Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Normalidad del espectro primo y retracción sobre el espectro maximal

Autor: David López Soria

Tutor: Jesús M. Domínguez Gómez

Índice general

Introducción

Al igual que llamaremos, abreviadamente, anillos a los anillos conmutativos con elemento unidad, llamaremos, abreviadamente, retículos a los retículos distributivos con mínimo y máximo.

En este trabajo estudiamos las propiedades de compacidad y conexión del espectro primo de un anillo (resp. retículo), y vemos que el espectro primo es un espacio topológico normal si, y sólo si, dicho espacio retracta sobre el espectro maximal, lo que equivale a que cada ideal (resp. filtro) primo esté contenido en un único ideal (resp. filtro) maximal. El espectro maximal de estos anillos (resp. retículos) con la propiedad pm es un espacio compacto y de Hausdorff. Estudiamos las propiedades de conexión del espectro primo de un anillo con la ayuda del anillo de Boole formado por los idempotentes del anillo de partida.

Aplicamos después algunas de las ideas anteriores al estudio de los espacios de Tychonoff y de los anillos de funciones continuas, con valores reales, definidas sobre ellos. Sea pues X un espacio de Tychonoff. Los anillos $C(X)$ y $C^*(X)$ son pm-anillos y, por lo tanto, sus espectros maximales son espacios compactos y de Hausdorff, que contienen cada uno de ellos una copia del espacio X. De hecho, tanto $\operatorname{Max}(C(X))$ como $\operatorname{Max}(C^*(X))$ son la compactificación de Stone-Cech de X. Veremos que también tiene la propiedad pm el retículo $Z(X)$ formado por los z-conjuntos (o conjuntos de ceros) de X. Diremos que $Z(X)$ es una base de Wallman normal en X, y veremos que $\operatorname{Max}(Z(X))$ vuelve a ser la compactificación de Stone-Cech de X. En la parte final abordamos, siguiendo los trabajos de Frink y Steiner, el problema de caracterizar los espacios de Tychonoff sin recurrir explícitamente a las funciones continuas. Frink caracteriza los espacios de Tychonoff mediante la existencia de bases de Wallman normales. Esta caracterización tiene una deficiencia en relación con los subespacios. Concluiremos el trabajo viendo finalmente que la caracterización de Steiner subsana elegantemente esa deficiencia.

El trabajo se divide en dos capítulos. A continuación vamos a detallar algo más el contenido de cada uno de los capítulos.

El primer capítulo se subdivide en tres secciones. En la primera nos centraremos en construir el espectro de un anillo A. De forma general, nos apoyaremos para esta parte en el libro [AM], donde la mayoría de los enunciados pueden encontrarse propuestos como ejercicios en el primer tema. Dotaremos (via una base de cerrados) al conjunto de los ideales primos del anillo A de una topología, que recibe el nombre de topología de Zariski. Este espacio topológico será denotado con $\operatorname{Spec}(A)$, y el subespacio formado por los ideales maximales de A será denotado con $\operatorname{Max}(A)$. Daremos una expresión explícita de una base de abiertos de $\operatorname{Spec}(A)$ y veremos que tanto los abiertos de esa base como el espacio total son siempre compactos. Observaremos además que ni $\operatorname{Spec}(A)$ ni $\operatorname{Max}(A)$ son, en general, espacios de Hausdorff, aunque veremos que $\operatorname{Spec}(A)$ siempre es un espacio T_0 y $\operatorname{Max}(A)$ es siempre un espacio T_1.

La segunda sección tratará las propiedades de conexión en $\operatorname{Spec}(A)$. La referencia más completa para esta parte es el libro [Magi]. Veremos que el análisis de las propiedades de conexión en el espectro se centra en el estudio de los idempotentes del anillo A. El resultado principal que caracteriza la conexión en el espectro consiste en que dos ideales primos de A se encuentran en la misma componente conexa de $\operatorname{Spec}(A)$ si, y sólo si, contienen a los mismos idempotentes. Además, veremos cuándo un conjunto de idempotentes es el conjunto de idempotentes de un ideal primo gracias a la noción de ideal booleano.

Cerraremos el capítulo explorando en qué casos el espectro es un espacio normal. Llamaremos *pm*-anillos a aquellos anillos en los que todo ideal primo está contenido en un único ideal maximal, y veremos que son estos anillos los que precisamente dan lugar a espectros normales. Veremos que en este caso, el espectro primo retracta sobre el maximal, y la retracción no es otra que la aplicación que envía cada ideal primo en el único ideal maximal que lo contiene. Además, los espectros maximales de estos anillos son espacios de Hausdorff. Finalmente, veremos que los *pm*-anillos se pueden caracterizar por una propiedad puramente aritmética. Nos basaremos en los artículos [Cont] y [MO] para el desarrollo de esta sección.

El segundo capítulo se subdivide en cuatro secciones. Comenzaremos extendiendo la construcción del espectro para retículos distributivos. Definiremos los retículos distributivos de dos formas equivalentes, como conjuntos parcialmente ordenados y como conjuntos con dos operaciones. Veremos que para retículos distributivos, existen dos formas, duales entre si, de dar una noción análoga a la de ideales en anillos conmutativos. Así pues, observaremos que se pueden construir espectros de retículos gracias a filtros primos o a ideales primos de un retículo. Para esta parte una buena referencia es [DP], en lo tocante a resultados generales de retículos. Algunos de los resultados pueden encontrarse en [Will] y [AS], donde están tratados de forma auxiliar en el marco de los retículos conjuntistas.

Después estudiaremos simultáneamente el anillo de funciones continuas $\mathrm{C}(X)$ y el retículo $\mathrm{Z}(X)$, dejando siempre patente la conexión entre ambas estructuras. La principal referencia será en este caso [GJ]. Veremos, por ejemplo, que el anillo $\mathrm{C}(X)$ es un *pm*-anillo y que, paralelamente, en el retículo $\mathrm{Z}(X)$ cada filtro primo está contenido en un único ultrafiltro.

Posteriormente, nos centraremos en los espacios de Tychonoff. Estudiaremos la relación entre estos espacios y los anillos de funciones continuas y veremos que los espacios de Tychonoff son exactamente aquellos espacios que se pueden sumergir en espacios compactos y de Hausdorff. Exploraremos de forma general la noción de compactificación de Hausdorff. Dado un espacio de Tychonoff X, construiremos (haciendo uso del teorema de Tychonoff) y analizaremos en profundidad la compactificación de Stone-Cech βX, que está extremadamente vinculada con los anillos de funciones continuas. Veremos varias caracterizaciones de esta compactificación, como por ejemplo, en términos de extensión de funciones continuas, de maximalidad entre las compactificaciones o su relación con los espectros maximales $\mathrm{Max}\,(\mathrm{C}(X))$ y $\mathrm{Max}\,(\mathrm{C}^*(X))$. Seguiremos apoyándonos en [GJ] para todo lo tocante a funciones continuas y nos apoyaremos en [Will] para abordar de forma general lo tocante a compactificaciones y a la construcción de la compactificación de Stone-Cech.

Finalmente, veremos una nueva forma de definir compactificaciones de Hausdorff. Los espacios de Tychonoff son, por definición, los espacios de Hausdorff en los que hay suficientes funciones continuas para separar puntos de cerrados. Frink se plantea el problema de expresar el axioma de separación de Tychonoff, sin recurrir a las funciones continuas. Veremos entonces como Frink obtiene, mediante las bases de Wallman normales, una caracterización de los espacios de Tychonoff, que no acude explícitamente a las funciones continuas. Si un espacio X posee una base de Wallman normal $\mathcal{B}$, basta sumergir X en el espectro maximal de la base $\mathcal{B}$, que es un espacio compacto y de Hausdorff para obtener una compactificación de X. Lógicamente, nos apoyaremos para esta parte en su artículo [Fri1], además de en el libro [AS]. Ahora bien, la respuesta de Frink no es completamente satisfactoria. Si Y es un subespacio de un espacio de Tychonoff X, es sencillo ver que Y también es de Tychonoff. En general, la traza sobre Y de una base de Wallman normal en X, puede no ser normal en Y. Estudiaremos la respuesta dada por Steiner, que subsana esa deficiencia introduciendo las familias de cerrados normales y separantes, que son unas familias de cerrados con una condición más restrictiva que la normalidad, pero que sí es heredada por sus trazas sobre subespacios. Así pues, veremos que un espacio es de Tychonoff si, y sólo si, posee una familia de cerrados separante y normal. Observaremos, con especial interés, como se construyen estas familias de cerrados separantes y normales, utilizando un método similar al que se emplea a la hora de demostrar el Lema de Urysohn. Como es lógico, para esta última parte, nos basaremos en su artículo [Ste1].

En nuestro trabajo hemos estudiado en primer lugar la topología de Zariski sobre el conjunto de los ideales primos de un anillo y, después, la topología de Stone sobre el conjunto de los filtros primos de un retículo. Así pues, hemos invertido el orden histórico (véase Johnstone). Si llamamos espacios de Boole (o de Stone) a los espacios compactos que son de Hausdorff y totalmente desconectados, el Teorema de Representación de Stone establece que: "Todo retículo de Boole es isomorfo al retículo de los conjuntos abierto-cerrados de un espacio de Boole". La idea fundamental del trabajo de Stone es elegir el espectro primo del retículo como soporte de la representación, viendo que en dicho espectro puede introducirse una topología de forma natural, en un proceso que, como afirma Johnstone, es el primero en que se introduce una topología en un conjunto construido de forma exclusivamente algebraica. El propio Stone aplicará estas nuevas ideas en su construcción de la compactificación de Stone-Cech de un espacio de Tychonoff, y en la generalización del Teorema de Aproximación de Weierstrass.

Podemos leer en [John] que la topología de Zariski no aparece en geometría algebraica hasta el final de la década de los cuarenta del pasado siglo, y hay que esperar hasta el comienzo de la década de los sesenta para que aparezca en los libros de álgebra conmutativa. La semejanza entre las topologías introducidas por Zariski y Stone es clara, y Dieudonné afirma que Zariski fue en efecto influido por el trabajo de Stone, aunque no se hayan encontrado menciones explícitas de este influencia en los trabajos de Zariski. Cuando Grothendieck (1959-60) reescribe la geometría algebraica utilizando esquemas en lugar de variedades, la influencia de Stone vuelve a ser manifiesta. La topología de Zariski sobre el espectro primo de un anillo es una generalización de la topología de Stone (de hecho, la última es un caso particular de la primera para un anillo de Boole), aunque no se cite a Stone en los trabajos de Grothendieck.

Queremos finalmente destacar que, al igual que los iniciadores de la topología general y de la teoría de retículos, Frechet y Boole, también Stone y Grothendieck provienen del análisis funcional.

Capítulo 1

Espectro primo de un anillo: normalidad y retracción sobre el espectro maximal

En este primer capítulo vamos a trabajar con un anillo conmutativo con elemento unidad $(A, +, \cdot)$, al que usualmente denotaremos simplemente con A. Consideraremos el conjunto de los ideales primos de A y lo dotaremos de la topología de Zariski. A este espacio topológico lo llamaremos espectro primo de A.

El objetivo del capítulo es estudiar las propiedades topológicas del espectro primo, poniendo especial atención en las propiedades de compacidad y conexión. Definiremos el concepto de espectro maximal del anillo como el subespacio del espectro primo formado por los ideales maximales, y veremos en qué casos el espectro primo retracta sobre el maximal.

1 Espectro primo y topología de Zariski

Para cada subconjunto S del anillo A, denotaremos con $V(S)$ el conjunto de ideales primos de A que contienen a S, y denotaremos con (S) el ideal de A engendrado por S. Para cada ideal I de A, denotaremos con $\sqrt{I}$ su radical.

Denotaremos con $\mathcal{N}(A)$, el nilradical de A, que es el radical del ideal nulo, es decir, el conjunto formado por los elementos nilpotentes de A. Recordemos que $\mathcal{N}(A)$ coincide con la intersección de los ideales primos de A. Denotaremos con $\mathcal{J}(A)$ el radical de Jacobson del anillo A (la intersección de los ideales maximales de A). Para finalizar denotaremos con $\mathrm{Spec}\,(A)$ el conjunto de ideales primos de A.

Proposición 1.1. Para cada subconjunto S de A, se verifica que:

$$V((S)) = V(\sqrt{(S)}) = V(S).$$

Y para los subconjuntos $\{0\}$ y $\{1\}$, $V(0) = \mathrm{Spec}\,(A)$, $V(1) = \emptyset$.

Demostración. Por definición:

$$\sqrt{(S)} = \{x \in A : x^n \in (S) \text{ para algún entero } n > 0\}.$$

Es claro que $(S) \subset \sqrt{(S)}$ y por lo tanto $V((S)) \supset V(\sqrt{(S)})$. Además, se tiene también $S \subset (S)$ y entonces $V(S) \supset V((S))$.

Viendo que $V(S) \subset V(\sqrt{(S)})$ probamos la cadena de igualdades. Esto se tiene porque, dado un ideal primo I de A perteneciente a $V(S)$, se verifica que S está contenido en I y por lo tanto $\sqrt{(S)}$ está contenido en $\sqrt{I}$. Al ser I ideal primo, I coincide con su radical, y deducimos que $I \in V(\sqrt{(S)})$. Concluimos que $V(S) \subset V(\sqrt{(S)})$.

Como todo ideal primo de A contiene al elemento 0, tenemos $V(0) = \mathrm{Spec}\,(A)$.

Como todo ideal que contiene a una unidad del anillo debe ser el total, $V(1) = \emptyset$ ya que, por definición, los ideal primos son ideales propios.

□

Proposición 1.2. Dada una familia $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de A, se tiene:

$$V(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(S_\lambda).$$

Demostración. Un ideal primo contiene a $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ si, y sólo si, contiene a cada S_λ.

□

Proposición 1.3. Para I,J ideales de A:

$$V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J).$$

Demostración. Sea P un ideal primo perteneciente a $V(I \cap J)$. Se verifica entonces que $I \cap J$ está contenido en P. El ideal IJ está claramente contenido en $I \cap J$, y, por lo tanto, está también contenido en P. Tenemos entonces $P \in V(IJ)$, y deducimos que $V(I \cap J) \subset V(IJ)$.

Sea Q un ideal primo de A que contiene a IJ. Veamos que Q está contenido en $V(I) \cup V(J)$, razonando por reducción al absurdo. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que J no está contenido en Q. Existe entonces un elemento j de J, que no pertenece a Q. El ideal generado por los productos de elementos de I con j está contenido en Q, y por primalidad deducimos que forzosamente se da $I \subset Q$. Observamos entonces que Q pertenece a $V(I) \cup V(J)$ y concluimos que $V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$

Finalmente, como $I \cap J$ está contenido en I y en J, se deduce fácilmente que $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J)$, y podemos concluir la demostración.

□

Recordamos las definiciones de base de abiertos y de base de cerrados de un espacio topológico.

Definición 1.4. Sea X un espacio topológico. Una base de abiertos de X es una familia de abiertos $\mathcal{B}$, tal que todo abierto U de X puede escribirse como unión de elementos de $\mathcal{B}$. Además, un familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es base de abiertos para alguna topología en X si cumple:

- $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
- Para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definición 1.5. Sea X un espacio topológico. Una base de cerrados de X es una familia de cerrados $\mathcal{F}$, tal que todo cerrado F de X puede escribirse como intersección de elementos de $\mathcal{F}$. Además, un familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es base de cerrados para alguna topología en X si cumple:

- $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$.
- Para todos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ y todo $x \notin F_1 \cup F_2$, existe $F_3 \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin F_3$ y $F_1 \cup F_2 \subset F_3$.

Es claro que los complementarios de los elementos de una base de abiertos (respectivamente cerrados) de X, forman una base de cerrados (resp. de abiertos) de X, para la misma topología.

Gracias a las propiedades expuestas anteriormente, comprobamos que los conjuntos $V(S)$ forman una base de cerrados para una topología en el conjunto de ideales primos de A. Esta topología es la denominada *topología de Zariski*. Recordemos que al conjunto de ideales primos con esta topología lo llamamos *espectro primo* de A, denotado $\operatorname{Spec}(A)$. Al subespacio de $\operatorname{Spec}(A)$ formado por los ideales maximales de A, lo llamamos *espectro maximal* de A, denotado $\operatorname{Max}(A)$.

Observación. Sea k un cuerpo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos con $\mathbb{A}^n$ al espacio afín n-dimensional sobre k. Para cada subconjunto S de polinomios de $k[X_1, ..., X_n]$, definimos:

$$V(S) = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n : f(a_1, ..., a_n) = 0 \text{ para todo } f \in S\}.$$

Es sencillo comprobar que el ideal de $k[X_1, ..., X_n]$ generado por los polinomios de S, da lugar al mismo subconjunto de $\mathbb{A}^n$. Estos conjuntos reciben el nombre de conjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n$. En $\mathbb{A}^n$ se puede definir una topología, tomando como conjuntos cerrados los conjuntos algebraicos. Esta es la definición clásica de la topología de Zariski en $\mathbb{A}^n$. Cuando estos conjuntos son cerrados irreducibles, reciben el nombre de variedad algebraica. Si consideramos un cuerpo algebraicamente cerrado, la versión débil del Teorema de los Ceros de Hilbert nos dice que los ideales maximales del anillo $k[X_1, ..., X_n]$ son exactamente los ideales de la forma $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$. Para un cuerpo algebraicamente cerrado, tenemos entonces que $(a_1, ..., a_n)$ pertenece a un conjunto $V(S)$ si, y sólo si cada polinomio f del subconjunto S de $k[X_1, ..., X_n]$, está contenido en el ideal maximal $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$. El conjunto $V(S)$ puede verse entonces como el conjunto formado por los ideales maximales de $k[X_1, ..., X_n]$, que contienen a S. La topología de Zariski definida en el espectro de un anillo es la extensión de esta construcción de ideales maximales a ideales primos en general. Es claro que conservamos la influencia geométrica en el notación empleada, como por ejemplo, cuando nos referimos a los conjuntos cerrados del espectro.

Aunque hemos definido la topología de Zariski en $\operatorname{Spec}(A)$ mediante una base de cerrados, es útil describir explícitamente una base de abiertos, formada por los complementarios de los miembros de la base de cerrados.

Para cada $a \in A$, denotamos con $D(a)$ el complementario en $\operatorname{Spec}(A)$ del cerrado $V(a)$. Para cada $a \in A$, escribiremos $D^M(a)$ y $V^M(a)$ para referirnos a las intersecciones de $D(a)$ y $V(a)$ con $\operatorname{Max}(A)$. Veamos algunas propiedades de estos conjuntos que nos serán útiles más adelante.

Proposición 1.6. Los conjuntos $D(a)$, para $a \in A$, forman una base de abiertos de $\operatorname{Spec}(A)$. Denotaremos con $\mathcal{D} = \{D(a)\}_{a \in A}$ a esta base.

Demostración. Dado S subconjunto de A, utilizando la proposición 1.2 :

$$\operatorname{Spec}(A) \setminus V(S) = \operatorname{Spec}(A) \setminus \bigcap_{s \in S} V(s) = \bigcup_{s \in S} D(s).$$

$\square$

Proposición 1.7. Para $a, b \in A$ se tiene:

1. $D(a) \cap D(b) = D(ab)$.
2. $D(a) = \emptyset \Leftrightarrow$ a es un elemento nilpotente de A.
3. $D(a) = \operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow$ a es unidad de A.
4. $D(a) = D(b) \Leftrightarrow \sqrt{(a)} = \sqrt{(b)}$.

Demostración.

1. $D(a) \cap D(b) = \operatorname{Spec}(A) \setminus (V(a) \cup V(b)) = \operatorname{Spec}(A) \setminus (V(ab)) = D(ab)$, utilizando la proposición 1.3.
2. $D(a) = \emptyset$ si, y sólo si, a pertenece a todos los ideales primos de A, es decir, a pertenece a $\mathcal{N}(A)$, equivalentemente, a es un elemento nilpotente de A.
3. $D(a) = \operatorname{Spec}(A)$ si, y sólo si, a no pertenece a ningún ideal primo de A, es decir, a es unidad de A.
4. Si $\sqrt{(a)} = \sqrt{(b)}$, entonces, utilizando la proposición 1.1, se concluye que $D(a) = D(b)$. El recíproco se obtiene utilizando que el radical de un ideal coincide con la intersección de los ideales primos que lo contienen.

$\square$

Podemos enunciar ahora algunos resultados sobre compacidad en $Spec(A)$.

Proposición 1.8. Tanto $\operatorname{Spec}(A)$ como los conjuntos $D(a)$, para $a \in A$, son compactos.

Demostración. Puesto que $\mathcal{D} = \{D(a)\}_{a \in A}$ es una base de la topología de $\operatorname{Spec}(A)$, si tomamos un recubrimiento por abiertos de $\operatorname{Spec}(A)$, como todo abierto es unión de abiertos de la base, obtenemos un recubrimiento por abiertos de la base $\mathcal{D}$. En este caso tenemos:

$$Spec(A) = \bigcup_{a_\lambda \in A, \lambda \in \Lambda} D(a_\lambda).$$

Tomando complementarios, utilizando la proposición 1.2 y recordando que $V(1) = \emptyset$, tenemos:

$$\emptyset = \operatorname{Spec}(A) \setminus \bigcup_{a_\lambda \in A, \lambda \in \Lambda} D(a_\lambda) = \bigcap_{a_\lambda \in A, \lambda \in \Lambda} V(a_\lambda) = V((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}),$$

habiendo denotado con $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ el ideal generado por los a_λ. Deducimos que $1 \in (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, es decir, $\exists\ a_1, \cdots, a_n \in \{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tales que:

$$1 = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n, \text{ para algunos } \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in A.$$

Podemos extraer un subrecubrimiento finito:

$$\emptyset = V\left((a_1, \ldots, a_n)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} V(a_i).$$

Equivalentemente, $\operatorname{Spec}(A) = D(a_1) \cup \cdots \cup D(a_n)$, y concluimos que $\operatorname{Spec}(A)$ es compacto.

