

# Estimación de la Tendencia Neutral al Riesgo de la ETTI utilizando Wavelets

Lourdes Gómez del Valle<sup>1,2</sup>, Julia Martínez Rodríguez<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Economía Aplicada, Universidad de Valladolid, España*

<sup>2</sup> *Premio Extraordinario de Doctorado (A.D.E.), Curso 2004-2005*

**Resumen** En este trabajo proponemos una nueva técnica de aproximación para la estimación no paramétrica de la tendencia neutral al riesgo de los tipos de interés en modelos de la estructura temporal de los tipos de interés. En esta nueva técnica se utiliza para la aproximación bases de funciones ortogonales en  $L^2(\mathbb{R})$  llamadas wavelets.

**Palabras clave** Estructura Temporal de los Tipos de Interés (ETTI), Estimación no Paramétrica, Wavelets.

**Clasificación JEL** C14, E43.

## 1 Introducción

En las últimas décadas hemos asistido a la proliferación de nuevos activos derivados de los tipos de interés, como por ejemplo, futuros sobre bonos, operaciones de permuta financiera (swaps), bonos con opciones incorporadas, etc., cuyas corrien-

tes de pagos dependen de alguna manera de los tipos de interés vigentes en cada momento.

Para construir modelos que permitan valorar estos derivados es muy importante tener en cuenta el carácter estocástico de los tipos de interés. Por ello, han surgido modelos específicos para valorar derivados de los tipos de interés que se basan en determinar la dinámica de la estructura temporal en un entorno estocástico, eliminando las oportunidades de arbitraje, Vasicek (1997) y Cox et al (1985). Sin embargo, no existe ningún consenso sobre cuál de ellos es el más adecuado.

Los investigadores han prestado mucha atención a la estimación de la volatilidad. Una razón es que la función de difusión, que es el segundo momento y mide la volatilidad instantánea del proceso, es de gran interés en la modelización de los movimientos de los tipos de interés y los rendimientos de los derivados. Otra razón y posiblemente la más importante es que en el famoso modelo de Black-Scholes para la valoración de opciones, los precios de los activos derivados se ven influenciados por los precios de los activos subyacentes únicamente a través de la volatilidad instantánea, es decir, la función de difusión. Sin embargo tal y como puntualizan Lo y Wang (1995), el rendimiento de un título viene determinado por la tendencia e influye en el precio de las opciones sobre dicho título. Además en los modelos de la estructura temporal de los tipos de interés tanto la tendencia como la volatilidad y el precio del riesgo de mercado influyen en la fórmula que nos permite obtener los precios de los activos derivados. Por tanto, la tendencia tiene tanta importancia como la volatilidad.

En consecuencia Gómez-Valle y Martínez-Rodríguez (2006) plantean un nuevo enfoque para estimar los coeficientes de la ecuación en derivadas parciales de la estructura temporal, a partir de la pendiente de la curva de rendimientos en el origen. Este enfoque permite obtener la estructura temporal a partir, únicamente, de la tendencia neutral al riesgo y la volatilidad, sin necesidad de estimar o identificar la tendencia de los tipos de interés o el precio del riesgo de mercado.

Los resultados de este enfoque los ilustran utilizando el Método del Núcleo, Härdle (1999), que es el más utilizado en la literatura.

El objetivo fundamental de este trabajo consiste en utilizar otro método de estimación no paramétrica basado en la aproximación mediante un conjunto de bases ortogonales de wavelets en  $L^2(\mathbb{R})$ . Esta técnica de aproximación novedosa se ha desarrollado en los últimos años y se ha aplicado a numerosos campos, como la Teoría de la Señal, ofreciendo muy buenos resultados. Esto se debe, fundamentalmente, a las propiedades de localización en frecuencia y tiempo, que es lo que las distingue de las Series de Fourier.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En la Sección 2 presentamos la ecuación de la estructura temporal. En la Sección 3 mostramos el proceso de estimación de los coeficientes de la ecuación de la estructura temporal utilizando el Método del Núcleo y un conjunto de bases ortogonales de wavelets en  $L^2(\mathbb{R})$ . En la Sección 4 mostramos el comportamiento de esta nueva técnica de estimación frente al Método del Núcleo utilizando datos de los mercados de Estados Unidos. Finalmente en la Sección 5 reflejamos las conclusiones finales.

## 2 El modelo

En este trabajo, nos centramos en modelos Markovianos homogéneos en el tiempo con una única variable de estado que es el tipo de interés instantáneo,  $r_t$ . Para ello suponemos que  $r_t$  sigue un proceso estocástico de la forma siguiente

$$dr_t = \alpha(t, r)dt + \rho(t, r)dz_t, \quad (1)$$

donde  $z_t$  es el movimiento Browniano estándar. Aquí,  $\alpha(t, r)$  recibe habitualmente el nombre de tendencia o función de rendimiento instantáneo y  $\rho(t, r)$  es la difusión o función de volatilidad.

