

## Modelos de Volatilidad Estocástica: Una Alternativa Atractiva y Factible para Modelizar la Evolución de la Volatilidad

Esther Ruiz<sup>1</sup>, Helena Veiga<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid, España*

**Resumen** Los modelos de volatilidad estocástica (SV) tienen propiedades que los convierten en una alternativa atractiva a los populares modelos GARCH para representar la evolución de la volatilidad. En general, son más flexibles para representar las propiedades empíricas características de los rendimientos financieros y, desde el punto de vista teórico, están más cercanos a los modelos utilizados en Finanzas. Sin embargo, su utilización empírica ha sido muy limitada debido fundamentalmente a que la estimación de los parámetros de dichos modelos es más complicada que la de los modelos GARCH. En este artículo se revisan las principales propiedades estadísticas de los modelos SV univariantes así como los últimos desarrollos en cuanto a su estimación. Todos los resultados se ilustran con ejemplos de series reales y simuladas.

**Palabras clave** Efecto Leverage, Heterocedasticidad Condicional, MCMC, Memoria Larga, Rendimientos Financieros.

**Clasificación JEL** C22, C51.

---

*Correspondencia a:* Esther Ruiz (e-mail: [ortega@est-econ.uc3m.es](mailto:ortega@est-econ.uc3m.es))

## 1. Introducción

La incertidumbre de muchas variables económicas y financieras evoluciona a lo largo del tiempo. Cuantificar dicha incertidumbre es interesante tanto desde el punto de vista teórico como econométrico. Desde el punto de vista teórico, dicha cuantificación es fundamental para modelos de valoración de activos. Por ejemplo, Melino y Turnbull (1990) concluyen que los precios de opciones cuya valoración se basa en volatilidad estocástica son más precisos que aquellos basados en el modelo de Black-Scholes; ver también Hull y White (1987) y Eberlein *et al.* (2003), entre otros muchos, para otras aplicaciones financieras. Por otra parte, desde un punto de vista econométrico, modelizar adecuadamente la heterocedasticidad, es decir, la evolución temporal de la volatilidad, tiene repercusiones sobre la eficiencia de los estimadores así como sobre la construcción de intervalos de predicción. Sin embargo, medir la incertidumbre no es fácil debido a que dicha variable no es observable. En consecuencia, dependiendo de qué supuestos se realicen sobre su evolución dinámica, se obtendrán modelos alternativos para representarla. Cualquier modelo que intente aproximar la incertidumbre debe ser capaz de reproducir algunas propiedades empíricas observadas en las series que se trate de analizar. Como ilustración, vamos a considerar dos series reales de rendimientos, una del IBEX35 y otra del tipo de cambio Libra/Dolar. El Gráfico 1 (panel a) representa rendimientos diarios del IBEX35 observados desde 3/1/1994 hasta 6/9/2006 calculados como  $y_t = 100 \times \log(p_t/p_{t-1})$  donde  $p_t$  es el precio en el momento  $t$ . El número total de observaciones es  $T = 3176$ . En dicho gráfico puede observarse que los rendimientos oscilan alrededor de cero. Además, la volatilidad aparece agrupada con periodos de tiempo de relativa calma seguidos de otros con marcadas oscilaciones en los rendimientos. En el panel (b) de dicho gráfico aparecen las autocorrelaciones muestrales de los rendimientos que, en general, no son significativas y, en cualquier caso, tienen una magnitud muy pequeña. En consecuencia, los rendimientos no tienen dependencia lineal con su propio pasado. Sin embargo, la agrupación de la volatilidad que hemos comentado anteriormente, aparece

estadísticamente reflejada en las autocorrelaciones positivas de los rendimientos absolutos (panel c) y de los rendimientos cuadrados (panel d). Nótese que los rendimientos cuadrados y absolutos están relacionados con la dispersión y, por lo tanto, una correlación positiva de dichas transformaciones significa que la volatilidad tiene dependencia temporal y, en consecuencia, aparecerá agrupada. En ambos casos, las correlaciones son claramente significativas siendo ligeramente superiores para los rendimientos absolutos. Esta última propiedad es conocida como efecto Taylor y ha sido observada en numerosas series de rendimientos financieros; ver, por ejemplo, Taylor (1986), Ding *et al.* (1993) y Dacorogna *et al.* (2001) entre otros muchos. La dependencia en los rendimientos cuadrados y absolutos implica que la volatilidad puede predecirse utilizando información de la evolución pasada de los rendimientos. Finalmente, el Figura 1 representa las correlaciones muestrales cruzadas entre los rendimientos y sus valores absolutos futuros y pasados (paneles e y g respectivamente) y entre los rendimientos y sus cuadrados futuros y pasados (paneles f y h). Dichas correlaciones cruzadas son significativas y negativas en los dos casos cuando se consideran con el futuro pero no cuando son con el pasado. Esto significa que un rendimiento negativo genera un incremento de volatilidad futura mayor que un rendimiento positivo. Esta característica muestral también ha sido observada en otras muchas series de rendimientos financieros y es conocida como efecto *leverage*; ver, por ejemplo, Black (1976) que observó por primera vez este fenómeno y Giot y Laurent (2003) y Chen, Gerlach y So(2006) para algunas aplicaciones recientes. Por otra parte, la volatilidad pasada no tiene efectos sobre los rendimientos futuros.

Características similares pueden observarse en el Figura 2 donde aparecen representadas las mismas series y correlaciones relativas a rendimientos del tipo de cambio Libra/Dólar observado diariamente desde 3/1/1994 hasta 6/9/2006 con  $T = 3308$ . En este caso, las correlaciones de los rendimientos absolutos y cuadrados son menores y las correlaciones cruzadas no son significativas en ningún caso.

En el Cuadro 1 aparecen distintos momentos muestrales de los rendimientos del IBEX35, en particular la media, desviación típica, asimetría y curtosis. La asimetría es negativa mientras que la curtosis es mayor que 3. Por lo tanto, parece que la serie de rendimientos del IBEX35 no está adecuadamente representada por una distribución Normal. Para contrastar formalmente la Normalidad en el contexto de series condicionalmente heterocedásticas, Fiorentini et al. (2004) sugieren utilizar el estadístico propuesto por Kiefer y Salmon (1983) dado por

$$KS_N = (KS_S)^2 + (KS_K)^2$$

donde

$$KS_S = \sqrt{\frac{T}{6}} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^{*3} - \frac{3}{T} \sum_{t=1}^T y_t^* \right]$$

y

$$KS_K = \sqrt{\frac{T}{24}} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^{*4} - \frac{6}{T} \sum_{t=1}^T y_t^{*2} + 3 \right],$$

donde  $y_t^*$  son los rendimientos centrados y estandarizados. Si la distribución de  $y_t^*$  es condicionalmente  $N(0, 1)$ , entonces  $KS_N$  es asintóticamente  $\chi_{(2)}^2$  y  $KS_S$  y  $KS_K$  son asintóticamente  $N(0, 1)$ <sup>1</sup>. Los resultados de este contraste también

---

<sup>1</sup> Nótese que el estimador muestral de la curtosis tiene sesgos negativos muy importantes tanto en presencia de distribuciones con colas anchas como en distribuciones asimétricas; ver, por ejemplo, An y Ahmed (2008). Por otra parte, Premaratne y Bera (2005) han propuesto un contraste LM de asimetría de la distribución que tiene en cuenta la posible presencia de exceso de curtosis por lo que evita el exceso de rechazos de los contrastes tradicionales en este contexto. Sin embargo, no está claro que este último contraste sea válido cuando se implementa en los residuos de un modelo estimado. Bontemps y Meddahi (2005) han propuesto un contraste de Normalidad alternativo basado en polinomios Hermite que es robusto a la estimación de los parámetros. Por otra parte, Bai y Ng (2005) han propuesto un contraste de asimetría robusto a la presencia de dependencia y a la distribución de los errores. Muy recientemente, Chen y Lin (2008) han propuesto un contraste robusto más general. Su discusión sobre los distintos contrastes de asimetría propuestos en la literatura es muy interesante. Finalmente, Kim y White (2004) analizan el comportamiento de las medidas de asimetría y curtosis en presencia de atípicos y sugieren la necesidad de utilizar medidas robustas. Ellos asumen observaciones iid y sería interesante analizar la validez de sus resultados en presencia de heterocedasticidad condicional.

aparecen en el Cuadro 1 y claramente rechazan el supuesto de Normalidad de los rendimientos diarios del IBEX35 durante el periodo muestral considerado en este artículo. La misma conclusión se obtiene para los rendimientos del tipo de cambio Libra/Dolar aunque, en este caso, la curtosis es menor y no se rechaza la simetría de su distribución marginal.

Por otra parte, en el Cuadro 1 aparece el estadístico de Box-Ljung para contrastar si las 10 primeras autocorrelaciones son conjuntamente iguales a cero. Es importante señalar que, en presencia de heterocedasticidad condicional, la distribución asintótica de este estadístico no es la habitual. En particular, la varianza asintótica de las correlaciones muestrales puede estimarse mediante la siguiente expresión

$$Var(r_y(\tau)) = \frac{1}{T} \left( 1 + \frac{\widehat{\gamma}_{y^2}(\tau)}{\widehat{\sigma}_y^4} \right)$$

donde  $\widehat{\gamma}_{y^2}(\tau)$  es la covarianza muestral de orden  $\tau$  de los rendimientos al cuadrado y  $\widehat{\sigma}_y$  es la desviación típica muestral de los rendimientos; ver Diebold (1988). Por otra parte, para tener la distribución asintótica habitual,  $\chi_{(M)}^2$ , el estadístico de Box-Ljung debe ser modificado como sigue,

$$Q_y(M) = T(T+2) \sum_{j=1}^M \frac{1}{(T-j)} [r_y(j)]^2 \frac{\widehat{\sigma}_y^4}{\widehat{\sigma}_y^4 + \widehat{\gamma}_{y^2}(j)},$$

donde  $r_y(j)$  es la autocorrelación muestral de orden  $j$  de  $y_t$ . Como resultado del contraste, se rechaza la hipótesis nula de incorrelación en los rendimientos al 5% pero no cuando el nivel de significación es del 1%. En cualquier caso, como ya hemos comentado en el Figura 1, las autocorrelaciones muestrales son muy pequeñas. Por lo tanto, podemos concluir que, como era de esperar, los rendimientos no son linealmente predecibles dada su evolución pasada. En el Cuadro 1 también aparecen los estadísticos Box-Ljung para las primeras 10 autocorrelaciones de los rendimientos absolutos y cuadrados. Si una serie es lineal y Gaussiana, las autocorrelaciones de los cuadrados son iguales al cuadrado de sus correlaciones; ver Maravall (1987) y Palma y Zavallos (2004). Sin embargo, las autocorrelaciones

de los rendimientos cuadrados del IBEX35 son claramente mayores a las autocorrelaciones al cuadrado de los rendimientos originales; ver también la Figura 1. Por lo tanto, el modelo que explique la dependencia dinámica de los rendimientos debe ser no lineal y/o no Gaussiano.

Finalmente, en el Cuadro 1 aparecen los estadísticos de Box-Ljung para las correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+\tau}|$  y entre  $y_t$  y  $y_{t+\tau}^2$ . Estas correlaciones que, como hemos comentado anteriormente, reflejan el efecto *leverage*, son significativas.

