PROPIEDADES FINANCIERAS DE LOS MERCADOS DE ACTIVOS EN EQUILIBRIO GENERAL

Pedro José Gutiérrez
Universidad de Valladolid

RESUMEN.—Este trabajo analiza, en el marco de la Teoría del Equilibrio General Dinámico, las propiedades financieras de los mercados de activos en una Economía con Incertidumbre y horizonte temporal infinito. Estas propiedades financieras se obtienen estableciendo la equivalencia entre el equilibrio Arrow-Debreu y el equilibrio de Radner. El equilibrio Arrow-Debreu se caracteriza por una única apertura de mercados en el periodo inicial, mientras que en el equilibrio de Radner los mercados abren y cierran periodo tras periodo. Tras demostrar la equivalencia entre ambos equilibrios bajo la hipótesis de mercados completos, se derivan diferentes expresiones e interpretaciones para los precios de los activos existentes en la Economía así como propiedades financieras del equilibrio. El modelo, planteado para una economía de intercambio, presenta la ventaja de ser inmediatamente aplicable al caso de producción.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría del equilibrio general walrasiano fue extendida a marcos temporales con incertidumbre por Arrow (1953) y Debreu (1959), dando origen al concepto de equilibrio general conocido como equilibrio Arrow-Debreu. Posteriormente, Radner (1968) amplió los análisis de Arrow y Debreu incorporando elementos informacionales, formulando un nuevo concepto de equilibrio general denominado equilibrio de Radner. A partir de entonces han aparecido sucesivos estudios en la Teoría del Equilibrio General Dinámico en Economías con Incertidumbre, estando dedicados buena parte de ellos (Abel (1988), Breeden (1979), Constantinides (1982), Duffie (1992), Kreps y Porteus (1978), Lucas (1978), Merton (1973) y Mehra y Prescott (1985)) al análisis de la formación de precios de activos.

En este artículo se trata de manera exhaustiva y para una Economía de Intercambio con Incertidumbre no Estacionaria y Agentes Heterogéneos, modelizada en la sección 2, el núcleo teórico en la formación de los precios de equilibrio de los activos en un horizonte temporal infinito. Esta base teórica viene dada por la equivalencia entre el equilibrio Arrow-Debreu y el equilibrio de Radner, estudiada en la sección 3. A partir de esta equivalencia, en la sección 4 se obtienen diferentes expresiones e interpretaciones para los precios de los activos, derivándose en la sección 5 diversas propiedades financieras del equilibrio. Como rasgo interesante, señalaremos que ninguno de los resultados depende de supuestos ajenos a los propios del equilibrio general competitivo, de tal forma que no se requiere de homogeneidad entre agentes o estacionariedad en la incertidumbre. Por otra parte, todas las conclusiones y desarrollos son extensibles a una economía con producción, por lo cual son sumamente genéricos.

2. EL MODELO

Nuestro modelo, basado en Lucas (1978) y en Altuğ y Labadie (1994, cap.1), es de Equilibrio General Dinámico para una Economía de Intercambio. Consideraremos que en la Economía existe un número finito I de agentes que viven infinitos periodos, denotados con el subíndice i, $i = 1, 2, \ldots, I$. Aunque es sencillo extender el modelo y el análisis a una Economía con un número finito de bienes, adoptaremos el supuesto de bien único para simplificar la notación, y los I agentes de la Economía consumirán este único bien. Además supondremos que estos I agentes toman decisiones de ahorro-desahorro en un cierto número de activos existentes en la Economía. La Economía es de Intercambio, con lo cual las ofertas del bien de consumo y de los activos se consideran exógenas. La incertidumbre se introduce a partir de Procesos de Markov, diferentes para cada uno de los I agentes. En concreto consideraremos que en cada periodo $t, t = 0, 1, \ldots, \infty$, uno de L sucesos o estados de la naturaleza ocurre, estados de la naturaleza que cada agente considera gobernados por un particular Proceso de Markov de Primer Orden, cuyos fundamentos pueden ser consultados en Stokey y Lucas con Prescott (1989). Al introducir un Proceso de Markov específico para cada agente estamos suponiendo que cada individuo tiene creencias diferentes acerca de las ocurrencias de los estados de la naturaleza. Si llamamos $l, l = 1, 2, \ldots, L$ a los posibles estados de la naturaleza y l_t al estado de la naturaleza que acontece en el periodo t, tendremos

$$l_t = 1, 2, \ldots, L \qquad t = 0, 1, \ldots \infty$$

En cada periodo de tiempo y una vez que un estado de la naturaleza ocurre, queda definida una historia o trayectoria de la Economía. En términos genéricos, llamando s a la historia de la Economía una vez alcanzado el periodo t, tendremos

$$s = (l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{t-1}, l_t)$$

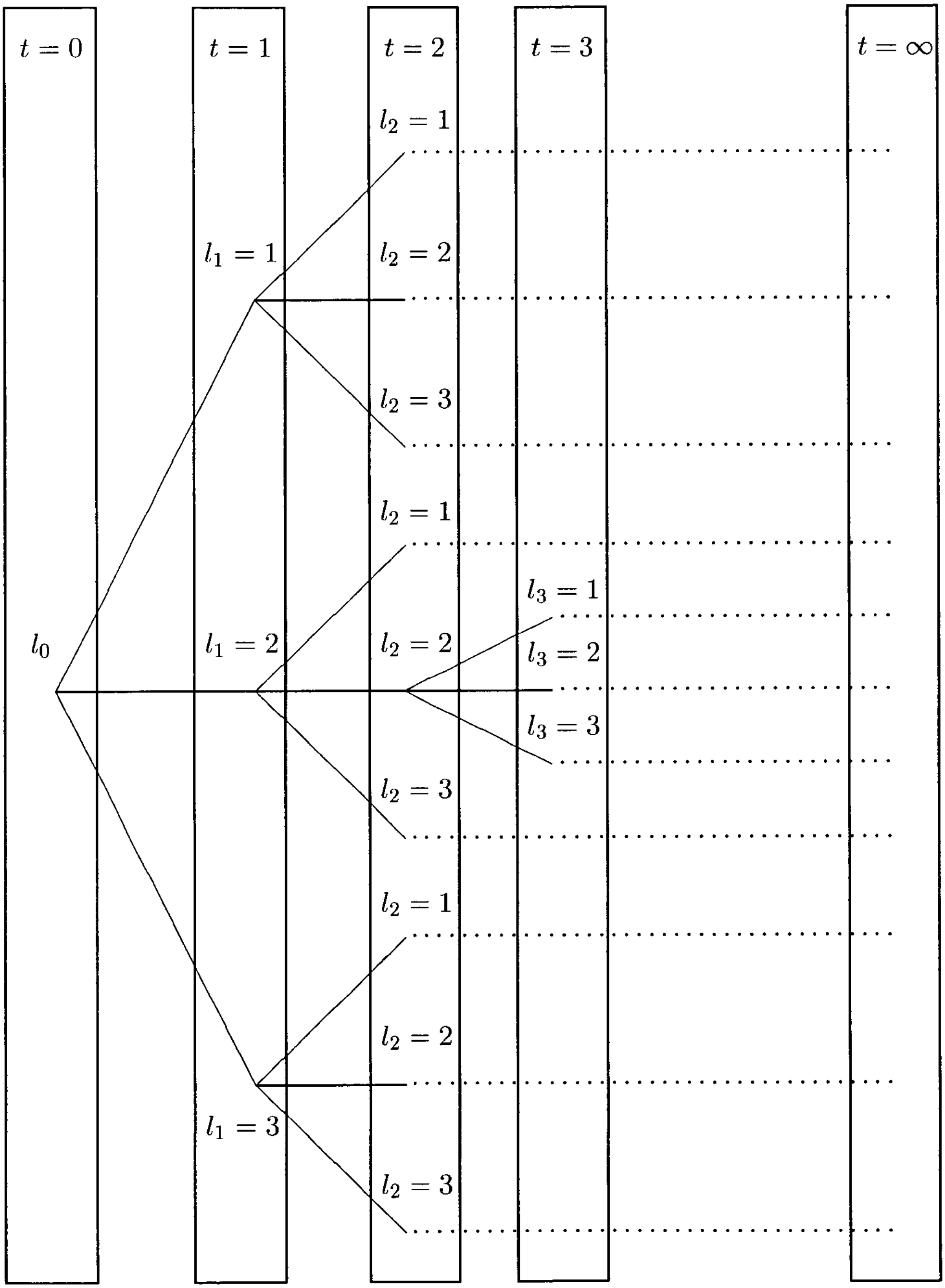
Para cada historia o trayectoria s denotaremos con $t(s)$ al periodo de tiempo para el cual se presenta la historia $s, s1, s2, \ldots, sL$ a los nudos inmediatamente posteriores, y $s-1$ al nudo inmediatamente anterior. Por último, definimos árbol de sucesos, S, como el conjunto de todas las posibles historias de la Economía.

Con el fin de simplificar la notación, a partir de ahora y a lo largo de todo el artículo consideraremos tres posibles estados de la naturaleza sin pérdida alguna de generalidad. Gráficamente, si $L = 3$, tendremos $l_t = 1, 2, 3$ para $t = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ y el árbol de sucesos será el representado en el gráfico 1. En este árbol de sucesos cada nudo representa una trayectoria s concreta de la Economía.

Como hemos dicho, consideraremos que las probabilidades subjetivas de ocurrencia de estos tres sucesos vienen gobernadas por un Proceso de Markov de Primer Orden diferente para cada individuo, con lo cual tendremos I diferentes Procesos de Markov. Por tratarse de un Proceso de Markov de Primer Orden, para cualquier instante de tiempo la probabilidad de ocurrencia que cada individuo asigna a un estado de la naturaleza sólo depende del suceso o estado de la naturaleza ocurrido en el periodo inmediatamente anterior. Por lo tanto, considerando que el número de estados de la naturaleza es 3, para todo periodo de tiempo $t = 1, 2, \ldots, \infty$ queda definida una matriz, diferente en los distintos instantes de tiempo y entre agentes

$$\Pi^{it} = \begin{bmatrix} \pi_{11}^{it} & \pi_{12}^{it} & \pi_{13}^{it} \\ \pi_{21}^{it} & \pi_{22}^{it} & \pi_{23}^{it} \\ \pi_{31}^{it} & \pi_{32}^{it} & \pi_{33}^{it} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, I \\ t = 1, 2, \ldots, \infty \end{array}$$

Figura 1: Árbol de Sucesos para $L = 3$



donde

$$\pi_{jk}^{it} = \overset{i}{\Pr}\left[l_t = j | l_{t-1} = k\right] \qquad \begin{array}{l} j,k = 1,2,3 \\ t = 1,2,\ldots,\infty \\ i = 1,2,\ldots,I \end{array}$$

es la probabilidad subjetiva que el individuo i asigna a la ocurrencia del estado j en el periodo t habiendose presentado el estado k en el periodo $t-1$, verificándose

$$\pi_{jk}^{it} > 0 \qquad \begin{array}{l} j,k = 1,2,3 \\ t = 1,2,\ldots,\infty \\ i = 1,2,\ldots,I \end{array}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \pi_{jk}^{it} = 1 \qquad \begin{array}{l} k = 1,2,3 \\ t = 1,2,\ldots,\infty \\ i = 1,2,\ldots,I \end{array}$$

A partir de esta matriz Π^{it}, llamando $\pi^i(s)$ a la probabilidad de ocurrencia asignada por el individuo i a la historia $s = (l_0, l_1, \ldots, l_{t(s)-1}, l_{t(s)})$, $s \in \mathcal{S}$, esto es a la probabilidad subjetiva de ocurrencia de cualquier nudo del árbol de sucesos $\mathcal{S}$, tendremos

$$\pi^i(s) = \pi_{l_1 l_0}^{i1} \pi_{l_2 l_1}^{i2} \ldots \pi_{l_{t(s)} l_{t(s)-1}}^{it(s)} \qquad s \in \mathcal{S}$$

En cada periodo los activos existentes en la Economía proporcionan dividendos, siempre positivos y que consideraremos expresados en términos del bien de consumo, dividendos que dependerán del activo considerado, de la historia previa y del estado de la naturaleza que acontezca en dicho periodo. Si consideramos que en la Economía existen N activos, dado que el número de estados de la naturaleza es 3, para cada nudo o historia $s \in \mathcal{S}$ queda definida una matriz $\mathcal{D}_s$ de dividendos para el periodo siguiente

$$\mathcal{D}_s = \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{N,s1} & d_{N,s2} & d_{N,s3} \end{bmatrix} \qquad s \in \mathcal{S}$$

En esta matriz el número de filas se corresponde con el de activos, N, mientras que el número de columnas, 3, hace referencia a los posibles estados de la naturaleza. De esta forma, $d_{n,sl}$ representa el dividendo que supone el activo $n, n = 1, 2, \ldots, N$ si tras la historia s acontece el estado de la naturaleza $l, l = 1, 2, 3$. Análogamente, podemos definir un vector $\mathcal{D}_s^r$ que recoja los dividendos de los N activos una vez que se ha alcanzado un nudo s del árbol de sucesos $\mathcal{S}$. Este vector tendría la expresión

$$\mathcal{D}_s^r = \begin{bmatrix} d_{1,s} \\ d_{2,s} \\ \ldots \\ d_{N,s} \end{bmatrix} \qquad s \in \mathcal{S}$$

donde $d_{n,s}$ serán los dividendos proporcionados por el activo $n, n = 1, 2, \ldots, N$ en el nudo $s, s \in \mathcal{S}$.