Ahora sea $D(a)$ con $a \in A$ un abierto de la base $\mathcal{D}$. Si tenemos un recubrimiento por abiertos de $D(a)$, podemos obtener un recubrimiento por abiertos de la base de abiertos $\mathcal{D}$, y siguiendo un razonamiento análogo al anterior, tenemos:

$$D(a) \subset \bigcup_{a_\lambda \in A, \lambda \in \Lambda} D(a_\lambda) \Leftrightarrow V(a) \supset \bigcap_{a_\lambda \in A, \lambda \in \Lambda} V(a_\lambda) = V((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}).$$

Observamos que todo ideal primo que contiene al ideal $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, contiene también al elemento $a \in A$. Así pues, a está en la intersección de todos los ideales primos que contienen a $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, y esa intersección es $\sqrt{(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}}$.

Deducimos que existe un entero $m > 0$ tal que $a^m \in (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, es decir, existen $a_1, \cdots, a_k \in \{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tales que:

$$a^m = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_k a_k, \text{ para algunos } \beta_1, \cdots, \beta_k \in A.$$

Como un ideal primo contiene al elemento a^m si, y sólo si, contiene al elemento a tenemos que $V(a) = V(a^m)$, y concluimos que:

$$V(a) \supset V((a_1, \cdots, a_k)) = \bigcap_{i=1}^{k} V(a_i) \Leftrightarrow D(a) \subset D(a_1) \cup \cdots \cup D(a_k).$$

De esta forma concluimos que $D(a)$ es compacto, para todo $a \in A$.

□

Proposición 1.9. Un conjunto abierto U de $\operatorname{Spec}(A)$ es compacto si, y sólo si, es unión finita de conjuntos $D(a_\lambda)$, con $a_\lambda \in A$.

Demostración. Si U es compacto, todo recubrimiento por abiertos de U puede escribirse como un recubrimiento por abiertos de la base de abiertos descrita para $\operatorname{Spec}(A)$, del cual se puede extraer un subrecubrimiento finito y concluimos. El recíproco es inmediato gracias a la proposición anterior.

□

Estudiamos algunas propiedades de interés en $\operatorname{Spec}(A)$. Dado S, subconjunto de $\operatorname{Spec}(A)$, denotamos con $\overline{S}$ la clausura en $\operatorname{Spec}(A)$ de S.

Proposición 1.10. Para I, J ideales primos de A:

1. Un punto $I \in \operatorname{Spec}(A)$ es cerrado si, y sólo si, I es ideal maximal de A.

2. $\overline{\{I\}} = V(I)$.

3. $I \in \overline{J} \Leftrightarrow J \subset I$.

Demostración.

1. Si $\{I\} \in \operatorname{Spec}(A)$ es cerrado, entonces, por la proposición 1.1, existe un ideal J de A tal que $\{I\} = V(J)$. Como todo ideal está contenido en un ideal maximal, existe un ideal maximal M de A con $I \subset M$, y $M \in V(J) = \{I\}$. Deducimos que I coincide con M y, entonces, I es ideal maximal de A.
   Si I es ideal maximal de A, no está contenido en ningún otro ideal primo. Luego $V(I) = \{I\}$ y, por lo tanto, $\{I\}$ es cerrado en $\operatorname{Spec}(A)$.

2. $\overline{\{I\}} \subset V(I)$ ya que $V(I)$ es un cerrado que contiene a I. Recíprocamente, dado $J \in V(I)$, vemos que todo abierto $D(a)$ con $a \in A$, y que contenga a J interseca al conjunto $\{I\}$ de $\operatorname{Spec}(A)$. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $a \in A$, tal que

$J \subset D(a)$, y que no interseca a $\{I\}$, es decir, $I \notin D(a)$. Entonces, $I \in V(a) = Spec(A) \setminus D(a)$, pero $J \notin V(a)$, y llegamos a contradicción ya que tendríamos $I \not\subset J$ en contra de que $J \in V(I)$.

3. Se deduce del punto anterior, $J \in \overline{I} \Leftrightarrow J \in V(I) \Leftrightarrow I \subset J$.

□

Observamos, gracias a las proposiciones 1.2 y 1.10, que $\operatorname{Max}(A)$ es un cerrado de $\operatorname{Spec}(A)$, y por lo tanto, es un espacio compacto.

Recordemos los axiomas de separación T_0, T_1, así como la definición de espacio topológico irreducible. Veremos que $\operatorname{Spec}(A)$ es siempre un espacio T_0 pero no es en general un espacio T_1. También veremos en qué casos $\operatorname{Spec}(A)$ es un espacio irreducible y, con mayor generalidad, cuáles son las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec}(A)$.

Definición 1.11. Diremos que un espacio topológico X es un espacio T_0, si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, o bien existe un entorno U_x de x que no contiene a y, o bien existe un entorno U_y de y que no contiene a x.

Proposición 1.12. $\operatorname{Spec}(A)$ es un espacio T_0.

Demostración. Vemos que dados dos ideales primos distintos de A, es posible encontrar un entorno que contenga a uno y no al otro.

Sean I, J ideales primos de A distintos. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $I \not\subset J$. En ese caso, existe $a \in I \setminus J$, por lo que $J \in D(a)$ y entonces $I \notin D(a)$, que permite concluir.

□

Definición 1.13. Diremos que un espacio topológico X es un espacio T_1 si, para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos U_x, U_y no necesariamente disjuntos, que satisfacen $x \in U_x$, $x \notin U_y$, $y \notin U_x$, $y \in U_y$.

Proposición 1.14. Un espacio topológico X es T_1 si, y sólo si todos los subconjuntos unipuntuales son cerrados.

Demostración. Supongamos que X es un espacio T_1 y sea $x \in X$. Para cada punto y de X distinto de x, existe un abierto U_y con $y \in U_y$, $x \notin U_y$. El conjunto $U = \bigcup\{U_y : y \in X \setminus \{x\}\}$ es abierto y coincide con $X \setminus \{x\}$, por lo que deducimos que $\{x\}$ es cerrado.

Recíprocamente, supongamos que $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$. Para todo $y \in X$ con $x \neq y$, $U = X \setminus \{x\}$ es un abierto tal que $x \notin U, y \in U$, y concluimos que X es un espacio T_1.

$\square$

En virtud de la proposición 1.10 observamos que $\operatorname{Max}(A)$ siempre es un espacio T_1. En general, $\operatorname{Spec}(A)$ no es un espacio T_1, salvo para anillos en los que todo ideal primo es maximal.

Definición 1.15. Diremos que un espacio topológico es irreducible, si no es vacío y no se puede escribir como unión disjunta de dos cerrados.

La condición de irreducibilidad de un espacio topológico X es equivalente a que cada par de conjuntos abiertos de X, tiene intersección no vacía.

Proposición 1.16. $\operatorname{Spec}(A)$ es irreducible si, y sólo si, $\mathcal{N}(A)$ es un ideal primo de A.

Demostración. Suponemos $\operatorname{Spec}(A)$ no vacío. Vemos las dos implicaciones por contrarrecíproco:

Si $\mathcal{N}(A)$ no es un ideal primo de A, entonces existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 a_2 \in \mathcal{N}(A)$ y $a_1, a_2 \notin \mathcal{N}(A)$. Como a_1, a_2 no son nilpotentes, aplicando los dos primeros apartados de la proposición 1.7, observamos que se tiene $D(a_1) \cap D(a_2) \subset D(a_1 a_2) = \emptyset$, al ser $a_1 a_2$ nilpotente. Obtenemos que $\operatorname{Spec}(A)$ se descompone como unión disjunta de los dos cerrados $V(a_1)$ y $V(a_2)$. Deducimos que $\operatorname{Spec}(A)$ no es irreducible.

Si $\operatorname{Spec}(A)$ no es irreducible, existen abiertos no vacíos U_1, U_2 tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Por ser éstos no vacíos y como $\{D(a)\}_{a \in A}$ es base de abiertos, existen elementos a_1, a_2 tales que $\emptyset \neq D(a_1) \subset U_1$, $\emptyset \neq D(a_2) \subset U_2$ y $D(a_1) \cap D(a_2) = \emptyset$. Aplicando el apartado 1 de la proposición 1.7, obtenemos $D(a_1 a_2) = \emptyset$, y aplicando el apartado 2 de la misma proposición, deducimos que el elemento $a_1 a_2$ de A es nilpotente. Concluimos que $\mathcal{N}(A)$ no es un ideal primo de A, ya que tenemos dos elementos no nilpotentes cuyo producto si lo es.

$\square$

Para ver cuales son las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec}(A)$, vamos a necesitar algunos resultados de topología previos, que agrupamos en la siguiente proposición.

Proposición 1.17. Dado un espacio topológico X tenemos:

1. Si Y es un subespacio irreducible de X, entonces la clausura $\overline{Y}$ en X es irreducible.

2. Todo subespacio irreducible de X está contenido en un subespacio irreducible maximal.

3. Los subespacios maximales irreducibles de X son cerrados y recubren X. Se denominan componentes irreducibles. En particular, las componentes de un espacio de Hausdorff son los conjuntos unipuntuales.

Demostración.

1. Tomamos abiertos no vacíos $U_1, U_2 \subset \overline{Y}$. El abierto U_1 es entorno de algún punto $y \in \overline{Y}$, luego deducimos que $U_1 \cap Y \neq \emptyset$. De manera análoga, se deduce que $U_2 \cap Y \neq \emptyset$ y obtenemos $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) \neq \emptyset$. Utilizando la irreducibilidad de Y, deducimos que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Concluimos que $\overline{Y}$ es irreducible.

2. Sea Σ el conjunto de los subespacios irreducibles de X parcialmente ordenado por la inclusión. Consideramos una cadena $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos de Σ. Tomamos $Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$, y sean U_1, U_2 abiertos de X, tales que $U_1 \cap Y, U_2 \cap Y$ son no vacíos. En este caso, existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ con $U_1 \cap Y_{\lambda_1}, U_2 \cap Y_{\lambda_2}$ no vacíos. Podemos suponer $\lambda_1 \leq \lambda_2$, y entonces $U_1 \cap Y_{\lambda_1} \subset U_1 \cap Y_{\lambda_2} \neq \emptyset$. Por ser el conjunto Y_{λ_2} irreducible comprobamos que $U_1 \cap Y_{\lambda_2} \cap U_2 \cap Y_{\lambda_2}$ es no vacía y deducimos que $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) \neq \emptyset$. Sabemos entonces que Y es irreducible, y aplicando el lema de Zorn, obtenemos que Σ tiene al menos un elemento maximal y podemos concluir.

3. Consideramos un subespacio irreducible maximal Y de X. Aplicando el primer punto, observamos que $\overline{Y}$ es irreducible. La maximalidad de Y permite ver que Y coincide con $\overline{Y}$, es decir, Y es cerrado. Además, para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es irreducible y, por lo tanto, está contenido en un subespacio irreducible maximal. Concluimos que los subespacios irreducibles maximales recubren X. Supongamos que X es un espacio de Hausdorff. Si Y es un conjunto unipuntual, es claramente irreducible. Si tuviéramos $x, y \in Y$ distintos, por ser X de Hausdorff existirían U_x, U_y abiertos disjuntos con $x \in U_x$, $y \in U_y$ y llegaríamos así a contradecir que Y es irreducible. Vemos que las componentes irreducibles de un espacio de Hausdorff son los conjuntos unipuntuales.

$\square$

En general ni $\mathrm{Spec}\,(A)$ ni $\mathrm{Max}\,(A)$ son espacios de Hausdorff.

2 Propiedades de conexión en el espectro

Estudiaremos ahora algunos resultados sobre conexión en $\mathrm{Spec}\,(A)$. Para realizar esta tarea, tendremos que trabajar con los elementos idempotentes del anillo, es decir, los $e \in A$ que satisfacen $e^2 = e$. Denotaremos con $\mathcal{B}(A)$ al conjunto de los idempotentes de un anillo A. Primero dotaremos a $\mathcal{B}(A)$ de estructura de álgebra de Boole.

Vamos a recordar las nociones de retículo distributivo y de álgebra de Boole. Los retículos se pueden definir de dos formas equivalentes, como conjunto parcialmente ordenado o como conjunto con dos operaciones. Más adelante, ahondaremos en estas construcciones, pero por el momento simplemente introducimos las definiciones necesarias para abordar el estudio de la conexión en el espectro.

Definición 1.18. Diremos que $(R, \vee, \wedge)$, donde R es un conjunto y $\vee, \wedge$ son operaciones binarias en R, es un *retículo*, si se cumple que para todos $r_1, r_2, r_3 \in R$:

- Asociatividad:
  - $r_1 \vee (r_2 \vee r_3) = (r_1 \vee r_2) \vee r_3$.
  - $r_1 \wedge (r_2 \wedge r_3) = (r_1 \wedge r_2) \wedge r_3$.
- Conmutatividad:
  - $r_1 \vee r_2 = r_2 \vee r_1$.
  - $r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_1$.
- Absorción:
  - $r_1 \vee (r_1 \wedge r_2) = r_1$.
  - $r_1 \wedge (r_1 \vee r_2) = r_1$.

De las dos propiedades de absorción se deduce:

- Idempotencia
  - $r_1 \vee r_1 = r_1$.
  - $r_1 \wedge r_1 = r_1$.

Diremos que $(R, \vee, \wedge)$ es un *retículo distributivo* si cumple:

- Distributividad:
    - $r_1 \vee (r_2 \wedge r_3) = (r_1 \vee r_2) \wedge (r_1 \vee r_3)$.
    - $r_1 \wedge (r_2 \vee r_3) = (r_1 \wedge r_2) \vee (r_1 \wedge r_3)$.

Diremos que un elemento m (resp. M) de un retículo R es un elemento mínimo (resp. máximo) si $r \vee m = r$ (resp. $r \wedge M = r$) para todo $r \in R$. El elemento mínimo (resp. máximo) en caso de existir es único y será denotado con 0 (resp. 1).

Sea $(R, \vee, \wedge)$ un retículo distributivo con elementos mínimo 0 y máximo 1. Diremos que R es un *álgebra de Boole* si, para cada elemento $r \in R$, existe $r' \in R$ tal que $r \vee r' = 1$ y $r \wedge r' = 0$, en cuyo caso se dice que r' es el complementario del elemento r.

Proposición 1.19. Para un anillo A, en su conjunto de idempotentes $\mathcal{B}(A)$ consideramos las operaciones:

- $a_1 \vee a_2 = a_1 + a_2 - a_1a_2$, para todos $a_1, a_2 \in \mathcal{B}(A)$.
- $a_1 \wedge a_2 = a_1a_2$, para todos $a_1, a_2 \in \mathcal{B}(A)$.
- $a' = 1 - a$, para todo $a \in \mathcal{B}(A)$.

De esta forma $(\mathcal{B}(A), \vee, \wedge, 0, 1,')$ es un álgebra de Boole. Obsérvese que los elementos 0 y 1 del anillo A son, respectivamente, el elemento mínimo y el elemento máximo de $\mathcal{B}(A)$.

Veamos una forma de caracterizar los conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados de $\operatorname{Spec}(A)$, en términos de idempotentes del anillo.

Proposición 1.20. Todo subconjunto abierto y cerrado de $\operatorname{Spec}(A)$ es de la forma $V(e)$ para algún idempotente e del anillo A.

Demostración. Sea S un subconjunto abierto y cerrado de $\operatorname{Spec}(A)$. Por ser cerrado, la proposición 1.1 garantiza que existe un ideal I de A, tal que $S = V(I)$. Por ser su complementario en $\operatorname{Spec}(A)$ cerrado, podemos razonar de manera análoga y deducir que existe un ideal J de A tal que $\operatorname{Spec}(A) \setminus S = V(J)$. De esta manera, tenemos $\operatorname{Spec}(A) = V(I) \cup V(J)$ y $V(I) \cap V(J) = \emptyset$.

Utilizando la proposición 1.3 vemos que $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = \operatorname{Spec}(A)$, y deducimos que IJ está contenido en todos los ideales primos de A. En particular, IJ está contenido en $\mathcal{N}(A)$.

De $V(I) \cap V(J) = \emptyset$ obtenemos que no existe un ideal primo de A que contenga a I y J. El ideal $I + J$ es el menor ideal que contiene a I y a J. Si $I + J$ fuera distinto del total, existiría un ideal maximal M con $I + J \subset M$, en contra de lo obtenido. Concluimos que $I + J = A$ y resulta que existen $i \in I$, $j \in J$ tales que $i + j = 1$. Por ser ij nilpotente, existe un entero n tal que $(ij)^n = 0$, entonces existen $a_1, a_2 \in A$ tales que:

$$1 = 1^{2n} = (i + j)^n (i + j)^n = i^n a_1 + j^n a_2.$$

Se tiene $i^n a_1 \in I$ y $j^n a_2 \in J$. Los elementos $i' = i^n a_1 \in I$, $j' = j^n a_2 \in J$ cumplen $i'j' = 0$ y $i' + j' = 1$. Obtenemos entonces, $1 = i' + j' = i'^2 + j'^2$ y observamos que:

$$1 - i' = (1 - i')(i' + j') = i' + j' - i'j' - i'^2 = i' + j' - i'^2 = 1 - i'^2.$$

Deducimos que i' es idempotente. Si un ideal primo contiene a I, entonces contiene a i' y por lo tanto no puede contener a j', ya que contendría al elemento 1. Se deduce que $V(I) = V(i')$ que permite concluir.

Recíprocamente, si e es un idempotente de A, entonces $V(e) \cap V(1 - e) = \emptyset$, ya que ningún ideal primo puede contener a e y a $1 - e$, pues contendría a 1. De modo similar, $V(e) \cup V(1 - e) = \operatorname{Spec}(A)$, ya que $e(1 - e) = 0$. Vemos claramente que $V(e)$ es abierto al ser su complementario en $\operatorname{Spec}(A)$ cerrado, y puesto que por construcción es cerrado, podemos concluir.

□

Recordemos que un espacio topológico X es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados son X y $\emptyset$. En virtud de la proposición 1.1, vemos que $\operatorname{Spec}(A)$ es conexo si, y sólo si, A no tiene elementos idempotentes distintos de 0 y 1.

Nuestro objetivo ahora es obtener un criterio para saber cuándo dos ideales primos de A se encuentran en la misma componente conexa de $\operatorname{Spec}(A)$. Antes de abordar dicho problema, necesitamos probar un resultado previo.

Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Sabemos que si P es un ideal primo de B, entonces $\phi^{-1}(P)$ es un ideal primo de A. Más aún, veremos a continuación que la aplicación inducida:

$$\begin{aligned} \phi^* : \operatorname{Spec}(B) &\longrightarrow \operatorname{Spec}(A) \\ P &\longmapsto \phi^{-1}(P) \end{aligned}$$

es continua.

Lema 1.21. Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo de anillos y $\phi^* : \mathrm{Spec}\,(B) \to \mathrm{Spec}\,(A)$ la aplicación inducida correspondiente. Dado $a \in A$, tenemos que $(\phi^*)^{-1}(D(a)) = D(\phi(a))$ y, como consecuencia, ϕ^* es continua.

Demostración. Basta observa que:

$$\begin{aligned}(\phi^*)^{-1}(D(a)) &= \{I \in \mathrm{Spec}\,(B) : \phi^*(I) \in D(a)\} \\ &= \left\{I \in \mathrm{Spec}\,(B) : a \notin \phi^{-1}(I)\right\} \\ &= \{I \in \mathrm{Spec}\,(B) : \phi(a) \notin I\} \\ &= D(\phi(a))\end{aligned}$$

□

Podemos abordar ahora el problema de las componentes conexas planteado anteriormente.

Proposición 1.22. Dos ideales primos I, J del anillo A pertenecen a la misma componente conexa de $\mathrm{Spec}\,(A)$ si, y sólo si, contienen a los mismos idempotentes.

Demostración. Sean I, J ideales primos de A. Si un idempotente e de A pertenece a I pero no a J, entonces $V(e)$ es un conjunto abierto y cerrado de $\mathrm{Spec}\,(A)$ que contiene a I. Además, tenemos $e(1-e) = 0 \in J$ y, utilizando la primalidad de J, deducimos que J está contenido en $V(1-e)$, que es otro conjunto abierto y cerrado. Como sabemos que $V(e) \cup V(1-e) = \mathrm{Spec}\,(A)$ y $V(e) \cap V(1-e) = \emptyset$, concluimos que I y J se encuentran en componentes conexas distintas. De esta forma vemos que si dos ideales primos están en la misma componente conexa, deben contener a los mismos idempotentes.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que I,J contienen a los mismos idempotentes. Denotemos con E al ideal generado por los idempotentes contenidos en I y J, por lo tanto $I, J \in V(E)$. Consideramos el anillo cociente A/E, con su homomorfismo de anillos suprayectivo $\pi : A \to A/E$ asociado. Como vimos antes, el homomorfismo π induce una aplicación continua $\pi^* : \mathrm{Spec}\,(A/E) \to \mathrm{Spec}\,(A)$. Recordemos que existe una correspondencia biyectiva que conserva el orden entre los ideales de A que contienen a E y los ideales de A/E, dada por la imagen inversa de π. Deducimos entonces que $V(E)$ es la imagen por π^* de $\mathrm{Spec}\,(A/E)$. Veamos ahora que $\mathrm{Spec}\,(A/E)$ es conexo para poder asegurar que $V(E)$ es conexo y así poder concluir.

