

# MODELOS ARCH: ANÁLISIS DE LA VOLATILIDAD DE SERIES TEMPORALES FINANCIERAS

*Lucy Amigo Dobaño*

**ABSTRACT.**—El presente trabajo se enmarca dentro de la modelización de la volatilidad de series temporales financieras mediante la consideración de procesos ARCH. El objetivo está en contrastar la presencia de heterocedasticidad condicional debida a la existencia de dependencias no lineales en la serie. Se describen las principales propiedades estadísticas de la modelización ARCH univariante. El proceso de contrastación empírica se va a llevar a cabo para la tasa de rendimiento porcentual diaria del tipo de cambio spot peseta/dólar en el período de turbulencias financieras 1992-93, basándonos en la formulación de un modelo GARCH(1,1).

**PALABRAS CLAVE:** Mercados financieros, Heterocedasticidad condicional autoregresiva,

Modelos ARCH-GARCH.

Código JEL: F31.

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio del tipo de cambio como variable básica de una economía ha sido objeto de investigación creciente tanto desde el punto de vista de la Teoría Económica como desde el punto de vista empírico <sup>(1)</sup>. Esta atención se acentuó a partir de marzo de 1973, tras el abandono del tipo de cambio fijo por parte de Estados Unidos y la implantación generalizada del régimen de tipos de cambio flexibles en los mercados internacionales, cuando se constató un aumento en la volatilidad de los mercados de cambio.

---

(1) Para más información respecto de la literatura sobre tipos de cambio, véase, Bajo y Sosvilla (1993), Frankel y Rose (1995), Taylor (1995) e Isard (1995)

En los últimos años, especialmente a partir de la década de los ochenta, se ha desarrollado una amplia literatura interesada en estudiar esta volatilidad a partir de modelos de heterocedasticidad condicionada y, en particular, los modelos tipo ARCH introducidos originariamente por Engle (1982). La justificación de estos modelos se centran en regularidades empíricas observadas en numerosas series financieras, especialmente las observadas con frecuencias elevadas, como son, el exceso de curtosis en la serie y autocorrelación en sus cuadrados.

## 2. EL MODELO: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES ESTADÍSTICAS

La formulación general de los modelos ARCH –*Modelo GARCH(p,q)*–, surgen en función de los supuestos que se realizan sobre el término de varianza condicional –que denotaremos por  $\alpha^2_t$ , en este análisis descriptivo, siendo  $\{Y_t\}_{t=1}^T$  la serie genérica a modelizar– el caso particular del modelo univariante ARCH(q) (Autoregressive Conditional Heteroskedastic).

Primeramente y como antecedente necesario, consideraremos el proceso ARCH(q), propuesto por Engle (1982) <sup>(2)</sup> y que viene dado por:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t; \quad \varepsilon_t \sim IIN(0, 1) \quad [2.1]$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 = \omega + \alpha(L) y_{t-1}^2$$

donde L denota el operador de retardo. Este modelo considera la serie  $y_t$  como una secuencia de variables aleatorias,  $\varepsilon_t$ , independientes e igualmente distribuidas con varianza unitaria, multiplicada por un factor  $\sigma_t$ , denominado *volatilidad* <sup>(3)</sup>.

Los modelos tipo ARCH tienen, desde el punto de vista estadístico, una ventaja muy importante, cual es que una vez especificada una distribución para  $\varepsilon_t$ ,  $-\varepsilon_t$  es Gaussiano <sup>(4)</sup>–, se tiene la distribución condicionada de

(2) Véase Engle, R.F. (1982). Autorregresive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 4, pp. 987-1008. Este modelo expresa la varianza condicional como función lineal del cuadrado de los valores pasados de las innovaciones. Téngase en cuenta que, de la expresión 2.1 se deduce que:

$$E(y_t^4) = E(\varepsilon_t^4)E(\sigma_t^4) \geq E(\varepsilon_t^4)E(\sigma_t^2)^2 = E(\varepsilon_t^4)E(y_t^2)^2$$

por lo que, si  $\varepsilon_t$  sigue una distribución normal, la distribución incondicional para  $y_t$  es leptocúrtica.

(3) La volatilidad es una función positiva, variable en el tiempo y medible con respecto a  $\Psi_{t-1} = \{y_1, \dots, y_{t-1}\}$ , conjunto de información disponible en el instante  $t-1$ .

(4) Se dice que el proceso  $\{y_t\}_{t=1}^\infty$  es Gaussiano si la distribución  $\{y_1, \dots, y_T\}$  es normal multivariante. Dadas las propiedades de la distribución normal multivariante, la Gaussianidad implica que todas las distribuciones marginales así como las condicionales son normales. No obs-

$y_t/\Psi_{t-1}$ , es decir,  $y_t$  es condicionalmente normal, y además  $\sigma_t^2$  coincide con la varianza condicional:

$$y_t/\Psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \tag{2.2}$$

$$\Psi_{t-1} = \{y_1, y_2, \dots, y_{t-1}\}$$

El proceso ARCH(q) es, por definición, una MD (martingala en diferencias)<sup>(5)</sup> y, por lo tanto, su media marginal es cero y no tiene autocorrelación (todas las autocovarianzas son cero). Si  $y_t$  es un proceso estacionario, su varianza marginal (varianza incondicional) vendrá dada por:

$$\sigma_y^2 = V(y_t) = E(y_t^2) = \frac{\omega}{(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q)} \tag{2.1}$$

La distribución marginal de  $y_t$  no tiene forma conocida, no obstante, es fácilmente demostrable que todos los momentos impares son cero y, en consecuencia, la distribución marginal es simétrica<sup>(6)</sup>.