Introducimos a continuación una hipótesis clave del modelo, la hipótesis de mercados completos. En virtud de este supuesto, existen tantos activos como estados de la naturaleza, es decir $L = N$, y la matriz de dividendos es no singular para cualquier nudo $s \in \mathcal{S}$, con lo cual garantizamos que cada individuo pueda cubrirse siempre de forma independiente para todos y cada uno de los estados de la naturaleza mediante sus decisiones de ahorro-desahorro en los activos. Con esta hipótesis de mercados completos, nuestra matriz de dividendos $\mathcal{D}_s$ toma la expresión

$$\mathcal{D}_s = \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} \qquad s \in \mathcal{S}$$

verificando

$$|\mathcal{D}_s| = \begin{vmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad s \in \mathcal{S}$$

y los vectores $\mathcal{D}_s^r$ serán

$$\mathcal{D}_s^r = \begin{bmatrix} d_{1,s} \\ d_{2,s} \\ d_{3,s} \end{bmatrix} \qquad s \in \mathcal{S}$$

Nuestra Economía es de Intercambio, y por consiguiente consideraremos que la oferta de los 3 activos es exógena. En concreto supondremos que los agentes reciben una dotación de cada activo en cada periodo de tiempo $\bar{\theta}_n^i(s)$, n=1,2,3 dependiente del nudo s del árbol de sucesos $\mathcal{S}$ en el que se encuentra la Economía.

Cada individuo $i = 1, 2, \ldots, I$ maximiza su función de utilidad esperada para todas las posibles trayectorias, descontada según el factor $\beta_i \in (0,1)$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \beta_i^{t(s)} \pi^i(s) \mathcal{U}_i(C_s^i)$$

donde C_s^i es el consumo del individuo i en el nudo s. Finalmente, al igual que ocurría con los activos, cada uno de los I individuos percibe en cada periodo de tiempo una dotación del bien de consumo que depende del nudo o historia s en la que se encuentra la Economía, $w^i(s)$.

De forma resumida, las hipótesis básicas del modelo son:

Hipótesis 1 *En la Economía existen I agentes que viven un número infinito de periodos.*

Hipótesis 2 *Los I agentes consumen un único bien y ahorran-desahorran en N activos.*

Hipótesis 3 *En cada periodo de tiempo uno de L estados de la naturaleza sucede, que cada individuo considera gobernados por un particular Proceso de Markov de Primer Orden.*

Hipótesis 4 *Los dividendos de cada activo dependen del estado de la naturaleza y de la historia previa, esto es, son en principio diferentes para cada nudo s del árbol de sucesos $\mathcal{S}$. Supondremos además que estos dividendos vienen expresados en términos del bien de consumo, son no negativos y están acotados, de tal forma que $d_{n,sl} \geq 0$, $d_{n,sl} \leq \bar{d}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, $l = 1, 2, \ldots, L$, $s \in \mathcal{S}$.*

Hipótesis 5 *Los mercados son completos, con lo cual el número de estados de la naturaleza L coincide con el número de activos N, y la matriz de dividendos es no singular. En concreto, sin pérdida de generalidad, consideraremos $L = N = 3$.*

Hipótesis 6 *La Economía es de intercambio:*

- *En cuanto a los activos, cada uno de los individuos recibe una cantidad neta de activos en cada periodo dependiente de la historia alcanzada por la Economía, $\bar{\theta}_n^i(s), n = 1, 2, 3$. Estas dotaciones de activos no se pueden consumir hasta que producen sus dividendos al cabo de un periodo. Siempre supondremos que son estrictamente positivas y acotadas, esto es, $\bar{\theta}_n^i(s) > 0$, $\bar{\theta}_n^i(s) \leq \bar{\theta}$, $n = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \ldots, I$, $s \in \mathcal{S}$.*

- *Respecto al bien de consumo, al igual que ocurría con los activos, cada uno de los individuos recibe una dotación dependiente de la trayectoria recorrida por la Economía, $w^i(s)$, estrictamente positiva y acotada: $w^i(s) > 0$, $w^i(s) \leq \bar{w}$, $i = 1, 2, \ldots, I$, $s \in \mathcal{S}$.*

Tendremos por lo tanto que las dotaciones de bien de consumo y de activos son estrictamente positivas, acotadas y diferentes para cada individuo y para cada nudo s del árbol de sucesos $\mathcal{S}$.

Hipótesis 7 *Los I agentes maximizan su función de utilidad esperada para todas las posibles trayectorias descontada según el factor $\beta \in (0, 1)$*

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \beta_i^{t(s)} \pi^i(s) \mathcal{U}_i(C_s^i)$$

donde C_s^i es el consumo del individuo i en el nudo s.

Hipótesis 8 *Para todos los agentes de la Economía, las funciones de utilidad $\mathcal{U}_i(C_s^i)$ son continuamente diferenciables, estrictamente cóncavas y estrictamente crecientes en C_s^i, verificando*

$$\lim_{C_s^i \to 0} \mathcal{U}_i'(C_s^i) = \infty$$

$$i = 1, 2, \ldots, I$$

Hipótesis 9 *Las creencias de cualquiera de los I individuos de la Economía acerca de la ocurrencia de los estados de la naturaleza son tales que para cada uno de los estados siempre existe una probabilidad subjetiva mínima estrictamente positiva.*

Hipótesis 10 *Las decisiones de consumo de los individuos son tales que para cada individuo existe un consumo mínimo estrictamente positivo, que llamaremos $\underline{c}^i$.*

Las cinco primeras hipótesis han sido explicadas previamente en esta sección. El supuesto 6 establece que la Economía es de Intercambio, estando las ofertas de bien de consumo y de activos determinadas exógenamente, siendo en principio diferentes para cada nudo s del árbol de sucesos $\mathcal{S}$. Las dotaciones de activos juegan un doble papel, puesto que determinan la oferta total de activos en el nudo en el que se perciben y también influyen en la oferta total del bien de consumo en los nudos inmediatamente posteriores, al producir dividendos que estamos considerando expresados en términos de dicho bien de consumo. Estamos asimilando nuestros activos a bienes de capital con oferta fija en cada nudo, que no se consumen mientras son bienes de capital pero que suponen en el futuro mayores posibilidades de consumo. La hipótesis 8 recoge los supuestos habituales para la función de utilidad, y en cuanto a 9, estamos suponiendo que los agentes creen que los estados de la naturaleza siempre ocurren con una probabilidad mínima positiva bien definida, sea cual sea la historia de la Economía. Llamaremos

$$\pi_1^i, \pi_2^i, \pi_3^i$$

a la probabilidades mínimas de ocurrencia asignadas por el agente i a los estados $1, 2$ y 3 respectivamente. Respecto a 10, estamos suponiendo que el consumo de los individuos está acotado por debajo por una constante estrictamente positiva. Esta hipótesis vendría justificada por el propio modelo suponiendo que los consumidores necesitan de un consumo mínimo de subsistencia: para que el número de agentes sea constante, todos ellos deben de consumir por encima del consumo de subsistencia.

3. EQUILIBRIOS Y EQUIVALENCIAS

Tras exponer los rasgos generales del Modelo, en esta segunda sección estudiaremos el Equilibrio para nuestra Economía de Intercambio con Incertidumbre. Definiremos el Equilibrio Arrow-Debreu y el equilibrio de Radner (cuyos fundamentos pueden ser consultados en Mas-Colell, Whinston y Green (1995), Magill y Shafer (1991) y Duffie y Sonnenschein (1989)), analizando las características que presentan, y estudiaremos su equivalencia bajo la hipótesis de mercados completos. Nuestras definiciones de Equilibrio Arrow-Debreu y de Equilibrio de Radner son una extensión de las existentes en tiempo finito en Magill y Shafer (1991), en un entorno de completa certidumbre en Kehoe (1991) y en una economía con incertidumbre en Radner (1991), las cuales a su vez están basadas en las definiciones ya clásicas de Arrow y Hahn (1971) y Debreu (1959). El referente más inmediato se encuentra en Altuğ y Labadie (1994) y en Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

3.1 El equilibrio Arrow-Debreu

En el equilibrio Arrow-Debreu todos los mercados abren y cierran exclusivamente en el periodo $t = 0$. En el periodo inicial $t = 0$, tanto para el bien de consumo como para los 3 activos y tanto para el periodo $t = 0$ como para los periodos posteriores hasta el infinito, tienen lugar los acuerdos entre los I individuos acerca de los intercambios y transacciones a realizar en la Economía.

Exceptuando el periodo $t = 0$ en el cual tienen lugar intercambios reales en el bien de consumo y en participaciones en los activos, para el resto de periodos los acuerdos entre individuos suponen la firma de contratos (contratros Arrow-Debreu o *Arrow-Debreu contingent claims*) que envuelven futuras entregas del bien de consumo y futuras participaciones en los activos, a unos precios (precios Arrow-Debreu) determinados en el periodo $t = 0$. Estos contratos surten efecto siempre que un determinado esquema de sucesos ocurra, es decir siempre que la Economía haya recorrido la trayectoria especificada en el contrato, y solamente en ese caso. El hecho de que la totalidad de transacciones de la Economía a lo largo de todo el árbol de sucesos $\mathcal{S}$ se acuerde en el periodo inicial $t = 0$, posibilita la aparición de cancelaciones de deudas entre individuos en dicho periodo, deudas que son consecuencia de sus decisiones intertemporales para todo el árbol de sucesos. Por otra parte, para cada uno de los agentes el valor actualizado de sus endeudamientos netos en todo el árbol de sucesos ha de ser nulo, ya que de otra forma existirían deudas impagadas y serían imposibles los acuerdos iniciales. En consecuencia, en el periodo inicial $t = 0$ aparece la posibilidad de cancelación de todas las operaciones en los 3 activos, y podemos considerar que de hecho en un equilibrio Arrow-Debreu los mercados de activos son inexistentes:

los I agentes de la Economía anticipan la compensación multilateral de sus operaciones en activos y su endeudamiento neto nulo, y deciden mantener en cartera sus dotaciones de activos, desapareciendo los mercados de activos y por consiguiente no teniendo sentido hablar de precios de activos. Adicionalmente, dado que los mercados para todas las mercancías abren tan sólo en el periodo $t = 0$, cada uno de los individuos debe plantearse una única restricción presupuestaria conjunta para todo su árbol de sucesos. En concreto, si llamamos p_s al precio del bien de consumo en el nudo s y p_{sl} al precio del bien de consumo en el nudo sl, $l = 1, 2, 3$, la restricción presupuestaria de cada agente será

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} p_s C_s^i \leq \sum_{s\in\mathcal{S}} p_s w^i(s) + \sum_{s\in\mathcal{S}} \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) \sum_{l=1}^{3} d_{n,sl} p_{sl} \qquad i = 1, 2, \ldots, I$$

que recoge cómo para el árbol de sucesos $\mathcal{S}$ el valor del consumo del individuo i, $\sum_{s\in\mathcal{S}} p_s C_s^i$ no puede exceder el valor de sus dotaciones de bien de consumo $\sum_{s\in\mathcal{S}} p_s w^i(s)$ más el valor de los rendimientos de sus dotaciones de activos $\sum_{s\in\mathcal{S}} \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) \sum_{l=1}^{3} d_{n,sl} p_{sl}$.

Definición 1 (Equilibrio Arrow-Debreu) *Llamamos Equilibrio Arrow-Debreu de la Economía especificada en las hipótesis 1-10 al conjunto de sucesiones* $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $\{\hat{C}_s^i\}_{s\in\mathcal{S}}, i = 1, 2, \ldots, I$ *tales que:*

- *Dada la sucesión* $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$*, las sucesiones* $\{\hat{C}_s^i\}_{s\in\mathcal{S}}, i = 1, 2, \ldots, I$ *solucionan para cada consumidor el problema*

$$\max_{C_s^i} \sum_{s\in\mathcal{S}} \beta_i^{t(s)} \pi^i(s) \mathcal{U}_i(C_s^i) \tag{1}$$

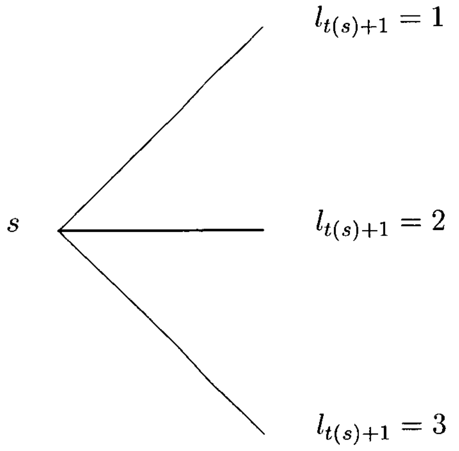
$$\begin{aligned} s.a. \quad & \sum_{s\in\mathcal{S}} \hat{p}_s C_s^i \leq \sum_{s\in\mathcal{S}} \hat{p}_s w^i(s) + \sum_{s\in\mathcal{S}} \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) \sum_{l=1}^{3} d_{n,sl} \hat{p}_{sl} \\ & C_s^i \geq 0 \\ & i = 1, 2, \ldots, I \end{aligned}$$

- *Se verifican las condiciones de factibilidad en el mercado del bien de consumo*

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{C}_{\eta_0}^i \leq \sum_{i=1}^{I} w^i(\eta_0) \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{C}_{sl}^i \leq \sum_{i=1}^{I} w^i(sl) + \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) d_{n,sl}$$

Figura 2: Célula básica del Árbol de Sucesos



$$l = 1, 2, 3$$
$$s \in \mathcal{S}$$

3.2 El equilibrio de Radner

En el equilibrio de Radner los mercados abren en todos y cada uno de los nudos s del árbol de sucesos $\mathcal{S}$. Por lo tanto, mientras que en un equilibrio Arrow-Debreu la restricción presupuestaria era única para todo el árbol de sucesos puesto que los mercados abrían tan sólo en el periodo $t = 0$, en el equilibrio de Radner existen tantas restricciones presupuestarias como nudos del árbol de sucesos, ya que los individuos tienen en cuenta que los mercados abren en cada nudo. En términos gráficos, en un Entorno Arrow-Debreu la restricción presupuestaria de los individuos hace referencia a la totalidad del árbol de sucesos $\mathcal{S}$ del gráfico 1, ya que el problema intertemporal de los consumidores ha de ser resuelto con una única apertura de los mercados en $t = 0$, mientras que en un Entorno de Mercados Secuenciales las restricciones presupuestarias hacen referencia a la célula básica del árbol de sucesos (gráfico 2) ya que los consumidores incorporan a su problema de optimización intertemporal la apertura de los mercados en cada nudo $s \in \mathcal{S}$. Llamaremos p_s al precio del bien de consumo en el nudo s, $q_{n,s}, n = 1,2,3$ al precio del activo n en el nudo s, $\theta^i_{n,s-1}, n = 1,2,3$ a la cantidad de activo n mantenida en cartera el nudo anterior hasta el nudo s por el individuo i y $\theta^i_{n,s}, n = 1,2,3$, $l = 1,2,3$ a la cantidad del activo n a mantener en cartera por el individuo i desde el nudo s hasta el periodo siguiente.

