6. Podemos razonar de manera inversa y encontrar que valores de k deben cumplirse para que el conmutador sea cero. Además, sería una manera de simplificar los cálculos que hemos visto en la demostración. Para que el conmutador sea cero, como hemos visto arriba, debemos de tener que $HX^\pm \Psi = EX^\pm \Psi$, y como hemos visto antes, eso implica que:

$$\frac{-(M + m)^2 + M^2 + k^2((\beta + n)^2 - \beta^2)}{\cos^2 \phi} = 0$$

Recordando que $M = k\beta$, tendremos,

$$(M + m)^2 = k^2(\beta + n)^2 = (M + kn)^2$$

Esto tendría dos soluciones,

$$\begin{aligned} (M + m) &= (M + kn) \\ (M + m) &= -(M + kn) \end{aligned}$$

El problema de la segunda ecuación es que solo sería válida para unos determinados ψ_β , φ_M y debería serlo para todos, ver demostración arriba. Por tanto, la solución será la primera y equivale,

$$k = \frac{m}{n}$$

Esta solución puede verse como buscar operadores *shift* y *ladder* de tal manera que M resulte invariante.

3.3.3. Introducción teórica a la factorización.

Veamos ahora como construir operadores *shift* o desplazamiento. Para ello es esencial factorizar el hamiltoniano, que es lo que vamos a probar en la siguiente proposición. La idea básica es la siguiente: si factorizamos el hamiltoniano como se ve en (3.5), tendremos que los operadores de la factorización son precisamente los operadores desplazamiento, ya que la factorización tiene “entrelazados” ambos operadores de tal manera que al aplicar esos operadores funciona como en la Definición 3.2.

Proposición 3.2. *Sea $\{H_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ una familia de hamiltonianos tal que $\forall m \in \mathbb{Z}$ se tiene que:*

$$H_m = A_m^+ A_m^- + \lambda_m = A_{m-1}^- A_{m-1}^+ + \lambda_{m-1} \quad (3.5)$$

Entonces, A_m^\pm son operadores desplazamiento (véase Definición 3.2) cumpliendo,

$$A_m^- : \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_{m+1}$$

$$A_m^+ : \mathcal{H}_{m+1} \rightarrow \mathcal{H}_m$$

Demostración. Sea $\psi_E^{m+1} \in \mathcal{H}_E^{m+1}$. Veamos, primero, el caso de A_m^+ . Usando la propiedad de la proposición,

$$H_m A_m^+ \psi_E^{m+1} = A_m^+ A_m^- A_m^+ \psi_E^{m+1} + \lambda_m A_m^+ \psi_E^{m+1} = A_m^+ (A_m^- A_m^+ + \lambda_m) \psi_E^{m+1}$$

Pero si usamos la hipótesis de la proposición (véase (3.5)),

$$A_m^+ (H_{m+1}) \psi_E^{m+1} = E A_m^+ \psi_E^{m+1}$$

Luego,

$$H_m (A_m^+ \psi_E^{m+1}) = E (A_m^+ \psi_E^{m+1})$$

Es decir, es autovector de H_m con autovalor E y, por tanto, cumple la Definición 3.2. Procedemos del mismo modo con A_m^- ,

$$H_{m+1} A_m^- \psi_E^m = A_m^- (A_m^+ A_m^- + \lambda_m) \psi_E^m = A_m^- (H_m) \psi_E^m$$

Finalmente,

$$H_{m+1} (A_m^- \psi_E^m) = E (A_m^- \psi_E^m)$$

Tal como queríamos probar. ■

Llamaremos a las relaciones del tipo (3.5), *relaciones de entrelazado*. Notemos que aquí hemos definido los operadores generalizados que definimos en las Definiciones 3.2 y 3.1 a partir de los operadores L o S “simples”.

Pasemos ahora a una propiedad importante que tiene los hamiltonianos entrelazados.

Corolario. 3.2.1. Podemos obtener autovectores y autovalores del espectro discreto de nuestro sistema utilizando los operadores de la proposición anterior si conocemos los estados fundamentales de los hamiltonianos de la familia.

En efecto, supongamos que ψ_m^0 son los estados fundamentales de los hamiltonianos de la familia. Estos los definiremos como aquellos que cumplen que $A_m^- \psi_m^0 = 0$, por ende,

$$H\psi_m^0 = (A_m^+ A_m^- + \lambda_m)\psi_m^0 = 0 + \lambda_m \psi_m^0 = \lambda_m \psi_m^0$$

Es decir, los escalares que aparecen en la factorización son las energías de los estados fundamentales. Entonces, si definimos,⁴

$$\prod_{i=0}^m A_i^+ := A_0^+ \cdots A_m^+ \quad m \in \mathbb{N} \cup 0$$

Por otra parte tengamos en cuenta que las relaciones (3.5) puede expresarse como sigue,

$$A_m^- H_m = H_{m+1} A_m^- \quad A_m^+ H_{m+1} = H_m A_m^+ \quad (3.6)$$

Veamos, en primera instancia, que;

$$H_0 \prod_{i=0}^m A_i^+ = \left(\prod_{i=0}^m A_i^+ \right) H_{m+1} \quad (3.7)$$

Usando un razonamiento por inducción;

i) Si $m=0$,

$$H_0 \prod_{i=0}^0 A_i^+ = H_0 A_0^+ = A_0^+ H_1$$

ii) Si se cumple hasta $m=n$

$$H_0 \prod_{i=0}^{n+1} A_i^+ = \left(H_0 \prod_{i=0}^n A_i^+ \right) A_{n+1}^+$$

Usando ahora la hipótesis de inducción y las relaciones (3.6),

$$H_0 \prod_{i=0}^{n+1} A_i^+ = \left(\prod_{i=0}^n A_i^+ \right) H_{n+1} A_{n+1}^+ = \left(\prod_{i=0}^{n+1} A_i^+ \right) H_{(n+1)+1}$$

⁴Notemos que es necesario definirlo porque trabajamos en un espacio cuyos elementos son, en general, no conmutativos ante la operación de *composición* de operadores, luego es necesario definir el orden en el que se llevan a cabo las operaciones.

Y queda probado (3.7). Con esto es directo obtener lo que hemos propuesto en el corolario, i.e., veamos que

$$\psi_0^m = \prod_{i=0}^{m-1} A_i^+ \psi_m^0$$

Es decir,

$$H_0 \prod_{i=0}^{m-1} A_i^+ \psi_m^0 = \left(\prod_{i=0}^{m-1} A_i^+ \right) H_m \psi_m^0 = \left(\prod_{i=0}^{m-1} A_i^+ \right) E_m^0 \psi_m^0 = E_m^0 \prod_{i=0}^{m-1} A_i^+ \psi_m^0$$

Luego, tendríamos los autovectores asociados al espectro discreto y los autovalores serían los mismos que los del estado fundamental de los autovalores de los hamiltonianos la jeraquía. Es decir,

$$H_0 \psi_0^m = E_m^0 \psi_0^m \rightarrow E_m^0 = E_0^m = \lambda_m$$

Por tanto, podemos obtener los autovalores de la energía de manera algebraica. Podemos ver el proceso en la Figura 3.2.

Nota 7. Otra manera de probar esto, de una forma más sencilla, sería utilizar las relaciones de la tesis de la Proposición 3.2 (y no las hipótesis, como hemos hecho aquí), es decir, utilizar directamente que los operadores A_m^+ aplicados consecutivamente van cambiando los autovectores a distintos hamiltonianos conservando el autovalor. Lo hemos hecho de esta forma para presentar (y utilizar) las relaciones (3.6), además de la notación del producto que hemos usado, que nos serán de utilidad en lo que sigue.

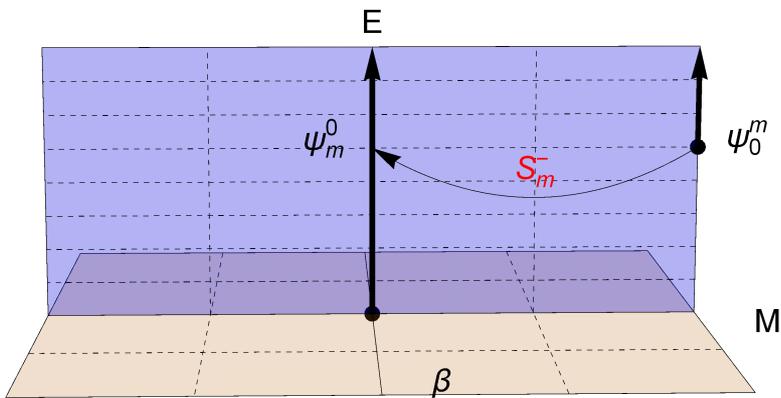


Figura 3.2: Ilustración del proceso de obtención de los estados excitados del hamiltoniano base de la familia a partir de los fundamentales de otros hamiltonianos de la familia.

Capítulo 4

Análisis cuántico del hamiltoniano $U(3)$ generalizado.

Una vez introducido parte del marco teórico necesario, vamos a empezar a particularizar esos resultados en nuestro sistema y a buscar los operadores que necesitamos en nuestro caso. Empezaremos con los operadores *ladder* brevemente, después dedicaremos parte del capítulo a deducir resultados teóricos sobre los operadores desplazamiento y aplicarlo a nuestro caso.

4.1. Operador escalera Ξ^\pm

Como vimos en la sección anterior, necesitamos operadores escalera para nuestro subhamiltoniano H_θ . Este hamiltoniano es un hamiltoniano tipo *Pöschl-Teller* trigonométrico o también llamado, *Scarf*, es decir,

$$H_\theta = -\partial_\theta^2 + \frac{l_0^2 - 1/4}{\cos^2 \theta} + \frac{l_1^2 - 1/4}{\sin^2 \theta}$$

sabemos que los operadores escalera son, [10]:

$$\Xi_\beta^\pm := \pm(\beta \pm 1) \sin(2\theta) \partial_\theta + \beta(\beta \pm 1) \cos(2\theta) - l_0^2 + l_1^2$$

La acción de estos operadores es;

$$\begin{aligned} \Xi_\beta^+ : \mathcal{H}_\beta^\theta &\longrightarrow \mathcal{H}_{\beta+2}^\theta & \Xi_\beta^- : \mathcal{H}_{\beta+2}^\theta &\longrightarrow \mathcal{H}_\beta^\theta \\ \psi_\beta &\longmapsto \psi_{\beta+2} = \Xi_\beta^+ \psi_\beta & \psi_{\beta+2} &\longmapsto \psi_\beta = \Xi_\beta^- \psi_{\beta+2} \end{aligned}$$

Como comentamos, podemos construir operadores generalizados en el sentido que se componen de varios operadores cuya variación de autovalores es menor, así definimos¹;

$$\begin{aligned} \Xi_{\beta \rightarrow \beta+2n}^+ &:= \prod_{i=2(n-1)}^0 \Xi_{\beta+i}^+ = \Xi_{\beta+2(n-1)}^+ \cdots \Xi_\beta^+ \\ \Xi_{\beta \rightarrow \beta-2n}^- &:= \prod_{i=2n}^2 \Xi_{\beta-i}^- = \Xi_{\beta-2n}^- \cdots \Xi_{\beta-2}^- \end{aligned}$$

¹Ver Corolario 3.2.1 para la definición que damos a productorio en el sentido de composición de operadores que no necesariamente conmutan.

Se sigue de manera directa de lo comentado sobre la acción de Ξ_{β}^{\pm} , la acción de estos operadores:

$$\begin{aligned} \Xi_{\beta \rightarrow \beta+2n}^+ : \mathcal{H}_{\beta}^{\theta} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\beta+2n}^{\theta} & \Xi_{\beta \rightarrow \beta-2n}^- : \mathcal{H}_{\beta}^{\theta} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\beta-2n}^{\theta} \\ \psi_{\beta} &\longmapsto \psi_{\beta+2n} = \Xi_{\beta \rightarrow \beta+2n}^+ \psi_{\beta} & \psi_{\beta} &\longmapsto \psi_{\beta-2n} = \Xi_{\beta \rightarrow \beta-2n}^- \psi_{\beta} \end{aligned}$$

Sabiendo esto, procedamos a la definición y estudio del operador que utilizaremos más adelante. ****

Definición 4.1 (Operadores *free-index*). Sea el hamiltoniano $H_{\theta} = -\partial_{\theta}^2 + \frac{l_0^2 - 1/4}{\cos^2 \theta} + \frac{l_1^2 - 1/4}{\sin^2 \theta}$. Los operadores escalera *free-index* los definiremos,

$$\begin{aligned} \forall \beta \quad \Xi^+ \psi_{\beta} &:= \Xi_{\beta}^+ \psi_{\beta} \\ \forall \beta \quad \Xi^- \psi_{\beta} &:= \Xi_{\beta-2}^+ \psi_{\beta} \end{aligned}$$

Como ya comentamos en el epígrafe anterior, podemos definir operadores escalera que suban varios autovalores. Estos los definimos como sigue,

$$\begin{aligned} \forall \beta \quad (\Xi^+)^n \psi_{\beta} &:= \Xi_{\beta \rightarrow \beta+2n}^+ \psi_{\beta} \\ \forall \beta \quad (\Xi^-)^n \psi_{\beta} &:= \Xi_{\beta \rightarrow \beta-2n}^- \psi_{\beta} \end{aligned}$$

Demostremos primero un lema que nos será de utilidad a la hora de estudiar conmutadores,