Ahora bien, aunque  $y_t$  no tiene autocorrelación -teniendo en cuenta que en el proceso ARCH(q) no existen relaciones lineales entre los valores que toma la variable  $y_t$ , la estructura dinámica de la serie aparece en  $y_t^2$ , se presenta dependencia a través de los cuadrados de la serie. En este contexto,

tante, es importante matizar que, en el caso de las distribuciones condicionales, el hecho de que éstas sean normales no implica que la distribución conjunta sea normal.

Por tanto, la Gaussianidad implica la normalidad condicional pero no viceversa. Bajo Gaussianidad los conceptos de independencia y no autocorrelación son equivalentes.

(5) Este es un concepto importante para la caracterización de series temporales. Si  $(|y_t|) < \infty$ , un proceso MD tiene la propiedad de que su esperanza condicional en información pasada es cero, es decir:

$$E_{t-1}(y_t) = 0$$

Utilizando la ley de expectativas iteradas es inmediato comprobar que la esperanza marginal también será cero:

$$E(y_t) = E[E_{t-1}(y_t)] = 0$$

Además, todo proceso MD siempre es no autocorrelacionado, puesto que  $y_t$  no está correlacionada con ninguna función de las observaciones pasadas:

$$E[y_t f(y_1, y_2, \dots, y_{t-1})] = E[f(y_1, y_2, \dots, y_{t-1}) E_{t-1}(y_t)] = 0$$

En definitiva, se puede afirmar que, todo proceso de variables independientes con media cero es siempre MD.

(6) Las condiciones necesarias para que existan los momentos de orden par de la distribución marginal de  $y_t$ , así como la formulación para obtenerlos, se establecen con detalle en Engle(1982).

Taylor (1986) <sup>(7)</sup> prueba que la función de autocorrelación (fac) del cuadro de un proceso ARCH(q) tiene la misma forma que la fac de un proceso AR(q) <sup>(8)</sup>. Finalmente, decir también que, este proceso ARCH(q) también admite una expresión MA(q) <sup>(9)</sup> con parámetros variables en el tiempo.

El procedimiento más usual a la hora de estimar los parámetros en los modelos ARCH, y que será el que nosotros utilizaremos, es el de máxima verosimilitud, maximizando el logaritmo <sup>(10)</sup>:

$$\ln L(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln f(y_t; \theta / \varphi_{t-1}) = -\frac{T}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{y_t^2}{\sigma_t^2} \quad [2.1]$$

donde  $\Theta$  representa los parámetros desconocidos del modelo y  $f(y_t; \Theta / \Psi_{t-1})$  la densidad de  $y_t$  dadas las observaciones hasta el período  $t-1$ . La teoría asintótica para los modelos ARCH prueba que, los estimadores ML obtenidos –bajo ciertas condiciones, así tal que los momentos de primer y segundo orden estén bien definidos– son consistentes y asintóticamente normales <sup>(11)</sup>.

Con respecto a la predicción de valores futuros de la serie  $y_t$ , es preciso decir que, la presencia de efectos ARCH no afecta a la predicción puntual sino a los intervalos de predicción <sup>(12)</sup>.

(7) Véase Taylor, S. (1986), *Modelling Financial Time Series*. John Wiley & Sons, New York.

(8) Para ello define:

$$v_t = y_t^2 - \sigma_t^2$$

donde la perturbación  $v_t$ , así definida, es ruido blanco por ser una martingala en diferencias con varianza constante.

Y obtiene la expresión AR(1):

$$y_t^2 = \omega + \alpha(L) y_{t-1}^2 + v_t \Rightarrow y_t^2 \sim AR(q)$$

(9) Véase, por ejemplo, Bera, A.K.; Higgins, M.L., y Lee, S. (1992). "Interaction Between Autocorrelation and Conditional Heteroskedasticity: a Random Coefficient Approach", *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, pp. 133-142.

(10) La función de verosimilitud se obtiene teniendo en cuenta que,  $\epsilon_t$  es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con varianza unitaria, el modelo GARCH(p,q) –y por tanto también el caso particular ARCH(q)– es condicionalmente Gaussiano y por tanto la distribución condicionada de  $y_t$  dadas las observaciones previas hasta el período  $t-1$  es  $N(0, \sigma_t^2)$ .

(11) Para más detalles acerca de estas cuestiones se puede acudir a Novales Cinca, Alfonso y Gracia-Díez, Mercedes (1993): "Guía para la estimación de modelos ARCH", *Estadística Española*, núm. 132, vol. 35, pp. 5-39.

(12) Por ello, si denotamos la predicción por  $Y_{T+\kappa}$ , realizada con información hasta el momento T, podemos calcular su ECM (error cuadrático medio), que coincide con la varianza condicional en la información disponible en el momento T, mediante la aplicación de la ley de expectativas iteradas. Por ejemplo, para el caso particular en que  $\kappa=2$ :

$$\begin{aligned} ECM(_{-T+2}) &= E_T(_{-T+2} - Y_{T+2})^2 = E_T(Y_{T+2}^2 = E_T[E_{T+1}(Y_{T+2}^2)]) = \\ &= \omega + \alpha_1 Y_T + \dots + \alpha_q Y_{T-1+q} + \alpha_1 E_T(Y_{T-1}^2) = \\ &= (\omega + \alpha_1) + (\alpha_1^2 + \alpha_2) Y_T^2 + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3) Y_{T-1}^2 + \dots + \alpha_1 \alpha_q Y_{T+2-q}^2 + \alpha_q Y_{T+1-q}^2 \end{aligned}$$

Este tipo de modelización, sin embargo, si bien ha sido de gran atractivo en los últimos años y para numerosos autores, también ha sido criticado por otros. En esta segunda línea, cabe tener en cuenta que, diversas aplicaciones empíricas<sup>(13)</sup> ponen de manifiesto que el proceso ARCH(q) necesita un número relativamente elevado de retardos (q) para poder representar adecuadamente la dinámica de los cuadrados de las series financieras y, por ello, hace necesario estimar un número relativamente elevado de parámetros con las consiguientes dificultades de cálculo en la maximización de la verosimilitud, o bien exigen una estructura fija de retardos que evite la obtención de estimadores negativos de la varianza.