Con estas definiciones las restricciones presupuestarias de los agentes serán en cada nudo $s \in \mathcal{S}$

$$p_s C^i_s + \sum_{n=1}^{3} q_{n,s}\theta^i_{n,s} \leq p_s w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} q_{n,s}\bar{\theta}^i_n(s) + p_s \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s-1} d_{n,s}$$

El lado derecho de la desigualdad representa la totalidad de la renta del individuo i en el nudo s. Esta renta está constituida por el valor de su dotación de consumo $p_s w^i(s)$, por el valor de sus dotaciones de activos $\sum_{n=1}^{3} q_{n,s}\bar{\theta}^i_n(s)$ y por los rendimientos de su cartera inmediata anterior $p_s \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s-1} d_{n,s}$. El lado izquierdo recoge el gasto total del individuo i en el nudo s, tanto en el bien de consumo, $p_s C^i_s$, como en activos $\sum_{n=1}^{3} q_{n,s}\theta^i_{n,s}$.

Definición 2 (Equilibrio de Radner) *Llamamos Equilibrio de Radner de la Economía especificada en las hipótesis 1-10 al conjunto de sucesiones* $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $\{\hat{q}_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}, n = 1,2,3$, $\{\hat{C}^i_s\}_{s\in\mathcal{S}}, i = 1,2,\ldots,I$, $\{\hat{\theta}^i_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}, n = 1,2,3, i = 1,2,\ldots,I$, *tales que:*

- *Dadas las sucesiones* $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *y* $\{\hat{q}_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}, n = 1,2,3$, *las sucesiones* $\{\hat{C}^i_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $i = 1,2,\ldots,I$ *y* $\{\hat{\theta}^i_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}, n = 1,2,3, i = 1,2,\ldots,I$, *solucionan para cada consumidor el problema*

$$\max_{C^i_s,\theta^i_{n,s}} \sum_{s\in\mathcal{S}} \beta_i^{t(s)} \pi^i(s) \mathcal{U}_i(C^i_s) \tag{3}$$

$$s.a. \quad \hat{p}_s C^i_s + \sum_{n=1}^{3} \hat{q}_{n,s}\theta^i_{n,s} \leq \hat{p}_s w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \hat{q}_{n,s}\bar{\theta}^i_n(s) + \hat{p}_s \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s-1} d_{n,s}$$

$$C^i_s \geq 0$$

$$\theta^i_{1,l_0} = \theta^i_{2,l_0} = \theta^i_{3,l_0} = 0$$

$$i = 1,2,\ldots,I$$

$$s \in \mathcal{S}$$

- *Se verifican las condiciones de factibilidad en el mercado del bien de consumo*

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{C}^i_{l_0} \leq \sum_{i=1}^{I} w^i(l_0) \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{C}^i_{sl} \leq \sum_{i=1}^{I} w^i(sl) + \sum_{i=1}^{I}\sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s) d_{n,sl}$$

$$l = 1,2,3$$

$$s \in \mathcal{S}$$

y en los mercados de activos

$$\sum_{n=1}^{I} \theta^i_{n,s} \leq \sum_{n=1}^{I} \bar{\theta}^i_n(s) \qquad n = 1,2,3, \quad s \in \mathcal{S} \tag{5}$$

3.3 Relaciones entre entornos

Aunque en principio el equilibrio Arrow-Debreu y el equilibrio de Radner son diferentes, es posible demostrar la equivalencia entre ambos a partir de la hipótesis de mercados completos 5. Precisamente, a continuación enunciaremos y demostraremos dos teoremas que garantizan esta equivalencia, basada en las relaciones entre precios introducidas por Arrow (1953) y desarrolladas por Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

Teorema 1 *Si* $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $\{\hat{q}_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1,2,3$, $\{\hat{C}^i_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $i = 1,2,\ldots,I$, $\{\hat{\theta}^i_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1,2,3$, $i = 1,2,\ldots,I$, *es un Equilibrio de Radner, existe* $\{\tilde{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, *tal que* $\{\tilde{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ *y* $\{\hat{C}^i_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $i = 1,2,\ldots,I$ *es un Equilibrio Arrow-Debreu.*

Demostración

Asumimos que se verifican las hipótesis 1-10, y comenzamos solucionando el problema de los consumidores en el equilibrio de Radner. Normalizamos cada una de las restricciones presupuestarias dividiéndolas por el precio del bien de consumo para el correspondiente nudo $\hat{p}_s$,

$$\bar{q}_{n,s} = \frac{\hat{q}_{n,s}}{\hat{p}_s}$$

$$n = 1,2,3$$

Las condiciones de primer orden, necesarias y suficientes por el Teorema de Suficiencia de Kuhn-Tucker son

$$\beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}_i'(C_s^i) = \lambda^i \tag{6}$$

$$\lambda_{s1}^i d_{1,s1} + \lambda_{s2}^i d_{1,s2} + \lambda_{s3}^i d_{1,s3} = \lambda_s^i \bar{q}_{1,s} \tag{7}$$

$$\lambda_{s1}^i d_{2,s1} + \lambda_{s2}^i d_{2,s2} + \lambda_{s3}^i d_{2,s3} = \lambda_s^i \bar{q}_{2,s} \tag{8}$$

$$\lambda_{s1}^i d_{3,s1} + \lambda_{s2}^i d_{3,s2} + \lambda_{s3}^i d_{3,s3} = \lambda_s^i \bar{q}_{3,s} \tag{9}$$

$$w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \theta_{n,s-1}^i d_{n,s} + \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s)\bar{q}_{n,s} = C_s^i + \sum_{n=1}^{3} \theta_{n,s}^i \bar{q}_{n,s} \tag{10}$$

donde λ son los multiplicadores de Lagrange. Estas ecuaciones junto a las condiciones de factibilidad

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{C}_{l_0}^i \leq \sum_{i=1}^{I} w^i(l_0) \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{C}_{sl}^i \leq \sum_{i=1}^{I} w^i(sl) + \sum_{i=1}^{I}\sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) d_{n,sl}$$

$$l = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^{I} \theta_{n,s}^i \leq \sum_{i=1}^{I} \bar{\theta}_n^i(s) \qquad n = 1, 2, 3, \tag{12}$$

nos determinan el Equilibrio de Radner de la Economía. Dado que estamos suponiendo que dicho equilibrio existe, el anterior sistema de ecuaciones 8-12 tiene por hipótesis solución.

En el problema de los consumidores en un Entorno Arrow-Debreu las condiciones de primer orden, necesarias y suficientes por el Teorema de Suficiencia de Kuhn-Tucker, son

$$\beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}_i'(C_s^i) = \gamma^i \tilde{p}_s \tag{13}$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s C_s^i = \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s w^i(s) + \sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) \sum_{l=1}^{3} d_{n,sl}\tilde{p}_{sl} \tag{14}$$

donde γ es el multilplicador de Lagrange. Estas ecuaciones junto a la condición de factibilidad

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{C}_{l_0}^i \leq \sum_{i=1}^{I} w^i(l_0) \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{C}^i_{sl} \leq \sum_{i=1}^{I} w^i(sl) + \sum_{i=1}^{I}\sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s) d_{n,sl}$$

$$l = 1, 2, 3$$

nos determinan el Equilibrio Arrow-Debreu de la Economía.

A continuación demostraremos cómo si se verifican las condiciones de equilibrio de la Economía en un equilibrio de Radner 6-12, entonces existen $\{\tilde{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ tal que para $\{\hat{C}^i_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $i = 1, 2, \ldots, I$ se verifican las condiciones 13-15 del equilibrio Arrow-Debreu. Supongamos que el conjunto de condiciones 8-12 se verifican. Supongamos que $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $\{\hat{q}_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1, 2, 3$, $\{\hat{C}^i_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $i = 1, 2, \ldots, I$, $\{\hat{\theta}^i_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \ldots, I$, es un Equilibrio de Radner. Definimos $\{\tilde{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ tal que

$$\tilde{p}_{l_0} = 1 \tag{16}$$

$$\frac{\sum_{l=1}^{3} d_{n,sl}\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s} = \bar{q}_{n,s}$$

$$n = 1, 2, 3$$

y $\hat{\gamma}^i$ tal que

$$\hat{\gamma}^i = \hat{\lambda}^i_{l_0}$$

Expresando 7-9 y 17 en forma matricial tendremos

$$\begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\hat{\lambda}^i_{s1}}{\hat{\lambda}^i_s} \\ \frac{\hat{\lambda}^i_{s2}}{\hat{\lambda}^i_s} \\ \frac{\hat{\lambda}^i_{s3}}{\hat{\lambda}^i_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_{s1}}{\tilde{p}_s} \\ \frac{\tilde{p}_{s2}}{\tilde{p}_s} \\ \frac{\tilde{p}_{s3}}{\tilde{p}_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix}$$

En virtud de la hipótesis de mercados completos 5, la matriz

$$\mathcal{D}_s = \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix}$$

es tal que

$$|\mathcal{D}_s| = \begin{vmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{vmatrix} \neq 0$$

con lo cual

$$\frac{\hat{\lambda}^i_{s1}}{\hat{\lambda}_s} = \frac{\tilde{p}_{s1}}{\tilde{p}_s} \tag{17}$$

$$\frac{\hat{\lambda}^i_{s2}}{\hat{\lambda}_s} = \frac{\tilde{p}_{s2}}{\tilde{p}_s}$$

$$\frac{\hat{\lambda}^i_{s3}}{\hat{\lambda}_s} = \frac{\tilde{p}_{s3}}{\tilde{p}_s}$$

Consideremos $s \in \mathcal{S}$ cualquiera,

$$s = (l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{t(s)-1}, l_{t(s)})$$

Aplicando las ecuaciones 17 recursivamente, obtenemos que $\forall s \in \mathcal{S}$

$$\hat{\lambda}^i_s = \tilde{p}_s \hat{\lambda}^i_{l_0}$$

Por lo tanto, bajo nuestras definiciones la condición 6 del Equilibrio de Radner queda

$$\beta_i^{t(s)} \pi^i(s) \mathcal{U}_i'(C^i_s) = \lambda^i = \tilde{p}_s \hat{\lambda}^i_{l_0} = \hat{\gamma}^i \tilde{p}_s$$

justamente la condición de Equilibrio Arrow-Debreu 13.