Lema 4.1. Sean $A, B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dos operadores tal que su conmutador es,

$$[A, B] = \alpha B$$

Entonces,

$$[A, B^n] = n\alpha B^n$$

Demostración. Razonamos por inducción,

- i) Si $n = 1$, por hipótesis del lema se da.²
- ii) Si se da hasta $n - 1 \in \mathbb{N}$, con $n > 1$, entonces (utilizando las propiedades de los conmutadores)

$$[A, B^n] = [A, BB^{n-1}] = B[A, B^{n-1}] + [A, B]B^{n-1}$$

Utilizando ahora la hipótesis de inducción (primer sumando) y la hipótesis del lema (segundo sumando).

$$B[A, B^{n-1}] + [A, B]B^{n-1} = B(n-1)\alpha B^{n-1} + \alpha BB^{n-1} = n\alpha B^n$$

■

²También podríamos empezar con $n = 2$ (el primer caso que nos interesaría), ahí: $[A, B^2] = [A, BB] = B[A, B] + [A, B]B = 2\alpha B^2$

Proposición 4.2. *El conmutador de los operadores previamente definidos con $\sqrt{H_\theta}$ es:*

$$\left[\sqrt{H_\theta}, (\Xi^\pm)^n \right] = \pm 2n (\Xi^\pm)^n$$

Demostración. Empecemos la prueba para $n=1$, usando la Definición 4.1

$$\forall \beta \quad \left[\sqrt{H_\theta}, \Xi^\pm \right] \psi_\beta = ((\beta \pm 2)\Xi^\pm - (\beta)\Xi^\pm) \psi_\beta = \pm 2\Xi^\pm \psi_\beta$$

Ergo,

$$\left[\sqrt{H_\theta}, \Xi^\pm \right] = \pm 2\Xi^\pm$$

Por tanto, vemos que se cumple la hipótesis del Lema 4.1, luego podemos aplicarlo (con $\alpha = \pm 2$) y obtenemos:

$$\left[\sqrt{H_\theta}, (\Xi^\pm)^n \right] = \pm 2n (\Xi^\pm)^n$$

■

4.2. Factorización de H_ϕ^M .

Lo que deseamos en esta sección es encontrar una factorización de H_ϕ^M , i.e., encontrar M^+, M^-, μ tal que,

$$H_\phi^M = M^+ M^- + \mu = -\partial_\phi^2 + \tan(\phi) \partial_\phi + \sec^2(\phi) (\beta k)^2 + ((l_2)^2 - 1/4) \csc^2(\phi)$$

Para ello vamos a proponer de manera *detallada* un método para encontrarlos, que también serviría para otros sistemas.

4.2.1. Un procedimiento sistemático para obtener factorizaciones.

Primero, busquemos operadores genéricos del tipo (los operadores de orden finito que comentamos en el capítulo anterior),

$$M^+ = \sum_{j \in \mathbb{N}} g_j(\phi) \partial_\phi^j + \sum_i a_i f_i(\phi)$$

$$M^- = \sum_{j \in \mathbb{N}} h_j(\phi) \partial_\phi^j + \sum_i b_i f_i(\phi)$$

Si hiciéramos la composición de operadores de los sumatorios de derivadas parciales, tendríamos,

$$\sum_{j, j'} g_j(\phi) h_{j'}(\phi) \partial_\phi^{j+j'}$$

Pero nuestro hamiltoniano tiene orden máximo en las derivadas segundas, por tanto, $j + j' \leq 2$. Pero como $j, j' \in \mathbb{N}$ tendremos también que, $2 \leq j + j'$. Por tanto³,

$$g_j(\phi) = h_j(\phi) = 0 \quad \forall j > 1$$

³Podríamos pensar que basta con que solo sean las funciones de un operador, por ejemplo, $g_j(\phi) = 0$ con $j > 1$. Pero si existiera algún $h_j(\phi)$ con $j > 1$ distinto de cero, tendríamos que al ser g_1 no idénticamente nulo, ∂_ϕ^k con $k > 2$.

Por otro lado, si hacemos ahora el producto de los términos con derivadas parciales queda:

$$g_1(\phi)h_1(\phi) = -1$$

Aquí buscamos cierta “simetría” en los operadores para después imponer que cumplan las relaciones de entrelazado. Entonces, parece razonable suponer que $|g_1| = |h_1|$, luego, $g_1(\phi) = 1 = -h_1(\phi)$. Por tanto, nuestros operadores tendrán la forma de,

$$M^+ = \partial_\phi + \sum_i a_i f_i(\phi)$$

$$M^- = -\partial_\phi + \sum_i b_i f_i(\phi)$$

El problema sería ver qué funciones $f_i(\phi)$ son las adecuadas. Para ello tenemos que observar qué hamiltoniano queremos factorizar. En nuestro caso tenemos que debe cumplirse que,

$$\begin{aligned} \blacksquare & -\sum_k a_k f_k(\phi) \partial_\phi + \sum_{k'} b_{k'} f_{k'}(\phi) \partial_\phi = \tan(\phi) \partial_\phi \\ \blacksquare & \sum_{k',k} b_{k'} f_{k'}(\phi) a_k f_k(\phi) + \sum_{k,k'} b_{k'} \partial_\phi(f_{k'}(\phi)) = \frac{l_2^2 - 1/4}{\sin^2 \phi} + \frac{(k\beta)^2}{\cos^2 \phi} \end{aligned}$$

Por tanto, parece razonable utilizar $f_i = \tan(\phi), \cot(\phi), \sec(\phi), \csc(\phi)$. El término de $\cot(\phi)$ aparece porque $\cot(\phi)' = -\csc(\phi)^2$ y también, $\tan(\phi)' = \sec(\phi)^2$. Para no perder generalidad, añadiremos también otras funciones trigonométricas “básicas” y términos constantes. Utilizando la variable x por comodidad nos queda:

$$M^+ = A\partial_x + (a \cos(x) + b \sin(x) + c \sec(x) + d \csc(x) + l \cot(x) + y \tan(x))$$

$$M^- = B\partial_x + (e \cos(x) + f \sin(x) + g \sec(x) + h \csc(x) + m \cot(x) + z \tan(x))$$

Lo que tenemos que hacer ahora es calcular cuanto vale $M^+M^- + \mu$, deducir las ecuaciones a resolver (aparecen varias funciones del tipo f_i en las ecuaciones, hay que ver cómo influyen en la determinación de los coeficientes) e imponer que sea igual a H_ϕ^M (puede que no haya solución, en ese caso deberíamos añadir las funciones del tipo f_i a nuestros operadores de prueba).

Por lo comentado arriba, tendremos que el coeficiente de la derivada segunda es -1. Veamos qué ocurre con el de la derivada primera,

$$(e - a) \cos x - A + (f - b) \sin x + B + (g - c) \sec x + (h - d) \csc x + (m - l) \cot x + \tan x(z - y) = \tan x$$

Para poder encontrar los coeficientes, tenemos que resolver esta ecuación. Nos será útil la siguiente proposición.

Proposición 4.3. *Las funciones $\{\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x), \csc(x), \sec(x), 1\}$ son linealmente independientes, i.e., si:*

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \alpha + \beta \cos(x) + \gamma \cot(x) + \delta \csc(x) + \mu \tan(x) + \rho \sin(x) + \epsilon \sec(x) = 0$$

Entonces, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \rho, \epsilon$ son cero.

Demostración. Notemos que para $x = 0$, no están definidas ciertas funciones (de ahí que $x \in \mathcal{D}$ y no $x \in \mathbb{R}$), pero veamos cuanto vale el límite en $x \rightarrow 0$. El límite total tiene que ser cero, pero notemos que hay dos funciones con límites no finitos, por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\gamma \cot(x) + \delta \csc(x)) = 0$$

Operando,

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\gamma \cot(x) + \delta \csc(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\delta + \gamma \cos(x)}{\sin(x)}$$

La condición necesaria para que ese límite sea cero es que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\delta + \gamma \cos(x)) = 0 \rightarrow \delta = -\gamma$$

Pero también es condición suficiente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \delta \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \delta \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^2)}{x + O'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \delta \frac{\frac{x}{2} + \frac{O(x^2)}{x^2}x}{1 + \frac{O'(x)}{x}} = 0$$

Donde hemos usado los polinomios y el teorema de Taylor. Ahora bien, este no es el único punto donde no están definidos. Si $x \rightarrow \pi$ tendremos como condición necesaria,

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\delta + \gamma \cos(x)) = 0 \rightarrow \delta = \gamma$$

De lo que deducimos que necesariamente, $\delta = \gamma = 0$. Si evaluamos el l.h.s., ahora sí está definido, en $x = 0$ tendremos,

$$\alpha + \beta + \epsilon = 0$$

Si evaluamos la derivada,

$$\mu + \rho = 0$$

Seguimos con el mismo proceso en otros puntos y poniendo las ecuaciones anteriores,

$$\alpha + \beta + \epsilon = 0; \quad \mu + \rho = 0; \quad \epsilon - \beta = 0; \quad 2\mu - \rho = 0; \quad \beta + 5\epsilon = 0$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius es trivial ver que la única solución es que todos los coeficientes sean cero. ■

Utilizando la proposición anterior, es claro que los coeficientes deben cumplir que,

$$A = B; \quad b = f; \quad c = g; \quad d = h; \quad a = e; \quad y = z - 1; \quad l = m;$$

Esto simplifica notablemente a los operadores. Ahora tenemos que ajustar los términos que no tienen derivada parcial. Estos términos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
& B^2 + \cos(x)(2Be + 2ef \sin(x) + 2em \cot(x) + 2fm + f) + 2Bf \sin(x) + \\
& \sec(x)(2Bg + 2gh \csc(x) + 2gz \tan(x) + 2hz - h) + 2Bh \csc(x) + 2Bm \cot(x) + \\
& B(z - 1) \tan(x) + Bz \tan(x) + e^2 \cos^2(x) + 2eg + 2eh \cot(x) + e(z - 1) \sin(x) + \\
& ez \sin(x) - e \sin(x) + f^2 \sin^2(x) + 2fg \tan(x) + 2fh + f(z - 1) \sin(x) \tan(x) + \\
& fz \sin(x) \tan(x) + (g^2 + z) \sec^2(x) + 2gm \csc(x) + h^2 \csc^2(x) + 2hm \cot(x) \csc(x) \\
& - h \cot(x) \csc(x) + \mu + m^2 \cot^2(x) - m \csc^2(x) + m(z - 1) + mz + (z - 1)z \tan^2(x) = \\
& \sec^2(\phi)(\beta k + n)^2 + ((l_2 + n)^2 - 1/4) \csc^2(\phi)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Ahora bien, que tengamos un sumatorio de funciones a un lado y al otro de la igualdad no implica necesariamente que debamos igualar coeficientes. En este caso no ocurrirá como en el caso anterior que todas las funciones que aparecían eran linealmente independientes. Esto es trivial si consideramos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Probemos que $\{1, \sin(x)^2, \cos(x)^2\}$ no son linealmente independientes, i.e., son linealmente dependientes. Si tenemos,

$$\alpha \sin(x)^2 + \beta \cos(x)^2 + \gamma = 0$$

Entonces,

$$\alpha + (\beta - \alpha) \cos(x)^2 + \gamma = 0$$

Luego, si hacemos $\alpha = -\gamma$, $\beta = \alpha$ tendremos que la expresión es idénticamente cero, los coeficientes no necesariamente nulos. Luego no son linealmente independientes y la clave está en las identidades trigonométricas.

Por tanto, deberemos tener en cuenta todas las relaciones trigonométricas “relevantes” para ver cuales son las funciones linealmente independientes. Habiendo hecho eso⁴, pasemos a expresar la proposición que usaremos más adelante.

Proposición 4.4. *El conjunto de funciones,*

$$C = \{1, \cos, \tan \sec, \cot \csc, \sec^2, \csc^2, \sin, \tan, \csc, \cot, \sec, \sin \cos, \sin^2\}$$

es parte libre, i.e., las funciones son linealmente independientes.

Demostración. Nos será útil, por el tamaño de la expresión, definir la siguiente función,

$$\begin{aligned}
F(x) := & \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \alpha_{10} \tan x \sec x + \alpha_{11} \cot x \csc x + \alpha_{12} \sec^2 x + \alpha_{13} \csc^2 x + \\
& + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \tan x + \alpha_4 \csc x + \alpha_5 \cot x + \alpha_6 \sec x + \alpha_7 \sin x \cos x + \alpha_8 \sin^2 x
\end{aligned}$$

Tenemos que probar que si

$$F(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}$$

⁴De hecho, si intentáramos probar que son linealmente independientes y no lo son, nos aparecería una identidad trigonométrica.

