Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Clases ultradiferenciables en la recta real

Autor:

Ana Not Abejón

Tutor:

Javier Sanz Gil

D. JAVIER SANZ GIL, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que el presente trabajo, “Clases ultradiferenciables en la recta real”, ha sido realizado bajo su dirección en el Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, por Doña Ana Lourdes Not Abejón, y constituye su Trabajo Fin de Grado para optar al título de Grado en Matemáticas.

Que le consta que el trabajo es original e inédito, y que autoriza su presentación.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a veinte de junio de dos mil dieciseis.

Fdo.: Javier Sanz Gil

Índice general

Introducción

En la teoría elemental de funciones reales de variable real, que en la actualidad en el Grado en Matemáticas se presenta dividida entre la asignatura “Cálculo Infinitesimal” de primer curso y la asignatura “Análisis Matemático” de segundo, aparece un tema dedicado al estudio de las series funcionales. En ese contexto, es natural considerar la clase de las funciones analíticas (en sentido real), definidas en intervalos abiertos y que pueden ser representadas en un entorno de cada punto mediante una serie de potencias centrada en ese punto y con radio de convergencia no nulo. Del teorema de derivación de series de potencias se deduce inmediatamente que dicha clase está contenida en la de las funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en el intervalo correspondiente. Aunque no se realiza en dichos cursos un estudio pormenorizado de sus propiedades, se presentan habitualmente los resultados de estabilidad en dicha clase (es decir, la suma, producto y composición de funciones analíticas es de nuevo analítica), y se resalta el principio de identidad, que establece que dos funciones analíticas cuyas derivadas sucesivas de orden arbitrario coincidan en un punto común de sus respectivos dominios han de ser idénticas en la intersección de dichos dominios.

Más adelante, en la teoría elemental de funciones de variable compleja, cubierta en la asignatura obligatoria “Variable Compleja” del tercer curso del Grado en Matemáticas, se prueba que las funciones analíticas en un abierto del plano complejo (de nuevo, aquellas representables localmente mediante series de potencias) son exactamente las funciones holomorfas en dicho abierto, y de nuevo se presenta el principio de identidad, que puede ser enunciado en los siguientes términos:

Sea Ω un abierto conexo del plano complejo, y sea $z_0 \in \Omega$. Entonces, la aplicación que envía cada función holomorfa en Ω en la sucesión $\{f^{(n)}(z_0)\}_{n=0}^\infty$ es inyectiva.

El objetivo fundamental de este trabajo es caracterizar ciertos subespacios del espacio de las funciones complejas indefinidamente derivables en la recta real que gocen de una propiedad similar de unicidad.

A finales del siglo XIX, É. Borel [3, 4] presentó los primeros ejemplos de conjuntos E de funciones complejas indefinidamente derivables en la recta real, que contienen funciones no analíticas (en el sentido real) y que, sin embargo, gozan de la siguiente propiedad: si $f \in E$ y para un x_0 se tiene que $f^{(n)}(x_0) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, entonces f es la función idénticamente nula.

Una clase E con esta propiedad se denominará casianalítica. En 1912, J. Hadamard [9], inspirado por el trabajo de E. Holmgren sobre la ecuación del calor, introdujo para cada sucesión de números reales estrictamente positivos $(M_n)_{n=0}^{\infty}$, la clase (denominada ultradiferenciable) $\mathcal{C}\{M_n\}$ de las funciones complejas f indefinidamente derivables en $\mathbb{R}$ para las que existen constantes $C = C(f) > 0$ y $A = A(f) > 0$ tales que

$$|f^{(n)}(x)| \leq CA^n M_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Hadamard planteó el problema de establecer condiciones necesarias y suficientes sobre la sucesión para que la clase sea casianalítica. Este tipo de clases, para el caso $M_n = n!^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, aparece nuevamente poco después en el estudio de M. Gevrey [8] acerca de las soluciones de ciertos tipos de ecuaciones en derivadas parciales, razón por la que dichas clases llevan su nombre. El problema de Hadamard es resuelto por M. Denjoy [6], que da una condición suficiente de casianaliticidad, y T. Carleman, que lo cierra en 1923 (ver su memoria [5]). El objetivo fundamental de nuestro trabajo es la presentación del teorema de Denjoy-Carleman, para lo que se seguirá principalmente la exposición del resultado que se encuentra en el libro de W. Rudin [15]. Otros manuales donde se pueden encontrar pruebas alternativas son los trabajos de L. Hörmander [10] y S. Mandelbrojt [13].

El primer capítulo consta de una serie de resultados preliminares que se necesitarán en la exposición: la fórmula de Poisson-Jensen; los hechos fundamentales acerca de los productos infinitos y las funciones por ellos definidas; los teoremas clásicos de holomorfía bajo el signo integral y, finalmente, uno de los teoremas de Paley-Wiener. Se ha intentado partir de los conocimientos adquiridos en varias de las asignaturas del Grado para economizar en la presentación de todos ellos, incluyendo solamente las pruebas que suponen una ampliación de los contenidos habituales. Se ha seguido principalmente el libro de R. B. Ash and W. P. Novinger [1], salvo para el teorema de Paley-Wiener, tomado del texto de W. Rudin [15].

El segundo capítulo comienza mostrando que la aplicación que envía una función en $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ en la sucesión de derivadas sucesivas en un punto es no inyectiva y suprayectiva. Esta última afirmación es un celebrado teorema de É. Borel [2], para cuya prueba hemos seguido el texto de C. Zuily [17]. A continuación se introducen las clases ultradiferenciables y sus propiedades fundamentales, en especial su carácter cerrado respecto a producto y composición, para lo que se admitirá que $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ es logarítmicamente convexa, lo que no resta generalidad al problema (como consecuencia de un resultado de S. Mandelbrojt [13], del que se puede encontrar una presentación moderna en el libro de P. Koosis [11]) y simplifica significativamente los argumentos. Aunque la prueba en el caso de la composición se puede hacer a partir de la fórmula de Faà di Bruno para la derivadas sucesivas de una función compuesta, como se hace en el libro de S. G. Krantz y H. R. Parks [12], hemos preferido seguir el argumento de T. Yamanaka [16].

Se estudian a continuación las clases analíticas y de Gevrey como ejemplos significativos, por ser los más frecuentes en las aplicaciones, y se presenta finalmente el teorema de Denjoy-Carleman, del que se deduce que la primera es casianalítica, mientras que las segundas no lo son.

El problema de la sobreyectividad de la aplicación de Borel en clases ultradiferenciables es más sofisticado, razón por la que hemos eludido su inclusión en el trabajo, pero el lector interesado puede encontrar su estudio en el artículo de H.-J. Petzsche [14].

Resumen

En este trabajo se presenta el teorema de Denjoy-Carleman, que caracteriza las clases ultradiferenciables en $\mathbb{R}$ que son casianalíticas, es decir, aquellas cuyos elementos quedan determinados unívocamente cuando se conoce la sucesión de derivadas sucesivas en un punto. Entre los prerrequisitos necesarios, cabe mencionar uno de los teoremas de Paley-Wiener. Se ha incluido también el teorema clásico de Borel sobre la existencia de funciones indefinidamente derivables con derivadas arbitrariamente prefijadas en un punto.

Abstract

In this report we present the Denjoy-Carleman thoerem, characterizing those ultradiferentiable classes in $\mathbb{R}$ which are quasi-analytic, i.e., such that any of its elements is uniquely determined by the knowledge of the sequence of its derivatives at a given point. Among the needed prerequisites, we highlight one of the theorems of Paley-Wiener. The classical result of Borel on the existence of smooth functions with arbitrarily given derivatives at a point has been also included.

Notación y terminología

Antes de presentar los resultados que vamos a estudiar, creemos conveniente recopilar las notaciones y terminología que se utilizarán de forma frecuente a lo largo del trabajo.

$\mathbb{N}$	El conjunto de números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{N}_0$	El conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
$\mathbb{R}$	Recta real.
$\mathbb{C}$	Plano complejo.
Ω	Conjunto abierto y conexo del plano complejo.
$\mathcal{H}(\Omega)$	Conjunto de las funciones holomorfas en Ω.
A'	Conjunto de los puntos de acumulación del conjunto A.
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$	Conjunto de las funciones indefinidamente derivables en $\mathbb{R}$.
$D(a, r)$	Disco abierto del plano complejo de centro a y radio r.
$C(a, r)$	Circunferencia del plano complejo de centro a y radio r.
$\overline{D}(a, r)$	Disco cerrado del plano complejo de centro a y radio r.
$\mathcal{H}^\infty$	Espacio de las funciones holomorfas acotadas en $D(0, 1)$.
T	Circunferencia unidad en el plano complejo.
$\mathrm{Im}(z)$	Parte imaginaria del número complejo z.
$\mathrm{Re}(z)$	Parte real del número complejo z.
$\|f\|_\infty$	Norma del supremo de una función f acotada en su dominio.
log	Determinación del logaritmo complejo (la que se especifique).
Log	Determinación principal del logaritmo complejo, que escoge el argumento en el intervalo $[-\pi, \pi)$.
ln	Logaritmo neperiano, función de variable real.

Capítulo 1

Preliminares

Dedicamos el primer capítulo a presentar de forma completa y detallada todos los resultados fundamentales que serán necesarios en el segundo capítulo para la obtención del teorema de Denjoy-Carleman. Principalmente, estos resultados están enmarcados en la teoría de funciones de variable compleja y no pueden ser cubiertos en el temario de la asignatura de tercer curso del Grado.

1.1. Fórmula de Poisson-Jensen

Comenzamos con la fórmula de Poisson-Jensen, que es una consecuencia de la fórmula integral de Poisson para funciones armónicas que se incluye habitualmente en la asignatura antes mencionada.

Teorema 1.1 (Fórmula de Poisson-Jensen). *Sea f continua en $\overline{D}(0,R)$ y holomorfa en $D(0,R)$ con $f(z) \neq 0$ si $z \in C(0,R)$. Sean $a_1, \ldots, a_n$ los ceros de f en $D(0,R)$ y sean $k_1, \ldots, k_n$ sus respectivas multiplicidades. Entonces para cada $z \in D(0,R)$ con $z \neq a_j$, $j = 1, \ldots, n$, se tiene que*

$$\ln|f(z)| = \sum_{j=1}^{n} k_j \ln\left|\frac{R(z-a_j)}{R^2 - \overline{a}_j z}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{z/R}(t) \ln\left|f(Re^{it})\right| dt.$$

Aquí, $P_w(t)$ es el núcleo de Poisson, definido para cada $w \in D(0,1)$ y para todo $t \in \mathbb{R}$ mediante

$$P_w(t) = \frac{1-|w|^2}{|e^{it}-w|^2}.$$

Demostración. Abordaremos la demostración teniendo en cuenta que las homografías de la forma

$$\frac{z-a_j}{1-\overline{a}_j z}$$

transforman biyectivamente $D(0,1)$ en sí mismo, y que para cada z con $|z| = 1$ se tiene que

$$\left|\frac{z - a_j}{1 - \overline{a}_j z}\right| = 1. \tag{1.1}$$

Consideremos, en primer lugar, el caso $R = 1$. Es posible utilizar las homografías indicadas para factorizar f a partir del conocimiento de sus ceros: existe una función g, continua en $\overline{D}(0,1)$ y analítica en $D(0,1)$, que no tiene ceros en $\overline{D}(0,1)$ y tal que

$$f(z) = [\prod_{j=1}^{n}(\frac{z - a_j}{1 - \overline{a}_j z})^{k_j}]g(z).$$

La prueba de este hecho se realiza definiendo g a partir de la anterior igualdad en todos los puntos de $\overline{D}(0,1)$ salvo los ceros de f, y comprobando que dichos ceros son singularidades evitables de g en los que el límite de g no es nunca 0, de donde se concluye lo afirmado. Además, en virtud de (1.1), si $|z| = 1$ tenemos que $|f(z)| = |g(z)|$. Sea z tal que $f(z) \neq 0$. Tomando ahora módulos primero, y logaritmos neperianos después, en la expresión anterior se obtiene que

$$\ln|f(z)| = \sum_{j=1}^{n} k_j \ln\left|\frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}\right| + \ln|g(z)|$$

siendo $g(z) \neq 0$ si $z \in \overline{D}(0,1)$. La fórmula integral de Poisson para funciones armónicas dice que

$$\ln|g(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(t)\ln\left|g(e^{it})\right| dt.$$

Pero $|e^{it}| = 1$, luego $|g(e^{it})| = |f(e^{it})|$, y se obtiene lo que queríamos para $R = 1$.