Por otra parte, multiplicando las condiciones 10 del Equilibrio de Radner por el correspondiente $\tilde{p}_s$ que acabamos de definir, obtenemos

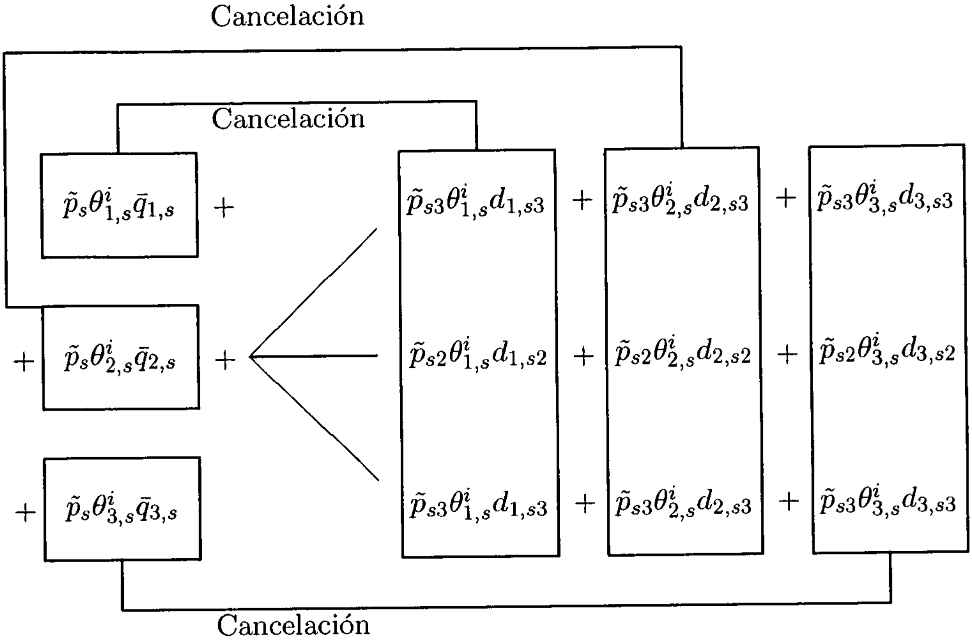
$$\tilde{p}_s \left[w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s-1} d_{l,s} + \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s) \bar{q}_{n,s} \right] = \tilde{p}_s C^i_s + \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s} \bar{q}_{n,s}$$

Sumando estas igualdades para todo el árbol de sucesos llegamos a

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s \left[w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s) \bar{q}_{n,s} \right] + \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s-1} d_{n,s} = \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s C^i_s + \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s} \bar{q}_{n,s}$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s C^i_s - \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s \left[w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s) \bar{q}_{n,s} \right] = \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s \left[\sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s-1} d_{n,s} - \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s} \bar{q}_{n,s} \right]$$

Figura 3: Cancelaciones en cada nudo del árbol de sucesos



A partir de las definiciones de $\tilde{p}_s$ 16 tenemos

$$\tilde{p}_s\bar{q}_{n,s} = \sum_{l=1}^{3} d_{n,sl}\tilde{p}_{sl} \qquad (18)$$

$$n = 1, 2, 3$$

Entonces, para cada nudo s del árbol de sucesos $\mathcal{S}$ tienen lugar las cancelaciones representadas en el gráfico 3. Esto ocurre para todos los nudos del árbol de sucesos, con lo cual, siguiendo conocidos resultados expuestos p.ej en Apostol [3], cap.9, mediante reordenaciones y agrupaciones de sumandos siempre posibles obtenemos

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s \left[\sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s-1} d_{n,s} - \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s}\bar{q}_{n,s} \right] = 0$$

y podemos concluir

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s C^i_s - \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s \left[w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s)\bar{q}_{n,s} \right] = 0$$

Sustituyendo $\tilde{p}_s \bar{q}_{n,s}, n = 1,2,3$ según las expresiones 18 tendremos

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s C_s^i = \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s w^i(s) + \sum_{s\in\mathcal{S}} \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) \tilde{p}_s \bar{q}_{n,s} =$$

$$= \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s w^i(s) + \sum_{s\in\mathcal{S}} \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) \sum_{l=1}^{3} d_{n,sl} \tilde{p}_{sl}$$

justamente la condición 14 en el Equilibrio Arrow-Debreu de la Economía.

Dado que la condicion de factibilidad en el mercado de bienes de la definición de Equilibrio de Radner es idéntica a la condición de factibilidad en dicho mercado de la definición de Equilibrio Arrow-Debreu, queda demostrado el teorema.

Teorema 2 *Si $\{\tilde{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ y $\{\hat{C}_s^i\}_{s\in\mathcal{S}}$, $i = 1,2,\ldots,I$ es un Equilibrio Arrow-Debreu, entonces existen $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $\{\hat{q}_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1,2,3$, $\{\hat{\theta}_{n,s-1}^i\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1,2,3$, $i = 1,2,\ldots,I$, tales que $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $\{\hat{q}_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1,2,3$, $\{\hat{\theta}_{n,s-1}^i\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1,2,3$, $i = 1,2,\ldots,I$, y $\{\hat{C}_s^i\}_{s\in\mathcal{S}}$, $i = 1,2,\ldots,I$ es un Equilibrio de Radner.*

Demostración

Supongamos que $\{\tilde{p}\}_{s\in\mathcal{S}}$ y $\{\hat{C}_s^i\}_{s\in\mathcal{S}}$, $i = 1,2,\ldots,I$ es un Equilibrio Arrow-Debreu. Este Equilibrio Arrow-Debreu viene determinado por las condiciones 13-15, necesarias y suficientes por el Teorema de Suficiencia de Kuhn-Tucker. Definimos $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $\{\hat{q}_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1,2,3$ a partir de las ecuaciones

$$\frac{\hat{q}_{n,s}}{\hat{p}_s} = \bar{q}_{n,s} = \frac{\sum_{l=1}^{3} d_{n,sl} \tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s} \tag{19}$$

$$n = 1,2,3$$

donde para los dividendos $d_{n,s}$, $s \in \mathcal{S}$, $n = 1,2,3$ y para los precios $\tilde{p}_s$, el subíndice sl, $l = 1,2,3$ denota los diferentes nudos inmediatamente posteriores a s.

Definimos $\{\hat{\theta}_{n,s}^i\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1,2,3$, $i = 1,2,\ldots,I$, tales que

$$\sum_{I=1}^{I} \hat{\theta}_{n,s}^i = \sum_{i=1}^{I} \bar{\theta}_n^i(s) \tag{20}$$

$$\hat{p}_s w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \hat{q}_{n,s} \bar{\theta}_n^i(s) - \hat{p}_s \hat{C}_s^i = \sum_{n=1}^{3} \hat{q}_{n,s} \hat{\theta}_{n,s}^i - \hat{p}_s \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}_{n,s-1}^i d_{n,s}$$

Como veremos a continuación, los $\{\hat{\theta}^i_{n,s}\}_{s\in S}$ así definidos son únicos y suponen obviamente el cumplimiento de las condiciones de factibilidad en los mercados de activos. Las igualdades

$$\hat{p}_s w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \hat{q}_{n,s}\bar{\theta}^i_n(s) - \hat{p}_s\hat{C}^i_s = \sum_{n=1}^{3} \hat{q}_{n,s}\hat{\theta}^i_{n,s} - \hat{p}_s \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,s-1}d_{n,s}$$

definen un conjunto de $I-1$ ecuaciones funcionalmente independientes, pues apoyándonos en la Optimalidad de Pareto del Equilibrio Arrow-Debreu, estudiada entre otros por Debreu (1959), Altuğ y Labadie (1994) y Duffie (1992), es inmediato comprobar que las condiciones de factibilidad para el bien de consumo se verifican con igualdad, esto es

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{C}^i_{\eta_0} = \sum_{i=1}^{I} w^i(\eta_0)$$

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{C}^i_{sl} = \sum_{i=1}^{I} w^i(sl) + \sum_{i=1}^{I}\sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s)d_{n,sl}$$

$$l = 1,2,3$$

Considerando sólo las $I-1$ ecuaciones funcionalmente independientes, con nuestra definición

$$\bar{q}_{n,s} = \frac{\hat{q}_{n,s}}{\hat{p}_s}$$

$$n = 1,2,3$$

tenemos

$$w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \bar{q}_{n,s}\bar{\theta}^i_n(s) - \hat{C}^i_s = \sum_{n=1}^{3} \bar{q}_{n,s}\hat{\theta}^i_{n,s} - \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,s-1}d_{n,s}$$

Multiplicamos estas igualdades por el correspondiente $\tilde{p}_s$ obteniendo

$$\tilde{p}_s w^i(s) + \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,s-1}d_{n,s} + \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s)\bar{q}_{n,s} = \tilde{p}_s\hat{C}^i_s + \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,s}\bar{q}_{n,s}$$

con lo cual

$$\tilde{p}_s\hat{C}^i_s - \tilde{p}_s w^i(s) - \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s)\bar{q}_{n,s} = \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,s-1}d_{n,s} - \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,s}\bar{q}_{n,s}$$

Introducimos una partición en el árbol de sucesos $\mathcal{S}$ con referencia el nudo $\acute{s}$, dividiendo $\mathcal{S}$ en dos subárboles $\mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}''$ de tal forma que

$$\mathcal{S}'' = \text{árbol de sucesos con inicio en } \acute{s}$$

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} - \mathcal{S}''$$

verificando

$$\mathcal{S}'' \bigcup \mathcal{S}' = \mathcal{S}$$

$$\mathcal{S}'' \bigcap \mathcal{S}' = \emptyset$$

partición representada en el gráfico 4. Si sumamos para el árbol de sucesos las anteriores igualdades obtenemos $\mathcal{S}'$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s \hat{C}_s^i - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s)\bar{q}_{n,s} =$$

$$= \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}_{n,s-1}^i d_{n,s} - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}_{n,s}^i \bar{q}_{n,s}$$

Si consideramos ahora las definiciones dadas de $\hat{p}_s$ y de $\hat{q}_{n,s}$, $n = 1,2,3$, $s \in \mathcal{S}$

$$\frac{\sum_{l=1}^{3} d_{n,sl}\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s} = \frac{\hat{q}_{n,s}}{\hat{p}_s} = \bar{q}_{n,s}$$

$$n = 1,2,3$$

a lo largo del subárbol de sucesos $\mathcal{S}'$ se darán las cancelaciones

$$\sum_{l=1}^{3} d_{n,sl}\tilde{p}_{sl} - \tilde{p}_s\bar{q}_{n,s} = 0$$

$$n = 1,2,3$$

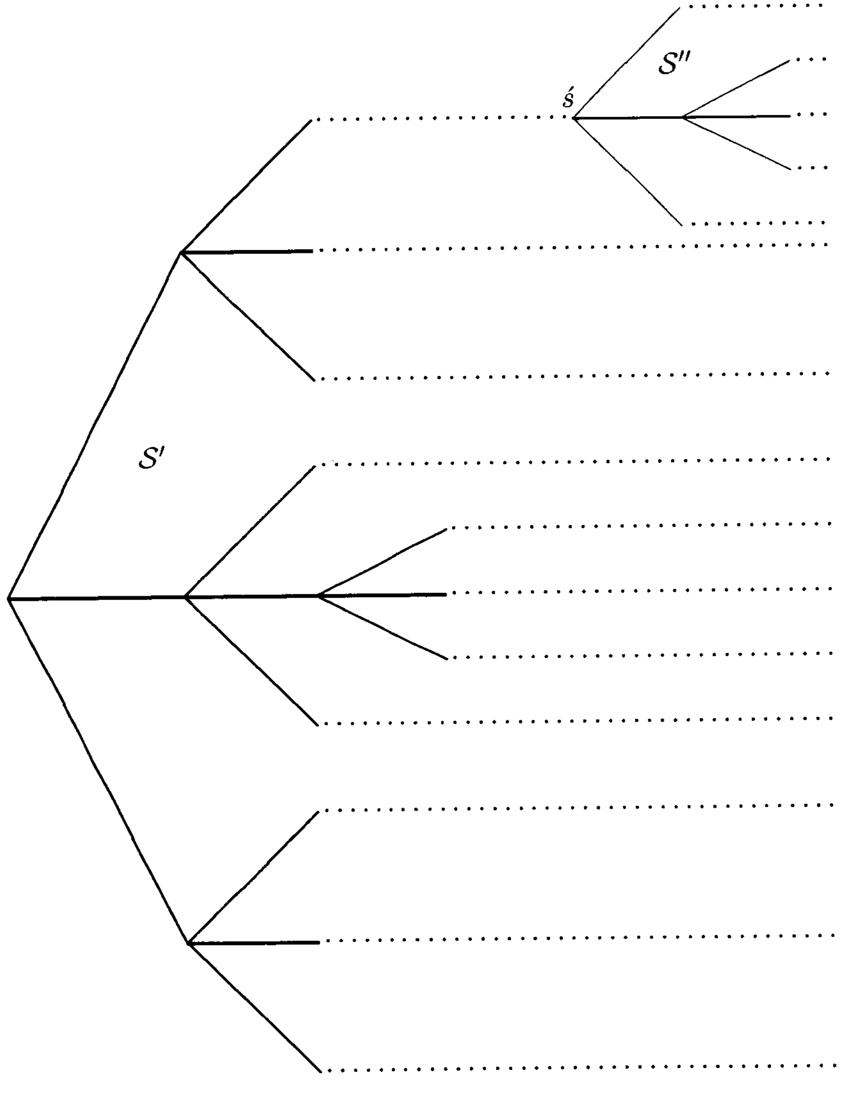
$$s \in \mathcal{S}'$$

representadas en el gráfico 3 y consiguientemente llegamos a la expresión

$$\sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s \hat{C}_s^i - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s)\bar{q}_{n,s} =$$

$$= \begin{cases} -\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}1}\right] \\ -\left[\tilde{p}_{\acute{s}2}\hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}2} + \tilde{p}_{\acute{s}2}\hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}2} + \tilde{p}_{\acute{s}2}\hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}2}\right] \\ -\left[\tilde{p}_{\acute{s}3}\hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}3} + \tilde{p}_{\acute{s}3}\hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}3} + \tilde{p}_{\acute{s}3}\hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}3}\right] \end{cases}$$

Figura 4: División del Árbol de Sucesos



Por consiguiente, a partir de las $I-1$ ecuaciones funcionalmente independientes hemos obtenido $3(I-1)$ ecuaciones con solución única por la hipótesis de mercados completos, que junto a las condiciones

$$\sum_{I=1}^{I} \hat{\theta}^i_{n,s} = \sum_{i=1}^{I} \bar{\theta}^i_n(s)$$

suponen $3I$ ecuaciones linealmente independientes en cada nudo que nos proporcionan solución única en las $3I$ incógnitas de cada nudo $\hat{\theta}^i_{n,s-1}$.

Como vemos, a partir de las definiciones 20 estamos exigiendo además de la factibilidad en los mercados de activos que la cuantía de la inversión realizada por los individuos en un nudo ha de ser la diferencia entre su renta y el valor de su consumo para ese nudo.