El precio de un bono cupón cero en el instante actual  $t$  que vence en un instante  $T, t \leq T$ , y reporta 1 u.m. en dicho instante, lo consideramos como

función del tipo de interés instantáneo<sup>1</sup> y lo denotamos por  $P(t, r; T)$ , con

$$P(T, r; T) = 1. \quad (2)$$

Aplicando un razonamiento de arbitraje similar al propuesto por Black y Scholes (1973), construimos una cartera sin riesgo y utilizando la regla de diferenciación del Lema de Itô, como en duffie (1996) y Aït-Sahalia (1996a), el precio de un bono cupón cero es la solución de la siguiente ecuación en derivadas parciales,

$$P_t + (\alpha(t, r) - \lambda(t, r)\rho(t, r)) P_r + \frac{1}{2}\rho^2(t, r)P_{rr} - rP = 0, \quad (3)$$

donde  $\lambda(t, r)$  es el precio del riesgo de mercado. Para obtener el precio de un bono cupón cero, o la función de descuento, es necesario resolver esta ecuación en derivadas parciales sujeta a la condición final (2).

El tanto de rendimiento al vencimiento,  $R(t, r; T)$  es el rendimiento interno de un bono cupón cero en un instante de tiempo  $t$  y que vence en  $T$ , esto es,

$$R(t, r; T) = \exp(-P(t, r; T)(T - t)). \quad (4)$$

El conjunto de tantos al contado  $R(t, T_j)$  ( $t \leq T_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, N$ ) recibe el nombre de estructura temporal de los tipos de interés al contado o curva de rendimientos (*yield curve*).

El Teorema de Feynman-Kac bajo ciertas hipótesis, Øksendal (2003), nos permite expresar la solución de la ecuación en derivadas parciales Øksendal (2003) como el valor esperado de una función de un proceso estocástico, cuyos coeficientes de tendencia y difusión vienen definidos en términos de los coeficientes de la ecuación en derivadas parciales. Así, el precio de un bono cupón cero puede expresarse mediante el siguiente valor esperado,

$$P(t, r; T) = E \left[ \exp \left( - \int_t^T \hat{r}(s) ds \right) \middle| \hat{r}(t) \right],$$

---

<sup>1</sup> Evidentemente, el precio de un bono cupón cero puede depender de otras variables, pero para este análisis suponemos que únicamente depende del tipo de interés instantáneo sin riesgo, del momento actual  $t$  y del instante de vencimiento  $T$ .

donde  $\hat{r}$  se conoce como tipo de interés neutral o ajustado al riesgo, Cox et al (1985), y su dinámica viene determinada por

$$d\hat{r} = (\alpha(t, \hat{r}) - \lambda(t, \hat{r})\rho(t, \hat{r})) dt + \rho(t, \hat{r})d\hat{z},$$

bajo una medida de probabilidad equivalente a la del proceso (1). Aquí  $d\hat{z}$  es también un movimiento browniano estándar bajo dicha medida de probabilidad equivalente. Este proceso neutral al riesgo se obtiene como resultado del Teorema de Cambio de Medida de Guirsanov, Øksendal (2003).

Por tanto, una vez conocida la tendencia, la volatilidad y el precio del riesgo de mercado es posible obtener la estructura temporal y valorar los diferentes derivados del tipo de interés. Sin embargo, la obtención de estas funciones no es una tarea sencilla y en la Sección 3 analizamos cómo obtenerlas utilizando técnicas no paramétricas.

Son escasas las ocasiones en las que es posible encontrar una solución exacta para el problema de la estructura temporal, y en los modelos no paramétricos no es posible en ningún caso. Por tanto, la utilización de métodos numéricos eficientes juega un papel muy importante a la hora de implantar los diferentes modelos. Son numerosos los autores que partiendo del Teorema de Feynman-Kac aplican el Método de Simulación de Monte Carlo por su sencillez, aunque su coste computacional es muy elevado y su orden de convergencia bastante pequeño. Por tanto, nosotros utilizamos otro tipo de métodos numéricos más eficientes como son los Métodos en Diferencias Finitas.