Para la demostración general, consideramos un $R > 0$ cualquiera y la función $F(w) = f(Rw)$, $|w| \leq 1$. A esta función F se le puede aplicar el razonamiento previo, de modo que

$$\ln|F(w)| = \sum_{j=1}^{n} k_j \ln\left|\frac{w - (a_j/R)}{1 - \overline{a}_j w/R}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_w(t)\ln\left|F(e^{it})\right| dt$$

Si ponemos ahora $z = Rw$ se tiene que

$$\begin{aligned}\ln|f(z)| &= \ln|F(z/R)| \\ &= \sum_{j=1}^{n} k_j \ln\left|\frac{z/R - a_j/R}{1 - \overline{a}_j z/R^2}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{z/R}(t)\ln\left|f(Re^{it})\right| dt,\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Si suponemos que $f(0) \neq 0$ y tomamos $z = 0$ en la fórmula anterior, teniendo en cuenta que $P_0(t) \equiv 1$ obtenemos la llamada *fórmula de Jensen*:

$$\ln|f(0)| = \sum_{j=1}^{n} k_j \ln\left|\frac{a_j}{R}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(Re^{it})\right| dt. \tag{1.2}$$

Nótese que puede suponerse $f(0) \neq 0$ sin pérdida de generalidad, pues en el caso de que f tenga un cero de orden k en 0, se aplica la fórmula a $f(z)/z^k$, obteniéndose la igualdad (1.2) con $k\ln(R) + \ln(|f^{(k)}(0)|/k!)$ como miembro de la izquierda.

1.2. Productos infinitos.

Vamos a introducir ahora las nociones básicas acerca del producto infinito de números complejos y los resultados fundamentales de holomorfía para funciones definidas mediante tales productos.

Definición 1.2. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos y tomamos el n-ésimo producto parcial definido como $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$. Entonces decimos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número complejo P, en este caso escribimos $P = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

Nótese que si la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia P, tal que $P \neq 0$, entonces podemos considerar la sucesión de los $z_n = P_n/P_{n-1}$. Así $P_n/P_{n-1} \to P/P = 1$ cuando $n \to \infty$. De este modo obtenemos que una condición necesaria pero no suficiente para que el producto infinito converja hacia un límite distinto de cero es que $z_n \to 1$. Por otro lado, una forma natural de estudiar el producto infinito es transformarlo en una serie tomando logaritmos. Con este enfoque veremos dos lemas que nos permitirán obtener resultados interesantes acerca de los productos infinitos.

Lema 1.3. *Supongamos que $z_n \neq 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a un límite distinto de cero si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}(z_n)$ converge.*

Recordemos que Log denota la rama del logaritmo especificada por la condición $-\pi \leq \mathrm{Im}(\mathrm{Log}(z)) < \pi$.

Demostración. Sea $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ y sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Log}\, z_k$. Si $S_n \to S$, entonces $P_n = e^{S_n} \to e^S \neq 0$. Recíprocamente, supongamos que $P_n \to P \neq 0$. Sea θ_0 el argumento de P, tomamos entonces $\theta \neq \theta_0$ de manera que la función $\arg_\theta$ es continua en P (se denota por $\arg_\theta$ la determinación del argumento que toma valores en el intervalo $[\theta, \theta + 2\pi)$). Por otro lado, sabemos que $\log_\theta P_n = \ln|P_n| + i\,\arg_\theta(P_n)$ y esto converge cuando $n \to \infty$, por continuidad de ambas funciones, a $\ln|P| + i\,\arg_\theta(P) = \log_\theta P$. Ahora como

$$e^{S_n} = P_n,$$

tenemos

$$S_n = \log_\theta P_n + 2\pi\, i\, l_n$$

para algún entero l_n. Pero

$$S_n - S_{n-1} = \mathrm{Log}(z_n) \to \mathrm{Log}(1) = 0,$$

puesto que, como hemos visto anteriormente, si $P_n \to P \neq 0$ entonces $z_n \to 1$. Por tanto,

$$\log_\theta P_n - \log_\theta P_{n-1} + 2\pi\, i(l_n - l_{n-1}) \to 0.$$

Como la determinación del logaritmo $\log_\theta$ es continua en P tenemos que

$$\log_\theta P_n - \log_\theta P_{n-1} \to \log_\theta P - \log_\theta P = 0.$$

Además $l_n - l_{n-1}$ es un entero, luego como el límite es cero, este entero ha de ser igual a cero a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ en adelante. Esto es, a partir de dicho n_0, l_n es constante, digamos que con valor l, y debido a esto tenemos que

$$S_n \to \log_\theta P + 2\pi i l,$$

con lo que la serie converge como queríamos probar. □

Lema 1.4. *Si $a_n \geq 0$ para todo n, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ converge si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Demostración. Puesto que $1 + x \leq e^x$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$a_1 + \cdots + a_n \leq (1 + a_1)\cdots(1 + a_n) \leq e^{a_1 + \cdots + a_n}.$$

Y así se obtiene lo que se quería probar, pues la acotación (y por tanto la convergencia) de las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ equivale a la acotación (y convergencia) de los productos parciales de $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ □

Definición 1.5. Se dice que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ converge absolutamente si el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$ converge.

Obsérvese que, por el lema anterior, la convergencia absoluta del producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ es equivalente a la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Este hecho se usará en el siguiente resultado.

Lema 1.6. *Si el producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ *converge absolutamente, entonces converge.*

Demostración. Puesto que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$ converge, por el lema 1.4, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge. Por tanto, se tiene que $|z_n| \to 0$, luego podemos suponer que $|z_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$ se tiene

$$\text{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n!} = z\,h(z),$$

donde

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{n-1}}{n!} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \cdots, \quad |z| < 1.$$

Entonces para $m \leq p$ tenemos que:

$$|\sum_{n=m}^{p} \text{Log}\,(1 + z_n)| \leq \sum_{n=m}^{p} |\text{Log}\,(1 + z_n)| = \sum_{n=m}^{p} |z_n||h(z_n)|.$$

Como $\{h(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado (puesto que si $z_n \to 0$ entonces $h(z_n) \to 1$), y $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge y por tanto verifica la condición de convergencia de Cauchy, se tiene que

$$|\sum_{n=m}^{p} \text{Log}\,(1 + z_n)| \to 0, \qquad m, p \to \infty.$$

Así se obtiene, de nuevo por la condición de Cauchy, que $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}\,(1 + z_n)$ es convergente, lo que implica por el lema 1.3 que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ converge, como queríamos demostrar. □

El lema auxiliar que sigue se aplicará en el próximo resultado.

Lema 1.7. *Sean* $w_1, \ldots, w_n$ *valores complejos cualesquiera. Se verifica entonces que*

$$|\prod_{k=1}^{n}(1 + w_k) - 1| \leq \prod_{k=1}^{n}(1 + |w_k|) - 1.$$

Demostración. Razonemos por inducción para $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es obvio pues se tiene:

$$|1 + w_1 - 1| = |w_1| \leq 1 + |w_1| - 1 = |w_1|.$$

Supongamos que se verifica para n, veamos que entonces se cumple para $n+1$. En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned}|\prod_{k=1}^{n+1}(1 + w_k) - 1| &= |\prod_{k=1}^{n}(1 + w_k)(1 + w_{n+1}) - 1| \\ &= |\prod_{k=1}^{n}(1 + w_k) - 1 + w_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1 + w_k)|;\end{aligned}$$

ahora, por hipótesis de inducción, la anterior expresión será menor o igual que

$$\begin{aligned}&\prod_{k=1}^{n}(1 + |w_k|) - 1 + |w_{n+1}||\prod_{k=1}^{n}(1 + w_k)| \\ &\leq \prod_{k=1}^{n}(1 + |w_k|) + |w_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1 + |w_k|) - 1 = \prod_{k=1}^{n+1}(1 + |w_k|) - 1,\end{aligned}$$

con lo que se concluye. □

Teorema 1.8. *Si el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ converge absolutamente, entonces también lo hace cualquier reordenación y al mismo límite. Esto es, si $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$ converge y $P = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$, entonces para cualquier permutación de los índices positivos se tiene que el producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + z_{n_k})$ también converge hacia P.*

Demostración. La convergencia absoluta del producto implica que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$ converge, y esto a su vez ya hemos visto que implica por el lema 1.4 que $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ también converge. Ahora sabemos, en el caso de series, que cualquier reordenamiento de la misma converge y, de nuevo por el lema 1.4, $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_{n_k}|)$ converge. Falta ver que ambos lo hacen al mismo límite P. Para ello tomamos $\varepsilon > 0$ y para cada $j \in \mathbb{N}$ sea Q_j el j-ésimo producto parcial de $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + z_{n_k})$. Ahora elegimos un índice N lo suficientemente grande como para que $\sum_{n=N+1}^{\infty}|z_n| < \varepsilon$ y un J tal que $j \geq J$ implique que $\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{n_1, n_2, \ldots, n_j\}$. Entonces para $j \geq J$ se tiene que

$$\begin{aligned}|Q_j - P| &\leq |Q_j - P_N| + |P_N - P| \\ &= |P_N|\,|\prod_{k\leq j, n_k > N}(1 + z_{n_k}) - 1| + |P_N - P|.\end{aligned}$$

Aplicando el lema previo, obtenemos que

$$\begin{aligned}|Q_j - P| &\leq |P_N| \, | \prod_{k \leq j, n_k > N} (1 + z_{n_k}) - 1| + |P_N - P| \\ &\leq |P_N|(e^{\varepsilon} - 1) + |P_N - P|.\end{aligned}$$

Pero podemos hacer el lado derecho de la desigualdad tan pequeño como queramos tomando ε suficientemente pequeño y N suficientemente grande. Entonces $Q_j \to P$ y se obtiene, de este modo, la demostración del resultado. □

Damos a continuación un resultado de convergencia para un producto infinito de funciones complejas definidas en un conjunto arbitrario.

Proposición 1.9. *Sea $g_1, g_2, \ldots$ una sucesión de funciones acotadas a valores complejos, definida cada una en un conjunto S. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ converge uniformemente en S, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + g_n)$ converge absoluta y uniformemente en S. Más aún, si $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + g_n(z))$, $z \in S$, entonces $f(z) = 0$ para algún $z \in S$ si, y sólo si, $1 + g_n(z) = 0$ para algún n.*

Demostración. Como $|g_n| \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ podemos usar el lema 1.4 que nos asegura que como $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ converge, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |g_n|)$ converge, y por tanto el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + g_n)$ converge absolutamente. Por otra parte, si $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ converge uniformemente en S, existe un N tal que para $n \geq N$ se tiene que $|g_n(z)| < 1$ para todo $z \in S$. Ahora para $r \geq N$ obtenemos

$$\prod_{n=1}^{r}(1 + g_n(z)) = \prod_{n=1}^{N-1}(1 + g_n(z)) \prod_{n=N}^{r}(1 + g_n(z)).$$

Procedemos ahora como en la demostración del lema 1.6: tomamos la misma función h y $m, p \geq N$, y tenemos que

$$|\sum_{n=m}^{p} \mathrm{Log}\,(1 + g_n(z))| \leq \sum_{n=m}^{p} |g_n(z)||h(g_n(z))| \to 0$$

uniformemente en S cuando $m, p \to \infty$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}\,(1 + g_n(z))$ converge uniformemente en S. Como las funciones $g_N, g_{N+1}, \ldots$ están acotadas en S la serie $\sum_{n=N}^{\infty} |g_n(z)||h(g_n(z))|$ está acotada en S y por la desigualdad anterior también lo estará $\sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Log}\,(1 + g_n(z))$. Pero sabemos además que la función exponencial es uniformemente continua en conjuntos acotados de $\mathbb{C}$, luego tenemos que

$$\exp\big(\sum_{n=N}^{r} \mathrm{Log}(1 + g_n(z))\big) \to \exp\big(\sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + g_n(z))\big) \neq 0$$

uniformemente en S cuando $r \to \infty$. Esto prueba la convergencia uniforme en S de $\prod_{n=N}^{\infty}(1 + g_n(z))$. Ahora $1 + g_n(z)$ nunca es 0 en S para $n \geq N$, luego si $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + g_n(z))$, entonces $f(z) = 0$ para algún $z \in S$ si, y sólo si, $1 + g_n(z) = 0$ para algún $n < N$. □

Nota 1.10. En las condiciones del resultado anterior, el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |g_n(z)|)$$

también converge uniformemente en S, pues basta aplicar el mismo argumento a las funciones $|g_1|, |g_2|, \ldots$

Incluimos por último el teorema de holomorfía de productos infinitos que será de utilidad en adelante.

Teorema 1.11. *Sean $f_1, f_2, \ldots$ funciones analíticas en Ω. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω, entonces*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

define una función f que es analítica en Ω. Más aún, para cualquier $z \in \Omega$ se tiene $f(z) = 0$ si, y sólo si, $f_n(z) = 0$ para algún n.

