Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas.

Juegos de suma cero. Teoremas de Von Neumann, Sion y Kneser-Fan.

Autor: Isabel Fernández Isasi

Tutor: Javier de Frutos Baraja

Índice

1. Introducción

El presente trabajo se ha planteado como un acercamiento a la Teoría de Juegos.

La Teoría de Decisión y la Teoría de Juegos estudian la forma en que los decisores pueden optimizar un objetivo. Diremos que un juego es un problema de decisión donde hay más de un agente decisor y las decisiones de un jugador tienen efectos sobre los otros. El diseño de estrategias competitivas y su ejecución están condicionados por factores estratégicos que pueden analizarse en el esquema conceptual de la Teoría de Juegos.

Podríamos decir que la Teoría de Juegos estudia situaciones de conflicto y cooperación en las que interactúan individuos racionales, analizando los comportamientos y resultados que pueden esperarse siempre que las decisiones de los agentes se tomen mediante argumentos estrictamente racionales. En este contexto, individuo racional significa que toma las decisiones buscando la recompensa mejor posible. Estas situaciones se pueden analizar mediante decisiones individuales, caso de juegos no cooperativos, o mediante acuerdos entre los participantes, caso de los juegos cooperativos.

Los problemas estudiados por la Teoría de Juegos están bien definidos por objetos matemáticos. Un juego consiste en un conjunto de jugadores, un conjunto de movimientos o estrategias disponibles para esos jugadores y una especificación de recompensas para cada combinación de estrategias. Una vez establecidas las normas de representación de un juego, el siguiente paso es la resolución del mismo.

Este trabajo, que se centra principalmente en los juegos de suma cero, pretende mostrar que este problema de decisión múltiple, al que llamaremos juego, tiene una solución que es óptima en un sentido bien determinado para cada una de las partes.

El trabajo se estructura en cinco capítulos. El primer capítulo es una introducción a la Teoría de Juegos donde se incluyen conceptos y definiciones básicas. El Capítulo 2 introduce los juegos matriciales y se incorpora el concepto de solución de un juego mediante argumentos de dominación y argumentos de equilibrio. El Capítulo 3 se centra en los juegos matriciales de suma cero. En este capítulo se demuestra el teorema minimax de Von Neumnann y se recogen los resultados que permiten obtener el cálculo de la solución de un juego suma cero. En el Capítulo 4 se muestran unos teoremas minimax para juegos suma cero generales y, por último, el Capítulo 5 es un ejemplo ilustrativo del capítulo anterior.

1.1. La Teoría de Juegos

La primera discusión conocida de la Teoría de Juegos aparece en una carta escrita por James Waldegrave en 1713. En esta carta, Waldegrave proporciona una solución minimax de estrategia mixta a una versión para dos personas del juego de cartas le Her. Sin embargo, no se publicó un análisis teórico de Teoría de Juegos en general hasta la publicación de *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, de Antoine Augustin Cournot en 1838. En este trabajo, Cournot considera un duopolio y presenta una solución que es una versión restringida del equilibrio de Nash.
Aunque el análisis de Cournot es más general que el de Waldegrave, la Teoría de Juegos se formaliza como campo de estudio independiente por John von Neumann en una serie de artículos publicados en 1928. Estos resultados fueron incluidos más tarde en su libro de 1944, *The Theory of Games and Economic Behavior*, escrito junto con Oskar Morgenstern. Este trabajo contiene un método para encontrar soluciones óptimas para juegos de suma cero de dos jugadores.

Durante este período, el trabajo sobre Teoría de Juegos se centró, sobre todo, en Teoría de Juegos cooperativos. La Teoría de Juegos cooperativos analiza las estrategias óptimas para grupos de individuos, asumiendo que pueden establecer acuerdos entre sí acerca de las estrategias más apropiadas.

En 1950, aparecieron las primeras discusiones a cerca del dilema del prisionero, y se emprendió un experimento acerca de este juego en la corporación RAND. Alrededor de esta misma época, John Nash desarrolló una definición de una estrategia óptima para juegos de múltiples jugadores donde el óptimo no se ha definido previamente, conocido como equilibrio de Nash. Este equilibrio es suficientemente general, permitiendo el análisis de juegos no cooperativos además de los juegos cooperativos.

La Teoría de Juegos experimentó una notable actividad en la década de 1950, momento en el cual algunos de los conceptos base como el juego de forma extensiva, el juego ficticio, los juegos repetitivos y el valor de Shapley fueron desarrollados.

En 1965, Reinhard Selten introdujo su concepto de equilibrio perfecto en los subjuegos, que más adelante refinó el equilibrio de Nash. En 1967, John Harsanyi desarrolló los conceptos de la información completa y de los juegos bayesianos.

En 1994, junto con John Nash y Reinhard Selten, ganó el Premio Nobel de Economía.
En la década de 1970, la Teoría de Juegos se aplicó extensamente a la biología, en gran

parte como resultado del trabajo de John Maynard Smith y su concepto de estrategia estable evolutiva.

En 2005, los teóricos de juegos Thomas Schelling y Robert Aumann ganaron el premio Nobel de Economía. Schelling trabajó en modelos dinámicos, los primeros ejemplos de la Teoría de Juegos evolutiva. Por su parte, Aumann contribuyó más a la escuela del equilibrio.

1.2. Conceptos y definiciones básicas

La Teoría de Juegos se desarrolla para analizar modelos matemáticos de situaciones de conflicto. Las situaciones de conflicto son problemas de optimización con más de un decisor y es frecuente que estos agentes decisores tengan objetivos contradictorios. Estas situaciones de conflicto son denominadas juegos y éstos tendrán, por definición, unos participantes llamados jugadores, los agentes que pueden tomar decisiones. La existencia de un conflicto es debido al deseo de cada jugador de mejorar sus propias circunstancias. Se considerará en este trabajo que cada jugador se esfuerza para ganar tanto como sea posible y que la ganancia de cada jugador es la pérdida de su oponente (juegos de suma cero).

La principal característica de los juegos para su estudio sistemático consiste en tomar las decisiones que más convengan para ganar, teniendo que cumplir las reglas del juego y sabiendo que las decisiones de los demás jugadores también influyen en los resultados.

Aunque la Teoría de Juegos no se interesa especialmente por las actividades recreativas, sí los usa como ejemplos aclaratorios y toma de ellos gran parte de su terminología. Aunque se explicará con más detalle cada uno de los términos, se incluye a continuación una primera definición de la terminología básica que se utiliza habitualmente en la Teoría de Juegos.

- *Jugadores*: Participantes que toman decisiones con el fin de maximizar su utilidad.
- *Acciones de cada jugador*: Decisiones que puede tomar cada jugador. El conjunto de acciones de un jugador puede ser finito o infinito.
- *Resultados del juego*: Distintos modos en que puede concluir un juego. Cada resultado conlleva unas consecuencias para cada jugador.
- *Pagos*: Valoración que para cada jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado. Cada jugador recibe un pago al acabar el juego.
- *Estrategias*: Plan completo de acciones con las que cada jugador participa en el juego.

- *Forma normal y forma extensiva*: Son formas de describir un juego. Ambas especifican los jugadores, las acciones y los pagos.

  La forma normal o forma estratégica organiza la descripción centrando su énfasis en las estrategias de los jugadores. La forma extensiva lo hace en forma de árbol, resaltando la secuencia del juego.

En este trabajo nos centraremos en los juegos de dos jugadores de suma cero en forma normal o forma estratégica y los beneficios se describirán desde el punto de vista del Jugador I.
A continuación se presentan unos juegos muy sencillos que ilustran los términos introducidos.

Ejemplo 1.1 (Piedra, papel o tijera)**.** *Dos individuos, a los que denominaremos Jugador I y Jugador II, escogen simultáneamente una de las tres opciones (piedra, papel o tijera). Si uno escoge la piedra y el otro papel, gana quien escoge papel. Si uno escoge la piedra y el otro la tijera, gana el que escoge piedra. Si uno escoge el papel y el otro la tijera, gana quien escoge tijera. Si los dos jugadores eligen la misma opción se empata. La información relevante la podemos resumir en la tabla 1.*

		Jugador II		
		Piedra	*Papel*	*Tijera*
	Piedra	0	-1	1
Jugador I	*Papel*	1	0	-1
	Tijera	-1	1	0

Cuadro 1: Representación en forma normal del juego 1.1

Piedra, papel o tijera son las estrategias disponibles para cada jugador. Cada jugador deberá tomar una decisión sin conocer la decisión tomada por el otro jugador pero teniendo en cuenta que ambas decisiones consideradas de forma conjunta son las que afectan al bienestar de cada uno de ellos.

Ejemplo 1.2. *Dos individuos extienden simultáneamente uno o dos dedos y dicen un número. Este número debe poder ser igual al total de dedos extendidos. Así, si un jugador extiende sólo un dedo dirá dos o tres, mientras que un jugador que extiende dos dedos dirá sólo tres o cuatro. El individuo que dice el mismo número que el total de dedos extendidos gana tantos puntos como señala y si ninguno acierta o aciertan los dos, empate.*

Consecuentemente, cada jugador tiene en realidad cuatro opciones y los resultados posibles del juegos se resumen en la tabla 2, donde (i, j) denota extensión de i dedos y llamada de j.

		Jugador II			
		(1,2)	*(1,3)*	*(2,3)*	*(2,4)*
Jugador I	*(1,2)*	0	2	-3	0
	(1,3)	-2	0	0	3
	(2,3)	3	0	0	-4
	(2,4)	0	-3	4	0

Cuadro 2: Representación en forma normal del juego 1.2.

Como los beneficios se describen desde el punto de vista del Jugador I, un resultado positivo indica una ganancia del Jugador I mientras que un resultado negativo indica la ganancia del Jugador II tanto en la tabla 1 como en la tabla 2.

Las matrices anteriores son una representación en forma normal o forma estratégica de un juego en el que los jugadores mueven simultáneamente y reciben las recompensas tal y como se especifica para las combinaciones jugadas.

A continuación introducimos la forma extensiva de representación de un juego. Para representar un juego en forma extensiva es necesario conocer las estrategias de cada jugador, las acciones disponibles de cada jugador y la función de pagos.
Consideremos el juego de *pares o nones*.

Ejemplo 1.3. *Dos jugadores muestran simultáneamente uno o dos dedos. Si el número de dedos es impar gana un punto el Jugador I. En cambio, si el número de dedos es par gana el Jugador II.*

		Jugador II	
		Uno	Dos
Jugador I	Uno	-1	1
	Dos	1	-1

Cuadro 3: Representación en forma normal del juego 1.3

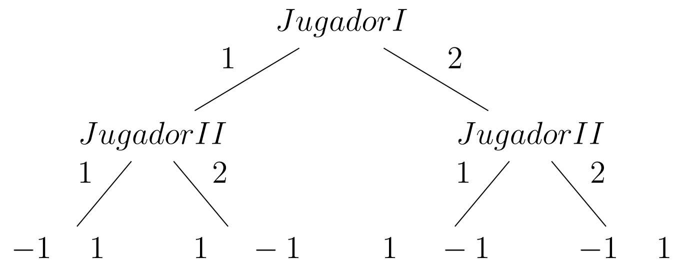

Figura 1: Representación en forma extensiva de un juego.

Cada jugador tiene dos estrategias: mostrar uno o mostrar dos dedos.
El conjunto de acciones del Jugador I es $A_I = \{uno, dos\}$, y del Jugador II es $A_{II} = \{uno, dos\}$.
Los pagos del Jugador I y del Jugador II son:

$$u_I(1,1) = u_I(2,2) = -1.$$

$$u_I(1,2) = u_I(2,1) = 1.$$

$$u_{II}(1,1) = u_{II}(2,2) = 1.$$

$$u_{II}(1,2) = u_{II}(2,1) = -1.$$

La figura 1 muestra la representación del juego de *pares o nones* en forma extensiva y nos recoge la información relevante del juego.
La representación visual que se utiliza en la representación en forma extensiva se conoce como *árbol del juego*.

2. Juegos matriciales

Los juegos matriciales son juegos en los que los jugadores tienen un número finito de estrategias. Como es el caso de los ejemplos de la sección anterior, estos juegos se representan de manera natural en forma normal y esta forma sencilla de representación es adecuada para iniciar el estudio de los conceptos de solución de un juego. En la representación en forma normal de un juego se supone que cada jugador elige de forma simultánea una estrategia y la combinación de las estrategias elegidas por los jugadores determina únicamente la ganancia de cada jugador. Las estrategias de las que disponen los jugadores son reglas predeterminadas que especifican cómo se intenta responder a cada circunstancia posible del juego.

Consideremos un juego con n jugadores. Denotaremos como S_i el conjunto finito de estrategias para el jugador i y u_i la función de ganancias o pagos del jugador i.