### 3 Estimación de los coeficientes de la ecuación

Para poder obtener la curva de rendimientos es necesario estimar previamente los coeficientes de la ecuación en derivadas parciales (3). En la literatura son muchos los autores, Vasicek (1997), Cox et al (1985), que establecen restricciones e hipótesis sobre el comportamiento de las diferentes funciones, sin embargo no existe evidencia empírica suficiente sobre qué modelo es más adecuado. Por ello

recientemente se han empezado a utilizar técnicas no paramétricas para la estimación de las funciones del proceso estocástico del tipo de interés y del precio del riesgo de mercado que aparecen en la ecuación de la estructura temporal, como por ejemplo Stanton (1997) y Jiang (1998). Recientemente Gómez-Valle y Martínez-Rodríguez (2006) plantearon la estimación de la tendencia neutral al riesgo del tipo de interés,

$$g(t, r) = \alpha(t, r) - \rho(t, r)\lambda(t, r),$$

directamente a partir de la pendiente de la curva de rendimientos en el origen,

$$\frac{\partial R}{\partial T}|_{T=t} = \frac{1}{2}(\alpha(t, r) - \rho(t, r)\lambda(t, r)). \quad (5)$$

Este enfoque tiene la ventaja de que no es necesario estimar el precio del riesgo de mercado ni la tendencia del tipo de interés por separado, lo cual permite reducir considerablemente el coste computacional del modelo. Además Gómez-Valle y Martínez-Rodríguez (2006) demuestran que no existen oportunidades de arbitraje en el modelo. El enfoque que describen consiste en estimar la tendencia neutral al riesgo de los tipos de interés utilizando el Método del Núcleo. Sin embargo, en la literatura existen otras técnicas de estimación no paramétricas que presentan ventajas importantes como son la aproximación de las funciones utilizando un conjunto de bases ortogonales de wavelets en  $L^2(\mathbb{R})$ .

La Teoría de Wavelets fue introducida por Y. Meyer, I. Daubechies y S. Mallat, entre otros, en los años 80. A partir de entonces ha habido un desarrollo considerable en diferentes campos, como en la Teoría de la Señal, la estimación no paramétrica de funciones y en la comprensión de datos.

Las wavelets son un conjunto de funciones base ortonormales con numerosas propiedades, y que se generan a partir de dilataciones y traslaciones de una *función de escalado* o *wavelet padre*,  $\phi$ , y de una *wavelet madre*,  $\psi$ , asociadas a un Análisis de Multiresolución  $r$ -regular de  $L^2(\mathbb{R})$ , Mallat (1989).

Cualquier función  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$  se puede aproximar a través de wavelets. Concretamente la wavelet padre,  $\phi$ , proporciona buenas aproximaciones para las fun-

ciones suaves mientras que la wavelet madre,  $\psi$ , es útil para aproximar funciones con fluctuaciones locales.

Existen diferentes familias de wavelets propuestas por distintos autores, por ejemplo, las Haar, las Meyer, la de Littlewood-Paley. Para una descripción más detallada ver Daubechies (1999) y Vidakovic (1999). En este trabajo nosotros nos centramos únicamente en las wavelets desarrolladas por Daubechies (1988) y Daubechies (1993), que son las que se utilizan habitualmente en Estadística. Estas funciones se caracterizan porque son ortogonales y de soporte compacto, poseen diferente grado de suavidad y tienen el máximo número de momentos nulos en el dominio, dependiendo de su anchura. Todas estas propiedades son deseables cuando se intenta aproximar una función a través de series de wavelets.

Los estimadores lineales de wavelets han sido ampliamente estudiados. Además, autores como Härdle (1998) muestran, mediante varios análisis empíricos, que los estimadores lineales pueden presentar pequeños picos, que reflejan el hecho de que se pueden estar incluyendo oscilaciones innecesarias debido a los coeficientes de la serie. Sin embargo, existen numerosos criterios para la eliminación del ruido (ver Vidakovic (1999) y Abramovich et al (2000) para más información sobre diferentes criterios de “thresholding” o eliminación de ruido).

En cuanto a la estimación de la volatilidad del tipo de interés, que es otro de los coeficientes que aparecen en la ecuación de la estructura temporal, nosotros utilizamos la aproximación de primer orden junto con el Método del Núcleo, propuesta por Stanton (1997),

$$\rho(r_t) = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (r_{t+1} - r_t)^2 K[(r - r_t)/h]}{\sum_{t=1}^N K[(r - r_t)/h]}}, \quad (6)$$

con  $K$  la función núcleo y  $h$  el parámetro de anchura de banda, y que tal y como se recoge en Jiang (1988) y Gómez-Valle y Martínez-Rodríguez (2006) ofrece resultados satisfactorios en la estimación de la volatilidad.

## 4 Aplicación empírica

En esta sección utilizamos datos del mercado de Estados Unidos para ilustrar el comportamiento de las curvas de rendimientos utilizando la novedosa técnica de la aproximación de funciones mediante wavelets.

En primer lugar presentamos los datos utilizados y, posteriormente estimamos la tendencia neutral al riesgo mediante el Método del Núcleo como en Gómez-Valle y Martínez-Rodríguez (2006) y también un conjunto de bases ortogonales de wavelets en  $L^2(\mathbb{R})$ , que es la propuesta de este trabajo.

Para comparar su comportamiento con otro tipo de modelos existentes en la literatura, estimamos también los coeficientes de la ecuación de la estructura temporal como en Jiang (1998) y Stanton (1997).