Para ver que $\mathrm{Spec}\,(A/E)$ es conexo debemos probar que los únicos elementos idempotentes de A/E son $0+E$ y $1+E$. Sea $f+E$ un elemento idempotente de A/E, tenemos $(f+E)(f+E) = f^2+E$, que coincide con $f+E$. Obtenemos que $f^2 - f + E = 0 + E$, es decir, $g = f^2 - f \in E$. Podemos escribir:

$$g = \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda e_\lambda, \text{ con } g_\lambda \in A,\ e_\lambda \text{ idempotente de } I \text{ y } |\Lambda| \text{ finito.}$$

Con la notación introducida en la proposición 1.19, consideramos $e = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$, que está claramente en E. Como $e_i \wedge (e_i \vee e_j) = e_i$, para e_i, e_j idempotentes de I, por construcción de g vemos que $ge = g \wedge e = g$, luego $(f^2 - f)e = f^2 - f$, es decir, $(f^2 - f)(1 - e) = f(f - 1)(1 - e) = 0$. Nos quedamos con el elemento $h = f(1 - e) = f - ef$, y como $ef \in E$, tomando clases obtenemos $h + E = f + E$. Además, $h^2 - h = f^2(1 - e) - f(1 - e) = 0$, y deducimos que h es idempotente. Tenemos $h(1 - h) = 0 \in I$ y, utilizando la primalidad de I, deducimos que se tiene $h \in I$ o $(1 - t) \in I$. El caso $h \in I$ lleva a deducir que $f + E = 0 + E$ y el otro caso lleva a $f + E = 1 + E$.

Concluimos que $\mathrm{Spec}\,(A/E)$ es conexo, lo que implica que $V(E)$ es conexo. Tenemos que I, J pertenecen al mismo conexo $V(E)$, por lo que pertenecen a la misma componente conexa de $\mathrm{Spec}\,(A)$.

□

Nos interesa saber cuándo un conjunto de idempotentes de un anillo es el conjunto de idempotentes de un ideal primo. Con este objetivo en mente, definimos el concepto de ideal Booleano maximal y veremos que los conjuntos de idempotentes de A que corresponden a conjuntos de idempotentes de ideales primo son exactamente los ideales Booleanos maximales de A.

Definición 1.23. Diremos que un conjunto E no vacío de idempotentes de un anillo A es un *ideal Booleano maximal* si satisface:

1. Para cada idempotente e de A, se cumple $e \in E$ o $1 - e \in E$, pero no ambos.

2. Si e y f son idempotentes de A, entonces $ef \in E$ si, y sólo si, $e \in E$ o $f \in E$.

Proposición 1.24. Un conjunto E de idempotentes de un anillo A es el conjunto de idempotentes de algún ideal primo de A si, y sólo si, E es un ideal Booleano maximal.

Demostración. Sea I un ideal primo de A y $E(I)$ el conjunto formado por los idempotentes de I. Para todo idempotente e del anillo A, tenemos $e(1 - e) = 0 \in I$. Utilizando la primalidad de I deducimos que $e \in I$ o

$1-e \in E$, pero no ambas, ya que $(1-e)+e = 1 \notin E(I)$. Vemos de esta forma que lo elementos de $E(I)$ cumplen la primera condición de la definición anterior. Si tenemos $e, f \in A$ idempotentes, con $ef \in I$, utilizamos la primalidad de I y que ef es idempotente para deducir que se satisface la segunda condición de la definición anterior. De esta manera hemos visto que $E(I)$ es un ideal Booleano maximal.

Para el recíproco, sea E un ideal Booleano maximal. Veamos que el ideal (E), generado por los elementos de E, es un ideal propio de A, es decir, no es el total. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que $(E) = A$. Entonces existen elementos $e_1, \ldots, e_n \in E$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que se tiene $1 = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$. Definimos $f_i = (1-e_1)(1-e_2)\ldots(1-e_{i-1})ei$, para $i = 1, \ldots, n$ y, por ser E ideal Booleano maximal, podemos asegurar que los f_i son elementos de E. Por ejemplo, f_4 se escribiría:

$$f_4 = e_4 - e_1e_4 - e_2e_4 - e_3e_4 + e_1e_2e_4 + e_1e_3e_4 + e_2e_3e_4 - e_1e_2e_3e_4$$

Por construcción se tiene que el ideal generado por los e_i coincide con el generado por los f_i, y además $f_if_j = 0$ si $i \neq j$. Existen entonces elementos $b_1, \ldots, b_n \in A$ tales que $1 = b_1f_1 + \cdots + b_nf_n$. Observamos que tenemos $f_i = f_i(b_1f_1 + \cdots + b_nf_n) = b_if_i$, por lo que deducimos que $1 = f_1 + \cdots + f_n$. Como $f_if_j = 0$ para $i \neq j$, comprobamos que $(1-f_1)\ldots(1-f_n) = 0 \in E$ pero, por construcción, ningún $(1-f_i) \in E$ y llegamos a contradicción. El ideal (E) no es el total, luego está contenido en un ideal maximal M de A. Si tenemos un idempotente e de M con $e \notin E$, entonces tendríamos $1-e \in E \subset M$ que iría en contra de la maximalidad de M, luego E contiene exactamente a los idempotentes de M y podemos concluir.

□

Gracias a esta proposición tenemos una caracterización de los conjuntos de idempotentes de los ideales primos de un anillo A. Veamos a continuación que la condición de ideal Booleano maximal está estrechamente ligada con la estructura del conjunto de idempotentes de A.

Anteriormente vimos que se podía dotar a $\mathcal{B}(A)$ de estructura de álgebra de Boole. Veamos ahora cómo dar explícitamente una estructura de anillo de Boole en $\mathcal{B}(A)$. Recordemos que un anillo de Boole es un anillo en el que todos los elementos son idempotentes.

Proposición 1.25. Sea A un anillo. En el conjunto $\mathcal{B}(A)$ consideramos la suma dada por $e \oplus f = e + f - 2ef$, para $e, f \in \mathcal{B}(A)$ y la multiplicación heredada de A. Con estas operaciones $\mathcal{B}(A)$ es un anillo de Boole.

Demostración. La demostración es simplemente una serie de comprobaciones sencillas. Vemos, por ejemplo, que $e \oplus f$ es idempotente para todos $e, f \in \mathcal{B}(A)$:

$$\begin{aligned}(e \oplus f)^2 &= e + ef - 2ef + ef + f - 2ef - 2ef - 2ef + 4ef \\ &= e + f - 2ef \\ &= (e \oplus f)\end{aligned}$$

Podemos ver que la operación $\oplus$ es asociativa. Para e, f, g idempotentes de A:

$$\begin{aligned}(e \oplus f) \oplus g &= (e + f - 2ef) \oplus g \\ &= e + f - 2ef + g - 2(e + f - 2ef)g \\ &= e + f + g - 2ef - 2eg - 2fg + 4efg \\ &= e \oplus (f \oplus g)\end{aligned}$$

Además, la operación es claramente conmutativa, $e \oplus f = f \oplus e$, y se tiene $e \oplus 0 = e$, $e \oplus e = 0$.

□

La estructura de los anillos de Boole es conocida. Por ejemplo, sabemos que los anillos de Boole tienen característica 2. Si A es un anillo de Boole, para todo $a \in A$, se tiene que $a+a = a+a+(a^2-a)+(a^2-a) = (a+a)^2-(a+a) = 0$.

Recordemos que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es el único anillo de Boole íntegro. Esto es muy sencillo de ver, ya que todo elemento no nulo de un anillo de Boole íntegro debe cumplir $x = x^2 = x^3$ y, gracias a la integridad, se deduce que $x = 1$.

Si se construye el cociente de un anillo de Boole por un ideal primo, se obtiene un anillo de Boole íntegro isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que es un cuerpo. De esta forma se deduce que todos los ideales primos de un anillo de Boole son maximales.

Veamos cómo se pueden caracterizar los ideales maximales de un anillo de Boole.

Lema 1.26. *I es un ideal maximal de un anillo de Boole A si, y sólo si, I cumple las dos condiciones de ideal Booleano maximal.*

Demostración. Si I es un ideal maximal de un anillo de Boole A, es claro que se cumple la segunda condición por ser un ideal primo. Veamos que se cumple también la primera. Para todo $a \in A$, si $a \in I$ y suponemos que $1 - a \in I$, entonces $a + (1 - a) = 1 \in I$, en contra de que I sea maximal. De modo análogo, si $a \notin I$ y suponemos $1 - a \notin I$, tenemos $a(1-a) = a^2 - a = 0 \in I$ y llegamos de nuevo a contradicción. Deducimos que I cumple las dos condiciones.

Recíprocamente, supongamos que I cumple las dos condiciones de ideal Booleano maximal. Veamos que I es un ideal maximal de A. Sean $a, b \in I$ tenemos $(1-a), (1-b) \notin I$. Suponemos que $1 - (a+b) \in I$, entonces $(a+b) \notin I$ y $(a+b)(1-b) = a(1-b) \in I$ llegando a contradicción. Deducimos que si $a, b \in I$ entonces $a+b \in I$, que con la segunda condición hacen de I un ideal primo. Como todo ideal primo de un anillo de Boole es maximal, podemos concluir. □

Proposición 1.27. Un conjunto E de idempotentes de un anillo A es un ideal Booleano maximal si, y sólo si, es un ideal maximal de $\mathcal{B}(A)$.

Demostración. Se deduce por aplicación directa del lema anterior. □

3 Retracción y normalidad

En esta sección vamos a ver qué condiciones debe cumplir el anillo A para que $\mathrm{Spec}\,(A)$ sea un espacio topológico normal. Además veremos que los anillos que cumplen esta propiedad son los únicos para los que $\mathrm{Spec}\,(A)$ retracta sobre $\mathrm{Max}\,(A)$.

Recordemos las definiciones de espacio normal y de retracción.

Definición 1.28. Sea X un espacio topológico, decimos que X es un espacio normal si, para cada par F_1, F_2 de conjuntos cerrados disjuntos de X, existen abiertos disjuntos U_1, U_2 con $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$.

Definición 1.29. Sea X un espacio topológico e Y un subespacio de X. Decimos que Y es un retracto de X si existe una aplicación continua, llamada retracción, $r : X \to Y$ tal que $r\big|_Y = id_Y$.

Los anillos que nos van a interesar son los correspondientes a la siguiente definición.

Definición 1.30. Diremos que un anillo A es un *pm-anillo*, si cada ideal primo está contenido en un único ideal maximal.

Sea A un *pm*-anillo. Definimos la aplicación $\mu : \mathrm{Spec}\,(A) \to \mathrm{Max}\,(A)$ que a cada ideal primo de A lo envía en el único maximal que lo contiene. Hacemos notar que la estructura de estos anillos implica que μ está bien definida y que, restringida a $\mathrm{Max}\,(A)$, μ es la identidad. Si esta aplicación fuera continua tendríamos definida la retracción que buscamos.

Como vamos a trabajar con ideales primos y los ideales maximales que los contienen, introducimos una nueva notación. Para cada ideal maximal M de A, denotaremos con O_M a la intersección de los ideales primos de A contenidos en M. Recordemos que la intersección de ideales es un ideal, luego O_M es un ideal de A.

Con el siguiente teorema queda reflejada la relación entre la condición de *pm*-anillo y la normalidad del espectro asociado. La aplicación μ que acabamos de definir nos dará la retracción de $\mathrm{Spec}\,(A)$.

Teorema 1.31. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es un *pm*-anillo.
2. $\mathrm{Max}\,(A)$ es un retracto de $\mathrm{Spec}\,(A)$.
3. Para cada $M \in \mathrm{Max}\,(A)$, M es el único ideal maximal que contiene a O_M.
4. $\mathrm{Spec}\,(A)$ es un espacio normal.

Además, si se cumplen los enunciados, la aplicación μ que definimos previamente es la única retracción de $\mathrm{Spec}\,(A)$ en $\mathrm{Max}\,(A)$ y podemos asegurar que $\mathrm{Max}\,(A)$ es de Hausdorff.

Demostración. Para cada ideal maximal M del anillo A, podemos construir el anillo local A_M, localizando en el ideal M. Sabemos que los ideales primos del anillo local A_M están en correspondencia biyectiva con los ideales primos de A contenidos en M. Identificaremos el subconjunto de $\mathrm{Spec}\,(A)$ formado por los ideales primos de A contenidos en un ideal maximal M con $\mathrm{Spec}\,(A_M)$. De esta forma, vemos $\mathrm{Spec}\,(A_M)$ como un subconjunto de $\mathrm{Spec}\,(A)$ y O_M es la intersección de los elementos de $\mathrm{Spec}\,(A_M)$. Veamos que el punto 3. del teorema equivale a que el conjunto $\mathrm{Spec}\,(A_M)$, visto como subconjunto de $\mathrm{Spec}\,(A)$, es cerrado.

Para $M \in \mathrm{Max}\,(A)$, si $\mathrm{Spec}\,(A_M)$ es cerrado, existe un ideal I de A tal que $\mathrm{Spec}\,(A_M) = V(I)$. De este modo, todos los ideales primos contenidos en M contienen a I y, por tanto, $I \in O_M$. Todo ideal maximal que contiene a I es un elemento de $\mathrm{Spec}\,(A_M)$, por lo que, sólo puede ser M y concluimos que O_M solo está contenido en un maximal, que es M. Recíprocamente, si M

es el único maximal que contiene a O_M, consideramos el conjunto $V(O_M)$. Para todo $I \in V(O_M)$, tenemos $O_M \subset I$. Deducimos que el único maximal que contiene a I es M y observamos que $V(O_M) \subset \mathrm{Spec}\,(A_M)$. Como la otra contención se da por construcción concluimos que $\mathrm{Spec}\,(A_M)$ es cerrado.

Para ver que 3 implica 1, basta con observar que $\mathrm{Spec}\,(A_M)$ es cerrado si, y sólo si, $O_M \subset I$ implica que $I \subset M$, para todo $I \in \mathrm{Spec}\,(A)$ y $M \in \mathrm{Max}\,(A)$. Como antes, si tenemos $\mathrm{Spec}\,(A_M) = V(I)$, entonces $I \subset O_M$, luego un ideal que contenga a O_M contendrá también a I y pertenecerá a $\mathrm{Spec}\,(A_M)$. El recíproco se obtiene observando que, de darse la condición:

$$O_M \subset I \text{ implica que } I \subset M.$$

entonces $V(O_M)$ coincide con $\mathrm{Spec}\,(A_M)$.

Veamos que 2 implica 1 de forma sencilla. Supongamos que tenemos una retracción $r : \mathrm{Spec}\,(A) \to \mathrm{Max}\,(A)$ del espectro primo sobre el maximal. Tomamos I un ideal primo de A y sea M su imagen por r. De esta forma $I \in r^{-1}(\{M\})$. Recordemos que $\mathrm{Max}\,(A)$ es un espacio T_1 y, en tales espacios, los subconjuntos unipuntuales son cerrados. Como r es continua por ser retracción, $r^{-1}(\{M\})$ es cerrado. Utilizando el punto 2 de la proposición 1.10, tenemos que $\overline{\{I\}} = V(I) \subset r^{-1}(\{M\})$, luego si I está contenido en un ideal maximal M', debemos tener $M' = M$, para no ir contra la maximalidad de M. Se concluye que A es *pm*-anillo y además vemos que r coincide con μ.

Probamos ahora que 1 implica 2 y 3 viendo que en ese caso, la aplicación μ es continua. Definiremos a continuación unos subconjuntos auxiliares, que utilizaremos para probar la continuidad. Sea F un subconjunto cerrado de $\mathrm{Max}\,(A)$. Definimos:

$$\Phi = \cap\{M : M \in F\} = \cap F.$$

$$\Psi = \cap\{I \in \mathrm{Spec}\,(A) : \mu(I) \in F\}.$$

$$\Omega = \cup\{M : M \in F\} = \cup F.$$

Veamos que $\mu^{-1}(F)$ es un cerrado de $\mathrm{Spec}\,(A)$, es decir, que si tenemos $I \in \mathrm{Spec}\,(A)$ con $\Psi \subset I$, entonces $\mu(I) \in F$. Si tomamos $J \in \mathrm{Spec}\,(A)$ con $J \subset \Omega$, por ser A *pm*-anillo, $\mu(J) \in F$. El ideal $J + \Phi$ es el menor ideal que contiene a J y a Φ y, por construcción, está contenido en Ω. Sabemos que existe $M \in \mathrm{Max}\,(A)$ con $J + \Phi \subset M$, por lo tanto, $\Phi \subset M$ y, como F es un cerrado de $\mathrm{Max}\,(A)$, $M \in F$. También tenemos $J \subset M$, y deducimos que

$\mu(J) = M$.

Si tomamos ahora $I \in \mathrm{Spec}\,(A)$ tal que $\Psi \subset I$, probamos que I contiene a un $J \in \mathrm{Spec}\,(A)$ con $J \subset \Omega$. De esta forma tendríamos $\mu(I) = \mu(J) \in F$. Definimos $S = A \setminus \Omega$, $T = A \setminus I$. Sabemos que por ser I primo, T es un subconjunto multiplicativamente cerrado de A. De forma similar, S también lo es, ya que $1 \in S$ (al no estar en ningún maximal) y, además, si $s_1, s_2 \in S$ entonces que $s_1 s_2 \in S$, ya que, en caso contrario, $s_1 s_2$ pertenecería a un maximal $M \subset \Omega$, lo que obligaría a tener $s1 \notin S$ o $s2 \notin S$, llegando a contradicción. Comprobamos ahora que el subconjunto multiplicativamente cerrado $ST = \{st : s \in S, t \in T\}$ no interseca a Ψ. Tomamos $s \in S$, $t \in T$. Como $\Psi \subset I$, existe $I' \in \mu^{-1}(F)$ tal que $t \notin I'$. Como $s \notin I'$, entonces $st \notin \Psi$ y deducimos que ST no interseca a Ψ y existe un ideal primo J que contiene a Ψ y que no interseca a ST. Además $J \subset \Omega$, $J \subset I$ y concluimos que μ es continua.

Comprobamos que si se cumple 1, entonces $\mathrm{Max}\,(A)$ es un espacio de Hausdorff. Dados $M_1, M_2 \in \mathrm{Max}\,(A)$ con $M_1 \neq M_2$, construimos el subconjunto multiplicativamente cerrado $S = (A \setminus M_1)(A \setminus M_2)$ y vemos que debe contener al 0. En caso contrario, existiría $I \in \mathrm{Spec}\,(A)$ tal que $I \cap S = \emptyset$, lo que implica que $I \subset M_1 \cap M_2$, en contra de que A es pm-anillo.

Probamos que 1 implica 4 utilizando la continuidad de μ. Recordemos que en un espacio compacto y de Hausdorff, un subconjunto es cerrado si, y sólo si, es compacto. Sabemos que $\mathrm{Max}\,(A)$ es un espacio compacto y de Hausdorff y μ envía cerrados disjuntos de $\mathrm{Spec}\,(A)$ en cerrados disjuntos de $\mathrm{Max}\,(A)$. Si tenemos dos cerrados disjuntos F_1, F_2 de $\mathrm{Spec}\,(A)$, construimos los abiertos de $\mathrm{Max}\,(A)$ que separan a sus imágenes por μ en $\mathrm{Max}\,(A)$. Recuperamos los abiertos que separan a F_1 y F_2 via imágenes inversas, obteniendo de este modo la normalidad del espectro.

Veamos que 4 implica 1, que es la implicación restante. Sean $M_1, M_2 \in \mathrm{Max}\,(A)$ con $M_1 \neq M_2$. Por el apartado 1 de la proposición 1.10, sabemos que los subconjuntos $\{M_1\}$,$\{M_2\}$ de $\mathrm{Spec}\,(A)$ son cerrados y, además, son disjuntos por construcción. Utilizamos la normalidad del espacio para separar dichos conjuntos. Existen entonces $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \notin M_1$, $a_2 \notin M_2$ y tales que $D(a_1) \cap D(a_2) = \emptyset$. Utilizando el primer apartado de la proposición 1.7, tenemos $D(a_1) \cap D(a_2) = D(a_1 a_2) = \emptyset$. Aplicamos el segundo apartado de la misma proposición y deducimos que $a_1 a_2$ es un elemento nilpotente de A. Concluimos que $M_1 \cap M_2$ no puede contener ideales primos y obtenemos la condición de pm-anillo.

□

Proposición 1.32. Sea A un anillo cuyo nilradical coincide con su radical de Jacobson, es decir, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{J}(A)$. Se verifica que A es un pm-anillo si, y sólo si, $\operatorname{Max}(A)$ es un espacio de Hausdorff.

Demostración. Supongamos que $\operatorname{Max}(A)$ es un espacio de Hausdorff, y sean $M, M' \in \operatorname{Max}(A)$, $M \neq M'$. Existen entonces, $a \in A \setminus M$ y $a' \in A \setminus M'$ tales que $D^M(a) \cap D^M(a') = \emptyset$. Por lo tanto, $aa' \in \mathcal{J}(A) = \mathcal{N}(A)$. De donde se deduce que $M \cap M'$ no contiene a ningún ideal primo. Esto prueba que A es un pm-anillo. Lo recíproco ha sido probado con anterioridad.

□

Observación. El siguiente ejemplo muestra que en la proposición anterior no puede suprimirse la hipótesis $\mathcal{N}(A) = \mathcal{J}(A)$. Sean M y M' dos ideales maximales del anillo $\mathbb{Z}$, $M \neq M'$. Consideremos el conjunto multiplicativamente cerrado $S = \mathbb{Z} \setminus (M \cup M')$. El anillo de fracciones $A = S^{-1}\mathbb{Z}$ tiene únicamente dos ideales maximales y, por lo tanto, $\operatorname{Max}(A)$ es un espacio de Hausdorff. Sin embargo, A es un dominio de integridad que no es cuerpo, luego no es un pm-anillo.

Con este teorema tenemos una caracterización de los anillos que dan lugar a espectros normales. Sabemos que los anillos locales o los anillos en los que todo ideal primo es maximal son pm-anillos, pero quizás la condición de pm-anillo sea difícil de verificar en casos más generales. Vamos a ver a continuación otra caracterización de los pm-anillos, esta vez de forma puramente aritmética.

Teorema 1.33. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es un pm-anillo.
2. Para todos $m_1, m_2 \in A$ con $m_1 + m_2 = 1$, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $(1 - a_1 m_1)(1 - a_2 m_2) = 0$

Demostración. Supongamos que A es un pm-anillo, y sean $m_1, m_2 \in A$ con $m_1 + m_2 = 1$. Construimos los subconjuntos multiplicativamente cerrados $S_1 = \{1 - a_1 m_1 : a_1 \in A\}$, $S_2 = \{1 - a_2 m_2 : a_2 \in A\}$, $T = S_1 S_2$.