Por otra parte, el Cuadro 1 contiene los mismos momentos muestrales y estadísticos correspondientes a la serie de rendimientos del tipo de cambio Libra/Dólar. Como ya hemos observado en el Figura 1, las correlaciones de  $|y_t|$  y de  $y_t^2$  observadas en los rendimientos de los tipos de cambio, así como sus correspondientes estadísticos de Box-Ljung, son menores que las de los índices. Por lo tanto, parece que la dependencia de los segundos momentos de los rendimientos de los tipos de cambio es más débil. Además, las correlaciones cruzadas de estos rendimientos,  $Corr(y_t, y_{t+\tau}^2)$  y  $Corr(y_t, |y_{t+\tau}|)$  no son significativas.

En resumen, las características empíricas observadas habitualmente en las series de rendimientos financieros son las siguientes:

1. Distribuciones marginales con media cero y con exceso de curtosis que, en algunas series de rendimientos, pueden ser asimétricas.
2. Autocorrelaciones de  $y_t$  no significativas.
3. Autocorrelaciones de  $|y_t|$  y  $y_t^2$  significativas y con las siguientes características:
  - i) positivas y pequeñas en magnitud,
  - ii) correlaciones de  $|y_t|$  mayores que las de  $y_t^2$ ,
  - iii) decaen lentamente hacia cero.
4. En algunas series, correlaciones cruzadas negativas entre rendimientos y volatilidades futuras.

Cualquier modelo cuyo objetivo sea representar la evolución dinámica de series de rendimientos financieros debe ser capaz de explicar dichas propiedades empíricas. En la literatura econométrica se han propuesto dos tipos de modelos capaces de representar estas características: los modelos GARCH propuestos originalmente por Engle (1982) y Bollerslev (1986) y los modelos de volatilidad estocástica (SV) propuestos por Taylor (1982). La principal diferencia entre ambas alternativas es que los modelos basados en GARCH asumen que la volatilidad es observable un periodo hacia adelante mientras que en los modelos SV, la volatilidad es una variable latente que no puede ser observada sin error. Ambos tipos de modelos pueden generar series incorreladas y con media cero, con exceso de curtosis y potencias de los rendimientos absolutos correlacionadas. Sin embargo, Carnero *et al.* (2004) demuestran que los modelos SV son más flexibles para representar las características empíricas observadas en series reales de rendimientos financieros. En cuanto a aplicaciones empíricas, Kim *et al.* (1998) y Yu (2002), observan dentro de la muestra y en predicción respectivamente, el comportamiento mejor de los modelos SV frente a los modelos GARCH. Finalmente, los modelos SV también han sido elegidos por varios autores para ser implementados en modelos financieros; ver, por ejemplo, Eberlein *et al.* (2003) para un modelo de gestión del riesgo. Sin embargo, el precio de esta flexibilidad es la dificultad en la estimación de los modelos SV. El problema surge porque en estos modelos no es posible obtener una expresión analítica de la verosimilitud debido a que los dos ruidos que aparecen en dichos modelos, lo hacen de forma no lineal. Como consecuencia, no es posible utilizar directamente los métodos de estimación habituales basados en Máxima Verosimilitud (MV). Aunque ha habido numerosas propuestas sobre procedimientos de estimación de modelos SV, la implementación empírica de dichos modelos es aún relativamente escasa debido a que el software comercial actual generalmente permite la estimación de los modelos GARCH pero no de los modelos SV.

El primer objetivo de este artículo es revisar las principales características que los modelos de volatilidad estocástica son capaces de representar. Existen otras revisiones de esta literatura como, por ejemplo, Taylor (1994), Ruiz (1994b), Ghysels *et al.* (1996) y Shephard (1996). En este artículo se actualizan dichas revisiones añadiendo resultados recientes sobre momentos de los modelos SV con efecto *leverage*. Además, consideramos una especificación de la volatilidad alternativa a la considerada tradicionalmente que facilita la interpretación de los parámetros. Bajo la especificación considerada en este artículo, la varianza de la volatilidad siempre es finita evitándose algunos de los problemas de interpretación encontrados cuando al ajustar estos modelos en series reales se encontraban estimaciones que implican que la volatilidad tiene una raíz unitaria. El segundo objetivo de este artículo es revisar la literatura más reciente sobre la estimación de modelos de volatilidad estocástica actualizando la revisión realizada por Broto y Ruiz (2004). El resto del artículo está organizado como sigue. En la Sección 2 se describen las propiedades de los modelos SV empezando por el modelo básico en el que el logaritmo de la volatilidad es un proceso AR(1). Después se considera el modelo con efecto *leverage* en el que el incremento de la volatilidad es mayor ante un rendimiento negativo que ante otro positivo de la misma magnitud. Finalmente, se describen los modelos con memoria larga en la volatilidad. Los modelos y propiedades se ilustran tanto con series reales como simuladas. La Sección 3 está dedicada a la revisión de los estimadores propuestos recientemente para estimar los parámetros y las volatilidades subyacentes de los modelos SV. Finalmente, la Sección 4 contiene nuestras conclusiones y algunas sugerencias de líneas de investigación futuras que puedan ser de interés.

## 2. Propiedades de los Modelos SV

A continuación, vamos a describir los modelos SV más populares propuestos en la literatura para representar los distintos aspectos observados en la volatilidad y señalados en la sección anterior.

### 2.1. Modelo SV Básico

El modelo SV más sencillo asume que el logaritmo de la volatilidad<sup>2</sup> puede representarse como un modelo AR(1). En este caso, el modelo se denomina como ARSV(1) y viene dado por:

$$\begin{aligned} y_t &= \sigma_* \sigma_t \varepsilon_t \\ \log \sigma_t^2 &= \phi \log \sigma_{t-1}^2 + \sigma_h (1 - \phi^2)^{1/2} \eta_t, \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\sigma_t$  es la volatilidad. El parámetro  $\sigma_*$  es una escala que evita tener que incluir una constante en la ecuación de la log-volatilidad. So, Lam y Li (1997) y So, Li y Lam (1997) interpretan este parámetro como la volatilidad base de un día típico o la varianza marginal que tendría  $y_t$  si no hubiera heterocedasticidad. Para ello tienen en cuenta que si  $\log \sigma_t^2$  está en su valor medio, es decir,  $\log \sigma_t^2 = 0$ , entonces  $\sigma_t^2 = 1$ . Nótese que  $\sigma_*^2$  es la media de  $y_t^2$  condicional en  $\sigma_t^2 = 1$ . Por lo tanto, en un día típico, definido como aquel en el que la volatilidad está en la media,  $\sigma_t^2 = 1$ . Por otra parte, el parámetro  $\phi$  está relacionado con la persistencia de los shocks a la volatilidad. La condición de estacionariedad del modelo es  $|\phi| \leq 1$ . El parámetro  $\sigma_h^2$  es la varianza de la log-volatilidad que es considerada como un parámetro fijo y finito<sup>3</sup>. Cuando este parámetro es cero, el proceso es homocedástico. El proceso también es homoscedástico cuando  $\phi = 1$ . En la práctica, se observan frecuentemente estimaciones del parámetro autorregresivo cercanas a la unidad junto con estimaciones de la varianza del ruido asociado a la ecuación de la volatilidad,  $\sigma_\eta^2$ , muy pequeñas. En este caso, por lo tanto, debemos

<sup>2</sup> Se modeliza el logaritmo en lugar de la volatilidad para evitar imponer restricciones en los parámetros que garanticen la positividad de  $\sigma_t^2$  en todo momento de tiempo. Además, al modelizar el logaritmo se introduce asimetría en la distribución de la volatilidad en el sentido de que la ocurrencia de periodos de volatilidad elevada es menor que la de periodos de volatilidad baja.

<sup>3</sup> En la literatura de los modelos SV es habitual considerar como fijo el parámetro de la varianza de  $\eta_t$ , dado por  $\sigma_\eta^2 = \sigma_h^2 (1 - \phi^2)$ . La especificación adoptada en este artículo tiene la ventaja de que al asumir que  $\sigma_h^2$  es finita, se garantiza que la varianza marginal de  $y_t$  es finita. Otros autores que han asumido esta especificación son Harvey y Streibel (1998) y Taylor (2005).

concluir que estamos ante una serie donde la evolución de la volatilidad es muy suave aunque esté cercana a la raíz unitaria. Nótese que cuando  $\phi = 0$ , la serie de rendimientos,  $y_t$ , también es homoscedástica. Sin embargo, en este último caso, el modelo no es identificable.

Finalmente, el supuesto sobre las perturbaciones del modelo,  $\varepsilon_t$  y  $\eta_t$ , es que ambas son contemporánea y serialmente independientes. La distribución de  $\varepsilon_t$  tiene una densidad simétrica con media cero y varianza 1, mientras que la distribución de  $\eta_t$  es  $N(0, 1)$ . Aunque este supuesto puede parecer *ad hoc*, varios autores han justificado empíricamente su adecuación tanto en rendimientos de tipos de cambio como de activos financieros; ver, por ejemplo, Andersen *et al.* (2001) y Andersen *et al.* (2001, 2003) basándose en asimetría, curtosis y estimaciones no-paramétricas de la densidad de la log-volatilidad realizada y Thomakos y Wang (2003) basándose en contrastes KS y Jarque-Bera. Otras referencias donde el supuesto de normalidad de  $\log \sigma_t^2$  se sustenta empíricamente son Areal y Taylor (2002) y Pong *et al.* (2004). Por otra parte, Bontemps y Meddahi (2005) rechazan la Normalidad de la log-volatilidad realizada debido a la presencia de asimetrías. También, Durham (2006) presenta evidencia empírica sobre la falta de adecuación de la distribución log-Normal para la volatilidad. Sin embargo, hay que tener en cuenta que ninguno de los contrastes de Normalidad utilizados tienen propiedades adecuadas en presencia de memoria larga que, como veremos más adelante, es una de las propiedades empíricas que caracterizan las correlaciones de potencias de los rendimientos absolutos de muchos activos financieros.

El supuesto habitual para la distribución de  $\varepsilon_t$  es la Normalidad. Sin embargo, algunos autores han asumido también otras distribuciones alternativas con colas anchas. Por ejemplo, Ruiz (1994a), Harvey *et al.* (1994), Sandmann y Koopman (1998), Lisenfeld y Jung (2000) y Asai (2008) asumen que  $\varepsilon_t$  tiene una distribución Student- $\nu$ . Además, los dos últimos trabajos consideran también una distribución GED (Generalized Error Distribution) y algunos de ellos consideran mixturas de Normales. Finalmente, Lisenfeld y Richard (2003) han considerado

una distribución semiparamétrica. Raggi y Bordignon (2006) argumentan que una distribución con colas anchas para  $\varepsilon_t$  es más apropiada para explicar observaciones extremas en las series de rendimientos que la introducción de *saltos* en el modelo.