Con la finalidad de flexibilizar estas restricciones del modelo ARCH, se han propuesto en los últimos años numerosas especificaciones alternativas, como son, los modelos GARCH, EGARCH, logGARCH, GARCH-N, T-GARCH, entre otros<sup>(14)</sup>. En este trabajo, nuestro objetivo se centrará en el modelo GARCH(p,q) propuesto por Bollerslev (1986)<sup>(15)</sup>, con una estructura más flexible que el modelo de Engle anterior.

### 3. EL MODELO ARCH GENERALIZADO

El modelo GARCH(p,q) constituye una generalización, análoga al paso del modelo AR(q) al modelo ARMA(p,q)<sup>(16)</sup>, del proceso ARCH(q) en el sentido de que  $\sigma_t^2$ , depende no sólo de las innovaciones anteriores sino también de sus propios valores pasados, tal y como queda recogido en su expresión genérica<sup>(17)</sup>:

(13) Véase, Engle, R.F. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50, pp. 987-1008; Engle, R.F. (1983): "Estimates of the Variance of U.S. Inflation Based on the ARCH Model", *Journal of Money, Credit, and Banking*, 15, pp. 286-301; Engle, R.F. y Kraft, D. (1983): "Multiperiod Forecast Error Variances of Inflation Estimated from ARCH Models", en *Applied Time Series Analysis of Economic Data*, Ed. A. Zellner, Bureau of the Census, Washington, EC, pp. 293-302.

(14) Un análisis en detalle sobre estas especificaciones puede encontrarse, entre otros, en Bera y Higgins (1993), Palm (1996) y Shepard (1996), donde se realiza un análisis descriptivo y se proporcionan asimismo referencias específicas para cada caso.

(15) Bollerslev, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.

(16) La idea intuitiva existente en los modelos ARMA es intentar aproximar un polinomio de orden alto mediante el cociente de dos polinomios de orden relativamente más pequeño. Una visión más detallada sobre este tipo de modelización puede encontrarse en cualquier manual de series temporales.

(17) Dos expresiones alternativas de esta expresión general del proceso GARCH (p,q) serían:

#### 1. Formulación ARCH( $\infty$ ):

Si las raíces del polinomio  $1 - B(L)$  están fuera del círculo unidad, podemos expresar  $\sigma_t^2$  en función de los errores pasados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega + A(L)y_t^2 + B(L)\sigma_t^2 = \\ &= \omega(1 - B(L))^{-1} + A(L)[1 - B(L)]^{-1}y_t^2 = \\ &= \omega\left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i\right)^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i y_{t-i}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_t &= \varepsilon_t \sigma_t & y_t / \psi_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2) \\
 \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 & [3.1] \\
 &= \omega + A(L) y_t^2 + B(L) \sigma_t^2
 \end{aligned}$$

donde  $p \geq 0$ ,  $q > 0$ , siendo  $A(L)$  y  $B(L)$  los correspondientes operadores de retardos <sup>(18)</sup>. Las restricciones que se introducen en los parámetros para asegurar una varianza condicional siempre positiva son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \omega &> 0 \\
 \alpha_i &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, q \\
 \beta_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, p
 \end{aligned}$$

Este tipo de modelo, al igual que el ARCH( $q$ ), es un martingala en diferencias. Bollerslev (1986) establece las condiciones de estacionariedad, demostrando que,  $y_t$  es débilmente estacionario:

$$E(y_t) = 0$$

$$\text{Var}(y_t) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j} \quad [3.2]$$

$$\text{Cov}(y_t, y_s) = 0 \quad t \neq s$$

esto si y sólo si:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \quad [3.3]$$

## 2. Formulación ARMA (p,q):

Si definimos  $v_t = y_t^2 - \sigma_t^2$  -que es ruido blanco- y, a partir de la expresión general del modelo GARCH (p,q), llegamos a la expresión:

$$y_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i y_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i} + v_t$$

que corresponde a un proceso ARMA ( $m, p$ ), siendo  $m = \max\{p, q\}$  con parámetros regresivos  $\alpha(L) + \beta(L)$ , parámetros de medias móviles  $-\beta(L)$  e innovaciones  $v_t$  serialmente incorreladas aunque heterocedásticas.

(18) Si consideramos el caso particular  $p=0$ , entonces, el modelo GARCH (p,q) se reduce al ARCH(q).

Por su parte, a este respecto, véase Nelson y Cao (1992), donde establecen las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la no negatividad de la varianza condicionada.