Sea $(s_1, ..., s_n)$ una combinación de estrategias y sea u_i la función de ganancias del jugador i, es decir, que $u_i(s_1, ..., s_n)$ es la ganancia del jugador i si, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, el jugador j implementa la estrategia $s_j \in S_j$.

Definición 2.1. *Se llama representación en forma normal de un juego con n jugadores a una especificación de los conjuntos de estrategias $S_1, ..., S_n$ y de las funciones de ganancias o pagos u_1, ..., u_n de cada uno de los jugadores. El juego se denota por*

$$G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\},$$

donde $S_i \neq \emptyset$ y $u_i : S_1 \times S_2 ... \times S_n \to \mathbb{R}$, para todo $i = 1, ...n$.

Por tanto, un juego en forma normal viene especificado por el conjunto de jugadores, el conjunto de estrategias para cada jugador y los pagos (utilidades) que reciben los jugadores para cada combinación de estrategias.

El problema del jugador i-ésimo es

$$\max_{t_i \in S_i} u_i(s_1, ..., s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, ..., s_n), \quad i = 1, ..., n,$$

supuesto que $s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n$ son las estrategias óptimas del resto de jugadores.

Ejemplo 2.1 (El dilema del prisionero)**.** *Dos delincuentes son apresados cuando acaban de cometer un delito. No hay prueba clara contra ellos, pero sí indicios fuertes de dicho delito y pruebas de delito menor. Son interrogados simultáneamente en habitaciones separadas.*

Ambos saben que si los dos se callan sólo serán condenados por el delito menor (1 año de cárcel); si ambos confiesan, serán condenados pero compartirán la pena (5 años), y finalmente, que si sólo uno confiesa y el otro no, el que confiesa se librará de pena y el otro cumplirá toda la pena (10 años).

La representación en forma normal es la siguiente:

		Jugador II	
		Callar	*Confesar*
Jugador I	*Callar*	-1,-1	-10,0
	Confesar	0,-10	-5,-5

Cuadro 4: Representación en forma normal del *Dilema del prisionero.*

Para este juego, los conjuntos de estrategias y las funciones de utilidad son:

$$S_1 = S_2 = \{Ca, Co\}$$

$$\begin{aligned} u_1(Ca, Ca) = -1 \quad \text{y} \quad u_2(Ca, Ca) = -1, \\ u_1(Ca, Co) = -10 \quad \text{y} \quad u_2(Ca, Co) = 0, \\ u_1(Co, Ca) = 0 \quad \text{y} \quad u_2(Co, Ca) = -10, \\ u_1(Co, Co) = -5 \quad \text{y} \quad u_2(Co, Co) = -5, \end{aligned}$$

donde $Ca = Callar$ y $Co = Confesar$.
Notemos que este ejemplo no es un juego de suma nula.

2.1. Solución de un juego

Cuando sólo hay un decisor la palabra solución tiene un significado claro, se trata de la decisión que más conviene al individuo que se plantea el problema, la decisión óptima. En un juego cuando hay más de un jugador, aunque cada individuo o jugador pueda identificar cuál o cuáles son los resultados óptimos para él, no puede asegurar alcanzarlos mediante su decisión ya que el resultado final del juego depende también de la decisión de los otros jugadores. Así, en una minoría de juegos hay una solución clara pero en general no existe tal solución, como es el caso del dilema del prisionero (ejemplo 2.1).

Por tanto, llamaremos solución de un juego a un conjunto de perfiles de estrategias para los que es razonable pensar que los jugadores tomarán decisiones pertenecientes a dicho conjunto y llamaremos concepto de solución de un juego a un procedimiento que permita obtener, de manera precisa y bien argumentada, una solución.

2.1.1. Soluciones de un juego mediante argumentos de dominación

Una estrategia de un jugador se dice dominante si es tan buena o mejor que cualquier otra como respuesta a cualquier combinación de estrategias que elijan los demás jugadores.

El argumento básico de dominación consiste en que un jugador racional no deberá jugar estrategias dominadas y deberá suponer que otros jugadores no van a jugar tal clase de estrategias.

Definición 2.2. *Sea $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$. Sean s_i' y s_i'' dos estrategias del jugador i. Se dice que s_i' está **dominada** por s_i'' si para todo $s_j \in S_j, j = 1, ..., n, j \neq i$ se cumple*

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n) \leq u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, ..., s_n). \tag{1}$$

Es decir, s_i' proporciona siempre menor utilidad al jugador i-ésimo que s_i''.
Equivalentemente se dice que s_i'' domina a s_i'.

Parece razonable suponer que un jugador racional, aquel que intenta maximizar sus pagos o ganancias, no utiliza estrategias dominadas.

Definición 2.3. *Sea $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ y sea s_i' una estrategia del jugador i. Decimos que s_i' es **dominante** cuando la desigualdad*

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) \leq u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n)$$

se cumple para toda estrategia $s_i \in S_i$; $\forall s_j \in S_j, j \neq i$.

Si consideramos el ejemplo 2.1 se observa que para el jugador I

$$u_1(ca, ca) = -1 < 0 = u_1(co, ca).$$

$$u_1(ca, co) = -10 < -5 = u_1(co, co).$$

Por tanto, la estrategia Ca está estrictamente dominada por la estrategia Co y, en consecuencia, el jugador I elegirá $Confesar$. Lo mismo sucede para el Jugador II.

Observamos que esta solución no es la mejor posible para ambos jugadores. Si ambos jugadores *callan* obtendrán una utilidad -1 que es mejor que la utilidad -5 que obtienen si utilizan las estrategias dominantes.
No obstante, esta utilidad mayor sólo puede obtenerse si existe un acuerdo previo. Además, este posible acuerdo es difícil de mantener ya que ambos jugadores tienen incentivo a salirse unilateralmente del acuerdo. Este es el famoso dilema del prisionero.
Sin embargo, no siempre existen estrategias dominantes.
Si consideramos el ejemplo de *Piedra, papel o tijera* (ver ejemplo 1.1) observamos que la estrategia $Piedra$ no está estrictamente dominada ni por la estrategia $Papel$ ni está estrictamente dominada por la estrategia $Tijera$:

$$u_1(piedra, tijera) = 1 \nless -1 = u_1(papel, tijera).$$

$$u_1(piedra, piedra) = 0 \nless -1 = u_1(tijera, piedra).$$

Análogamente, las estrategias $Papel$ y $Tijera$ no están estrictamente dominadas por ninguna estrategia disponible.

2.1.2. Soluciones de un juego mediante argumentos de equilibrio

El concepto de *equilibrio de Nash* es de importancia trascendental en la Teoría de Juegos. El equilibrio de Nash es un conjunto de estrategias, una para cada jugador, tales que cada una de ellas es la mejor respuesta con que cada jugador puede reaccionar a las acciones de los demás jugadores. En un equilibrio de Nash el jugador maximiza su utilidad esperada tomando las acciones de los otros como dadas. De esta forma, en un equilibrio de Nash ningún jugador se siente tentado a modificar su estrategia.

La noción de equilibrio de Nash se puede expresar de forma sencilla en forma de funciones de pagos.

Definición 2.4. *Sea $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$. Decimos que el perfil de estrategias $(s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ es un Equilibrio de Nash si para cada jugador i,*

$$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) \geq u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*), \quad \forall s_i \in S_i.$$

Esto es, s_i^* es una solución de

$$s_i^* = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*).$$

De esta definición se deduce que un Equilibrio de Nash es un perfil de estrategias del que ningún jugador tiene incentivo para desviarse unilateralmente.
En un juego bipersonal, un par de estrategias satisface la condición de Equilibrio de Nash si la estrategia de cada jugador es la mejor respuesta a la del otro jugador.
En el *dilema del prisionero*, ejemplo 2.1, un par de estrategias satisface la condición de Equilibrio de Nash si ambas ganancias están subrayadas en la matriz de la forma normal.

		Jugador II	
		Callar	*Confesar*
Jugador I	*Callar*	-1,-1	-10,$\underline{0}$
	Confesar	$\underline{0}$,-10	$\underline{-5}$,$\underline{-5}$

Cuadro 5: Equilibrio de Nash en la matriz de la forma normal.

Por ello, (Co, Co) es el único par de estrategias que satisface el Equilibrio de Nash.

A continuación tratamos la relación entre el equilibrio de Nash y la eliminación de estrategias dominadas.

2.2. Relación entre equilibrio de Nash y la eliminación de estrategias dominadas

Si la eliminación de estrategias dominadas elimina todas las estrategias menos las estrategias $(s_1^*, ..., s_n^*)$, estas estrategias constituyen el único equilibrio de Nash del juego. Sin embargo, puesto que la eliminación de estrategias dominadas con frecuencia no elimina más que una combinación de estrategias, es de interés el hecho de que el equilibrio de Nash sea un concepto de solución más poderoso que la eliminación de estrategias dominadas.

Consideremos el siguiente juego

		Jugador II		
		I	*C*	*D*
	A	0,$\underline{4}$	$\underline{4}$,0	5,3
Jugador I	*M*	$\underline{4}$,0	0,$\underline{4}$	5,3
	B	3,5	3,5	$\underline{6}$,$\underline{6}$

En este juego todas las estrategias sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas. Por tanto, este proceso no permite ninguna predicción sobre el desarrollo del juego. En cambio, este juego tiene un equilibrio de Nash en (B, D).

En este juego el equilibrio de Nash muestra una única predicción (B, D) mientras que con la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas no se elimina ninguna estrategia.

La relación entre los dos principios de solución, dominancia estricta y el equilibrio de Nash, está dada por los siguientes teoremas.

Teorema 2.1. *Si un juego se puede resolver por eliminación de estrategias dominadas, entonces la solución obtenida es un equilibrio de Nash.*

Demostración.
Supongamos que la eliminación de estrategias dominadas elimina todas excepto $(s_1^*, ..., s_n^*)$, y que esta combinación de estrategias no forma un equilibrio de Nash. Entonces debe existir un jugador i con una estrategia s_i en S_i tal que la definición de equilibrio de Nash no se cumpla, es decir, existe $s_i \in S_i$ tal que

$$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) < u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) \tag{2}$$

y además s_i debe haber sido dominada por alguna estrategia s_i' en algún otro punto del proceso, es decir, existe $s_i' \in S_i$ tal que

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) < u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n) \tag{3}$$

para cada $(s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ combinación de estrategias que puede ser construida a partir de estrategias que no han sido eliminadas. Puesto que las estrategias de los demás jugadores $(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$ nunca son eliminadas, se cumple que

$$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) < u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i', s_{i+1}^*, ..., s_n^*). \qquad (4)$$

Ahora bien, si se cumple $s_i' = s_i^*$, es decir, si s_i es dominada por la estrategias s_i^*, (4) contradice a (2) y la demostración está completa.
Si $s_i' \neq s_i^*$ debe existir otra estrategia s_i'' que domine a s_i' ya que s_i' no sobrevive al proceso. Así, las desigualdades análogas a $u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) < u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n)$ y $u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) < u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i', s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$ se cumplen para s_i' y s_i'', que sustituyen a s_i y s_i' respectivamente.
Luego si $s_i'' = s_i^*$ la demostración está completa; si no, pueden construirse otras dos desigualdades análogas. Puesto que s_i es la única estrategia de S_i que sobrevive al proceso, la repetición de este argumento completa la demostración. □

Teorema 2.2. *Si en un juego la combinación de estrategias $(s_1^*, ..., s_n^*)$ forma un equilibrio de Nash, entonces sobrevive a la eliminación de estrategias dominadas.*

Demostración.
Sea $(s_1^*, ..., s_n^*)$ la combinación de estrategias que conforma un equilibrio de Nash y supongamos que s_i^* es la primera de las estrategias del equilibrio en ser eliminada por ser dominada. Entonces, debe existir una estrategia s_i' que no ha sido aún eliminada que domina a s_i^*,

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, ..., s_n) < u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n) \qquad (5)$$

para cada $(s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ combinación de estrategias de los demás jugadores.
Puesto que s_i^* es la primera de las estrategias del equilibrio en ser eliminada, las estrategias del equilibrio de los otros jugadores no han sido eliminadas, por lo que en consecuencia de (5) es

$$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) < u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i', s_{i+1}^*, ..., s_n^*). \qquad (6)$$

Pero (6) se contradice por la definición de equilibrio de Nash, pues s_i^* debe ser una mejor respuesta a $(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$, por lo que no puede existir una estrategia s_i' que domine estrictamente a s_i^*. □

3. Juegos bipersonales de suma cero

Los juegos bipersonales de suma cero modelizan situaciones de conflicto entre dos jugadores en las cuales lo que un jugador gana es exactamente lo que su contrincante pierde. El análisis de este tipo de juegos, especialmente en su forma normal, conduce de modo general a resultados y predicciones más precisos que los juegos más generales. En un juego de dos personas de suma cero, la función de beneficio del Jugador II es la negativa de la función de beneficio del Jugador I, por tanto nos centraremos en la función de beneficio del Jugador I.