Recordemos que $0 \in T$ equivale a que el anillo $T^{-1}A$ no es el anillo 0. Los ideales primos de $T^{-1}A$ están en correspondencia biunívoca con los ideales de A que no cortan a T.

Supongamos que $0 \notin T$ y razonemos por reducción al absurdo. En este caso existe un ideal primo I de A tal que $I \cap T = \emptyset$. Consideramos el ideal $I + (m_1)$, que no es el total, puesto que si tuviéramos $1 = i + am_1$ con $i \in I$ y $a \in A$, entonces $i = 1 - am_1 \in S_1 \subset T$, en contra de que $I \cap T = \emptyset$. Existe entonces un ideal maximal M_1 que contiene a $I + (m_1)$. De modo análogo, existe un ideal maximal M_2 que contiene a $I + (m_2)$. Por construcción vemos que $M_1 \neq M_2$, ya que en caso contrario tendríamos $m_1 + m_2 = 1 \in M_1$, llegando a contradecir que M_1 es maximal. Observamos que el ideal primo I debe estar contenido en dos ideales maximales distintos, en contra de que A es *pm*-anillo. Concluimos que 1 implica 2, ya que debe cumplirse que $0 \in T$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple el segundo enunciado y que A no es *pm*-anillo. Sea I un ideal primo contenido en dos ideales maximales distintos M_1, M_2. Como $M_1 \neq M_2$, podemos suponer que existe $x \in A$ con $x \notin M_1$, $x \in M_2$. Pasamos al anillo cociente A/M_1, que, por ser M_1 maximal, es un cuerpo. Existe entonces $y \in A$, $y \notin M_1$ con $(x + M_1)(y + M_1) = xy + M_1 = 1 + M_1$. Sea $m_2 = xy$ que pertenece a M_2. Existe entonces $m_1 \in M_1$ tal que $1 = m_1 + xy = m_1 + m_2$. Aplicando 2, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $(1 - a_1 m_1)(1 - a_2 m_2) = 0 \in I$. Utilizando la primalidad de I, deducimos que $(1 - a_1 m_1) \in I$ o $(1 - a_2 m_2) \in I$, por lo que se da $M_1 = A$ o $M_2 = A$, llegando así a contradicción.

$\square$

Capítulo 2

Aplicaciones a los anillos de funciones continuas

Vamos a explorar a continuación algunas aplicaciones de lo estudiado en el capítulo anterior, centrándonos en los anillos de funciones continuas. Comenzaremos por extender la construcción realizada en el capítulo anterior a retículos distributivos. Continuaremos estudiando con detenimiento la estructura del anillo de funciones continuas $\mathrm{C}(X)$, viendo que se trata de un *pm*-anillo y poniendo en relación su estructura con la del retículo $\mathrm{Z}(X)$. Abordaremos a continuación el estudio de los espacios de Tychonoff, caracterizándolos en términos de compactificaciones, dando especial importancia a la construcción de la compactificación de Stone-Cech βX y varias de sus caracterizaciones. Finalmente, estudiaremos los trabajos de Frink y Steiner, centrados en dar caracterizaciones intrínsecas de los espacios de Tychonoff, que no están referidas a las funciones continuas.

1 Espectros de retículos

Consideremos un conjunto parcialmente ordenado $(\mathrm{R}, \leq)$ en el que todo conjunto $\{a, b\}$ con $a, b \in \mathrm{R}$ tiene supremo e ínfimo para el orden $\leq$. Podemos definir dos operaciones $\wedge, \vee$ en R dadas por:

- $a \vee b = \sup\{a,b\}$.
- $a \wedge b = \inf\{a,b\}$.

Estas dos operaciones dotan a R de estructura de retículo. Recíprocamente dado un retículo $(\mathrm{R}, \vee, \wedge)$ podemos definir un orden $\leq$ en R dado por:

$$a \leq b \text{ si } a = a \wedge b \text{ para } a, b \in \mathrm{R}.$$

Recordemos que las expresiones $a = a \wedge b$ y $b = a \vee b$ son equivalentes como consecuencia de las propiedades de absorción. Es sencillo ver que las operaciones $\wedge, \vee$ definidas a partir de este orden, coinciden con las de partida. Las dos definiciones de retículo son equivalentes, y utilizaremos la que más convenga en cada situación.

Los retículos con los que trabajaremos en adelante serán retículos distributivos con mínimo 0 y máximo 1, que denotaremos $(\mathrm{R}, \vee, \wedge, 0, 1)$.

Diremos que L es un *subretículo* de un retículo distributivo con mínimo y máximo R, si L es un subconjunto de R cerrado para las dos operaciones de R, y que contiene al mínimo y al máximo de R.

Ejemplos 2.1. Los retículos que más nos van a interesar a lo largo del trabajo son subretículos del retículo $\mathrm{P}(X)$ formado por las partes de un conjunto X con la relación de inclusión.

1. $T(X)$, el retículo formado por los conjuntos cerrados de un espacio topológico X.

2. $O(X)$, el retículo formado por los conjuntos abiertos de un espacio topológico X.

3. $\mathrm{Z}(X)$, el retículo formado por los conjuntos de ceros de las funciones continuas con valores reales sobre un espacio topológico X.

Cada retículo $(\mathrm{R}, \leq)$ tiene su *retículo dual* $(\mathrm{R}', \leq')$, siendo $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$ y $a \leq' b$ si $b \leq a$. De forma equivalente, tenemos $(\mathrm{R}', \vee', \wedge')$ con $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$ y las operaciones $(\vee', \wedge') = (\wedge, \vee)$. El mínimo de R', denotado con $0'$, es el elemento 1 de R y, de forma análoga, $1'$, el máximo de R', es 0. Así pues, para X espacio topológico, $O(X) \cong T'(X)$ (dual del retículo de los cerrados de X). Explícitamente:

$$\begin{aligned} \varphi : O(X) &\xrightarrow{\sim} T'(X) \\ U &\longmapsto X \setminus U. \end{aligned}$$

Vamos a definir ahora un concepto para retículos análogo al de ideales de un anillo.

Definición 2.2. Dado un retículo $(\mathrm{R}, \vee, \wedge, 0, 1)$, diremos que un subconjunto no vacío $F \subset \mathrm{R}$ es un *filtro* si cumple:

1. $0 \notin F$.

2. $a \wedge b \in F$, para todos $a, b \in F$.

3. $a \vee b \in F$, para cada $a \in F$ y cada $b \in \mathrm{R}$.

La primera condición expresa que los filtros son subconjuntos propios de R, es decir, no coinciden con R. Diremos que un filtro F es primo cuando $a \vee b \in F$ implique que $a \in F$ o $b \in F$. Diremos que F es un *ultrafiltro* si se trata de un filtro maximal para la inclusión. La tercera condición puede sustituirse por la condición equivalente:

$$\text{Para cada } a \in F \text{ y cada } b \in \mathrm{R}, \text{ si } a \leq b, \text{ entonces } b \in F.$$

Llamaremos ideal (propio) del retículo R a un subconjunto de R que sea filtro del retículo dual R'. Llamaremos ideales primos (respectivamente maximales) del retículo R a los ideales de R que sean filtros primos (resp. maximales) del retículo dual R'.

Cuando $R = P(X)$, los filtros que acabamos de definir son los filtros habituales de la teoría de conjuntos.

Proposición 2.3. Todo filtro F esta contenido en algún ultrafiltro.

Demostración. Sea Σ el conjunto de los filtros que contienen a F. En Σ consideramos el orden $\leq$ dado por $F_1 \leq F_2$ si, y sólo si, $F_1 \subset F_2$. Una cadena $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de Σ, tiene por cota superior el conjunto dado por $F' = \cup_\lambda F_\lambda$. Veamos que F' es ciertamente un filtro.

Por construcción $0 \notin F_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, luego $0 \notin F'$. Si tomamos $a, b \in F'$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tales que $a \in F_{\lambda_1}, b \in F_{\lambda_2}$, y como la el orden es total en el conjunto de los F_λ, podemos suponer por ejemplo que $F_{\lambda_1} \subset F_{\lambda_2}$, por lo que $a \wedge b \in F_{\lambda_2} \subset F'$. Para finalizar, dados $a \in F', b \in \mathrm{R}$ sabemos que existe $\lambda_1 \in \Lambda$ con $a \in F_{\lambda_1}$ y $a \vee b \in F_{\lambda_1} \subset F'$, y concluimos que F' es filtro.

La aplicación del lema de Zorn permite concluir.

$\square$

De forma análoga se obtiene el resultado para ideales e ideales maximales.

En anillos conmutativos, sabemos que los ideales maximales son primos. Para retículos tenemos la misma situación, tanto ultrafiltros como ideales maximales son primos. Las dos demostraciones son duales; probamos el resultado para ideales maximales, por ejemplo.

Proposición 2.4. Todo ideal maximal de R es primo.

Demostración. Sea I un ideal maximal de R y sean $a, b \in \mathrm{R}$ tales que $a \wedge b \in I$. Supongamos que $a \notin I$, veamos que forzosamente se tiene $b \in I$. Definimos el conjunto:

$$\begin{aligned} \Lambda_a &= \{u \in \mathrm{R} : \text{existe } v \in I \text{ con } u \leq (a \vee v)\} \\ &= \{u \in \mathrm{R} : \text{existe } v \in I \text{ con } u = u \wedge (a \vee v)\} \end{aligned}$$

Dados $u_1, u_2 \in \Lambda_a$, sabemos que existen $v_1, v_2 \in I$ con $u_1 \leq (a \vee v_1)$ y $u_2 \leq (a \vee v_2)$. Es claro que $u_1 \vee u_2 \leq (a \vee v_1) \vee (g \vee v_2) = a \vee (v_1 \vee v_2)$, por lo que vemos que Λ_a es cerrado para la operación $\vee$.

Además, para todo $u_1 \in \Lambda_a$, existe $v_1 \in I$ con $u_1 \leq (a \vee v_1)$. Si $u_2 \in \mathrm{R}$ cumple $u_2 \leq u_1$, es inmediato que $u_2 \leq (a \vee v_1)$ y, por lo tanto, $u_2 \in \Lambda_a$.

Para todo $b \in I$, se cumple que $b \leq (a \vee b)$. Vemos por lo tanto que $I \subset \Lambda_f$. Además, $a \leq (a \vee 0)$. Deducimos que Λ_a contiene a I y a a. Como I es maximal, Λ_a no puede ser ideal propio, es decir, se tiene $1 \in \Lambda_a = \mathrm{R}$. De esta forma comprobamos que existe $c \in I$ tal que $1 = a \vee c$. Finalmente, $(a \wedge b) \vee c \in I$ y se obtiene:

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (b \vee c).$$

Como $b \leq (b \vee c)$, por ser I ideal concluimos que $b \in I$.

□

Proposición 2.5. El complementario en R de un ideal primo es un filtro primo. De forma dual, el complementario en R de un filtro primo es un ideal primo.

Demostración. Sea I un ideal primo de R, denotamos con F al complementario de I. Veamos que F es un filtro primo. Por construcción sabemos que $1 \notin I$, por lo que F es no vacío y, como $0 \in I$, sabemos que $0 \notin F$.

Para ver que se cumple la segunda condición procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existen $a, b \in F$ con $a \wedge b \notin F$, entonces $a \wedge b \in I$ y, por primalidad de I, se deduce que $a \in I$ o $b \in I$ llegando a contradicción.

Probemos que se cumple la tercera condición de nuevo por reducción al absurdo. Supongamos que existen $a \in \mathrm{R}$, $b \in F$ con $a \vee b \notin F$. Entonces $a \vee b \in I$ y, como I es ideal, sabemos que $b \wedge (a \vee b) \in I$, pero $b \wedge (a \vee b) = b \notin I$ y llegamos a contradicción.

Para probar la primalidad de F procedemos una vez más por reducción al absurdo. Supongamos que $a \vee b$ y $a, b \notin F$. Entonces $a, b \in I$ y, por ser I ideal, tendríamos $a \vee b \in I$, llegando así a contradicción.

La versión dual de la demostración sirve para obtener el resultado dual.

$\square$

Sea R un retículo distributivo con mínimo y máximo. Veamos cómo definir para R una estructura similar a la del espectro de un anillo conmutativo. Denotamos con $\mathrm{Spec}_F(\mathrm{R})$ al conjunto formado por los filtros primos de R. De forma similar, denotamos con $\mathrm{Spec}_I(\mathrm{R})$ al conjunto formado por los ideales primos de R.

Para todo elemento $a \in \mathrm{R}$ definimos:

$$\begin{cases} D_F(a) = \{\text{filtros primos de R que no contienen a } a\} \\ V_F(a) = \{\text{filtros primos de R que contienen a } a\} \end{cases}$$

Veamos que $\mathcal{D}_F = \{D_F(a)\}_{a \in \mathrm{R}}$ es base de abiertos para una topología τ_F en $\mathrm{Spec}_F(\mathrm{R})$:

- $\bigcup\limits_{a \in \mathrm{R}} D_F(a) = D_F(0) = \mathrm{Spec}_F(\mathrm{R})$.
- Probemos que $D_F(a_1) \cap D_F(a_2) = D_F(a_1 \vee a_2)$ para cada $a_1, a_2 \in \mathrm{R}$. Si un filtro primo no contiene ni a a_1 ni a a_2, no puede contener a $a_1 \vee a_2$, ya que en ese caso contendría por primalidad a a_1 o a_2, llegando a contradicción. Vemos que $D_F(a_1) \cap D_F(a_1) \subset D_F(a_1 \vee a_2)$. Recíprocamente, si un filtro primo F no contiene a $a_1 \vee a_2$, no puede contener ni a a_1 ni a a_2, ya que por idempotencia tendríamos:

$$\begin{cases} a_1 \vee (a_1 \vee a_2) = a_1 \vee a_2 \in F \\ a_2 \vee (a_1 \vee a_2) = a_1 \vee a_2 \in F \end{cases}$$

con lo que llegaríamos a contradicción, y concluimos que $D_F(a_1) \cap D_F(a_2) = D_F(a_1 \vee a_2)$.

Es claro entonces que $\mathcal{V}_F = \{V_F(a)\}_{a \in \mathrm{R}}$ es base de cerrados para τ_F, pero además, $\mathcal{V}_F$ también cumple que es base de abiertos para una topología ρ_F en $\mathrm{Spec}_F(\mathrm{R})$. Lo comprobamos:

- $\bigcup\limits_{a \in \mathrm{R}} V_F(a) = V_F(1) = \mathrm{Spec}_F(\mathrm{R})$.
- Probamos que $V_F(a_1) \cap V_F(a_2) = V_F(a_1 \wedge a_2)$, para cada $a_1, a_2 \in \mathrm{R}$. Si un filtro primo contiene a a_1 y a_2, entonces, por ser filtro, contiene a $a_1 \wedge a_2$, luego $V_F(a_1) \cap V_F(a_2) \subset V_F(a_1 \wedge a_2)$. Recíprocamente, si un filtro primo F contiene a $a_1 \wedge a_2$, por absorción tenemos:

$$\begin{cases} a_1 \vee (a_1 \wedge a_2) = a_1 \in F \\ a_2 \vee (a_1 \wedge a_2) = a_2 \in F \end{cases}$$

  Concluimos que $V_F(a_1) \cap V_F(a_2) = V_F(a_1 \wedge a_2)$.

Tomando complementarios vemos que $\mathcal{D}_F = \{D_F(a)\}_{a \in \mathrm{R}}$ es base de cerrados para la topología ρ_F.

De forma dual, para todo $a \in \mathrm{R}$, definimos:

$$\begin{cases} D_I(a) = \{\text{ideales primos de R que no contienen a } a\} \\ V_I(a) = \{\text{ideales primos de R que contienen a } a\} \end{cases}$$

Razonando de forma análoga, observamos que $\mathcal{D}_I = \{D_I(a)\}_{a \in \mathrm{R}}$ es base de abiertos para una topología ρ_I en $\mathrm{Spec}_I(\mathrm{R})$, para la que $\mathcal{V}_I = \{V_I(a)\}_{a \in \mathrm{R}}$ es base de cerrados. Recíprocamente, $\mathcal{V}_I = \{V_I(a)\}_{a \in \mathrm{R}}$ es base de abiertos para una topología τ_I en $\mathrm{Spec}_I(\mathcal{R})$, para la que $\mathcal{D}_I = \{D_I(a)\}_{a \in \mathrm{R}}$ es base de cerrados.

Veamos ahora que existen homeomorfismos entre los espacios topológicos que acabamos de definir. Definimos, para cada filtro primo F y cada ideal primo I:

$$\phi_F : (\mathrm{Spec}_F(\mathrm{R}), \tau_F) \to (\mathrm{Spec}_I(\mathrm{R}), \tau_I) \text{ con } \phi_F(\mathrm{F}) = (\mathrm{R} \setminus \mathrm{F})$$
$$\phi_I : (\mathrm{Spec}_I(\mathrm{R}), \tau_I) \to (\mathrm{Spec}_F(\mathrm{R}), \tau_F) \text{ con } \phi_I(\mathrm{I}) = (\mathrm{R} \setminus \mathrm{I})$$

Gracias a la proposición anterior, vemos que las aplicaciones están bien definidas y es claro que son inversas la una de la otra. Observando que las imágenes de cada una de las bases de abiertos, por la aplicación correspondiente en cada caso, es la base de abiertos del espacio de llegada, tenemos garantizado que ambos espacios son homeomorfos. Queda claro que los espacios $(\mathrm{Spec}_F(\mathrm{R}), \tau_F)$ y $(\mathrm{Spec}_I(\mathrm{R}), \tau_I)$ son homeomorfos.

De modo análogo se prueba que $(\mathrm{Spec}_F(\mathrm{R}), \rho_F)$ y $(\mathrm{Spec}_I(\mathrm{R}), \rho_I)$ son también homeomorfos. Tenemos realmente dos formas (fruto de la dualidad entre filtros e ideales) para definir una estructura, análoga a la del espectro de un anillo, para retículos distributivos con mínimo y máximo. En lo sucesivo, escribiremos simplemente Spec(R) para referirnos al conjunto de filtros primos de un retículo R donde la topología viene dada por la base de abiertos $\mathcal{D} = \{D_F(a)\}_{a \in \mathrm{R}}$. Denotaremos con Max (R) al subespacio dado por los ultrafiltros de R. La construcción es análoga (incluso mas sencilla, gracias a la idempotencia y la absorción) a la hecha para el caso de anillos. Gracias al trabajo realizado en el primer capítulo, conocemos la estructura de estos espacios, como, por ejemplo, que Max (R) es siempre un espacio T_1 o las condiciones para que se produzca una retracción del espectro primo sobre el maximal.

2 Anillos de funciones continuas

Dado un espacio topológico X, denotaremos con $\mathrm{C}(X)$ al conjunto de las funciones continuas definidas en X y con llegada en $\mathbb{R}$. De modo similar, denotaremos con $\mathrm{C}^*(X)$ al conjunto formado por las funciones de $\mathrm{C}(X)$ que son acotadas. En estos dos conjuntos de funciones reales consideramos las operaciones dadas por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ , \ (fg)(x) = f(x)g(x).$$

que dotan a $\mathrm{C}(X)$ de estructura de anillo conmutativo con elemento unidad.

Dotamos a $\mathrm{C}(X)$ de estructura de retículo mediante la relación de orden parcial:

$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Tenemos que:

- $f \leq g$ implica que $f + h \leq g + h$, para todo $h \in \mathrm{C}(X)$.
- $f \leq 0$ y $g \leq 0$ implica que $fg \leq 0$

Así pues, $\mathrm{C}(X)$ es un *anillo retículado.* $\mathrm{C}^*(X)$ es un subanillo y subretículo de $\mathrm{C}(X)$. Se verifica que, para cada $x \in X$:

- $(f \vee g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$
- $(f \wedge g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$
- $|f|(x) = |f(x)|$

Identificaremos $r \in \mathbb{R}$ con la función de X en $\mathbb{R}$ constantemente igual a r. Aunque $\mathrm{C}(X)$ es un retículo distributivo, no posee ni elemento mínimo ni elemento máximo. No podemos aplicar a $\mathrm{C}(X)$ lo expuesto en el apartado anterior.

Vamos a probar que el anillo $\mathrm{C}(X)$ es un *pm*-anillo. Para cada $f \in \mathrm{C}(X)$ denotamos con $\mathrm{Z}(f)$ el conjunto de los ceros de la función f, es decir, $\mathrm{Z}(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$. El conjunto formado por los conjuntos $\mathrm{Z}(f)$, donde $f \in \mathrm{C}(X)$, con la relación de inclusión tiene estructura de retículo distributivo con mínimo y máximo, que denotamos $(\mathrm{Z}(X), \subset)$. De hecho, $\mathrm{Z}(X)$ es un subretículo de $\mathrm{P}(X)$. Llamaremos z-conjuntos a los elementos de $\mathrm{Z}(X)$. De modo similar, llamaremos z-filtros y z-ultrafiltros a los filtros y ultrafiltros del retículo $\mathrm{Z}(X)$. Consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathrm{Z} : \mathrm{C}(X) &\longrightarrow \mathrm{Z}(X) \\ f &\longmapsto \mathrm{Z}(f). \end{aligned}$$

Para cada ideal I de $\mathrm{C}(X)$ escribimos $\mathrm{Z}(I) = \{\mathrm{Z}(f) : f \in I\}$ y, para cada z-filtro $\mathcal{F}$, escribimos $\mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F}) = \{f \in \mathrm{C}(X) : Z(f) \in \mathcal{F}\}$.

Proposición 2.6. Sean I un ideal propio de C(X) y $\mathcal{F}$ un z-filtro de $\mathrm{Z}(X)$. Se cumple:

1. $\mathrm{Z}(I)$ es un z-filtro.
2. $\mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F})$ es un ideal propio de C(X).

Además tenemos $\mathcal{F} = \mathrm{Z}(\mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F}))$ y $I \subset \mathrm{Z}^{-1}(\mathrm{Z}(I))$.

Demostración.

1. Como trabajamos con ideales propios, el ideal I no contiene unidades, es decir, no contiene funciones que no se anulen en ningún $x \in X$. Deducimos que $\emptyset \notin \mathrm{Z}(I)$.