En la mayoría de las series financieras suele ser suficiente la consideración del modelo GARCH(1,1) <sup>(19)</sup>, tal y como fué propuesto por Taylor (1986) <sup>(20)</sup>, independientemente de Bollerslev, y que será el objetivo de nuestra aplicación empírica. La expresión genérica, por tanto, del proceso GARCH(1,1) sería:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad [3.4]$$

$$\varepsilon_t \sim \text{IIDS}(0,1)$$

donde  $\omega > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ . Estas restricciones de no negatividad de los parámetros son necesarias para garantizar la positividad de la varianza y, además se impone la condición  $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$  para garantizar que la varianza marginal de  $y_t$  sea finita y, por lo tanto, el proceso sea estacionario. Si dicha condición se satisface y utilizando la ley de expectativas iteradas se obtiene la varianza marginal de  $y_t$ , que viene dada por la siguiente expresión:

$$V(y_t) = E(y_t^2) = E(\sigma_t^2) = \frac{\omega}{(1 - \alpha_1 - \beta_1)} \quad [3.5]$$

En dicho proceso, la distribución marginal tiene forma desconocida <sup>(21)</sup>, con media cero:

$$E(y_t) = 0 \quad [3.6]$$

y donde los momentos impares son cero:

$$\text{Cov}(y_t, y_s) = 0, \quad \forall t \neq s \quad [3.7]$$

---

(19) Véase Bollerslev, Chou y Kroner (1992) para referencias al respecto. En todos ellos se muestra que este tipo de modelo es suficiente para modelizar con éxito los cambios temporales en la varianza condicional, inclusive cuando se trabaja con períodos muestrales largos.

(20) Taylor, S.J. (1986): *Modelling Financial Time Series*, John Wiley, Chichester, U.K.

(21) al igual que ocurría en el proceso ARCH (q). Distintas cuestiones sobre la distribución del proceso GARCH (1,1) son abordadas por Bollerslev, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 51, pp. 307-327.

y, por lo tanto, la distribución es simétrica. Al mismo tiempo, dicha distribución es leptocúrtica, siendo el coeficiente de curtosis <sup>(22)</sup>:

$$k_y = \frac{3 + 6\alpha_1^2}{(1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)} \quad [3.8]$$

y, en dicho caso, la función de autocorrelación de  $y_t^2$  sugerida por el mismo Bollerslev <sup>(23)</sup> para identificar los valores de  $p$  y  $q$  es similar a la de un proceso ARMA(1,1) y viene dada por la siguiente expresión:

$$\rho(1) = \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)}{(1 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \quad [3.9]$$

$$\rho(h) = (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}, \quad \rho > 1$$

Para finalizar, decir que Taylor (1986) y Schwert (1989) proponen otra modelización de la desviación típica condicional <sup>(24)</sup>, pero en todo caso, análoga a la ya expuesta.

#### 4. UNA APLICACIÓN EMPÍRICA

Consideraremos la serie de tipos de cambio spot peseta/dólar, en el período de turbulencias financieras comprendido entre el 1 de enero de 1992 y el 31 de diciembre de 1993, con periodicidad diaria, con un total de 491 observaciones. La fuente de datos utilizada procede de las estadísticas del Banco de España.

(22) Si:

$$3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1 \quad y \quad \varepsilon_t \sim HDS(0,1)$$

(23) Véase Bollerslev, T. (1988): "On the Correlation Structure for the Generalized Auto-regressive Conditional Heteroskedastic Process", *Journal of Time Series Analysis*, 9, pp. 121-131.

(24) Se modeliza la desviación típica condicional en función de las innovaciones y de sus propios valores pasados de la siguiente manera:

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i |y_{t-i}| + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}$$

donde:

$$\begin{aligned} p &\geq 0, & q &> 0, & \omega &> 0 \\ \alpha_i &\geq 0 & \forall i &= 1, \dots, q \\ \beta_j &\geq 0 & \forall j &= 1, \dots, p \end{aligned}$$



La metodología que se ha llevado a cabo ha sido la de un análisis univariante de la serie, mediante los instrumentos clásicos, esto es, los gráficos de correlación simple y parcial de la misma, test de significatividad de estos coeficientes y por último, mediante los contrastes de raíces unitarias dentro de la metodología de cointegración. De todo ello se desprende que la serie analizada es no estacionaria, concluyendo que sigue un proceso integrado de primer orden.

Así, la serie que estudiaremos –estacionaria en media y varianza– representa la tasa de rendimiento del tipo de cambio, tal y como queda recogido en la expresión siguiente:

$$Z_t = (1-L)S_t \quad [4.1]$$

donde  $S_t$  es el logaritmo del tipo de cambio spot diario peseta/dólar en el instante  $t$  y  $Z_t$  la tasa de rendimiento diaria del tipo de cambio para cada instante  $t$ .

En el cuadro 4.1 se muestran los principales momentos muestrales.

Cuadro 4.1. MOMENTOS MUESTRALES

Media	0,0007914
Desviación típica residual estimada	0,0089117
Asimetría	0,869173
Curtosis	7,867242
Jarque-Bera	545,3679
Box-Pierce Q(10)	17,93
Ljung-Box Q (10)	18,22

$$X^2_{0,05,10} = 18,3$$

A continuación se procedió a un examen detallado de los valores atípicos de la serie. En este contexto, la intervención que se ha llevado a cabo ha sido teniendo en cuenta que a lo largo del período analizado se han sucedido una serie de hechos –*noticias exógenas*– y que han podido influir en el tipo de cambio de manera considerable. Estas noticias exógenas tienen una naturaleza muy diversa y compleja, es por ello que, en este trabajo hemos decidido acudir a una de las fuentes de noticias exógenas acerca del tipo de cambio más obvia, siendo ésta la decisión por parte del gobierno español de devaluar la moneda nacional frente al marco alemán –y, por tanto su repercusión en el tipo de cambio peseta/dólar– en tres ocasiones en el período considerado (el 17 de septiembre de 1992 se devaluó un 5%, el 22 del mismo año un 6% y el 14 de mayo de 1993 un 8%) y, en este senti-

do, se han elaborado variables ficticias para cada una de las noticias de devaluación efectuadas en el período <sup>(25)</sup>. El tratamiento de dichas variables se ha llevado a cabo en base al análisis gráfico de la serie, en la cual se observa que la segunda y tercera devaluación tienen un carácter de escalón o cambio de nivel en la evolución del tipo de cambio peseta-dólar mientras que, para la primera devaluación se aprecia gráficamente un comportamiento típico de escalón con 2 w's.