La forma normal o estratégica de un juego de dos personas de suma cero está dada por el conjunto de estrategias del Jugador I, el conjunto de estrategias del Jugador II y la función de pagos del juego.

Definición 3.1. *Sea S y T dos conjuntos y $u : S \times T \to \mathbb{R}^2$ una función. A la terna (S, T, u) se le llama juego bipersonal con conjunto de estrategias S y T. Por convenio se entenderá en lo sucesivo que S es el conjunto de estrategias del Jugador I y T el conjunto de estrategias del Jugador II.*

Se dice que un juego es de suma cero si la suma de las ganancias es cero, es decir, si se cumple

$$u_1(s,t) + u_2(s,t) = 0, \qquad s \in S, t \in T,$$

donde $u(s,t) = (u_1(s,t), u_2(s,t))$.

El juego es finito si los conjuntos S y T son finitos. Si el juego es de suma cero y finito toda la información del juego está contenida en la llamada matriz de pagos definida por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

donde $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ y $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ son los conjuntos de estrategias y

$$a_{ij} = u_1(s_i, t_j) = -u_2(s_i, t_j).$$

Podemos, por tanto, identificar la estrategia s_i del Jugador I con la fila i-ésima de A y la estrategia t_j del Jugador II con la columna j-ésima de A.

La matriz de pagos muestra la ganancia para el Jugador I o la pérdida para el Jugador II

que resulta con cada combinación de estrategias para los dos jugadores.
Supondremos, por tanto, que el Jugador I elige una fila y el Jugador II elige una columna simultáneamente, ignorando cada uno de ellos la elección del otro.

Es conveniente que introduzcamos una notación para referirnos a las filas y columnas de la matriz. Para $1 \leq i \leq m$, denotemos por a_i el vector de $\mathbb{R}^n$, $a_i = [a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}]$. Para $1 \leq j \leq n$, denotemos por $a^j = [a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}]^T$

Una vez que se conocen sus elecciones, el Jugador I gana la cantidad $u_1(s,t)$ que es pagada por el Jugador II. Si u_1 es negativo, el Jugador I paga el valor absoluto de esa cantidad al Jugador II.

Por tanto, el problema del Jugador I es

$$\max_{s \in S} u_1(s,t)$$

y el problema del Jugador II es

$$\min_{t \in T} u_1(s,t).$$

3.1. Equilibrio de Nash

Particularizando la definición del capítulo 2 al caso bipersonal tenemos la siguiente definición

Definición 3.2. *Sea (S,T,u) un juego bipersonal no necesariamente de suma cero donde S y T son los conjuntos de estrategias para los jugadores I y II respectivamente, y*

$$\begin{array}{rccc} u: & S \times T & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s,t) & \mapsto & (u_1(s,t), u_2(s,t)) \end{array}$$

es la función de resultados del juego.
Un par $(s^*, t^*) \in S \times T$ es un equilibrio de Nash si

$$u_1(s^*, t^*) \geq u_1(s, t^*), \qquad \forall s \in S,$$

$$u_2(s^*, t^*) \geq u_2(s^*, t), \qquad \forall t \in T,$$

es decir, ningún jugador puede obtener un mejor resultado cambiando de estrategia unilateralmente.

Proposición 3.1. *Sea* (S, T, u) *un juego matricial de suma cero,* (s^*, t^*) *es un equilibrio de Nash si, y sólo si,* $u_1(s^*, t^*)$ *es un punto silla de* $u_1(s, t)$*, es decir, si se verifica que*

$$u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*) \leq u_1(s^*, t), \qquad \forall s \in S, \quad \forall t \in T.$$

Demostración.
Por ser (s^*, t^*) un equilibrio de Nash se verifica que

$$\begin{aligned} u_1(s^*, t^*) &\geq u_1(s, t^*) \qquad \forall s \in S, \\ u_2(s^*, t^*) &\geq u_2(s^*, t) \qquad \forall t \in T. \end{aligned}$$

Como $u_1(s^*, t^*) = -u_2(s^*, t^*)$ por ser un juego de suma cero, se tiene que

$$-u_1(s^*, t^*) \geq -u_1(s^*, t).$$

Y por consiguiente,

$$u_1(s^*, t^*) \leq u_1(s^*, t).$$

Por tanto,

$$u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*) \leq u_1(s^*, t) \qquad \forall s \in S, \quad \forall t \in T.$$

Es decir, $u_1(s^*, t^*)$ es un punto silla de $u_1(s, t)$. □

Teorema 3.1. *Sea* G *un juego suma cero de dos jugadores definido por* (S, T, u)*. Sean* (s_1, t_1) *y* (s_2, t_2) *dos equilibrios de Nash de* G*. Entonces*
i) (s_2, t_1) *y* (s_1, t_2) *son ambos equilibrios de Nash de* G*.*
ii) $u_1(s_1, t_1) = u_1(s_1, t_2) = u_1(s_2, t_1) = u_1(s_2, t_2)$

Demostración.
Comenzamos probando ii). Como (s_2, t_2) es un equilibrio de Nash, según la definición (3.2)

$$u_1(s_2, t_2) \geq u_1(s_1, t_2).$$

Por otro lado, como (s_1, t_1) también es un equilibrio de Nash se tiene que $u_2(s_1, t_1) \geq u_2(s_1, t_2)$ y, como $u_1(s, t) = -u_2(s, t)$,

$$u_1(s_1, t_2) \geq u_1(s_1, t_1).$$

Combinando estas dos desigualdades se obtiene

$$u_1(s_2, t_2) \geq u_1(s_1, t_2) \geq u_1(s_1, t_1).$$

Razonando de la misma forma

$$u_1(s_2, t_2) \leq u_1(s_2, t_1) \leq u_1(s_1, t_1).$$

Por tanto, de las desigualdades anteriores obtenemos que

$$u_1(s_1, t_1) = u_1(s_1, t_2) = u_1(s_2, t_1) = u_1(s_2, t_2),$$

lo que prueba la segunda parte del teorema.

Para probar el apartado i) observemos que por ser (s_2, t_2) un equilibrio de Nash para el Jugador I,

$$u_1(s', t_2) \leq u_1(s_2, t_2) = u_1(s_1, t_2) \qquad \forall s' \in S,$$

donde la segunda igualdad de la ecuación se debe al apartado ii) del teorema. Similarmente, por ser (s_1, t_1) un equilibrio de Nash para el jugador II,

$$u_1(s_1, t') \geq u_1(s_1, t_1) = u_1(s_1, t_2) \qquad \forall t' \in T,$$

lo que significa que (s_1, t_2) es también un equilibrio de Nash.
La prueba es idéntica para (s_2, t_1). □

Notar que no todos los juegos poseen un equilibrio de Nash. Consideremos, por ejemplo, el juego 1.3 de *pares o nones* del capítulo 1.

		Jugador II		
		Uno	Dos	
Jugador I	Uno	-1	1	*-1*
	Dos	1	-1	*-1*
		1	*1*	

Cuadro 6: Representación en forma normal del juego *Pares y nones*.

Como se observa en la tabla 6, donde se muestra el menor elemento de cada fila y el máximo elemento de cada columna, en este juego no hay punto silla. Esto significa que para cualquier decisión de estrategias hay un jugador que puede beneficiarse cambiando de estrategia unilateralmente.

Por ejemplo, si los dos jugadores sacan dos dedos ganará el Jugador II pero al cambiar el Jugador I de estrategia pasaría a perder el Jugador II. Para determinar en estos casos estrategias óptimas y el valor del juego es necesario ampliar el conjunto de estrategias posibles.

Como no todos los juegos tienen un equilibrio de Nash es necesario introducir el concepto de estrategias mixtas.

3.2. Estrategias puras y estrategias mixtas

Hasta ahora se ha supuesto que cada vez que un jugador participa en un juego utiliza una estrategia bien definida. A partir de ahora, pensaremos que un jugador optará por una estrategia con una probabilidad determinada. Este tipo de estrategias son las que se denominan *estrategias mixtas*.
Los conjuntos S y T que definen el juego (S, T, u) se llaman conjuntos de estrategias puras. Sea $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ el conjunto de estrategias puras del Jugador I y sea $T = \{t_1, t_2, ..., t_m\}$ el conjunto de estrategias puras del Jugador II. Una estrategia mixta para el Jugador I es, por definición, una distribución de probabilidad sobre S; es decir, un conjunto $x_i \geq 0$ que verifica $\sum_i x_i = 1$ para $i = 1, ..., n$.

Diremos que el Jugador I sigue la estrategia mixta $\{x_1, ..., x_m\}$ si elige con probabilidad x_i la estrategia s_i, es decir, si elige la fila i con probabilidad x_i. Igualmente, diremos que el Jugador II sigue la estrategia mixta $\{y_1, ..., y_n\}$ si elige la estrategia t_j con probabilidad y_j, es decir, si elije la columna j con probabilidad y_j.

Definición 3.3. *Una estrategia mixta para un jugador es una distribución de probabilidad en el conjunto de sus estrategias puras.*

Se denotan por X e Y los conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores I y II respectivamente, es decir,

$$X = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 1, \quad i = 1, ..., m\}, \tag{8}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geq 1, \quad j = 1, ..., n\}. \tag{9}$$

Para interpretar el resultado del juego cuando uno o ambos jugadores utilizan estrategias mixtas, se utiliza el concepto de valor esperado.

Definición 3.4. *La función de pagos del juego* (S,T,u) *en estrategias mixtas (o simplemente la función de pagos del juego) se define como*

$$A(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i a_{ij} y_j = x^T A y, \qquad x\in X, y\in Y,$$

donde $a_{ij}=u_1(s_i,t_j)$.

Observemos que $A(x,y)$ es el valor esperado si el Jugador I elige una fila según la distribución de probabilidad $x\in X$ supuesto que el Jugador II elige una columna según la distribución de probabilidad $y\in Y$.

El objetivo del Jugador I es, entonces, maximizar su valor esperado, es decir,

$$\max_{x\in X} x^T A y,$$

y el objetivo del Jugador II es

$$\min_{y\in Y} x^T A y.$$

El conjunto de estrategias mixtas siempre incluye a todas las estrategias puras porque estas últimas pueden considerarse como un caso especial de estrategia mixta en el que la correspondiente estrategia pura se juega con probabilidad 1 y todas las demás con probabilidad cero.
A continuación se ilustra una versión del juego de *pares o nones* en el que la estrategia óptima del Jugador I es una estrategia mixta. En este juego se utilizan las estrategias puras uno y dos con probabilidad $7/12$ y $5/12$ respectivamente.

Ejemplo 3.1 (Pares o nones)**.** *El Jugador I y el Jugador II simultáneamente muestran uno o dos dedos. Si el total de dedos es impar gana el Jugador I y el jugador II gana si la suma de los dedos es par. En este caso el ganador consigue tantos puntos como dedos extendidos.*

Como siempre la función de pagos del juego $u_1(s,t)$ representa las ganancias del Jugador I y las pérdidas del Jugador II. Analicemos este juego desde el punto de vista del Jugador I. Supongamos que el Jugador I muestra *uno* con probabilidad p y muestra *dos* con probabilidad $1-p$. En este caso,

		Jugador II	
		Uno	Dos
Jugador I	Uno	-2	3
	Dos	3	-4

1. Si el Jugador II muestra *uno*, el Jugador I perderá 2 puntos con probabilidad p y ganará 3 puntos con probabilidad $1-p$. De media, el Jugador I ganará $-2p+3(1-p)$.

2. Si el Jugador II muestra *dos*, el Jugador I ganará 3 puntos con probabilidad p y perderá 4 puntos con probabilidad $1-p$. De media, el Jugador I ganará $3p-4(1-p)$.

Elegiremos p de manera que el Jugador I gane la misma cantidad media independientemente de lo que muestre el Jugador II.

Por tanto, el Jugador I deberá elegir p de forma que

$$-2p+3(1-p)=3p-4(1-p).$$

Es decir, $p=7/12$.

Por tanto, el Jugador I deberá mostrar *uno* con la probabilidad $7/12$ y *dos* con la probabilidad de $5/12$ y así, el Jugador I ganará de media $-2(7/12)+3(5/12)=1/12$ puntos cada vez que se juegue, sin importar lo que haga el Jugador II.
Si se analiza la posibilidad de obtener mejores resultados que $1/12$ puntos de media por juego, observamos que si el Jugador II juega adecuadamente no se pueden conseguir mejores resultados. De hecho, el Jugador II puede usar el mismo procedimiento:

- mostrar *uno* con probabilidad $7/12$
- mostrar *dos* con probabilidad $5/12$

Si el Jugador I muestra *uno*, la pérdida media del jugador II será $-2(7/12)+3(5/12)=1/12$ y si el Jugador I muestra *dos* dedos, la pérdida media del jugador II será $3(7/12)-4(5/12)=1/12$.