Demostración. En virtud de la proposición 1.9, aplicada a las funciones $g_n = f_n - 1$, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω, por lo tanto el teorema de Weierstrass garantiza la holomorfía de f en Ω. El último enunciado del teorema es de nuevo consecuencia de la proposición 1.9. □

1.3. Holomorfía bajo el signo integral

Proporcionamos en esta sección dos versiones del teorema de holomorfía bajo el signo integral que se necesitarán más adelante. El primero de ellos se incluye necesariamente en la asignatura de Variable Compleja del Grado en Matemáticas, pues se utiliza en la demostración del teorema general de Cauchy siguiendo la elegante técnica de J. Dixon, que apareció en 1971 (ver [7], y su presentación en el libro de Ash y Novinger [1, Sección 3.3]). No incluiremos su demostración por ser una consecuencia directa del teorema de Fubini, de la fórmula integral de Cauchy para un disco y del lema básico de derivación de integrales de tipo Cauchy.

Lema 1.12. *Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y sea φ una función compleja continua en el espacio producto $\Omega \times [a,b]$. Supongamos que para cada t fijo la función que envía cada z en $\varphi(z,t)$ es analítica en Ω. Si se define F en Ω por*

$$F(z) = \int_a^b \varphi(z,t)dt, \quad z \in \Omega$$

entonces F es analítica en Ω y

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z,t)dt, \qquad z \in \Omega.$$

Una segunda versión, que necesitaremos para garantizar la holomorfía de transformadas de Laplace, se puede probar fácilmente a partir del teorema de derivación de integrales paramétricas de Leibniz y del uso de las condiciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 1.13 (Teorema de holomorfía bajo el signo integral)**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, sea A un subespacio medible de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \times A \longrightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que:*

(i) Para todo $z \in U$ la función $f_z : A \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_z(x) = f(z,x)$ es medible Lebesgue.

(ii) Para todo $x \in A$ la función $f_x : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_x(z) = f(z,x)$ es holomorfa en U.

(iii) Para todo $z_0 \in U$ existe un entorno V de z_0 contenido en U y una función $h : A \longrightarrow [0,\infty)$ integrable Lebesgue en A tal que

$$|f(z,x)| \leq h(x) \quad \text{para todo } (z,x) \in V \times A.$$

Entonces, la función $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \int_A f(z,x)dx, \qquad z \in U,$$

es holomorfa en U, y además

$$F'(z) = \int_A \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)dx, \qquad z \in U.$$

1.4. Teorema de Paley-Wiener

Los teoremas de Paley-Wiener, de los que se pueden encontrar numerosas versiones, caracterizan las funciones, holomorfas en ciertos dominios del plano complejo y que son transformadas de Fourier de funciones de espacios de Lebesgue adecuados, en términos de propiedades de crecimiento, acotación o integrabilidad de dichas funciones. Para probar el resultado de este tipo cuyo uso será crucial en la demostración del teorema de Denjoy-Carleman, será necesario recordar el siguiente teorema, clásico en el estudio de la transformada de Fourier incluido en la asignatura optativa Análisis Real de cuarto curso del Grado en Matemáticas.

Teorema 1.14 (Teorema de Plancherel). *Existe un isomorfismo de espacios de Hilbert $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ tal que:*

(i) Si $f \in L^1 \cap L^2$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx$$

(es decir, $\mathcal{F}(f)$ es la transformada de Fourier de f).

(ii) $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$, para toda función f de L^2.

(iii) Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ se verifica que

$$\mathcal{F}(f)(t) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-itx} dx,$$
$$f(x) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} \mathcal{F}(f)(t) e^{itx} dt.$$

En particular, si $f \in L^2$ y $\mathcal{F}(f) \in L^1$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(t) e^{itx} dt$$

en casi todo punto.

Estamos en condiciones de probar el siguiente resultado fundamental, que caracteriza las funciones enteras de tipo exponencial a lo sumo $A > 0$ (es decir, que satisfacen estimaciones como las de (1.3)) y cuya restricción al eje real es de cuadrado integrable como aquellas que son transformadas de Fourier de funciones de cuadrado integrable y soporte compacto contenido en $[-A, A]$.

Teorema 1.15 (Teorema de Paley-Wiener)**.** *Sea f una función entera, y supongamos que existen constantes positivas A y C tales que*

$$|f(z)| \leq Ce^{A|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.3}$$

y que además

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty. \tag{1.4}$$

Entonces existe una $F \in L^2(-A, A)$ tal que

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)e^{itz} dt$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Definimos $f_\varepsilon(x) = f(x)e^{-\varepsilon|x|}$, para $\varepsilon > 0$ y x real. En la segunda parte de la prueba vamos a demostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)e^{-itx} dx = 0, \quad t \text{ real}, |t| > A. \tag{1.5}$$

Veamos cómo se concluye el argumento a partir de esta información. Observemos que para $\varepsilon > 0$,

$$\|f_\varepsilon - f\|_2 = \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x) - f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |e^{-\varepsilon|x|} - 1|^2 dx,$$

y por el teorema de la convergencia dominada el término de la derecha tiende a 0 cuando $\varepsilon \to 0$. De acuerdo con la afirmación (*ii*) del Teorema de Plancherel, las transformadas de Fourier de f_ε convergen en L^2 a la transformada de Fourier de f. Por otro lado sabemos que entonces existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ de modo que $\mathcal{F}(f_{\varepsilon_n})$ converge en casi todo punto a la función límite. Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{F}(f_{\varepsilon_n})(t) = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon_n}(x)e^{-itx} dx$$

y que el término de la derecha es igual a 0, debido a (1.5), para todo t tal que $|t| > A$, se tiene que $\mathcal{F}(f)$ es igual a 0 en casi todo punto de $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$, por lo que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ en virtud de la desigualdad de Hölder. Además, por hipótesis $f \in L^2(\mathbb{R})$, por lo que podemos aplicar el resultado (*iii*) del teorema de Plancherel y obtenemos que

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(t)e^{itx} dt$$

en casi todo punto del eje real. Observemos ahora que los dos miembros de la igualdad anterior son funciones enteras (el segundo por aplicación directa del teorema 1.13 de holomorfía bajo el signo integral) que coinciden en un conjunto con puntos de acumulación, luego se tiene por el principio de identidad que ambas coinciden en todo el plano complejo, como queríamos probar.

Procedamos ahora a probar la expresión (1.5). Para ello vamos a definir para cada real α el camino Γ_α parametrizado por

$$\Gamma_\alpha(s) = se^{i\alpha}, \quad 0 \le s < \infty, \tag{1.6}$$

cuyo soporte es la semirrecta que parte del origen con argumento α. Definamos también para cada α el semiplano

$$\Pi_\alpha = \left\{ w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(we^{i\alpha}) > A \right\},$$

y, por último, si $w \in \Pi_\alpha$ definimos la función

$$\Phi_\alpha(w) = \int_{\Gamma_\alpha} f(z) e^{-wz} dz = e^{i\alpha} \int_0^\infty f(se^{i\alpha}) e^{-wse^{i\alpha}} ds.$$

Por (1.3) y (1.6) tenemos que

$$\begin{aligned} |f(se^{i\alpha})e^{-wse^{i\alpha}}| &\le Ce^{A|se^{i\alpha}|} e^{\mathrm{Re}(-wse^{i\alpha})} \le \\ &\le e^{As - \mathrm{Re}(wse^{i\alpha})} \le Ce^{-(\mathrm{Re}(we^{i\alpha}) - A)s}. \end{aligned}$$

Con esta acotación podemos asegurar que Φ_α es holomorfa en Π_α, gracias al teorema 1.13 de holomorfía bajo el signo integral: la única condición que hay que verificar es *(iii)*, y para ello basta observar que, fijado un punto $w_0 \in \Pi_\alpha$, en un disco V de radio pequeño centrado en w_0 y contenido en Π_α se puede conseguir que para todo $w \in V$ se tenga $\mathrm{Re}(we^{i\alpha}) > A_0$ para un valor $A_0 > A$, de modo que la función $Ce^{-(A_0 - A)s}$, integrable en $(0, \infty)$, acota uniformemente en V al integrando que aparece en Φ_α.

Por otro lado, se tiene que para $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$ es posible extender los semiplanos de definición respectivos, que serían $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) > A\}$ y $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) < -A\}$, poniendo

$$\begin{aligned} \Phi_0(w) &= \int_0^\infty f(x) e^{-wx} dx, \quad \mathrm{Re}(w) > 0, \\ \Phi_\pi(w) &= -\int_{-\infty}^0 f(x) e^{-wx} dx, \quad \mathrm{Re}(w) < 0. \end{aligned}$$

Estas funciones son holomorfas en sus respectivos dominios haciendo uso de la condición (1.4), es decir, la función f restringida al eje real pertenece a $L^2(\mathbb{R})$, combinado con la desigualdad de Hölder, pudiéndose de nuevo acotar uniformemente el integrando en un entorno adecuado de cada punto del semiplano por una función integrable.

Ahora bien, para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)e^{-itx}dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-itx+\varepsilon x}dx + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-itx-\varepsilon x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-x(it-\varepsilon)}dx + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x(it+\varepsilon)}dx \\ &= \Phi_0(it+\varepsilon) - \Phi_\pi(it-\varepsilon), \end{aligned} \tag{1.7}$$

y por tanto, para demostrar (1.5) tendremos que probar que

$$\Phi_0(it+\varepsilon) - \Phi_\pi(it-\varepsilon) \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0$$

si $t > A$ o si $t < -A$. Para verlo vamos a probar que estas funciones Φ_α son prolongaciones analíticas unas de otras siempre que sus dominios tengan intersección no vacía. Consideremos entonces valores α, β reales tales que $0 < \beta - \alpha < \pi$, y elegimos

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \eta = \cos\big(\frac{\beta-\alpha}{2}\big) > 0.$$

Si consideramos $w = |w|e^{-i\gamma}$ tenemos que

$$\operatorname{Re}(we^{i\alpha}) = |w|\cos(\gamma-\alpha) = |w|\eta,$$

y de la misma manera se obtiene también que

$$\operatorname{Re}(we^{i\beta}) = |w|\eta.$$

Como $\operatorname{Re}(we^{i\alpha}) = |w|\eta = \operatorname{Re}(we^{i\beta})$ se tiene que $w \in \Pi_\alpha \cap \Pi_\beta$ si $|w| > \frac{A}{\eta}$. Para cada uno de estos $w = |w|e^{-i\gamma}$ veamos que $\Phi_\alpha(w) = \Phi_\beta(w)$ y por el principio de identidad las funciones coincidirán en la intersección de los semiplanos de definición de dichas funciones.

Vamos a considerar la integral

$$\int_\Gamma f(z)e^{-wz}dz$$

siendo $\Gamma(t) = re^{it}$ y $\alpha \le t \le \beta$, cuyo soporte es el arco de circunferencia de centro 0 y radio r que une las semirrectas de argumentos α y β, respectivamente. Es claro que

$$\int_{[0,r]e^{i\alpha}} f(z)e^{-wz}dz + \int_\Gamma f(z)e^{-wz}dz = \int_{[0,r]e^{i\beta}} f(z)e^{-wz}dz. \tag{1.8}$$

Podemos acotar el integrando del segundo sumando del término de la izquierda: si $z = re^{it}$ es un punto del soporte de Γ, se tiene que

$$\operatorname{Re}(-wz) = -|w|r\cos(t-\gamma) \le -|w|r\eta,$$

de modo que

$$|f(z)e^{-wz}| \le Ce^{(A-|w|\eta)r},$$

y

$$\left|\int_\Gamma f(z)e^{-wz}dz\right| \le Ce^{(A-|w|\eta)r}r(\beta-\alpha).$$

Ahora bien, como $|w| > \frac{A}{\eta}$, el coeficiente de r en el exponente anterior es negativo, luego la integral tiende a 0 cuando $r \to \infty$. Como consecuencia, pasando al límite cuando $r \to \infty$ en la expresión (1.8) se deduce que

$$\int_{\Gamma_\alpha} f(z)e^{-wz}dz = \int_{\Gamma_\beta} f(z)e^{-wz}dz$$

si $|w| > \frac{A}{\eta}$ y $w = |w|e^{-i\gamma}$, como queríamos, y por el principio de identidad Φ_α y Φ_β coinciden en la intersección de los semiplanos de definición. Para concluir, observemos que cuando $t > A$ los complejos $\pm\varepsilon + it \in \Pi_{-\pi/2}$, y podemos sustituir, en la expresión (1.7), tanto Φ_0 como Φ_π por $\Phi_{-\pi/2}$. Se obtiene entonces que

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)e^{-itx}dx = \Phi_{-\pi/2}(\varepsilon+it) - \Phi_{-\pi/2}(-\varepsilon+it)$$

y esto, cuando $\varepsilon \to 0$, tiende (por continuidad) hacia

$$\Phi_{-\pi/2}(it) - \Phi_{-\pi/2}(it) = 0.$$

Análogamente, si $t < -A$ se tiene que $\pm\varepsilon + it \in \Pi_{\pi/2}$ y podemos sustituir en (1.7) tanto Φ_0 como Φ_π por $\Phi_{\pi/2}$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)e^{-itx}dx = \Phi_{\pi/2}(\varepsilon+it) - \Phi_{\pi/2}(-\varepsilon+it),$$

y haciendo $\varepsilon \to 0$ obtenemos

$$\Phi_{\pi/2}(it) - \Phi_{\pi/2}(it) = 0.$$

Concluimos que el límite (1.5) es 0 y queda probado el resultado. $\square$

Capítulo 2

Clases ultradiferenciables en la recta

Este capítulo contiene los resultados fundamentales del trabajo. Su objetivo primordial es estudiar algunos enunciados relativos a la inyectividad o sobreyectividad de la aplicación de Borel $\mathcal{B}$ en subespacios del espacio vectorial $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de las funciones complejas indefinidamente derivables en la recta real, siendo dicha aplicación la definida por

$$\mathcal{B}(f) := (f^{(n)}(0))_{n=0}^\infty.$$

Si V es un subespacio tal, la inyectividad de $\mathcal{B} : V \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ significa que una función f de V queda unívocamente determinada cuando se conoce la sucesión de derivadas de f en el punto 0 o, de otro modo, que dos funciones de V cuyas derivadas sucesivas coinciden en 0 han de ser idénticas. La sobreyectividad indica que es posible prefijar a discreción la sucesión de derivadas en 0 de un elemento de V.