Dados $Z_1, Z_2 \in Z(I)$, existen $f_1, f_2 \in I$ tales que $Z_1 = Z(f_1)$ y $Z_2 = Z(f_2)$. Tenemos entonces $Z_1 \cap Z_2 = Z(f_1^2 + f_2^2) \in Z(I)$.

Sean $Z_1 = Z(f_1) \in Z(I)$ y $Z_2 = Z(f_2) \in Z(X)$. El producto $f_1 f_2$ pertenece a I por ser I ideal. Si $Z_1 \subset Z_2$, entonces $Z_2 = Z_1 \cup Z_2 = Z(f_1 f_2) \in Z(I)$.

Concluimos que $Z(I)$ es un z-filtro.

2. Sea $J = Z^{-1}(\mathcal{F})$. Como $\emptyset \notin \mathcal{F}$, J no contiene ninguna unidad de C(X). Sean $f, g \in C(X)$ tales que $Z(f), Z(g) \in \mathcal{F}$. Observamos que $Z(f) \cap Z(g) \subset Z(f+g)$, por lo que deducimos que $f + g \in J$. De forma similar, para todo $h \in C(X)$, tenemos $Z(f) \subset Z(fh)$ y deducimos que $fh \in J$. Concluimos que J es ideal propio de C(X).

El último punto es consecuencia directa de las definiciones. Por ejemplo, $Z^{-1}(Z(I)) = \{f \in C(X) : Z(f) \in Z(I)\}$, y es obvio que si $f \in I$, entonces $Z(f) \in Z(I)$, y se concluye que $I \subset Z^{-1}(Z(I))$.

□

Si consideramos dos ideales I_1, I_2 de $C(X)$ tales que $I_1 \subset I_2$, es inmediato que $Z(I_1) \subset Z(I_2)$. Si consideramos ahora un ideal maximal M de $C(X)$, de la proposición anterior se deduce que $Z(M)$ es un z-filtro que es maximal, es decir, $Z(M)$ es un z-ultrafiltro. Además $Z^{-1}(Z(M))$ es un ideal propio que contiene al ideal maximal M, luego deducimos que M y $Z^{-1}(Z(M))$ coinciden. Observamos que esta proposición nos muestra que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de ideales maximales de $C(X)$ y el conjunto de z-ultrafiltros.

Lema 2.7. Sean L un subretículo del retículo $(P(X), \subset)$ y $\mathcal{F}$ un filtro de L. Son equivalentes:

- $\mathcal{F}$ es ultrafiltro.
- Si $U \in$ L cumple que $U \cap V \neq \emptyset$, para todo $V \in \mathcal{F}$, entonces $U \in \mathcal{F}$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro de L. Sea $U \in$ L tal que $U \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{F}$. Veamos que $U \in \mathcal{F}$. Consideramos el conjunto $\Lambda = \{U \cap V : V \in \mathcal{F}\}$. Vamos a probar que el conjunto $\mathcal{F}'$ formado por los miembros de L que contienen a algún miembro de Λ es un filtro de L. Diremos que $\mathcal{F}$ es el filtro generado por Λ.

- Es claro que $\emptyset \notin \mathcal{F}'$.

- Dados $W_1, W_2 \in \mathcal{F}'$, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{F}$ con $V_1 \cap U \subset W_1$, $V_2 \cap U \subset W_2$. El conjunto $W_1 \cap W_2$ contiene a $U \cap W_1 \cap W_2 = U \cap (W_1 \cap W_2) \neq \emptyset$ por ser $\mathcal{F}$ filtro. Vemos que $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{F}'$.

- Finalmente, dados $W_1 \in \mathcal{F}'$, $W_2 \in \mathrm{L}$, existe $V \in \mathrm{L}$ tal que $U \cap V \subset W_1 \subset W_1 \cup W_2 \in \mathcal{F}'$, y concluimos que $\mathcal{F}$ es un filtro de L.

Por construcción, el ultrafiltro $\mathcal{F}$ está contenido en $\mathcal{F}'$. Así pues, ambos filtros coinciden y, como $U \in \mathcal{F}'$, deducimos que $U \in \mathcal{F}$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple el segundo enunciado y que existe un filtro $\mathcal{F}'$ que contiene a F. Para todo $U \in \mathcal{F}'$ y $V \in F$, se cumple que $U \cap V \neq \emptyset$, por ser $\mathcal{F}'$ filtro. Deducimos que $U \in \mathcal{F}$ y concluimos que $\mathcal{F}$ es maximal.

$\square$

Concluimos que si un z-filtro $\mathcal{F}$ contiene a todo z-conjunto que interseca a todos los miembros de $\mathcal{F}$, entonces el z-filtro $\mathcal{F}$ es maximal.

Proposición 2.8. Sean M un ideal maximal de $\mathrm{C}(X)$ y $\mathcal{U}$ un z-ultrafiltro.

1. Para todo $f \in \mathrm{C}(X)$, si $\mathrm{Z}(f)$ interseca a todos los elementos de $\mathrm{Z}(M)$, entonces $f \in M$.

2. Para todo $\mathrm{Z} \in \mathrm{Z}(X)$, si Z interseca a todos los elementos de $\mathcal{U}$, entonces $\mathrm{Z} \in \mathcal{U}$.

Demostración. En virtud de la correspondencia biunívoca existente entre ideales maximales de $\mathrm{C}(X)$ y z-ultrafiltros, observamos que ambos enunciados son equivalentes. Podemos probar sólo el segundo enunciado y la prueba viene dada por el lema anterior, aplicado al retículo $\mathrm{Z}(X)$.

$\square$

Diremos que un ideal I de $\mathrm{C}(X)$ es un z-ideal si $I = \mathrm{Z}^{-1}(\mathrm{Z}(I))$, es decir, cuando $\mathrm{Z}(f) \in \mathrm{Z}(I)$ implica que $f \in I$. Observamos que existe una correspondencia biunívoca, dada por Z, entre el conjunto de z-ideales de $\mathrm{C}(X)$ y el conjunto de z-filtros. Como acabamos de ver en la proposición, todo ideal maximal de $\mathrm{C}(X)$ es z-ideal.

Sea I un z-ideal y $f \in \mathrm{C}(X)$ tal que $f^n \in I$, donde n es un entero estrictamente mayor que 0. Como $\mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(f^n) \in \mathrm{Z}(I)$, concluimos que $f \in I$. Vemos así que I es un ideal que coincide con su radical. Hemos probado que los z-ideales son intersección de ideales primos. Además, como la intersección arbitraria de ideales es un ideal, también podemos deducir que la intersección arbitraria de z-ideales es un z-ideal.

Proposición 2.9. Todo z-ideal I de $\mathrm{C}(X)$ que contiene a un ideal primo es primo.

Demostración. Sea I un z-ideal que contiene a un ideal primo J. Veamos que I es primo. Para cada $f \in \mathrm{C}(X)$, consideramos las funciones $f \vee 0$, $f \wedge 0 \in \mathrm{C}(X)$. Puesto que el producto $(f \vee 0)(f \wedge 0)$ está en el ideal primo J (pues se trata de la función nula), uno de los factores está en J y, por consiguiente, en el ideal I. Existe por lo tanto un z-conjunto de $\mathrm{Z}(I)$ donde f no cambia de signo.

Sean $f, g \in \mathrm{C}(X)$ con $fg \in I$, consideramos la función $h = |f| - |g| \in \mathrm{C}(X)$. Sabemos que existe $\mathrm{Z} \in \mathrm{Z}(I)$ donde h no cambia de signo. Podemos suponer que h es no negativa en Z (en caso contrario consideraríamos $-h$). Observamos entonces que si f se anula en el punto x, entonces g se anula también en x, y tenemos $\mathrm{Z}(f) \subset \mathrm{Z}(g)$. Concluimos que $\mathrm{Z}(fg) = \mathrm{Z}(f) \cup \mathrm{Z}(g) = \mathrm{Z}(g)$. Luego, $\mathrm{Z}(g) \in \mathrm{Z}(I)$, lo que permite concluir que el ideal I es primo. □

Proposición 2.10. Cada ideal primo de $\mathrm{C}(X)$ está contenido en un único ideal maximal.

Demostración. Sea I un ideal primo de $\mathrm{C}(X)$. Supongamos que I está contenido en dos ideales maximales distintos M_1, M_2, es decir, $I \subset M_1 \cap M_2$. Hemos visto que los ideales maximales son z-ideales, y la intersección de z-ideales es un z-ideal, luego $M_1 \cap M_2$ es un z-ideal que no es un ideal primo, y llegamos a contradicción utilizando la proposición anterior.

□

Proposición 2.11. Cada z-filtro primo está contenido en un único z-ultrafiltro.

Demostración. Veamos que si $\mathcal{F}$ es un z-filtro primo, entonces $\mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F})$ es un z-ideal primo. Consideremos el z-ideal $\mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F})$. Sean $f, g \in \mathrm{C}(X)$ con $fg \in \mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F})$. Tenemos entonces, $\mathrm{Z}(fg) = \mathrm{Z}(f) \cup \mathrm{Z}(g) = \mathrm{Z}(\mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad, por ejemplo, que $\mathrm{Z}(f) \in \mathrm{Z}(\mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F}))$. Concluimos que $f \in \mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F})$, es decir, el z-ideal $\mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F})$ es primo.

Supongamos ahora que un z-filtro primo $\mathcal{F}$ está contenido en dos z-ultrafiltros $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$. Como existe una correspondencia biunívoca entre ideales maximales de $\mathrm{C}(X)$ y z-ultrafiltros, existen ideales maximales M_1 y M_2 de $\mathrm{C}(X)$ con

$\mathcal{U}_1 = \mathrm{Z}(M_1)$ y $\mathcal{U}_2 = \mathrm{Z}(M_2)$. Tendríamos entonces que el z-ideal primo $\mathrm{Z}^{-1}(\mathcal{F})$ está contenido en dos ideales maximales distintos M_1 y M_2, llegando a contradecir que $\mathrm{C}(X)$ es *pm*-anillo. Concluimos que todo z-filtro primo está contenido en un único z-ultrafiltro.

3 Compactificaciones. La compactificación de Stone-Cech

Diremos que un espacio topológico X es *completamente regular* si, para cada conjunto cerrado F de X y cada punto $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(Y) = \{1\}$. Decimos que la función f "separa" el punto del cerrado F. Diremos que un espacio es de Tychonoff si es un espacio completamente regular y T_1. Es inmediato que estos últimos espacios son espacios de Hausdorff.

Observación. Si en la definición de espacio completamente regular sólo se hubiera exigido que la función "separante" f fuese continua, la definición seria equivalente a la anterior, ya que la función $(f \vee 0) \wedge 1$ seguiría siendo separante y tendría llegada en $[0,1]$.

En $\mathbb{R}^n$ cada punto queda determinado por las n proyecciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Sin embargo, para determinar un punto en un espacio de Tychonoff, las proyecciones han de ser substituidas por las funciones continuas y acotadas de X en $[0,1]$. Podemos decir que en un espacio de Tychonoff hay suficientes funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{R}$ para distinguir unos puntos de otros. No nos ha de sorprender por lo tanto (véase la primera construcción de la compactificación de Stone-Cech) que todo espacio de Tychonoff pueda sumergirse en un cubo (producto de copias del intervalo $[0,1]$).

Consideremos un espacio topológico X de Hausdorff. Una *compactificación* (de Hausdorff) de X es un espacio compacto y de Hausdorff αX, junto con una inmersión topológica $\alpha : X \to \alpha X$ tal que $\alpha(X)$ es denso en αX. A veces se suprime la alusión a la inmersión α, identificando X con $\alpha(X)$, y se dice simplemente que αX es una compactificación de X.

Construiremos ahora la compactificación de Stone-Cech βX, que está muy ligada a los anillos de funciones continuas estudiados en el apartado anterior. Haremos uso del teorema de Tychonoff, cuya demostración no incluimos por ser muy conocida, y de una proposición que detallamos a continuación.

Teorema 2.12 (de Tychonoff)**.** El producto arbitrario de espacios compactos es compacto.

La demostración puede encontrarse en [Will].

Proposición 2.13. Sea X un espacio de Tychonoff. La aplicación:

$$\beta : X \longrightarrow Y = \prod_{f \in \mathrm{C}^*(X)} \mathrm{I}_f$$

definida por $\beta(x) = (f(x))_{f\in \mathrm{C}^*(X)}$, donde $\mathrm{I}_f = [\inf(f), \sup(f)] \subset \mathbb{R}$, para cada $f \in \mathrm{C}^*(X)$, es una inmersión topológica (en Y consideramos la topología producto y en $\mathbb{R}$ la usual).

Demostración. La continuidad de β se deduce de la continuidad de las funciones de $\mathrm{C}^*(X)$. La inyectividad viene dada por la estructura del espacio X. Probemos esto último. Sean $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2$. Como X es de Hausdorff, existen abiertos disjuntos U_1, U_2 de X con $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$. Como X es completamente regular existe $f \in \mathrm{C}^*(X)$ que separa x_1 y $X \setminus U_1$. Tenemos entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ y, por lo tanto, $\beta(x_1) \neq \beta(x_2)$.

Sabemos entonces que β es una biyección continua entre X y $\beta(X)$. Veamos que $\beta : X \to \beta(X)$ es una aplicación abierta para concluir que se trata de un homeomorfismo. Tomamos un abierto U de X y vemos que $\beta(U)$ es entorno de cada uno de sus puntos. Sean $y_0 \in \beta(U)$ y $x_0 \in U$ tales que $\beta(x_0) = y_0$. Como $X \setminus U$ es un cerrado que no contiene a x_0, existe $g \in \mathrm{C}^*(X)$ tal que $g(x_0) = 0$ y $g(X \setminus U) = \{1\}$. Sea $\pi_g : Y \to \mathrm{I}_g$ la aplicación proyección asociada a g. Como el intervalo $[\inf(g), 1)$ es abierto en I_g, consideramos el abierto $V = \pi_g^{-1}([\inf(g), 1))$ y, entonces, el conjunto $W = V \cap \beta(X)$ es un abierto de $\beta(X)$. Por construcción, tenemos $y_0 \in W$, ya que $g(x_0) = 0$. Veamos que $W \subset \beta(U)$. Si tomamos $y \in W$, existe $x \in X$ tal que $y = \beta(x)$ y, además, $g(x) = \pi_g(y) \in [\inf(g), 1)$. Como g toma el valor 1 en todo $X \setminus U$ deducimos que $x \in U$ y, entonces, $y \in \beta(U)$. Concluimos que $W \subset \beta(U)$ y que $\beta : X \to \beta(X)$ es una aplicación abierta, por lo que establece un homeomorfismo entre X y su imagen.

□

Sea X un espacio de Tychonoff. Gracias al Teorema de Tychonoff, sabemos que el conjunto Y del lema anterior es compacto. Si βX es la adherencia en Y del conjunto $\beta(X)$, obtenemos un conjunto compacto tal que $\beta(X)$ es denso en él. Como la propiedad de Hausdorff se mantiene al hacer productos y tomar subespacios, construimos gracias a la proposición anterior una compactificación de Hausdorff del espacio X. Se dice que βX es la *compactificación de Stone-Cech* de X. Observemos que siempre que tengamos un espacio X de Tychonoff podemos construir una compactificación de X.

Enunciamos ahora el Lema de Urysohn, resultado fundamental de la topología general relacionado con los espacios topológicos normales. La demostración se puede encontrar en cualquier libro de topología general, como por ejemplo [Will].

Lema 2.14 (de Urysohn)**.** Un espacio topológico X es normal si, y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B de X existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y, $f(B) = \{1\}$.

Proposición 2.15. Todo espacio compacto y de Hausdorff es de Tychonoff.

Demostración. Probaremos primero que un espacio compacto y Hausdorff Y es un espacio normal.

Sean F un cerrado de Y e $y \in Y$ un elemento tal que $y \notin F$. Veamos que existen abiertos disjuntos U, V de Y con $F \subset U$, $y \in V$. Para cada $z \in F$, existen abiertos disjuntos U_z, V_z con $z \in U_z$, $y \in V_z$, por ser Y de Hausdorff. El conjunto F es compacto por ser un cerrado de Y, que es compacto. Los abiertos U_z, con $z \in F$, forman un recubrimiento de F, luego, por ser F compacto, existen $z_1, \ldots, z_n \in F$ tales que $F \subset U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{z_i}$. El conjunto $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{z_i}$ cumple $U \cap V = \emptyset$ y es un abierto que contiene a y.

Consideramos ahora dos cerrados F_1, F_2 de Y. Para cada $z \in F_2$, existen abiertos N_z, M_z con $F_1 \subset N_z$ y $z \in M_z$. Los abiertos N_z, con $z \in F_2$, forman un recubrimiento de F_2, que es compacto. Existen $z_1, \ldots z_r \in F_2$ tales que $F_2 \subset N = \bigcup_{i=1}^{r} N_{z_i}$. El conjunto $M = \bigcap_{i=1}^{r} M_{z_i}$ es un abierto que contiene a F_1 y cumple que $M \cap N = \emptyset$.

Hemos probado que Y es normal. Teniendo en cuenta que en un espacio de Hausdorff los conjuntos unipuntuales son cerrados, utilizamos el Lema de Urysohn y probamos que Y es completamente regular, luego es de Tychonoff. $\square$

Proposición 2.16. Los espacios que admiten compactificaciones (de Hausdorff) son exactamente los espacios de Tychonoff.

Demostración. Consecuencia de la proposición anterior y de que las propiedades de Hausdorff y de regularidad completa se conservan al tomar subespacios. $\square$

Podemos decir que un espacio topológico es de Tychonoff si, y sólo si es un subespacio de un espacio compacto y de Hausdorff (estamos, por supuesto, identificando X con su imagen mediante la inmersión en βX). Vamos a repetir la definición de la compactificación de Stone-Cech.

Definición 2.17. Con la notación de la proposición 2.13, definimos la compactificación de Stone-Cech de un espacio de Tychonoff X como la adherencia en Y del conjunto $\beta(X)$. Denotamos con βX a esta compactificación.

Vamos a ver a continuación algunas propiedades características de la compactificación de Stone-Cech.

Lema 2.18. Sean X un espacio topológico, $S \subset X$ y H un espacio de Hausdorff. Para toda aplicación continua $f : S \to H$, sólo puede existir a lo sumo una aplicación continua $f' : \overline{S} \to H$ que coincide con f en S.

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Sean $g, h : \overline{S} \to H$ dos extensiones continuas distintas de f. Existe entonces $x \in \overline{S}$ tal que $g(x) \neq h(x)$. Como H es de Hausdorff, existen abiertos disjuntos U_g, U_h tales que $g(x) \in U_g$ y $h(x) \in U_h$. Sea V un abierto de X tal que $x \in V$ y $g(V) \subset U_g$, $h(V) \subset U_h$. El abierto V interseca a S en algún punto y, por ser x un elemento de la adherencia de S. Tenemos entonces $g(y) \in U_g$, $h(y) \in U_h$. Como las funciones g, h coinciden con f en S, obtenemos $f(y) = g(y) = h(y)$, en contra de que los abiertos U_g, U_h son disjuntos.

□

Veremos a continuación que cada función $f \in \mathrm{C}^*(X)$ admite una única extensión continua, βf, a βX.

Proposición 2.19. Sea X un espacio de Tychonoff. Para toda $h \in \mathrm{C}^*(X)$, existe una única función $\beta h \in \mathrm{C}^*(\beta X)$ tal que $(\beta h) \circ \beta = h$. Diremos que βh es la extensión a βX de la función h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathbb{R} \\ \beta X \arrow[ur, "\beta h"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Vimos en la proposición 2.13 que el espacio X se puede ver como un subespacio de $Y = \prod_{f \in \mathrm{C}^*(X)} \mathrm{I}_f$, con $\mathrm{I}_f = [\inf(f), \sup(f)]$, para cada $f \in \mathrm{C}^*(X)$. La restricción a βX de la proyección π_h es una aplicación continua que extiende a h, ya que para todo $x \in X$:

$$(\pi_h \circ \beta)(x) = \pi_h((f(x))_{f \in \mathrm{C}^*(X)}) = h(x).$$

Denotamos con βh a la restricción a βX de π_h. El lema anterior nos da la unicidad de la extensión.

□

Es sencillo comprobar que la aplicación que asocia a cada función $f \in \mathrm{C}^*(X)$ su extensión βf, es un isomorfismo de anillos entre $\mathrm{C}^*(X)$ y $\mathrm{C}(\beta X)$. Así pues, las propiedades algebraicas comunes a los anillos del tipo $\mathrm{C}(X)$ son compartidas también por los anillos del tipo $\mathrm{C}^*(X)$.

Proposición 2.20. Si X es un espacio compacto y Hausdorff, entonces X y βX son homeomorfos.

Demostración. Se deduce sencillamente de que una aplicación continua definida en un espacio compacto y con llegada en un espacio de Hausdorff es cerrada. Si consideramos la inmersión topológica introducida en la proposición 2.13, observamos que tenemos una aplicación continua invectiva, abierta y cerrada, es decir, un homeomorfismo entre $\beta(X)$ y X. Como un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado, tenemos $\beta X = \beta(X)$ y concluimos que X y βX son homeomorfos.

□

Proposición 2.21. Sean X un espacio de Tychonoff y $h : X \to K$ una aplicación continua con llegada en un espacio compacto y de Hausdorff. Entonces existe una única aplicación continua $\beta h : \beta X \to K$, tal que $(\beta h) \circ \beta = h$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"'] & K \\ \beta X \arrow[ur, "\beta h"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. El espacio K es de Tychonoff por ser compacto y de Hausdorff. Utilizando la proposición 2.13, la aplicación $\delta : K \to Y = \prod_{g \in \mathrm{C}^*(K)} \mathrm{I}_g$, definida por $\delta(x) = (g(x))_{g \in \mathrm{C}^*(K)}$, es una inmersión topológica.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "h"'] & \beta X \subset \prod \mathrm{I}_f \\ K \arrow[r, "\delta"] & \delta K \subset \prod \mathrm{I}_g \end{tikzcd}$$

Para cada $g \in \mathrm{C}^*(K)$, la aplicación $g \circ h$ tiene llegada en $I_g \subset \mathbb{R}$. Podemos aplicar la proposición 2.19 para construir una extensión de $g \circ h$ a βX, que denotamos $\beta(g \circ h)$. Definimos de esta forma las componentes de una aplicación $\beta h : \beta X \to Y$ dada por $\beta h(s) = (\beta h_g(s))_{g \in \mathrm{C}^*(K)}$, con $\beta h_g(s) = \beta(g \circ h)(s)$, para todo $s \in \beta X$.