Por tanto, el Jugador I tiene un procedimiento que le garantiza al menos $1/12$ de media, y el Jugador II tiene un procedimiento que mantiene la pérdida media como mucho en $1/12$. En este caso, $1/12$ se llama el *valor del juego* y el procedimiento para asegurar su resultado se llama *estrategia óptima* o *estrategia minimax*.

Atendiendo al Jugador I, se puede argumentar que deberá recibir al menos $1/12$ puntos ya que su estrategia óptima garantiza al menos esa cantidad sin importar lo que haga el Jugador II. Por otro lado, atendiendo al Jugador II, se puede argumentar que no deberá pagar más de $1/12$ puntos ya que tiene una estrategia que mantiene su pérdida media como máximo en esa cantidad sin importar lo que haga el Jugador I.
Por tanto, parece lógico pensar que el valor del juego tenga que ser $1/12$.

3.3. Solución de un juego suma cero. El teorema minimax

Sean X e Y los conjuntos de estrategias mixtas de los Jugadores I y II. Denotemos por $\underline{\Lambda}$ a la función $\underline{\Lambda} : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\underline{\Lambda}(x) = \min_{y \in Y} x^T A y.$$

$\underline{\Lambda}$ representa el menor beneficio que puede obtener el Jugador I si utiliza la estrategia mixta $x \in X$.

Denotemos por $\overline{\Lambda}$ a la función $\overline{\Lambda} : Y \to \mathbb{R}$ definida por

$$\overline{\Lambda}(y) = \max_{x \in X} x^T A y.$$

$\overline{\Lambda}$ representa la máxima pérdida que puede obtener el Jugador II si utiliza la estrategia mixta $y \in Y$. Observemos que $\underline{\Lambda}$ y $\overline{\Lambda}$ están bien definidos ya que tanto X como Y son conjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente.
Una estrategia $x* \in X$ para el Jugador I se dice que es una estrategia maximin si

$$\underline{\Lambda}(x*) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y.$$

El número $\underline{\lambda} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y$ se llama el valor inferior del juego.

Una estrategia $y* \in Y$ para el Jugador II se dice que es una estrategia minimax si

$$\overline{\Lambda}(y*) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y.$$

El número $\overline{\lambda} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y$ se llama el valor superior del juego.
Observemos que siempre se verifica $\underline{\lambda} \leq \overline{\lambda}$.
Sea $A(x, y) = x^T A y$. En efecto, fijado x^* e $y \in Y$

$$A(x^*, y) \leq \max_{x \in X} A(x, y).$$

De donde se obtiene inmediatamente

$$\min_{y \in Y} A(x^*, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} A(x, y), \quad \forall x^* \in X.$$

Por tanto,

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} A(x,y) \leq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} A(x,y).$$

Observemos que utilizando la estrategia minimax el Jugador I minimiza la máxima pérdida posible. De la misma forma, utilizando una estrategia maximin, el Jugador I maximiza el menor beneficio posible.
El juego se dice que tiene valor o que está determinado si $\underline{\lambda} = \overline{\lambda}$.

Proposición 3.2. *Se tienen las siguientes igualdades:*

$$\underline{\Lambda}(x) = \min_{1\leq j\leq n} x^T a^j, \qquad x \in X,$$

$$\overline{\Lambda}(y) = \max_{1\leq i\leq m} a_i^T y, \qquad y \in Y.$$

Demostración.
Demostraremos la primera igualdad.
Claramente $\underline{\Lambda}(x) = \min_{y\in Y} x^T Ay \leq \min_{1\leq j\leq n} x^T a^j$.
Por otra parte, como para cada $y = [y_1, ..., y_n]^T \in Y$ se verifica que $y_j \geq 0$, para $1 \leq j \leq n$ y $\sum_{j=1}^n y_j = 1$ y como para cada $x = [x_1, ..., x_m]^T \in X$ se verifica que $x_i \geq 0$, para $1 \leq i \leq m$ y $\sum_{i=1}^m x_i = 1$, se tiene que para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$

$$x^T Ay = \sum_{j=1}^n y_j x^T Ae_j \geq \sum_{j=1}^n y_j \min_{1\leq j\leq n} x^T Ae_j = \min_{1\leq j\leq n} x^T a^j \sum_{j=1}^n y_j = \min_{1\leq j\leq n} x^T a^j,$$

donde e_j denota el j-ésimo vector de la base estándar de $\mathbb{R}^n$. Por tanto $\underline{\Lambda}(x) \geq \min_{1\leq j\leq n} x^T a^j$, lo que termina la demostración.
La demostración para $\overline{\Lambda}(y)$ es completamente análoga. $\square$

Teorema 3.2 (Teorema minimax para juegos 2×2)**.** *Todo juego matricial de suma cero con* $n = m = 2$ *tiene un valor. Es decir*

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} x^T Ay = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} x^T Ay.$$

Demostración.
Consideremos el juego 2×2 de matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si existe un punto de silla para A el juego posee un valor en estrategias puras y la prueba habrá terminado. Supongamos entonces, que no existe un punto de silla. Esto significa, en primer lugar, que las filas no son proporcionales, es decir, $a - c \neq b - d$. Por otra parte, si $a \geq b$, es $b < d$ ya que b no es punto de silla. Como $b < d$ debemos tener $d > c$ ya que, en caso contrario, d sería punto de silla. Por la misma razón, $c < a$ y $a > b$.
Razonando de la misma forma, si $a \leq b$ debe ser $a < b$, $b > d$, $d < c$ y $c > a$.

Esto muestra que si no existe punto de silla se cumple que

$$a > b; b < d; d > c \quad \text{y} \quad c < a \qquad \text{ó} \qquad a < b; b > d; d < c \quad \text{y} \quad c > a.$$

Supongamos ahora que el Jugador I elige la primera fila con probabilidad p y la segunda con probabilidad $1 - p$ y sea $x = x_p = [p, 1 - p]^T$. Se tiene que, por la proposición (3.2),

$$\underline{\Lambda}(x) = \text{mín}\{ap + c(1 - p), bp + d(1 - p)\}.$$

Observemos que como $a - b$ y $d - c$ tienen el mismo signo,

$$p^* = \frac{d - c}{a - b + (d - c)},$$

verifica que $0 \leq p^* \leq 1$.
Tomando $x^* = x_{p^*} = [p^*, 1 - p^*]$ tenemos que

$$\underline{\Lambda}(x^*) = ap^* + c(1 - p^*) = bp^* + d(1 - p^*) = \frac{ad - bc}{a - b + d - c}.$$

Observemos que $\underline{\lambda} = \underline{\Lambda}(x^*)$ ya que p^* es la abscisa del punto de corte de las rectas $z = ap + c(1 - p)$ y $z = bp + d(1 - p)$.

Suponiendo, ahora, que el Jugador II utiliza la estrategia mixta $y = [q, 1 - q]$ y tomando

$$q^* = \frac{d - b}{a - b + d - c} \qquad \text{e} \qquad y^* = [q^*, 1 - q^*],$$

obtenemos, razonando como antes, que

$$\overline{\lambda} = \overline{\Lambda}(y^*) = \frac{ad - bc}{a - b + d - c},$$

lo que prueba que $\underline{\lambda} = \overline{\lambda}$ y el juego posee un valor. □

Ejemplo 3.2. *Consideramos el juego matricial*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Se obtiene que

$$p = \frac{-4-3}{-2-3-4-3} = 7/12; \quad q = \frac{-4-3}{-2-3-4-3} = 7/12$$
$$v = \frac{8-9}{-2-3-4-3} = 1/12$$

Por tanto, la estrategia maximin para el Jugador I es $[7/12, 5/12]$*, la estrategia minimax para el Jugador II es* $[7/12, 5/12]$ *y el valor del juego es* $1/12$.

A continuación, se incluye el enunciado y demostración del Teorema Minimax general de Von Neumann.

Teorema 3.3 (Teorema minimax de Von Neumann).)**.** *Todo juego matricial tiene un valor (en estrategias mixtas), es decir,*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y.$$

Demostración.
Sea A un juego matricial $m \times n$ y, por tanto, el tamaño de la matriz A es $n + m$. La demostración de este teorema es por inducción en el tamaño de la matriz.

Sea $t = l + m$. Si el tamaño de la matriz es 4 entonces el juego tiene valor por el teorema 3.2. Supongamos que todo juego matricial es estrictamente determinado si su tamaño es más pequeño que t.

Consideremos

$$\underline{\Lambda}(x) = \min_{1 \le j \le n} x^T a^j \quad \text{y} \quad \overline{\Lambda}(y) = \max_{1 \le i \le m} a_i y. \tag{10}$$

Como $\underline{\Lambda}(x)$ y $\overline{\Lambda}(y)$ son funciones continuas y están definidas en X e Y respectivamente, y X e Y son conjuntos compactos, existe $x^* \in X$ e $y^* \in Y$ tal que

$$\underline{\Lambda}(x*) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} x^T a^j = \underline{\lambda} \quad \text{y} \quad \overline{\Lambda}(y*) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} a_i y = \overline{\lambda}. \tag{11}$$

Así, para cada j, con $1 \leq j \leq n$,

$$x^{*T} a^j \geq \min_{1\leq j\leq n} x^{*T} a^j = \underline{\Lambda}(x*) = \max_{x\in X} \min_{j} x^T a^j$$

y para cada i,con $1 \leq i \leq m$,

$$a_i^T y^* \leq \max_{1\leq i\leq m} a_i^T y^* = \overline{\Lambda}(y*) = \min_{y\in Y} \max_{i} a_i^T y.$$

Distinguimos tres casos.

1. Para cada $j,\ 1 \leq j \leq n,\ x^{*T} a^j = \underline{\lambda}$, y, para cada $i,\ 1 \leq i \leq m,\ a_i^T y^* = \overline{\lambda}$.
2. Existe $k,\ 1 \leq k \leq n$, tal que $x^{*T} a^k > \underline{\lambda}$.
3. Existe $h,\ 1 \leq h \leq m$, tal que $a_h^T y^* < \overline{\lambda}$.

En el caso 1, el juego tiene valor claramente.
Nos centramos en el caso 2 porque 3 es análogo.

Como existe k, $1 \leq k \leq n$ tal que $x^{*T} a^k > \underline{\lambda}$ entonces $n > 1$.
Sea A^{-k} la matriz resultante de eliminar la k-ésima columna de A. El conjunto de estrategias mixtas del Jugador II en A^{-k} se puede identificar por

$$Y^{-k} = \{y \in Y : y_k = 0\}.$$

Sean $\underline{\lambda}^{-k}$ y $\overline{\lambda}^{-k}$ los valores minimax y maximin del juego de matriz A^{-k}, respectivamente. Por hipótesis de inducción, el juego de matriz A^{-k} tiene un valor y, por tanto,

$$\underline{\lambda}^{-k} = \overline{\lambda}^{-k}.$$

Por otra parte,

$$\underline{\lambda}^{-k} = \max_{x\in X} \min_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} x^T a^j \geq \max_{x\in X} \min_{j\in\{1,\dots,n\}} x^T a^j = \underline{\lambda} \tag{12}$$

y

$$\overline{\lambda}^{-k} = \min_{y\in Y^{-k}} \max_{1\leq i\leq m} a_i y \geq \min_{y\in Y} \max_{1\leq i\leq m} a_i y = \overline{\lambda}. \tag{13}$$

Ahora probaremos que $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^{-k}$, con lo que que

$$\underline{\lambda} = \underline{\lambda}^{-k} = \overline{\lambda}^{-k} \geq \overline{\lambda} \geq \underline{\lambda}, \tag{14}$$

lo que termina la prueba.