2.1. Teorema de Borel en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Comenzamos esta sección con un ejemplo elemental que muestra que $\mathcal{B} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ no es inyectiva. Esto contrasta con lo conocido para las funciones de variable compleja, pues en virtud del principio de identidad, si Ω es un dominio de $\mathbb{C}$, la aplicación que envía cada función f holomorfa en Ω en $(f^{(n)}(0))_{n=0}^\infty$ es inyectiva.

Ejemplo 2.1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Obviamente, esta función es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Veamos que en el punto 0 se tiene que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Es claro que todas las derivadas sucesivas de f (que existen en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) tienen límite lateral por la izquierda en 0 y vale 0. Por otra parte, se puede probar fácilmente, razonando por inducción, que

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x}$$

para cada $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, donde P_n es un polinomio de grado $2n$. Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha \geq 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} e^{-1/x} = \lim_{t\to\infty} t^\alpha e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^\alpha}{e^t} = 0,$$

luego

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} = 0.$$

Así pues, el teorema de los incrementos finitos y un argumento inductivo permiten deducir que las sucesivas derivadas de la función en el punto 0 son cero y por tanto $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Sin embargo, f no es la función constante e igual a 0, por tanto la aplicación $\mathcal{B}$ no es inyectiva en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Cabe mencionar que, obviamente, la función f es analítica en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (admite una representación local en serie de potencias centrada en un punto arbitrario $x_0 \neq 0$), pero no lo es en $x_0 = 0$.

Pasamos a enunciar el resultado de sobreyectividad de la aplicación de Borel en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Teorema 2.2 (Teorema de Borel)**.** *Para toda sucesión de números complejos* $\{a_n\}_{n=0}^\infty$*, existe una función de clase* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *tal que*

$$f^{(n)}(0) = a_n, \qquad n \geq 0.$$

Demostración. En primer lugar vamos a demostrar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con soporte $\mathrm{sop}(\varphi) \subset [-2, 2]$, tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y con $\varphi|_{[-1,1]} \equiv 1$.

Sea $f_1(x) = e^{-1/x}\mathcal{X}_{[0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, donde $\mathcal{X}_{[0,\infty)}$ es la función característica del intervalo $[0, \infty)$. Como se acaba de ver en el ejemplo previo, $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Sea ahora $f_2(x) = f_1(x)f_1(1 - x)$, $x \in \mathbb{R}$. De este modo, f_2 es tal que $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f_2(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y su soporte $\mathrm{sop}(f_2)$ es claramente el intervalo $[0, 1]$. Como consecuencia, $\int_0^1 f_2 > 0$. Llamemos a a este valor, y sea ahora $f_3 = \dfrac{1}{a} f_2$, de modo que $\mathrm{sop}(f_3) = [0, 1]$ y $\int_0^1 f_3 = 1$.

Definamos

$$f_4(x) = \begin{cases} f_3(-x-1) & \text{si } t \in [-2,-1], \\ -f_3(x-1) & \text{si } t \in [1,2], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De esta manera , $f_4 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ es una función impar, no negativa y con soporte $[-2,-1] \cup [1,2]$. Considerando finalmente la función φ dada por

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_4(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

tenemos que, en virtud del teorema fundamental del cálculo y por las propiedades de la función f_4, la función φ verifica las propiedades deseadas.

A continuación, dada la sucesión arbitraria de números complejos $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definimos para cada natural n la función

$$g_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde las constantes $\lambda_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ se determinarán. Observemos que si $|\lambda_n x| \geq 2$ entonces $\varphi(\lambda_n x) = 0$ y por tanto $g_n(x) = 0$. Como consecuencia,

$$\operatorname{sop}(g_n) \subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2/\lambda_n\}.$$

Notemos además que si $|\lambda_n x| \leq 1$, $\varphi(\lambda_n x) = 1$, lo cual implica que $g_n(x) = \dfrac{a_n}{n!}x^n$ en un entorno de 0, y por tanto

$$g_n^{(k)}(0) = \begin{cases} a_n & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Veamos ahora que siempre existe un λ_n tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}, \quad 0 \leq k \leq n-1. \tag{2.1}$$

Según la fórmula de Leibnitz se tiene que:

$$\begin{aligned} g_n^{(k)}(x) &= \frac{a_n}{n!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (x^n)^{(p)} (\varphi(\lambda_n x))^{(k-p)} \\ &= \frac{a_n}{n!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} \lambda_n^{k-p} \varphi^{(k-p)}(\lambda_n x). \end{aligned}$$

Pongamos
$$B_n := \max_{0\le j\le n-1}\max_{y\in[-2,2]}|\varphi^{(j)}(y)| < \infty.$$
Entonces, ocurre que
$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n^{(k)}(x)| = \sup_{|x|\le 2/\lambda_n}|g_n^{(k)}(x)| &\le |a_n|\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\frac{2^{n-p}}{|\lambda_n|^{n-p}}|\lambda_n|^{k-p}B_n\\ &\le 2^n|a_n|\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\frac{1}{|\lambda_n|^{n-k}}B_n,\end{aligned}$$
pues $(n-p)! \ge 1$. Si elegimos λ_n tal que $|\lambda_n| \ge 1$, entonces $|\lambda_n|^{n-k} \ge |\lambda_n|$ para $k \le n-1$, y resulta que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n^{(k)}(x)| \le \frac{2^n|a_n|B_n}{|\lambda_n|}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} \le \frac{2^{n+k}|a_n|B_n}{|\lambda_n|} \le \frac{4^n|a_n|B_n}{|\lambda_n|}.$$
Por lo tanto, basta tomar
$$|\lambda_n| \ge \max\{1, 8^n|a_n|B_n\}$$
para obtener (2.1).

Veamos ahora que la función
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$
es la solución al problema que planteábamos. Por la acotación (2.1) vista anteriormente, particularizada para $k = 0$, es claro que la serie converge normalmente en $\mathbb{R}$, luego la función f está bien definida y es continua en $\mathbb{R}$. De nuevo por la acotación anterior, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene que la serie $\sum_{n>k} g_n^{(k)}(x)$ converge normalmente en $\mathbb{R}$, con lo que f es indefinidamente derivable y para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Entonces, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, y por último,
$$f_n^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(0) = g_k^{(k)}(0) = a_k$$
para todo $k \in \mathbb{N}_0$. □

Nota 2.3. La solución del problema anterior se puede construir con soporte compacto. Para ello, basta tomar $F = f\cdot\varphi$, siendo las funciones φ y f aquellas que hemos construido en el teorema previo.

2.2. Clases ultradiferenciables en $\mathbb{R}$

Como se ha visto, la no inyectividad de $\mathcal{B}$ en el espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ contrasta con su inyectividad en el espacio de funciones holomorfas en un dominio del plano. Con el objeto de aproximarnos al problema de determinar subespacios de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ en los que $\mathcal{B}$ sea inyectiva, recordamos ahora una propiedad de crecimiento de las derivadas sucesivas de las funciones holomorfas, cuya prueba incluimos.

Teorema 2.4 (Desigualdades de Cauchy)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}(D(a,R))$ y suponemos que existe $M > 0$ tal que*

$$|f(z)| \leq M$$

para todo $z \in D(a,R)$. Entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\,M}{R^n} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Demostración. Para la demostración de este resultado vamos a utilizar la fórmula integral de Cauchy. Sea $0 < r < R$ y sea γ_r la curva que parametriza la circunferencia de radio r y centro a. Esto es:

$$\gamma_r(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Por la fórmula integral de Cauchy sabemos que:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \operatorname{long}(\gamma_r) \max_{z \in \gamma_r^*} \left| \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \right|,$$

de donde

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{n!\,M}{r^n}.$$

Tomando límites cuando $r \to R$ se deduce que:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\,M}{R^n}.$$

□

Obsérvese que el crecimiento de las derivadas en el punto a está gobernado por el factorial, infinito de mayor orden que $1/R^n$ para cualquier R. Por supuesto, si f no admite una cota global en $D(a,R)$ basta razonar para un radio $r < R$ (como en la demostración) y se obtiene (2.2), siendo $M = \text{máx}_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Un razonamiento alternativo se basa en la analiticidad de la función. Como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \quad z \in D(a,R),$$

el radio de convergencia ρ de la serie, que se calcula como

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \left(\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \right)^{1/n},$$

será al menos R, es decir,

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{R}.$$

Ahora si tomamos $s > 1/R$, por definición de límite superior existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$, $\left|f^{(n)}(a)\right| \leqslant s^n n!$, y tomando una $A > 0$ adecuada se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leqslant A\, s^n\, n!,$$

estimaciones análogas a las anteriormente obtenidas.

A la vista de este resultado cabe plantearse la introducción de clases de funciones en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mediante la imposición de condiciones de crecimiento para sus derivadas sucesivas, expresadas en términos de una sucesión numérica que juegue el papel que el factorial desempeñó en el caso de las funciones analíticas. Introduzcamos dichas clases, denominadas ultradiferenciables.

Definición 2.5. Sea $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de números reales positivos. Denotaremos por $\mathcal{C}\{M_n\}$ a la clase de todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y que verifican desigualdades de la forma:

$$\|D^n f\|_\infty \leq \beta_f\, B_f^n\, M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

En esta definición $D^n f$ representa la n-ésima derivada de f si $n \geq 1$ y $D^0 f = f$. La norma es la del supremo y β_f y B_f son constantes positivas que dependen de f pero no de n. La clase así definidas se denomina la clase ultradiferenciable asociada a $\{M_n\}_{n=0}^\infty$. Comenzamos probando algunos hechos elementales.

Proposición 2.6. *Sea $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de números positivos, y consideremos la clase ultradiferenciable $\mathcal{C}\{M_n\}$. Entonces:*

(i) Para cada $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$ se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\|D^n f\|_\infty}{M_n} \right\}^{\frac{1}{n}} \leq B_f. \tag{2.4}$$

(ii) $\mathcal{C}\{M_n\}$ es un espacio vectorial complejo.

(iii) $\mathcal{C}\{M_n\}$ es invariante por transformaciones afines.

Demostración. (i) Partiendo de la expresión (2.3) se tiene, de hecho, que

$$\frac{\|D^n f\|_\infty}{M_n} \leq \beta_f \, B_f^n,$$

luego

$$\left\{ \frac{\|D^n f\|_\infty}{M_n} \right\}^{\frac{1}{n}} \leq \beta_f^{\frac{1}{n}} B_f, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces haciendo $n \to \infty$ se tiene que $\beta_f^{\frac{1}{n}} \to 1$ y por tanto obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\|D^n f\|_\infty}{M_n} \right\}^{\frac{1}{n}} \leq B_f,$$

como queríamos probar.