Por construcción βh es continua, lo son sus componentes. Veamos que la imagen de βX por βh esta contenida en $\delta K = \delta(K)$ que es homeomorfo a K. Para cada $g \in \mathrm{C}^*(K)$, se verifica que $\beta(g \circ h)(X) \subset g(K)$ y se tiene:

$$\beta h(\beta X) = \beta h(\mathrm{cl}_{\beta X}(X)) \subset \mathrm{cl}_Y(\delta K) = K.$$

Vemos así que βh está bien definida. La unicidad esta garantizada también, ya que si tuviéramos dos extensiones de h, estas deberían coincidir en el subespacio X, que es denso en βX.

$\square$

Esta propiedad de extensión caracteriza a la compactificación de Stone-Cech, y lo vemos en la siguiente proposición.

Proposición 2.22. Sea X un espacio de Tychonoff. Si existen dos compactificaciones $\alpha_1 X$, $\alpha_2 X$ de X que satisfacen la propiedad de extensión de la proposición anterior, entonces $\alpha_1 X$ y $\alpha_2 X$ son compactificaciones topológicamente equivalentes.

Demostración. Por hipótesis, existe una aplicación continua $\alpha_2 : X \to \alpha_1 X$, donde en la llegada tenemos un espacio compacto y de Hausdorff. Por la proposición anterior, existe una única aplicación continua $\phi_1 : \alpha_1 X \to \alpha_2 X$ que extiende a la inmersión α_2. De forma simétrica, definimos la única aplicación continua $\phi_2 : \alpha_2 X \to \alpha_1 X$ que extiende a la inmersión α_1.

$$\begin{tikzcd} \alpha_1 X \arrow[r, "\phi_1"] & \alpha_2 X \arrow[r, "\phi_2"] & \alpha_1 X \\ & X \arrow[ul, "\alpha_1"] \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[ur, "\alpha_1"'] & \end{tikzcd}$$

Consideramos ahora la composición $\phi_2 \circ \phi_1 : \alpha_1 X \to \alpha_1 X$ y, por construcción, tenemos:

$$\begin{cases} \phi_1(\alpha_1(x)) = (\phi_1 \circ \alpha_1)(x) = \alpha_2(x), \text{ para todo } x \in X \\ \phi_2(\alpha_2(x)) = (\phi_2 \circ \alpha_2)(x) = \alpha_1(x), \text{ para todo } x \in X \end{cases}$$

Para todo $x \in X$ se cumple que $\phi_2 \circ \phi_1(x) = x$, por lo que deducimos que $\phi_1 \circ \phi_2$ es una extensión continua de id_X. Como $id_{\alpha_1 X}$ es también una extensión continua de id_X, por unicidad concluimos que $\phi_1 \circ \phi_2 = id_{\alpha_1 X}$. De modo análogo se prueba que $\phi_2 \circ \phi_1 = id_{\alpha_2 X}$, y concluimos que ϕ_1 y ϕ_2 son homeomorfismos.

□

La compactificación de Stone-Cech se caracteriza por ser la única compactificación (salvo homeomorfismos) con la propiedad presentada en la proposición 2.19 de extensión de funciones continuas. Veremos a continuación algunas otras propiedades de la compactificación de Stone-Cech.

Dadas dos compactificaciones $\alpha_1 X, \alpha_2 X$ de un espacio de Tychonoff X, podemos identificar X con $\alpha_1(X)$ y $\alpha_2(X)$. Diremos que $\alpha_1 X \leq \alpha_2 X$ si existe una aplicación continua $f : \alpha_1 X \to \alpha_2 X$ que deja fijos los puntos de X.

Lema 2.23. Sean $\alpha_1 X$, $\alpha_2 X$ dos compactificaciones de un espacio de Tychonoff X, tales que $\alpha_1 X \leq \alpha_2 X$ y $\alpha_2 X \leq \alpha_1 X$. Existe entonces un homeomorfismo $\Lambda : \alpha_1 X \to \alpha_2 X$ que deja fijos los puntos de X.

Demostración. Por construcción existen aplicaciones continuas $\phi : \alpha_1 X \to \alpha_2 X$ y $\psi : \alpha_2 X \to \alpha_1 X$ que dejan fijos los puntos de X. Las aplicaciones $id_{\alpha_1 X}$ y $\psi \circ \phi$ coinciden en el subespacio $\alpha_1(X)$ denso en $\alpha_1 X$ que es de Hausdorff, luego deducimos que coinciden en todo $\alpha_1 X$. De modo análogo se deduce que $id_{\alpha_1 X}$ y $\psi \circ \phi$ coinciden en todo $\alpha_2 X$. Concluimos que ϕ y ψ son homeomorfismos que dejan fijos los puntos de X. Tomamos $\Lambda = \phi$.

□

Diremos que dos compactificaciones $\alpha_1 X$, $\alpha_2 X$ son equivalentes cuando se de simultáneamente $\alpha_1 X \leq \alpha_2 X$ y $\alpha_2 X \leq \alpha_1 X$. El lema anterior deja claro que dos compactificaciones son equivalentes si, y sólo si, son homeomorfas (mediante un homeomorfismo que deje fijos los puntos de X).

Denotaremos con $\mathcal{K}(X)$ al conjunto formado por las compactificaciones de un espacio de Tychonoff X, identificando compactificaciones equivalentes. De esta forma $(\mathcal{K}(X), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, y veremos a continuación que la compactificación de Stone-Cech es el elemento máximo.

Proposición 2.24. Sea X un espacio de Tychonoff. La compactificación de Stone-Cech βX es la máxima compactificación de X.

Demostración. Sea αX una compactificación arbitraria de X. Como αX es un espacio compacto, la aplicación continua $\alpha : X \to \alpha X$ puede extenderse a una aplicación continua $\beta\alpha : \beta X \to \alpha X$ con $(\beta\alpha) \circ \beta = \alpha$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \alpha X \\ \beta X \arrow[ur, "\beta\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Así pues, $\alpha X \leq \beta X$.

$\square$

Hemos visto dos caracterizaciones de la compactificación de Stone-Cech. Vamos a ver algunas propiedades adicionales que caracterizan a la compactificación de Stone-Cech.

Lema 2.25. Sea X es un espacio de Tychonoff. Para todo $x \in X$, el conjunto $\mathcal{E}_{\mathrm{Z}(X)}(x)$ formado por los elementos de $\mathrm{Z}(X)$ que son entornos de x en X, es un sistema fundamental de entornos de x.

Demostración. Sea V un entorno de un punto x de X. Existe un abierto U de X, tal que $x \in U \subset V$. Podemos separar x y el conjunto cerrado $F = X \setminus U$ por una función continua f con $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in F$. A partir de la función f definimos las funciones continuas g y h dadas por $g(y) = \min\{-f(y) + \frac{1}{2}, 0\}$, $h(y) = \min\{-f(y) - 1, 0\}$, para todo $y \in X$. Construimos un conjunto abierto U_{Z} y un z-conjunto Z que lo contiene:

$$U_{\mathrm{Z}} = \left\{ x \in \alpha X : -1 < f(x) < \frac{1}{2} \right\}$$

$$Z = \left\{ x \in \alpha X : -1 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \right\} = \mathrm{Z}(g) \cap \mathrm{Z}(h) = \mathrm{Z}(g^2 + h^2)$$

Tenemos $x \in U_Z \subset Z \subset U \subset V$, por lo que $Z \in \mathcal{E}_{\mathrm{Z}(X)}(x)$, y concluimos que efectivamente $\mathcal{E}_{\mathrm{Z}(X)}(x)$ es sistema fundamental de entornos.

$\square$

Proposición 2.26. Sea αX una compactificación de un espacio de Tychonoff X. Identificando X con αX, podemos tomar clausuras en αX de subconjuntos de X. Son equivalentes:

1. Toda función continua de X en un espacio compacto y de Hausdorff K se puede extender a una única función continua de αX en K.

2. Si dos subconjuntos de X están separados por una función de $\mathrm{C}(X)$, entonces sus clausuras en αX están separadas por una función $\mathrm{C}(\alpha X)$.

3. Si $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2 \in \mathrm{Z}(X)$ son disjuntos, sus clausuras en αX son disjuntas.

4. Si $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2 \in \mathrm{Z}(X)$, entonces :

$$\mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_1 \cap \mathrm{Z}_2) = \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_1) \cap \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_2)$$

El primer enunciado corresponde a la propiedad universal que caracteriza a la compactificación de Stone-Cech.

Demostración. La demostración seguirá el esquema: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ y $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$: Supongamos que S_1 y S_2 son subconjuntos de X separados por una función $f \in \mathrm{C}(X)$. Podemos suponer que f es una función acotada, ya que si no lo fuera, siempre podríamos considerar, por ejemplo, las funciones dadas por $f'(x) = \min\{1, f(x)\}$, $f''(x) = \max\{-1, f'(x)\}$, para todo $x \in X$. Las funciones continuas f y f'' se anulan en los mismos puntos, pero la segunda es acotada. Extendiendo f a αX obtenemos una función que separa las clausuras en αX de S_1 y S_2.

$2 \Rightarrow 3$: Sean $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}(f)$, $\mathrm{Z}_2 = \mathrm{Z}(g)$ dos z-conjuntos de X disjuntos. De nuevo podemos suponer que f y g son acotadas. La función $|f| + |g|$ no se anula en ningún punto de X, por ser Z_1 y Z_2 disjuntos. Definimos la función continua y acotada h, dada por:

$$h(x) = \frac{|f(x)|}{|f(x)| + |g(x)|}, \text{ para todo } x \in X.$$

Observemos que $h = 0$ en Z_1 y $h = 1$ en Z_2. Por hipótesis existe $\widetilde{h} \in \mathrm{C}(\alpha X)$ que satisface $\widetilde{h}(p) = 0$, para todo $p \in \mathrm{cl}_{\alpha X}(Z_1)$, y $\widetilde{h}(q) = 1$, para todo $q \in \mathrm{cl}_{\alpha X}(Z_2)$. Definimos ahora las funciones dadas por $u(p) = \min\{\widetilde{h}(p) - \frac{3}{4}, 0\}$, $v(p) = \min\{-\widetilde{h}(p) + \frac{1}{4}, 0\}$, para todo $p \in \alpha X$. Obtenemos:

$$\mathrm{Z}_2 = \mathrm{Z}(g) \subset \left\{ p \in \alpha X : \widetilde{h}(p) \geq \frac{3}{4} \right\} = \mathrm{Z}(u)$$

$$\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}(f) \subset \left\{ p \in \alpha X : \widetilde{h}(p) \leq \frac{1}{4} \right\} = \mathrm{Z}(v)$$

Como los conjuntos $\mathrm{Z}(u), \mathrm{Z}(v)$ son cerrados de αX, deducimos que $\mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_2) \subset \mathrm{Z}(u)$ y $\mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_1) \subset \mathrm{Z}(v)$. Concluimos que las clausuras son entonces disjuntas, puesto que los cerrados $\mathrm{Z}(u)$ y $\mathrm{Z}(v)$ son disjuntos.

$3 \Rightarrow 4$: Siempre tenemos la contención $\mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_1 \cap \mathrm{Z}_2) \subset \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_1) \cap \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_2)$. Probemos la otra contención. Para ello utilizaremos el lema previo. Sea $p \in \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_1) \cap \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_2)$. Todo $\mathrm{Z} \in \mathcal{E}_{\mathrm{Z}(\alpha X)}(p)$ corta a Z_1 y a Z_2, luego $p \in \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z} \cap \mathrm{Z}_1)$ y $p \in \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z} \cap \mathrm{Z}_2)$. Por hipótesis, es claro que tenemos $(\mathrm{Z} \cap \mathrm{Z}_1) \cap (\mathrm{Z} \cap \mathrm{Z}_2) = \mathrm{Z} \cap (\mathrm{Z}_1 \cap \mathrm{Z}_2) \neq \emptyset$, y esto es válido para cada $\mathrm{Z} \in \mathcal{E}_{\mathrm{Z}(\alpha X)}(p)$. Concluimos que $p \in \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_1 \cap \mathrm{Z}_2)$.

$4 \Rightarrow 3$: Si $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2 \in \mathrm{Z}(X)$ son disjuntos, entonces $\mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_1 \cap \mathrm{Z}_2) = \emptyset$. Como, por hipótesis $\emptyset = \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_1 \cap \mathrm{Z}_2) = \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_1) \cap \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}_2))$, la conclusión es obvia.

$3 \Rightarrow 2$: Sean S_1 y S_2 subconjuntos de X separados por $f \in \mathrm{C}(X)$, que podemos suponer sin pérdida de generalidad acotada. Tenemos $f(x) = 0$ para todo $x \in S_1$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in S_2$, por lo que $S_1 \subset \mathrm{Z}(f)$. Definimos la función $g \in \mathrm{C}(X)$ dada por $g(x) = \min\{\widetilde{f}(x) - \frac{1}{2}, 0\}$. Observamos que $\mathrm{Z}(g) = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{2}\}$ contiene a S_2. Tenemos dos z-conjuntos disjuntos, luego, por hipótesis, sus clausuras en αX son disjuntas:

$$S_1 \subset \mathrm{cl}_{\alpha X}(S_1) \subset \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}(f))$$

$$S_2 \subset \mathrm{cl}_{\alpha X}(S_2) \subset \mathrm{cl}_{\alpha X}(\mathrm{Z}(g))$$

Deducimos que las clausuras de S_1 y S_2 son disjuntas, y puesto que αX es compacto y de Hausdorff, es un espacio normal. Aplicando el Lema de Urysohn, obtenemos una función continua $h \in \mathrm{C}(X)$ que separa los conjuntos $\mathrm{cl}_{\alpha X}(S_1)$ y $\mathrm{cl}_{\alpha X}(S_2)$.

$2 \Rightarrow 1$: Sea $f : X \to K$ una aplicación continua. Vamos a construir la extensión a αX de f, que denotaremos con αf.

Para cada $p \in \alpha X$, sea Θ_p el conjunto formado por los abiertos que contienen a p. Definimos Ω_p como el conjunto formado por los $\mathrm{cl}_K(f(X \cap U))$ donde

$U \in \Theta_p$. Sean $U_1, \cdots, U_n \in \Theta_p$. Sabemos que $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \Omega_p$ y siempre se tiene:

$$\emptyset \neq \mathrm{cl}_K(f(X \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n)) \subset \mathrm{cl}_K(f(X \cap U_1)) \cap \cdots \cap \mathrm{cl}_K(f(X \cap U_n)).$$

Veamos que la intersección de todos los elementos de Ω_p, que denotamos con I_p, es no vacía. Razonando por reducción al absurdo, suponemos que dicha intersección es vacía y, tomando complementarios en αX, tenemos:

$$K = \bigcup_{U \in \Theta_p} (K \setminus \mathrm{cl}_K(f(X \cap U))).$$

Tenemos así un recubrimiento por abiertos del conjunto compacto K, entonces existen $U_1, \cdots, U_m \in \Omega_p$ con $K = \bigcup_{i=1}^m (K \setminus \mathrm{cl}_K(f(X \cap U_i)))$. Tomando complementarios, $\emptyset = \bigcap_{i=1}^m \setminus \mathrm{cl}_K(f(X \cap U_i))$, y llegamos a contradicción. Concluimos que I_p, la intersección de todos los elementos de Ω_p, es no vacía.

Probamos ahora que I_p se reduce a un solo punto. De nuevo razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen $k_1, k_2 \in I$ distintos. Como K es de Hausdorff, existen abiertos disjuntos U_1 y U_2 con $k_1 \in U_1$ y $k_2 \in U_2$. Los cerrados $\{k_1\}$ y $F = X \setminus U_1$ son disjuntos, luego podemos aplicar el Lema de Urysohn y deducimos que existe una función acotada $g \in \mathrm{C}(K)$, tal que $g(k_1) = 0$ y $g(k) = 1$ para todo $k \in F$. La función $g \circ f \in \mathrm{C}(X)$ y separa la conjuntos $f^{-1}(k_1)$ y $f^{-1}(F)$. Por hipótesis, siguiendo el mismo razonamiento que en $3 \Rightarrow 2$ tenemos:

$$\mathrm{cl}_{\alpha X}(f^{-1}(k_1)) \cap \mathrm{cl}_{\alpha X}(f^{-1}(F)) = \emptyset.$$

El punto p no puede pertenecer a ambos conjuntos simultáneamente. Supongamos que $p \notin \mathrm{cl}_{\alpha X}(f^{-1}(F))$. Entonces el conjunto $O_p = \alpha X \setminus \mathrm{cl}_{\alpha X}(f^{-1}(F))$ pertenece a Θ_p. Además, $X \cap O_p = X \setminus \mathrm{cl}_X(f^{-1}(F))$ y entonces el conjunto $Q_p = \mathrm{cl}_K(f(X \setminus \mathrm{cl}_X(f^{-1}(F))))$ pertenece a Ω_p. Recapitulando:

$$k_2 \in I_p \subset Q_p = \mathrm{cl}_K(f(X \setminus \mathrm{cl}_X(f^{-1}(F)))).$$

Recordemos que U_2 es un abierto de K que contiene a $k_2 \in Q_p$. Deducimos que U_2 corta al conjunto $f(X \setminus \mathrm{cl}_X(f^{-1}(F)))$ y, por lo tanto, existe un elemento t en la intersección. Como $t \in f(X \setminus \mathrm{cl}_X(f^{-1}(F)))$, existe $l \in X \setminus \mathrm{cl}_X(f^{-1}(F))$ con $f(l) = t$. El elemento l no pertenece a $\mathrm{cl}_X(f^{-1}(F))$, luego tampoco pertenece a $f^{-1}(F)$. Además, $f(l) = t \in f^{-1}(F)$ y llegamos a contradicción. La otra elección $p \notin \mathrm{cl}_{\alpha X}(f^{-1}(\{k_1\}))$ lleva una conclusión análoga. Concluimos que I_p es un solo punto.

Para cada $p \in \alpha X$, definimos $\alpha f(p)$ como el único punto de K contenido en I_p. Vemos que si $p \in X$, $I_p = \{f(p)\}$ ya que $p \in (X \cap U)$, para todo $U \in \Theta_p$, y acabamos de ver que I_p es un solo punto. Es claro que αf extiende f a αX. Probamos que la extensión es continua viendo que es continua en cada punto $p \in \alpha X$.

Sea U un abierto de K tal que $\alpha f(p) \in U$. Siguiendo una argumentación análoga a la empleada para ver que la intersección I_p no era vacía, se deduce que existe un numero finito de elementos de Ω_p, denotados con $K_1, \cdots, K_n$, tales que $\bigcap_{i=1}^n K_i \subset E$. Existen entonces abiertos $V_1, \cdots, V_n \in \Theta_p$ tales que $K_i = \mathrm{cl}_K(f(X \cap V_i))$, y tenemos:

$$\mathrm{cl}_K(f(X \cap (V_1 \cap \cdots \cap V_n))) \subset \mathrm{cl}_K(f(X \cap V_1)) \cap \cdots \cap \mathrm{cl}_K(f(X \cap V_n)) \subset U.$$

El conjunto $V_1 \cap \cdots \cap V_n$ es abierto por ser intersección finita de abiertos, y pertenece a Θ_p, luego $\alpha f(p) \in \alpha f(V)$. Es sencillo ver que $\alpha f(V) \subset U$, ya que, por construcción, para todo $q \in V$, se verifica que $V \in \Theta_q$ y $\alpha f(q) \in \mathrm{cl}_K(f(X \cap V)) \subset U$. Concluimos que αf es extensión continua de f.

□

Examinaremos a continuación algunas construcciones alternativas de la compactificación de Stone-Cech en términos de los espectros maximales de los anillos $\mathrm{C}(X)$ y $\mathrm{C}^*(X)$.

Proposición 2.27. Sea X un espacio de Tychonoff. La aplicación:

$$\begin{aligned} \eta : \beta X &\longrightarrow \mathrm{Max}\,(\mathrm{C}(X)) \\ p &\longmapsto M_p. \end{aligned}$$

donde $M_p = \{f \in \mathrm{C}(X) : p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f)\}$ es un homeomorfismo entre βX y $\mathrm{Max}\,(\mathrm{C}(X))$ (identificamos X con $\beta(X)$, y así podemos tratar los conjuntos $\mathrm{Z}(f)$ con subconjuntos de βX y tomar allí su clausura).

Demostración. Vimos en la proposición 2.6, que existía una correspondencia biunívoca entre el conjunto de ideales maximales de $\mathrm{C}(X)$ y el conjunto de z-ultrafiltros de X. Probaremos que M_p es un ideal maximal de $\mathrm{C}(X)$ viendo que $\mathrm{Z}[M_p] = \{\mathrm{Z}(f) : f \in M_p\} = \{\mathrm{Z}(f) : p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f)\}$ es un z-ultrafiltro.

A la hora de probar que $\mathrm{Z}[M_p]$ es un filtro, el único paso que no consiste en una simple comprobación corresponde a probar que $\mathrm{Z}[M_p]$ es cerrado para intersecciones finitas. Sean $\mathrm{Z}(f)$ y $\mathrm{Z}(g)$ miembros de $\mathrm{Z}[M_p]$. Teniendo en cuenta el cuarto punto de la proposición anterior, sabemos que:

$$p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f)) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(g)) = \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f) \cap \mathrm{Z}(g)) = \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f^2 + g^2)).$$

Deducimos que $\mathrm{Z}(f) \cap \mathrm{Z}(g)$ pertenece a $\mathrm{Z}[M_p]$ y concluimos que $\mathrm{Z}[M_p]$ es un z-filtro de $\mathrm{Z}(X)$.