Demostraremos ahora que existen $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $\{\hat{q}_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n=1,2,3$ tales que con nuestras definiciones de $\{\hat{\theta}^i_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n=1,2,3$, $i=1,2,\ldots,I$,, las secuencias $\{\hat{\theta}^i_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n=1,2,3$, $i=1,2,\ldots,I$, y $\{\hat{C}^i_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $i=1,2,\ldots,I$ solucionan el problema de los consumidores en un Entorno de Mercados Secuenciales dados dichos $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $\{\hat{q}_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n=1,2,3$.

Definimos $\{\hat{\lambda}^i_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, $i=1,2,\ldots,I$ de la forma

$$\hat{\lambda}^i_s = \hat{\gamma}^i\tilde{p}_s$$

Con esta definición, la condición de primer orden 13 del problema de los consumidores en un Entorno Arrow-Debreu

$$\beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}'_i(C^i_s) = \gamma^i\tilde{p}_s$$

toma la expresión

$$\beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}'_i(C^i_s) = \hat{\lambda}^i_s$$

Además, con nuestras definiciones 19

$$\hat{\lambda}^i_{s1}d_{1,s1} + \hat{\lambda}^i_{s2}d_{1,s2} + \hat{\lambda}^i_{s3}d_{1,s3} - \hat{\lambda}^i_s\bar{q}_{1,s} =$$

$$= \hat{\gamma}^i\left[\tilde{p}_{s1}d_{1,s1} + \tilde{p}_{s2}d_{1,s2} + \tilde{p}_{s3}d_{1,s3} - \sum_{l=1}^{3} d_{1,sl}\tilde{p}_{sl}\right] = 0$$

y análogamente

$$\hat{\lambda}^i_{s1}d_{2,s1} + \hat{\lambda}^i_{s2}d_{2,s2} + \hat{\lambda}^i_{s3}d_{2,s3} - \hat{\lambda}^i_s\bar{q}_{2,s} = 0$$

$$\hat{\lambda}^i_{s1}d_{3,s1} + \hat{\lambda}^i_{s2}d_{3,s2} + \hat{\lambda}^i_{s3}d_{3,s3} - \hat{\lambda}^i_s\bar{q}_{3,s} = 0$$

Es inmediato que por la definición de $\{\hat{\theta}^i_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1,2,3$, $i = 1,2,\ldots,I$, se verifican

$$\hat{\theta}^i_{1,l_0} = \hat{\theta}^i_{2,l_0} = \hat{\theta}^i_{3,l_0} = 0$$

$$w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \bar{q}_{n,s}\bar{\theta}^i_n(s) + \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,s-1}d_{n,s} = \hat{C}^i_s + \sum_{n=1}^{3} \bar{q}_{n,s}\hat{\theta}^i_{n,s}$$

Concluyendo, para nuestras definiciones se verifican

$$\beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}_i'(C^i_s) = \lambda^i$$

$$\lambda^i_{s1}d_{1,s1} + \lambda^i_{s2}d_{1,s2} + \lambda^i_{s3}d_{1,s3} = \lambda^i_s\bar{q}_{1,s}$$

$$\lambda^i_{s1}d_{2,s1} + \lambda^i_{s2}d_{2,s2} + \lambda^i_{s3}d_{2,s3} = \lambda^i_s\bar{q}_{2,s}$$

$$\lambda^i_{s1}d_{3,s1} + \lambda^i_{s2}d_{3,s2} + \lambda^i_{s3}d_{3,s3} = \lambda^i_s\bar{q}_{3,s}$$

$$\theta^i_{1,l_0} = \theta^i_{2,l_0} = \theta^i_{3,l_0} = 0$$

$$w^i(s) + \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s-1}d_{n,s} + \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s)\bar{q}_{n,s} = C^i_s + \sum_{n=1}^{3} \theta^i_{n,s}\bar{q}_{n,s}$$

esto es, las condiciones necesarias y suficientes de los problemas de los consumidores en un equilibrio de Radner, y queda demostrado el teorema.

4. INTERPRETACIÓN DE LOS PRECIOS DE EQUILIBRIO

Comenzaremos estudiando la Relación Marginal de Sustitución de nuestros consumidores. Las funciones de utilidad esperada descontada son

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}_i(C^i_s)$$

con lo cual la expresión

$$\frac{\beta_i\mathcal{U}_i'(C^i_{sl})}{\mathcal{U}_i'(C^i_s)}$$

recoge, bajo total certidumbre de ocurrencia del estado de la naturaleza l tras el nudo s, el precio relativo deseado del bien de consumo en el nudo sl en términos del bien de consumo del nudo s. Si este precio deseado bajo total certidumbre se pondera por la probabilidad de ocurrencia del estado l tras el nudo s, tendremos el precio relativo deseado bajo incertidumbre del bien de consumo en el nudo sl en términos del bien de consumo del nudo s, justamente

$$\frac{\beta_i \pi^i(sl|s)\mathcal{U}_i'(C_{sl}^i)}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)}$$

expresión denominada Relación Marginal de Sustitución Estocástica.

Supongamos ahora que la Economía se encuentra en Equilibrio Arrow-Debreu. Llamamos $\{\tilde{p}\}_{s\in\mathcal{S}}$ a los precios de Equilibrio Arrow-Debreu. Por la condición de primer orden 13 en los problemas de los consumidores en un entorno Arrow-Debreu tendremos

$$\tilde{p}_s = \frac{\beta_i^{t(s)} \pi^i(s)\mathcal{U}_i'(C_s^i)}{\gamma^i}$$

$$\tilde{p}_{sl} = \frac{\beta_i^{t(s)+1} \pi^i(sl)\mathcal{U}_i'(C_{sl}^i)}{\gamma^i}$$

y por lo tanto

$$\frac{\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s} = \frac{\beta_i \pi^i(sl|s)\mathcal{U}_i'(C_{sl}^i)}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)} \qquad (21)$$
$$i = 1, 2, \ldots, I$$

Por consiguiente, en el Equilibrio Arrow-Debreu el precio relativo de mercado del bien de consumo en el nudo sl en términos del bien de consumo en el nudo s coincide con el precio relativo deseado por los consumidores.

Consideramos a continuación el Equilibrio de Radner asociado y los correspondientes precios de Equilibrio, $\{\hat{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ para el bien de consumo y $\{\hat{q}_{n,s}\}_{s\in\mathcal{S}}$, $n = 1, 2, 3$ para los activos. Definimos $\bar{q}_{n,s}$ como en secciones anteriores

$$\bar{q}_{n,s} = \frac{\hat{q}_{n,s}}{\hat{p}_s}$$
$$n = 1, 2, 3$$

los cuales verifican

$$\bar{q}_{n,s} = \frac{\sum_{l=1}^{3} d_{n,sl}\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s}$$
$$n = 1, 2, 3$$

Tenemos por lo tanto que en cada nudo s el precio de cada activo viene dado por el valor de mercado de sus dividendos futuros, siempre en términos del bien de consumo del nudo s. Por otra parte, apoyándonos en la igualdad 21

$$\bar{q}_{n,s} = \frac{\sum_{l=1}^{3} d_{n,sl}\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s} = \frac{\beta_i \sum_{l=1}^{3} \pi^i(sl|s)\mathcal{U}_i'(C_{sl}^i)d_{n,sl}}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)} =$$

$$= E_s\left[\frac{\beta_i\mathcal{U}_i'(C_{sl}^i)d_{n,sl}}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)}\right]$$

$$n = 1,2,3$$

con lo cual, en términos del bien de consumo en el nudo s, el precio de cada activo es el valor esperado deseado por el consumidor de sus dividendos futuros. Consideremos ahora un nudo cualquiera s del árbol de sucesos $\mathcal{S}$, y supongamos que tras el nudo s el estado de la naturaleza $l = 1$ ocurre con total certidumbre. A partir de

$$\bar{q}_{n,s} = E_s\left[\frac{\beta_i\mathcal{U}_i'(C_{sl}^i)d_{n,sl}}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)}\right]$$

$$n = 1,2,3$$

tendremos, considerando la total certidumbre de $l = 1$ tras s

$$\bar{q}_{n,s} = \frac{\beta_i\mathcal{U}_i'(C_{s1}^i)d_{n,s1}}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)}$$

$$n = 1,2,3$$

Los dividendos de los activos en el nudo $s1$ y sus precios en términos reales en el nudo s $\bar{q}_{n,s}$, $n = 1,2,3$ definen de manera implícita los tipos de interés real para cada activo bajo total certidumbre del nudo $s1$, que llamaremos $r_{n,s1}$ y que vienen dados por las ecuaciones

$$1 + r_{n,s1} = \frac{d_{n,s1}}{\bar{q}_{n,s}}$$

$$n = 1,2,3$$

A partir de

$$\bar{q}_{n,s} = \frac{\beta_i\mathcal{U}_i'(C_{s1}^i)d_{n,s1}}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)}$$

$$n = 1,2,3$$

obtenemos

$$1 = \frac{\beta_i\mathcal{U}_i'(C_{s1}^i)(1 + r_{n,s1})}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)}$$

$$n = 1, 2, 3$$

con lo cual

$$\frac{1}{1 + r_{n,s1}} = \frac{\beta_i \mathcal{U}_i'(C_{s1}^i)}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)}$$

$$n = 1, 2, 3$$

El primer miembro de la ecuación anterior

$$\frac{1}{1 + r_{n,s1}}$$

$$n = 1, 2, 3$$

es el factor de descuento entre el nudo s y el nudo $s1$ bajo total certidumbre del estado 1 tras el nudo s, igual entre los activos, y si no consideramos incertidumbre o bien todos los individuos presentan las mismas creencias también igual entre agentes. Si incorporamos la incertidumbre y dicho factor de descuento se pondera por las probabilidades subjetivas de ocurrencia del estado 1 tras el nudo s, $\pi^i(s1|s)$ obtenemos

$$\pi^i(s1|s)\frac{1}{1 + r_{n,s1}^i} = \frac{\beta_i \pi^i(s1|s)\mathcal{U}_i'(C_{s1}^i)}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)}$$

$$n = 1, 2, 3$$

denominado factor de descuento estocástico individual entre el nudo $s1$ y el nudo s, y estudiado entre otros por Cochrane y Hansen (1992). Sabemos que se verifica la ecuación 21 y por lo tanto

$$\frac{\tilde{p}_{s1}}{\tilde{p}_s} = \frac{\beta_i \pi^i(s1|s)\mathcal{U}_i'(C_{s1}^i)}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)} = \frac{\pi^i(s1|s)}{1 + r_{n,s1}^i}$$

$$n = 1, 2, 3$$

con lo cual en el Equilibrio Arrow-Debreu el precio relativo del bien de consumo en el nudo $s1$ respecto al bien de consumo del nudo s es el factor de descuento estocástico para dichos nudos.

Generalizando los razonamientos para cualquier nudo del árbol de sucesos y para cualquier estado de la naturaleza, podemos concluir

$$\frac{\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s} = \frac{\beta_i \pi^i(sl|s)\mathcal{U}_i'(C_{sl}^i)}{\mathcal{U}_i'(C_s^i)} = \frac{\pi^i(sl|s)}{1 + r_{n,sl}^i}$$

$$n = 1, 2, 3$$

$$l = 1, 2, 3$$

esto es, en el Equilibrio Arrow-Debreu el precio relativo del bien de consumo en el nudo sl respecto al bien de consumo del nudo s es el factor de descuento estocástico individual para dichos nudos.

Supongamos ahora un nudo cualquiera del árbol de sucesos $s = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{t(s)-1}, \eta_{t(s)})$. Normalizamos los precios de equilibrio Arrow-Debreu $\{\tilde{p}\}_{s\in\mathcal{S}}$ considerando $\tilde{p}_{\eta_0} = 1$. Como acabamos de determinar se verificará

$$\frac{\tilde{p}_{\eta_0\eta_1}}{\tilde{p}_{\eta_0}} = \frac{\beta_i \pi^i(\eta_1|\eta_0)\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0\eta_1})}{\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0})}$$

$$\frac{\tilde{p}_{\eta_0\eta_1\eta_2}}{\tilde{p}_{\eta_0\eta_1}} = \frac{\beta_i \pi^i(\eta_2|\eta_1\eta_0)\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0\eta_1\eta_2})}{\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0\eta_1})}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\tilde{p}_{\eta_0\ldots\eta_{t(s)}}}{\tilde{p}_{\eta_0\ldots\eta_{t(s)-1}}} = \frac{\beta_i \pi^i(\eta_{t(s)}|\eta_0\ldots\eta_{t(s)-1})\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0\ldots\eta_{t(s)}})}{\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0\ldots\eta_{t(s)-1}})}$$

y dado que $\tilde{p}_{\eta_0} = 1$ obtenemos

$$\tilde{p}_s = \pi^i(\eta_1|\eta_0)\pi^i(\eta_2|\eta_1\eta_0)\ldots\pi^i(\eta_{t(s)}|\eta_0\ldots\eta_{t(s)-1})$$

$$\frac{\beta_i\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0\eta_1})}{\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0})}\frac{\beta_i\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0\eta_1\eta_2})}{\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0\eta_1})}\cdots\frac{\beta_i\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0\ldots\eta_{t(s)}})}{\mathcal{U}_i'(C^i_{\eta_0\ldots\eta_{t(s)-1}})} =$$

$$= \pi^i(s)\frac{1}{1+r^i_{n,\eta_0\eta_1}}\frac{1}{1+r^i_{n,\eta_0\eta_1\eta_2}}\cdots\frac{1}{1+r^i_{n,\eta_0\ldots\eta_{t(s)}}}$$

$$s \in \mathcal{S}$$

lo que permite interpretar los precios de equilibrio Arrow-Debreu como los factores de descuento estocásticos individuales.