Cuando  $\varepsilon_t$  en (1) tiene una distribución con colas anchas, algunos autores han considerado la siguiente especificación alternativa del modelo:

$$\begin{aligned} y_t &= \sigma_* \sigma_t \sqrt{\lambda_t} \varepsilon_t \\ \log \sigma_t^2 &= \phi \log \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\eta \eta_t \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\varepsilon_t$  tiene una distribución NID(0,1) y  $\lambda_t$  es una variable i.i.d. de mixtura de escala contemporáneamente independiente de  $\varepsilon_t$  y de  $\eta_t$ . Por ejemplo, Jacquier *et al.* (2004), Raggi y Bordignon (2006) y Durham (2006) asumen que  $\frac{\nu}{\lambda_t}$  tiene una distribución  $\chi_{(\nu)}^2$  y, en este caso,  $\sqrt{\lambda_t} \varepsilon_t$  tiene una distribución Student- $\nu$ . Por otra parte, Omori *et al.* (2007) asumen que  $\log \lambda_t$  tiene una distribución  $N(-0,5\tau^2, \tau^2)$  y, entonces, la variable  $\sqrt{\lambda_t} \varepsilon_t$  tiene una distribución log-Normal.

Las propiedades estadísticas de series generadas por el modelo (1) pueden encontrarse en, por ejemplo, Carnero *et al.* (2004). En particular, la media de  $y_t$  es cero y la varianza y curtosis de  $y_t$  vienen dadas por:

$$\sigma_y^2 = \sigma_*^2 \exp \left\{ \frac{\sigma_h^2}{2} \right\}, \quad (3)$$

y

$$\kappa_y = \kappa_\varepsilon \exp(\sigma_h^2), \quad (4)$$

respectivamente, donde  $\kappa_\varepsilon$  es la curtosis de  $\varepsilon_t$ . Si  $\sigma_h^2 \neq 0$ , es decir, cuando la serie es condicionalmente heterocedástica, la curtosis es mayor que  $\kappa_\varepsilon$ . En concreto, si la distribución de  $\varepsilon_t$  es Normal, como se asume habitualmente en la práctica, la curtosis de los rendimientos es mayor que 3, característica que como hemos señalado en la introducción se observa frecuentemente en series de rendimientos financieros reales. Nótese que, tal y como está definido el modelo en (1), ni la

varianza ni la curtosis de los rendimientos dependen de cuál sea el parámetro que mide la persistencia de la volatilidad,  $\phi$ , sino que únicamente depende de  $\sigma_h^2$ , la varianza de la volatilidad. Dado que, como hemos comentado anteriormente,  $\sigma_*^2$  es la varianza de un día típico, la proporción de la varianza de  $y_t$  atribuible a la presencia de heterocedasticidad viene dada por

$$\frac{\sigma_y^2 - \sigma_*^2}{\sigma_y^2} = 1 - \exp\left\{-\frac{\sigma_h^2}{2}\right\} \quad (5)$$

ver So, Lam y Li (1997).

Es fácil demostrar que las autocorrelaciones teóricas de  $y_t$  en el modelo (1) son iguales a cero. Sin embargo, la función de autocorrelación (fac) de potencias de rendimientos absolutos,  $|y_t|^\theta$ , derivada por Harvey (1998), viene dada por

$$\rho_\theta(k) = \frac{\exp\left(\frac{\theta^2}{4}\sigma_h^2\rho_h(k)\right) - 1}{\kappa_\theta \exp\left(\frac{\theta^2}{4}\sigma_h^2\right) - 1}, k \geq 1, \theta > -0,5, \theta \neq 0 \quad (6)$$

donde  $\rho_h(k)$  es la correlación de orden  $k$  de  $\log \sigma_t^2$  que, en el modelo (1), viene dada por  $\rho_h(k) = \phi^k$  y  $\kappa_\theta = \frac{E(|\varepsilon_t|^{2\theta})}{\{E|\varepsilon_t|^\theta\}^2}$ . Bajo el supuesto de que  $\varepsilon_t$  tiene una distribución Normal(0,1),  $\kappa_\theta = \frac{\Gamma(\theta+0,5)\Gamma(0,5)}{[\Gamma(0,5(\theta+1))]^2}$  donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función Gamma. En este caso, el coeficiente  $\kappa_\theta$  toma valores  $\kappa_1 = \frac{\pi}{2}$  y  $\kappa_2 = 3$  respectivamente, para los dos casos de mayor interés empírico, es decir, cuando se calculan las correlaciones de valores absolutos y cuadrados. Por otro lado, si  $\varepsilon_t$  tiene una distribución Student- $\nu$ , entonces  $\kappa_\theta = \frac{\Gamma(\theta+0,5)\Gamma(-\theta+0,5\nu)\Gamma(0,5)\Gamma(0,5\nu)}{[\Gamma(0,5(\theta+1)\Gamma(-0,5(\theta-\nu)))]^2}$ . A medida que  $\nu$  tiende a infinito, el valor de  $\kappa_\theta$  desciende. Por lo tanto, las correlaciones de  $|y_t|^\theta$  son máximas cuando  $\varepsilon_t$  tiene una distribución Normal. En consecuencia, dados los parámetros  $\phi$  y  $\sigma_h^2$ , la heterocedasticidad será más difícil de detectar utilizando las autocorrelaciones muestrales cuando los errores tengan colas anchas, debido a que las autocorrelaciones de potencias de los rendimientos absolutos serán menores; ver, por ejemplo, Pérez y Ruiz (2003). Finalmente, es importante señalar que cuando  $\varepsilon_t$  es Student- $\nu$ , el momento de segundo orden de  $|\varepsilon_t|^\theta$  existe si  $\theta < \nu/2$

y, por lo tanto, las autocorrelaciones de  $|y_t|^\theta$  solo están definidas para dichas potencias.

La Figura 3 representa una serie artificial generada por el modelo (1) con parámetros  $\sigma_*^2 = 1$ ,  $\phi = 0,98$ ,  $\sigma_h^2 = 0,5$ ,  $\eta_t$  Normal y  $\varepsilon_t$  con una distribución Normal mientras que en la Figura 4 se ha representado una serie generada por el mismo modelo pero donde  $\varepsilon_t$  tiene una distribución Student-7. En ambos casos, la varianza poblacional de  $y_t$  es 1.133 pero la curtosis es 4.946 en el primer caso mientras que en el segundo es 8.243. Ambas figuras ilustran la forma de las fac de valores absolutos y cuadrados en los modelos ARSV(1) con errores Normales y Student-7 respectivamente que hemos descrito anteriormente. En dichas figuras puede observarse, en primer lugar, que hay efecto Taylor, es decir, que las autocorrelaciones de  $|y_t|$  son mayores que las de  $y_t^2$ . Este efecto es especialmente pronunciado en el caso del modelo en el que los errores son Student-7. Pérez y Ruiz (2008) analizan los valores del parámetro  $\theta$  que maximizan las correlaciones concluyendo que, cuando la curtosis de  $y_t$  es próxima a 3, dichas correlaciones se maximizan para potencias próximas a 2. Sin embargo, cuando hay exceso de curtosis, las correlaciones se maximizan cuando se calculan para los rendimientos absolutos, es decir,  $\theta = 1$ . Finalmente, solo cuando las curtosis son inusualmente grandes, las correlaciones se maximizan para valores de  $\theta$  más pequeños. Por lo tanto, el efecto Taylor, observado en el Cuadro 1, puede ser reproducido por el modelo ARSV(1) en (1) para valores de los parámetros cercanos a los que se estiman cuando dichos modelos se ajustan para explicar la evolución dinámica de la volatilidad de series reales.

Además, comparando las fac representadas en la Figura 3 con las correspondientes fac representadas en la Figura 4, también podemos observar que las primeras son mayores que las segundas, es decir, que, como hemos señalado anteriormente, las autocorrelaciones son mayores cuando los errores son Normales. Además, en los gráficos aparecen también las correspondientes autocorrelaciones muestrales calculadas con las series simuladas. Comparando las autocorrelaciones

muestrales con las teóricas es posible observar que las primeras son estimadores negativamente sesgados de las segundas; ver Pérez y Ruiz (2003). Finalmente, también puede observarse que el efecto Taylor aparece tanto en las correlaciones teóricas como en las muestrales.

Por último, cuando el parámetro de la potencia es cero, es decir,  $\theta = 0$ , consideramos la transformación logarítmica de los rendimientos absolutos y, en este caso, las correlaciones de  $\log |y_t|$  vienen dadas por:

$$\rho_0(k) = \frac{\sigma_h^2 \rho_h(k)}{(\sigma_h^2 + \sigma_\varepsilon^2)}. \quad (7)$$

En consecuencia, la fac de  $\log |y_t|$  es la misma que la de  $\log \sigma_t^2$  multiplicada por una constante que, en general, es muy pequeña en las aplicaciones empíricas de interés; ver Pérez y Ruiz (2003).

Vamos a considerar nuevamente las series de rendimientos del IBEX35 y del tipo de cambio Libra/Dólar. Ajustando el modelo ARSV(1) a los rendimientos del IBEX35 y estimando sus parámetros mediante Efficient Method of Moments (EMM)<sup>4</sup> se obtienen las estimaciones que aparecen en el Cuadro 2. La característica más notable de estas estimaciones es la gran persistencia que implica la estimación del parámetro  $\phi$ . Por otra parte, el porcentaje de la varianza de  $y_t$  que es atribuible a la presencia de heterocedasticidad puede calcularse con la expresión (5) y es del 20.67%.

En el Cuadro 2 también aparecen los resultados para el tipo de cambio Dólar/Libra. En este caso, el parámetro  $\sigma_\eta$  también es significativo, por lo que

---

<sup>4</sup> Los estimadores de los parámetros de los modelos SV serán descritos en la siguiente sección. El estimador EMM tiene la desventaja de que necesita asumir Normalidad de los errores. Además, no permite obtener directamente estimaciones de la volatilidad subyacente. Sin embargo, es el que hemos elegido para esta ilustración por razones comparativas porque es el único que permite estimar el modelo más general considerado en este artículo, es decir, un modelo con efecto *leverage* y memoria larga. Es importante señalar que este estimador es computacionalmente muy intensivo y que puede presentar importantes problemas de convergencia. Además, los resultados dependen de los valores iniciales utilizados por lo que es necesario un gran esfuerzo antes de conseguir estimaciones fiables.

la volatilidad evoluciona a lo largo del tiempo. Sin embargo, la persistencia es mucho menor aunque el porcentaje de la varianza de los rendimientos atribuible a dicha evolución es de 19 %. Finalmente, los Figuras 5 y 6 representan las estimaciones de la volatilidad,  $\hat{\sigma}_t$ , para el IBEX35 y el tipo de cambio Dólar/Libra respectivamente<sup>5</sup>.