La comprobación de la primalidad del z-filtro $\mathrm{Z}[M_p]$ es inmediata. Veremos que $\mathrm{Z}[M_p]$ es un filtro maximal utilizando la proposición 2.6, viendo que $\mathrm{Z}[M_p]$ contiene a todo z-conjunto que interseca a todos los elementos de $\mathrm{Z}[M_p]$. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un z-conjunto Z que interseca a todos los elementos de $\mathrm{Z}[M_p]$ y $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z})$. Como βX es normal, por ser compacto y de Hausdorff, aplicando el Lema de Urysohn, existe una función $w \in \mathrm{C}(\beta X)$ con $w(p) = 0$ y $w(q) = 1$ para todo $q \in \mathrm{cl}_{\beta X}(Z)$. Observamos que la función $w\big|_X$ pertenece a M_p y $\mathrm{Z}(w\big|_X) = \mathrm{Z}(w) \cap X$ no corta al z-conjunto Z, llegando así a contradicción. Concluimos que $\mathrm{Z}[M_p]$ es z-ultrafiltro y, por lo tanto, M_p es ideal maximal para todo $p \in \beta X$.

Vemos ahora que todo ideal maximal de $\mathrm{C}(X)$ es de la forma M_p, para algún $p \in \beta X$. Consideramos el conjunto $\Sigma_M = \{\mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f)) : f \in M\}$. Es claro que todos los elementos de Σ_M son cerrados y, además, para todos $f, g \in M$, se tiene que $\mathrm{Z}(f^2 + g^2) = \mathrm{Z}(f) \cap \mathrm{Z}(g) \neq \emptyset$, puesto que $f^2 + g^2 \in M$ no puede ser unidad de $\mathrm{C}(X)$.

Probaremos que el conjunto $\bigcap_{f \in M} \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f))$ no es vacío. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\bigcap_{f \in M} \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f)) = \emptyset$. Tomando complementarios obtendríamos $\beta X = \bigcup_{f \in M}(\beta X \setminus \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f)))$, que es un recubrimiento por abiertos del espacio compacto βX. Existirían entonces $f_1, \cdots, f_n$ tales que $\beta X = \cup_{i=1}^n(\beta X \setminus \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f_i)))$, y se llega a contradicción, puesto que tendríamos $\emptyset = \cup_{i=1}^n \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f_i))$. Deducimos pues que $\bigcap_{f \in M} \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f)) \neq \emptyset$.

Sea $p \in \bigcap_{f \in M} \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f))$. Veamos que sólo existe un único elemento en $\bigcap_{f \in M} \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f))$. Supongamos que existen p, $q \in \bigcap_{f \in M} \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f))$ con $p \neq q$. Como βX es de Hausdorff, existen abiertos disjuntos U_p, U_q con $p \in U_p$, $q \in U_q$. Los cerrados $\{q\}$ y $\beta X \setminus U_q$ son disjuntos. Aplicando el Lema de Urysohn, existe una función $f \in \mathrm{C}(\beta X)$ tal que $f(q) = 1$ y $f(r) = 0$, para todo $r \in \beta X \setminus U_q$. Construimos de esta forma el z-conjunto $\mathrm{Z}(f\big|_X) \in \mathrm{Z}[M]$ tal que $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f\big|_X))$, pero $q \notin \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f\big|_X))$. Llegamos entonces a contradicción, por lo que $\bigcap_{f \in M} \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f))$ se reduce a un punto

p. De esta forma, tenemos $M = M_p$, y concluimos que η es sobreyectiva.

La inyectividad de η viene dada por la estructura de βX. Sean $p, q \in \beta X$ tales que $p \neq q$. Como βX es de Hausdorff, existen abiertos disjuntos U_p, U_q con $p \in U_p$ y $q \in U_q$. Por ser βX un espacio normal, el Lema de Urysohn garantiza que existe una función $f \in \mathrm{C}(\beta X)$ con $f(p) = 1$, $f(r) = 0$ para todo $r \in \beta X \setminus U_p$. Por lo tanto, $f\big|_X \in M_q$, pero $f\big|_X \notin M_p$. Se deduce que $M_p \neq M_q$, en consecuencia, y η es inyectiva.

Para toda $f \in \mathrm{C}(X)$ los conjuntos $U_f = \{p \in \beta X : p \notin \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f))\}$ son abiertos. Sea el conjunto $\mathcal{B}$ formado por los abiertos U_f, para $f \in \mathrm{C}(X)$. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base de abiertos de βX.

Sean V un abierto de βX y $p \in V$. Los conjuntos $\beta X \setminus V$ y $\{p\}$ son cerrados disjuntos de βX, que es un espacio normal. Aplicando el Lema de Urysohn, garantizamos que existe una función $f \in \mathrm{C}(\beta X)$ tal que $f(p) = 1$ y $f(q) = 0$ para todo $q \in \beta X \setminus V$. De esta forma tenemos $p \in U_{f|_X}$ y, por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base de abiertos de βX

Para ver que η es homeomorfismo simplemente hacemos notar que:

$$\eta(U_f) = D^M(f) = D(f) \cap \mathrm{Max}\ \mathrm{C}(X) = \{M \in \mathrm{Max}\ \mathrm{C}(X) : f \notin M\}.$$

Sabemos que los conjuntos $D^M(f)$ forman una base de abiertos de la topología del espectro maximal Max $\mathrm{C}(X)$. Como η es biyectiva, para cada $p \in \beta X$, se verifica que $M_p \in \eta(U_f)$ si, y sólo si, $p \in U_f$, es decir, $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{Z}(f))$ por lo que $M_p \in D^M(f)$. Vemos que $\eta(U_f) = D^M(f)$, y concluimos que η es homeomorfismo.

$\square$

Gracias a esta proposición establecemos una construcción alternativa de la compactificación βX en términos de ideales maximales de $\mathrm{C}(X)$. En la proposición 2.20 vimos que, cuando el espacio X era compacto, existía un homeomorfismo entre X y βX. Si trasladamos esa situación a esta última proposición y tenemos en cuenta que los anillos $\mathrm{C}^*(X)$ y $\mathrm{C}(\beta X)$ son isomorfos, podemos establecer un homeomorfismo entre βX y $\mathrm{Max}\,(\mathrm{C}^*(X))$.

Más aún, podemos generalizar la situación anterior para ver que toda compactificación αX de un espacio de Tychonoff X es equivalente al espectro maximal de una subálgebra de $C^*(X)$. Para ello, basta considerar

$$C^\alpha(X) = \{f \in C^*(X) : f \text{ admite una extensión continua a } \alpha X\}.$$

Puesto que los anillos $C^\alpha(X)$ y $C(\alpha X)$ son isomorfos, concluimos que sus espectros maximales son homeomorfos. Además, $\mathrm{Max}\,(C(\alpha X))$ es homeomorfo a αX por ser αX compacto, luego $\mathrm{Max}\,(C^\alpha(X))$ es homeomorfo a αX.

Observemos finalmente que si γX es otra compactificación de X, entonces $\alpha X \leq \gamma X$ si, y sólo si, $C^\alpha(X) \subseteq C^\gamma(X)$.

4 Bases de Wallman y espacios de Tychonoff

El Lema de Urysohn es ciertamente uno de esos resultados en los que, al intentar probarlo, uno se traba si no conoce previamente la demostración. Hay un acuerdo unánime en considerar al Lema de Urysohn como uno de los resultados más importantes de la Topología General. En el estudio de los anillos de funciones continuas, hay muchos razonamientos en los que, partiendo de unas determinadas funciones continuas, se construyen, mediante sofisticadas manipulaciones, otras funciones con unas determinadas propiedades. El Lema de Urysohn no es de esa naturaleza. Queremos repetir aquí, traduciendo a Willard, que en el Lema de Urysohn, partiendo de cero, construyes "con tus propias manos" una función continua donde no se suponía que existiese ninguna. Podemos decir que, partiendo de una topología (dada por abiertos o por cerrados) el proceso de construir una función continua que separe dos cerrados tiene una elevada "complejidad". Frink se plantea el problema inverso. Los espacios de Tychonoff son, por definición, los espacios de Hausdorff en lo que hay suficientes funciones continuas para "separar" puntos de cerrados. Ahora bien, ¿cómo podemos expresar de forma elegante el axioma de "separación" de Tychonoff sin recurrir explícitamente a las funciones continuas? Preguntado de otra forma, ¿qué "complejidad" tiene el proceso de prescindir de las funciones continuas en la definición de los espacios de Tychonoff? Vamos a dedicar la última parte de este trabajo a exponer las respuestas de Frink y Steiner a las preguntas anteriores.

Definición 2.28. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de cerrados de X. La base $\mathcal{B}$ es *disyuntiva* si para todo F cerrado de X y todo punto $x \notin F$, existe $F' \in \mathcal{B}$ con $x \in F'$ y $F \cap F' = \emptyset$. Diremos que la base de cerrados $\mathcal{B}$ es una base de Wallman si es un subretículo disyuntivo de $T(X)$.

Lema 2.29. Sea X un espacio topológico T_0. Si $\mathcal{B}$ es una base de Wallman de X entonces, para todo $x \in X$, el conjunto $\mu_{\mathcal{B}}(x) = \{F \in \mathcal{B} : x \in F\}$ es un ultrafiltro de $\mathcal{B}$.

Demostración. Comprobamos que efectivamente $\mu_{\mathcal{B}}(x)$ es un filtro para todo $x \in X$:

- Es claro que $\emptyset \notin \mu_{\mathcal{B}}(x)$, ya que $\emptyset$ no contiene a x.
- Dados $B_1, B_2 \in \mu_{\mathcal{B}}(x)$, se verifica que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ por ser $\mathcal{B}$ retículo. Además, $x \in B_1 \cap B_2$, por lo que $B_1 \cap B_2 \in \mu_{\mathcal{B}}(x)$.
- Dados $B_1 \in \mu_{\mathcal{B}}(x)$ y $B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $x \in B_1 \subset B_1 \cup B_2$, y $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$ por ser $\mathcal{B}$ retículo. Se deduce que $B_1 \cup B_2 \in \mu_{\mathcal{B}}(x)$

Concluimos que $\mu_{\mathcal{B}}(x)$ es un filtro, para todo $x \in X$. Veamos que se trata siempre de un filtro primo. Sean $B_1 \cup B_2 \in \mu_{\mathcal{B}}(x)$. Esto quiere decir que $x \in B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$ y, entonces, $x \in B_1$ o $x \in B_2$. Así pues, el filtro $\mu_{\mathcal{B}}(x)$ es primo, para todo $x \in X$.

Veamos que $\mu_{\mathcal{B}}(x)$ es ultrafiltro. Sea $B \in \mathcal{B}$ con $B \notin \mu_{\mathcal{B}}(x)$. Como B es cerrado, $x \notin B$ y $\mathcal{B}$ es disyuntiva, existe $B' \in \mathcal{B}$ que contiene a x y no interseca a B. Vemos que $\mu_{\mathcal{B}}(x)$ contiene a todos los elementos de $\mathcal{B}$ que intersecan a todos los miembros de $\mu_{\mathcal{B}}(x)$, es decir, $\mu_{\mathcal{B}}(x)$ es ultrafiltro de $\mathcal{B}$. $\square$

Proposición 2.30. Sea X un espacio topológico T_0 y sea $\mathcal{B}$ una base de Wallman de X. La aplicación:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{B}} : X &\longrightarrow \operatorname{Max}(\mathcal{B}) \\ x &\longmapsto \mu_{\mathcal{B}}(x) = \{F \in \mathcal{B} : x \in F\}. \end{aligned}$$

es una inmersión topológica, cuya imagen es densa en $\operatorname{Max}(\mathcal{B})$. En el conjunto de ultrafiltros de $\mathcal{B}$ consideramos la topología dada por la base de abiertos $D^M(B) = \{$ultrafiltros de $\mathcal{B}$ que no contienen a $B\}$, donde $B \in \mathcal{B}$.

Demostración. Veamos que $\mu_{\mathcal{B}}$ es una aplicación inyectiva. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como X es T_0, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe U abierto de X tal que $y \in U$, $x \notin U$. El conjunto cerrado $F = X \setminus U$ se puede escribir como intersección de cerrados de la base $\mathcal{B}$, es decir, $x \in F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, con $B_\lambda \in \mathcal{B}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Puesto que $y \notin F$, existe $\nu \in \Lambda$ con $y \notin B_\nu$. Entonces, $B_\nu \in \mu_{\mathcal{B}}(x)$, $B_\nu \notin \mu_{\mathcal{B}}(y)$ y $\mu_{\mathcal{B}}(x) \neq \mu_{\mathcal{B}}(y)$. Concluimos que la aplicación es inyectiva.

Para ver que la aplicación $\mu_{\mathcal{B}}$ es una inmersión topológica, observemos que para todo $B \in \mathcal{B}$, se tiene que:

$$\mu_{\mathcal{B}}(B) = \{\mu_{\mathcal{B}}(x) : x \in B\} = \{\mu_{\mathcal{B}}(x) : B \in \mu_{\mathcal{B}}(x)\} = V^M(B) \cap \mu_{\mathcal{B}}(X)$$

Los conjuntos $V^M(B) = \{$ultrafiltros de $\mathcal{B}$ que contienen a $B\}$, con $B \in \mathcal{B}$, forman una base de cerrados de $\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})$. Vemos que la aplicación $\mu_{\mathcal{B}}$ transforma una base de cerrados de X en una base de cerrados de $\mu_{\mathcal{B}}(X)$. Tenemos pues una inmersión topológica de X en $\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})$, y como de costumbre, podemos identificar X con $\mu_{\mathcal{B}}(X)$.

Se verifica además que $\mathrm{cl}_{\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})}(B) = V^M(B)$, identificando X con $\mu_{\mathcal{B}}(X)$. Es sencillo ver que $\mathrm{cl}_{\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})}(B) \subset V^M(B)$, veamos la otra contención. Sea $V^M(B')$ un conjunto de la base de cerrados de $\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})$ que contiene a B. Se tiene $B' = V^M(B') \cap X$, y este conjunto contiene a B, por lo que deducimos que $V^M(B) \subset V^M(B')$. Como la clausura de B en $\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})$ viene dada por la intersección de todos los cerrados que contienen a B, deducimos que $V^M(B) \subset \mathrm{cl}_{\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})}(B)$.

Observamos que la imagen de X es densa en $\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})$.

□

Esta construcción nos da una nueva caracterización de los espacios T_1.

Proposición 2.31. Un espacio X es T_1 si, y sólo si, posee una base de Wallman.

Demostración. Sabemos que X es T_1 si, y sólo si, todos sus puntos son cerrados. Si X es T_1, se comprueba fácilmente que el retículo $T(X)$, formado por todos los conjuntos cerrados de X, es base de Wallman de X.

Recíprocamente, si X tiene una base de Wallman $\mathcal{B}$, entonces el espacio X puede identificarse con un subespacio de $\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})$, que sabemos que es un espacio T_1. Como la propiedad T_1 se conserva tomando subespacios, vemos que X es T_1.

□

En general, sabemos que $\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})$ no es un espacio de Hausdorff. La construcción realizada gracias a las bases de Wallman no nos proporciona una compactificación de X, aunque no le falta mucho. Diremos que una base de Wallman es *normal* si su espectro es normal, es decir, si se trata de un retículo donde cada filtro está contenido en un único ultrafiltro. Sabemos entonces que su espectro maximal es un espacio de Hausdorff. Observamos que las bases de Wallman normales proporcionan una forma alternativa para construir compactificaciones de un espacio.

Teorema 2.32 (Caracterización de Frink)**.** Un espacio X es de Tychonoff si, y sólo si, posee una base de Wallman normal.

Demostración. Es claro que si un espacio X posee una base de Wallman normal, podemos entonces construir una compactificación de Hausdorff de X. Como los espacios que admiten una compactificación de Hausdorff son los espacios de Tychonoff, concluimos que X debe ser de Tychonoff.

Para probar el recíproco basta con ver que si X es de Tychonoff, el retículo $\mathrm{Z}(X)$ es una base de Wallman normal. Sabemos que $\mathrm{Z}(X)$ tiene estructura de retículo, solamente tenemos que comprobar que $\mathrm{Z}(X)$ es base de cerrados disyuntiva y normal cuando X es de Tychonoff.

- $\mathrm{Z}(X)$ es base de cerrados: sean F un cerrado de X y $x \notin F$. Como X es de Tychonoff, existe $f \in \mathrm{C}(X)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, para todo $y \in F$. Definimos la función continua g dada por $g(z) = \min\{f(z) - \frac{1}{2}, 0\}$, para todo $z \in X$, y $\mathrm{Z}(g) = \{z \in X : f(z) \geq \frac{1}{2}\}$. Tenemos $x \notin \mathrm{Z}(g)$, $F \subset \mathrm{Z}(g) \in \mathrm{Z}(X)$. Concluimos que, efectivamente, $\mathrm{Z}(X)$ es base de cerrados.

- $\mathrm{Z}(X)$ es disyuntiva: sean F cerrado de X y $x \notin F$. Por ser X de Tychonoff, existe $f \in \mathrm{C}(X)$ con $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in F$, es decir, $x \in \mathrm{Z}(f)$ y $\mathrm{Z}(f) \cap F = \emptyset$.

- $\mathrm{Z}(X)$ es normal: Lo vimos en la proposición 2.11.

□

Ya vimos anteriormente una caracterización de los espacios de Tychonoff en términos de compactificaciones. Este último teorema nos da una nueva caracterización, esta vez intrínseca, directamente relacionada con la topología del espacio, sin referencia a funciones continuas ni a compactificaciones.

Corolario 2.33. Sea X un espacio de Tychonoff. La compactificación de Stone-Cech βX es equivalente a la compactificación dada por $\mathrm{Max}\,(\mathrm{Z}(X))$.

Demostración. Sabemos que βX se puede caracterizar como la única compactificación donde dos z-conjuntos disjuntos de $\mathrm{Z}(X)$ siempre tienen clausuras disjuntas en βX. Comprobamos que la compactificación dada por la base de Wallman normal $\mathrm{Z}(X)$ satisface esa propiedad.

Sean $Z(f)$ y $Z(g)$, con $f, g \in \mathrm{C}(X)$, z-conjuntos disjuntos. Supongamos que sus clausuras en $\mathrm{Max}\,(\mathrm{Z}(X))$ no son disjuntas. Existe entonces un z-ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que:

$$\mathcal{U} \in \mathrm{cl}_{\mathrm{Max}\,(\mathrm{Z}(X))}(Z(f)) \cap \mathrm{cl}_{\mathrm{Max}\,(\mathrm{Z}(X))}(Z(g)) = V^M(\mathrm{Z}(f)) \cap V^M(\mathrm{Z}(g))$$

$\mathcal{U}$ es un z-ultrafiltro al que pertenecen $\mathrm{Z}(f)$ y $\mathrm{Z}(g)$, por lo que su intersección también está contenida en $\mathcal{U}$, que es entonces no vacía. Llegamos a contradicción, y deducimos que efectivamente las clausuras de los dos z-conjuntos disjuntos han de ser también disjuntas. Concluimos que la compactificación es equivalente a βX.

□

Acabamos de ver que también se puede construir la compactificación de Stone-Cech de un espacio de Tychonoff empleando z-ultrafiltros, es decir, sumergiendo X en $\mathrm{Max}\,(\mathrm{Z}(X))$.

Originalmente definíamos los espacios de Tychonoff como aquellos espacios T_1 en los que hay suficientes funciones continuas para separar puntos de cerrados, y utilizábamos las funciones continuas y acotadas sobre un espacio de Tychonoff X para sumergir X en un cubo y obtener así una compactificación de X. También podíamos sumergir X en $\mathrm{Max}\,(\mathrm{C}(X))$ o $\mathrm{Max}\,(\mathrm{C}^*(X))$, que también son espacios compactos y de Hausdorff. En los tres casos obteníamos la compactificación de Stone-Cech βX de X.

Al finalizar la tercera sección de este segundo capítulo vimos que toda compactificación αX de un espacio de Tychonoff X podía obtenerse como espectro maximal de la subálgebra $C^\alpha(X)$ de $C^*(X)$. Recordemos que $C^\alpha(X)$ está formada por aquellas funciones de $C^*(X)$ que admiten una extensión continua a αX. Puesto que βX lo hemos podido obtener también como $\mathrm{Max}\,(Z(X))$, podríamos pensar que lo análogo va a "funcionar" también en el caso de αX, pero la situación no es tan sencilla. Sea $Z^\alpha(X)$ el subretículo de $Z(X)$ formado por los z-conjuntos de las funciones de $C^\alpha(X)$, es decir, $Z^\alpha(X) = Z(C^\alpha(X))$. Es cierto que $Z^\alpha(X)$ es una base de Wallman normal en X, pero no se puede asegurar que las compactificaciones αX y $\mathrm{Max}\,(Z^\alpha(X))$ sean equivalentes. Sólo podemos asegurar que $\mathrm{Max}\,(Z^\alpha(X)) \geq \alpha X$. La compactificación de Stone-Cech βX de X es una compactificación especial, hablando coloquialmente diríamos que su carácter maximal hace que "muchas cosas funcionen".

Si $\alpha\mathbb{N}$ es la compactificación por un punto (o compactificación de Alexandroff) de $\mathbb{N}$, entonces

$$\mathrm{Max}\,(Z^\alpha(\mathbb{N})) = \beta\mathbb{N} > \alpha\mathbb{N}.$$

Frink obtiene, mediante las bases de Wallman normales, una caracterización de los espacios de Tychonoff sin acudir explícitamente a las funciones continuas. Estas bases nos proporcionan una nueva forma de obtener compactificaciones de Hausdorff. Si el espacio X posee una base de Wallman normal

$\mathcal{B}$, basta sumergir X en el espectro maximal de la base $\mathcal{B}$, $\mathrm{Max}\,(\mathcal{B})$, que es un espacio compacto y de Hausdorff.