(ii) Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y sean $f, g \in \mathcal{C}\{M_n\}$, veamos que $\alpha_1 f + \alpha_2 g \in \mathcal{C}\{M_n\}$. Si $f, g \in \mathcal{C}\{M_n\}$ entonces existen constantes positivas β_f, β_g, B_f y B_g tales que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\|D^n f\|_\infty \leq \beta_f \, B_f^n \, M_n, \qquad \|D^n g\|_\infty \leq \beta_g \, B_g^n \, M_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|\alpha_1 D^n f + \alpha_2 D^n g\|_\infty &\leq \|\alpha_1 D^n f\|_\infty + \|\alpha_2 D^n g\|_\infty \\ &= |\alpha_1| \, \|D^n f\|_\infty + |\alpha_2| \, \|D^n g\|_\infty \\ &\leq (\beta_f^1 B_f^n + \beta_g^1 B_g^n) M_n, \end{aligned}$$

siendo

$$\beta_f^1 = |\alpha_1| \beta_f, \qquad \beta_g^1 = |\alpha_2| \beta_g.$$

Llamamos ahora

$$\beta_{f+g}^1 = \max\{\beta_f^1, \beta_g^1\}, \qquad B_{f+g} = \max\{B_f, B_g\},$$

de modo que

$$\|\alpha_1 D^n f + \alpha_2 D^n g\|_\infty \leq 2\beta^1_{f+g} B^n_{f+g} M_n.$$

Tomando

$$\beta_{f+g} = 2\beta^1_{f+g},$$

tenemos que

$$\|\alpha_1 D^n f + \alpha_2 D^n g\|_\infty \leq \beta_{f+g} B^n_{f+g} M_n,$$

y así, $\alpha_1 f + \alpha_2 g \in \mathcal{C}\{M_n\}$.

(iii) Si $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$ y se define $g(x) = f(ax+b)$, compuesta de f con la transformación afín $ax+b$, se tiene que:

$$D^n g(x) = D^n f(ax+b) = a^n D^n f(ax+b), \quad n \geq 1, x \in \mathbb{R}.$$

Esto implica que:

$$\|D^n g\|_\infty = a^n \|D^n f\|_\infty \leq a^n \beta_f B^n_f M_n = \beta_f (aB_f)^n M_n.$$

Llamando $B_g = aB_f$ y $\beta_g = \beta_f$ tenemos lo que queríamos probar,

$$\|D^n g\|_\infty \leq \beta_g B^n_g M_n,$$

y por tanto $g \in \mathcal{C}\{M_n\}$. □

Si se desea obtener nuevas propiedades de estabilidad para estas clases ultradiferenciables es necesario imponer una condición a la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^\infty$.

Definición 2.7. Se dice que la sucesión $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ es logarítmicamente convexa si

$$M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

La razón de esta denominación es clara: la sucesión $\{\ln(M_n)\}_{n=0}^\infty$ verifica la condición de convexidad

$$\ln(M_n) \leq \frac{1}{2}\big(\ln(M_{n-1}) + \ln(M_{n+1})\big), \quad n \geq 1.$$

Nota 2.8. Aunque no será incluido en este trabajo, un teorema clásico debido a S. Mandelbrojt (ver [13, 11]) muestra que se puede asociar a una sucesión arbitraria de números reales positivos $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ otra sucesión $\{M_n^*\}_{n=0}^\infty$ logarítmicamente convexa de modo que $\mathcal{C}\{M_n\} = \mathcal{C}\{M_n^*\}$, lo que hace que dicha propiedad de convexidad pueda ser incluida sin pérdida de genralidad en el estudio de estas clases. La sucesión $\{M_n^*\}_{n=0}^\infty$ se denomina la regularizada logarítmicamente convexa de $\{M_n\}_{n=0}^\infty$.

Por simplicidad en la escritura de alguna razonamientos, supondremos de ahora en adelante, y sin pérdida de generalidad, que $M_0 = 1$. Obsérvese que dada $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, si definimos $M'_n = M_n/M_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene obviamente que $M'_0 = 1$ y $\mathcal{C}\{M_n\} = \mathcal{C}\{M'_n\}$, siendo válidas las relaciones

$$\beta'_f = \beta_f M_0, \qquad B'_f = B_f,$$

entre las respectivas constantes asociadas a una función f perteneciente a una cualquiera de ambas clases.

Es también claro que esas sucesiones $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{M'_n\}_{n=0}^{\infty}$ son simultáneamente logarítmicamente convexas o no, por lo que adoptaremos sin ambigüedad ambas restricciones de normalización.

Nota 2.9. De ahora en adelante, $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ siempre denotará una sucesión de números positivos logarítmicamente convexa y con $M_0 = 1$.

Antes de obtener la estabilidad de la clase bajo el producto de funciones, veamos un lema auxiliar.

Lema 2.10. *Sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión logarítmicamente convexa y con $M_0 = 1$. Entonces, para todos $j, l \in \mathbb{N}_0$ se tiene que*

$$M_j M_l \le M_{j+l}.$$

Demostración. Por simetría, bastará probarlo para $0 \le j \le l$.

En primer lugar, si $j = 0$ la desigualdad es trivialmente cierta porque $M_0 = 1$. Supongamos entonces que $1 \le j \le l$. De acuerdo con la convexidad logarítmica se tiene que

$$\begin{aligned}
M_j^2 &\le M_{j-1} M_{j+1}, \\
M_{j+1}^2 &\le M_j M_{j+2}, \\
&\vdots \\
M_{l-1}^2 &\le M_{l-2} M_l, \\
M_l^2 &\le M_{l-1} M_{l+1}.
\end{aligned}$$

Multiplicando miembro a miembro estas desigualdades y simplifcando se obtiene que

$$M_j M_l \le M_{j-1} M_{l+1},$$

y siempre que $j - 1 \ge 1$ se puede iterar este proceso, obteniendo

$$M_{j-1} M_{l+1} \le M_{j-2} M_{l+2},$$

y así sucesivamente hasta llegar a

$$M_j M_l \leq M_{j-j} M_{l+j} = M_0 M_{l+j} = M_{l+j},$$

como queríamos. $\square$

Teorema 2.11. *$\mathcal{C}\{M_n\}$ es un álgebra, con respecto al producto habitual de funciones.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{C}\{M_n\}$ y sean β_f, β_g, B_f y B_g las correspondientes constantes. Por la regla de diferenciación del producto se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$D^n(fg) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (D^j f)(D^{n-j} g),$$

luego

$$\|D^n(fg)\|_\infty \leq \beta_f \beta_g \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_f^j B_g^{n-j} M_j M_{n-j}. \tag{2.5}$$

Si probamos ahora que $M_j M_{n-j} \leq M_n$ para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ habremos acabado pues, en virtud de la fórmula del binomio de Newton,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_f^j B_g^{n-j} = (B_f + B_g)^n,$$

y tendríamos que (2.5) conduce a

$$\|D^n(fg)\|_\infty \leq \beta_f \beta_g (B_f + B_g)^n M_n,$$

por lo que $fg \in \mathcal{C}\{M_n\}$ como queríamos. Resta solamente observar que la desigualdad $M_j M_{n-j} \leq M_n$ para $0 \leq j \leq n$ es equivalente, poniendo $n = l+j$, a que se tenga que $M_j M_l \leq M_{j+l}$ para todos $j, l \geq 0$, lo que se obtuvo en el lema previo. $\square$

2.3. Estabilidad por composición.

Dedicamos esta sección a la prueba de la estabilidad por composición de estas clases ultradiferenciables, siempre bajo la hipótesis no restrictiva de convexidad logarítmica para la sucesión que define a la clase. Aunque la prueba clásica de este hecho se suele basar en la fórmula de Faà di Bruno para la derivada $n-$ésima de una composición de funciones, hemos preferido seguir una demostración más reciente debida a T. Yamanaka [16], que descansa en una expresión alternativa para dichas derivadas.

Lema 2.12 (Fórmula de Yamanaka). *Sean I y J intervalos abiertos. Sean $g : I \longrightarrow J$ y $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en los respectivos intervalos. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada $x \in I$ se tiene que*

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(g(x)) \left\{ \frac{\partial^{n-j}}{\partial h^{n-j}} \left[\int_0^1 g'(x + \theta h) d\theta \right]^j \right\}_{h=0}.$$

Demostración. Sea $a \in I$, $b = g(a)$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$. Si tomamos

$$u(h) = g(a + h) - g(a), \tag{2.6}$$

se tiene que

$$(f \circ g)(a + h) - (f \circ g)(a) = f(g(a + h)) - f(g(a)),$$

y esto último, por (2.6), es igual a

$$f(b + u(h)) - f(b) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(b)}{j!}(u(h))^j + \mathcal{R}_n(f, b)(u(h)), \tag{2.7}$$

donde se ha aplicado la fórmula de Taylor, siendo $\mathcal{R}_n(f, b)(u(h))$ el resto de Taylor, para el que se tiene

$$\mathcal{R}_n(f, b)(u(h)) = o(u(h)^n), \quad h \to 0.$$

Si ponemos

$$v(h) := \int_0^1 g'(a + \theta h) d\theta = \frac{1}{h} g(a + \theta h)\Big|_{\theta=0}^{\theta=1} = \frac{1}{h}\left[g(a + h) - g(a)\right] = \frac{1}{h} u(h),$$

y

$$v_j(h) := v(h)^j, \quad j \in \mathbb{N},$$

entonces

$$u(h)^j = v_j(h) h^j,$$

y por la fórmula de Taylor para v_j en 0,

$$v_j(h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} v_j^{(k)}(0) h^k + o(h^{n-1}), \quad h \to 0.$$

Además, como $u(h) = hv(h)$, se tiene que

$$\frac{o(u(h)^n)}{h^n} = \frac{o(u(h)^n)}{u(h)^n} \frac{u(h)^n}{h^n} = \frac{o(u(h)^n)}{u(h)^n} v(h)^n \to 0, \quad h \to 0,$$

por lo que $o(u(h)^n) = o(h^n)$. Llevando estas expresiones a (2.7), se tiene que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(b)}{j!} h^j \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} v_j^{(k)}(0) h^k + o(h^n) \\ &= \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{f^{(j)}(b) v_j^{(r-j)}(0)}{j!(r-j)!} \right) h^r + o(h^n).\end{aligned}$$

Ahora bien, en virtud de la fórmula de Taylor, ha de ser

$$(f \circ g)(a+h) = \sum_{r=1}^{n} \frac{(f \circ g)^{(r)}(a)}{r!} h^r + o(h^n),$$

de donde se deduce que

$$(f \circ g)^{(r)}(a) = \sum_{r=1}^{n} \binom{r}{j} f^{(j)}(b) v_j^{(r-j)}(0),$$

como queríamos. $\square$

Nota 2.13. En la prueba del siguiente resultado se supondrá que la sucesión $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ se puede escribir como $M_n = n!\widehat{M}_n$, siendo $(\widehat{M}_n)_{n=0}^{\infty}$ logarítmicamente convexa. Entonces, como producto de dos sucesiones logarítmicamente convexas, resulta que $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ es también logarítmicamente convexa (este hecho es de comprobación inmediata). Como se verá más adelante, la sucesión $(\widehat{M}_n^{1/n})_{n=1}^{\infty}$ es creciente, luego existe un $C > 0$ tal que $\widehat{M}_n^{1/n} \geq C$, y por tanto $\widehat{M}_n \geq C^n$ y $M_n \geq C^n n!$. Como consecuencia, se deduce que $\mathcal{C}\{M_n\}$ contiene a la clase de las funciones analíticas en $\mathbb{R}$, como también se comprobará en la siguiente sección. Esta no es una restricción seria para el enunciado, pues estamos interesados en clases con esta propiedad, es decir, intermedias entre la de las funciones analíticas y $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$.

Enunciamos el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.14. *$\mathcal{C}\{M_n\}$ es cerrado por composición, es decir, para todas $f, g \in \mathcal{C}\{M_n\}$ se tiene que $f \circ g \in \mathcal{C}\{M_n\}$.*

Su demostración se basará en dos lemas previos.