## 2.2. Modelos con Efecto Leverage

En la introducción hemos señalado que en muchas series de rendimientos financieros reales se ha observado el efecto *leverage*, es decir, que los incrementos de la volatilidad son mayores cuando el rendimiento es negativo que cuando es positivo y de la misma magnitud. El modelo ARSV(1) no es capaz de representar dicho efecto dado que la respuesta de la volatilidad solo depende de la magnitud de los rendimientos pasados pero no de su signo. Harvey y Shephard (1996) han propuesto introducir el efecto *leverage* en el modelo ARSV mediante la introducción de correlación entre el ruido que afecta al nivel de los rendimientos,  $\varepsilon_t$ , y las variaciones futuras de la log-volatilidad un periodo hacia adelante,  $\log \sigma_{t+1}^2 - \phi \log \sigma_t^2$ . Si  $\delta$  es dicha correlación, el modelo ARSV(1) asimétrico (A-ARSV(1)) puede expresarse como sigue a continuación

$$\begin{aligned} y_t &= \sigma_* \sigma_t \varepsilon_t \\ \log \sigma_t^2 &= \phi \log \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\eta (\delta \varepsilon_{t-1} + (1 - \delta^2)^{1/2} \eta_t). \end{aligned} \quad (8)$$

Harvey y Shephard (1996) demuestran que la presencia de dicha correlación no cambia los momentos marginales de los rendimientos. Por lo tanto, la varianza y curtosis de  $y_t$  siguen dados por (3) y (4) respectivamente. Además, puede

---

<sup>5</sup> Dado que en este artículo las estimaciones de los parámetros se han obtenido mediante el procedimiento EMM propuesto por Gallant *et al.* (1997), las estimaciones de la volatilidad también se han obtenido como proponen dichos autores mediante retro-proyección. Sin embargo, es importante señalar que este procedimiento de estimación de la volatilidad es muy dependiente de la elección subjetiva de algunos parámetros.

demostrarse que los rendimientos siguen siendo incorrelados. Alternativamente, Jacquier *et al.* (2004) han propuesto introducir el efecto *leverage* mediante la correlación contemporánea entre  $\varepsilon_t$  y las variaciones de la volatilidad. En este caso la serie de rendimientos,  $y_t$ , no es incorrelada y, por ello, muchos autores argumentan que la mejor especificación para el efecto *leverage* es como en (8); ver, por ejemplo, Harvey y Shephard (1996) y Yu (2005). Además, la formulación propuesta por Jacquier *et al.* (2004) tiene otro inconveniente ya que el parámetro  $\delta$  no solo genera correlación entre los rendimientos y las volatilidades futuras sino que también genera asimetría en la distribución marginal de los rendimientos. Tener un único parámetro que genera dos efectos distintos en el modelo resta flexibilidad al mismo además de dificultar su interpretación. Sin embargo, Durham (2006) señala que no está claro que empíricamente sea necesario representar rendimientos incorrelados y que la especificación de la correlación contemporánea entre los ruidos puede ayudar a explicar los rendimientos negativos extremadamente grandes que se observan ocasionalmente en las series reales.

La fac de  $|y_t|^\theta$  en el modelo A-ARSV(1) ha sido recientemente derivada por Pérez *et al.* (2008) bajo el supuesto de que los errores  $\varepsilon_t$  son Normales<sup>6</sup>. En particular, dicha fac viene dada por

$$\rho_\theta(k) = \frac{\exp\left(\frac{\theta^2 \sigma_h^2 \rho_h(k)}{4}\right) \exp\left(-\frac{\theta^2 A_k^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{\theta+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\theta^2 A_k^2}{2}\right) - 1}{\kappa_\theta \exp\left(\frac{\theta^2 \sigma_h^2}{4}\right) - 1}, k \geq 1, \quad (9)$$

donde  $A_k = \frac{\lambda_k \delta \sigma_\eta}{2}$  con  $\lambda_k = \phi^{k-1}$ ,  $\Phi(\cdot, \cdot; \cdot)$  es la función hipergeométrica degenerada. Taylor (2005) ha derivado la fac de  $y_t^2$  para el modelo A-ARSV(1) que puede obtenerse como caso particular de (9) cuando  $\theta = 2$ . Por otra parte, cuando no hay efecto *leverage*, es decir,  $\delta = 0$ , entonces  $A_k = 0$  y  $\Phi\left(\frac{c+1}{2}, \frac{1}{2}; 0\right) = 1$ .

---

<sup>6</sup> Parece difícil poder derivar resultados generales sobre las autocorrelaciones de  $|y_t|^\theta$  en el caso de modelos A-ARSV con distribuciones de  $\varepsilon_t$  distintas a la Normal como, por ejemplo, el propuesto por Durham (2006); ver también Kawakatsu (2007b) que encuentra un problema similar.

En este caso, se obtiene, como caso particular, la fac en (6) del modelo ARSV(1) simétrico.

Como ilustración, la Figura 7 representa una serie temporal generada por el modelo (8) con los mismos valores de los parámetros  $\sigma^*$ ,  $\phi$  y  $\sigma_h^2$  considerados anteriormente y con  $\delta = -0,5$  y errores  $\varepsilon_t$  Normales. En este caso, como ya hemos comentado, la varianza y la curtosis marginales no cambian y siguen siendo 1.133 y 4.946 respectivamente, como en el modelo simétrico. Por otra parte, en la Figura 7, aparecen representadas las fac de los rendimientos absolutos y cuadrados junto con las correspondientes estimaciones muestrales. Nótese que tanto las autocorrelaciones muestrales de los rendimientos absolutos como las de cuadrados son similares a las obtenidas en el correspondiente modelo simétrico representadas en el Figura 3. Además, podemos observar los sesgos negativos que ya habíamos señalado anteriormente.

Acabamos de ver que la presencia del efecto *leverage* no afecta en gran medida a las fac de los rendimientos absolutos y cuadrados. Sin embargo, dicho efecto puede detectarse en las correlaciones cruzadas entre las volatilidades y los rendimientos pasados, que son distintas de cero. Pérez et al. (2008) han derivado las correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|^\theta$  bajo el supuesto de errores Gaussianos, que vienen dadas por

$$Corr(y_t, |y_{t+k}|^\theta) = \frac{\theta A_k \exp\left(\frac{\theta \sigma_h^2 \rho_h(k)}{4}\right)}{\exp\left(\frac{\sigma_h^2}{8}\right) \sqrt{\kappa_\theta \exp\left(\frac{\theta^2 \sigma_h^2}{4}\right) - 1}}, k \geq 1. \quad (10)$$

ver también Demos (2002) y Taylor (2005) para el caso particular de correlaciones entre rendimientos y rendimientos cuadrados futuros y Ruiz y Veiga (2008) para rendimientos absolutos futuros. Estas correlaciones cruzadas tienen el mismo signo que  $\delta$  y su magnitud se incrementa con dicho parámetro. Como ilustración, en la Figura 7, paneles (d) y (e), se han representado dichas correlaciones cruzadas para el modelo A-ARSV descrito anteriormente. En este gráfico puede

observarse que las correlaciones cruzadas son negativas y decaen exponencialmente hacia cero. Además, también puede observarse que no son muy distintas cuando se calculan para valores absolutos o para cuadrados. Compárense estos gráficos con sus análogos en la Figura 3 donde se representaban series generadas con  $\delta = 0$ . En este caso, las correlaciones cruzadas teóricas son cero y las muestrales no son significativamente distintas de cero.

Las estimaciones del modelo A-ARSV(1) para el IBEX35 aparecen en el Cuadro 2. El parámetro de asimetría es significativo e igual a -0.801 indicando una relación negativa entre los rendimientos y la volatilidad futura. Los otros parámetros del modelo son muy similares a los estimados en el modelo simétrico con un ligero incremento de la persistencia y una ligera disminución de la variabilidad de la volatilidad. El porcentaje de varianza de los rendimientos atribuible a la evolución de la volatilidad es del 27.55%, ligeramente mayor que en el modelo simétrico. Los resultados para el Dólar/Libra son similares aunque, en este caso, el parámetro  $\delta$  es positivo y está en los límites de significatividad. Como consecuencia, el resto de los parámetros del modelo y el porcentaje de varianza de los rendimientos atribuible a la volatilidad son similares a los obtenidos en el modelo simétrico. Este resultado es esperable en los tipos de cambio donde normalmente no se observa el efecto *leverage*; véase el Cuadro 1 donde las correlaciones cruzadas no son significativas.

Los Figuras 5 y 6 representan las estimaciones de la volatilidad,  $\hat{\sigma}_t$ , obtenidas cuando se ajusta el modelo A-ARSV(1) al IBEX35 y al tipo de cambio Dólar/Libra respectivamente. Dichos gráficos también representan las diferencias y los gráficos de puntos entre dichas estimaciones de la volatilidad y las obtenidas mediante el modelo simétrico ARSV(1). Nótese que en el caso del tipo de cambio, las estimaciones de la volatilidad obtenidas mediante los modelos ARSV(1) y A-ARSV(1) son, como era de esperar dado que el parámetro  $\delta$  no es significativo, prácticamente idénticas. Sin embargo, las volatilidades estimadas por ambos modelos para el IBEX35 son diferentes. Al incorporar la asimetría, las

estimaciones de la volatilidad son mayores que cuando se asume una respuesta simétrica de la volatilidad ante rendimientos positivos y negativos.

Existen algunas propuestas alternativas de modelos SV con efecto *leverage*. Por ejemplo, Watanabe (1999) ha propuesto un modelo SV en el que en la ecuación de la varianza aparece el shock retardado del rendimiento como una variable explicativa. Por otra parte, So *et al.* (1998) y So *et al.* (2002) han propuesto un modelo SV con umbrales. Muñoz *et al.* (2007) presentan una comparación empírica de la capacidad predictiva de este modelo con respecto a su análogo simétrico y Carvalho y Lopes (2007) tratan de su estimación.

Recientemente se han propuesto varias familias de modelos SV que tratan de contener algunas especificaciones alternativas de la volatilidad de forma que sea posible realizar contrastes sobre cuál es la especificación más adecuada para una serie concreta. Una de estas propuestas es la realizada por Yu *et al.* (2006) que proponen una extensión del modelo A-ARSV en la que una transformación Box-Cox de la volatilidad sigue un modelo AR(1). La ecuación de la volatilidad viene dada por

$$g(\sigma_t) = \phi g(\sigma_{t-1}) + \sigma_\eta (\delta \varepsilon_{t-1} + (1 - \delta^2)^{1/2} \eta_t), \quad (11)$$

donde

$$g(\sigma_t) = \begin{cases} \frac{\sigma_t^{2\theta} - 1}{\theta}, & \theta \neq 0 \\ \log \sigma_t^2, & \theta = 0. \end{cases}$$

Nótese que el modelo A-ARSV(1) se obtiene cuando  $\theta = 0$ . El parámetro de la transformación lo interpretan como que en media llegan al mercado  $1/\theta$  unidades de nueva información. Por lo tanto, según esta interpretación, en el caso de que modelicemos el logaritmo de la volatilidad estamos suponiendo que la llegada de noticias al mercado es continua. Muy recientemente, Zhang y King (2008) proporcionan una interpretación alternativa más atractiva del parámetro  $\theta$ . Ellos argumentan que dicho parámetro permite tener una distribución asimétrica de la volatilidad. Cuando  $\theta < 0$ , que es el caso que ellos estiman empíricamente, las

colas de la densidad marginal de  $\sigma_t^2$  son más estrechas que las que se obtienen cuando se especifica la volatilidad con la transformación logarítmica, especialmente en el caso de la cola izquierda. Por lo tanto, la frecuencia empírica de las volatilidades pequeñas es mayor que la de las volatilidades elevadas. Aunque el modelo es atractivo al permitir estimar el parámetro  $\theta$  adecuado a cada variable, Yu *et al.* (2006) señalan que no parece posible obtener momentos poblacionales para este modelo; ver Yu y Yang (2006) que proponen una forma de aproximar estos momentos. El modelo propuesto por Yu *et al.* (2006) tiene intersecciones aunque no contiene exactamente otras familias propuestas en la literatura como, por ejemplo, Andersen (1994) y Jones (2003). Yu *et al.* (2006) han ajustado el modelo ARSV(1) a una serie de rendimientos del tipo de cambio Libra/Dólar como la considerada en la introducción, aunque observada en un periodo muestral anterior, con resultados similares a los que aparecen en el Cuadro 2. Además, ellos ajustan un modelo donde la volatilidad se especifica mediante una transformación Box-Cox, como en (11) y concluyen que la especificación logarítmica no es adecuada; ver también Zhang y King (2008) para otra aplicación empírica. Su estimación del parámetro de la transformación es  $\hat{\theta} = 0,172$ , que, en cualquier caso no difiere mucho de cero. Finalmente, utilizan el modelo ARSV(1) estimado para valorar opciones siguiendo el procedimiento propuesto por Mahieu y Schotman (1998). Adicionalmente, Kawakatsu (2007b) ha propuesto un modelo con efecto leverage en el que la log-volatilidad es una función cuadrática de una variable latente que sigue un proceso AR. En concreto, la volatilidad viene dada por

$$\log(\sigma_t^2) = a_0 + a_1 x_t + a_2 x_t^2 \quad (12)$$

$$x_t = \phi x_{t-1} + \sigma_\eta (\delta \varepsilon_{t-1} + (1 - \delta^2)^{1/2} \eta_t).$$

En una aplicación empírica a rendimientos diarios del S&P500, ven que el parámetro  $a_2$  es significativamente distinto de cero y, por lo tanto, la especificación del modelo ARSV(1) no es apropiada.