En todos los casos estimamos la volatilidad con la aproximación de primer orden y el Método del Núcleo, (6).

Finalmente utilizamos un Método Crank-Nicolson para obtener las curvas de rendimientos obtenidas con cada uno de los modelos y técnicas de aproximación ,y comparamos los errores obtenidos con los diferentes modelos utilizando datos del mercado de Estados Unidos.

### 4.1 Los datos

En esta subsección presentamos y describimos los datos que empleamos para realizar posteriormente la comparación empírica de los diferentes enfoques y métodos de estimación.

Para poder estimar los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica del tipo de interés (1), necesitamos disponer de una serie de tiempo del tipo de interés instantáneo libre de riesgo. Nosotros utilizamos, concretamente, las observaciones diarias de los rendimientos de los Treasury Bills (o T-Bills) del mercado secundario de Estados Unidos, lo cual es una práctica habitual en la literatura, Stanton (1997), Jiang (1998). El periodo de estimación lo consideramos desde enero de

1970 hasta diciembre de 1999, y transformamos los rendimientos en tipos de interés anualizados sin realizar ningún ajuste específico por fines de semana o vacaciones. Los datos los obtenemos de la base de datos h.15 de la Reserva Federal de Estados Unidos.

La elección de estos datos se basa en las siguientes razones. En primer lugar, hemos buscado un periodo lo suficientemente grande como para que la estimación no paramétrica sea adecuada, ya que se requiere un número elevado de observaciones para que sea representativa. No hemos evitado el periodo anterior a 1980, a pesar del cambio monetario de la Reserva Federal en 1979, ya que muchos autores, como por ejemplo Chan et al (1992), rechazaron la hipótesis de que hubiese un cambio estructural. En segundo lugar, utilizamos datos diarios ya que las series de datos con una elevada frecuencia minimizan las deficiencias de esta aproximación, Brennen et al (1996). En la Figura 1 representamos los rendimientos de los Treasury Bills a 3 meses, que es la serie utilizada para aproximar el tipo de interés instantáneo, y en la Figura 2 sus primeras diferencias.

En el Cuadro 1 recogemos los estadísticos más importantes para el tipo de interés y sus variaciones diarias. El número total de datos del que disponemos es de 7.488, y los tipos de interés toman valores que oscilan entre el 2,6% y el 16,8%. En cuanto a los coeficientes de autocorrelación, los de los tipos de interés descienden lentamente, mientras que los de sus variaciones diarias son, en general, pequeños y no consistentemente positivos o negativos.

#### *4.2 Estimación de las funciones*

En primer lugar estimamos la tendencia neutral al riesgo mediante un método de estimación no paramétrica basado en la aproximación mediante un conjunto de bases ortogonales de wavelets en  $L^2(\mathbb{R})$ . Para ello previamente discretizamos la pendiente de la curva de rendimientos en el origen (5) mediante diferenciación numérica, que es el proceso de encontrar el valor de la derivada de una función

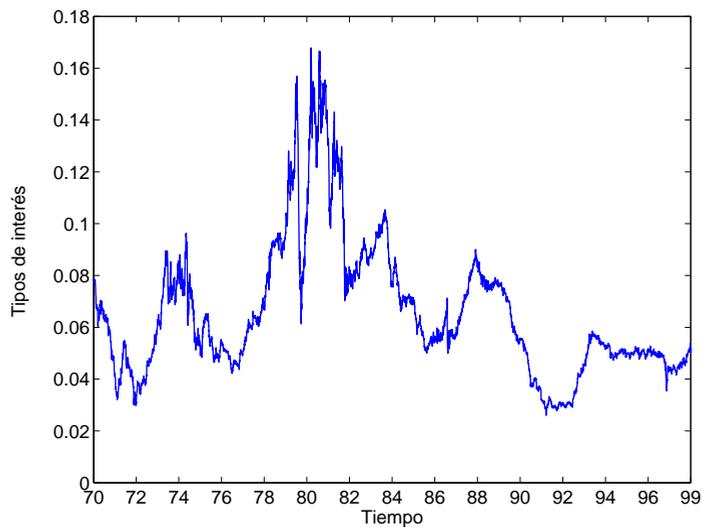


Fig. 1: Rendimiento de los Treasury Bills a 3 meses del mercado de Estados Unidos desde enero de 1970 hasta diciembre de 1999.