La consideración del factor de descuento estocástico permite una nueva interpretación de los precios de los activos en términos reales $\bar{q}_{n,s}$. Sabemos que

$$\frac{\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s} = \frac{\pi^i(sl|s)}{1+r_{n,sl}}$$

$$n = 1,2,3$$

$$l = 1,2,3$$

con lo cual

$$\bar{q}_{n,s} = \frac{\sum_{l=1}^{3} d_{n,sl}\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s} =$$

$$= \sum_{l=1}^{3} \pi^i(sl|s)\frac{d_{n,sl}}{1+r^i_{n,sl}} = E_s\left[\frac{d_{n,sl}}{1+r^i_{n,sl}}\right]$$

$$n = 1, 2, 3$$

esto es, en cada nudo s el precio de cada activo en términos reales es el valor esperado descontado subjetivamente de sus dividendos futuros.

5. PROPIEDADES FINANCIERAS DEL EQUILIBRIO

En la sección 3 vimos cómo un Equilibrio Arrow-Debreu puede ser interpretado como un Equilibrio de Radner y viceversa. Apoyándonos en esta equivalencia analizaremos a continuación diversas propiedades del Equilibrio de la Economía, propiedades derivadas directamente de los Teoremas anteriores 1 y 2. Es de advertir que admitiremos la existencia de los equilibrios y que por tanto no analizaremos los requisitos que ésto conlleva. En concreto, los trabajos existentes establecen como condicion suficiente para la existencia del equilibrio Arrow-Debreu un valor finito de las dotaciones de los consumidores, y para la existencia del equilibrio de Radner la imposibilidad de esquemas de Ponzi y la condición de transversalidad. Como hemos dicho, no estudiaremos la suficiencia de estas condiciones, pero sí demostraremos su necesariedad, completando los estudios existentes, entre los que citaremos los trabajos de Magill y Quinzii (1994) y de Hernández y Santos (1996). Todas estas propiedades financieras son por lo tanto condiciones necesarias de la existencia de los equilibrios Arrow-Debreu y de Radner bajo mercados completos. Específicamente, obtendremos cómo el valor actual de la renta de los consumidores es finito, concluiremos el valor actual nulo de la inversión a medida que transcurre el tiempo y la acotación del ahorro/desahorro en los activos, y demostaremos la inexistencia de posibilidades de arbitraje y de esquemas de endeudamiento progresivo.

Proposición 1 *El valor actual esperado de la renta de los consumidores está acotado.*

Demostración

Dada la naturaleza de los precios Arrow-Debreu, debemos demostrar que en un equilibrio Arrow-Debreu el valor de la dotación de los individuos está acotado, esto es, que existe A, $A \geq 0$, tal que

$$\sum_{s\in S}\tilde{p}_s w^i(s) + \sum_{s\in S}\sum_{n=1}^{3}\bar{\theta}^i_n(s)\sum_{l=1}^{3} d_{n,sl}\tilde{p}_{sl} \leq A$$

Con nuestra definiciones de $\tilde{p}_s$ se verifica

$$\beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}_i'(C_s^i) = \lambda_s^i = \tilde{p}_s\hat{\lambda}_{l_0}^i = \hat{\gamma}^i\tilde{p}_s$$

Despejando $\tilde{p}_s$ obtenemos

$$\tilde{p}_s = \frac{\beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}_i'(C_s^i)}{\hat{\lambda}_{l_0}^i}$$

Multiplicando la ecuación anterior por el correspondiente $\hat{C}_s^i$ tenemos

$$\tilde{p}_s\hat{C}_s^i = \frac{\beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}_i'(C_s^i)\hat{C}_s^i}{\hat{\lambda}_{l_0}^i}$$

Llamamos

$$\beta = \max_i\{\beta_i\}$$

$$\hat{\lambda}_{l_0} = \min_i\{\hat{\lambda}_{l_0}^i\}$$

$$\underline{\hat{C}} = \min_i\{\underline{\hat{C}^i}\}$$

$$\mathcal{U}'(\underline{\hat{C}}) = \max_i\{\mathcal{U}_i'(\underline{\hat{C}})\}$$

$$\bar{W} = I\bar{w} + 3\bar{d}I\bar{\theta}$$

donde hemos aplicado las hipótesis 7, 8 y 10. Con estas definiciones

$$\tilde{p}_s\hat{C}_s^i = \frac{\beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}_i'(C_s^i)\hat{C}_s^i}{\hat{\lambda}_{l_0}^i} \leq$$

$$\leq \frac{\beta^{t(s)}\mathcal{U}'(\underline{\hat{C}})\bar{W}}{\hat{\lambda}_{l_0}}$$

Definiendo

$$K = \frac{\mathcal{U}'(\underline{\hat{C}})\bar{W}}{\hat{\lambda}_{l_0}}$$

llegamos a

$$\tilde{p}_s\hat{C}_s^i \leq K\beta^t(s)$$

con lo cual

$$\sum_{s\in\mathcal{S}}\tilde{p}_s\hat{C}_s^i \leq K\sum_{s\in\mathcal{S}}\beta^t(s)$$

Como $\beta \in (0,1)$,

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \tilde{p}_s \hat{C}_s^i \leq K \sum_{s \in \mathcal{S}} \beta^t(s) = \frac{K}{1-\beta}$$

y concluimos que $\sum_{s \in \mathcal{S}} \tilde{p}_s \hat{C}_s^i$ es finito. Dado que como hemos demostrado se verifica 14

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \tilde{p}_s C_s^i = \sum_{s \in \mathcal{S}} \tilde{p}_s w^i(s) + \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) \sum_{l=1}^{3} d_{n,sl} \tilde{p}_{sl}$$

obtenemos que bajo nuestras hipótesis y definiciones $\exists A$

$$A = \frac{K}{1-\beta} \geq 0$$

tal que

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \tilde{p}_s w^i(s) + \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) \sum_{l=1}^{3} d_{n,sl} \tilde{p}_{sl} \leq A$$

Proposición 2 (Condición de Transversalidad) *El valor actual esperado del ahorro/desahorro es, en el límite, nulo.*

Demostración

Como vimos anteriormente, siguiendo la notación adoptada en el teorema 2 y considerando la misma partición del árbol de sucesos,

$$\sum_{s \in \mathcal{S}'} \tilde{p}_s \hat{C}_s^i - \sum_{s \in \mathcal{S}'} \tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s \in \mathcal{S}'} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) \bar{q}_{n,s} =$$

$$= \begin{cases} - \left[\tilde{p}_{\acute{s}1} \hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1} \hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1} \hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}1} \right] \\ - \left[\tilde{p}_{\acute{s}2} \hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}2} + \tilde{p}_{\acute{s}2} \hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}2} + \tilde{p}_{\acute{s}2} \hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}2} \right] \\ - \left[\tilde{p}_{\acute{s}3} \hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}3} + \tilde{p}_{\acute{s}3} \hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}3} + \tilde{p}_{\acute{s}3} \hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}3} \right] \end{cases}$$

donde el lado derecho recoge el valor actual del ahorro/desahorro del individuo.

Podemos considerar sin pérdida de generalidad que

$$\sum_{s \in \mathcal{S}'} \tilde{p}_s \hat{C}_s^i - \sum_{s \in \mathcal{S}'} \tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s \in \mathcal{S}'} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}_n^i(s) \bar{q}_{n,s} =$$

$$= -\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}1}\right]$$

Tomamos límites en la ecuación anterior cuando

$$t(\acute{s}) \to \infty$$

Para el miembro izquierdo

$$\lim_{t(\acute{s})\to\infty}\left[\sum_{s\in\mathcal{S}'}\tilde{p}_s\hat{C}^i_s - \sum_{s\in\mathcal{S}'}\tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}'}\tilde{p}_s\sum_{n=1}^{3}\bar{\theta}^i_n(s)\bar{q}_{n,s}\right] =$$

$$= \sum_{s\in\mathcal{S}}\tilde{p}_s\hat{C}^i_s - \sum_{s\in\mathcal{S}}\tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}}\tilde{p}_s\sum_{n=1}^{3}\bar{\theta}^i_n(s)\bar{q}_{n,s} =$$

$$= \sum_{s\in\mathcal{S}}\tilde{p}_s\hat{C}^i_s - \sum_{s\in\mathcal{S}}\tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}}\tilde{p}_s\sum_{n=1}^{3}\bar{\theta}^i_n(s)\sum_{l=1}^{3}\frac{d_{n,sl}\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s} =$$

$$= \sum_{s\in\mathcal{S}}\tilde{p}_s\hat{C}^i_s - \sum_{s\in\mathcal{S}}\tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{n=1}^{3}\bar{\theta}^i_n(s)\sum_{l=1}^{3}d_{n,sl}\tilde{p}_{sl} = 0$$

dado que se verifica la condición de primer orden 14 del problema de los consumidores en el Entorno Arrow-Debreu. Por lo tanto

$$\lim_{t(\acute{s})\to\infty}\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}1}\right] = 0$$

Como hemos visto, el límite anterior es independiente del nudo $\acute{s}$ considerado, y por lo tanto

$$\lim_{t(\acute{s})\to\infty}\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}1}\right] =$$

$$\lim_{t(\acute{s})\to\infty}\left[\tilde{p}_{\acute{s}2}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}2} + \tilde{p}_{\acute{s}2}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}2} + \tilde{p}_{\acute{s}2}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}2}\right] =$$

$$\lim_{t(\acute{s})\to\infty}\left[\tilde{p}_{\acute{s}3}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}3} + \tilde{p}_{\acute{s}3}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}3} + \tilde{p}_{\acute{s}3}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}3}\right] = 0$$

Con las definiciones hechas en 19

$$\tilde{p}_{\acute{s}}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}\bar{q}_{1,\acute{s}} + \tilde{p}_{\acute{s}}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}\bar{q}_{2,\acute{s}} + \tilde{p}_{\acute{s}}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}\bar{q}_{3,\acute{s}} =$$

$$= \sum_{l=1}^{3}\tilde{p}_{\acute{s}l}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}1} + \sum_{l=1}^{3}\tilde{p}_{\acute{s}l}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}} + \sum_{l=1}^{3}\tilde{p}_{\acute{s}l}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}} =$$

$$= \tilde{p}_{\acute{s}1} \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,\acute{s}} d_{n,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}2} \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,\acute{s}} d_{n,\acute{s}2} + \tilde{p}_{\acute{s}3} \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,\acute{s}} d_{n,\acute{s}3}$$

y tomando límites cuando

$$t(\acute{s}) \to \infty$$

$$\lim_{t(\acute{s})\to\infty} \tilde{p}_{\acute{s}} \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,\acute{s}} \bar{q}_{n,\acute{s}} =$$

$$= \lim_{t(\acute{s})\to\infty} \sum_{l=1}^{3} \tilde{p}_{\acute{s}l} \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,\acute{s}} d_{n,\acute{s}} = 0$$

Por la condición de primer orden 13 en el problema de los consumidores en un Entorno Arrow-Debreu tenemos

$$\tilde{p}_{\acute{s}} = \frac{\beta_i^{t(\acute{s})} \pi^i(\acute{s}) \mathcal{U}_i'(C^i_{\acute{s}})}{\hat{\gamma}^i}$$

y consiguientemente

$$\lim_{t(\acute{s})\to\infty} \tilde{p}_{\acute{s}} \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,\acute{s}} \bar{q}_{n,\acute{s}} =$$

$$= \lim_{t(\acute{s})\to\infty} \frac{\beta_i^{t(\acute{s})} \pi^i(\acute{s}) \mathcal{U}_i'(C^i_{\acute{s}})}{\hat{\gamma}^i} \sum_{n=1}^{3} \hat{\theta}^i_{n,\acute{s}} \bar{q}_{n,\acute{s}} = 0$$

Aplicando $\bar{q}_{n,s} = \frac{\hat{q}_{n,s}}{\hat{p}_s}$, $s \in \mathcal{S}$, $n = 1, 2, 3$, como $\hat{\gamma}^i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, I$, llegamos a

$$\lim_{t(s)\to\infty} \frac{\beta_i^{t(s)} \pi^i(s) \mathcal{U}'(C^i_s)}{\hat{p}_s} \begin{bmatrix} \hat{q}_{1,s} & \hat{q}_{2,s} & \hat{q}_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}^i_{1,s} \\ \hat{\theta}^i_{2,s} \\ \hat{\theta}^i_{3,s} \end{bmatrix} = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, I$$

precisamente la condición de transversalidad, y queda demostrada la proposición.

Proposición 3 (Inexistencia de Esquemas de Ponzi) *En el Equilibrio de la Economía quedan fuera Esquemas de endeudamiento progresivo en términos reales para alguna constante B, $B \geq 0$.*

Demostración

Comenzamos suponiendo que existe un Equilibrio de la Economía, equilibrio que en virtud de los anteriores teoremas 1 y 2 puede ser interpretado tanto como Equilibrio Arrow-Debreu como de Radner. El endeudamiento en términos reales contraido por un individuo i en un nudo s en el que tomó las decisiones financieras $\hat{\theta}^i_{n,s}$, $n = 1,2,3$, $l = 1,2,3$, viene representado por las expresiones

$$\hat{\theta}^i_{1,s}d_{1,s1} + \hat{\theta}^i_{2,s}d_{2,s1} + \hat{\theta}^i_{3,s}d_{3,s1}$$

$$\hat{\theta}^i_{1,s}d_{1,s2} + \hat{\theta}^i_{2,s}d_{2,s2} + \hat{\theta}^i_{3,s}d_{3,s2}$$

$$\hat{\theta}^i_{1,s}d_{1,s3} + \hat{\theta}^i_{2,s}d_{2,s3} + \hat{\theta}^i_{3,s}d_{3,s3}$$

expresiones que recogerían en términos reales los totales a percibir o a entregar en los respectivos nudos sl, $l = 1,2,3$ como consecuencia de sus decisiones de ahorro-desahorro.