### 2.3. Modelos con Memoria Larga

Otra característica empírica observada frecuentemente en series de rendimientos financieros es el decaimiento muy lento de las autocorrelaciones de cuadrados y valores absolutos hacia cero con valores significativamente distintos de cero incluso en retardos muy alejados; véanse las Figuras 1 y 2, paneles (c) y (d). Esta característica ha sido identificada por muchos autores con la presencia de memoria larga en la volatilidad. En consecuencia, Harvey (1998) y Breidt *et al.* (1998) propusieron independientemente el modelo SV con memoria larga, en el que el logaritmo de la volatilidad es un proceso ARFIMA(1,d,0). El modelo resultante, denominado LMSV(1,d,0), viene dado por:

$$y_t = \sigma_* \sigma_t \varepsilon_t$$

$$(1 - \phi L)(1 - L)^d \log \sigma_t^2 = \sigma_\eta \eta_t, \quad (13)$$

donde  $\sigma_\eta = \sigma_h \Gamma(1-d) \sqrt{\frac{1+\phi}{F(1-2d)F(1,1+d;1-d;\phi)}}$ ,  $F(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$  es la función hipergeométrica y  $L$  es el operador de retardos tal que  $Lx_t = x_{t-1}$ . Las propiedades dinámicas del modelo (13) con errores  $\varepsilon_t$  y  $\eta_t$  independientes aparecen descritas en, por ejemplo, Ghysels *et al.* (1996). La estacionariedad de  $y_t$  depende de la estacionariedad de la log-volatilidad,  $h_t = \log \sigma_t^2$ . Por lo tanto, si  $|\phi| < 1$  y  $d < 0,5$ ,  $y_t$  es una serie estacionaria. En este caso, la varianza y curtosis de  $y_t$  vienen dadas por (3) y (4) respectivamente.

La función de autocorrelación de  $|y_t|^\theta$  viene dada por (6) donde  $\rho_h(k)$ , la fac de la log-volatilidad, viene dada por:

$$\rho_h(k) = \left( \prod_{i=0}^{k-1} \frac{d+i}{1-d+i} \right) \frac{F(1, d+k; 1-d+k; \phi) + F(1, d-k; 1-d-k; \phi) - 1}{(1-\phi)F(1, 1+d; 1-d; \phi)};$$

ver Hosking (1981) para la expresión de la fac de un modelo ARFIMA. En la práctica, el cálculo de estas autocorrelaciones puede ser relativamente complicado por lo que Bertelli y Caporin (2002) han propuesto algoritmos para simplificarlo.

Para ilustrar las propiedades de las series generadas por el modelo LMSV(1,d,0) en (13), hemos simulado una serie temporal por dicho modelo con parámetros  $\phi = 0,7$ ,  $d = 0,4$  y  $\sigma_h^2 = 0,5$  y con ambos errores Normales de media cero y varianza 1. Dicha serie, junto con las correspondientes fac muestrales y poblacionales para  $|y_t|$  y  $y_t^2$ , aparecen en el Figura 8. Una vez más, es posible observar los sesgos negativos en la estimación de las correlaciones. Además, el decaimiento de las correlaciones poblacionales es claramente más lento que en el Gráfico 3 en el que la volatilidad no tiene memoria larga. Sin embargo, comparando las correlaciones muestrales representadas en ambos gráficos, no está claro que dichas correlaciones permitan diferenciar una serie que tenga memoria larga en la volatilidad de otra que no la tenga; ver Pérez y Ruiz (2003) para un resultado similar.

En el Figura 9, hemos representado otra serie simulada generada por el mismo modelo pero donde  $\varepsilon_t$  tiene una distribución Student-7. Nótese que en este caso, aunque la magnitud de las correlaciones teóricas es muy similar a la de las representadas en el Figura 4, los sesgos son muy superiores. Por lo tanto, las correlaciones muestrales de la serie generada con memoria larga son claramente menores que las de la serie con memoria corta haciendo muy difícil la identificación de la presencia de heterocedasticidad condicional utilizando estadísticos basados en dichas autocorrelaciones<sup>7</sup>.

El modelo (13) ha sido extendido por Ruiz y Veiga (2008) para representar el efecto *leverage* asumiendo que la correlación entre las perturbaciones  $\varepsilon_t$  y  $\eta_{t+1}$  es  $\delta$ . En dicho artículo se demuestra que las expresiones de la varianza y la curtosis no cambian. Pérez *et al.* (2008) derivan la acf de  $|y_t|^\theta$  que viene dada por (9) con  $\lambda_k$  sustituido por  $\lambda_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\Gamma(i+d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(d)} \phi^{k-i-1}$ .

Como ya hemos mencionado anteriormente, la identificación de la presencia de asimetrías puede realizarse mediante las correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|^\theta$ .

---

<sup>7</sup> El modelo LMSV(1,d,0) no ha sido ajustado a las series reales porque después de varias semanas no hemos conseguido resultados fiables del estimador EMM.

Dichas correlaciones para el modelo A-LMSV(1,d,0) vienen dadas por la expresión (10) donde  $\lambda_k$  debe ser adecuadamente sustituido. Cuando existe memoria larga, el decaimiento de las correlaciones cruzadas hacia cero es hiperbólico en lugar de ser exponencial como en el caso de memoria corta. Como ilustración, la Figura 10 representa una serie generada por el modelo A-LMSV(1,d,0) con los mismos parámetros considerados anteriormente y con  $\delta = -0,5$ .

### 3. Estimación de Parámetros y Volatilidades

Ya hemos comentado en la Introducción que la estimación de los parámetros de los modelos de volatilidad estocástica tiene la dificultad de que no es posible obtener una expresión analítica de la verosimilitud debido a que los dos ruidos que aparecen en dichos modelos,  $\varepsilon_t$  y  $\eta_t$ , lo hacen de forma no lineal. Como consecuencia, no es posible utilizar directamente los métodos de estimación habituales basados en MV. Además, debido a que la volatilidad es inobservable, es necesario utilizar filtros de extracción de señales para estimarla. Dependiendo del tipo de modelo, existen varias propuestas de estimadores alternativos. Los métodos para estimar los parámetros de los modelos SV se pueden clasificar en dos grandes grupos dependiendo de que se basen directamente en las propiedades de  $y_t$  o utilicen transformaciones adecuadas para linealizar el modelo. Por ejemplo, si consideramos el modelo ARSV(1), y tomamos logaritmos de los rendimientos cuadrados, obtenemos el siguiente modelo

$$\begin{aligned}\log y_t^2 &= \mu + \log \sigma_t^2 + \xi_t \\ \log \sigma_t^2 &= \phi \log \sigma_{t-1}^2 + \sigma_h(1 - \phi^2)^{1/2} \eta_t,\end{aligned}\quad (14)$$

donde  $\mu = \log \sigma_*^2 + E(\log \varepsilon_t^2)$  y  $\xi_t = \log \varepsilon_t^2 - E(\log \varepsilon_t^2)$ . El modelo (14) es un modelo del espacio de los estados lineal aunque la perturbación  $\xi_t$  no es Normal. Si, por ejemplo,  $\varepsilon_t$  tiene una distribución Normal, entonces  $\xi_t$  tiene una distribución  $\log(\chi_{(1)}^2)$  centrada cuya varianza es  $\sigma_\xi^2 = \frac{\pi^2}{2}$ . Por otra parte, si  $\varepsilon_t$

tiene una distribución Student- $\nu$ , entonces  $\xi_t$  tiene una distribución  $\log(\chi_{(1)}^2) - \log(\chi_{(\nu)}^2) + \log \nu$  centrada cuya varianza es  $\sigma_{\xi}^2 = \frac{\pi^2}{2} + \psi'(\nu)$  donde  $\psi'(\cdot)$  es la función digamma.

Dentro de los métodos de estimación basados en las propiedades de  $y_t$  existen tres alternativas fundamentales. En primer lugar están los métodos basados en el principio de Generalized Method of Moments (GMM). Alternativamente, muchos autores han propuesto procedimientos que intentan aproximar directamente la verosimilitud de  $y_t$  fundamentalmente mediante técnicas de simulación como, por ejemplo, el popular Monte Carlo Markov Chain (MCMC). Finalmente, existen estimadores basados en estimar los parámetros de un modelo auxiliar.

Algunos métodos de estimación pueden utilizarse directamente en el caso de modelos con efecto *leverage* o memoria larga. Sin embargo, también se han propuestos estimadores específicos para cada uno de estos casos. Por ejemplo, en el caso de modelos con memoria larga, no es posible utilizar algunos de los métodos anteriores debido a que la representación del vector de estado no es finita. Algo similar sucede en el modelo con efecto *leverage*. En este caso, los estimadores basados en  $\log y_t^2$  no se pueden utilizar directamente debido a que al tomar cuadrados se pierde la información sobre el signo de los rendimientos y, obviamente, esta información es fundamental para poder estimar la correlación entre los rendimientos y sus volatilidades.

Broto y Ruiz (2004) realizan una revisión crítica de la literatura sobre métodos de estimación de modelos SV. En esta sección vamos a resumir los resultados principales de dicho artículo actualizándolos con las nuevas aportaciones realizadas desde entonces a la literatura.

### 3.1. Estimadores Basados en $y_t$

*3.1.1. Basados en el Principio GMM* El estimador GMM, propuesto por Melino y Turnbull (1990) para modelos SV, se basa en la convergencia de determinados momentos muestrales hacia los correspondientes momentos marginales

poblacionales. Tiene el atractivo de ser computacionalmente muy simple. Sin embargo, en el caso de los modelos SV existe un inconveniente para utilizar estos estimadores debido a que los momentos a utilizar en la estimación no pueden ser seleccionados de forma óptima al no disponerse del gradiente; ver Andersen y Sørensen (1996). Además, en muestras finitas, los estimadores GMM tienen propiedades peores que estimadores basados en el principio de MV, especialmente cuando son implementados en series cercanas a tener una raíz unitaria, dado que, en este caso, los momentos no están definidos. Sería interesante investigar cuál es el comportamiento de los estimadores GMM cuando son implementados en el modelo tal y como ha sido formulado en este artículo ya que, en este caso, la presencia de la raíz unitaria implica que el proceso está cerca de ser homoscedástico.