Así, pues, se definieron las tres variables de intervención siguientes:

$$\begin{aligned}\xi_t^{E1} &= \{ 1 \text{ en } t \geq t_0, 0 \text{ } t < t_0 \\ \xi_t^{E2} &= \{ 1 \text{ en } t \geq t_0, 0 \text{ } t < t_0 \\ \xi_t^{E3} &= \{ 1 \text{ en } t \geq t_0, 0 \text{ } t < t_0\end{aligned}$$

siendo  $t_0$  el instante en que se produjo cada una de las tres devaluaciones.

Bajo estas consideraciones se estimó el modelo siguiente:

$$Z_t = (w_{10}\xi_t + w_{11}L)\xi_t^{E1} + w_{20}\xi_t^{E2} + w_{30}\xi_t^{E3} + u_t \quad [4.2]$$

$$u_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Los resultados de la estimación fueron:

**Cuadro 4.2. RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN**

	Parámetro	t - Ratio
$w_{10}$	0,05430	6,6463
$w_{11}$	-0,03739	-4,5765
$w_{20}$	0,02766	3,3855
$w_{30}$	0,03624	4,4357

**Cuadro 4.3. MOMENTOS MUESTRALES**

Media	0,000461
Desviación típica de la media	0,000368
Desviación típica residual estimada	0,008161

(25) Las devaluaciones se consideran en diferencias para de esta manera homogeneizarlas con la forma en que está generada la variable dependiente, ya que un comportamiento de escalón al considerar diferencias se traduce en un impulso mientras un comportamiento de impulso se traduce en una reacción de tipo zig-zag.

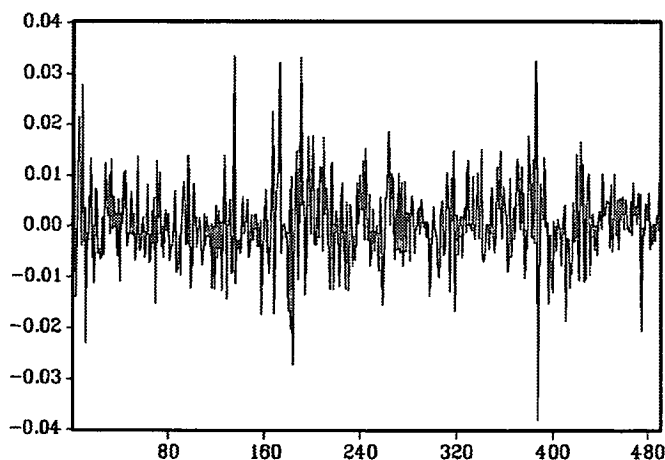
Asimetría	0,251273
Curtosis	5,640229
Jarque-Bera	147,4770
Box-Pierce Q(10)	14,58
Ljung-Box Q (10)	14,83
Box-Pierce Q <sub>2</sub> (10)	39,79
Ljung-Box Q <sub>2</sub> (10)	40,33

$$X^2_{0,05,10} = 18,3$$

Q<sub>2</sub> (10) denota el estadístico de Box-Pierce y Ljung-Box respectivamente, de la serie de residuos al cuadrado.

Gráfico 4.1. RESIDUOS DEL MODELO

$$Z_t = (w_{10} - w_{11}L)\xi_t^{E_1} + w_{20}\xi_t^{E_2} + w_{30}\xi_t^{E_3} + u_t$$



En lo que respecta a la etapa del chequeo parece claro que se pueden extraer algunas conclusiones —cuadro 4.3—. Se observa en primer lugar una importante reducción de la desviación típica residual respecto de la serie original y los estadísticos Box-Pierce y Ljung-Box se han reducido respectivamente de 17,93 a 14,58 y de 18,22 a 14,83. El efecto de las tres devoluciones resulta ser significativo en la explicación de la evolución del rendimiento diario del tipo de cambio peseta/dólar. Los coeficientes estimados tienen los signos y cuantías esperados.

Del análisis de los residuos de dicho ajuste, se pueden extraer además unas propiedades particulares y que son frecuentes en la mayoría de las se-

ries financieras observadas con frecuencias elevadas. A partir de este momento cuando se mencione la serie de rendimientos del tipo de cambio, estaremos haciendo referencia a dicha serie de residuos. En primer lugar hay que destacar que los estadísticos de Box-Pierce y Ljung-Box no son significativos y, por lo tanto, la serie no tiene estructura dinámica en la media –en el nivel de la serie–, sin embargo,  $Q_2(10)$  toma los valores de 39,79 y 40,33 respectivamente, siendo una fuerte evidencia de dinamismo en los cuadrados de la serie. En segundo lugar, se puede observar que la curtosis de la serie diaria de rendimientos del tipo de cambio peseta/dólar es 5,640229, es decir, significativamente mayor que 3 y, por lo tanto, la distribución empírica de esta serie tiene colas más anchas que las de la distribución normal, –distribuciones leptocúrticas<sup>(26)</sup>–.