Lema 2.15. *Si $u \in \mathcal{C}\{M_n\}$ y*

$$|u^{(n)}(x)| \leq CA^n M_n, \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 0,$$

entonces existen $C_0, A_0 > 0$ tales que

$$|u^{(n)}(x)| \leq C_0 \frac{A^n}{(1+n)^2} M_n, \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 0.$$

Demostración. Dados A y C, basta tomar $A_0 > A$ y

$$C_0 = \sup_n C(A/A_0)^n(1+n)^2 < \infty.$$

$\square$

Lema 2.16. *Sea $u \in \mathcal{C}\{M_n\}$ y sean $A, C > 0$ tales que*

$$|u^n(x)| \leq \frac{C}{8}\frac{A^n}{(1+n)^2}M_n, \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 0.$$

Pongamos, para cada $j \in \mathbb{N}$, $u_j(x) := (u(x))^j$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$|u_j^{(n)}(x)| \leq \frac{C^j}{8}\frac{A^n}{(1+n)^2}M_n, \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 0.$$

Demostración. Vamos a razonar por inducción sobre j. Para $j = 1$ es trivial. Supongamos que se cumple para algún $j \geq 1$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|u_{j+1}^{(n)}(x)| = |(u_j(x)u(x))^{(n)}| &\leq \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}|u_j^{(m)}(x)||u^{(n-m)}(x)| \\
&\leq \sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{C^j}{8}\frac{A^m}{(1+m)^2}M_m\frac{C}{8}\frac{A^{n-m}}{(1+(n-m))^2}M_{n-m} \\
&= \frac{C^{j+1}}{64}A^n\sum_{m=0}^{n}n!\widehat{M}_m\widehat{M}_{n-m}\frac{1}{(1+m)^2}\frac{1}{(1+(n-m))^2} \\
&\leq \frac{C^{j+1}}{8}\frac{A^n}{(1+n)^2}M_n\frac{(n+1)^2}{8}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(1+m)^2}\frac{1}{(1+(n-m))^2},
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que, por la convexidad logarítmica de $(\widehat{M}_n)_{n=0}^{\infty}$,

$$n!\widehat{M}_m\widehat{M}_{n-m} \leq n!\widehat{M}_n = M_n.$$

Para concluir debemos demostrar que

$$\frac{(n+1)^2}{8}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(1+m)^2}\frac{1}{(1+(n-m))^2} \leq 1.$$

Ahora bien, para todos $a, b > 0$ se cumple que

$$\frac{1}{a^2b^2} = \frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \leq \frac{1}{(a+b)^2}2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(1+m)^2}\frac{1}{(1+(n-m))^2} &\leq \frac{2}{(2+n)^2}\sum_{m=0}^{n}(\frac{1}{(1+m)^2}+\frac{1}{(1+(n-m))^2})\\ &= \frac{4}{(2+n)^2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j^2},\end{aligned}$$

mientras que

$$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j^2} \leq 1+\int_1^{n+1}\frac{dt}{t^2} = 2-\frac{1}{n+1},$$

con lo que se concluye que

$$\frac{(n+1)^2}{8}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(1+m)^2}\frac{1}{(1+(n-m))^2} \leq \frac{(n+1)^2}{8}\frac{4}{(2+n)^2}\left(2-\frac{1}{n+1}\right) \leq 1.$$

□

Demostración. Abordamos ahora la demostración del teorema 2.14 con ayuda de los dos lemas anteriores. Por el lema 2.15, existen $C, A > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \geq 0$,

$$|g^{(n)}(x)| \leq \frac{C}{8}\frac{A^n}{(1+n)^2}M_n.$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, sea

$$V_x(h) = \int_0^1 g'(x+\theta h)d\theta, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$V_x^{(n)}(h) = \int_0^1 g^{(n+1)}(x+\theta h)\theta^n d\theta,$$

y

$$\begin{aligned}|V_x^{(n)}(h)| &\leq \frac{C}{8}\frac{A^{n+1}}{(2+n)^2}M_{n+1}\int_0^1\theta^n d\theta = \frac{C}{8}\frac{A^{n+1}}{(2+n)^2}\frac{M_{n+1}}{n+1}\\ &\leq \frac{CA}{8}\frac{A^n}{(1+n)^2}n!\widehat{M}_{n+1}.\end{aligned}$$

Como la sucesión $(\widehat{M}_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ es también logarítmicamente convexa, estamos en condiciones de aplicar el lema 2.16 a la función V_x: si ponemos

$$V_{j,x}^{(n)}(h) := \left[(V_x(h))^j\right]^{(n)}, \quad j \in \mathbb{N},$$

se tendrá que

$$|V_{j,x}^{(n)}(h)| \leq \frac{(CA)^j}{8} \frac{A^n}{(1+n)^2} n!\widehat{M}_{n+1}, \quad n \geq 0, \ x, \, h \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, existen $D, B > 0$ tales que para todo $y \in \mathbb{R}$ y para todo $n \geq 0$, $|f^{(n)}(y)| \leq DB^n M_n$. Entonces, por la fórmula de Yamanaka, se tiene que

$$\begin{aligned} |(f \circ g)^{(n)}(x)| &= |\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(g(x)) V_{j,x}^{n-j}(0)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} DB^j j! \widehat{M}_j \frac{(CA)^j}{8} \frac{A^{n-j}}{(1+n-j)^2} (n-j)! \widehat{M}_{n-j+1}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica que

$$\widehat{M}_j \widehat{M}_{n-j+1} \leq \widehat{M}_1 \widehat{M}_n \quad \text{y} \quad \frac{1}{(1+n-j)^2} \leq 1,$$

y como $n!\widehat{M}_n = M_n$, se concluye que

$$|(f \circ g)^{(n)}(x)| \leq \frac{D}{8} A^n \widehat{M}_1 M_n \sum_{j=1}^{n} (BC)^j \leq \widehat{D} \widehat{A}^n M_n, \quad x \in \mathbb{R},$$

para constantes positivas adecuadas $\widehat{D}$ y $\widehat{A}$. □

2.4. Clase de funciones analíticas en $\mathbb{R}$

El siguiente teorema se dedica a establecer una caracterización de las funciones de la clase $\mathcal{C}\{n!\}$ como aquellas que resultan de la restricción al eje real de funciones holomorfas acotadas en una banda horizontal alrededor de dicho eje. Esta propiedad depende en buena medida del hecho de que la propia definición de la clase mencionada implica una uniformidad en el radio de convergencia de la serie de Taylor que representa a la función en un entorno de cada punto del eje real.

Teorema 2.17. *La clase $\mathcal{C}\{n!\}$ está formada precisamente por todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ a las que corresponde un $\delta > 0$ tal que la función puede extenderse a una función holomorfa acotada en la banda horizontal definida por la desigualdad $|Im(z)| < \delta$.*

Demostración. Sea
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \delta\},$$
y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ acotada en Ω, de modo que existe $\beta > 0$ tal que para todo $z \in \Omega$ se tiene que $|f(z)| < \beta$.

Veamos que la restricción de f al eje real pertenece a $\mathcal{C}\{n!\}$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Puesto que $D(x, \delta) \subset \Omega$, estamos en condiciones de aplicar el teorema 2.4, que garantiza que
$$|D^n f(x)| \leq \frac{n!\,\beta}{\delta^n}$$
para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto,
$$\|D^n f\|_\infty \leq \frac{n!\,\beta}{\delta^n},$$
lo que significa que $f \in \mathcal{C}\{n!\}$.

Veamos ahora la otra implicación. Sea $f \in \mathcal{C}\{n!\}$, probaremos que la podemos extender a una función holomorfa y acotada en una banda $|\operatorname{Im}(z)| < \delta$ para $\delta > 0$ adecuado. De acuerdo con la fórmula de Taylor, podemos escribir, para cada a, $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$
Para acotar el resto de esta expresión tengamos en cuenta que existen constantes β, $B > 0$ tales que
$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq n!\,\beta B^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$
De aquí se desprende que:
$$\left|\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt\right| \leq n\beta B^n \left|\int_a^x (x-t)^{n-1}dt\right| = \beta\,|B(x-a)|^n.$$
Esta expresión tiende a 0 cuando $n \to \infty$ siempre que $|B(x-a)| < 1$, es decir, si $a - B^{-1} < x < a + B^{-1}$. Entonces, para tales x se tiene la expresión
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{2.8}$$
Ahora podemos sustituir en la expresión (2.8) la variable x por cualquier número complejo z tal que $|z-a| < 1/B$. Puesto que el radio de convergencia de esta serie es al menos $1/B$, esto implica que para cada $a \in \mathbb{R}$ podemos

definir una función F_a holomorfa en el disco $D(a, 1/B)$ y tal que $F_a(x) = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, $|x - a| < 1/B$.

Por simplicidad, escribamos $D_x := D(x, 1/B)$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $D_a \cap D_b \neq \emptyset$, y veamos que F_a y F_b coinciden en dicha intersección. Para ello basta observar que el conjunto $L = \mathbb{R} \cap D_a \cap D_b$ es un intervalo (y posee por lo tanto puntos de acumulación en $D_a \cap D_b$), y para cada $x \in L$ se tiene, por construcción, que $F_a(x) = f(x) = F_b(x)$. Por el principio de identidad se concluye que $F_a \equiv F_b$ en $D_a \cap D_b$. De aquí se deduce que se puede definir sin ambigüedad la función $F : \cup_{a\in\mathbb{R}} D_a \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = F_a(z), \quad z \in D_a,$$

y resulta ser holomorfa en su dominio. Por último, es inmediato comprobar que

$$\bigcup_{a\in\mathbb{R}} D_a = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < 1/B\}.$$

Veamos ahora que la función F es acotada en cada banda

$$B_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \delta\}, \quad \text{con } 0 < \delta < \frac{1}{B}.$$

Sea $z = a + iy$ con $|y| < \delta$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} |F(z)| = |F_a(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (iy)^n \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta B^n n!}{n!} |y|^n \\ \leq \beta \sum_{n=0}^{\infty} (B\delta)^n = \beta \frac{1}{1 - B\delta}, \end{aligned}$$

pues $B\delta < 1$. Con esto se concluye. □

2.5. Clases de Gevrey

Se trata ahora de proporcionar un ejemplo de clases ultradiferenciables, las denominadas de Gevrey, que fueron las primeras en aparecer en el contexto del estudio de las soluciones de ciertos tipos de ecuaciones en derivadas parciales, y que aparecen desde entonces constantemente en la literatura relativa al estudio de soluciones formales en forma de serie de potencias para todo tipo de ecuaciones.

Definición 2.18. Sea $\alpha \geq 0$. Se define la clase de Gevrey de orden α como

$$G^{1+\alpha} = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \exists\ A, B > 0 \text{ con } |f^{(n)}(x)| \leq AB^n (n!)^{1+\alpha},\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Obsérvese que se tienen, para $0 < \alpha < \beta$, las inclusiones

$$\mathcal{C}\{n!\} = G^1 \subset G^{1+\alpha} \subset G^{1+\beta} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),$$

de modo que se puede decir que las clases de Gevrey establecen una escala de regularidad entre la clase de las funciones analíticas y la de las funciones indefinidamente derivables en la recta real.

Vamos a dar un ejemplo de este tipo de funciones. Sea $\alpha > 0$ y sea

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/|x|^{1/\alpha}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Se puede probar sin dificultad, a partir del ejemplo 2.1 y escribiendo f como una composición adecuada, que esta función es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$ y tiene todas sus derivadas nulas en 0. Para probar que $f \in G^{1+\alpha}$ consideramos la función auxiliar

$$F(z) = \exp(-z^{-1/\alpha}), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dada la simetría par de la función f, razonaremos únicamente para $x > 0$ y estimaremos las derivadas sucesivas de f en x. Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < 1$. Se tiene, por la fórmula integral de Cauchy, que

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi\, i} \int_{C(x,\varepsilon x)} \frac{F(w)}{(w-x)^{n+1}}\, dw,$$

lo que permite realizar las estimaciones

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi\varepsilon x \max_{|w-x|=\varepsilon x} \frac{|F(w)|}{|w-x|^{n+1}}.$$

Pero

$$|F(w)| = e^{-\operatorname{Re}(w^{-1/\alpha})}$$

y

$$w = x + e^{i\theta}\varepsilon x = x(1 + e^{i\theta}\varepsilon),$$

luego

$$w^{-1/\alpha} = x^{-1/\alpha}(1 + e^{i\theta}\varepsilon)^{-1/\alpha}.$$

Para simplificar los cálculos reescribimos

$$1 + e^{i\theta}\varepsilon = re^{i\varphi}, \quad \text{con } r \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon], \;\; \varphi \in [-\arcsin\varepsilon, \arcsin\varepsilon],$$

y entonces

$$(1 + e^{i\theta}\varepsilon)^{-1/\alpha} = r^{-1/\alpha} e^{-i\varphi/\alpha}.$$

Tomamos ahora la parte real y obtenemos

$$\mathrm{Re}((1+e^{i\theta}\varepsilon)^{-1/\alpha}) = r^{-1/\alpha}\cos(\varphi/\alpha) \geq (1+\varepsilon)^{-1/\alpha}\cos(\arcsin(\varepsilon)/\alpha).$$

Llamando

$$L_{\varepsilon,\alpha} = (1+\varepsilon)^{-1/\alpha}\cos(\arcsin(\varepsilon)/\alpha),$$

se tiene que

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!\varepsilon x \exp\big(-L_{\varepsilon,\alpha}x^{-1/\alpha}\big)}{\varepsilon^{n+1}x^{n+1}} = \frac{n!\exp\big(-L_{\varepsilon,\alpha}/x^{1/\alpha}\big)}{\varepsilon^n x^n}, \quad x>0.$$

Tomemos ahora $x = 1/t$, y consideremos la función

$$g(t) = t^n e^{-L_{\varepsilon,\alpha}t^{1/\alpha}}, \qquad t>0.$$

Calculemos la derivada de esta función para obtener el máximo y establecer así la cota para las derivadas que buscamos:

$$g'(t) = (nt^{n-1} - \frac{L_{\varepsilon,\alpha}}{\alpha}t^{n-1+1/\alpha})e^{-L_{\varepsilon,\alpha}t^{1/\alpha}}.$$

Ahora obtenemos que $g'(t)=0$ cuando $t = \left(\dfrac{\alpha n}{L_{\varepsilon,\alpha}}\right)^{\alpha}$, y es sencillo comprobar que entonces el máximo será:

$$\max_{t>0} g(t) = \left(\frac{\alpha n}{L_{\varepsilon,\alpha}}\right)^{\alpha n} e^{-\alpha n}.$$

Este último término, por la fórmula de Stirling, es equivalente a

$$A^n(n!)^{\alpha}$$

para un valor $A>0$ adecuado. Como consecuencia se obtiene que

$$|f^{(n)}(x)| \leq A_0B_0^n(n!)^{1+\alpha}, \quad x\in\mathbb{R},$$

para constantes A_0, B_0 adecuadas, y por tanto la función es de la clase Gevrey indicada, como queríamos probar.