*3.1.2. Basados en la Aproximación de la Verosimilitud* Existen varios procedimientos de estimación de los parámetros que se basan en la aproximación de la verosimilitud de  $y_t$ . Entre ellos describiremos a continuación los más populares, que son los estimadores basados en Monte Carlo Markov Chain (MCMC). También consideraremos los estimadores de Máxima Verosimilitud Simulada y los de Máxima Verosimilitud Directa.

#### **Monte Carlo Markov Chain**

Los estimadores MV están teniendo un gran desarrollo paralelo al de los métodos numéricos basados en procedimientos MCMC. El problema fundamental que se plantea al estimar un modelo SV es la evaluación de la verosimilitud que viene dada por:

$$f(Y|\theta) = \int f(Y|H, \theta) f(H|\theta) dH$$

donde  $Y = (y_1, \dots, y_T)$ ,  $H = (\log \sigma_1^2, \dots, \log \sigma_T^2)$  y  $\theta$  es el vector que contiene los parámetros desconocidos del modelo.

El más popular de los procedimientos MCMC es el muestreo de Gibbs, propuesto por Jacquier *et al.* (1994) y extendido posteriormente por Jacquier *et al.* (2004) a modelos con colas anchas y efecto *leverage*. Este procedimiento se basa

en un remuestreo de movimiento único que genera, dadas todas las demás variables de estado y parámetros, una única variable de estado en cada momento del tiempo. Es un procedimiento relativamente fácil de programar pero genera muestras que están altamente correlacionadas por lo que para poder hacer inferencia, es necesario generar un número elevadísimo de muestras. En consecuencia, son procedimientos altamente ineficientes numéricamente, especialmente cuando la volatilidad está muy correlacionada, es decir, cuando  $\phi$  está cerca de 1 y  $\sigma_\eta^2$  cerca de cero; ver Shephard y Kim (1994). Para solucionar este problema, Shephard y Pitt (1997) propusieron un algoritmo para muestrear por bloques (muestreo de movimiento múltiple); ver también Watanabe y Omori (2004). Este procedimiento consiste en generar un bloque de variables de estado en cada momento del tiempo.

Muy recientemente, Liesenfeld y Richard (en prensa) han propuesto mejorar el diseño y las propiedades muestrales de los procedimientos MCMC mediante su combinación con el procedimiento Efficient Importance Sampling (EIS) propuesto por Richard y Zhang (2007) y la utilización de un muestreo por bloques en el mismo espíritu del propuesto por Shephard y Pitt (1997). Importance Sampling ha sido también utilizado por Jungbacker y Koopman (2007) para estimar un modelo A-ARSV. Ellos proponen estimar la moda de la distribución a posteriori mediante una aproximación de Laplace; ver también Meyer *et al.* (2003) donde utilizan la aproximación de Laplace en el contexto de la estimación MCMC del modelo ARSV con colas anchas.

Los procedimientos MCMC han sido extendidos a modelos con errores con colas anchas por Chib *et al.* (2002) y a modelos con efecto *leverage* por So *et al.* (2002). Koopman y Uspensky (2002) extienden el método propuesto por Shephard y Pitt (1997) al modelo con efectos de la volatilidad en la media, ARSV-M, en el que la verosimilitud es evaluada utilizando Importance Sampling.

Strickland *et al.* (2007) presentan resultados sobre la importancia que tiene la parametrización del modelo sobre la eficiencia computacional de los procedimien-

tos MCMC. En concreto, muestran las ganancias que se pueden obtener cuando los parámetros de escala y la varianza del error de la volatilidad aparecen en la ecuación de los rendimientos,  $y_t$ , en lugar de hacerlo en la de la volatilidad,  $\sigma_t$ . Nótese que en la especificación considerada en este artículo, el parámetro de escala aparece en la ecuación de  $y_t$  pero no el de la varianza de la volatilidad. En cualquier caso, los resultados en el artículo de Strickland *et al.* (2007) hacen referencia al modelo ARSV(1) con errores Normales, sin memoria larga ni efecto *leverage*. No está claro como dichos resultados pueden generalizarse a otros modelos SV.

Finalmente, Yu *et al.* (2006) han propuesto un procedimiento MCMC para estimar el modelo donde se modeliza una transformación Box-Cox de la volatilidad como en (11). El algoritmo de remuestreo propuesto por Yu *et al.* (2006) está limitado en el sentido de que no permite incorporar el efecto *leverage* y porque asume que la distribución de los errores,  $\varepsilon_t$ , es Normal. Estas dos limitaciones han sido superadas en Zhang and King (2008).

### **Máxima Verosimilitud Simulada (SML)**

El estimador SML, propuesto por Danielsson (1994), se basa en aproximar la verosimilitud utilizando simulación para integrar la volatilidad. Durham (2006) analiza las propiedades del estimador SML que puede ser implementado en modelos con efecto *leverage* y errores  $\varepsilon_t$  no Normales; ver, por ejemplo, Liesenfeld y Richard (2003).

Durham (2006) muestra mediante experimentos de Monte Carlo que la distribución muestral de las estimaciones es muy parecida a la que se obtiene mediante el estimador MCMC de Jackier *et al.* (1994). Durham (2006) considera también el filtrado, suavizado, diagnóstico y el comportamiento numérico de estos métodos. El requerimiento básico para poder utilizar el estimador SML es que sea posible obtener la expresión de la densidad conjunta de las variables observables e inobservables del modelo. Cuando esto no es posible, el modelo puede estimarse por

Simulated Method of Moments (SMM) que sólo requiere que sea posible generar observaciones artificiales del modelo.

Todas las estimaciones obtenidas mediante métodos basados en simulación dependen no sólo de los datos utilizados sino también de las semillas utilizadas para generar las secuencias pseudo-aleatorias. Dados unos datos determinados, cada semilla implica una estimación diferente de los parámetros. En este sentido, Durham (2006) recomienda hacer un análisis pormenorizado del error atribuible a la simulación. En concreto, sus estimaciones se basan en un número elevado de semillas para el generador aleatorio de las cuáles se reportan su media y desviación estándar.

### **Máxima Verosimilitud Directa**

Este estimador fue propuesto por Fridman y Harris (1998) y se basa en calcular directamente la verosimilitud a través de integración numérica. Su convergencia es muy lenta. El procedimiento es implementado para estimar un modelo SV-M y ha sido extendido al modelo con efecto *leverage* por Bartolucci y De Luca (2003).

Finalmente, Davis y Rodríguez-Yam (2005) proponen dos estimadores basados en una aproximación de la verosimilitud. En el primer estimador, la aproximación se calcula y se maximiza directamente. En consecuencia, el estimador es rápido y no es necesario recurrir a simulación. El segundo estimador se utiliza importance-sampling para estimar el error que se comete al aproximar la verosimilitud.

*3.1.3. Basados en Modelos Auxiliares* Estos estimadores se basan en el hecho de que los modelos SV se simulan fácilmente aunque su estimación sea complicada. En consecuencia, se elige un modelo auxiliar cuya estimación sea sencilla. Existen dos estimadores fundamentales dentro de este apartado: el estimador de Inferencia Indirecta (II) de Gouriéroux *et al.* (1993) y el estimador EMM de Gallant y Tauchen (1996). Ambos procedimientos son muy intensivos computacionalmente y requieren utilizar un procedimiento adicional para estimar la volatilidad subyacente. Además, ambos proporcionan contrastes de mala especi-

ficación del modelo ajustado. Monfardini (1998) analiza las propiedades en muestras finitas del estimador II cuando se eligen como modelos auxiliares modelos AR y ARMA para  $\log y_t^2$ .

### 3.2. Estimadores Basados en la Aproximación Lineal

Estos procedimientos son rápidos y eficientes pero tienen la desventaja de que requieren linealizar el modelo. Por lo tanto, no pueden ser utilizados en modelos que no tengan una transformación lineal como, por ejemplo, el modelo SV-M en el que la volatilidad afecta al rendimiento medio; ver Koopman y Uspensky (2002). Con respecto a los métodos de estimación basados en aproximar las propiedades de  $\log y_t^2$ , existen dos estimadores fundamentales. En primer lugar, el estimador de Pseudo Máxima Verosimilitud (PMV), que maximiza la verosimilitud Gaussiana y, en segundo lugar, estimadores que tratan de aproximar la verosimilitud de  $\log y_t^2$ , normalmente mediante mixturas de Normales. Además, recientemente Knight *et al.* (2002) han propuesto estimar el modelo linealizado mediante el procedimiento de la Función Característica Empírica.

*3.2.1. Pseudo-Máxima Verosimilitud (PMV)* Tomando logaritmos de los rendimientos al cuadrado en el modelo (1) se obtiene el modelo en (14). El estimador PMV, propuesto por Harvey *et al.* (1994), se obtiene maximizando la verosimilitud Gaussiana que se deriva del modelo (14), tratando  $\xi_t$  como si fuera Normal aunque realmente no lo sea. En consecuencia, el estimador PMV es consistente pero no eficiente; ver Ruiz (1994a). El estimador PMV puede utilizarse para cualquier distribución de  $\varepsilon_t$ . De hecho, si estimamos  $\sigma_\xi^2$  como un parámetro más del modelo, su valor estimado puede sugerir cual es la distribución adecuada para  $\varepsilon_t$  mediante la relación entre dicho parámetro y la distribución, señalada anteriormente.

Breidt y Carriquiry (1996) demuestran que el estimador PMV tiene un Error Cuadrático Medio (ECM) menor cuando se implementa con la transformación

propuesta por Fuller (1996) mediante la que se evita el problema de observaciones extremas que se obtienen cuando se toman logaritmos de rendimientos muy cercanos a cero. Su propuesta es aproximar  $\log(y_t^2)$  por

$$\log(y_t^2 + \lambda s_y^2) - \lambda s_y^2 / (y_t^2 + \lambda s_y^2) \quad (15)$$

donde  $s_y^2$  es la varianza muestral de  $y_t$  y  $\lambda$  es una constante<sup>8</sup>. Además, muestran que la especificación del modelo en la que la constante aparece en la ecuación de los rendimientos en lugar de aparecer en la ecuación de la volatilidad, reduce los sesgos y los ECM del estimador PMV.

Finalmente, So, Li y Lam (1997) han propuesto la utilización del algoritmo EM para obtener el estimador QML. Este procedimiento evita la maximización numérica de la verosimilitud y proporciona expresiones recursivas del estimador. Como consecuencia, el algoritmo EM es fácil de programar, computacionalmente eficiente y numéricamente estable. Además, el algoritmo permite obtener una expresión directa de la matriz de varianzas y covarianzas.