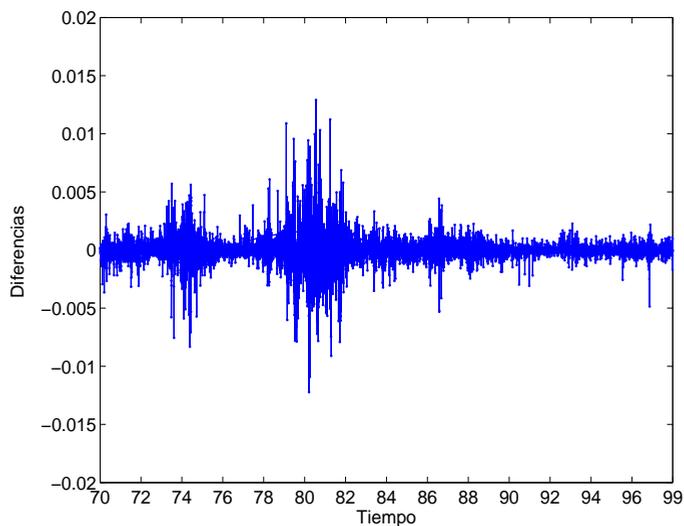


Fig. 2: Primeras diferencias de los rendimientos de los Treasury Bills a 3 meses del mercado de Estados Unidos desde enero de 1970 hasta diciembre de 1999.

Variable	$r_t$	$r_t - r_{t-1}$
N	7488	7487
Media	0.065878	-3.61e-6
Desviación típica	0.025985	0.001155
Máximo	0.167829	0.012905
Mínimo	0.026015	-0.012224
$\rho_1$	0.999	0.137
$\rho_2$	0.998	0.020
$\rho_3$	0.996	-0.024
$\rho_4$	0.995	0.041

Table 1: Estadísticos de los datos.

en un punto dado a partir del valor en puntos próximos a él Burden y Faires (2001). En este trabajo consideramos una aproximación de primer orden.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (7)$$

Para intentar una aproximación adecuada utilizamos los rendimientos a 3 y 6 meses de los T-Bills.

En cuanto al tipo de wavelets, concretamente utilizamos las symlet que son las wavelets que ofrecen mejores resultados en otros trabajos como en Gómez-Valle (2004). Como técnica de suavizado utilizamos un thresholding suave y local, que es el más frecuente en la literatura, y el parámetro de suavizado lo obtenemos mediante el criterio universal (ver Härdle et al (1998) para una información más detallada). El algoritmo para su construcción lo programamos en Matlab 6.5 y utilizamos la Wavelet Toolbox, para poder beneficiarnos de las múltiples funciones que este programa incorpora para el tratamiento de las wavelets, como por ejemplo el algoritmo DWT y el IDWT.

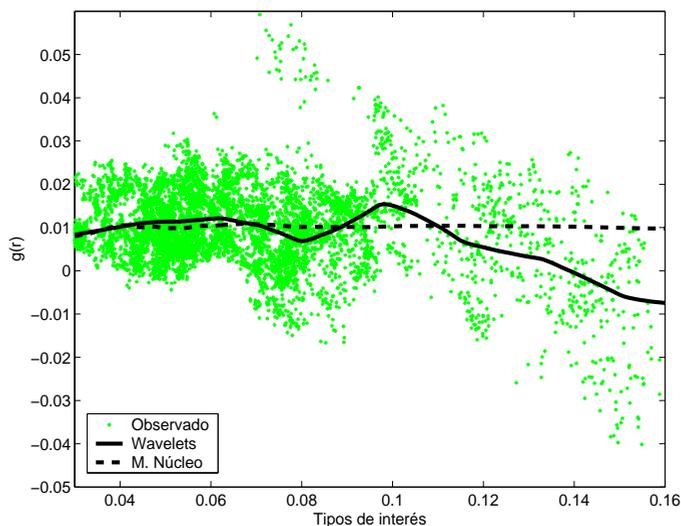


Fig. 3: Nube de puntos de la tendencia neutral al riesgo observada y estimada con el Método del Núcleo (tramo discontinuo) y mediante wavelets (tramo continuo) frente a los tipos de interés.

Para poder observar si esta técnica de aproximación de funciones ofrece resultados adecuados estimamos también la tendencia neutral al riesgo utilizando el Método del Núcleo como en Gómez-Valle y Martínez-Rodríguez (2006).

En la Figura 3 representamos la nube de puntos para la pendiente de la curva en el origen y como esta función se aproxima utilizando el Método del Núcleo (GNE)<sup>2</sup> y la técnica de wavelets (GNEW). En esta gráfica observamos que la tendencia neutral al riesgo es para todos los valores del tipo de interés más suave cuando utilizamos el Método del Núcleo. Por tanto para tipos de interés elevados, superiores al 10%, que es donde hay mayor dispersion de datos, la función estimada utilizando la técnica de wavelets sigue mejor la tendencia de los datos. Finalmente estimamos también la tendencia neutral al riesgo de los tipos de in-

<sup>2</sup> GNE: General Nonparametric Approach, Gómez-Valle y Martínez-Rodríguez (2006).