Entonces, todos los coeficientes son nulos. Como es $\forall x \in \mathcal{D}$, empecemos calculando los límites en $0, \pi$. Hay sumandos cuyo límite no es necesariamente finito, estos son:

$$\alpha_4 \csc x + \alpha_5 \cot x + \alpha_{11} \cot x \csc x + \alpha_{13} \csc^2 x = \frac{\alpha_4 \sin x + \alpha_5 \sin x \cos x + \alpha_{11} \cos x + \alpha_{13}}{\sin^2 x}$$

La condición necesaria para que ese límite sea finito, es que el numerador tienda a cero. Esto implica

$$x \rightarrow 0; \quad \alpha_{11} = -\alpha_{13} \quad x \rightarrow \pi; \quad \alpha_{11} = \alpha_{13}$$

Por tanto, $\alpha_{11} = \alpha_{13} = 0$. Si ahora el denominador es $\sin x$, tendríamos como nueva condición necesaria,

$$x \rightarrow 0; \quad \alpha_4 = -\alpha_5 \quad x \rightarrow \pi; \quad \alpha_4 = \alpha_5$$

Por tanto, $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$. Ahora tendremos que,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_{12} + \alpha_6 \\ 0 &= \lim_{x \rightarrow \pi} F(x) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_{12} - \alpha_6 \end{aligned}$$

Por lo que deducimos que,

$$\alpha_0 = -\alpha_{12}; \quad \alpha_1 = -\alpha_6$$

Otro punto problemático es $\pm\pi/2$. Procediendo de manera análoga es directo comprobar que tendríamos,

$$\alpha_{10} = 0; \alpha_{12} = 0; \alpha_6 = 0; \alpha_3 = 0;$$

Calculando los límites,

$$0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} F(x) = \alpha_2 + \alpha_8 \quad 0 = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} F(x) = \alpha_8 - \alpha_2$$

Por lo que deducimos que, $\alpha_2 = \alpha_8 = 0$. Finalmente tenemos,

$$F(x) = \alpha_7 \sin(x) \cos(x)$$

Pero de aquí es evidente que al evaluar en un punto donde $\sin(x) \cos(x) \neq 0$, tendremos que $\alpha_7 = 0$. Por tanto, todos los coeficientes son cero y queda demostrado. ■

Utilizando ahora esta proposición solo tendríamos que expresar todas las funciones de (4.1) como una combinación lineal de las funciones que aparecen en la Proposición 4.4. Esto es posible si tenemos en cuenta las siguientes identidades trigonométricas.

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x), \sin(x) \tan(x) = \sec(x) - \cos(x), \cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$$

$$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1, \cos(x) \cot(x) = \csc(x) - \sin(x), \csc(x) \sec(x) = \tan(x) + \cot(x)$$

Aplicando ahora la Proposición 4.4 obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} (2ef) = 0 \\ (f^2 - e^2) = 0 \\ (2gz) = 0 \\ (2hm - h) = 0 \\ (2Be + 2fm - 2fz + 2f) = 0 \\ (2Bf - 2em + 2ez - 2e) = 0 \\ (2Bh + 2em + 2gm) = 0 \\ (2Bm + 2eh + 2gh) = 0 \\ (2Bz - B + 2fg + 2gh) = 0 \\ (2Bg + 2fz - f + 2hz - h) = 0 \\ (g^2 + z^2) = (\beta k)^2 \\ (h^2 + m^2 - m) = (l_2)^2 - \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos que $e = f = 0$. Lo cual simplifica nuestras ecuaciones en gran medida:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2gz) = 0 \\ (2hm - h) = 0 \\ (2Bm + 2gh) = 0 \\ (2Bz - B + 2gh) = 0 \\ (2Bg + 2hz - h) = 0 \\ (g^2 + z^2) = (\beta k)^2 \\ (h^2 + m^2 - m) = (l_2)^2 - \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

En la primera ecuación aparece la condición de $g = 0$ o $z = 0$ y ambos no pueden ser cero, porque debe cumplirse la penúltima ecuación. Algo similar pasa con la segunda ecuación, $h = 0$ o $m = 1/2$, pero debemos mantener uno sin fijar para que se cumpla la última ecuación. Esto nos da 2^2 combinaciones. Por otro lado, y aunque no aparece en las ecuaciones de arriba, ajustamos el valor de μ para que los términos independientes sean nulos. Utilizando este resultado podemos probar que las únicas soluciones posibles (dadas nuestras hipótesis) son:

$$\left\{ \begin{array}{l} g = 0 \\ h = 0 \\ B = 0 \\ (z^2) = (\beta k)^2 \\ (m^2 - m) = (l_2)^2 - \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos 4 soluciones.

$$z = \pm(\beta k) \quad m = \frac{1}{2}(\pm 2l_2 + 1)$$

Y las cuatro nos conducen al mismo resultado,

$$M^+M^- + \mu = H_\phi^{k\beta} = -\partial_\phi^2 + \tan \phi \partial_\phi + \frac{l_2^2 - 1/4}{\sin^2 \phi} + \frac{(k\beta)^2}{\cos^2 \phi}$$

4.2.2. Relaciones de entrelazado.

Todas las soluciones nos dan la misma factorización del hamiltoniano. Pero no obtenemos las mismas relaciones de entrelazado. Lo relevante ahora (ver Proposición 3.2) es analizar que ocurre con:

$$M^-M^+ + \mu$$

Ahora cada solución nos dará un resultado, por tanto, habrá diferencias en los operadores *shift*.

Solución 1.

Si tomamos:

$$m = \frac{1}{2}(-2l_2 + 1) \quad z = \beta k;$$

Entonces,

$$\begin{aligned} M^+F(x) &= F'(x) + F(x)(\beta k - 1) \tan(x) + \frac{1}{2}(1 - 2l_2)F(x) \cot(x) \\ M^-F(x) &= -F'(x) + F(x) \tan(x)(\beta k) + \frac{1}{2}F(x)(-2l_2 + 1) \cot(x) \\ \mu &= \frac{1}{4}(2\beta k + 2l_2 - 3)(2\beta k + 2l_2 - 1) \end{aligned}$$

Finalmente, cuando hagamos la operación $(M^-M^+ + \mu)F(x)$ tendremos que el factor que multiplica a $F(x) \csc^2(x)$, que denominamos $C(l_2)$, tiene que tener una forma similar a la del hamiltoniano original. Para ello lo que hacemos es buscar un p que resuelva⁵ la ecuación

$$C(l_2) = (l_2 - p)^2 - 1/4$$

Entonces, hecho esto, podremos encontrar el nuevo hamiltoniano e identificar que ocurre con $k\beta$ y l_2 .

$$M^-M^+ + \mu = -\partial_x^2 + \tan(x)\partial_x + (\beta k - 1)^2 \sec^2(x) + \frac{1}{4}(4((l_2 - 1)^2 - 1) \csc^2(x))$$

Es decir, que sería el mismo hamiltoniano, pero haciendo los cambios:

- $\beta k \rightarrow \beta k - 1$
- $l_2 \rightarrow l_2 - 1$

⁵Obviamente hay dos soluciones, una es p y la otra será $p' = 2l_2 - p$. Nos quedamos con aquella que no depende de l_2 .

Solución 2.

Si tomamos:

$$m = \frac{1}{2}(+2l_2 + 1) \quad z = \beta k;$$

Entonces,

$$M^+ F(x) = F'(x) + F(x)(\beta k - 1) \tan(x) + \frac{1}{2}(2l_2 + 1)F(x) \cot(x)$$

$$M^- F(x) = -F'(x) + \beta k F(x) \tan(x) + \frac{1}{2}(2l_2 + 1)F(x) \cot(x)$$

$$\mu = \frac{1}{4}(-2\beta k + 2l_2 + 1)(-2\beta k + 2l_2 + 3)$$

Finalmente tendremos que,

$$M^- M^+ + \mu = -\partial_x^2 + \tan(x)\partial_x + (\beta k - 1)^2 \sec^2(x) + \frac{1}{4}(4((l_2 + 1)^2 - 1) \csc^2(x))$$

Es decir, el hamiltoniano tendría la misma forma, pero haciendo los cambios:

- $\beta k \rightarrow \beta k - 1$
- $l_2 \rightarrow l_2 + 1$

Solución 3.

Si tomamos:

$$m = \frac{1}{2}(+2l_2 + 1) \quad z = -\beta k;$$

Entonces,

$$M^+ F(x) = F'(x) + F(x)(\beta(-k) - 1) \tan(x) + \frac{1}{2}(2l_2 + 1)F(x) \cot(x)$$

$$M^- F(x) = -F'(x) - \beta k F(x) \tan(x) + \frac{1}{2}(2l_2 + 1)F(x) \cot(x)$$

$$\mu = \frac{1}{4}(2\beta k + 2l_2 + 1)(2\beta k + 2l_2 + 3)$$

Finalmente tendremos que,

$$M^- M^+ + \mu = -\partial_x^2 + \tan(x)\partial_x + (\beta k + 1)^2 \sec^2(x) + \frac{1}{4}(4((l_2 + 1)^2 - 1) \csc^2(x))$$

De nuevo, obtenemos el mismo tipo de hamiltoniano, pero haciendo los cambios:

- $\beta k \rightarrow \beta k + 1$
- $l_2 \rightarrow l_2 + 1$

Solución 4.

Si tomamos:

$$m = \frac{1}{2}(-2l_2 + 1) \quad z = -\beta k;$$

Entonces,

$$M^+ F(x) = F'(x) + F(x)(\beta(-k) - 1) \tan(x) + \frac{1}{2}(1 - 2l_2)F(x) \cot(x)$$

$$M^- F(x) = -F'(x) - \beta k F(x) \tan(x) + \frac{1}{2}(1 - 2l_2)F(x) \cot(x)$$

$$\mu = \frac{1}{4}(-2\beta k + 2l_2 - 3)(-2\beta k + 2l_2 - 1)$$

Finalmente tendremos que,

$$M^- M^+ + \mu = -\partial_x^2 + \tan(x)\partial_x + (\beta k + 1)^2 \sec^2(x) + \frac{1}{4}(4((l_2 - 1)^2 - 1) \csc^2(x))$$

Como en los casos anteriores, misma estructura en el hamiltoniano pero haciendo los cambios,

- $\beta k \rightarrow \beta k + 1$
- $l_2 \rightarrow l_2 - 1$

En resumen,

- Si $m = \frac{1}{2}(\pm 2l_2 n + 1)$, el coeficiente l_2 del hamiltoniano cambia como $l_2 \rightarrow l_2 \pm 1$
- Si $z = \pm(\beta k)$, el coeficiente βk del hamiltoniano cambia como $\beta k \rightarrow \beta k \mp 1$

4.2.3. Proposición generalizada.

En el desarrollo anterior hemos obtenido 4 posibles factorizaciones del hamiltoniano, pero cada una de estas factorizaciones nos da distintas relaciones de entrelazado, luego nos dará distintos operadores escalera. Tenemos distintas relaciones porque ahora se modifican dos índices, es decir, ya no es una familia uniparamétrica, $\{H_\phi^M\}$, de hamiltonianos, sino multiparamétrica, $\{H_{\phi,n,m}^M\}$.

Definición 4.2. La familia de hamiltonianos $\{H_{\phi,n,m}^M\}$ con $n \in \mathbb{N}$ viene dada por:

$$H_{\phi,n,m}^{k\beta} := -\partial_\phi^2 + \tan(\phi)\partial_\phi + \sec^2(\phi)(\beta k + n)^2 + ((l_2 + m)^2 - 1/4) \csc^2(\phi)$$

Puesto que ahora los hamiltonianos dependen de varios índices, vamos a demostrar una generalización de la Proposición 3.2, ya que esta no es aplicable a este nuevo caso.

Proposición 4.5. Sea $\{H_{m_i}\}_{m_i \in \mathbb{Z}}$ una familia de hamiltonianos⁶ (que dependen de varios índices con $i \in \mathcal{I}$) tal que $\forall (m_i)_i \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{I}|}$, siendo $|\mathcal{I}|$ el cardinal de \mathcal{I} y denotando en la última expresión el producto cartesiano $|\mathcal{I}|$ veces, se tiene que:

$$H_{m_i} = A_{m_i}^+ A_{m_i}^- + \lambda_{m_i} = A_{f_i(m_i)}^- A_{f_i(m_i)}^+ + \lambda_{f_i(m_i)} \quad (4.2)$$

Siendo $f_i(m_i)$ un conjunto de funciones del tipo $f_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ que supondremos que existe su función inversa en todo el dominio. Entonces, $A_{m_i}^\pm$ son operadores desplazamiento (véase Definición 3.2) cumpliendo,

$$A_{m_i}^- : \mathcal{H}_{m_i} \rightarrow \mathcal{H}_{f_i^{-1}(m_i)}$$

$$A_{m_i}^+ : \mathcal{H}_{f_i^{-1}(m_i)} \rightarrow \mathcal{H}_{m_i}$$

Notemos que mantienen el autovalor constante, ver la Definición 3.2.

Demostración. Utilizando una notación similar a la que venimos utilizando, sea $\psi_{m_i}^E$ tal que,

$$H_{m_i} \psi_{m_i}^E = E \psi_{m_i}^E$$

Teniendo esto en cuenta, probemos la acción de $A_{m_i}^-$

$$H_{f_i^{-1}(m_i)} A_{m_i}^- \psi_{m_i}^E = A_{m_i}^- (A_{m_i}^+ A_{m_i}^- + \lambda_{m_i}) \psi_{m_i}^E$$

Ya que $f_i(f_i^{-1}(m_i)) = m_i$ por definición de función inversa. Finalmente,

$$H_{f_i^{-1}(m_i)} A_{m_i}^- \psi_{m_i}^E = E (A_{m_i}^- \psi_{m_i}^E)$$

En el otro caso,

$$\begin{aligned} H_{m_i} A_{m_i}^+ \psi_{f_i^{-1}(m_i)}^E &= A_{m_i}^+ (A_{m_i}^- A_{m_i}^+ + \lambda_{m_i}) \psi_{f_i^{-1}(m_i)}^E \\ &= A_{m_i}^+ (H_{f_i^{-1}(m_i)}) \psi_{f_i^{-1}(m_i)}^E = E (A_{m_i}^+ \psi_{f_i^{-1}(m_i)}^E) \end{aligned}$$

Tal como queríamos probar. ■

Hemos generalizado la Proposición 3.2, veamos, como un ejemplo, que esta última se deduce de la Proposición 4.5, como un caso particular.