*3.2.2. Estimadores Basados en Aproximar la Verosimilitud de  $\log y_t^2$*  Varios autores han propuesto incrementar la eficiencia del estimador PMV aproximando la densidad de  $\log \varepsilon_t^2$ . Además, estas aproximaciones permiten reducir las correlaciones entre extracciones sucesivas que aparecen cuando se utilizan procedimientos MCMC de movimiento único. En este sentido, Kim *et al.* (1998) asumen que  $\varepsilon_t$  es Normal en el modelo en el que no hay efectos asimétricos y aproximan dicha densidad mediante una mixtura de 7 distribuciones Gaussianas para poder representar los primeros 4 momentos de la distribución<sup>9</sup>. Después utilizan procedimientos de MCMC para remuestrear de las distribuciones *a pos-*

<sup>8</sup> Harvey y Streibel (1998) fijan la constante  $\lambda$  en 0.02. Alternativamente, Kim *et al.* (1998) y Omori *et al.* (2007) también consideran una transformación similar dada por  $\log(y_t^2 + c)$  donde  $c = 0,001$  y  $0,0001$  respectivamente.

<sup>9</sup> Carter y Kohn (1997) utilizan 5 componentes en la mixtura para estimar los parámetros de un modelo de componentes inobservables mediante un estimador basado en el periodograma.

*teriori* de los parámetros y de las volatilidades; ver Mahieu y Schotman (1998), Primiceri (2005) y Stroud *et al.* (2003) para algunas aplicaciones empíricas de este estimador denominado KSC. Posteriormente Chib *et al.* (2002) propusieron la generalización del procedimiento al caso en el que  $\varepsilon_t$  tuviera colas anchas y Omori *et al.* (2007) proponen la extensión del estimador KSC a modelos donde  $\varepsilon_t$  tenga una distribución con colas anchas y pueda haber efectos asimétricos. Su procedimiento se basa en aproximar la distribución conjunta de  $\log \varepsilon_t^2$  y  $(\delta\varepsilon_{t-1} + (1 - \delta^2)^{1/2}\eta_t)$  mediante una mixtura de 10 variables Normales bivariantes. Al comparar sus resultados con el estimador MCMC de Jacquier *et al.* (2004), ven que su estimador es más apropiado al tener correlaciones entre las extracciones más pequeñas y factores de ineficiencia menores.

Kim y Stoffer (2008) también han propuesto aproximar la distribución del error de la ecuación de  $\log y_t^2$  mediante una mixtura de Normales con parámetros desconocidos; ver también Durham (2007) y Stoffer y Wall (2004). Su procedimiento permite que el ruido del nivel,  $\varepsilon_t$ , tenga colas anchas. Además, utilizan un procedimiento EM para poder implementar el estimador en series con observaciones irregulares.

Finalmente, Sandman y Koopman (1998) propusieron el estimador de Monte Carlo Likelihood (MCL) basado en descomponer la verosimilitud de  $\log \varepsilon_t^2$  en una parte Gaussiana, que se puede obtener mediante el filtro de Kalman, y el resto cuya esperanza se obtiene mediante simulación. Este estimador puede ser implementado en modelo con colas anchas, efectos *leverage* y SV-M.

### 3.3. Estimadores para Modelos con Memoria Larga

Los estimadores para modelos LMSV simétricos propuestos en la literatura pueden clasificarse en estimadores paramétricos y semiparamétricos. En los primeros se asume un modelo concreto tanto para la memoria larga como para la dinámica de memoria corta de la volatilidad y se estiman todos los parámetros de dicho

modelo, mientras que, en el segundo grupo de estimadores, no se asume una especificación concreta para la dependencia a corto plazo de  $\log \sigma_t^2$  y únicamente se estima el parámetro de memoria larga,  $d$ . Pérez y Ruiz (2002) hacen una revisión de la literatura sobre modelos de memoria larga con especial atención a los estimadores de los parámetros del modelo LMSV(1, $d$ ,0). Más recientemente, Hurvich y Soulier (2008) han realizado una excelente revisión actualizada. En esta sección completamos dicha revisión.

*3.3.1. Estimadores Paramétricos* Dentro de los estimadores paramétricos pueden distinguirse estimadores basados en cuatro principios distintos. En primer lugar están los estimadores basados en GMM propuestos por Wright (1999). El segundo grupo son los estimadores basados en EMM. El tercer grupo está formado por los estimadores bayesianos; ver, por ejemplo, So (2002), Chan y Petris (2000) y la extensión del procedimiento KSC a memoria larga de Jensen (2004). Recientemente, Brockwell (2006) ha propuesto un estimador del modelo LMSV basado en MCMC que permite obtener estimaciones de las volatilidades subyacentes que incorporan la variabilidad asociada a la estimación de los parámetros. Finalmente, el cuarto grupo está formado por los estimadores basados en PMV. Dentro de este cuarto grupo, hay dos estimadores. En primer lugar están los estimadores que maximizan la verosimilitud Gaussiana expresada en términos del error de predicción. El principal problema que se plantea al estimar los parámetros del modelo LMSV utilizando procedimientos basados en la representación del estado de los espacios del modelo es que el vector de componentes inobservables no es finito; ver Chan y Palma (1998). Sin embargo, los problemas computacionales planteados en este estimador han sido superados mediante el procedimiento propuesto por Chen, Hurvich y Lu (2006); ver Deo (1995) para la demostración de la  $\sqrt{T}$ -consistencia y la Normalidad asintótica del estimador PMV en el dominio del tiempo. Ferraz y Hotta (2007) analizan las propiedades en tamaños de muestra finitos del estimador PMV en el dominio del tiempo basado en truncar

la representación ARMA de  $\log y_t^2$  en el espacio de los estados; ver Chan y Palma (1998) y Basak *et al.* (2001). Alternativamente, el estimador PMV más popular se basa en maximizar la aproximación de Whittle de la verosimilitud Gaussiana de  $\log y_t^2$  en el dominio de las frecuencias; ver Harvey (1998) y Breidt *et al.* (1998) que propusieron independientemente el estimador de Whittle para modelos LMSV. El estimador de Whittle tiene garantía de ser  $\sqrt{T}$ -consistente; ver Chen y Deo (2006) sobre la necesidad de una elección de momentos cuidadosa en el estimador EMM para poder garantizar esta propiedad. Además, los resultados de Zaffaroni (2008) permiten derivar su distribución asintótica en el modelo con errores incorrelados. Sin embargo, el estimador de Whittle es ineficiente porque se basa en el supuesto de Gaussianidad y típicamente  $\log y_t^2$  no es Gaussiano. Además, sus propiedades en tamaños de muestra finitos, analizadas por Pérez y Ruiz (2001) solo son adecuadas cuando el tamaño de muestra es muy grande. Recientemente, Deo *et al.* (2006) han propuesto una modificación del estimador de Whittle denominada Enhanced Frequency Domain QML (EFDQML) que se basa en implementar el estimador de Whittle a transformaciones de los rendimientos que estén más cercanas a la Normalidad de lo que lo está  $\log y_t^2$ . En concreto, proponen la transformación  $|y_t|^\theta$  donde  $\theta$  se elige de forma que dicha transformación tenga el parámetro de asimetría igual a cero. No hay resultados sobre la distribución asintótica del estimador EFDQML aunque los experimentos de Monte Carlo realizados por Deo *et al.* (2006) señalan que este estimador tiene mejores propiedades en tamaños de muestra finitos que el estimador de Whittle.

*3.3.2. Estimadores Semiparamétricos* Chen y Deo (2006) han demostrado que, incluso en el caso de una correcta especificación de la memoria larga en un modelo ARFIMA, si la dinámica de la memoria corta no está bien especificada, el estimador del parámetro  $d$  converge a un valor distinto del verdadero. Por ello, cuando el interés se centra únicamente en la estimación de dicho parámetro puede ser interesante utilizar estimadores semiparamétricos, propuestos para estimar-

lo independientemente de otros componentes dinámicos que puedan caracterizar a la volatilidad. Estos estimadores se basan en la transformación lineal de los rendimientos en (14).

Los primeros estimadores semiparamétricos del parámetro de memoria larga fueron el estimador de la regresión del log-periodograma, LPE, propuesto por Geweke y Porter-Hudak (1993) y el estimador Gaussiano semiparamétrico, GSE, de Robinson (1995). El estimador GSE tiene la desventaja de que requiere optimización no lineal pero es más eficiente que LPE. Sin embargo, ninguno de estos estimadores iniciales tienen en cuenta la presencia del ruido en (14) y, en consecuencia, tienen grandes sesgos negativos; ver Deo y Hurvich (2001, 2003), Crato y Ray (2002) y Arteché (2004). Posteriormente, se han propuesto estimadores que modifican a los anteriores considerando explícitamente la presencia del ruido con el que la volatilidad es observada. Sun y Phillips (2003) propusieron una modificación del estimador LPE y Hurvich y Ray (2003) propusieron el estimador de Whittle local que generaliza al estimador GSE teniendo este último mejores propiedades estadísticas; ver Arteché (2004), Hurvich *et al.* (2005) y Dalla *et al.* (2005) para dichas propiedades. Recientemente, Arteché (2006), ha propuesto un estimador basado en LPE con propiedades estadísticas similares a las del estimador de Hurvich *et al.* (2005). Aunque la demostración de la consistencia y normalidad asintótica de este nuevo estimador se realizan bajo el supuesto de ruidos Normales, Arteché (2006) ilustra mediante experimentos de Monte Carlo que dichas propiedades también se satisfacen en casos no Normales como el modelo en (14). Además, aunque las propiedades asintóticas de estos estimadores solo se han derivado para el caso estacionario, es decir,  $d < 0,5$ , Sun y Phillips (2003) señalan que puede esperarse que también tengan buenas propiedades siempre que  $d < 1$ . Finalmente, Arteché (2006) realiza una extensa comparación de las propiedades en muestras finitas de todos los estimadores semiparamétricos del parámetro  $d$ . En general, dichos estimadores tienen varianzas muestrales muy grandes. En una aplicación empírica a una serie de rendimientos

del IBEX35 observados cada media hora, Arteche (2006) observa que aunque las estimaciones del parámetro  $d$  están alrededor de 0.3, las desviaciones estándar son tan grandes que la estacionariedad puede ser dudosa. Además, nótese que estos estimadores no estiman otros parámetros que pueden afectar a la evolución de la volatilidad y, en este sentido, su utilización es bastante restringida.

Con la excepción de los estimadores Bayesianos, los estimadores comentados en esta subsección tienen el inconveniente de que no permiten la obtención directa de la volatilidad. En consecuencia, es necesario implementar después algún filtro que permita estimarla. En el caso del estimador EMM, Gallant y Tauchen (1996) proponen un filtro que permite su estimación. Para el estimador PMV, Deo *et al.* (2006) han propuesto un algoritmo que permite estimarla; ver también Marmol *et al.* (2008) para una ilustración de este procedimiento.