2.6. Casianaliticidad. Teorema de Denjoy-Carleman

Comenzamos con la definición de clase casianalítica.

Definición 2.19. Sea V un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Se dice que V es casianalítica si la restricción de la aplicación $\mathcal{B}$ de Borel a V es inyectiva.

El objetivo de esta última sección es proporcionar caracterizaciones para la casianalitidad de las clases ultradiferenciables $\mathcal{C}\{M_n\}$. Comenzamos con una primera información al respecto que será de ayuda más adelante.

Teorema 2.20. *La clase $\mathcal{C}\{M_n\}$ es casianalítica si, y sólo si, $\mathcal{C}\{M_n\}$ no contiene funciones no triviales con soporte compacto.*

Demostración. Para ver la primera implicación supongamos que $\mathcal{C}\{M_n\}$ es casianalítica. Sea $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$ y con soporte compacto al que llamaremos K. Entonces existe un elemento x_0 no perteneciente a K en el que se anula f y todas sus derivadas. Como la clase $\mathcal{C}\{M_n\}$ es casianalítica se tiene que dicha función es la función constante e igual a 0, es decir, f sería la función trivial.

Veamos la implicación contraria. Supongamos para ello que $\mathcal{C}\{M_n\}$ no es casianalítica. Como la clase es estable por transformaciones afines se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que existe una $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$ tal que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y tal que $f(x_0) \neq 0$ para cierto $x_0 > 0$. Definimos ahora la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Esta función es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, pues es sencillo probar por inducción que $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, teniendo en cuenta la existencia e igualdad de los límites laterales de las derivadas sucesivas en 0 y aplicando el teorema de los incrementos finitos. También observamos que la función g pertenece a $\mathcal{C}\{M_n\}$, pues verifica las cotas necesarias, dado que $\|g^{(n)}\|_\infty \leq \|f^{(n)}\|_\infty$ y que $f \in \mathcal{C}\{M_n\}$. Si consideramos ahora la función

$$h(x) = g(x)g(2x_0 - x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

se tiene también una función de $\mathcal{C}\{M_n\}$, pues $\mathcal{C}\{M_n\}$ es invariante por transformaciones afines y por ser además esta clase un álgebra para el producto puntual como demostramos en el teorema 2.11. La función h así definida toma el valor 0 cuando $x \leq 0$ o cuando $x \geq 2x_0$, de modo que su soporte es compacto. En el punto x_0 además se tiene que $h(x_0) = g(x_0)g(x_0) = f(x_0)^2 \neq 0$. Por tanto hemos encontrado una función $h \in \mathcal{C}\{M_n\}$ no trivial y con soporte compacto, como queríamos. □

Otro resultado que será necesario es el siguiente lema.

Lema 2.21. *Sea* $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión logarítmicamente convexa tal que* $M_0 = 1$*. Entonces, la sucesión* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *dada por*

$$a_n = M_n^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

es monótona creciente.

Demostración. Razonaremos por inducción. Obsérvese primero que $M_1^2 \leq M_0 M_2$, y como $M_0 = 1$ se tiene que $M_1^2 \leq M_2$. Tomando raíces obtenemos que $M_1 \leq M_2^{1/2}$.

Supongamos ahora que para un cierto $n \geq 1$ se tiene que $M_{n-1}^{1/(n-1)} \leq M_n^{1/n}$. Elevando a $1/(n-1)$ los términos de la desigualdad $M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1}$ y por la hipótesis de inducción se obtiene que

$$M_n^{2/(n-1)} \leq M_{n-1}^{1/(n-1)} M_{n+1}^{1/(n-1)} \leq M_n^{1/n} M_{n+1}^{1/(n-1)}.$$

Reagrupando términos en la expresión anterior, queda

$$M_n^{\frac{n+1}{n(n-1)}} \leq M_{n+1}^{1/(n-1)},$$

y ahora elevamos ambos términos de la desigualdad anterior a $\frac{n-1}{n+1}$ para obtener

$$M_n^{1/n} \leq M_{n+1}^{1/(n+1)},$$

como queríamos. □

Nota 2.22. Gracias al lema anterior, hacemos notar que el caso interesante desde el punto de vista de la casianaliticidad es aquel en el que la sucesión logarítmicamente convexa $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = +\infty. \tag{2.9}$$

En caso contrario, la sucesión $(M_n^{1/n})_{n=1}^{\infty}$ sería creciente y acotada, de donde existiría $A > 0$ tal que $M_n \leq A^n$ para todo n. En esta situación, es claro que $\mathcal{C}\{M_n\} \subset \mathcal{C}\{n!\}$, y por ser esta última clase casianalítica también lo sería $\mathcal{C}\{M_n\}$.

Por lo tanto, para no caer en situaciones ya resueltas, en el resultado siguiente supondremos que la condición (2.9) se satisface.

Procedamos ahora a abordar el teorema fundamental de caracterización de las clases casianalíticas.

Teorema 2.23 (de Denjoy-Carleman)**.** *Sea* $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión logarítmicamente convexa tal que* $M_0 = 1$*, que satisface además la condición* (2.9)*. Definamos las funciones auxiliares*

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{M_n}, \qquad q(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{x^n}{M_n},$$

para $x > 0$*. Entonces cada una de las cinco condiciones siguientes implica las otras cuatro:*

(a) $\mathcal{C}\{M_n\}$ *no es casi-analítica.*

(b)

$$\int_0^{\infty} \ln\, Q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty.$$

(c)

$$\int_0^{\infty} \ln\, q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty.$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_n}\right)^{1/n} < \infty.$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty.$$

Nota 2.24. Notemos en primer lugar que la condición (2.9) garantiza que las funciones Q y q del enunciado están bien definidas en todo $(0, \infty)$, pues el radio de convergencia de la serie que proporciona Q es infinito, y el superior que define q será finito para todo $x > 0$ (de hecho, no es difícil dar una expresión explícita como función a trozos de $q(x)$ estudiando la monotonía de los valores x^n/M_n para cada x fijo).

En segundo lugar, se puede observar fácilmente que cada una de las condiciones anteriores implica que $M_n \to \infty$ muy rápidamente cuando $n \to \infty$. En particular, este teorema corrobora lo que ya habíamos demostrado anteriormente, que $\mathcal{C}\{n!\}$ es casianalítica: Si $M_n = n!$, entonces $M_{n-1}/M_n = 1/n$, y por tanto no se cumple la condición (e) del teorema.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Si $\mathcal{C}\{M_n\}$ no es casi-anaítica, por el teorema 2.20 existe una función no trivial f_1 con soporte compacto, contenido en un cierto intervalo $[\alpha, \beta]$, que pertenece a $\mathcal{C}\{M_n\}$. Existen entonces $\beta_{f_1}, B_{f_1} > 0$ de modo que $\left\| f_1^{(n)} \right\|_{\infty} \leq \beta_{f_1} B_{f_1}^n M_n$. Consideremos la función

$$F(x) = \frac{1}{\beta_{f_1}} f_1(ax+b) \quad x \in \mathbb{R},$$

donde a, b son constantes reales que escogeremos adecuadamente. Estimando la derivada $n-$ésima de la función obtenemos

$$\left|F^{(n)}(x)\right| = \left|\frac{a^n}{\beta_{f_1}} f_1^{(n)}(ax+b)\right| \leq a^n B_{f_1}^n M_n.$$

Tomando ahora $a = \frac{1}{2B_{f_1}}$ se tiene que

$$\left|F^{(n)}(x)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n M_n. \tag{2.10}$$

Si tomamos $b \leq \alpha$ tendremos que $\alpha \leq ax+b \leq \beta$ si, y sólo si,

$$0 \leq \frac{\alpha - b}{a} \leq x \leq \frac{\beta - b}{a}.$$

Así, llamando $A = (\beta - b)/a$, se tiene que la función F tiene soporte compacto contenido en $[0, A]$. Por tanto hemos definido una función no trivial $F \in \mathcal{C}\{M_n\}$ con soporte contenido en $[0, A]$. Definimos ahora

$$f(z) = \int_0^A F(t)e^{itz}dt, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.11}$$

que es una función entera. Para problarlo podemos aplicar el lema 1.12, pues la función $\varphi(z,t) = F(t)e^{itz}$ cumple trivialmente todas las condiciones allí indicadas. Probaremos a continuación que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f(x)|}{1+x^2}\,dx > -\infty. \tag{2.12}$$

Es conocido que la homografía

$$w \longrightarrow \frac{i - iw}{1+w},$$

transforma $D(0,1)$ en el semiplano superior $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Definamos, entonces, la función

$$g(w) = f\left(\frac{i-iw}{1+w}\right),$$

composición de la función f con dicha homografía. Observemos que si $z \in H$ entonces $\operatorname{Re}(itz) = -t\operatorname{Im}(z) < 0$ para cada $t \in [0, A]$, luego se tiene que

$$|f(z)| = \left|\int_0^A F(t)e^{itz}dt\right| \leq \int_0^A |F(t)|\,dt.$$

Puesto que la función F es continua y de soporte compacto, la integral $\int_0^A |F(t)|\,dt$ es finita. Por lo tanto f está acotada en el semiplano superior y en consecuencia g está acotada en el disco unidad. Por otro lado, puesto que F no es nula y por la unicidad de la transformada de Fourier, f no puede serlo. Como consecuencia, g tampoco es la función idénticamente nula. Además, la función g es continua en el disco unidad cerrado salvo en $w = -1$, y holomorfa en el disco abierto unidad, por lo que se tiene que

$$\lim_{r\to 1^-} g(re^{i\theta}) \;=\; g(e^{i\theta}), \qquad \theta \in (-\pi,\, \pi). \tag{2.13}$$

Puesto que g es una función holomorfa, sabemos que existe un $m \geq 0$ tal que $g(z) = z^m h(z)$ con $h(0) \neq 0$. Como consecuencia, si $g \in \mathcal{H}^\infty$ entonces $h \in \mathcal{H}^\infty$, pues tienen los mismos coeficientes en sus respectivos desarrollos de Taylor. Aplicamos ahora la fórmula de Jensen (1.2) a la función h y obtenemos que

$$\ln|h(0)| + \sum_{n=1}^{N} \frac{r}{|\alpha_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|h(re^{i\theta})\right| d\theta,$$

para cada $r \in (0,1)$, y donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ son los ceros de h en $D(0,1)$. Observamos que el miembro de la izquierda en la igualdad anterior aumenta cuando crece r. Como consecuencia el término de la derecha, al que llamaremos $\mu_r(h)$, también crece, y se tiene que $\mu_r(h) \leq \mu_s(h)$ si $r < s$. Pasando ahora a la función g, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mu_r(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|g(re^{i\theta})\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|(re^{i\theta})^m h(re^{i\theta})\right| d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|(re^{i\theta})^m\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|h(re^{i\theta})\right| d\theta \\
&= m\ln(r) + \mu_r(h).
\end{aligned}$$

Por tanto, si $0 < r < s < 1$ se tiene que

$$\mu_r(g) = m\ln(r) + \mu_r(h) \leq m\ln(s) + \mu_s(h) = \mu_s(g).$$

Así probamos que también $\mu_r(g)$ crece. Por otro lado, consideramos ahora $g_r(e^{i\theta}) = g(re^{i\theta})$, y se tiene en virtud de (2.13) que $g(re^{i\theta}) \to g(e^{i\theta})$, cuando $r \to 1$ y $\theta \in (-\pi, \pi)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $|g| \leq 1$, pues de otro modo existiría una constante $M > 0$ tal que $|g| \leq M$ y consideraríamos la función $G = g/M$ con $|G| \leq 1$. Como consecuencia obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln|g(e^{i\theta})| d\theta \;=\; -\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r\to 1} \ln\frac{1}{|g_r(e^{i\theta})|} d\theta.$$