Por otra parte, se constata también un agrupamiento de la volatilidad<sup>(27)</sup> que se refleja en que las autocorrelaciones de la serie al cuadrado<sup>(28)</sup>, son significativamente distintas de cero, el estadístico Box-Ljung para 10 retardos de  $Zt^2$ ,  $Q_2(10) = 40,33$  un valor altamente significativo. Al mismo tiempo, la autocorrelación de los incrementos al cuadrado es claramente superior a la de los propios incrementos, lo cual ya es un indicio de que los incrementos presentan heterocedasticidad condicional autorregresiva, es decir, es un indicio de la existencia de efectos ARCH.

Examinados los resultados obtenidos en esta sección<sup>(29)</sup>, se propone estimar la volatilidad del rendimiento diario en el mercado de cambios para el tipo peseta/dólar en el período anteriormene considerado mediante un modelo GARCH(1,1)<sup>(30)</sup>, cuya formulación, flexibilizada a nuestro caso, vendría dada por la siguiente expresión:

(26) Un detallado estudio sobre las primeras referencias con respecto a esta característica -leptocurtosis- puede verse en Mandelbrot, B. (1963): "The Variation of Certain Speculative prices", *Journal of Business*, 36, pp. 394-419; y en Fama, E. F. (1965): "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38, pp. 34-105.

(27) Cfr. Mandelbrot (1963) y Fama (1965).

(28) Otra posibilidad sería analizar las autocorrelaciones de la serie de incrementos diarios en valor absoluto.

(29) Cabe decir aquí también, a modo de reflexión, que una regularidad empírica que es frecuentemente observable en series financieras diarias, es el hecho de constatare algunos efectos estacionales en el viernes y el lunes debidos a que no existen transacciones comerciales durante el fin de semana, no obstante, este efecto lo hemos tratado de incorporar a través del análisis de intervención en la serie mediante variables dummies, no resultando significativa su inclusión. Incluso podrían observarse también en este tipo de series, efectos estacionales dentro del día si se realizase un análisis hora a hora, hecho que reflejaría principalmente los períodos de descanso para las comidas. No obstante, esta cuestión no será abordada en nuestro análisis.

Un análisis más pormenorizado de estas cuestiones puede encontrarse en Baillie, R.T. y Bollerslev, T. (1991): "Intra Day and Inter Day Volatility in Foreign Exchange Rates", *Review of Economic Studies*, 58, pp. 565-585.

(30) que es, en la práctica, el más utilizado en la modelización de series financieras. La argumentación de tal especial atención radica en que numerosos trabajos empíricos con series

$$Z_t = (w_{10} - w_{11}L)\xi_t^{E_1} + w_{20}\xi_t^{E_2} + w_{30}\xi_t^{E_3} + u_t$$

$$u_t \sim N(0, h_t^2)$$
[4.3]

$$h_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2$$

donde  $h_t^2$  es la varianza condicional del término de error  $u_t$  respecto al conjunto de información pasada. El cuadro 4.4 refleja las estimaciones de la volatilidad obtenidas de ajustar el modelo anterior, junto con sus desviaciones estándar y la t-ratio.:

**Cuadro 4.4. RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN GARCH (1,1)**

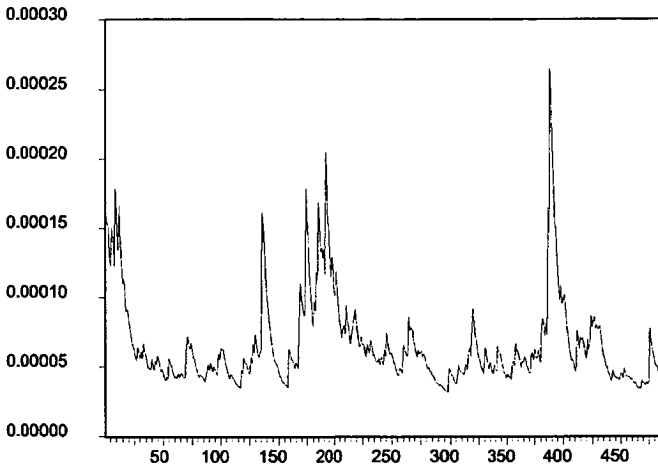
GARCH (1,1)	Estimación (D.T.)	t-Ratio
$\omega$	4,69.10 <sup>-6</sup> (1,98.10 <sup>-6</sup> )	2,362823
$\alpha_1$	0,093563 (0,024863)	3,763108
$\beta_1$	0,832509 (0,050290)	16,55428
Asimetría		0.329707
Curtosis		4.313593
Jarque-Bera		44.10720
Q(10)		12.351

El gráfico 4.2 muestra la varianza condicional  $-h_t^2-$  del proceso GARCH (1,1). Hay que destacar una serie de resultados, que son, en primer lugar, la estimación de la volatilidad, medida por el parámetro que acompaña a  $h_{t-1}$ , es 0,832509 refleja el carácter variable de misma, ésta tiene niveles más altos al comienzo de la muestra, que disminuye pausadamente a continuación y, se incrementa nuevamente hacia el final del período objeto de estudio, tomando aquí los mayores valores -hecho que

---

financieras realizados en la última década muestran que, éste tipo de modelización, con tan pocos parámetros, es suficiente para modelizar con éxito los cambios temporales en la varianza condicional, inclusive cuando se trabaja con períodos muestrales largos. Véase Bollerslev, Chou y Kroner (1992) para referencias al respecto.

**Gráfico 4.2.** VARIANZA CONDICIONAL DEL RENDIMIENTO DEL TIPO DE CAMBIO PESETA/DÓLAR EN EL PROCESO GARCH (1,1).



encaja con el período muestral analizado—, lo cual, unido a la profundidad de las oscilaciones, refuerza la idea de que existe una estrecha conexión entre las perturbaciones en los mercados financieros y monetarios y el grado de variabilidad de la tasa de rendimiento en el mercado de cambios. Por su parte, las observaciones estandarizadas, representadas por  $e_t = u_t / \hat{h}_t$  tienen un coeficiente de curtosis de 4,313593, es decir, la curtosis de los residuos ha disminuido pero todavía sigue siendo significativamente mayor que 3. Las autocorrelaciones de  $e_t^2 - Q_2(10) = 15,01$  (con una probabilidad asociada de 0,123)— ya no son significativas<sup>(31)</sup>.