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que $\underline{\lambda}^{-k} > \underline{\lambda}$ y sea x' tal que $\underline{\lambda}^{-k} = \min_{j\in\{1,\dots,m\}\setminus\{k\}} x'^T a^j$. Entonces para cada $j \in \{1, ..., m\} \setminus \{k\}$,

$$x'^T a^j \geq \underline{\lambda}^{-k} > \underline{\lambda}. \tag{15}$$

Por último, utilizando (11), se tiene que, para cada $\epsilon \in (0,1)$ y cada $j \in \{1, ..., m\} \setminus \{k\}$,

$$(\epsilon x'^T + (1-\epsilon)\overline{x}^T)a^j > \underline{\lambda}.$$

Además, como $\overline{x}^T a^k > \underline{\lambda}$, existe $\overline{\epsilon} \in (0,1)$ suficientemente pequeño tal que

$$(\overline{\epsilon} x'^T + (1-\overline{\epsilon})\overline{x}^T)a^k > \underline{\lambda}.$$

Por tanto,

$$\underline{\lambda} = \max_{x\in X} \min_j x^T a^j \geq \min_j (\overline{\epsilon} x' + (1-\overline{\epsilon})\alpha) > \underline{\lambda},$$

lo que es imposible. □

3.4. Cálculo de la solución de un juego suma cero

3.4.1. Principio de Indiferencia

Sea A un juego matricial $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si el Jugador I utiliza la estrategia mixta $x = (x_1, ..., x_m)^T$ y el Jugador II usa la columna j, el pago esperado del Jugador I es

$$x^T A e_j = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}.$$

Si v es el valor del juego, una estrategia óptima x para el Jugador I garantiza que el pago medio para el Jugador I sea al menos v sin importar la columna j que utilice el Jugador II, es decir,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq v, \quad \forall j = 1, ..., n. \tag{16}$$

Similarmente, una estrategia $y = (y_1, ..., y_n)^T$ es óptima para el Jugador II si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v, \quad \forall i = 1, ..., m. \tag{17}$$

Cuando ambos jugadores usan sus estrategias óptimas el pago esperado $\sum_i^m \sum_j^n x_i a_{ij} y_j$ es exactamente v, es decir,

$$\begin{aligned} v = \sum_{j=1}^{n} v y_j \leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}) y_j &= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij}) y_j \\ = \sum_{i=1}^{m} x_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j) \leq \sum_{i=1}^{m} x_i v = v. \end{aligned}$$

Teorema 3.4 (El teorema de equilibrio)**.** *Sea A un juego matricial $m \times n$ y sea v el valor del juego. Sea $x = (x_1, ..., x_m)^T$ una estrategia óptima para el Jugador I e $y = (y_1, ..., y_n)^T$ una* *estrategia óptima para el Jugador II. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = v, \quad \forall i \quad \textit{con} \quad x_i > 0, \tag{18}$$

y

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} = v, \quad \forall j \quad \textit{con} \quad y_j > 0. \tag{19}$$

Demostración.
Para probar (18), razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un k tal que $x_k > 0$ y $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j \neq v$. De la desigualdad (17), se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j < v.$$

Por tanto,

$$v = \sum_{i=1}^{m} x_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j) < \sum_{i=1}^{m} x_i v = v.$$

La desigualdad es estricta ya que es estricta para el k-ésimo término de la suma. Por tanto, llegamos a una contradicción y se concluye con que el supuesto de partida es falso.
De forma análoga se tiene (19). $\square$

Este teorema es útil en ciertas clases de juegos ya que puede ayudarnos a encontrar la solución del problema. El procedimiento de este teorema sugiere para el Jugador I tratar de encontrar una solución a $\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} = v \;\; \forall j$ con $y_j > 0$ formada por aquellos j que es probable que sean $y_j > 0$. Una forma de decir esto es que el Jugador I busca una estrategia que hace que el Jugador II sea indiferente en cuanto a qué estrategias puras usar. Del mismo modo, el jugador II debe jugar de tal manera que el jugador I sea indiferente entre sus estrategias. Esto se llama el **Principio de indiferencia**.

Ejemplo 3.3. *Consideramos una versión del juego pares o nones en el que ambos jugadores simultáneamente extienden cero, uno o dos dedos. El Jugador I gana cuando la suma es impar y el Jugador II gana cuando la suma es par. La matriz de pagos del Jugador I es*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

De nuevo es difícil adivinar quién tiene ventaja. Si se juega pocas veces, se puede suponer que la estrategia óptima del Jugador II da un peso positivo a todas las columnas.

El Jugador I deberá jugar para hacer al Jugador II indiferente, es decir, la estrategia óptima del Jugador I debe satisfacer, si $p = (p_1, p_2, p_3)$,

$$p_2 - 2p_3 = v \tag{20}$$

$$p_1 - 2p_2 + 3p_3 = v \tag{21}$$

$$-2p_1 + 3p_2 - 4p_3 = v \tag{22}$$

Se verifica además una cuarta ecuación

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Por tanto, tenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (p_1, p_2, p_3, v).
La solución del sistema es $p = (1/4, 1/2, 1/4)^T$ *y* $v = 0$.

Por tanto,

$$p = (1/4, 1/2, 1/4)^T$$

es una estrategia para el Jugador I, el Jugador I consigue la ganancia media de 0 *sin importar lo que haga el Jugador II.*
Así, el valor del juego es al menos 0, *y* $v = 0$ *si es correcta nuestra suposición de que la estrategia óptima del Jugador II da un peso positivo a todas las columnas.*

Como la matriz del juego es simétrica, notemos que la estrategia óptima del Jugador II debe satisfacer el mismo conjunto de ecuaciones con p *reemplazado por* q.
Por tanto,

$$q = (1/4, 1/2, 1/4)^T$$

es una estrategia para el Jugador II, el Jugador II consigue la pérdida media de 0 *sin importar lo que haga el Jugador I.*
Así el valor del juego es 0 *y* $p = (1/4, 1/2, 1/4)^T$ *y* $q = (1/4, 1/2, 1/4)^T$ *son óptimas para el*

Jugador I y el Jugador II respectivamente. Como el valor del juego es 0*, el juego es justo.*

3.4.2. Programación lineal

La optimización consiste en la identificación de una solución de un problema dado por un funcional objetivo minimizando una o varias funciones de coste o, inversamente, maximizando el beneficio.
Especial importancia tiene el modelo de *programación lineal*, en el que las funciones que aparecen tanto en la función objetivo como en las restricciones son funciones lineales.

En esta sección, veremos que el problema del juego bipersonal de suma cero puede plantearse de forma equivalente mediante una formulación de programación lineal.

En nuestro caso, el Jugador I espera que el Jugador II elija aquella estrategia que minimice su valor esperado y con ello el valor del juego, es decir, el Jugador I conoce que el valor del juego es

$$v = \min_{j}\{\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}\}. \tag{23}$$

Por lo tanto, para el Jugador I el problema es cómo maximizar ese valor, o sea, su problema es

$$\max_{x} \min_{j}\{\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}\} \tag{24}$$

Se tiene, entonces, la siguiente proposición:

Proposición 3.3. *Sea* v *el valor del juego (24) con matriz de pagos* $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m 1\leq j\leq n}$. *Entonces el problema del Jugador I puede escribirse como*

$$\begin{aligned} \max_{x,\underline{\Lambda}} \quad & \underline{\Lambda} \\ \textit{sujeto a} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq \underline{\Lambda}, \quad j = 1, ..., n; \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1; \\ & x_1, ..., x_m \geq 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Demostración.

Veamos que la formulación (25) resuelve el problema para el Jugador I.
Sea $(x^*, \underline{\Lambda}^*)$ un óptimo para (25), como $\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} \geq \underline{\Lambda}^*$, $\forall j$, debe ser

$$\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} = \underline{\Lambda}^*$$

ya que, si $\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} > \underline{\Lambda}^*$, para todo $j = 1, ..., n$, entonces $\underline{\Lambda}^*$ no puede ser óptimo para (25) (existe $\underline{\Lambda} > \underline{\Lambda}^*$ y $\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} \geq \underline{\Lambda}$ para todo $j = 1, ..., n$).
Además,

$$\underline{\Lambda}^* = \max_{x} \min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}$$

y $\underline{\Lambda}^*$ es el valor del juego. □

De la misma forma, el problema del Jugador II es

$$\begin{aligned} \min_{y,\overline{\Lambda}} \quad & \overline{\Lambda} \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \overline{\Lambda}, \quad i = 1, ..., m; \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1; \\ & y_1, ..., y_n \geq 0. \end{aligned} \tag{26}$$

En el desarrollo de la programación lineal la teoría de la dualidad es importante, tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista práctico. Introduciremos, a continuación, algunas nociones que necesitaremos a lo largo de esta sección.
Para cada modelo lineal se puede escribir el modelo dual asociado. Consideremos el siguiente

programa lineal al que llamaremos *modelo primal*

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = c_1x_1 + .. + c_nx_n \\ \text{sujeto a} \quad & a_{12}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \qquad \qquad ..... \\ & a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1 \geq 0; ...; x_n \geq 0; \end{aligned}$$

Si formamos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}; c = \begin{bmatrix} c_1 \\ .. \\ c_n \end{bmatrix}$$

podemos expresar el problema de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = c^T x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{27}$$

donde A es una matriz $m \times n$ y x es la solución del problema.
En (27) y en lo que sigue se entiende que si $\alpha = [\alpha_1, ..., \alpha_s]$, $\beta = [\beta_1, ..., \beta_s]$ son vectores de la misma dimensión, $\alpha \leq \beta$ significa $\alpha_i \leq \beta_i$, $1 \leq i \leq s$.

Se llama *modelo dual* al problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & w = b^T y \\ \text{sujeto a} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{28}$$

Podemos enunciar las siguientes relaciones entre un problema primal y su dual:

- El dual tiene tantas restricciones como variables existen en el primal.
- El dual tiene tantas variables como restricciones existen en el primal.

- Los coeficientes de la función objetivo del programa primal son los términos independientes de las restricciones del dual.
- Los términos independientes de las restricciones del programa primal son los coeficientes de la función objetivo del programa dual.
- A un programa primal de maximización le corresponde un dual de minimización y viceversa.

Los siguientes teoremas establecen las relaciones entre el problema primal, el dual y las soluciones de ambos problemas.

Se dice que un vector x es una solución factible del problema si satisface el sistema de inecuaciones $Ax \leq b$ y cumple que $x \geq 0$.

Teorema 3.5 (Dualidad débil)**.** *Sean x e y soluciones factibles para los problemas primal y dual respectivamente. Entonces, se verifica*

$$c^T x \leq b^T y$$

Demostración.
Por ser x solución factible primal, se cumple que $Ax \leq b$ y $x \geq 0$. Por ser y solución factible dual, se cumple que $A^T y \geq c$ e $y \geq 0$. Multiplicando por y^T la desigualdad $Ax \leq b$ y por x^T la desigualdad $A^T y \geq c$ se tiene

$$y^T Ax \leq y^T b = b^T y,$$

$$x^T A^T y \geq x^T c = c^T x.$$

Dado que $x^T A^T y = y^T Ax$, tenemos que

$$c^T x \leq y^T Ax \leq b^T y.$$

$\square$

Corolario 3.1. *Si las soluciones factibles x^* e y^* verifican $c^T x^* = b^T y^*$, entonces x^* e y^* son soluciones óptimas para el primal y el dual respectivamente.*

Demostración.
El teorema de dualidad débil asegura que para cualquier par de soluciones factibles x e y se verifica

$$c^T x \leq b^T y.$$

Si tomamos, en particular, la solución factible y^*, se verifica que $c^T x \leq b^T y^*$ para todo x solución factible del problema primal. Dado que $c^T x^* = b^T y^*$, para cualquier solución x del problema primal se tiene

$$c^T x \leq c^T x^*,$$

de donde se deduce que x^* es solución óptima del problema primal. De la misma forma

$$b^T y^* = c^T x^* \leq b^T y.$$

Por tanto, para cualquier solución factible y del problema dual se verifica

$$b^T y^* \leq b^T y,$$

de donde se deduce que y^* es solución óptima del dual. $\square$

Veamos que nuestro problema de Teoría de Juegos puede escribirse como un problema de programación lineal.

Es conveniente escribir los problemas (25) y (26) en forma matricial, con lo que la expresión (25) se reduce a

$$\max_{x,\underline{\Lambda}} \underline{\Lambda} \quad \text{sujeto a} \quad x^T a^j \geq \underline{\Lambda}, 1 \leq j \leq n, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1; \tag{29}$$

y la expresión (26) se reduce a

$$\min_{y,\overline{\Lambda}} \overline{\Lambda} \quad \text{sujeto a} \quad {a_i}^T y \leq \overline{\Lambda}, 1 \leq i \leq m, \quad y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1; \tag{30}$$

Se trata de probar que los problemas (29) y (30) son duales.

Supondremos en lo que sigue que $\underline{\Lambda} > 0$ y $\overline{\Lambda} > 0$.

Lo primero es observar que la condición $\underline{\Lambda} > 0$ ($\overline{\Lambda} > 0$) no es restrictiva ya que a cualquier juego se le puede sumar una constante y, obviamente, los juegos matriciales A y $A+C$ con C constante, poseen las mismas estrategias óptimas y tomando C suficientemente grande puede conseguirse que el valor sea estrictamente positivo.