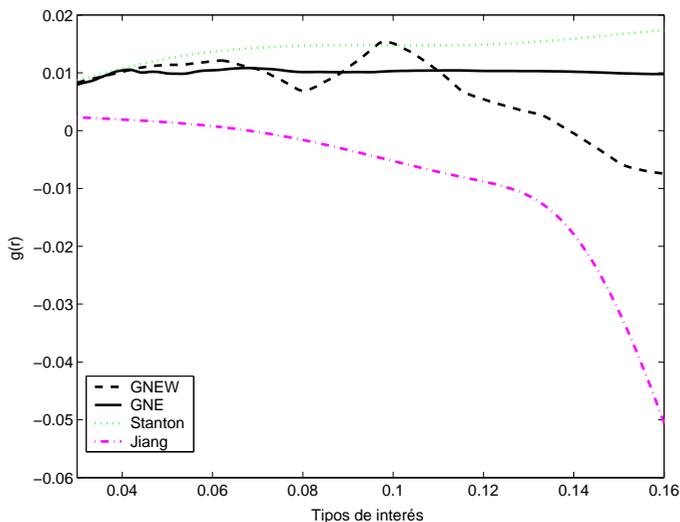


Fig. 4: Tendencia neutral al riesgo de los diferentes modelos.

terés utilizando las aproximaciones propuestas por Stanton (1997) y Jiang (1998) en la Figura 4. Es importante recordar que que estos autores plantean la estimación de la tendencia del proceso y el precio del riesgo de mercado de forma separada, lo cual incrementa el coste computacional del modelo considerablemente.

Finalmente en la Figura 5 representamos la volatilidad estimada utilizando el Método del Núcleo y una aproximación de primer orden como en (6). Todos los modelos aquí comparados utilizan esta función para la estimación de las curvas de rendimiento.

#### 4.3 Obtención de las curvas de rendimientos

Habitualmente en la literatura se obtienen las curvas de rendimientos para diferentes modelos y se comparan entre si. En raras ocasiones estas curvas se comparan con las observadas en el mercado. Esta carencia es más evidente en los

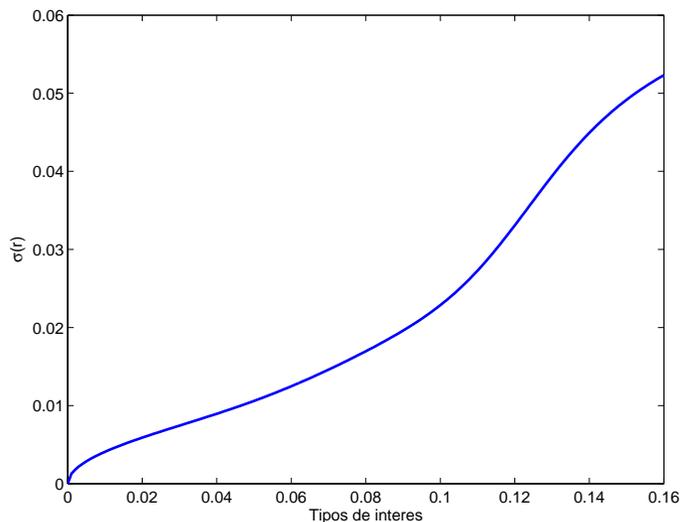


Fig. 5: Volatilidad estimada frente a los tipos de interés.

modelos no paramétricos. Así pues, en esta sección comparamos los diferentes modelos analizados a lo largo de este trabajo en todo el periodo de estimación. Para ello, calculamos las curvas de rendimientos a lo largo de este periodo y las comparamos con las observadas en el mercado, para todos los vencimientos disponibles en el mercado: 1, 3, 5, 7, y 10 años. Como medida de error utilizamos el error cuadrático medio

$$ECM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (R_t - \hat{R}_t)^2}, \quad (8)$$

con  $R_t$  el rendimiento observado en el mercado en un determinado instante de tiempo (4), y  $\hat{R}_t$  el rendimiento estimado con el método a comparar.

Una vez estimadas las funciones que aparecen en la ecuación de la estructura temporal (3), el siguiente paso es resolver esta ecuación en derivadas parciales sujeta a la condición final (2). Como todos los modelos propuestos en este trabajo se basan en técnicas no paramétricas no es posible encontrar una solución exacta.

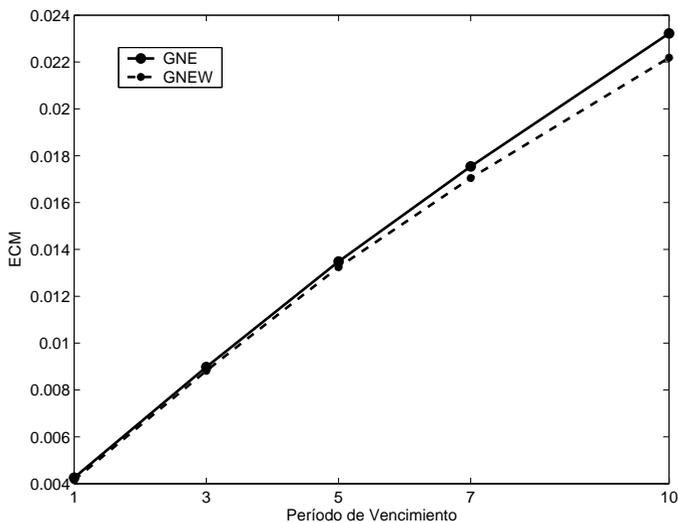


Fig. 6: Errores cometidos al comparar las curvas de rendimientos observadas y las estimadas, utilizando diferentes modelos, para diferentes vencimientos.