Ejemplo 3. Supongamos que nuestros hamiltonianos solo dependen de un índice, m , y que $f(m) = m - 1$. Entonces, la función inversa será:

$$f^{-1}(m - 1) = m$$

Si $m = m' + 1$, tendremos (como era de esperar):

$$f^{-1}(m') = m' + 1$$

Las relaciones de la proposición quedan entonces,

$$A_m^- : \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_{m+1}$$

$$A_m^+ : \mathcal{H}_{m+1} \rightarrow \mathcal{H}_m$$

Tal como ya obtuvimos en la Proposición 3.2.

⁶No tienen porque ser necesariamente hamiltonianos, pueden ser otros operadores que cumplan las hipótesis descritas en la proposición.

4.2.4. Análisis de las soluciones.

La proposición del apartado anterior (que generaliza el resultado a familias de hamiltonianos multi-índice y con distintas funciones para cada índice), nos permite ver cual es la acción de los 4 operadores que encontramos anteriormente. Como es obvio, podemos generalizar nuestros operadores M^+ , M^- como sigue.

Definición 4.3. Sean los operadores previamente definidos (las cuatro soluciones posibles, ver apartado 4.2.2). Supongamos que tenemos la solución i -ésima, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, podemos generalizar los operadores como sigue,

$$M_{n,m}^{\pm,i} := M^{\pm,i}(\beta k \rightarrow \beta k + n, l_2 \rightarrow l_2 + m)$$

Siendo $M^{\pm,i}$ los operadores previamente definidos correspondientes a la solución i -ésima, donde lo que hacemos es sustituir los parámetros.

Proposición 4.6. Sean los operadores definidos en la Definición 4.3. Entonces, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ se cumple,

$$\begin{aligned} M_{n,m}^{+,i} M_{n,m}^{-,i} + \mu_{n,m}^i &= H_{\phi,n,m}^M \\ M_{n,m}^{-,i} M_{n,m}^{+,i} + \mu_{n,m}^i &= H_{\phi, f_{1i}^{-1}(n), f_{2i}^{-1}(m)}^M \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} M_{n,m}^{-,i} &: \mathcal{H}_{n,m}^M \rightarrow \mathcal{H}_{f_{1i}^{-1}(n), f_{2i}^{-1}(m)}^M \\ M_{n,m}^{+,i} &: \mathcal{H}_{f_{1i}^{-1}(n), f_{2i}^{-1}(m)}^M \rightarrow \mathcal{H}_{n,m}^M \end{aligned}$$

Demostración. Las dos primeras relaciones son inmediatas sin más que hacer los cambios

$$\beta k \rightarrow \beta k + n \quad l_2 \rightarrow l_2 + m$$

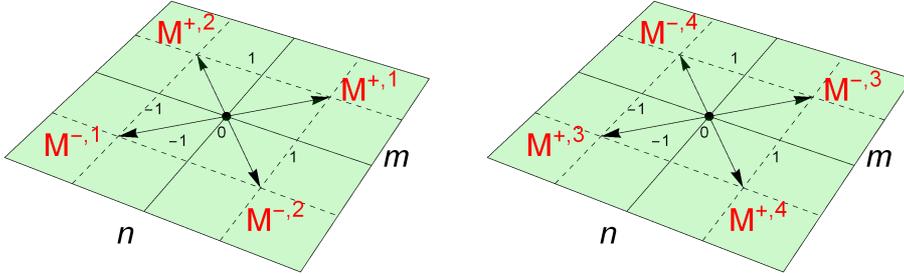
en los cálculos de la *Solución i*. La primera nos dice que son las posibles factorizaciones y la segunda expresión nos da la relación de entrelazado. Las funciones f^{-1} se definen teniendo en cuenta los cambios que se producen al hacer las relaciones de entrelazado y que ya vimos. Por ejemplo, en la Solución 4 estas funciones serían,

$$f_{1,4}^{-1}(n) = n + 1 \quad f_{2,4}^{-1}(m) = m - 1$$

De hecho, todas las funciones serán del tipo $f(n) = n \pm 1$. Partiendo de la segunda relación, sin más que aplicarla a $f_{1i}(n), f_{2i}(m)$ tenemos,

$$M_{f_{1,i}(n), f_{2,i}(m)}^{-,i} M_{f_{1,i}(n), f_{2,i}(m)}^{+,i} + \mu_{f_{1,i}(n), f_{2,i}(m)}^i = H_{\phi,n,m}^M$$

Aplicando ahora la Proposición 4.5, son evidentes el segundo par de expresiones. En la Figura 4.1 mostramos un esquema de los operadores que aquí hemos construido. ■



(a) Operadores de las Soluciones 1 y 2 (b) Operadores de las Soluciones 3 y 4

Figura 4.1: Esquema de los operadores encontrados.

Este último resultado es muy importante, pues hemos encontrado 8 operadores⁷ que transforman los autovalores como sigue,

$$A : \mathcal{H}_{n,m}^E \rightarrow \mathcal{H}_{n+a,m+b}^E$$

siendo $a, b \in \{-1, +1\}$. Deducimos un importante corolario de aquí, pero antes, unas definiciones. Queremos simplificar un poco la notación. Por ejemplo, si escribimos $M^{1,-1}$ queremos referirnos a uno de los ocho operadores escalera (en realidad hay dos que hacen lo mismo) tal que al aplicarlo sobre un autovector del hamiltoniano $H_{n,m}$ nos pase a uno del hamiltoniano $H_{n+1,m+1}$. Utilizando los resultados anteriores, esto lo conseguimos como explicamos en la siguiente definición.

Definición 4.4. Definiremos los operadores desplazamiento *free index* de la manera usual.

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad M^{a,b}\psi_{n,m} := M_{n,m}^{-,i}\psi_{n,m}$$

De tal manera⁸ que $f_{1,i}(n) = n - a$ y $f_{2,i}(n) = n - b$ con $a, b \in \{-1, +1\}$. Notemos que podríamos dar una definición similar usando M^+ .

Podemos ver la acción de los operadores que acabamos de definir en la Figura 4.2.

Corolario. 4.6.1 (\exists simetrías). Como ya mostramos, ver Definición 4.1, tenemos el operador escalera para H^θ . Si obtenemos un operador desplazamiento para H_M^ϕ , usando el Teorema 3.1, habremos probado que el sistema es superintegrable.

Estos operadores podemos encontrarlos usando lo demostrado anteriormente. Si tenemos,

$$M^{a,b}M^{a,-b}\psi_{n,m} = M^{a,b}\psi_{n+a,m-b} = \psi_{n+2a,m}$$

Por tanto, hemos encontrado los operadores shift,

$$S^+ := M^{1,b}M^{1,-b} : \mathcal{H}_{n,m} \rightarrow \mathcal{H}_{n+2,m}$$

$$S^- := M^{-1,b}M^{-1,-b} : \mathcal{H}_{n,m} \rightarrow \mathcal{H}_{n-2,m}$$

⁷En realidad son cuatro distintos, ya que ahora los M^- en algunas factorizaciones pueden pasar a un hamiltoniano “más bajo” de la familia y viceversa con los M^+ . Esto lo vemos en la Figura 4.1

⁸Que existe el i queda garantizado por las cuatro soluciones que encontramos.

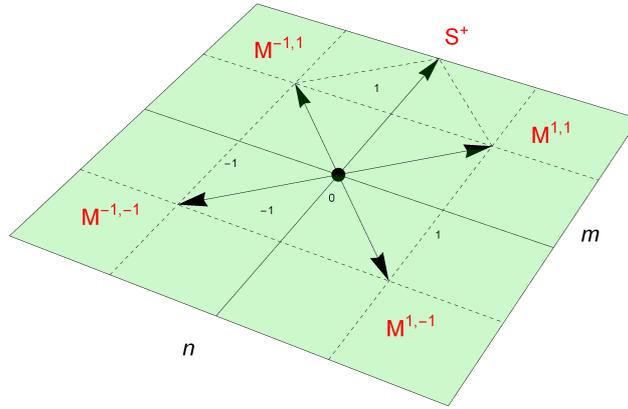


Figura 4.2: Representación gráfica de los operadores encontrados, usando la notación simplificada, de Definición 4.4. Notemos que podemos construir los operadores *shift* buscados sumando dos de estos. Aquí se representa S^+ , siguiendo el Corolario 4.6.1.

Lo que hemos hecho es encontrar un nuevo conjunto de operadores adicionales a los que aparecían en [13]. De hecho, utilizando nuestra notación y generalizándolo a nuestro caso, lo allí encontrado podría expresarse en los siguientes resultados.

4.3. Resultados de referencia [13].

Si buscamos en la literatura operadores desplazamiento para este tipo de potenciales, podemos encontrar un estudio detallado en [13]. Generalizando y modificando los resultados allí obtenidos, podemos obtener que la factorización que buscamos es;

$$M_n^+ := \partial_\phi - \tan(\phi)(\beta k + n + 1) + \left(l_2 + n + \frac{1}{2}\right) \cot(\phi)$$

$$M_n^- := -\partial_\phi - \tan(\phi)(\beta k + n) + \left(l_2 + n + \frac{1}{2}\right) \cot(\phi)$$

$$\mu_n := \left(\beta k + l_2 + 2n + \frac{1}{2}\right) \left(\beta k + l_2 + 2n + \frac{3}{2}\right)$$

Es decir, si tenemos $n = 0$, obtenemos:

$$M_0^+ M_0^- + \mu_0 = H_\phi^{k\beta} = -\partial_\phi^2 + \tan \phi \partial_\phi + \frac{l_2^2 - 1/4}{\sin^2 \phi} + \frac{(k\beta)^2}{\cos^2 \phi}$$

i.e., obtenemos la factorización buscada de H_ϕ^M . Pero también obtenemos una familia de hamiltonianos que pasamos a definir.

Definición 4.5. Sea la familia de hamiltonianos $\{H_{\phi,n}^M\}$ con $n \in \mathbb{N}$ determinada por:

$$H_{\phi,n}^{k\beta} := M_n^+ M_n^- + \mu_n$$

Que explícitamente se expresa por,

$$H_{\phi,n}^M = -\partial_\phi^2 + \tan(\phi)\partial_\phi + \sec^2(\phi)(\beta k + n)^2 + ((l_2 + n)^2 - 1/4) \csc^2(\phi)$$

Es decir, la familia que aquí se trata es unidimensional y sería un caso especial de la nuestra (ver 4.2) con $m = n$.

Proposición 4.7. *Sea la familia de hamiltonianos definidos en 4.5. Entonces, se cumple*

$$H_{\phi,n}^{k\beta} = M_n^+ M_n^- + \mu_n = M_{n-1}^- M_{n-1}^+ + \mu_{n-1}$$

Demostración. Se deduce de manera directa sin más que comprobar que para una $f(\phi)$ arbitraria se tiene que,

$$(M_n^+ M_n^- + \mu_n - (M_{n-1}^- M_{n-1}^+ + \mu_{n-1}))f(\phi) = 0$$

■

Corolario. 4.7.1. De la proposición anterior deducimos que nuestra familia cumple la relación (3.5) y por tanto, podemos aplicar la Proposición 3.2 y obtener que M^\pm son operadores desplazamiento de nuestro sistema. Aplicando la proposición obtenemos,

$$M^+ : \mathcal{H}_{n+1}^\phi \longrightarrow \mathcal{H}_n^\phi \quad M^- : \mathcal{H}_n^\phi \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}^\phi$$

Tengamos en cuenta que con estos operadores no podríamos probar que el sistema es superintegrable, al no poder encontrar operadores puramente de desplazamiento. De hecho, la solución que aquí se presenta es una de las cuatro soluciones que ya obtuvimos en el apartado anterior (en particular, es la Solución 1).

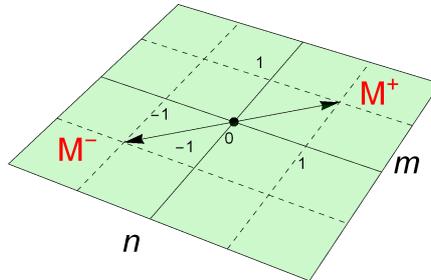


Figura 4.3: Operadores que obtendríamos usando como base [13]. No podríamos encontrar los operadores buscados (al menos con este método, ver siguiente sección).

4.4. Método alternativo para encontrar los operadores.

Vamos a proponer ahora otro método alternativo al presentado en el apartado anterior para obtener los operadores desplazamiento. En el método anterior, factorizamos el hamiltoniano y después analizamos lo que ocurría cuando permutábamos el orden de los operadores de la factorización. Los resultados obtenidos nos fijaban los operadores de desplazamiento y su actuación.

Lo que vamos a hacer ahora es buscar factorizaciones del tal modo que los operadores desplazamiento que obtengamos necesariamente nos dejen uno de los parámetros del hamiltoniano fijo. La utilidad de éste método está en que en muchas ocasiones para encontrar los operadores del Teorema 3.1, necesitamos que algunos parámetros no se modifiquen.

4.4.1. Resultado teórico generalizado.

Para ver cómo proceder, pasemos a establecer y demostrar la siguiente proposición, que no solo es aplicable a nuestro caso⁹.