Proposición 3.4. *El problema (29) es equivalente al siguiente problema de programación lineal en forma estándar*

$$\begin{aligned} &\min_{p\in\mathbb{R}^m} p^T 1_m \quad \textit{sujeto a} \quad p^T A \geq 1_n, \quad p \geq 0, \\ &\textit{donde} \quad 1_n = [1,...,1]^T \in \mathbb{R}^n \quad \textit{y} \quad 1_m = [1,...,1]^T \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{31}$$

Demostración.
Es obvio que el problema (29) con $\underline{\Lambda} > 0$ es equivalente al siguiente problema.

$$\min \frac{1}{\underline{\Lambda}} \quad \text{sujeto a} \quad x^T a^j \geq \underline{\Lambda}, 1 \leq j \leq n, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1; \quad \underline{\Lambda} > 0, \tag{32}$$

Veamos la equivalencia entre el problema (32) y (31).

Para cada solución factible $(x, \underline{\Lambda})$ de (32) ponemos $p = \frac{1}{\underline{\Lambda}}x$. Es claro que $p^T A \geq 1_n$ y $p_i \geq 0$. Es decir p es factible para (31).
Si $(x^*, \underline{\Lambda}^*)$ es óptimo para (32) entonces $p^* = \frac{1}{\underline{\Lambda}^*}x^*$ es óptimo para (31).

En caso contrario, si existe p con $p^T 1_m < p^{*T} 1_m$, definiendo $\underline{\Lambda} = \frac{1}{p^T 1_m}$ y $x = \underline{\Lambda} p$. Tenemos que $x^T A \geq \Lambda_1$, es decir, $(x, \underline{\Lambda})$ es factible y

$$\frac{1}{\underline{\Lambda}} = p^T 1_m < p^{*T} 1_m = \frac{1}{\underline{\Lambda}^*}$$

en contra de que $(x^*, \underline{\Lambda}^*)$ es óptimo.

Recíprocamente, si p^* es óptimo para (31) definamos $\underline{\Lambda}^* = \frac{1}{p^* 1_m}$ y $x^* = \underline{\Lambda}^* p^*$. Veamos que $(x^*, \underline{\Lambda}^*)$ es óptimo para (32).
Si $(x^*, \underline{\Lambda}^*)$ no es óptimo para (32), existe $(x', \underline{\Lambda}')$ con $\frac{1}{\underline{\Lambda}'} < \frac{1}{\underline{\Lambda}^*}$, $x'^T a^j \geq \underline{\Lambda}'$ y $\sum_i x'_i = 1$ con $x'_i \geq 0$.

Definiendo $p' = \frac{1}{\underline{\Lambda}'}x'$, se tiene que

$$p'^T a^j = \frac{1}{\underline{\Lambda}'} x'^T a^j \geq 1 \quad \text{(factible)}$$

y

$$p'^T 1_m = \frac{1}{\underline{\Lambda}'} x'^T 1_m = \frac{1}{\underline{\Lambda}'} < \frac{1}{\underline{\Lambda}^*} = p^{*T} 1_m,$$

en contra de que p^* es óptimo. □

De la misma forma, se prueba que el problema (30) es equivalente al siguiente problema de programación lineal en forma estándar

$$\begin{aligned} &\max_{w \in \mathbb{R}^m} w^T 1_n \quad \text{sujeto a} \quad Aw \geq 1_m, \quad w_i \geq 0, \\ &\text{donde} \quad 1_n = [1, ..., 1]^T \in \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad 1_m = [1, ..., 1]^T \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{33}$$

Como los términos independientes de las restricciones del programa primal son los coeficientes de la función objetivo del programa dual, los problemas (31) y (33) son claramente problemas duales.

Corolario 3.2. *Los problemas del Jugador I y el Jugador II son duales.*

Por lo tanto, al ser problemas duales, basta con resolver uno de ellos y obtener la solución del otro a partir de las variables duales.
Para ilustrar el procedimiento resolvamos el siguiente problema.

Ejemplo 3.4. *La matriz de pagos del Jugador I es*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es claro que no hay estrategias puras en equilibrio.

Formulamos uno de los problemas de programación lineal, o el del Jugador I

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & v \\ \textit{sujeto a} \quad & 2p_1 + 7p_2 \geq v \\ & 4p_1 + 2p_2 \geq v \\ & 3p_1 + 5p_2 \geq v \\ & p_1 + p_2 = 1 \\ & p_1, p_2 \geq 0 \end{aligned}$$

o bien, el del Jugador II

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & w \\ \textit{sujeto a} \quad & 2q_1 + 4q_2 + 3q_3 \leq w \\ & 7q_1 + 2q_2 + 5q_3 \leq w \\ & q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ & q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si por ejemplo resolvemos este último problema, la solución óptima es $q_1 = 2/7$, $q_2 = 5/7$, $q_3 = 0$ *, siendo* $w = v = 24/7$ *, y las variables duales son* $(-5/7, -2/7)$ *, de donde se deduce que la estrategia óptima del Jugador I es* $p_1 = 5/7$ $p_2 = 2/7$.

4. Algunos teoremas Minimax

En este capítulo se muestran unos teoremas minimax para juegos suma cero generales.

Recordemos que en un juego matricial de suma cero en el que intervienen dos jugadores, el Jugador I tiene el conjunto de estrategias puras $\{s_1, ..., s_n\}$ y el Jugador II tiene el conjunto de estrategias puras $\{t_1, ..., t_m\}$. Para cada par (s_i, t_j) hay una ganancia β_{ij} para el Jugador I (pérdida para el Jugador II).

Cada distribución de probabilidad $x = (x_1, ..., x_n)$ es un estrategia mixta para el Jugador I y cada distribución de probabilidad $y = (y_1, ..., y_m)$ es una estrategia mixta para el Jugador II. Para cada par de estrategias mixtas (x, y) la función de pagos se define como

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A(s_i, t_j) x_i y_j$$

para una determinada matriz de componentes $\{A(s_i, t_j)\}_{1 \le i \le n; 1 \le j \le m}$ que define el juego. Como hemos visto en el capítulo anterior se verifica:

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y),$$

donde X e Y son los símplices $\{x = (x_1, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \ge 0, i = 1, ..., n\}$, e $\{y = (y_1, ..., y_m) \mid \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, y_j \ge 0, j = 1, ..., m\}$ respectivamente.

El objetivo de este capítulo es presentar algunas generalizaciones de este resultado necesarias para abordar otros juegos más complicados.

En particular, consideraremos juegos en los que la función de pagos viene dada por una función $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ no necesariamente bilineal como en el capítulo anterior que satisface ciertas propiedades que se especificarán más adelante. En lo sucesivo, X e Y son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

Como antes, el Jugador I trata de minimizar $f(x, y)$ eligiendo $x \in X$ adecuadamente y el Jugador II trata de maximizar $f(x, y)$ eligiendo $y \in Y$.

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.1. *Sea $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ una función y $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ dos subconjuntos* *dados, se satisface la desigualdad*

$$\sup_{y\in Y}\operatorname{ínf}_{x\in X} f(x,y) \leq \operatorname{ínf}_{x\in X}\sup_{y\in Y} f(x,y).$$

Demostración.
En efecto, fijado y^* y $x \in X$

$$f(x,y^*) \leq \sup_{y\in Y} f(x,y).$$

De donde se obtiene inmediatamente

$$\operatorname{ínf}_{x\in X} f(x,y^*) \leq \operatorname{ínf}_{x\in X}\sup_{y\in Y} f(x,y), \quad \forall y^* \in Y.$$

Por tanto,

$$\sup_{y\in Y}\operatorname{ínf}_{x\in X} f(x,y) \leq \operatorname{ínf}_{x\in X}\sup_{y\in Y} f(x,y).$$

□

Los llamados *teoremas minimax* contemplan condiciones suficientes para que se verifique la igualdad minimax:

$$\sup_{y\in Y}\operatorname{ínf}_{x\in X} f(x,y) = \operatorname{ínf}_{x\in X}\sup_{y\in Y} f(x,y).$$

4.1. Nociones fundamentales y definiciones

Definición 4.1. *Sea X un espacio vectorial normado y $f : U \to \mathbb{R}$, con $U \subset X$. Diremos que f es semicontinua inferiormente en un punto $x \in U$ si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset U$ con $x_n \to x$, se tiene*

$$f(x) \leq \operatorname{lím\,inf}_{n} f(x_n).$$

Diremos que f es semicontinua inferiormente en U si lo es en todo punto x de U.

Definición 4.2. *Sea X un espacio vectorial normado y $f : U \to \mathbb{R}$, con $U \subset X$. Diremos que f es semicontinua superiormente en un punto $x \in U$ si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset U$ con $x_n \to x$, se tiene*

$$f(x) \geq \operatorname{lím\,sup}_{n} f(x_n).$$

Diremos que f es semicontinua superiormente en U si lo es en todo punto x de U.
Es conocido que si f es semicontinua superiormente y U es compacto entonces existe $x \in U$

tal que $f(x) = \text{máx}_{y \in U} f(y)$. De la misma forma si f es semicontinua inferiormente, existe $x \in U$ tal que $f(x) = \text{mín}_{y \in U} f(y)$.

Definición 4.3. *Sea X un espacio vectorial y $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación. Diremos que f es casi-convexa en X si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto*

$$S_\lambda = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\} \tag{34}$$

es un conjunto convexo en X.
f es casi-cóncava en X si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$S^\lambda = \{x \in X : f(x) \geq \lambda\} \tag{35}$$

es un conjunto convexo en X.

Proposición 4.2. *Sea X un espacio vectorial. Entonces $f : X \to \mathbb{R}$ es casi-cóncava si y sólo si $\forall x, y \in X,\ \ \forall \gamma \in [0, 1]$,*

$$f(\gamma x + (1 - \gamma)y) \geq \text{mín}\{f(x), f(y)\}. \tag{36}$$

Demostración.
Condición necesaria. Sean $x, y \in X$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(x) \leq f(y)$. Sea $\lambda = f(x)$. Entonces se tiene que $y \in S^\lambda$ donde S^λ es el conjunto definido en (35). Como S^λ es un conjunto convexo y $x \in S^\lambda$, tenemos que $\forall \gamma \in [0, 1]$, $\gamma x + (1 - \gamma)y \in S^\lambda$.

Por tanto,

$$f(\gamma x + (1 - \gamma)y) \geq f(x) = \text{mín}\{f(x), f(y)\}.$$

Condición suficiente. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y S^λ como en (35). Se quiere probar que S^λ es un conjunto convexo. Es decir, $\forall x, y \in S^\lambda, \forall \gamma \in [0, 1]$, $\gamma x + (1 - \gamma)y \in S^\lambda$.

Por hipótesis

$$f(\gamma x + (1 - \gamma)y) \geq \text{mín}\{f(x), f(y)\}.$$

Como $f(x) \geq \lambda$ y $f(y) \geq \lambda$ tenemos que

$$f(\gamma x + (1 - \gamma)y) \geq \text{mín}\{f(x), f(y)\} \geq \lambda.$$

luego $\gamma x + (1-\gamma)y \in S^\lambda$. $\square$

Definición 4.4. *Sea P un subconjunto de un espacio vectorial real. Llamamos envolvente convexa de P al mínimo conjunto convexo que contiene a los puntos de P.*

La envolvente convexa se construye como el conjunto de las combinaciones convexas de puntos de P, es decir,

$$co(P) = \left\{ p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, p_i \in P \right\}$$

En los sucesivo todos los espacios vectoriales se considerarán reales.

4.2. Teorema de Sion y Teorema de Kneser-Fan

A continuación enunciaremos el teorema minimax dado por M. Sion y cuya demostración se corresponde con la del artículo [5]. Antes de enunciar y probar el teorema se procederá a probar dos lemas técnicos que nos serán útiles en la demostración principal.

Lema 4.1. *Sea X un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$ e Y un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$, y sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función satisfaciendo*
***i)** Para todo $x \in X$ la función $y \mapsto f(x, y)$ es semicontinua superiormente y casi-cóncava en Y.*
***ii)** Para todo $y \in Y$ la función $x \mapsto f(x, y)$ es semicontinua inferiormente y casi-convexa en X.*
Entonces $\forall y_1, y_2 \in Y$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\alpha < \min_{x \in X} \max\{f(x, y_1), f(x, y_2)\},$$

existe $y_0 \in Y$ que satisface:

$$\alpha < \min_{x \in X} f(x, y_0).$$

Demostración.
Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existen $y_1, y_2 \in Y$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \min_{x \in X} \max\{f(x, y_1), f(x, y_2)\}$ y que se verifica que $\forall y \in Y$

$$\alpha \geq \min_{x \in X} f(x, y).$$

Sea β tal que

$$\alpha < \beta < \min_{x\in X} \max\{f(x,y_1), f(x,y_2)\}.$$

Denotemos por $[y_1,y_2]$ el segmento $\{\gamma y_1 + (1-\gamma)y_2 : \gamma \in [0,1]\}$. Para cada $z \in [y_1,y_2]$ sean $C(z)$ y $C'(z)$ los conjuntos siguientes

$$C(z) = \{x \in X : f(x,z) \leq \alpha\}, \qquad C'(z) = \{x \in X : f(x,z) \leq \beta\}.$$

Para todo $z \in Y$ los conjuntos $C(z)$ y $C'(z)$ son no vacíos ya que, por hipótesis, $\alpha \geq \min_{x\in X} f(x,z)$ para todo $z \in Y$. Además, $C(z)$ y $C'(z)$ son cerrados ya que para cada $z \in Y$ la función $x \mapsto f(x,z)$ es semicontinua inferiormente. Por otra parte, para todo $z \in Z$, el conjunto $C'(z)$ es conexo ya que es convexo por ser la función $x \mapsto f(x,z)$ casi- convexa.
Consideremos, ahora, los conjuntos cerrados, conexos, no vacíos $A = C'(y_1)$ y $B = C'(y_2)$. Se verifica que $A \cap B = \emptyset$ ya que si existe $x_0 \in A \cap B$, es

$$\max\{f(x_0,y_1), f(x_0,y_2)\} \leq \beta$$

y, por tanto,

$$\beta \geq \min_{x\in X} \max\{f(x,y_1), f(x,y_2)\},$$

en contradicción de la elección de β.