Por tanto utilizamos un Método en Diferencias Finitas de tipo Crank-Nicolson para obtener una solución aproximada.

En la Figura 6 presentamos el error cuadrático medio obtenido al comparar las curvas de rendimientos obtenidas al estimar la tendencia neutral al riesgo utilizando el Método del Núcleo (GNE) y la aproximación mediante bases ortogonales de wavelets (GNEW) y las observadas en el mercado. A partir de esta gráfica observamos que los errores son siempre menores cuando utilizamos la aproximación mediante bases ortogonales wavelets (GNEW) que cuando utilizamos el Método del Núcleo para estimar la tendencia neutral al riesgo de los tipos de interés. Además estas diferencias se incrementan cuando aumenta el período de vencimiento. En el Cuadro 2 mostramos el error cuadrático medio para cada uno de los modelos estimados y lo descomponemos en el sesgo y la desviación típica. Únicamente recogemos vencimientos de 1 y 3 años ya que los modelos que analizamos son de un factor, por lo que son adecuados para el corto plazo. En

Modelo	Vencimiento	RMSE	Sesgo	Desviación típica
GNEW	1	4.1540e-03	4.5628e-05	4.1540e-03
	3	8.8191e-03	-4.1213e-03	7.7974e-03
GNE	1	4.2557e-03	1.1429e-05	4.2560e-03
	3	8.9801e-03	-4.2918e-03	7.8886e-03
Jiang	1	5.5942e-03	-3.0501e-03	4.6898e-03
	3	9.7058e-03	-4.4773e-03	8.6120e-03
Stanton	1	6.1503e-03	-4.3101e-03	4.3877e-03
	3	1.1352e-02	-8.0794e-03	7.9751e-03

Table 2: Descomposición del error cuadrático medio en el sesgo y la desviación típica.

primer lugar observamos que al igual que en la Figura 6 el error cuadrático medio cuando aproximamos la tendencia neutral al riesgo mediante bases ortogonales de wavelets es menor que cuando la aproximamos con el Método del Núcleo, sin embargo las diferencias son muy pequeñas. Además observamos que para vencimientos a 1 año el sesgo es menor cuando utilizamos el Método del Núcleo. Aunque las diferencias entre ambos métodos son muy pequeñas (de orden  $10^{-4}$ ), cabe esperar que en períodos de mayor inestabilidad global la aproximación con bases ortogonales de wavelets proporcionará mejores resultados.

Si comparamos el error cuadrático medio y su descomposición en sesgo y desviación típica para los modelos de Stanton (1997) y Jiang (1998), observamos que al igual que en Gómez-Valle y Martínez-Rodríguez (2006), el modelo de Jiang (1998) proporciona menores errores que el modelo de Stanton (1997), pero en todos los casos los errores son mayores que cuando estimamos la tendencia neutral al riesgo directamente a partir de la pendiente de la curva de rendimientos en el origen. Por tanto este trabajo al igual que Gómez-Valle y Martínez-Rodríguez (2006) mostramos, aunque utilizando datos diferentes, la superioridad de la es-

timación de la tendencia neutral al riesgo directamente a partir de la pendiente de la curva de rendimientos en el origen.

## 5 Conclusiones

En la construcción de modelos de estructura temporal es muy importante tener en cuenta el carácter estocástico de los tipos de interés. Por ello, han surgido modelos específicos que se basan en determinar la dinámica de la estructura temporal en un entorno estocástico partiendo de ciertas hipótesis sobre el comportamiento de los tipos de interés, y eliminando las oportunidades de arbitraje Vasicek (1977) y Cox et al (1985). Sin embargo, no existe ningún consenso sobre qué modelo es el más adecuado. Por ello en la literatura se han empezado a plantear modelos en los que el comportamiento de los tipos de interés se determina mediante técnicas de estimación no paramétrica. Sin embargo, este tipo de modelos suponen un mayor coste computacional ya que no es posible encontrar una solución exacta para el modelo.

En el trabajo Gómez-Valle y Martínez-Rodríguez (2006) se propone obtener la tendencia neutral al riesgo de los tipos de interés a partir de la pendiente de la curva en el origen. De esta forma se obtienen curvas de rendimientos más próximas a las observadas y se reduce el número de funciones a estimar de 3 a 2, lo cual supone una reducción del coste computacional del modelo. La tendencia neutral al riesgo de los tipos de interés se estima utilizando el Método del Núcleo.