Proposición 4.8. *Sea un operador $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ de la forma*

$$H_{\alpha_i}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{f_i(x)} + \sum_{j=1}^m g_j(x) \partial_x^j$$

donde, como de manera usual, $\partial_x^i := \partial^i / \partial x^i$. Si λ es un autovalor de $H(x)$, definamos $h_{\beta_i, \lambda}$

$$h_{\beta_i, \lambda} := f_k H_{\alpha_i} - \alpha_k - f_k \lambda$$

donde β_i hace referencia al vector $(\beta_i)_{i=1}^{n-1} = (\alpha_l)_{l=1, l \neq k}^n$. Si existen los operadores, $M_{\beta_i, \lambda}^+$, $M_{\beta_i, \lambda}^-$ y n funciones invertibles γ_i , tal que:

$$h_{\beta_i, \lambda} = M_{\beta_i, \lambda}^+ M_{\beta_i, \lambda}^- + \mu_{\beta_i, \lambda} = M_{\gamma_i(\beta_i), \gamma_n(\lambda)}^- M_{\gamma_i(\beta_i), \gamma_n(\lambda)}^- + \mu_{\gamma_i(\beta_i), \gamma_n(\lambda)} \quad (4.3)$$

entonces, se tiene que:

$$M_{\beta_i, \lambda}^- : \mathcal{H}_{\beta_i, \alpha_k}^\lambda \rightarrow \mathcal{H}_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \alpha_k}^{\gamma_n^{-1}(\lambda)} \quad (4.4)$$

$$M_{\beta_i, \lambda}^+ : \mathcal{H}_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \alpha_k}^{\gamma_n^{-1}(\lambda)} \rightarrow \mathcal{H}_{\beta_i, \alpha_k}^\lambda \quad (4.5)$$

donde seguimos la notación usual empleada aquí (en el superíndice el autovalor y en los subíndices los parámetros del hamiltoniano del cual es autovector).

Demostración. Sea $\psi_{\alpha_i}^\lambda \in \mathcal{H}_{\alpha_i}^\lambda$, entonces,

$$h_{\beta_i, \lambda} \psi_{\alpha_i}^\lambda = f_k H_{\alpha_i} \psi_{\alpha_i}^\lambda - \alpha_k \psi_{\alpha_i}^\lambda - f_k \lambda \psi_{\alpha_i}^\lambda$$

Usando $H_{\alpha_i} \psi_{\alpha_i}^\lambda = \lambda \psi_{\alpha_i}^\lambda$,

$$h_{\beta_i, \lambda} \psi_{\alpha_i}^\lambda = -\alpha_k \psi_{\alpha_i}^\lambda$$

⁹Esta proposición es una formalización y generalización con demostración de ciertas ideas que se presentan en [15].

Es decir, tenemos que también son autovectores de h , siendo precisamente el autovalor el parámetro que queremos dejar constante. Podemos entonces aplicar la Proposición 4.5 teniendo en cuenta la expresión (4.3). Por tanto,

$$\begin{aligned} M_{\beta_i, \lambda}^- &: \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k} \rightarrow \psi_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \gamma_n^{-1}(\lambda)}^{\alpha_k} \\ M_{\beta_i, \lambda}^+ &: \psi_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \gamma_n^{-1}(\lambda)}^{\alpha_k} \rightarrow \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k} \end{aligned}$$

Si tomamos la expresión de $M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k}$ tendríamos que,

$$h_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \gamma_n^{-1}(\lambda)} M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k} = -\alpha_k M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k}$$

Pero teniendo en cuenta la definición de $h_{\beta_i, \lambda}$

$$h_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \gamma_n^{-1}(\lambda)} = f_k H_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \alpha_k} - \alpha_k - f_k \gamma_n^{-1}(\lambda)$$

Por tanto,

$$-\alpha_k M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k} = f_k H_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \alpha_k} M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k} - \alpha_k M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k} - f_k \gamma_n^{-1}(\lambda) M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k}$$

Es decir,

$$0 = f_k H_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \alpha_k} M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k} - f_k \gamma_n^{-1}(\lambda) M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k}$$

Finalmente,

$$H_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \alpha_k} M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k} = \gamma_n^{-1}(\lambda) M_{\beta_i, \lambda}^- \psi_{\beta_i, \lambda}^{\alpha_k}$$

Y esto cumple la tesis de nuestra proposición (ver (4.4)). Para ver la actuación del operador $M_{\beta_i, \lambda}^+$ hay que operar de manera análoga, por lo que lo haremos de manera más concisa:

$$h_{\beta_i, \lambda} M_{\beta_i, \lambda}^+ \psi_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \gamma_n^{-1}(\lambda)}^{\alpha_k} = -\alpha_k M_{\beta_i, \lambda}^+ \psi_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \gamma_n^{-1}(\lambda)}^{\alpha_k}$$

Teniendo en cuenta la definición de $h_{\beta_i, \lambda}$

$$h_{\beta_i, \lambda} = f_k H_{\beta_i, \alpha_k} - \alpha_k - f_k \lambda$$

Por tanto,

$$0 = f_k H_{\beta_i, \alpha_k} M_{\beta_i, \lambda}^+ \psi_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \gamma_n^{-1}(\lambda)}^{\alpha_k} - f_k \lambda M_{\beta_i, \lambda}^+ \psi_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \gamma_n^{-1}(\lambda)}^{\alpha_k}$$

Finalmente,

$$H_{\beta_i, \alpha_k} M_{\beta_i, \lambda}^+ \psi_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \gamma_n^{-1}(\lambda)}^{\alpha_k} = \lambda M_{\beta_i, \lambda}^+ \psi_{\gamma_i^{-1}(\beta_i), \gamma_n^{-1}(\lambda)}^{\alpha_k}$$

Y esto es justamente la otra parte de la tesis de la proposición. ■

Como vemos tanto $h_{\beta_i, \lambda}$ como H dependen de n índices, pero hemos intercambiado un índice relacionado con el operador desplazamiento (operadores asociados a la familia de hamiltonianos), α_k , con el autovalor, índice relacionado con los operadores escalera. De hecho, los operadores que aquí obtenemos son una mezcla entre operadores de desplazamiento y operadores escalera, ya que nos relacionan autovalores de distintos hamiltonianos, pero con distinto autovalor.

4.4.2. Aplicación a nuestro sistema.

Habiendo presentado y probado el resultado anterior, pasemos a operar de manera similar a como hicimos anteriormente (seremos, por tanto, más escuetos en la explicación ahora). Nuestra idea es dejar fijo el parámetro βk del hamiltoniano dado por la expresión (3.2). Para ello, por lo visto en la proposición anterior, multiplicaremos por $\cos^2(x)$ (adoptamos aquí como variable x y no ϕ) Por tanto, nuestro nuevo hamiltoniano a factorizar es:

$$h_{l_2, E} = -\cos^2(x)\partial_x^2 + \cos(x)\sin(x)\partial_x + (l_2^2 - \frac{1}{4})\cot(x)^2 - E\cos^2(x)$$

Si tenemos unos operadores del tipo:

$$M^+z(x) = az(x)\cos(x) + bz(x)\sin(x) + cz(x)\sec(x) + dz(x)\csc(x) - \cos(x)z'(x)$$

$$M^-z(x) = ez(x)\cos(x) + fz(x)\sin(x) + gz(x)\sec(x) + hz(x)\csc(x) + \cos(x)z'(x)$$

Si procedemos de manera similar a como hicimos en secciones anteriores, obtendríamos que:

$$a = e; \quad d = h; \quad c = g; \quad b = f; \quad e = g = 0;$$

Y por otro lado,

$$f + f^2 = E; \quad h + h^2 = (l_2^2 - 1/4); \quad \mu = -(f + h)^2 \tag{4.6}$$

Y tenemos dos soluciones de h y de f que lo cumplen. Por tanto, restringiéndonos a esas soluciones, es decir, tomando $f(E)$ y $h(l_2)$ la factorización queda:

$$h_{l_2, E} = M_{h, f}^+ M_{h, f}^- + \mu_{h, f}$$

Si ahora calculamos $M_{h, f}^- M_{h, f}^+ + \mu_{h, f}$ el resultado es:

$$-\cos^2(x)\partial_x^2 + \cos(x)\sin(x)\partial_x + (h + h^2 - 2h)\cot(x)^2 - (f + f^2 - 2f)\cos^2(x)$$

Por tanto,

$$f + f^2 - 2f = E'; \quad h + h^2 - 2h = (l_2^2 - 1/4);$$

Si lo expresamos como en (4.6),

$$f' + f'^2 = E'; \quad h' + h'^2 = (l_2^2 - 1/4);$$

Y de nuevo tenemos dos soluciones. En efecto,

$$f' = \begin{cases} -f \\ f - 1 \end{cases} \quad h' = \begin{cases} -h \\ h - 1 \end{cases}$$

Vamos a restringirnos a las soluciones $f' = -f$ y $h' = h - 1$, que serán las que nos interesan a nosotros (si cogemos $f' = -f$, al aplicarlo dos veces no se modifica, y eso es lo que buscamos (f está relacionado con E). En cambio, sí que buscamos que haya cambios en h , que está relacionado con l_2). En ese caso,

$$h_{l_2, E} = M_{h, f}^+ M_{h, f}^- + \mu_{h, f} = M_{h+1, -f}^- M_{h+1, -f}^+ + \mu_{h+1, -f}$$

Por tanto, las funciones γ de la Proposición 4.8 son

- $\gamma_1(h) = h + 1 \longrightarrow \gamma_1^{-1}(h) = h - 1$
- $\gamma_2(f) = -f \longrightarrow \gamma_2^{-1}(f) = -f$

Aplicando entonces esa proposición obtenemos,

$$M_{h,f}^- : \mathcal{H}_{h,\beta k}^f \rightarrow \mathcal{H}_{h-1,\beta k}^{-f} \quad M_{h,f}^+ : \mathcal{H}_{h-1,\beta k}^{-f} \rightarrow \mathcal{H}_{h,\beta k}^f$$

Donde los nuevos subespacios de autovectores están indicados con h, f en vez de l_2, E como hicimos antes, es decir,

$$H_{h,\beta k} \psi_{h,k\beta}^f = \left(-\partial_\phi^2 + \tan \phi \partial_\phi + \frac{h(h+1)}{\sin^2 \phi} + \frac{(k\beta)^2}{\cos^2 \phi} \right) \psi_{h,k\beta}^f = (f + f^2) \psi_{h,k\beta}^f$$

Esto es simplemente por motivos notación. Démonos cuenta que con la solución escogida, podemos construir operadores que solo modifiquen l_2 como sigue:

$$M_{h,f}^- \psi_{h,\beta k}^f = \psi_{h-1,\beta k}^{-f} \quad M_{h-1,-f}^- \psi_{h-1,\beta k}^{-f} = \psi_{h-2,\beta k}^f$$

Es decir,

$$M_{h-1,-f}^- M_{h,f}^- : \mathcal{H}_{h,\beta k}^f \rightarrow \mathcal{H}_{h-2,\beta k}^f$$

Del mismo modo,

$$M_{h+2,f}^+ M_{h+1,-f}^+ : \mathcal{H}_{h,\beta k}^f \rightarrow \mathcal{H}_{h+2,\beta k}^f$$

Si tomamos ahora una de las soluciones de h , por ejemplo¹⁰, $h = l_2 - 1/2$ tendremos operadores que varían l_2 en dos unidades. Por tanto, combinando estos operadores con los que teníamos de la sección 4.3 podríamos construir los operadores *shift* que buscamos, y usar el Teorema 3.1 para probar que $\exists_{=2}$, existen dos, simetrías. ***

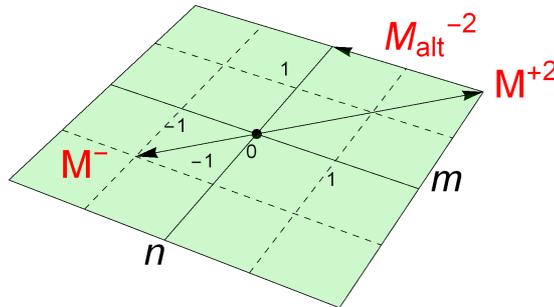


Figura 4.4: Método alternativo para poder usar los operadores de la literatura. Tenemos que construir los M_{alt} , ver en el texto con la notación precisa, para poder usarlos.

¹⁰Si tomáramos la otra solución simplemente los M^+ pasarían a M^- y viceversa.

Capítulo 5

Análisis clásico del hamiltoniano $U(3)$ generalizado.

En este capítulo vamos a trabajar con el hamiltoniano clásico asociado al caso cuántico estudiado en el capítulo previo. Debido a la correspondencia entre corchetes y conmutadores, podremos usar muchos resultados del capítulo anterior para encontrar las constantes del movimiento. Esto nos simplificará en gran medida los cálculos. Una vez hayamos encontrado las simetrías, procederemos a obtener algebraicamente las trayectorias (forma implícita) sin resolver las ecuaciones diferenciales. Recordemos que esta era una propiedad de los sistemas maximalmente superintegrables. Como parte final, obtendremos representaciones de las trayectorias.

5.1. Conceptos generales.

Dado que vamos a usarlo con frecuencia en este capítulo, vamos a recordar qué eran los corchetes de Poisson (lo vimos en el primer capítulo con detalle).

Definición 5.1. Sean f, g dos funciones $f, g : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, definiremos los *corchetes de Poisson* como:

$$\{f, g\} := \sum_{\mu, \nu=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \mathbb{J}^{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial z^\nu} = \sum_{\mu, \nu=1}^{2n} \mathbb{J}^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \frac{\partial g}{\partial z^\nu} = (\nabla f)^T \cdot \mathbb{J} \cdot \nabla g$$

donde $\mathbb{J}^{\mu\nu}$ son las componentes de la matriz simpléctica que definimos en el capítulo 1 y $z = (\vec{q}, \vec{p})$.