Si al igual que hicimos en el teorema 2 dividimos el árbol de sucesos $\mathcal{S}$ en dos subárboles $\mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}''$con referencia el nudo $\acute{s}$, partición representada en el gráfico 4, tendremos

$$\sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s\hat{C}^i_s - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s)\bar{q}_{n,s} =$$

$$= \begin{cases} -\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}1}\right] \\ -\left[\tilde{p}_{\acute{s}2}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}2} + \tilde{p}_{\acute{s}2}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}2} + \tilde{p}_{\acute{s}2}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}2}\right] \\ -\left[\tilde{p}_{\acute{s}3}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}3} + \tilde{p}_{\acute{s}3}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}3} + \tilde{p}_{\acute{s}3}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}3}\right] \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad podemos considerar

$$\sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s\hat{C}^i_s - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s)\bar{q}_{n,s} =$$

$$= -\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}1}\right]$$

Dado que

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s\hat{C}^i_s - \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s)\bar{q}_{n,s} =$$

$$= \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s\hat{C}^i_s - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}'} \tilde{p}_s \sum_{n=1}^{3} \bar{\theta}^i_n(s)\bar{q}_{n,s} +$$

$$+\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s\hat{C}_s^i-\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s w^i(s)-\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s\sum_{n=1}^{3}\bar{\theta}_n^i(s)\bar{q}_{n,s}=0$$

obtenemos

$$\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s\hat{C}_s^i-\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s w^i(s)-\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s\sum_{n=1}^{3}\bar{\theta}_n^i(s)\bar{q}_{n,s}=$$

$$=\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}1}+\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}1}+\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}1}\right]$$

con lo cual

$$\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}1}+\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}1}+\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}1}\right]>$$

$$>-\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s w^i(s)-\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s\sum_{n=1}^{3}\bar{\theta}_n^i(s)\bar{q}_{n,s}=$$

$$=-\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s w^i(s)-\sum_{s\in S''}\sum_{n=1}^{3}\bar{\theta}_n^i(s)\sum_{l=1}^{3}d_{n,sl}\tilde{p}_{sl}$$

Aplicando las hipótesis 4 y 6 llegamos a

$$\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}}d_{1,\acute{s}1}+\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{2,\acute{s}}d_{2,\acute{s}1}+\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}^i_{3,\acute{s}}d_{3,\acute{s}1}\right]>$$

$$>-\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s\sum_{i=1}^{I}w^i(s)-\sum_{s\in S''}\sum_{n=1}^{3}\sum_{i=1}^{I}\bar{\theta}_n^i(s)\sum_{l=1}^{3}d_{n,sl}\tilde{p}_{sl}>$$

$$>-\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s\sum_{i=1}^{I}\bar{w}-\sum_{s\in S''}\sum_{n=1}^{3}\sum_{i=1}^{I}\bar{\theta}\sum_{l=1}^{3}\bar{d}\tilde{p}_{sl}=$$

$$=-I\bar{w}\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s-3\bar{d}I\bar{\theta}\sum_{s\in S''}\tilde{p}_{sl}$$

Por la condición de primer orden 13 sabemos

$$\frac{\beta_i^{t(s)}\pi^i(s)\mathcal{U}_i'(C_s^i)}{\gamma^i}=\tilde{p}_s$$

$$\frac{\beta_i^{t(\acute{s}+1)}\pi^i(\acute{s}1)\mathcal{U}_i'(C_{\acute{s}1}^i)}{\gamma^i}=\tilde{p}_{\acute{s}1}$$

Dado que las probabilidades de cada nudo s vienen dadas por un proceso de Markov de Primer Orden tendremos

$$\pi^i(s)=\pi^i(\acute{s})\pi^i(s|\acute{s})$$

ya que $s \in \mathcal{S}''$ y

$$\pi^i(\acute{s}1) = \pi^i(\acute{s})\pi^i(1|\acute{s})$$

Por lo tanto

$$\frac{\tilde{p}_s}{\tilde{p}_{\acute{s}1}} = \frac{\beta_i^{t(s)-[t(\acute{s})+1]}\pi^i(s|\acute{s})\mathcal{U}_i'(\hat{C}_s^i)}{\pi^i(1|\acute{s})\mathcal{U}_i'(\hat{C}_{\acute{s}1}^i)}$$

Consideramos

$$\beta = \max_i\{\beta_i\}$$

A partir de la hipótesis 10 definimos

$$\underline{C} = \min_i\{\underline{C}^i\}$$

$$\mathcal{U}'(\underline{C}) = \max_i\{\mathcal{U}_i'(\underline{C})\}$$

A partir de las condiciones de factibilidad tendremos

$$\bar{W} = I\bar{w} + 3\bar{d}I\bar{\theta}$$

$$\mathcal{U}'(\bar{W}) = \min\{\mathcal{U}_i'(\bar{W})\}$$

Aplicando la hipótesis 9 definimos

$$\underline{\pi} = \min_i\{\pi_l^i\}$$

$$\overline{\pi} = \max_i\{\pi_l^i\}$$

$$l = 1, 2, 3$$

Definimos la constante K_0

$$K_0 = \frac{\mathcal{U}'(\underline{C})}{\underline{\pi}\mathcal{U}'(\bar{W})\beta_i}$$

con lo cual

$$\frac{\tilde{p}_s}{\tilde{p}_{\acute{s}1}} = \frac{\beta_i^{t(s)-[t(\acute{s})+1]}\pi^i(s|\acute{s})\mathcal{U}_i'(\hat{C}_s^i)}{\pi^i(1|\acute{s})\mathcal{U}_i'(\hat{C}_{\acute{s}1}^i)} \leq$$

$$\leq K_0(\beta_i\overline{\pi})^{t(s)-t(\acute{s})} \leq K_0(\beta\overline{\pi})^{t(s)-t(\acute{s})}$$

Por lo tanto

$$\frac{\sum_{s\in\mathcal{S}''}\tilde{p}_s}{\tilde{p}_{\acute{s}1}} \leq K_0 \sum_{s\in\mathcal{S}''}(\beta\overline{\pi})^{t(s)-t(\acute{s})} =$$

$$= \frac{K_0}{1-\beta\overline{\pi}}$$

Con los mismos razonamientos

$$\frac{\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_{\acute{s}1}} = \frac{\beta_i^{t(s)-t(\acute{s})}\pi^i(sl|\acute{s})\mathcal{U}_i'(\hat{C}_s^i)}{\pi^i(1|\acute{s})\mathcal{U}_i'(\hat{C}_{\acute{s}1}^i)} \leq$$

$$\leq K_0\beta_i\overline{\pi}(\beta\overline{\pi})^{t(s)-t(\acute{s})}$$

con lo cual

$$\frac{\sum_{s\in S''}\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_{\acute{s}1}} = \sum_{s\in S''}\frac{\beta_i^{t(s)-t(\acute{s})}\pi^i(sl|\acute{s})\mathcal{U}_i'(\hat{C}_s^i)}{\pi^i(1|\acute{s})\mathcal{U}_i'(\hat{C}_{\acute{s}1}^i)} \leq$$

$$\leq K_0\beta_i\overline{\pi}\sum_{s\in S''}(\beta_i\overline{\pi})^{t(s)-t(\acute{s})} \leq$$

$$\leq K_0\beta\overline{\pi}\sum_{s\in S''}(\beta\overline{\pi})^{t(s)-t(\acute{s})} = K_0\beta\overline{\pi}\frac{1}{1-\beta\overline{\pi}}$$

Habíamos obtenido

$$\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}1}\right] >$$

$$> -I\bar{w}\sum_{s\in S''}\tilde{p}_s - 3\bar{d}I\bar{\theta}\sum_{s\in S''}\tilde{p}_{sl}$$

esto es

$$\left[\hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}1} + \hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}1} + \hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}1}\right] >$$

$$> -I\bar{w}\sum_{s\in S''}\frac{\tilde{p}_s}{\tilde{p}_{\acute{s}1}} - 3\bar{d}I\bar{\theta}\sum_{s\in S''}\frac{\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_{\acute{s}1}}$$

A partir de nuestras acotaciones en $\sum_{s\in S''}\frac{\tilde{p}_s}{\tilde{p}_{\acute{s}1}}$ y en $\sum_{s\in S''}\frac{\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_{\acute{s}1}}$ llegamos a

$$\left[\hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}1} + \hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}1} + \hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}1}\right] >$$

$$> -I\bar{w}\frac{K_0}{1-\beta\overline{\pi}} - 3I\bar{d}\bar{\theta}K_0\beta\overline{\pi}\frac{1}{1-\beta\overline{\pi}}$$

LLamando

$$B = I\bar{w}\frac{K_0}{1-\beta\overline{\pi}} + 3I\bar{d}\bar{\theta}K_0\beta\overline{\pi}\frac{1}{1-\beta\overline{\pi}}$$

obtenemos

$$\left[\hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}1} + \hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}1} + \hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}1}\right] > -B$$

donde $B > 0$, y por lo tanto queda demostrada la proposición: si existe Equilibrio de la Economía, quedan fuera esquemas de endeudamiento progresivo en términos reales para alguna constante B positiva.

Proposición 4 *En el equilibrio de la Economía, para cualquier individuo y para cualquier activo, tanto la inversión como la desinversión están acotadas.*

Demostración

Hemos visto cómo se verificaba

$$\sum_{s\in\mathcal{S}''}\tilde{p}_s\hat{C}_s^i - \sum_{s\in\mathcal{S}''}\tilde{p}_s w^i(s) - \sum_{s\in\mathcal{S}''}\tilde{p}_s\sum_{n=1}^{3}\bar{\theta}_n^i(s)\bar{q}_{n,s} =$$

$$= \left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}1}\right]$$

$$i = 1, 2, \ldots, I$$

Entonces

$$\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}1}\right] <$$

$$< \sum_{s\in\mathcal{S}''}\tilde{p}_s\hat{C}_s^i$$

$$i = 1, 2, \ldots, I$$

Sumando para todos los individuos en el lado derecho de la desigualdad tenemos

$$\left[\tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{1,\acute{s}}^i d_{1,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{2,\acute{s}}^i d_{2,\acute{s}1} + \tilde{p}_{\acute{s}1}\hat{\theta}_{3,\acute{s}}^i d_{3,\acute{s}1}\right] <$$

$$< \sum_{s\in\mathcal{S}''}\tilde{p}_s\sum_{i=1}^{I}\hat{C}_s^i$$

Por las condiciones de factibilidad y la hipótesis 6 sabemos que

$$\sum_{i=1}^{I}\hat{C}_s^i < I\bar{w} + 3\bar{d}I\bar{\theta}$$

Asimismo, como demostramos en la proposición 3 y siguiendo las mismas definiciones dadas allí

$$\frac{\sum_{s\in\mathcal{S}''}\tilde{p}_s}{\tilde{p}_{\acute{s}1}} \leq K_0\sum_{s\in\mathcal{S}''}(\beta\overline{\pi})^{t(s)-t(\acute{s})} =$$

$$= \frac{K_0}{1-\beta\overline{\pi}}$$

K_0 constante positiva, y por lo tanto

$$\left[\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}} d_{1,\acute{s}1} + \hat{\theta}^i_{2,\acute{s}} d_{2,\acute{s}1} + \hat{\theta}^i_{3,\acute{s}} d_{3,\acute{s}1}\right] <$$

$$< \frac{K_0}{1-\beta\bar{\pi}} \left[I\bar{w} + 3\bar{d}I\bar{\theta}\right]$$

$$i = 1, 2, \ldots, I$$

Por lo tanto, llamando

$$C = \frac{K_0}{1-\beta\bar{\pi}} \left[I\bar{w} + 3\bar{d}I\bar{\theta}\right]$$

concluimos

$$C > \left[\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}} d_{1,\acute{s}1} + \hat{\theta}^i_{2,\acute{s}} d_{2,\acute{s}1} + \hat{\theta}^i_{3,\acute{s}} d_{3,\acute{s}1}\right] > -B \tag{22}$$

$$i = 1, 2, \ldots, I$$

Por consiguiente, para cualquier nudo $\acute{s}$ del árbol de sucesos en el cual se tomaron las decisiones de inversion-desinversion $\hat{\theta}^i_{n,\acute{s}}$, $n = 1, 2, 3$, llamando $\hat{A}^i_{\acute{s},l}$, $l = 1, 2, 3$ a los resultados en los nudos subsiguientes de tales decisiones queda planteado el sistema

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}} d_{1,\acute{s}1} + \hat{\theta}^i_{2,\acute{s}} d_{2,\acute{s}1} + \hat{\theta}^i_{3,\acute{s}} d_{3,\acute{s}1} &= \hat{A}^i_{\acute{s},1} \\
\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}} d_{1,\acute{s}2} + \hat{\theta}^i_{2,\acute{s}} d_{2,\acute{s}2} + \hat{\theta}^i_{3,\acute{s}} d_{3,\acute{s}2} &= \hat{A}^i_{\acute{s},2} \\
\hat{\theta}^i_{1,\acute{s}} d_{1,\acute{s}3} + \hat{\theta}^i_{2,\acute{s}} d_{2,\acute{s}3} + \hat{\theta}^i_{3,\acute{s}} d_{3,\acute{s}3} &= \hat{A}^i_{\acute{s},3}
\end{aligned}$$

donde $\hat{\theta}^i_{n,\acute{s}}$, $n = 1, 2, 3$ son soluciones. Con nuestra hipótesis de mercados completos, dado que tanto $\hat{A}^i_{\acute{s},l}$ como $d_{n,\acute{s}}$, $n = 1, 2, 3$, $l = 1, 2, 3$ están acotados arriba y abajo, es inmediato aplicar Cramer y comprobar que existen dos constantes positivas M y N tales que

$$M > \hat{\theta}^i_{n,\acute{s}} > -N$$

$$i = 1, 2, \ldots, I$$

para cualquier nudo $\acute{s}$ en S. Tendríamos por lo tanto que en equilibrio, las inversiones-desinversiones en cualquiera de los tres activos y en cualquier nudo del árbol de sucesos están acotadas, y queda demostrada la proposición.