Por ser la función $z \mapsto f(x,z)$ casi-cóncava, por la proposición (4.2) tenemos que

$$f(x,z) \geq \min\{f(x,y_1), f(x,y_2)\}$$

para todo $x \in X$ y para todo $z \in [y_1,y_2]$. Por tanto, $C'(z) \subset A \bigcup B$ para todo $z \in [y_1,y_2]$. Como $C'(z)$ es conexo y A y B son cerrados, debe ser $C(z) \subset C'(z) \subset A$ o bien $C(z) \subset C'(z) \subset B$. Consideremos los conjuntos

$$I = \{z \in [y_1,y_2] : C(z) \subset A\} \quad \text{y} \quad J = \{z \in [y_1,y_2] : C(z) \subset B\}.$$

Se tiene que I y J son no vacíos ya que $y_1 \in Y$ e $y_2 \in Y$, $I \cap J = \emptyset$ ya que $A \cap B = \emptyset$ e $I \cup J = [y_1,y_2]$.
Veamos que, además, I y J son conjuntos cerrados. Esto terminará la prueba ya que estaremos en contradicción con el hecho de que $[y_1,y_2]$ es un conjunto conexo.

Sea $\{z_n\}$ una sucesión de puntos de I convergente a $z \in [y_1, y_2]$. Sea $x \in C(z)$. Se tiene que $\limsup_n f(x, z_n) \leq f(x, z) \leq \alpha < \beta$ ya que $y \mapsto f(x, y)$ es semicontinua superiormente. En consecuencia, existe un entero m con $f(x, z_m) < \beta$, es decir, $x \in C'(z_m)$. Como $z_m \in I$, $C(z_m) \subset A$ por definición. Por tanto, $C'(z_m) \subset A$ y en consecuencia $x \in A$. Hemos probado que $C(z) \subset A$ o, lo que es lo mismo, que $z \in I$, lo que termina la prueba de que I es cerrado.

La demostración de que J es cerrado es completamente análoga. $\square$

Lema 4.2. *Sea X un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$ e Y un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$ y sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función satisfaciendo*
i) *Para todo $x \in X$ la función $y \mapsto f(x, y)$ es semicontinua superiormente y casi-cóncava en Y.*
ii) *Para todo $y \in Y$ la función $x \mapsto f(x, y)$ es semicontinua inferiormente y casi-convexa en X.*
Entonces para todo conjunto finito $\{y_1, ..., y_n\} \subset Y$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha < \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq n} f(x, y_i),$$

entonces existe $y_0 \in Y$ tal que

$$\alpha < \min_{x \in X} f(x, y_0).$$

Demostración.
Demostremos este lema por inducción en n. Notemos que para $n = 2$ es el lema 4.1.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para $n - 1$ puntos y probemos que es cierto también para n.

Sea X' el conjunto compacto y convexo $X' = \{x \in X : f(x, y_n) \leq \alpha\}$. Podemos asumir que X' es no vacío, ya que si no lo fuera bastaría con considerar $y_0 = y_n$ para tener el resultado. Como

$$\alpha < \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq n} f(x, y_i)$$

tenemos que

$$\alpha < \min_{x \in X'} \max_{1 \leq i \leq n-1} f(x, y_i).$$

Si consideramos la restricción de f a $X' \times Y$ entonces, por hipótesis de inducción, existe $y_0' \in Y$ tal que

$$\alpha < \min_{x \in X'} f(x, y_0').$$

Como en $X \setminus X'$ se tiene que $f(x, y_n) > \alpha$, entonces tenemos que

$$\alpha < \min_{x \in X} \max\{f(x, y_0'), f(x, y_n)\}.$$

Por el lema 4.1, existe $y_0 \in Y$ tal que

$$\alpha < \min_{x \in X} f(x, y_0).$$

$\square$

Teorema 4.1 (Teorema de Sion)**.** *Sea X un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$, Y un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$ y sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función satisfaciendo*
***i)** Para todo $x \in X$ la función $y \mapsto f(x, y)$ es semicontinua superiormente y casi-cóncava en Y.*
***ii)** Para todo $y \in Y$ la función $x \mapsto f(x, y)$ es semicontinua inferiormente y casi-convexa en X.*
Entonces

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y).$$

Demostración.
Dado que la desigualdad

$$\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) \leq \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y)$$

es siempre cierta, sólo es necesario probar la desigualdad inversa.

Sea α un número real tal que

$$\alpha < \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y). \tag{37}$$

Para cada $y \in Y$ se define el conjunto $X_y = \{x \in X : f(x, y) \leq \alpha\}$. X_y es cerrado por ser $f(., y)$ semicontinua inferiormente y, por tanto, es compacto.

Como α satisface (37), se tiene que $\bigcap_{y \in Y} X_y = \emptyset$. Por la compacidad de X, existen $\{y_1, ..., y_n\} \in Y$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_{y_i} = \emptyset.$$

Es decir, existe $\{y_1, ..., y_n\} \subset Y$ tal que

$$\alpha < \min_{x\in X} \max_{1\leq i\leq n} f(x, y_i).$$

Por el lema 4.2, existe $y_0 \in Y$ con

$$\alpha < \min_{x\in X} f(x, y_0),$$

y, por tanto,

$$\alpha < \sup_{y\in Y} \min_{x\in X} f(x, y).$$

Hemos probado que para todo $\alpha < \min_{x\in X} \sup_{y\in Y} f(x, y)$ se tiene que

$$\alpha < \sup_{y\in Y} \min_{x\in X} f(x, y).$$

Por tanto,

$$\min_{x\in X} \sup_{y\in Y} f(x, y) \leq \sup_{y\in Y} \min_{x\in X} f(x, y)$$

lo que termina la prueba. □

A continuación, enunciaremos y demostraremos el teorema minimax de Kneser-Fan. Para ello, demostramos el lema que se muestra a continuación.

Lema 4.3. *Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y sea F un conjunto de funciones semicontinuas inferiormente de valor real en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo subconjunto finito y no vacío G de F tal que $\alpha < \min\limits_{x\in X} \max\limits_{f\in G} f(x)$, entonces existe $h \in F$ que verifica que $\alpha \leq \min\limits_{x\in X} h(x)$.*
2. $$\min_{x\in X} \sup_{f\in F} f(x) = \sup_{f\in F} \min_{x\in X} f(x).$$

Demostración.

Supongamos que se cumple 1. Tenemos que probar que

$$\min_{x\in X} \sup_{f\in F} f(x) \leq \sup_{f\in F} \min_{x\in X} f(x).$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con

$$\alpha < \min_{x \in X} \sup_{f \in F} f(x)$$

y definimos $A(f) = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ para $f \in F$.
Se cumple que $\bigcap\limits_{f \in F} A(f) = \emptyset$ y, como X es compacto y los conjuntos $A(f)$ son cerrados, existe un conjunto finito $G \subset F$ con $\bigcap\limits_{f \in F} A(f) = \emptyset$. Tenemos $\max\limits_{f \in G} f(x) > \alpha$ para cada $x \in X$. Elegimos $h \in F$ acorde con 1., entonces la desigualdad $\alpha \leq \min\limits_{x \in X} h(x) \leq \sup\limits_{f \in F} \min\limits_{x \in X} f(x)$ implica 2.

La implicación inversa es inmediata. $\square$

Teorema 4.2 (Teorema minimax Kneser-Fan)**.** *Sea X un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, sea Y un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$, y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función satisfaciendo*
i) *Para todo $x \in X$ la función $y \mapsto f(x,y)$ es cóncava en Y.*
ii) *Para todo $y \in Y$ la función $x \mapsto f(x,y)$ es semicontinua inferiormente y convexa en X.*
Entonces

$$\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x,y) = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x,y).$$

Demostración.
Sean $\{y_1, ..., y_n\} \subset Y$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaciendo

$$\alpha < \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq n} f(x, y_i). \tag{38}$$

Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ la envolvente convexa del conjunto $\{[f(x,y_1), ..., f(x,y_n)]^T : x \in X\}$, y sea $Q = \{[z^1, ..., z^n]^T \in \mathbb{R}^n \mid z^i \leq \alpha, i = 1, ..., n\}$. Veamos que P y Q son disjuntos.
Sea $z \in P$, z puede escribirse como

$$z = \sum_{j=1}^{m} \beta_j [f(x_j, y_1), ..., f(x_j, y_n)]^T,$$

donde $x_j \in X$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, ..., m$ y $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$.
Consideremos $x_0 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j$. Por (38), existe i, $1 \leq i \leq n$ tal que $f(x_0, y_i) > \alpha$.

Como $x \mapsto f(x, y_i)$ es convexa, la i-ésima coordenada z^i de z satisface

$$z^i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f(x_j, y_i) \geq f(x_0, y_i) > \alpha,$$

demostrando que $z \notin Q$.

Los conjuntos convexos disjuntos P y Q pueden ser separados por un hiperplano, es decir, existe un vector no cero $c = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ con $\sup_{z \in Q} c^T z \leq \inf_{z \in P} c^T z$.

Claramente tenemos $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, y podemos suponer que $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1$. Para cada $x \in X$ la función $y \mapsto f(x, y)$ es cóncava.
Tomando $y_0 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i$ se tiene que

$$f(x, y_0) \geq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f(x, y_i) \geq \sup_{z \in Q} c^T z = \alpha.$$

Por tanto, tenemos que

$$\alpha < \min_{x \in X} f(x, y_0),$$

y, por el lema 4.3, se verifica que

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) \leq \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y).$$

□

5. Aplicaciones. Juegos cóncavo-convexos

Algunas clases de juegos están estrechamente relacionadas con la optimización convexa y, como resultado, existen métodos muy eficientes para encontrar una solución válidos para ciertos casos de interés. Así mismo, estos resultados están relacionados con teoremas minimax como los que hemos incluido en el capítulo anterior. Para que el problema sea de optimización convexa necesitamos que la función objetivo y las funciones de restricción sean convexas, es decir, se debe satisfacer $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$.

En los modelos que consideramos a continuación, los jugadores formarán una red. Por ello, introducimos algo de notación sobre grafos.

Definición 5.1. *Un grafo dirigido es un par (V, E), donde $V = \{1, 2, ..., n\}$ es un conjunto de n elementos, que llamamos vértices, y $E \subseteq V \times V$ es un conjunto de pares de elementos de V, que llamamos aristas. Decimos que i es vecino de j si $(i, j) \in E$.*
Diremos que (V, E) es un grafo no dirigido si $(i, j) \in E \Leftrightarrow (j, i) \in E$.

Dado un grafo (V, E), podemos representar la información sobre sus aristas como una matriz $g \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde $g_{ij} = 1$ si $(i, j) \in E$ y $g_{ij} = 0$ si $(i, j) \notin E$.

Definición 5.2. *Un camino de longitud k entre i y j es una sucesión $i_1, ..., i_k$ de elementos de V tal que $i_1 = i$, $i_k = j$ y $g_{i_l i_{l+1}} = 1$ para todo $l = 1, ..., k-1$, y los i_l son todos distintos.*

5.1. Localización óptima de un servidor en red

En la teoría de grafos, los problemas que tratan de hallar la ruta mínima entre dos vértices o nodos se conocen como problemas del camino mínimo o camino más corto.
La localización óptima de un servidor en red pertenece a este tipo de problemas de camino más corto. El ejemplo que se muestra a continuación es un juego matricial de suma cero.

Consideramos una red con n nodos definidos por un grafo no dirigido G.

Un *requerimiento* se origina en un nodo de la red y un *servidor*, que también está localizado en un nodo de la red, responde al requerimiento. Podemos pensar en una red de ordenadores que requieren el acceso a información almacenada en otros servidores.