Demostremos a continuación una proposición que nos será útil en lo que sigue:

Lema 5.1. Sean f, g dos funciones $f, g : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces,

i) $\{f, g^n\} = n\{f, g\}g^{n-1}$

ii) Si tenemos, como caso particular que, f (ídem con g) solo dependen de unos determinados q_i, p_i (que denotaremos por $i \in \mathcal{I}$), es decir, $f(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = f((q_i, p_i)_{i \in \mathcal{I}}, t)$. Entonces,

$$\{f, g\} = \{f, g\}_{\mathcal{I}}$$

siendo

$$\{f, g\}_{\mathcal{I}} := \sum_{i, k \in \mathcal{I}} \frac{\partial f}{\partial z^i} j^{ik} \frac{\partial g}{\partial z^k}$$

Demostración.

i) Utilizando¹ la Definición 5.1,

$$\{f, g^n\} = \partial_\mu f \mathbb{J}^{\mu\nu} \partial_\nu (g^n) = \partial_\mu f \mathbb{J}^{\mu\nu} n \partial_\nu g g^{n-1} = (\partial_\mu f \mathbb{J}^{\mu\nu} \partial_\nu g) n g^{n-1}$$

Y queda probado.

ii) Es trivial sin más que tener en cuenta que,

$$\frac{\partial f}{\partial z^l} = \delta_{l, \mathcal{I}} \frac{\partial f}{\partial z^l}$$

definiendo $\delta_{l, \mathcal{I}}$ como la extensión directa de la delta de Kronecker a índices de conjuntos.² ■

El hamiltoniano asociado a nuestro sistema está dado por:

$$H = \frac{k^2}{\cos^2(\phi)} \left(\frac{\alpha^2}{\cos^2(\theta)} + \frac{\beta^2}{\sin^2(\theta)} + p_\theta^2 \right) + \frac{l_2^2}{\sin^2(\phi)} + p_\phi^2 \quad (5.1)$$

Y definimos,

$$H_\theta := p_\theta^2 + \frac{\alpha^2}{\cos^2(\theta)} + \frac{\beta^2}{\sin^2(\theta)}$$

$$H_\phi^M = p_\phi^2 + \frac{M^2}{\cos^2(\phi)} + \frac{l_2^2}{\sin^2(\phi)}$$

siendo $M := k\sqrt{H_\theta}$. Sabiendo esto, analicemos las dos partes que tenemos.

5.2. Funciones escalera Ξ^\pm

Sabemos³ que los “operadores escalera” (por analogía al sistema cuántico, misma forma de los corchetes de Poisson aunque aquí no hablamos de autovalores) del sistema son:

$$\Xi^+(\theta, p_\theta) := (\beta^2 - \alpha^2) \frac{1}{\sqrt{H_\theta(\theta, p_\theta)}} + \cos(2\theta) \sqrt{H_\theta(\theta, p_\theta)} + ip_\theta \sin(2\theta)$$

¹También podríamos dar una demostración similar a la del Lema 4.1, ya que las propiedades que allí usamos los corchetes también las tienen.

²Explícitamente, la relación con la delta de Kronecker usual sería:

$$\delta_{l, \mathcal{I}} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \delta_{li}$$

Su imagen es 0 ó 1, ya que en el conjunto de índices no están repetidos.

³Para una deducción puede verse [17]. Allí se analizan varios potenciales y se da un procedimiento general para la factorización.

$$\Xi^-(\theta, p_\theta) := (\beta^2 - \alpha^2) \frac{1}{\sqrt{H_\theta(\theta, p_\theta)}} + \cos(2\theta) \sqrt{H_\theta(\theta, p_\theta)} - ip_\theta \sin(2\theta)$$

Y estos cumplen que,

$$\{H_\theta, \Xi^\pm\} = \mp 4i \sqrt{H_\theta} \Xi^\pm \quad (5.2)$$

Ahora tenemos que incorporar esos resultados en nuestro sistema y de acuerdo a nuestros objetivos de encontrar constantes del movimiento. En realidad, no nos va a interesar ese corchete, sino otros relacionados con él. La siguiente proposición nos muestra el valor del corchete de las funciones Ξ elevadas a un número natural arbitrario con el hamiltoniano total.

Proposición 5.2. *Sean las funciones definidas previamente. Entonces,*

$$\{H, (\Xi^\pm)^n\} = \mp 4in \sqrt{H_\theta} \frac{k^2}{\cos^2 \theta} (\Xi^\pm)^n \quad (5.3)$$

siendo H el hamiltoniano de (5.1).

Demostración. Utilizando el Lema 5.1 ii),

$$\{H, (\Xi^\pm)^n\} = \{H, (\Xi^\pm)^n\}_\theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, como tenemos

$$H(\phi, \varphi, \theta, p_\theta) = f(\phi, p_\phi) + \frac{k^2}{\cos^2(\phi)} H_\theta(\theta, p_\theta)$$

nuestro corchete queda,

$$\{H, (\Xi^\pm)^n\}_\theta = \frac{k^2}{\cos^2(\phi)} \{H_\theta(\theta, p_\theta), (\Xi^\pm)^n\}_\theta$$

Utilizando ahora el Lema 5.1 i)

$$\frac{k^2}{\cos^2(\phi)} \{H_\theta, (\Xi^\pm)^n\}_\theta = n (\Xi^\pm)^{n-1} \{H_\theta, (\Xi^\pm)\}_\theta$$

Utilizando el resultado (5.2), quedaría probado. ■

Pasemos ahora a la parte correspondiente a funciones asociadas a los operadores desplazamiento que definimos en la parte cuántica.

5.3. Funciones desplazamiento S^\pm

Esta parte es algo más compleja ya que tenemos dependencia de las variables angulares θ, p_θ (por medio de $M = k\sqrt{H_\theta}$) y ϕ . Primero empezaremos estableciendo las condiciones que deben cumplir esas funciones para que el sistema tenga las dos constantes del movimiento, y después explicaremos el método usado para encontrar las funciones con tales requisitos.

5.3.1. Análisis general de corchete de Poisson $\{H, S\}$

Nuestro hamiltoniano puede expresarse, de manera general, como

$$H = g_\phi + h_\phi H_\theta \quad (5.4)$$

siendo $g_\phi = g_\phi(\phi, p_\phi)$, ídem con h_ϕ . Supongamos que tenemos una función $S_\phi = S_\phi(\phi, p_\phi, M)$ y depende de M a través de potencias sus potencias, es decir,

$$S_\phi = S_\phi(\phi, p_\phi, M) = f_0(\phi, p_\phi) + \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(\phi, p_\phi) M^i$$

siendo \mathcal{I} un subconjunto finito de \mathbb{N} . En el convenio de sumación,

$$S_\phi = S_\phi(\phi, p_\phi, M) = f_0(\phi, p_\phi) + f_\mu(\phi, p_\phi) M^\mu$$

donde $\mu \in \mathcal{I}$, tal como en la expresión anterior. Entonces, analicemos el corchete de Poisson con H del tipo (5.4),

$$\{H, S_\phi\} = \{H, f_0\} + \{H, f_\mu M^\mu\}$$

El segundo término puede escribirse como:

$$\{H, f_\mu M^\mu\} = \{H, f_\mu\} M^\mu + \{H, M^\mu\} f_\mu$$

Veamos que los segundos sumandos son nulos. Utilizando el Lema 5.1 ii) y desarrollando⁴,

$$\{H, M^\mu\} = h_\phi \{H_\theta, (k\sqrt{H_\theta})^\mu\}_\theta = h_\phi \{H_\theta, H_\theta^{\mu/2}\}_\theta k^\mu = h_\phi k^\mu \partial_\alpha H_\theta \mathbb{J}^{\alpha\beta} (\mu/2) H_\theta^{\mu/2-1} \partial_\beta H_\theta$$

Pero tenemos una sumación del tipo,

$$\partial_\alpha H_\theta \mathbb{J}^{\alpha\beta} \partial_\beta H_\theta$$

que es nula al ser \mathbb{J} antisimétrico⁵. Por tanto, finalmente:

$$\{H, S_\phi\} = \{H, f_0\} + \{H, f_\mu\} M^\mu$$

Utilizando, de nuevo, el Lema 5.1 ii), tendremos:

$$\{H, S_\phi\} = \{H, f_0\}_\phi + \{H, f_\mu\}_\phi M^\mu = \{H, S_\phi\}_\phi$$

En definitiva, hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 5.3. Sean una función del tipo $S_\phi = S_\phi(\phi, p_\phi, M = k\sqrt{H_\theta}) = f_0(\phi, p_\phi) + f_\mu(\phi, p_\phi) M^\mu$ y $H = g_\phi + h_\phi H_\theta$. Entonces:

$$\{H, S_\phi\} = \{H, f_0\}_\phi + \{H, f_\mu\}_\phi M^\mu = \{H, S_\phi\}_\phi$$

⁴Obviamente no hay sumación en los índices θ , ya que no son índices mudos, sino índices relacionados con la notación que usamos para denotar a los distintos subhamiltonianos.

⁵En efecto,

$$A = \partial_\alpha H_\theta \partial_\beta H_\theta \mathbb{J}^{\alpha\beta} = \partial_\beta H_\theta \partial_\alpha H_\theta (-\mathbb{J}^{\beta\alpha}) = -A$$

ya que los índices son mudos, luego $A = 0$.

Corolario. 5.3.1. La proposición anterior nos dice que podemos tratar, dadas las sus hipótesis (que se dan en nuestro caso), el corchete del hamiltoniano ignorando la dependencia de las coordenadas y momentos asociados a θ , que aparecen a través de M . Es decir, que se da la igualdad:

$$\{H, S_\phi\} = \{H_\phi^M, S_\phi\}_\phi$$

es decir, tratando a M como a una constante, justo lo que hacíamos

5.3.2. Simetrías clásicas.

Como ya comentamos, lo que buscamos es un teorema que nos de una condición suficiente para que existan las dos simetrías, como en el caso cuántico. Esto es lo que vamos a hacer ahora.

Teorema 5.4. (*Simetrías clásicas*) Sea el hamiltoniano H dado por(5.1). Supongamos que tenemos funciones, S^\pm, L^\pm , que cumplen los siguientes corchetes de Poisson,

$$\{H, S^\pm\} = \pm\alpha S^\pm \quad (5.5)$$

$$\{H, L^\pm\} = \mp k\alpha L^\pm \quad (5.6)$$

Entonces, las funciones $(S^\pm)^m(L^\pm)^n$ son tal que,

$$\{H, (S^\pm)^m(L^\pm)^n\} = 0$$

si $k = m/n$.

Demostración.

$$\{H, (S^\pm)^m(L^\pm)^n\} = \{H, (S^\pm)^m\}(L^\pm)^n + \{H, (L^\pm)^n\}(S^\pm)^m$$

Utilizando el Lema 5.1 i),

$$\{H, (S^\pm)^m(L^\pm)^n\} = m(S^\pm)^{m-1}\{H, S^\pm\}(L^\pm)^n + n(L^\pm)^{n-1}\{H, L^\pm\}(S^\pm)^m$$

Utilizando ahora las hipótesis del teorema, i.e., (5.5) y (5.6),

$$\{H, (S^\pm)^m(L^\pm)^n\} = m(S^\pm)^{m-1}(\pm\alpha)(L^\pm)^n + n(L^\pm)^{n-1}(\mp k\alpha)(S^\pm)^m$$

Reorganizando,

$$\{H, (S^\pm)^m(L^\pm)^n\} = \pm(m - kn)\alpha(L^\pm)^n(S^\pm)^{m-1}$$

Y finalmente, si $k = m/n$, tendríamos

$$(m - kn) = 0$$

Y el corchete se anula. ■

Con ayuda del Teorema 5.4 sabemos que condiciones tiene que cumplir la funciones S^\pm buscadas, nos basta, por tanto, con encontrar funciones que cumplan (5.5) siendo⁶

$$\alpha = \frac{4Mi}{\cos^2 \phi} \quad (5.7)$$

Por la Proposición 5.3, podremos buscar esta función tratando a M como una constante, lo cual será de gran ayuda. Lo que vamos a hacer es usar la correspondencia entre corchetes y conmutadores como guía para encontrar las funciones. Si por ejemplo usamos⁷ la Solución 3 y 4 de la sección anterior.

$$S^1(\phi) := -l_2^2 \cot^2(\phi) - (p_\phi + iM \tan(\phi))^2$$

Y obtendríamos⁸,

$$\{H_\phi^M, S_\phi^1\} = -4iM \sec^2(\phi) S^1(\phi)$$

Tomando otras soluciones,

$$S^2(\phi) := -l_2^2 \cot^2(\phi) - (p_\phi - iM \tan(\phi))^2$$

Y el corchete queda,

$$\{H_\phi^M, S_\phi^1\} = +4iM \sec^2(\phi) S^2(\phi)$$

Recordemos que estos corchete son suponiendo que M es una constante, como hemos comentado en los resultados anteriores. Es decir, usamos $\{\cdot, \cdot\}$, en vez de $\{\cdot, \cdot\}_\phi$, aunque como suponemos M constante, es equivalente. Lo hacemos para no cargar la notación, pero debe tenerse en mente.

Las funciones S^1, S^2 cumplen con la condición 5.7. Por tanto, definimos:

$$S^+ := S_\phi^2, \quad S^- := S_\phi^1$$

Utilizando ahora el Teorema 5.4, ya habríamos encontrado las dos simetrías. Estas constantes del movimientos las usaremos ahora para calcular las trayectorias.

⁶Tengamos en cuenta que de aquí en adelante la “ i ” que aparece es la unidad imaginaria, no un índice.

⁷Recordemos que solo había cuatro operadores M realmente distintos, ver Nota al pie 7

⁸Para calcular los corchetes hemos usado el programa de cálculo simbólico *Mathematica*, y también para todos los cálculos. En este caso, y debido a que el resultado puede ser difícil de reconocer si se calcula directamente

$$\{H_\phi^M, S_\phi^1\}$$

es más práctico hacer que el programa resuelva la ecuación:

$$\{H_\phi^M, S_\phi^1\} - x S_\phi^1 = 0$$

siendo x la incógnita, que es lo que nos interesa en nuestro caso.