Proposición 5 *En el Equilibrio de la Economía quedan fuera oportunidades de arbitraje.*

Demostración

Comenzaremos definiendo *arbitraje.* Llamamos *arbitraje en un nudo* s a una cartera $(\theta^i_{1,s}, \theta^i_{2,s}, \theta^i_{3,s})$ tal que:

- Supone endeudamiento real neto o nulo en el nudo s, conllevando en los nudos sl, $l = 1,2,3$ beneficios en términos reales no negativos y no nulos en algún sl, $l = 1,1,3$, esto es

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix} \leq 0$$

y

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} > 0$$

- Supone endeudamiento real neto en el nudo s, conllevando en el nudo sl, $l = 1,2,3$ beneficios no negativos en términos reales, esto es

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix} < 0$$

y

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} \geq 0$$

En nuestra notación vectorial $\geq$ significa no negativo, mientras que $>$ significa no negativo y no nulo, pero no necesariamente positivo en todas sus coordenadas, algo que denota $>>$. Como vemos, la idea básica de nuestra definición de arbitraje (Ross (1978), Altuğ y

Labadie (1994) y Duffie (1992)) es la posibilidad de obtener beneficios, esto es mayores posibilidades de consumo, vendiendo determinados activos y comprando otros por el mismo o inferior valor. Supongamos que existe Equilibrio de la Economía, bien Arrow-Debreu o bien de Radner. Por los Teoremas 1 y 2, dado un Equilibrio Arrow-Debreu existe un Equilibrio de Radner asociado y viceversa. Consideremos que $\{\tilde{p}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ son los precios de Equilibrio Arrow-Debreu, siendo los precios asociados del Equilibrio de Radner

$$\frac{\hat{q}_{1,s}}{\hat{p}_s} = \bar{q}_{1,s} = \frac{\sum_{l=1}^{3} d_{1,sl}\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s}$$

$$\frac{\hat{q}_{2,s}}{\hat{p}_s} = \bar{q}_{2,s} = \frac{\sum_{l=1}^{3} d_{2,sl}\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s}$$

$$\frac{\hat{q}_{3,s}}{\hat{p}_s} = \bar{q}_{3,s} = \frac{\sum_{l=1}^{3} d_{3,sl}\tilde{p}_{sl}}{\tilde{p}_s}$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_{s1}}{\tilde{p}_s} \\ \frac{\tilde{p}_{s2}}{\tilde{p}_s} \\ \frac{\tilde{p}_{s3}}{\tilde{p}_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix}$$

Sea cualquier cartera $(\theta^i_{1,s}, \theta^i_{2,s}, \theta^i_{3,s})$ que supone endeudamiento real neto o nulo en el nudo s, esto es

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix} \leq 0$$

Supongamos que esta cartera conlleva beneficios en términos reales no negativos y no nulos en algún nudo sl, $l = 1, 2, 3$, es decir

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} > 0$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} d_{1,s1}\theta^i_{1,s} + d_{2,s1}\theta^i_{2,s} + d_{3,s1}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s2}\theta^i_{1,s} + d_{2,s2}\theta^i_{2,s} + d_{3,s2}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s3}\theta^i_{1,s} + d_{2,s3}\theta^i_{2,s} + d_{3,s3}\theta^i_{3,s} \end{bmatrix} > 0$$

y por consiguiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_{s1}}{\tilde{p}_s} & \frac{\tilde{p}_{s2}}{\tilde{p}_s} & \frac{\tilde{p}_{s3}}{\tilde{p}_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1}\theta^i_{1,s} + d_{2,s1}\theta^i_{2,s} + d_{3,s1}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s2}\theta^i_{1,s} + d_{2,s2}\theta^i_{2,s} + d_{3,s2}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s3}\theta^i_{1,s} + d_{2,s3}\theta^i_{2,s} + d_{3,s3}\theta^i_{3,s} \end{bmatrix} > 0$$

puesto que $\tilde{p}_s \in \mathbf{R}_{++}$, $s \in \mathcal{S}$. Transformamos la expresión anterior

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_{s1}}{\tilde{p}_s} & \frac{\tilde{p}_{s2}}{\tilde{p}_s} & \frac{\tilde{p}_{s3}}{\tilde{p}_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1}\theta^i_{1,s} + d_{2,s1}\theta^i_{2,s} + d_{3,s1}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s2}\theta^i_{1,s} + d_{2,s2}\theta^i_{2,s} + d_{3,s2}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s3}\theta^i_{1,s} + d_{2,s3}\theta^i_{2,s} + d_{3,s3}\theta^i_{3,s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_{s1}}{\tilde{p}_s} \\ \frac{\tilde{p}_{s2}}{\tilde{p}_s} \\ \frac{\tilde{p}_{s3}}{\tilde{p}_s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix} > 0$$

llegando a una contradicción, siendo por lo tanto imposible conjuntamente

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix} \leq 0$$

y

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} > 0$$

$$s \in \mathcal{S}$$

De manera análoga, sea una cartera $(\theta^i_{1,s}, \theta^i_{2,s}, \theta^i_{3,s})$ que supone endeudamiento real neto en el nudo s

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix} < 0$$

Supongamos que esta cartera conlleva en los nudos sl, $l = 1,2,3$ beneficios reales no negativos, esto es

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} \geq 0$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} d_{1,s1}\theta^i_{1,s} + d_{2,s1}\theta^i_{2,s} + d_{3,s1}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s2}\theta^i_{1,s} + d_{2,s2}\theta^i_{2,s} + d_{3,s2}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s3}\theta^i_{1,s} + d_{2,s3}\theta^i_{2,s} + d_{3,s3}\theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \geq 0$$

y por consiguiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_{s1}}{\tilde{p}_s} & \frac{\tilde{p}_{s2}}{\tilde{p}_s} & \frac{\tilde{p}_{s3}}{\tilde{p}_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1}\theta^i_{1,s} + d_{2,s1}\theta^i_{2,s} + d_{3,s1}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s2}\theta^i_{1,s} + d_{2,s2}\theta^i_{2,s} + d_{3,s2}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s3}\theta^i_{1,s} + d_{2,s3}\theta^i_{2,s} + d_{3,s3}\theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \geq 0$$

puesto que $\tilde{p}_s \in \mathbf{R}_{++}$, $s \in \mathcal{S}$. Transformamos la expresión anterior

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_{s1}}{\tilde{p}_s} & \frac{\tilde{p}_{s2}}{\tilde{p}_s} & \frac{\tilde{p}_{s3}}{\tilde{p}_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1}\theta^i_{1,s} + d_{2,s1}\theta^i_{2,s} + d_{3,s1}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s2}\theta^i_{1,s} + d_{2,s2}\theta^i_{2,s} + d_{3,s2}\theta^i_{3,s} \\ d_{1,s3}\theta^i_{1,s} + d_{2,s3}\theta^i_{2,s} + d_{3,s3}\theta^i_{3,s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}_{s1}}{\tilde{p}_s} \\ \frac{\tilde{p}_{s2}}{\tilde{p}_s} \\ \frac{\tilde{p}_{s3}}{\tilde{p}_s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix} \geq 0$$

llegando a una contradicción, siendo por lo tanto imposible conjuntamente

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,s} \\ \bar{q}_{2,s} \\ \bar{q}_{3,s} \end{bmatrix} < 0$$

y

$$\begin{bmatrix} \theta^i_{1,s} & \theta^i_{2,s} & \theta^i_{3,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,s1} & d_{1,s2} & d_{1,s3} \\ d_{2,s1} & d_{2,s2} & d_{2,s3} \\ d_{3,s1} & d_{3,s2} & d_{3,s3} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$s \in \mathcal{S}$$

Queda demostrada por tanto la proposición: si existe equilibrio de la Economía están agotadas todas las posibilidades de arbitraje.

6. CONCLUSIONES

Partiendo de modelos básicos con activos de Equilibrio General Dinámico con Incertidumbre (Arrow (1953), Lucas (1978), Altuğ y

Labadie (1994)) hemos construido uno más amplio cuyos rasgos primordiales son la extensión de la hipótesis de mercados completos considerando una matriz de dividendos genérica, la heterogeneidad entre agentes, la no estacionariedad en la incertidumbre y la asimilación entre activos y bienes de capital, que permite manteniéndonos en el marco de una Economía de Intercambio ampliar los resultados al caso de producción. La equivalencia entre los equilibrios Arrow-Debreu y de Radner (Arrow (1953), Mas-Colell, Whinston y Green (1995), Altuğ y Labadie (1994), Duffie (1992)) nos ha permitido obtener diferentes expresiones para los precios de los activos, quedando patentes su carácter estocástico y su independencia respecto de las ofertas. En efecto, los precios de los activos son únicamente determinados por sus dividendos futuros esperados previamente descontados según factores de descuento individuales, de tal forma que en equilibrio los precios de los activos coinciden con el valor de mercado de sus dividendos futuros. La equivalencia entre entornos posibilita también la obtención de propiedades financieras en el equilibrio. Así, el Equilibrio de la Economía supone la inexistencia de arbitraje (Ross (1978), Duffie (1992), Altuğ y Labadie (1995), la imposibilidad de endeudamientos progresivos y límites al ahorro/desahorro en los activos para todos los individuos. Por lo tanto, junto a la suficiencia de estas condiciones para la existencia del equilibrio, hemos concluido su necesariedad, en un modelo fácilmente extensible al caso de producción.

Referencias

[1] Abel, A. *Stock Prices under Time-Verying Dividend Risk: An Exact Solution in an Infinite-Horizon General Equilibrium Model.* Journal of Monetary Economics 22, 1988, pp. 375-393.

[2] Altuğ, S. and Labadie, P. *Dynamic Choice and Asset Markets.* Academic Press, Inc. 1994.

[3] Apostol,T. *Análisis Matemático.* Editorial Reverté, 1979.

[4] Arrow, K.J. *Le rôle des valeurs boursiéres pour la répartition la meilleure des risques.* Econometrie. Paris: Centre National de la recherche scientifique, 1953, pp. 41-48.

[5] Arrow, K.J. y Hahn, F.H.. *General Competitive Analysis.* Elsevier Science Publishers, 1971.

[6] Breeden, D. *An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities.* Journal of Financial Economics, 7, 1979, pp. 265-296.

[7] Cochrane, J.H. and Hansen, L.P. *Asset Pricing Explorations for Macroeconomics.* NBER Macroeconomics annual 1992, pags. 115-165.

[8] Constantinides, G. *Intertemporal Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and without Demand Aggregation.* Journal of Business, 55, 1982, pp. 253-267.

[9] Debreu, G. *Theory of Value.* New york: Wiley, 1959.

[10] Duffie, D. *Dynamic Asset Pricing Theory.* Princeton: Princeton University Press, 1992.

[11] Duffie, D. and Sonnenschein, H.. *Arrow and General equilibrium Theory.* Journal of Economic Literature, 1989, June.

[12] Hernández, A., and Santos, M. S.. *Competitive Equilibria for Infinite-Horizon Economies with Incomplete Markets.* Journal of Economic Theory, 71, 1996.

[13] Kehoe, T. J.. *Computation and Mathematical Methods.* En *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. IV, Hildenbrand and Sonnenschein Ed., North-Holland, 1991.

[14] Kreps, D. and Porteus, E. *Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory.* Econometrica 46, 1978, pp. 185-200.

[15] Lucas, R. *Asset Prices in an Exchange Economy.* Econometrica 46, 1978, pp. 1429-1445.

[16] Magill, M. and Quinzii, M.. *Infinite Horizon Incomplete Markets.* Econometrica, Vol. 62, 4, July, 1994.

[17] Magill, M. and Shafer, W.. *Incomplete Markets.* En *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. IV, Hildenbrand and Sonnenschein Ed., North-Holland, 1991.

[18] Mas-Colell, A., Whinston, M.D. and Green, J.R.. *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, 1995.

[19] Mehra, R. and Prescott, E.C. *The Equity Premium. A Puzzle.* Journal of Monetary Economics 15, 1985.

[20] Merton, R. *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model.* Econometrica 41, 1973, pp. 867-887.

[21] Radner, R.. *Equilibrium under Uncertainty.* En *Handbook of Mathematical Economics, Vol. II*, Arrow and Intriligator Editors, North-Holland, 1991.

[22] Ross, S. *A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams.* Journal of Business, 51, 1978.

[23] Stokey,N.L. and Lucas,R.L. with Prescott,E.C.. *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard University Press,1989