Este último logaritmo es no negativo pues $|g| \leq 1$. Aplicamos ahora el Lema de Fatou: si se tiene una sucesión de funciones f_n medibles para cada $n \in \mathbb{N}$ y definidas en un conjunto A medible de $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_A (\liminf f_n) dx \;\leq\; \liminf \int_A f_n \, dx.$$

Se deduce que

$$-\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r\to 1} \ln \frac{1}{|g_r(e^{i\theta})|} d\theta \geq -\liminf_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|g_r(e^{i\theta})|} d\theta = -\liminf_{r\to 1} (-2\pi\, \mu_r(g)).$$

Puesto que $\mu_r(g)$ es creciente, este límite inferior es, en realidad, un límite distinto de $-\infty$, y se tiene por tanto que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |g(e^{i\theta})| d\theta \geq -\liminf_{r\to 1} (-2\pi\, \mu_r(g)) \;=\; 2\pi \lim_{r\to 1} \mu_r(g) \;>\; -\infty.$$

Realizamos ahora el cambio de variable

$$x \;=\; i\, \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} \;=\; i\, \frac{-e^{i\theta/2}\left[e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right]}{e^{i\theta/2}\left[e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right]} = \frac{-i\, 2\, i \sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)} \;=\; \tan(\theta/2),$$

y por tanto $d\theta \;=\; \dfrac{2\,dx}{1+x^2}$, resultando que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |g(e^{i\theta})| d\theta \;=\; \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(x)|}{1+x^2}\, dx \;>\; -\infty,$$

lo que equivale a (2.12). Veamos cómo deducir de aquí la conclusión de este apartado. Integramos por partes en la expresión (2.11) y obtenemos que

$$f(z) \;=\; (i\,z)^{-n} \int_0^A F^{(n)}(t) e^{itz}\, dt, \quad z \neq 0,$$

pues tanto F como sus derivadas se anulan en 0 y en A. Ahora, evaluando en un $x \in \mathbb{R}$ y teniendo en cuenta (2.10), podemos acotar

$$|x^n f(x)| \;\leq\; 2^{-n}\, M_n\, A, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Se deduce entonces que

$$Q(x)|f(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n |f(x)|}{M_n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A\, 2^{-n} = 2\,A, \quad x \geq 0. \tag{2.14}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f(x)|}{1+x^2}\,dx \;=\; \int_{0}^{\infty} \frac{\ln|f(x)|}{1+x^2}\,dx \;+\; \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln|f(x)|}{1+x^2}\,dx,$$

y como la función $|f|$ es acotada, cada uno de los sumandos de la expresión anterior son menores que infinito. Esto implica que si uno de ellos fuera igual a $-\infty$ forzosamente la integral en todo $\mathbb{R}$ lo sería, lo cual es absurdo por (2.12). Entonces,

$$-\int_{0}^{\infty} \frac{\ln|f(x)|}{1+x^2}\,dx \;<\infty. \tag{2.15}$$

Ahora, tomando logaritmos en la expresión (2.14) y multiplicando ambos términos de la desigualdad por $\dfrac{1}{1+x^2}$, obtenemos que

$$\frac{\ln\,Q(x)}{1+x^2} + \frac{\ln\,|f(x)|}{1+x^2} \;\leq\; \frac{\ln\,(2\,A)}{1+x^2},$$

expresión válida para $x \geq 0$. Integramos ahora en ambos lados de la expresión anterior,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln\,Q(x)}{1+x^2}\,dx \;\leq\; \int_{0}^{\infty} \frac{\ln\,(2\,A)}{1+x^2}\,dx - \int_{0}^{\infty} \frac{\ln\,|f(x)|}{1+x^2}\,dx\,,$$

y deducimos que la integral converge, como queríamos.

(b) $\Rightarrow$ *(c)* Basta ver que $q(x) \leq Q(x)$ para todo x. Esto se debe a que $q(x)$, que es en principio un supremo, de hecho es un máximo y su valor es uno de los sumandos que aparecen en la serie $Q(x)$, de términos positivos. Como consecuencia, por el carácter creciente de la función logaritmo y por la monotonía de la integral se tiene la segunda implicación del teorema.

(c) $\Rightarrow$ *(d)* Como se vió en el lema 2.21, la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$a_n = M_n^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

es monótona creciente. Por otro lado, si $x \geq e\,a_n$, entonces $x^n/M_n \geq e^n$ y así, puesto que el logaritmo es una función creciente, se tiene que

$$\ln\,q(x) \;\geq\; \ln\,\frac{x^n}{M_n} \;\geq\; \ln\,e^n \;=\; n.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} e\int_{e\,a_1}^{\infty} \ln\,q(x)\frac{dx}{x^2} &\geq e\sum_{n=1}^{N} n\int_{e\,a_n}^{e\,a_{n+1}} x^{-2}\,dx \;+\; e\int_{e\,a_{N+1}}^{\infty} (N+1)\,x^{-2}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \;+\; \frac{N+1}{a_{n+1}} \;=\; \sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

Entonces, puesto que la convergencia de

$$\int_0^\infty \frac{\ln q(x)}{1+x^2}dx$$

implica la convergencia de

$$\int_{ea_1}^\infty \frac{\ln q(x)}{x^2}dx,$$

es claro que la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{a_n}$ converge.

$(d) \Rightarrow (e)$ Sea

$$\lambda_n = \frac{M_{n-1}}{M_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1}$ se tiene que:

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} \leq \frac{M_{n-1}}{M_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

y por tanto la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ es monótona decreciente. Si consideramos como antes $a_n = M_n^{1/n}$, tenemos que

$$(\lambda_n\, a_n)^n \leq M_n\, \lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_n = 1.$$

Por tanto hemos obtenido que

$$\lambda_n \leq 1/a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.16}$$

y la convergencia de la serie $\sum 1/a_n$ implica la de $\sum \lambda_n$.

$(e) \Rightarrow (a)$ Para demostrarlo definimos la función

$$f(z) = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 \prod_{n=1}^\infty \frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z}.$$

Probemos que f es una función entera. Basta ver que

$$\prod_{n=1}^\infty \frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z}$$

lo es, pues $\left(\dfrac{\sin z}{z}\right)^2$ es una función entera y el producto de funciones enteras es una función entera. Si llamamos

$$h(z) = 1 - \frac{\sin z}{z},$$

tenemos que $h(z)$ tiene un cero en el origen y que es una función entera. Entonces, podemos escribir

$$h(z) = z \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = zg(z),$$

donde $g(z)$ vuelve a ser una función entera. Como la función g es holomorfa es acotada en una bola cerrada, y por tanto existe $B > 0$ tal que $|g(z)| < B$ si $|z| \leq 1$. Como consecuencia,

$$|h(z)| \leq |zg(z)| \leq B|z|, \quad |z| \leq 1.$$

Esto implica que

$$\left|1 - \frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z}\right| \leq B\lambda_n |z|, \quad |z| \leq \frac{1}{\lambda_n}.$$

Sea K un compacto. Existe $M > 0$ tal que $K \subset \overline{D}(0, M)$. Como hemos supuesto (2.9) y sabemos que se verifica (2.16), deducimos que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $\lambda_n M \leq 1$, y por lo tanto, para cada $z \in K$ se tiene que $|\lambda_n z| \leq \lambda_n M \leq 1$. Entonces, para todo $z \in K$ se tiene que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|1 - \frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} B\lambda_n |z| \leq \sum_{n=0}^{\infty} B\lambda_n M < \infty,$$

pues la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ converge por hipótesis. En virtud del criterio M de Weierstrass, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|1 - \frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z}\right|$$

converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{C}$. Aplicando ahora el teorema 1.11 obtenemos que la función $f(z)$ es una función entera. Además, el mismo resultado dice que la función no puede ser la idénticamente nula, pues esta se anula si, y sólo si, o bien $\sin z = 0$ o bien $\sin \lambda_n z = 0$, y esto no ocurre para todo z. Veamos que f es una función de tipo exponencial. Teniendo en cuenta la igualdad

$$\int_{-1}^{1} e^{itz} dt = \frac{1}{iz}(e^{iz} - e^{iz}) = \frac{2\sin z}{z},$$

tomando módulos y poniendo $z = x + iy$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|z^{-1}\sin z| &\leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|e^{itz}|dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|e^{itx}||e^{-ty}|dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-ty}dt = \frac{1}{2y}(e^{y}-e^{-y}) = \frac{\sinh y}{y} \leq e^{|y|} \leq e^{|z|}.
\end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right|^2 \leq e^{2|z|},$$

y

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n z}\right| \leq e^{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|z|},$$

con lo que

$$|f(z)| \leq e^{(2+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n)|z|},$$

como queríamos. Ahora, para todo x real sabemos que $|\sin x| \leq |x|$ y que $|\sin x| \leq 1$, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\begin{aligned}
|x^k f(x)| &= |x^k|\left|\frac{\sin x}{x}\right|^2\prod_{n=1}^{k}\left|\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n x}\right|\prod_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n x}\right| \\
&\leq |x^k|\left|\frac{\sin x}{x}\right|^2\prod_{n=1}^{k}\left|\frac{\sin(\lambda_n x)}{\lambda_n x}\right|\prod_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n x}{\lambda_n x}\right| \\
&\leq |x^k|\frac{1}{|x|^k\lambda_1\ldots\lambda_k}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{\lambda_1\ldots\lambda_k} = M_k\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.
\end{aligned}$$

Por la monotonía de la integral y puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = \pi,$$

se tiene que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|x^k f(x)|dx \leq M_k. \tag{2.17}$$

Estamos entonces en condiciones de aplicar el teorema de Paley-Wiener. Como consecuencia se obtiene que la transformada de Fourier de f,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx,$$

es una función que se anula fuera de un compacto $[-A, A]$ y no idénticamente nula. Además, las desigualdades (2.17) garantizan que, en virtud del teorema de derivación de integrales paramétricas, F es una función indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$F^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k f(x) e^{-itx} dx$$

y

$$|F^{(n)}(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |(-ix)^k f(x) e^{-itx}| dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)| dx \leq M_k.$$

Como consecuencia

$$\left\| F^{(n)}(t) \right\|_{\infty} \leq M_k$$

por lo que se obtiene que $F \in \mathcal{C}\{M_n\}$ y por tanto $\mathcal{C}\{M_n\}$ no es casianalítica.

$\square$

Nota 2.25. Como aplicación sencilla del teorema de Denjoy-Carleman, podemos notar que las clases de Gevrey $G^{1+\alpha}$ son no casianalíticas para todo $\alpha > 0$, pues la serie que aparece en el apartado (e) del teorema es una serie de Riemann de exponente $1+\alpha > 1$, y por lo tanto convergente. No obstante, esto ya se sabía, pues las funciones que construimos en la sección 2.5 como ejemplo de elementos de dichas clases eran no idénticamente nulas pero con todas las derivadas nulas en el punto 0.

Bibliografía

[1] R.B. Ash and W.P. Novinger, *Complex Variables*, disponible en la página web http://www.math.uiuc.edu/ r-ash/CV.html (último acceso el 17 de junio de 2016).

[2] É. Borel, Sur quelques points de la théorie des fonctions, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. (3) **12** (1895), 9–55.

[3] É. Borel, Sur la généralisation du prolongement analytique, C. R. Acad. Sci. Paris **130** (1900), 1115–1118.

[4] É. Borel, Sur les séries de polynômes et de fractions rationnelles, Acta Math. **24** (1901), 309–387.

[5] T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthiers Villars, Paris, 1926.

[6] A. Denjoy, Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle, C. R. Acad. Sci. Paris **123** (1921), 1320–1322.

[7] J. Dixon, A brief proof of Cauchy's integral theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 625–626.

[8] M. Gevrey, Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. (3) **35** (1918), 129–190.

[9] J. Hadamard, Sur la généralisation de la notion de fonction analytique, Bull. Soc. Math. France **40** (1912), supplément spécial: vie de la société, séance du 28 février 1912, 28–29.

[10] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I, Distribution theory and Fourier analysis*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[11] P. Koosis, *The Logarithmic Integral I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[12] S. G. Krantz, H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser Advanced Texts, 2002.

[13] S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[14] H.-J. Petzsche, On E. Borel's theorem, Math. Ann. **282** (1988), 299–313.

[15] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, MacGraw-Hill, New York, 1987.

[16] T. Yamanaka, A new higher order chain rule and Gevrey class, Ann. Global Anal. Geom. 7, no. 3 (1989), 179–203.

[17] C. Zuily, *Problèmes de distributions avec solutions détaillées*, Hermann, Paris, 1978.