5.4. Trayectorias clásicas.

En esta sección vamos a obtener las trayectorias clásicas de nuestro hamiltoniano. Como ya comentamos en capítulos anteriores, podemos obtenerlas de manera algebraica. Primero vamos a ver su deducción algebraica y después veremos su representación gráfica en la esfera. Ahora, a diferencia de los casos conocidos (como Kepler) que tratamos en el capítulo introductorio, las constantes son más complicadas, lo que impide la obtención de una expresión analítica explícita. Lo que haremos será buscar las ecuaciones implícitas.

5.4.1. Cálculo algebraico.

Denotemos a los operadores encontrados por $X^\pm := (S^\pm)^m (L^\pm)^n$. Entonces, sustituyendo el valor de H_θ :

$$X^+ = (-l_2^2 \cot^2(\phi) - (p_\phi - iM \tan(\phi))^2)^m \times \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 \sec^2(\theta) + \beta^2 \csc^2(\theta) + p_\theta^2}} + \cos(2\theta) \sqrt{\alpha^2 \sec^2(\theta) + \beta^2 \csc^2(\theta) + p_\theta^2} + ip_\theta \sin(2\theta) \right)^n \quad (5.8)$$

$$X^- = (-l_2^2 \cot^2(\phi) - (p_\phi + iM \tan(\phi))^2)^m \times \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 \sec^2(\theta) + \beta^2 \csc^2(\theta) + p_\theta^2}} + \cos(2\theta) \sqrt{\alpha^2 \sec^2(\theta) + \beta^2 \csc^2(\theta) + p_\theta^2} - ip_\theta \sin(2\theta) \right)^n \quad (5.9)$$

Estas funciones serán la base para calcular las trayectorias, pero antes necesitamos un par de breves resultados, que presentamos en la siguiente proposición.

Proposición 5.5. *Sea H el hamiltoniano del sistema, $H : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces,*

- i) $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ (que puede depender explícitamente del tiempo) es constante del movimiento, si y solo si,

$$\{f, H\} = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

- ii) En nuestro sistema particular se tiene que H, H_θ, X^\pm son constantes del movimiento.

Demostración.

- i) Utilizando las ecuaciones de Hamilton (en forma simplética) y la regla de la cadena

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z^\mu} z^\mu + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \mathbb{J}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z^\nu} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Luego la derivada se anula, si y solo si, se da la expresión de la proposición.

- ii) El primer caso es trivial y el tercero lo es por el Teorema 5.4. En el segundo caso,

$$\{H_\theta, H\} = \{H_\theta, f_\phi + \frac{k^2}{\cos^2 \phi} H_\theta\} = 0$$

Luego, usando la parte i) deducimos que son constantes del movimiento (no dependen explícitamente del tiempo en nuestro sistema) ■

Este último resultado nos va a permitir obtener las trayectorias de las partículas de manera algebraica, sin tener que integrar las ecuaciones del movimiento con (5.1). Hemos visto que H_θ es constante del movimiento, luego también lo será M . Por otro lado, si fijamos el valor de $H = h$, entonces, M y h se mantendrán constantes durante la trayectoria. Esto nos permite expresar los momentos conjugados en función de las coordenadas generalizadas.

$$p_\theta = s \sqrt{\frac{M^2}{k^2} - \left(\frac{\alpha^2}{\cos^2 \theta} + \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta} \right)}$$

$$p_\phi = r \sqrt{h - \left(\frac{l_2^2}{\sin^2(\phi)} + \frac{M^2}{\cos^2(\phi)} \right)}$$

donde $r, s \in \{-1, 1\}$. Finalmente, para que las representaciones sean reales, usaremos la parte real y la parte imaginaria de X^\pm . En nuestro caso, tenemos que

$$(X^+)^* = X^-$$

En efecto. Notemos que en el primer factor de las constantes tendríamos una estructura del tipo

$$f_0 + (g_1 + ig_2)^2 = f_0 + g_1^2 - g_2^2 + 2g_1g_2i$$

y en el caso de X^- tendríamos lo mismo, salvo el término imaginario, i.e.,

$$f_0 + (g_1 - ig_2)^2 = f_0 + g_1^2 - g_2^2 - 2g_1g_2i$$

después $f := f_0 + g_1^2 - g_2^2$ y $g := 2g_1g_2$ También,

$$X^+ = (f + ig)^m + (f' + ig')^n = (\rho e^{i\phi})^m + (\rho' e^{i\phi'})^n = \rho e^{im\phi} + \rho' e^{in\phi'}$$

donde las funciones f, g, f', g' se definen siguiendo la estructura de las ecuaciones (5.8) y (5.9). Usando esto, vemos que,

$$X^- = (f - ig)^m + (f' - ig')^n = (\rho e^{-i\phi})^m + (\rho' e^{-i\phi'})^n = \rho e^{-im\phi} + \rho' e^{-in\phi'}$$

Y se sigue el resultado. Por tanto, lo que utilizaremos será:

$$Re(X^+) = Re(X^-) = \frac{X^+ + X^-}{2}$$

$$Im(X^+) = -Im(X^-) = \frac{X^+ - X^-}{2i}$$

que serán constantes del movimiento. Por tanto, implícitamente podremos conocer las trayectorias, es decir, estas serán:

$$T_{X_0} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / X(\vec{x}) = X_0\}$$

5.4.2. Representaciones gráficas en S^2 .

En esta sección vamos a mostrar las distintas representaciones que obtenemos de las trayectorias. En vez de representarlas en el plano, siendo los ejes ϕ, θ , vamos a hacerlo sobre la esfera. Dado que es una representación algo inusual, vamos a explicar con algo de detalle cómo hacerlas con *Mathematica*. Tengamos en cuenta que las expresiones (5.8) y (5.9) son expresiones complicadas, luego el tiempo de cálculo se vuelve relevante, y un procedimiento con cálculos redundantes o innecesarios puede hacer que el tiempo de procesamiento sea demasiado largo. Recordemos que vamos a hacer una representación usando las ecuaciones implícitas, luego usaremos los comandos del tipo *ContourPlot*. Como queremos hacerlo en 3D podríamos intentarlo pasando de esféricas a cartesianas (sustituyendo todas las funciones trigonométricas a sus expresiones cartesianas). Las expresiones son intratables y el tiempo de un plot muy grande y de baja calidad. La solución que aquí proponemos es la siguiente.

1. Hacer la representación implícita en ϕ, θ .
2. Extraer la tabla de los datos representados.
3. Transformar la tabla ϕ, θ en una del tipo x, y, z usando la transformación en esféricas usual.
4. Representar⁹ la tabla en un diagrama 3D junto a una esfera de radio unidad.

La parte relevante del comando la podemos ver en la Figura 5.1. Ejemplos de las trayectorias pueden verse en la Figura 5.2.

```
tc[ $\theta_$ ,  $\phi_$ ] := {Cos[ $\phi$ ] Sin[ $\theta$ ], Sin[ $\phi$ ] Sin[ $\theta$ ], Cos[ $\theta$ ];
p[1] = ContourPlot[f[L2, M,  $\phi$ ,  $\theta$ , 1, 1] == 1, { $\theta$ , 0, Pi}, { $\phi$ , 0, 2 Pi},
  PlotPoints -> 500, MaxRecursion -> 2]
p[2] = ContourPlot[f[L2, M,  $\phi$ ,  $\theta$ , 1, -1] == 1, { $\theta$ , 0, Pi}, { $\phi$ , 0, 2 Pi},
  PlotPoints -> 500, MaxRecursion -> 2]
P[1] = ListPointPlot3D[tc @@@ p[1][[1, 1]], BoxRatios -> {1, 1, 1}]
P[2] = ListPointPlot3D[tc @@@ p[2][[1, 1]], BoxRatios -> {1, 1, 1}]
Show[esf, P[1], P[2]]
```

Figura 5.1: Parte del comando usado para la representación de las trayectorias.

⁹Debido a las singularidades de la función, la representación no es del todo correcta cuando hay ceros en el denominador, por tanto aparecen líneas espurias. La eliminación de las líneas depende, en parte, del número de puntos que usemos, pero un número excesivo de puntos puede hacer que las representaciones tarden días. Tengamos en cuenta esta aproximación de las representaciones.

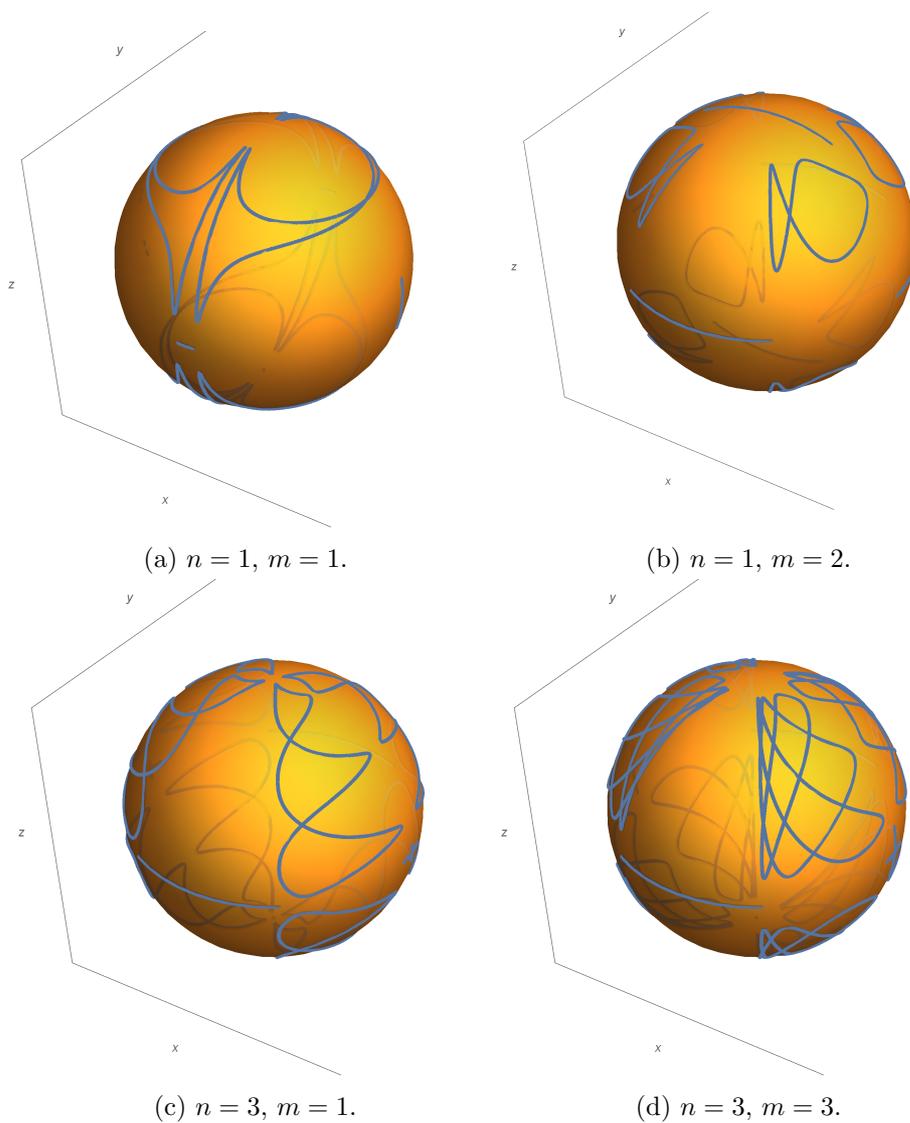


Figura 5.2: Distintas trayectorias dados los parámetros, representamos los valores de n, m en cada caso.

Apéndice A

Breve introducción al cálculo de variaciones.

“Never in my life have I tormented myself anything like this... I have become imbued with a great respect for mathematics, the more subtle parts of which I have previously regarded as sheer luxury.”

– Albert Einstein

“Oh, physics! That’s just too difficult for the physicists!”

– David Hilbert

La formulación lagrangiana puede entenderse como un problema de búsqueda de extremos para ciertos funcionales (la acción). La diferencia con el cálculo usual es que vamos a trabajar con espacios de funciones (tenemos que trabajar con espacios de dimensión infinita). En este apéndice vamos a tratar de manera breve, pero formal, el problema de encontrar estos extremos (las condiciones necesarias para que los haya) y aplicarla al caso que nos ocupa, las acciones de la mecánica clásica. Dado que la generalización al caso de teoría clásica de campos desde nuestro formalismo es sencilla, vamos a tratar funcionales que serían aplicables dentro de la teoría clásica de campos, y después, particularizar al caso que nos ocupa en este trabajo, teoría clásica de partículas. Vamos a empezar con un poco de **cálculo diferencial en espacio de Banach**. Recordemos que en Matemáticas podemos clasificar los espacios, de más especial a más general, como: *espacios con producto interno, espacios normados, espacios métricos y espacios topológicos*. Partiendo de los dos más especiales, definamos:

Definición A.1 (Espacio de Banach y espacio de Hilbert.). Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si la métrica asociada es completa diremos que es un *espacio de Banach*. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Si la métrica asociada es completa diremos que es un *espacio de Hilbert*.

A.0.1. El concepto de derivada en espacios de Banach.