**Cuadro 4.5.** TEST DE ESPECIFICACIÓN

ARCH	HET	SERIAL
1,709596 Prob.0,191655	1,202829 Prob.0,301236	0,405680 Prob.0,748985
(3,84)	(7,81)	(7,81)

Entre paréntesis figuran los valores críticos de la distribución  $\chi_2$  para un nivel de significación del 5%.

SERIAL: estadístico LM que contrasta la correlación serial; HET: estadístico LM que contrasta la heterocedasticidad, ARCH: estadístico LM que contrasta la hipótesis nula de NO ARCH.

(31) Un análisis de la densidad estimada de  $e_t$  y la densidad normal refleja claramente la existencia de divergencias entre ambas, siendo mayor en el centro de la distribución, donde se observa una concentración de valores alrededor de cero muy superior a que se esperaría si las observaciones estandarizadas siguieran una distribución normal, al mismo tiempo se observa también que las colas son más anchas que las de la distribución normal.

Finalmente, en el cuadro 7.4 se reflejan algunos resultados derivados de los test de validación, examinando la posibilidad de correlación serial y heterocedasticidad en el modelo estimado. Ambos contrastes se realizan con los residuos normalizados y están basados en el de los multiplicadores de Lagrange.

Concretamente, para contrastar si persiste la heterocedasticidad en el modelo GARCH(1,1), se utilizan dos test. El primero de ellos lo denotamos en el cuadro 7.4 por ARCH<sup>(32)</sup>. El resultado de este test toma un valor de 1,709596 lo cual nos lleva, dado un nivel de significación del 5% e introduciendo un retardo, a no rechazar la homocedasticidad. Para poder rechazar la hipótesis nula se requerirían, en este caso, niveles de significación superiores al 25%. El segundo test, que se denota por HET en el mismo cuadro, es similar al test de White de heterocedasticidad ponderando las variables por la varianza condicional<sup>(33)</sup>. El resultado de este test (HET=1,202829) tampoco permite rechazar la hipótesis nula para un nivel de significación del 5%. Por tanto, en definitiva, teniendo en cuenta ambos contrastes, no se puede rechazar, para un nivel de significación del 5%, la hipótesis nula de homocedasticidad en los residuos normalizados.

Por otra parte, para analizar la correlación serial en el modelo GARCH(1,1) hemos utilizado el test LM que denominados SERIAL<sup>(34)</sup>. El resultado de este test, con un valor de 0,405680 nos lleva a aceptar la hipótesis nula de incorrelación serial, es decir, se rechaza la existencia de correlación serial.

---

(32) Este test se realiza en la regresión de:

$$\frac{e_t^2}{-y} - 1 \text{ en } \frac{1}{-t}$$

y p retardos de la variable dependiente, siendo  $e_t^2$  los residuos estimados del modelo GARCH y  $h_t^2$  la varianza condicional evaluada en el estimador máximo-verosímil. La hipótesis nula es NO ARCH frente a la alternativa ARCH (p), bajo esta hipótesis, el estadístico LM se distribuye como una  $X^2$  con p grados de libertad.

(33) Este test se obtiene en la regresión de:

$$\frac{e_t^2}{\sigma_i^2} - 1 \text{ en } \frac{1}{\sigma_i^2}, \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \frac{x_i h_t}{\sigma_i^2}$$

La hipótesis nula a contrastar es la de homocedasticidad, bajo esta hipótesis el estadístico se distribuye como una  $X^2$  con 3 grados de libertad. La idea de este test se basa en verificar si los coeficientes de esas variables son significativamente distintas de cero. Este test ha sido propuesto por Pagan y Hall (1983) teniendo en cuenta que el test de White no puede ser aplicado directamente por ser la estimación ARCH una estimación no lineal.

(34) Este test se obtiene haciendo la regresión de dichos residuos:

$$\frac{e_t^2}{\sigma_i^2}$$

en sus propios valores retardados. En este caso concreto, se hizo en tres valores retardados.

En definitiva, los resultados revelan que la tasa de rendimiento diaria del tipo de cambio peseta/dólar en el período de turbulencias 1992-93 podría ser modelizada –de una manera razonablemente coherente– por medio del proceso GARCH(1,1). En términos generales, en la especificación GARCH las desviaciones típicas de los estimadores han sido bajas y, los estimadores de los coeficientes  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  son claramente precisos<sup>(35)</sup>. Al mismo tiempo, los resultados de la estimación no detectan problemas de autocorrelación serial y heterocedasticidad en los residuos, por lo cual cabe afirmar que, el modelo utilizado ha proporcionado resultados aceptables a la hora de ajustar adecuadamente la estructura dinámica de los cuadrados de la serie.

## 5. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo hemos pretendido analizar las tormentas financieras de principios de los noventa en España, contrastando la existencia de efectos ARCH.

De acuerdo con lo que precede, parece que el modelo se comporta mejor cuando incluimos cambios estructurales –las noticias de devaluación– que si lo analizamos en su versión inicial y, considerando al mismo tiempo el hecho de que nuestra evidencia empírica avala las suposiciones hechas desde el modelo GARCH(1,1), podemos concluir que la especificación parece ser adecuada.