Ahora bien, la respuesta de Frink tiene una deficiencia. Si Y es un subespacio de un espacio de Tychonoff X, es inmediato que Y también es de Tychonoff, pues las restricciones a Y de las funciones continuas definidas sobre X bastan para separar los puntos de los cerrados en Y. Ahora bien, la traza sobre Y de una base de Wallman normal en X puede no ser normal en Y. Así pues, la caracterización de Frink no nos proporciona de forma directa un resultado tan básico como el anterior. Veremos a continuación la caracterización de Steiner, que subsana elegantemente esa deficiencia introduciendo unas familias de cerrados con una condición más restrictiva que la normalidad, pero que sí es heredada por sus trazas sobre subespacios. Además, como el propio Frink reconoce ([Fri2]), la caracterización de Steiner es más sencilla y directa, y se basa en una generalización del "método" de Urysohn.

Vamos a extender la propiedad de ser normal a familias de cerrados de un espacio X que no sean necesariamente subretículos de $T(X)$.

Definición 2.34. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una familia de cerrados de X. Diremos que $\mathcal{B}$ es normal si cualesquiera dos miembros disjuntos de $\mathcal{B}$ están contenidos en complementarios disjuntos de miembros de $\mathcal{B}$, con mas precisión, si cumple que: para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ disjuntos, existen $C_1, C_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \subset C_1' = (X \setminus C_1)$, $B_2 \subset C_2' = (X \setminus C_2)$ y $C_1' \cap C_2' = \emptyset$.

Definición 2.35. Sea X un espacio topológico. Diremos que una familia de cerrados $\mathcal{F}$ es separante si cumple que, para todo cerrado F de X y todo $x \notin F$, existen miembros disjuntos de la familia $\mathcal{F}$ que contienen, respectivamente, a x y a F, es decir, si existen $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $x \in A$, $F \subset B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Lema 2.36. El conjunto de los racionales diádicos $\left\{\dfrac{m}{2^n} : (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Utilizando la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < b - a$ y entonces $0 < \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n} < b - a$. Tenemos $1 < 2^n b - 2^n a$ y existe m entero con $2^n a < m < 2^n b$ por lo que $a < \dfrac{m}{2^n} < b$.

□

Teorema 2.37. Un espacio X es de Tychonoff si, y sólo si, posee una familia separante y normal de conjuntos cerrados.

Demostración. Si X es de Tychonoff sabemos $\mathrm{Z}(X)$ es separante, puesto que si x no pertenece al cerrado F, existe $f \in \mathrm{C}(X)$ tal que $x \in \mathrm{Z}(f)$, $F \subset \mathrm{Z}(f-1)$ y, obviamente, $\mathrm{Z}(f) \cap \mathrm{Z}(f-1) = \emptyset$. La normalidad de $\mathrm{Z}(X)$ es clara. Entonces, todo espacio de Tychonoff posee una familia separante y normal de cerrados.

Veamos el recíproco. Sea X un espacio topológico que posee una familia separante y normal de conjuntos cerrados $\mathcal{F}$. Sean F un cerrado de X y $x \notin F$. Vamos a construir una función continua $f : X \to [0,1]$ que separe x y F. Seguiremos una estrategia similar a la que se suele emplear para probar el Lema de Urysohn.

Emplearemos el conjunto de racionales diádicos del intervalo $(0,1)$. Como la prueba tiene un componente recursivo, veremos a estos racionales diádicos, como elementos de una sucesión que denotamos con $\mathfrak{D}$ y viene dada por:

$$\mathfrak{D} = \{d_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \cdots \right\}$$

Observamos que cada racional diádico de $(0,1)$ aparece una única vez en la sucesión $\mathfrak{D}$. Denotaremos con $\mathfrak{D}_n$ al conjunto formado por los n primeros elementos de $\mathfrak{D}$.

Como $\mathcal{F}$ es separante, existen cerrados $A, B \in \mathcal{F}$ con $x \in A$, $F \subset B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Vamos a establecer una aplicación ϕ que a cada racional diádico d_i de $\mathfrak{D}$ le asocie un par (G'_i, G_i), donde G'_i es un abierto que es el complementario de un cerrado $G^*_i \in \mathcal{F}$ y G_i es un cerrado de $\mathcal{F}$. Además el par cumplirá:

- $A \subset G'_i \subset G_i \subset X \setminus B$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
- $G_i \subset G'_j$ si $d_i < d_j$ con $d_i, d_j \in \mathfrak{D}$.

Como $\mathcal{F}$ es normal, existen cerrados $G^*_1, G_1 \in \mathcal{F}$ con $A \subset (X \setminus G^*_1)$, $B \subset (X \setminus G_1)$ y $(X \setminus G^*_1) \cap (X \setminus G_1) = \emptyset$. Por comodidad escribimos $G'_1 = (X \setminus G^*_1)$ y tenemos:

$$x \in A \subset G'_1 \subset G_1 \subset (X \setminus B)$$

Los cerrados A y G^*_1 pertenecen a $\mathcal{F}$ y son disjuntos. Utilizando la normalidad de $\mathcal{F}$ sabemos que existen $G^*_2, G_2 \in \mathcal{F}$ con $A \subset (X \setminus G^*_2)$, $G^*_1 \subset (X \setminus G_2)$

y además $(X \setminus G_2^*) \cap (X \setminus G_2) = \emptyset$. Sea $G_2' = (X \setminus G_2^*)$.

Los cerrados G_1 y B pertenecen a $\mathcal{F}$ y son disjuntos. Utilizando la normalidad de $\mathcal{F}$ garantizamos que existen $G_3^*, G_3 \in \mathcal{F}$ con $G_1 \subset (X \setminus G_3^*)$, $B \subset (X \setminus G_3)$ y $(X \setminus G_3^*) \cap (X \setminus G_3) = \emptyset$. Sea $G_3' = (X \setminus G_3^*)$.

$$A \subset G_2' \subset G_2 \subset G_1' \subset G_1 \subset G_3' \subset G_3 \subset (X \setminus B)$$

De esta forma definimos $\phi(d_i) = (G_i', G_i)$, para $i = 1, 2, 3$, y observamos que se cumplen las dos condiciones. Veamos cómo definir ϕ de forma recursiva, para todo racional diádico de $\mathfrak{D}$.

Supongamos que hemos definido la aplicación ϕ para los $n-1$ primeros elementos de $\mathfrak{D}$, verificando las dos condiciones anteriores. Tomamos el racional d_n y observamos que se pueden dar tres situaciones:

1. En $\mathfrak{D}_{n-1}$, encontramos tanto elementos estrictamente superiores como elementos estrictamente inferiores a d_n. Tomamos los racionales:

   $$p = \min\{r \in \mathfrak{D}_{n-1} : r > d_n\}.$$

   $$q = \max\{r \in \mathfrak{D}_{n-1} : r < d_n\}.$$

   Existen entonces $i, j \in \{1, \cdots, n-1\}$ con $p = d_j,\ q = d_i$ y tenemos:

   $$A \subset G_i' \subset G_i \subset G_j' \subset G_j \subset (X \setminus B).$$

   Los cerrados $G_j, G_i^* \in \mathcal{F}$ son disjuntos. Utilizando la normalidad de $\mathcal{F}$ sabemos que existen $G_n^*, G_n \in \mathcal{F}$ con $G_i \subset (X \setminus G_n^*)$, $G_j^* \subset (X \setminus G_n)$ y además $(X \setminus G_n^*) \cap (X \setminus G_n) = \emptyset$. Definimos $G_n' = (X \setminus G_n^*)$ y tenemos los dos conjuntos que buscábamos de forma que:

   $$A \subset G_i' \subset G_i \subset G_n' \subset G_n \subset G_j' \subset G_j \subset (X \setminus B).$$

   Los conjuntos G_n', G_n satisfacen las condiciones deseadas.

2. En $\mathfrak{D}_{n-1}$, encontramos únicamente elementos estrictamente superiores a d_n. Tomamos el racional:

   $$p = \min\{r \in \mathfrak{D}_{n-1} : r > d_n\}.$$

   Existe $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ con $p = d_i$ y tenemos:

   $$A \subset G_i' \subset G_i \subset (X \setminus B).$$

   Construimos G_n' y G_n a partir de los cerrados $A, G_i^* \in \mathcal{F}$. De esta forma se obtiene:

$$A \subset G'_n \subset G_n \subset G'_i \subset G_i \subset (X \setminus B).$$

Los conjuntos G'_n, G_n satisfacen las condiciones deseadas.

3. En $\mathfrak{D}_{n-1}$, encontramos únicamente elementos estrictamente inferiores a d_n. Este caso es análogo al anterior. Tomando:

$$q = \max\{r \in \mathfrak{D}_{n-1} : r < d_n\}.$$

Existe $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ con $q = d_i$ y considerando los cerrados $G_i, B \in \mathcal{F}$ se construyen G'_n, G_n.

Vemos que la correspondencia ϕ puede definirse sin problemas de forma recursiva, cumpliendo lo deseado. Vamos a definir ahora la función que buscamos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ no pertenece a ningún } G'_n. \\ \inf\{d_n : x \in G'_n\} & \text{en el resto de casos.} \end{cases}$$

Es obvio que la función f toma los valores 0 en A y 1 en B. Es sencillo comprobar que:

- $f(x) \leq d_n$ si $x \in G_n$.
- $f(x) \geq d_n$ si $x \notin G'_n$.

Probemos que se trata de una función continua, viendo que f es continua en cada punto de X. Probemos en primer lugar que f es continua en todo punto $a \in A$. Sea $\epsilon > 0$, consideramos un racional diádico p con $0 < p < \epsilon$. Existe $n \in \mathbb{N}$ con $p = d_n$. Puesto que $A \subset G'_n$, concluimos que G'_n es un entorno abierto de a y, ciertamente, $f(y) \leq d_n < \epsilon$ en todo punto y de G'_n.

Veamos a continuación que f es continua en todo punto de $b \in B$. Sea $\epsilon > 0$, consideramos un racional diádico p tal que $1 - \epsilon < p < 1$ y existe $n \in \mathbb{N}$ con $p = d_n$. Puesto que $B \subset X \setminus G_n$, concluimos que $X \setminus G_n$ es entorno abierto de b. Para ver que $f(y) \geq 1 - \epsilon$ en todo punto $y \in X \setminus G_n$, basta observar que si $d_i < d_n$, entonces $y \notin G_i$ (pues $G_i \subset G_n$).

Demostremos, finalmente que f es continua en los demás puntos. Sean $y \in X$ uno de estos puntos y (c, d) un intervalo abierto que contiene al punto $f(y)$. Aplicando el lema previo, sabemos que existen p, q racionales diádicos de $(0, 1)$ tales que :

$$c < p < f(y) < q < d$$

Existen $n, m \in \mathbb{N}$, con $p = d_n$, $q = d_m$. Definimos el abierto:

$$U = G'_m \setminus G_n = G'_m \cap (X \setminus G_n).$$

Veamos que U es entorno de x, y que $f(U) \subset (c,d)$. Como vimos antes, la condición $f(y) < d_m$ implica que $x \in G'_m$. De la condición $f(x) < d_m$ deducimos que $x \notin G_n$ y que $x \in U$. Además, para todo $y \in U$, tenemos $y \in G'_m \subset G_m$, por lo que $f(y) \leq d_m$. De forma similar, $y \notin G_n$ y entonces $f(y) \geq d_n$. Concluimos que $f(y) \in [d_n, d_m] \subset (c,d)$ y vemos que, efectivamente, f es continua en X. Así pues, X es de Tychonoff.

□

Vemos que la condición es de Steiner no exige trabajar con bases de cerrados que tengan estructura de retículo, ni manejar conjuntos de ultrafiltros. Ahora bien, no nos proporciona ningún método nuevo de construir compactificaciones de Hausdorff.

Sabemos que siempre que tomamos subespacios de un espacio de Tychonoff, obtenemos de nuevo espacios de Tychonoff. Sea Y un subespacio de un espacio X. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de X que es separante en X, su traza sobre Y es separante en Y. Ahora bien, como ya hemos indicado antes, la traza sobre Y de una familia normal en X puede no ser normal en Y. Por ejemplo, sea un espacio X de cardinal infinito con la topología discreta, es decir, la topología para la que todos los subconjuntos de X son abiertos. Tomamos A, B subconjuntos infinitos con $A \cap B$ finito. La familia formada por A, B, todos los conjuntos unipuntuales y sus complementarios es separante y normal, pero su intersección con $X \setminus (A \cap B)$ no es normal. Steiner subsana esta deficiencia introduciendo una familia de cerrados con una condición más restrictiva que la normalidad, pero que sí es heredada por sus trazas sobre subespacios.

Definición 2.38. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de cerrados de X. Diremos que $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados de intersección anidada de X si cumple que:

- $\mathcal{F}$ es cerrada para uniones finitas e intersecciones numerables.
- Para cada $F \in \mathcal{F}$, existen una sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{F}$ y una sucesión $\{F'_n\}_{n=1}^{\infty}$ de complementarios de elementos de $\mathcal{F}$ tales que:

$$F'_{n+1} \subset F_{n+1} \subset F'_n \subset F_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Proposición 2.39. Sean X un espacio topológico e Y un subespacio de X. Toda familia $\mathcal{F}$ de cerrados de X de intersección anidada es normal. Además, la familia $\mathcal{F}_Y = \{F \cap Y : F \in \mathcal{F}\}$ también es normal (en Y).

Demostración. Sean A y B elementos disjuntos de $\mathcal{F}$. Existen sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{F}$ y sucesiones $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B'_n\}_{n=1}^{\infty}$ de complementarios de elementos de $\mathcal{F}$ que cumplen:

$$A'_{n+1} \subset A_{n+1} \subset A'_n \subset A_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \text{ y } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

$$B'_{n+1} \subset B_{n+1} \subset B'_n \subset B_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \text{ y } B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Definimos ahora los dos elementos de $\mathcal{F}$, cuyos complementarios separan a A y B:

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A'_n \cap (X \setminus B_n)) \text{ y } D = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B'_n \cap (X \setminus A_n)).$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Si $n > m$, por construcción $A'_n \subset A_m$, luego tenemos $A'_n \cap (X \setminus A_m) = \emptyset$. De modo análogo, si $n < m$, entonces $B'_m \cap (X \setminus B_n) = \emptyset$. En cualquier caso se tiene:

$$(A'_n \cap (X \setminus B_n)) \cap (B'_m \cap (X \setminus A_n)) = \emptyset$$

Queda claro que C y D son disjuntos. Sea $x \in A$, como A y B son disjuntos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin B_n$, es decir, $x \in (X \setminus B_n)$. Además como $x \in A'_n$, tenemos $x \in (A'_n \cap (X \setminus B_n))$. Deducimos que $A \subset C$ y, de forma análoga, que $B \subset D$. Es sencillo ver que C y D son complementarios de elementos de $\mathcal{F}$. Observemos que:

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A'_n \cap (X \setminus B_n)) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty}((X \setminus A'_n) \cup B_m)$$

Como $\mathcal{F}$ es cerrado para uniones finitas e intersecciones numerables, deducimos que es C es el complementario de un elemento de $\mathcal{F}$. El resultado análogo para D se obtiene de la misma forma, y podemos concluir que $\mathcal{F}$ es una familia normal. Es sencillo comprobar que la construcción realizada funciona de forma adecuada al tomar subespacios y la familia $\mathcal{F}_Y$ es normal para todo subespacio Y de X.

□

Veamos a continuación que, en cada espacio de Tychonoff, podemos encontrar una familia de cerrados separante y de intersección anidada, cuya traza sobre los subespacios de X hereda esas propiedades.

Proposición 2.40. Un espacio de Tychonoff siempre posee una familia de cerrados separante y de intersección anidada.

Demostración. Ya comprobamos que un espacio de Tychonoff X, siempre posee una familia $\mathcal{F}$ de cerrados separante y normal.

Como en la demostración del teorema 2.37, llamaremos $\mathfrak{D}$ al conjunto de los racionales diádicos del intervalo (0,1). Consideramos el conjunto $\Phi = \{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ formado por las aplicaciones ϕ_λ que a cada racional $p \in \mathfrak{D}$ le asocian un par $(G'_\lambda(p), G_\lambda(p))$, donde $G'_\lambda(p)$ es un abierto que es el complementario de un cerrado $G^*_\lambda(p) \in \mathcal{F}$ y $G_\lambda(p)$ es un cerrado que es miembro de $\mathcal{F}$, verificándose además que para todo $\lambda \in \Lambda$ se cumple que $G'_\lambda(p) \subset G_\lambda(p)$ para cada $p \in \mathfrak{D}$ y $G_\lambda(p) \subset G'_\lambda(q)$ si $p < q$ con $p, q \in \mathfrak{D}$.

Consideramos ahora la familia $\mathcal{F}_1$ formada por los conjuntos:

$$I_\lambda = \bigcap_{p\in\mathfrak{D}} G_\lambda(p), \text{ para cada } \lambda \in \Lambda.$$

En particular, $I_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_\lambda(\frac{1}{2^n})$. Los cerrados $G_\lambda(\frac{1}{2^n})$ y $G^*_\lambda(\frac{1}{2^{n+1}})$ son elementos disjuntos de $\mathcal{F}$. Utilizando la normalidad podemos replicar el proceso descrito en la demostración del teorema 2.37, y garantizamos que existe $\phi_{\lambda n} \in \Phi$, con:

$$\begin{cases} G_\lambda(\frac{1}{2^{n+1}}) \subset G'_{\lambda n}(p) \subset G_{\lambda n}(p) \subset G'_\lambda(\frac{1}{2^n}), \text{ para cada } p \in \mathfrak{D}. \\ G'_{\lambda n}(p) \subset G_{\lambda n}(p) \subset G'_{\lambda n}(q) \subset G_{\lambda n}(q), \text{ para cada } p, q \in \mathfrak{D} \text{ con } p < q. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $I_{\lambda n} = \bigcap_{p\in\mathfrak{D}} G_{\lambda n}(p)$. De forma similar, definimos $U_n = \bigcup_{p\in\mathfrak{D}} G'_{\lambda n+1} = (X \setminus \bigcap_{p\in\mathfrak{D}} G^*_{\lambda n+1}(p))$ y tenemos:

$$U_{n+1} \subset I_{\lambda n+1} \subset U_n \subset I_{\lambda n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

La segunda condición de la definición 2.38 se cumple para la familia $\mathcal{F}_1$, ya que $I_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\lambda n}$. Sean F un cerrado y $x \notin F$. Como $\mathcal{F}$ es separante, existen $A, B \in \mathcal{F}$ con $x \in A$, $F \subset B$ y $A \cap B = \emptyset$. Sabemos que existen $\phi_\alpha, \phi_\beta \in \Phi$ tales que, para cada $p, q \in \mathfrak{D}$ con $p < q$:

$$\begin{cases} A \subset G'_\alpha(p) \subset G_\alpha(p) \subset G'_\alpha(q) \subset G_\alpha(q) \subset (X \setminus B). \\ B \subset G'_\beta(p) \subset G_\beta(p) \subset G'_\beta(q) \subset G_\beta(q) \subset (X \setminus A). \end{cases}$$

Se puede deducir fácilmente que $I_\alpha, I_\beta \in \mathcal{F}_1$ son elementos disjuntos con $x \in I_\alpha$ y $F \subset I_\beta$, es decir, $\mathcal{F}_1$ es separante. Sea ahora $\mathcal{F}_2$ al familia formada por las uniones finitas de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{F}_1$. Es sencillo comprobar que la segunda condición de la definición 2.38 se cumple para $\mathcal{F}_2$. Construimos ahora la familia $\mathcal{F}_3$ formada por las intersecciones numerables de miembros de $\mathcal{F}_2$. Hemos construido de esta forma, a partir de $\mathcal{F}$ una familia de cerrados que cumple la primera condición de la definición 2.38 y además es separante.

Veamos que se cumple también la segunda condición, es decir, que $\mathcal{F}_3$ es una familia de cerrados de intersección anidada. Para cada $F \in \mathcal{F}_3$, por construcción, existe una sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ elementos de $\mathcal{F}_2$ tal que $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen sucesiones $\{F_n(i)\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{F}_2$ y $\{F'_n(i)\}_{i=1}^{\infty}$ de complementarios en X de elementos de $\mathcal{F}_2$, tales que $F_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_n(i)$ y además:

$$F'_n(i+1) \subset F_n(i+1) \subset F'_n(i) \subset F_n(i), \text{ para cada } i \in \mathbb{N}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $G_n = \bigcap_{i=1}^{n} F_n(i)$ y $G'_n = \bigcap_{i=1}^{n} F'_n(i)$. Se obtiene que $F = \bigcap_{n=1} \infty G_n$ y $G'_n \subset G_{n+1} \subset G'_n \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que $\mathcal{F}_3$ es una familia de cerrados de intersección anidada de X que, además, es separante.

$\square$

Bibliografía

[AM] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introducción al Álgebra Conmutativa,* Reverté, 1978.

[AS] R.A. Alò and H.L. Shapiro, *Normal Topological Spaces,* Cambridge University Press, 1974.

[Cont] M. Contessa, *On pm-rings,* Comm. Algebra 10 (1982), 93-108.

[DP] B.A. Davey and H.A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order Second Edition*, Cambridge University Press, 2002.

[Fri1] O. Frink, *Compactifications and semi-normal spaces,* American J. Math. 86 (1964), 602-607.

[Fri2] Review of "E.F. Steiner, *Normal families and completely regular spaces,* Duke Math. J. 33 (1966), 743-745," MathScinet, MR0199835 (33#975).

[GJ] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions,* Van Nostrand, 1960.

[John] P.T. Johnstone, *Stone Spaces,* Cambridge University Press, 1982.

[Magi] A.R. Magid, *The Separable Galois Theory of Conmutative Rings Second Edition,* Chapman & Hall, 2014.

[MO] G. De Marco and A. Orsatti, *Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal,* Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 459-466.

[Ste1] E.F. Steiner, *Normal families and completely regular spaces,* Duke Math. J. 33 (1966), 743-745.

[Will] S. Willard, *General Topology,* Addison-Wesley, 1970.