Definición A.2 (Diferenciabilidad). Sea $f : U \subset E \rightarrow F$ una aplicación con dominio un abierto entre espacios normados y sea $u_0 \in U$. Diremos que es *diferenciable* en u_0 si existe un operador lineal y acotado $\mathbf{D}f(u_0) : E \rightarrow F$ tal que:

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u) - f(u_0) - \mathbf{D}f(u_0) \cdot (u - u_0)}{\|u - u_0\|} = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{o(u - u_0)}{\|u - u_0\|} = 0$$

$Df : U \rightarrow L(E, F)$ se conoce como *derivada* de f .

Necesitamos ahora garantizar que esta definición es correcta, para ello necesitamos un teorema de existencia única (no es un teorema de existencia y unicidad, ya que no necesariamente existe, pero lo que se probaría es que si existe esta es única, que es lo que nos interesa para tener una buena definición).

Proposición A.1. *Si existe $Df(u_0)$, entonces es única. Además, Df es lineal en f .*

A.0.2. Derivada funcional y el cálculo de variaciones.

Una acción es un funcional, es decir, una aplicación del tipo $S : \mathbf{E}^m \rightarrow \mathbb{R}$ con \mathbf{E} un espacio de funciones. Es decir, coge m funciones y nos devuelve un número real. En una formulación lagrangiana nos interesan los extremos que pueda presentar esta acción, por tanto, necesitamos ciertos resultados sobre los extremos relativos en espacios de Banach (recordemos, el espacio de funciones no es necesariamente de dimensión finita).

Definición A.3 (Funcional débilmente no degenerado). Sean \mathbf{E} y \mathbf{F} dos espacios de Banach y $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{E} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional bilineal continuo. Diremos que es *\mathbf{E} -débilmente no degenerado* (resp. *\mathbf{F} -débilmente no degenerado*) si $\langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in \mathbf{F}$ implica que $x = 0$ (resp. si $\langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in \mathbf{E}$ implica que $y = 0$). Equivalente a decir que la aplicación $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ de $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}^*$ es inyectiva. Ídem con \mathbf{F} .

Vamos a probar esa relación bicondicional de la que hemos hablado en la proposición. Del Álgebra Lineal sabemos que una aplicación es inyectiva, ssi, su núcleo es el cero (elemento neutro del espacio vectorial). Por tanto, en nuestro caso tenemos que la imagen nula es 0_ψ que es la aplicación del dual cuya imagen es cero, i.e., $0_\psi(y) = 0 \ \forall y \in \mathbf{F}$. Por tanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es inyectiva, ssi, $\ker \langle \cdot, \cdot \rangle = \{0\}$, ssi, $\langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in \mathbf{F}$ implica que $x = 0$.

Definamos ahora un concepto que nos será útil para los extremos, la derivada funcional.

Definición A.4 (Derivada funcional). Sean \mathbf{E} y \mathbf{F} dos espacios de Banach y $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{E} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional bilineal continuo y \mathbf{E} -débilmente no degenerado. Sea $f : \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, definimos la *derivada funcional* (si existe) de f con respecto a α como:

$$\mathbf{D}f(\alpha) \cdot \beta = \left\langle \frac{\delta f}{\delta \alpha}, \beta \right\rangle$$

De existir, es única, debido a que es débilmente no degenerado. (luego, está bien definida.)

A.0.3. Aplicación a un espacio de funciones con el funcional usual.

Supongamos que nuestros espacios de Banach son espacios de funciones de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Definimos el bifuncional y aplicando la Definición A.4, obtendríamos:

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\Omega} \varphi(x)\psi(x)d^n x \rightarrow \mathbf{D}f(\varphi) \cdot \psi = \int_{\Omega} \frac{\delta f}{\delta \varphi}(x)\psi(x)d^n x = \left. \frac{d}{d\epsilon} f(\varphi + \epsilon\psi) \right|_{\epsilon=0} \quad (\text{A.1})$$

La última igualdad se debe a la aplicación de la regla de la cadena y no sería más que una derivada direccional. Pero notemos que en la última igualdad está la clave del asunto para encontrar un extremo. Si suponemos que el extremo está en φ , la derivada de $h_\psi(\epsilon) := f(\varphi + \epsilon\psi)$, fijado el, ψ será cero (evaluando en $\epsilon = 0$). Notemos que esto lo podemos aplicar a cualquier ψ . Por tanto, por la última igualdad de (A.1) tendremos que la integral es nula. Si el funcional es no degenerado (nos basta con que sea débilmente) y tenemos que $\langle \frac{\delta f}{\delta \varphi}, \cdot \rangle = 0_\psi$, luego está en el núcleo y por tanto $\frac{\delta f}{\delta \varphi}$ es la aplicación idénticamente nula. Hemos probado el primer resultado de la segunda parte de la proposición que se presenta a continuación.

Proposición A.2. *Sea el funcional definido previamente, entonces, los siguientes resultados son ciertos.*

- $\langle \varphi, \psi \rangle$ es débilmente no degenerado.
- La condición necesaria para que $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f[\varphi] = \int_{\Omega} F(x, \varphi, \varphi_{,\alpha}) d^n x$ tenga extremo relativo es que,

$$\frac{\delta f}{\delta \varphi} = 0 \quad \text{Además} \quad \frac{\delta f}{\delta \varphi} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{,\alpha}} - \frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

Estas dos condiciones nos son útiles para poder demostrar las ecuaciones de Euler-Lagrange en el caso de teoría clásica de campos (CFT) e incluso en teoría clásica de partículas.¹ El problema es que en la proposición anterior solo hemos considerado un funcional con un único argumento. Debemos generalizar a más dimensiones el concepto de derivada funcional.

Definición A.5 (Derivada funcional). Sean \mathbf{E}_i y \mathbf{F}_i espacios de Banach y $\langle \cdot, \cdot \rangle_i : \mathbf{E}_i \times \mathbf{F}_i \rightarrow \mathbb{R}$ bifuncionales bilineales y continuos y \mathbf{E}_i -débilmente no degenerados. Sea $f : \mathbf{F}_1 \times \dots \times \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, definimos la *derivada funcional* (si existe) de f con respecto a φ_i como:

$$\mathbf{D}_i f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \cdot \psi_i = \left\langle \frac{\delta f}{\delta \varphi_i}, \psi_i \right\rangle_i$$

\mathbf{D}_i es la derivada parcial con respecto a i . Se puede probar que:

$$\mathbf{D}_i f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \cdot \psi_i = \mathbf{D}f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \cdot (0, \dots, \psi_i, \dots, 0)$$

De existir, es única, debido a que es débilmente no degenerado. (luego, está bien definida.)

De manera análoga a como hicimos (usando el resultado del cálculo en varias variables) antes podríamos probar que si existe extremo relativo, entonces,

$$\frac{\delta f}{\delta \varphi_i} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$$

Además, estas derivadas funcionales serían (con el funcional usual y su densidad),

$$\frac{\delta f}{\delta \varphi_i} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{i,\alpha}} - \frac{\partial F}{\partial \varphi_i}$$

para todo $i \in \mathcal{I}$. Por tanto, vemos que se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange de la CFT, simplemente $S = f$ y $\mathcal{L} = F$ siendo, respectivamente, la acción y densidad lagrangiana.

Como ya comentamos anteriormente, el formalismo matemático aquí desarrollado no solo es útil para la CFT, sino para la mecánica de partículas. Dado que es lo que usaremos aquí, comentamos cómo hacer la transición a ese caso:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$; las “variables del campo” solo dependen del tiempo.
- $\psi_i \rightarrow q^i$; las “variables del campo” son las trayectorias, podrían verse como campos únicamente temporales (ver Nota al pie 1).

Con estos cambios, la ecuaciones resultantes son:

$$\frac{\delta S}{\delta q^i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

para todo $i \in \mathcal{I}$.

¹Como luego veremos, las “matemáticas” son las mismas sin más que pasar de $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, sin embargo, la Física que hay detrás es diferente (las trayectorias no son campos)

Conclusiones.

Este trabajo tiene dos grandes partes diferenciadas, una de revisión de resultados conocidos y otra de nuevo estudio teórico en el tema.

En la primera parte, primero hemos presentado una formulación geométrica de la mecánica.

- Debido a las matemáticas avanzadas que se presentan, previamente se ha realizado un estudio extenso de teoría de variedades y análisis tensorial (en esta memoria no hemos incluido estas partes y nos remitimos a las referencias), siguiendo principalmente de la referencia [1].
- Esta formación matemática adicional nos ha permitido entender la mecánica utilizando estas herramientas. En el capítulo 1 hemos presentado los resultados más básicos en ese formalismo.
- Dado que las matemáticas son complejas, también hemos intentado exponer una versión heurística antes de los grandes resultados e incorporado un sistema de dos lecturas para una mejor asimilación.

También, dentro de esta primera parte, hemos estudiado los sistemas superintegrables.

- Utilizando como base lo presentado en el capítulo primero, en el capítulo 2 hemos presentado una introducción teórica, definiciones y resultados importantes de estos sistemas.
- En la segunda parte del capítulo hemos presentado ejemplos conocidos como aplicación de lo anterior, mostrando propiedades interesantes de estos sistemas superintegrables (obtención de manera algebraica de trayectorias (clásico) y espectro (cuántico)).

En la segunda gran parte de este trabajo hemos estudiado con cierto detalle una nueva familia de hamiltonianos, que se obtiene a partir de otro bien conocido.

- En el capítulo 3 sentamos las bases para el posterior estudio, a saber, transformamos el problema, definiciones y formalización de ciertos resultados que nos serán útiles en los siguientes capítulos. También proponemos y probamos un resultado básico para guiar el desarrollo del capítulo siguiente.
- En el capítulo 4 empezamos el estudio de nuestro sistema particular. Obtenemos los operadores escalar y damos un procedimiento sistemático (aplicable

a otros sistemas) para obtener factorizaciones. Incluimos demostraciones de independencia lineal que se pueden extender a otros casos.

- Aplicándolo a nuestra familia obtenemos varias soluciones. Para el análisis, proponemos una generalización de una proposición del capítulo anterior y damos su demostración, esto nos permite obtener los operadores desplazamiento y, con ellos, las simetrías.
- Por otro lado, mostramos un método alternativo para llegar a estos operadores. Primero, desarrollamos, con su correspondiente demostración, un resultado general para obtener factorizaciones dejando un índice fijo. Después, lo aplicamos a nuestro sistema y obtenemos las simetrías del mismo.
- Por último, en el capítulo 5 pasamos al estudio clásico. Guiándonos por la correspondencia entre los sistemas clásicos y cuánticos obtenemos los operadores análogos clásicos.
- Debido a que la analogía no es total, tenemos que desarrollar ciertos resultados relacionados con los corchetes de Poisson para poder simplificar nuestros cálculos. Como siempre, estos resultados los construimos de la manera más general posible para que sean aplicables a otros sistemas.
- Finalmente, obtenemos trayectorias y las representamos gráficamente con ayuda de *Mathematica*. También explicamos cómo reducir el tiempo de computación.

Bibliografía

- [1] J. Marsden, T. Ratiu and R. Abraham, *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Springer, New York, 2007.
- [2] J. V. José and E. J. Saletan, *Classical Dynamics: a contemporary approach*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [3] R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of mechanics*. Addison-Wesley, Redwood, 1987.
- [4] W. Miller, S. Post and P. Winternitz, “Classical and Quantum superintegrability with applications”. *J. Phys. A: Math. and Theor.* **46** (2013) 423001.
- [5] I. Marquette, *Superintegrability with third order integrals of motion, polynomial algebras and supersymmetric quantum mechanics*. PhD Thesis, Université de Montreal, 2009.
- [6] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Vol. 1. Wiley, New York 1991.
- [7] A.G. Nikitin, “Laplace-Runge-Lenz vectors for arbitrary spin and arbitrary dimension”. *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015) 012010.
- [8] I. Marquette, *Lectures on superintegrability, quadratic symmetry algebras and supersymmetry*. University of York, 2009.
- [9] E. Celeghini, S. Kuru, J. Negro and M.A. del Olmo, “A unified approach to quantum and classical TTW systems based on factorizations”. *Ann. Phys.* **332** (2013) 27-37.
- [10] D. J. Fernández C., J. Negro and M.A. del Olmo, “Group Approach to the Factorization of the Radial Oscillator Equation”. *Ann. Phys.* **252** (1996) 386-412.
- [11] M. A. del Olmo, M.A. Rodríguez, and P. Winternitz, “Integrable systems based on $SU(p, q)$ homogeneous manifolds”. *J. Math. Phys.* **34** (1993) 5118-5139.
- [12] J.A. Calzada, M.A. del Olmo and M.A. Rodríguez, “Contraction of superintegrable Hamiltonian systems”. *J. Math. Phys.* **40** (1999) 188.
- [13] J. A. Calzada, J. Negro, and M.A. del Olmo, “Superintegrable quantum $u(3)$ systems and higher rank factorizations”. *J. Math. Phys.* **47** (2006) 043511.

- [14] J. A. Calzada, S. Kuru, J. Negro, and M.A. del Olmo, “Intertwining symmetry algebras of quantum superintegrable systems on the hyperboloid”. *J. Phys. A: Math. and Theor.* **41** (2008) 255201.
- [15] J. A. Calzada, S. Kuru, J. Negro and M.A. del Olmo, “Dynamical algebras of general two-parametric Pöschl-Teller Hamiltonians. *Ann. Phys.* **327** (2012) 808-822.
- [16] J A Calzada, E. Celeghini, M A. del Olmo and M.A. Velasco, “Algebraic Aspects of Tremblay-Turbiner-Winternitz Hamiltonian Systems”, *J. Phys.: Conf. Ser.* **343** (2012) 012029.
- [17] S. Kuru and J. Negro, “Factorizations of one-dimensional classical systems”, *Ann. Phys.* **323** (2008) 413-431.