El objetivo fundamental de este trabajo es plantear otra técnica alternativa de estimación no paramétrica, la aproximación de funciones mediante un conjunto de bases de funciones ortogonales en  $L^2(\mathbb{R})$ .

En el mundo financiero es habitual encontrar fenómenos que se comportan como ondas pequeñas seguidas de otras de baja frecuencia o viceversa. La Teoría de Wavelets permite localizar, e identificar, tal acumulación de ondas pequeñas y ayuda a entender mejor las razones de esos fenómenos. A diferencia del Análisis

de Fourier y la Teoría Espectral, la Teoría de Wavelets se basa en una representación local de frecuencias. Cualitativamente, las diferencias entre la función seno habitual y la wavelet se basa en las propiedades que esta última tiene de localización: el seno está localizado en el dominio temporal, mientras que la wavelet está localizada en ambos dominios, Härdle (1999).

Por tanto en este trabajo analizamos la tendencia neutral al riesgo utilizando bases ortogonales de wavelets y observamos que su comportamiento es ligeramente mejor. Sin embargo, dada la buena aproximación que proporcionan las wavelets pensamos que en períodos de tiempo con mayor inestabilidad en los tipos de interés, la técnica de wavelets proporcionará mejores resultados.

*Agradecimientos* Este trabajo está parcialmente subvencionado por los proyectos de investigación Ministerio de Ciencia y Tecnología DGI BFM2002-00425 y Junta de Castilla y León VA099/04.

## Referencias

1. Aït-Sahalia, Y, (1996a): *Nonparametric pricing of interest rate derivative securities*. *Econometrica* 64, 3, pp. 527–560.
2. Björk, T., (1998): *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford: Oxford University Press.
3. Black, F., Scholes, M., (1973): *Pricing of options and corporate liabilities*. *Journal of Political Economy* 81, pp. 637–654.
4. Brenner, R. J., Harjes, R. H., Kroner, K. F., (1996): *Another look at models of the short-term interest rate*. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 31 (1) pp. 85–107.
5. Burden, R.L., Faires, J. D., (2001): *Numerical Analysis*. Brooks/Cole Publishing Co. 7th Edition.
6. Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A. Sanders, A.B., (1992): *An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate*. *Journal of Finance* 47, pp. 1209–1227.

7. Cox, J. C., Ingersoll, J. E. , S.A. Ross, Jr., (1985): *A theory of the term structure of interest rates*. *Econometrica* 53, pp. 385–407.
8. Daubechies, I., (1988): *Communications on Pure and Applied Mathematics* X, LI, pp. 909–996.
9. Daubechies, I., (1999): *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia LI, pp. 909–996.
10. Daubechies, I., (1993): *Orthormal bases of compactly supported wavelets II. Variations on a theme*. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 24, pp. 499–519.
11. Duffie, D., (1996): *Dinamic Asset Pricing Theory*. Princeton (New Jersey): Princeton University Press.
12. Gómez-Valle, L., Martínez-Rodríguez, (2006): *Modelling the term structure of interest rates: an efficient nonparametric approach*. Mimeo.
13. Gómez-Valle, L., (2004): *Nuevos Planteamientos en modelos unifactoriales de la estructura temporal de los tipos de interés*. Tesis Doctoral.
14. Härdle, W., (1999): *Applied Nonparametric Regression*. Econometric Society Monographs 19, New York: Cambridge University Press.
15. Härdle, W., Kerkycharian, G., Picard, D., Tsybakov, A., (1998): *Wavelets, Approximation and Statistical Aproximations*. Lecture Notes in Statistics 129. New York: Springer-Verlag.
16. Jiang, G.J., (1998): *Nonparametric modeling of U.S. interest rate term structure dynamics and implications on the prices of derivative securities*. *Journal of Finance and Quantitative Analysis* 33, pp. 465–497.
17. Lo A.W., Wang, J., (1995): *Implementing option pricing models when asset returns are predictable*. *Journal of Finance* 50, pp. 87–129.
18. Mallat, S.G., (1989): *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$* . *Transactions of the American Mathematical Society* 315, pp. 69–87.
19. Øksendal, B. K., (2003): *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Berlin: Springer Verlag.
20. Abramovich, F., Bailey, T. C., Sapatinas, T., (1992): *Wavelet analysis and its statistical applications*. *The Statistician* 49, pp. 1–29.
21. Stanton, R., (1997): *A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk*. *Journal of Finance* 52, pp. 1973–2002.

22. Vasicek, O., (1977): *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics 5, pp. 177–188.
23. Vidakovic, B., (1999): *Statistical Modeling by Wavelets*. Wiley Series in Probability and Statistics, New York: John Wiley & Sons, Inc.