No obstante, no queremos concluir nuestro trabajo sin señalar que los procedimientos econométricos, incluso proporcionando evidencias más que causales de la presencia de procesos GARCH (1,1) para la serie analizada, existen numerosas vías de investigación por donde seguir avanzando y, en este sentido, sin pretender ser exhaustivos al respecto, cabe considerar que es posible que dicha volatilidad fuese mejor explicada bajo la consideración de los modelos de volatilidad estocástica (SV) propuestos por Harvey (1992), que constituyen una alternativa muy a tener en cuenta al modelizar volatilidades.

---

(35) Conviene señalar que se ha planteado el análisis de la condición  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$  necesaria para garantizar que la varianza marginal de la serie sea finita y, por tanto, el proceso sea estacionario. El contraste propuesto,  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ , no permite aceptar, para niveles de significación superiores al 5% la hipótesis nula y, por lo tanto, no es necesaria la consideración de un modelo tipo IGARCH Téngase en cuenta que, el hecho de que la suma  $\alpha_1 + \beta_1$  esté cerca de la unidad indicaría que la varianza condicional evoluciona muy lentamente, es decir, los shocks en la volatilidad persistente, lo cual es coherente con los resultados obtenidos en nuestro trabajo y, en general con los obtenidos en la mayoría de los estudios empíricos existentes. Para más detalles al respecto véase, entre otros, Bollerslev, T.; Chou, R.Y. y Kroner, K.F. (1992): “ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence”, *Journal of Econometrics*, 52, pp. 5-59.



## BIBLIOGRAFÍA

- BAILLIE, R.T. y BOLLERSLEV, T. (1991). "Intra Day and Inter Day Volatility Foreign Exchange Rates". *Review of Economic Studies*, núm. 58, pp. 565-585.
- BAJO, O. y SOSVILLA, S. (1993). "Teorías del tipo de cambio: una panorámica". *Revista de Economía Aplicada*, vol. 1, núm. 2.
- BERA, A.K. y M.L. HIGGINS (1993). "A survey of ARCH models: properties, estimation and testing". *Journal of Economic Surveys*, núm. 7, pp. 305-366.
- BERA, A.K., HIGGINS, M.L., y LEE, S. (1992). "Interaction Between Autocorrelation and Conditional Heteroskedasticity: a Random Coefficient Approach", *Journal of Business and Economic Statistics*, núm. 10, pp. 133-142.
- BOLLERSLEV, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, núm. 31, pp. 307-327.
- (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, núm. 51, pp. 307-327.
- (1987). "A conditionally heteroscedastic time series model for speculative prices and rates of return". *Review of Economics and Statistics*, núm. 69, pp. 542-547.
- (1988). "On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process". *Journal of Time Series Analysis*, núm. 9, pp. 121-131.
- BOLLERSLEV, T., R.Y. CHOU y K.F. KRONER (1992). "ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence". *Journal of Econometrics*, núm. 52, pp. 5-59.
- ENGLE, R.F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica*, núm. 50, pp. 987-1008.
- (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica*, núm. 50, pp. 987-1008.
- (1983). "Estimates of the Variance of U.S. Inflation Based on the ARCH Model". *Journal of Money, Credit, and Banking*, núm. 15, pp. 286-301.
- ENGLE, R.F. y KRAFT, D. (1983). "Multiperiod Forecast Error Variances of Inflation Estimated from ARCH Models". En A. Zellner, Bureau of the Census (ed.). *Applied Time Series Analysis of Economic Data*. Washington, DC, pp. 293-302.
- ENGLE, R.F., NG, V.K., y ROTHSCHILSD, M. (1991). "Asset Pricing with a factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills". *Journal of Econometrics*, núm. 45, pp. 213-238.
- FAMA, E.F. (1965). "The Behavior of Stock Market Prices". *Journal of Business*, núm. 38, pp. 34-105.
- FRANKEL, J.A. y ROSE, A.K. (1995). "Empirical research on nominal exchange rates". En G. Grossman and K. Rogoff (ed.). *Handbook of International Economics*, vol. III, chapter 33, pp. 1.689-1.729.

- ISARD, P. (1995). *Exchange Rate Economics*. Ed. Cambridge University Press.
- MANDELBROT, B. (1963). "The Variation of Certain Speculative prices". *Journal of Business*, núm. 36, pp. 394-419.
- NELSON, D.B. (1991). "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach". *Econometric*, núm. 59, pp. 347-370.
- NOVALES, A. y GRACIA-DIEZ, M. (1993). "Guía para la Estimación de Modelos ARCH", *Estadística Española*, vol. 35, núm. 132, pp. 5-38.
- PAGAN, A.R., y SCHWERT, G.W. (1990). "Alternative Models for Conditional stock Volatility". *Journal of Econometrics*, núm. 45, pp. 267-290.
- PALM, F.C. (1996). "GARCH models for volatility". En G.S. Maddala y C.R. Rao (ed.), *Handbook of Statistics*, Amsterdam, Elsevier, vol. 14.
- SCHWERT, G.W. (1989). "Business Cycles, Financial Crises and Stock Volatility". *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, núm. 39, pp. 83-126.
- SHEPARD, N.G. (1996). "Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility". En D.R. Cox, D.V. Hinkley y O.E. Barndorff-Nielsen (ed.), *Time Series Models in Econometrics, Finance and other fields*. London, Chapman and Hall.
- TAYLOR, M.P. (1995). "The Economics of Exchange Rates". *Journal of Economics Literature*, vol. XXXIII, marzo, pp. 13-47.
- TAYLOR, S. (1986). *Modelling Financial Time Series*. John Wiley & Sons, New York.