Definimos el *retraso* como la distancia más corta entre el nodo del servidor y el del requerimiento. El objetivo es colocar el servidor de manera que se minimice el retraso. Si el servidor conoce, de antemano, en qué nodo se origina el requerimiento, el servidor se colocará en el mismo nodo y el retraso será cero.

Supongamos que el servidor desconoce en qué nodo se origina el requerimiento y quiere colocarse para minimizar la distancia al requerimiento cualquiera que sea el nodo en el que se origine. Para ello, el servidor debe colocarse en un nodo que minimice la distancia máxima del resto de nodos del grafo. Cada nodo con esta propiedad se llamará *centro* del grafo. El nodo centro no es necesariamente único; solamente tiene la propiedad de que, sin importar la localización del requerimiento, el retraso nunca es mayor que $d_{\text{mín}}$, siendo $d_{\text{mín}}$ la distancia desde el nodo centro al nodo más alejado del mismo.

A continuación suponemos que la localización del requerimiento sigue una distribución de probabilidad, y el coste es proporcional al retraso esperado. El objetivo del servidor es, entonces, elegir su localización y minimizar el retraso *esperado* .
Si el servidor conoce las distribuciones de probabilidad de los requerimientos v_0 entonces, para minimizar el retraso esperado, el servidor elegirá una distribución de probabilidad que minimice el retraso esperado, es decir, el u que resuelva

$$\begin{array}{cl} \displaystyle\min_{u} & (Pv_0)^T u \\ \text{sujeto a} & \mathbf{1}^T u = 1 \end{array} \tag{39}$$

Una solución para este programa lineal es $u = e_i$, donde $i = \arg\text{mín}_j\, (Pv_0)_j$. Esto es, cuando se conoce la distribución de probabilidad del requerimiento, siempre existe una estrategia pura para el servidor que minimiza el retraso esperado.

Supongamos que el servidor desconoce la distribución de probabilidad del requerimiento. El objetivo, entonces, es encontrar una distribución del servidor que minimice el mayor retraso esperado posible, sobre todas las distribuciones posibles del requerimiento. En este caso, la distribución de probabilidad con la que el servidor puede encontrar la localización óptima es la solución de un problema minimax, que se puede formular como un juego.

El servidor y el requerimiento son los jugadores y las decisiones son los n nodos en el grafo. El servidor quiere minimizar el retraso, y podemos pensar que el requerimiento quiere maximizarlo. Cuando el requerimiento se origina en el nodo i, y el servidor se localiza en el nodo j, el coste es P_{ij} donde P_{ij} es la longitud del camino más corto entre los nodos i y j. La estrategia (mixta) óptima para el servidor es la solución del juego matricial con matriz de costes P.

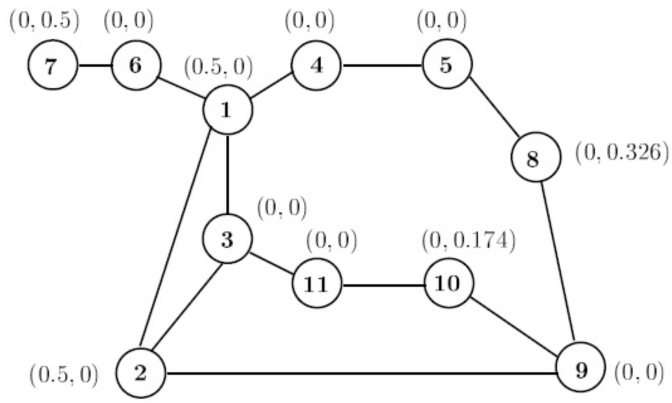

Figura 2: Red con 11 nodos. ${u^*}_i$ es la probabilidad del servidor de localizarse en el nodo i, y ${v^*}_i$ es la probabilidad de que la solicitud actúe en el nodo i, donde (u^*, v^*) es la solución del juego.

Es decir, el problema del servidor es

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V} u^T P v,$$

donde U, V son los símplices definidos por $1^T u = 1$, $u \geq 0$ y $1^T v = 1$, $v \geq 0$.

Ejemplo 5.1. *Ahora consideramos el ejemplo específico, con 11 nodos, mostrado en la figura 2.*

Los nodos 1, 2, 3 y 4 son centros del grafo, y la distancia de un centro al nodo más lejano es 3. Si se desconoce dónde se origina el requerimiento, el servidor puede situarse en alguno de estos centros, y asegurar un retraso no más grande que 3.

Si el requerimiento no es estático, para minimizar el retraso esperado el servidor debe situarse en el nodo 1 o 3 (o alguna combinación de los nodos 1 y 3).

Es importante señalar que no toda estrategia del servidor que optimiza el retraso para la estrategia óptima del requerimiento soluciona el problema, es decir, no toda solución a

$$\begin{array}{rl} \min & (Pv^*)^T u \\ \textit{sujeto a} & \mathbf{1}^T u = 1 \end{array} \tag{40}$$

es una solución del juego.

Esto es porque cada solución minimiza el retraso esperado cuando la distribución de *probabilidad del requerimiento es v^* y esto no garantiza que el retraso esperado con alguna distribución del requerimiento sea menor o igual que el valor del juego. Esto ocurre porque la función objetivo (bilineal) no es estrictamente cóncava-convexa en u y v, luego para un valor fijado de u, la optimización v no es necesariamente única.*

5.2. Un ejemplo de un juego cóncavo-convexo

Este ejemplo se trata de un problema de comunicaciones simple. Consideramos m canales de comunicación Gaussianos, canales de tiempo discreto cuya salida en un tiempo t está dada por $Y_t = X_t + Z_t$ donde X_t es una señal continua y $Z_t \sim N(0, N)$ es i.i.d. Estos canales tienen una potencia de señal $p_i \geq 0$ y una potencia de ruido (o interferencia) $n_i \geq 0$. Para un canal Gaussiano, se cumple que la capacidad de información del canal Gaussiano es

$$C = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{P}{N})$$

Sea $N_i = \frac{\sigma_i + n_i}{\beta_i}$. La capacidad del canal i es proporcional a $\log(1 + p_i/(\sigma_i + n_i))$, donde β_i es una constante positiva y $\sigma_i > 0$ es el ruido del receptor. El problema a resolver es

$$\max_{p \in X} \min_{n \in Y} \quad \sum_{i=1}^{m} \log(1 + \frac{\beta_i p_i}{\sigma_i + n_i}).$$

En este caso, la capacidad del canal es una función de las potencias de señal p_i y de las potencias de interferencia n_i, donde p satisface $\sum_i p_i = P$ y n satisface $\sum_i n_i = N$. El usuario querrá asignar p_i para maximizar la capacidad del canal independientemente del ruido y el adversario querrá asignar n_i para minimizar la capacidad. La distribución óptima de las potencias para m canales se puede encontrar resolviendo un juego con el ruido y la potencia de señal como jugadores.

Como la función objetivo f es cóncava en p para cada n, convexa en n para cada p y los conjuntos factibles $X = \{p = (p_1, ..., p_m) \mid \sum_{i=1}^{m} p_i = P, p_i \geq 0, i = 1, ..., m\}$ e $Y = \{n = (n_1, ..., n_m) \mid \sum_{i=1}^{m} n_i = N, n_i \geq 0, i = 1, ..., m\}$ son conjuntos cerrados, acotados (por tanto, compactos) y convexos, se puede aplicar el teorema 4.1 para resolver el problema. Concretamente, tendríamos que resolver el siguiente juego

$$
\begin{aligned}
\max_{p\in X}\min_{n\in Y} \quad & \sum_{i=1}^{m}\log(1+\frac{\beta_i p_i}{\sigma_i+n_i}) \\
\text{sujeto a} \quad & 1^T p = P \\
& 1^T n = N \\
& p \geq 0; n \geq 0
\end{aligned}
\tag{41}
$$

En un punto silla del juego, el valor de p^* debe maximizar la capacidad para la distribución del ruido n^*, del mismo modo n^* debe ser el mínimo de $f(p^*, n)$.
Supongamos conocido n_i y llamamos $N_i = \frac{\sigma_i+n_i}{\beta_i}$ a la potencia de ruido efectiva para el canal i-ésimo.
El objetivo es

$$
\begin{aligned}
\max_{p\in X} \quad & \sum_{i=1}^{m}\log(1+\frac{p_i}{N_i}) \\
\text{sujeto a} \quad & P = \sum_i p_i; \\
& p_i \geq 0.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

El Lagrangiano del problema es

$$L(p,\mu) = \sum_{i=1}^{m}\log(1+\frac{p_i}{N_i}) + \mu(P - \sum_{i=1}^{m} p_i).$$

Las condiciones de primer orden son

$$\mu = \frac{1}{N_i + P_i} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = P.$$

Sea $\nu = \frac{1}{\mu} = N_i + P_i$, obtenemos teniendo en cuenta la restricción $p_i \geq 0$ que

$$p_i^* = (\nu - N_i)^+.$$

El valor de ν se selecciona para satisfacer

$$\sum_i (\nu - N_i)^+ = P.$$

Esta solución se conoce como *waterfilling*, ya que la forma en que la energía se distribuye entre los diferentes canales es idéntica a la forma en que el agua se distribuye en un recipiente con una base desigual y podemos fácilmente calcular el valor óptimo de ν.
Una técnica del tipo *waterfilling* proporciona soluciones a problemas de distribución de potencia, determina la potencia y la cantidad de información que se puede transmitir en cada subcanal en función de la probabilidad de error requerida. El objetivo es maximizar la capacidad del canal y al utilizar el método Waterfilling el Lagrangiano permite encontrar una solución que maximice la capacidad y que cumpla las restricciones.
De manera análoga, podemos derivar una expresión semi-analítica para n^*, como el minimizador de $f(p^*, n)$, ya que el objetivo es separable.

$$f(p^*, n) = \sum_{i=1}^{m} \log(1 + \frac{\beta_i p_i}{\sigma_i + n_i})$$

Ahora, nosotros tenemos el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min_{p} \quad & f(p^*, n) \\ \text{sujeto a} \quad & N = \sum_i n_i; \\ & n_i \geq 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Asociando la variable dual μ a esta restricción, podemos escribir el Lagrangiano

$$L(n, \mu) = \sum_{i=1}^{m} \log(1 + \frac{\beta_i p_i}{\sigma_i + n_i}) + \mu(N - \sum_{i=1}^{m} n_i).$$

Las condiciones de primer orden son

$$\mu = \frac{-\beta_i p_i}{(\sigma_i + n_i + \beta_i p_i)(\sigma_i + n_i)} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} n_i = n$$

y obtenemos

$$n_i = \text{máx}\{(-\frac{\beta_i p_i}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\beta_i p_i)^2 - 4\frac{\beta_i p_i}{\mu}} - \sigma_i), 0\}.$$

Substituyendo n_i en la restricción $\sum_i n_i = N$, podemos observar que μ es el único valor real negativo que resuelve

$$\sum_{i=1}^{m} \text{máx}\{(-\frac{\beta_i p_i}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\beta_i p_i)^2 - 4\frac{\beta_i p_i}{\mu}} - \sigma_i), 0\} = N.$$

Como la solución (p^*, n^*) del juego (41) es un punto silla del juego, p^* debe ser la solución *waterfilling* para el ruido efectivo correspondiente a n^*, y n^* debe ser la solución del problema de minimización descrito anteriormente.

Referencias

[1] DU, D.-Z., AND PARDALOS, P. M. *Minimax and applications*, vol. 4. Springer Science & Business Media. Berlin, 2013.

[2] FAN, K. Minimax theorems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 39*, 1 (1953), 42–47.

[3] GHOSE, D., AND PRASAD, U. Solution concepts in two-person multicriteria games. *Journal of Optimization Theory and Applications 63*, 2 (1989), 167–189.

[4] GONZÁLEZ-DÍAZ, J., GARCÍA-JURADO, I., AND FIESTRAS-JANEIRO, M. G. *An introductory course on mathematical game theory, Graduate studio in Mathematics*, vol. 115. American Mathematical Society, Providence, 2010.

[5] KOMIYA, H. Elementary proof for sion's minimax theorem. *Kodai mathematical journal 11*, 1 (1988), 5–7.

[6] LUENBERGER, D. G., AND MATEOS, M. L. *Programación lineal y no lineal*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.

[7] NIKAIDO, H. On von neumann's minimax theorem. *Pacific J. Math 4* (1954), 65–72.

[8] PÉREZ, J., JIMENO, J. L., AND TENA, E. C. *Teoría de juegos*. Pearson Educación, 2003.

[9] RICART, J. Una introducción a la teoría de los juegos. *Documento de Investigación IESE Business School. Universidad de Navarra. España* (1988).

[10] SION, M., ET AL. On general minimax theorems. *Pacific J. Math 8*, 1 (1958), 171–176.

[11] STAHL, S. *A gentle introduction to game theory, Mathematical world*, vol. 13. American Mathematical Society, Providence, 1999.