#### 3.4. Estimadores para Modelos con Efecto Leverage

Muchos de los estimadores descritos en las secciones anteriores se han diseñado para tener buenas propiedades bajo el supuesto de que los errores  $\varepsilon_t$  y  $\eta_t$  son mutuamente independientes para todo retardo. Sin embargo, no son, en general, adecuados para modelos con efecto *leverage*. Ya hemos comentado en la Introducción que la presencia de dicho efecto es observada frecuentemente cuando se analizan datos reales por lo que hay un interés creciente en el diseño de estimadores para modelos A-ARSV. El mayor problema de los estimadores basados en la linealización en (14) es que al tomar logaritmos de los cuadrados se pierde toda la información sobre la covarianza entre  $\varepsilon_t$  y  $\eta_{t+1}$ ; ver Harvey *et al.* (1994). En este sentido Harvey y Shephard (1996) han propuesto una extensión del estimador PMV que introduce el signo dentro del vector de estado para poder estimar el parámetro de asimetría,  $\delta$ . Por otra parte, el procedimiento MCL de Sandmann y Koopman (1998) ha sido generalizado para el modelo A-ARSV(1) con errores Student- $\nu$  por Asai (2008) que utiliza también la idea de aumentar el vector de estado con el signo de los rendimientos. El procedimiento es explicado

de una forma muy clara en dicho artículo; ver también Asai y McAleer (2005) para una aplicación empírica del modelo A-ARSV(1). Asai (2008) compara el modelo A-ARSV(1) con un modelo de volatilidad estocástica con varios factores en la volatilidad en una serie real y concluyen que el primero tiene mejor ajuste que el segundo.

Muy recientemente, Kawakatsu (2007a) ha propuesto un estimador del modelo A-ARSV, muy relacionado con el estimador PMV de Harvey y Shephard (1996), que utiliza filtros Gaussianos e integración numérica. Este estimador tiene la ventaja de su sencillez dado que al no basarse en la transformación  $\log y_t^2$ , no es necesario introducir el signo en el vector de estado. Además, como consecuencia, puede implementarse en modelos donde los errores no tengan una distribución simétrica. Mediante experimentos de Monte Carlo, muestran la pérdida de eficiencia que se produce al estimar tanto los parámetros como la volatilidad mediante el procedimiento PMV. Este estimador tiene también el atractivo de que puede ser implementado en modelos con efectos en la media.

Como ya hemos comentado anteriormente, el estimador SML puede ser implementado para estimar los parámetros de modelos A-ARSV(1); ver, por ejemplo, Liesenfeld y Richard (2003), Bauwens y Rombouts (2004) y Durham (2006).

Dentro de los estimadores basados en aproximar la verosimilitud de  $y_t$ , Omori y Watanabe (2007) han propuesto un nuevo procedimiento de muestreo por bloques para el modelo A-ARSV en (14) basado en Shephard y Pitt (1997) y Watanabe y Omori (2004). Raggi y Bordignon (2006) también utilizan un estimador basado en MCMC aplicado a un modelo con asimetría y errores Student- $\nu$ . No comentan ni ventajas ni inconvenientes frente a otras alternativas.

#### 4. Conclusiones

En este artículo hemos descrito las principales propiedades de los modelos de volatilidad estocástica y de los estimadores de sus parámetros. Desde un punto de vista empírico, estos modelos son atractivos debido a su flexibilidad para

representar los momentos muestrales habitualmente observados en las series de rendimientos financieros reales. Además son aproximaciones discretas de los modelos que habitualmente se utilizan en Finanzas. Las propiedades de los modelos con efecto *leverage* únicamente se conocen cuando los errores son conjuntamente Normales. Sería interesante poder derivar dichas propiedades para errores no Normales. Además sería interesante analizar contrastes para la adecuación entre los momentos poblacionales implícitos en las estimaciones de los parámetros del modelo ajustado a una determinada variable y los momentos muestrales estimados en los datos originales.

En cuanto a la estimación, todavía quedan numerosas cuestiones sin resolver. Un tema que puede ser de interés investigar en el futuro es el comportamiento del estimador GMM cuando se utiliza la especificación alternativa del modelo considerada en este artículo. Este estimador es muy sencillo aunque tiene la desventaja de tener falta de eficiencia especialmente cuando la volatilidad está cerca de tener una raíz unitaria. Sin embargo, en la especificación utilizada en este artículo la presencia de la raíz unitaria implica la homoscedasticidad. También en el tema de estimación está pendiente de hacer una comparación exhaustiva de las propiedades de los estimadores alternativos especialmente en el caso de modelos con efecto *leverage*. La mayoría de los artículos descritos anteriormente donde se proponen nuevos estimadores no los comparan con estimadores alternativos y cuando hay comparaciones son muy limitadas.

En este artículo nos hemos centrado en modelos univariantes donde el objetivo es la estimación de la volatilidad de una determinada variable. Sin embargo, existe un interés creciente en modelos multivariantes donde se modelizan no solo las volatilidades de los activos componentes del sistema analizado sino también las correlaciones que pueda haber entre ellos. Por ejemplo, muy recientemente, Cipollini y Kapetanios (2008) proponen un modelo de volatilidad estocástica multivariante como el originalmente propuesto por Harvey *et al.* (1994) para datos

de alta dimensión. Proponen utilizar la metodología de componentes principales aplicada en el contexto de la varianza en lugar de la media condicional.

Los modelos SV han sido también considerados en el contexto de modelos con componentes inobservables para representar la evolución dinámica de las perturbaciones asociadas a los componentes; ver, por ejemplo, Bos y Shephard (2006).

Obviamente, hay muchas otras aportaciones en el contexto de modelos SV que no han sido recogidas en este artículo. Nuestro objetivo era dar una visión general de cuáles son sus características fundamentales y que es lo que se puede y no se puede hacer con ellos dado el estado actual del conocimiento. Buscar los detalles que profundicen más en cada uno de los temas es trabajo del investigador interesado.

*Agradecimientos* Agradecemos la ayuda financiera del proyecto SEJ2006-03919 del Ministerio de Educación y Ciencia. También queremos agradecer muy especialmente a Ana Pérez por sus detallados comentarios que han contribuido a mejorar este artículo y a los editores por su paciencia e interés.

	IBEX35	Dólar/Libra
Media	0.038	-0.007
Desv. Típica	1.338	0.500
Asimetría	-0.165*	-0.021
Curtosis	5.708*	4.153*
$KS_N$	983.44*	183.26*
$KS_S$	-3.805*	-0.486
$KS_K$	31.128*	13.529*
$Q_y(10)$	22.11*	9.883
$Q_{ y }(10)$	1824.2*	90.298*
$Q_{y^2}(10)$	1626.9*	67.494*
$Q_{y y }(10)$	141.487*	9.980
$Q_{yy^2}(10)$	134.564*	12.063

\* Significativo al 5 %

Cuadro 1: Momentos muestrales de los rendimientos diarios del IBEX35 y del tipo de cambio Dólar/Libra.

	<i>IBEX35</i>		<i>Dólar/Libra</i>	
	<i>AR</i>	<i>A - AR</i>	<i>AR</i>	<i>A - AR</i>
$\hat{\sigma}_*$	1,308 (0,072)	1,191 (0,065)	0,450 (0,010)	0,449 (0,011)
$\hat{\phi}$	0,978 (0,011)	0,988 (0,005)	0,536 (0,120)	0,437 (0,175)
$\hat{\sigma}_\eta$	0,142 (0,037)	0,124 (0,030)	0,547 (0,066)	0,598 (0,076)
$\hat{\delta}$	-	-0,801 (0,269)	-	0,390 (0,199)

Entre paréntesis aparecen las desviaciones estándar.

Cuadro 2: Resultados de la estimación EMM de los modelos SV.

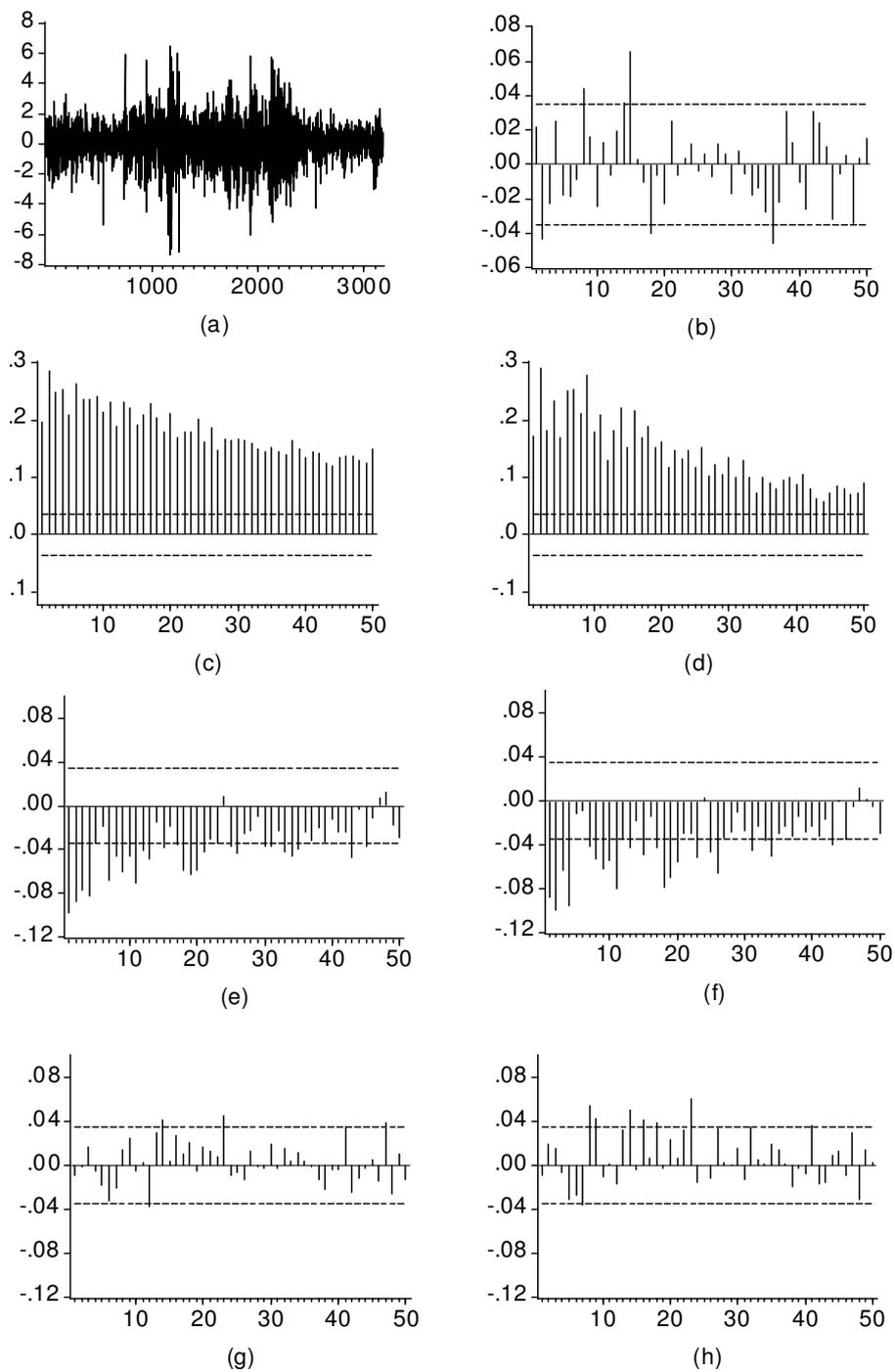


Figura 1: (a) Rendimientos diarios del IBEX35 observados desde 3/1/1994 hasta 6/9/2006, (b) autocorrelaciones muestrales de  $y_t$ , (c) de  $|y_t|$  y (d) de  $y_t^2$  (e) correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|$ , (f) entre  $y_t$  y  $y_{t+k}^2$ , (g) entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|$  y (h) entre  $y_t$  y  $y_{t-k}^2$ .

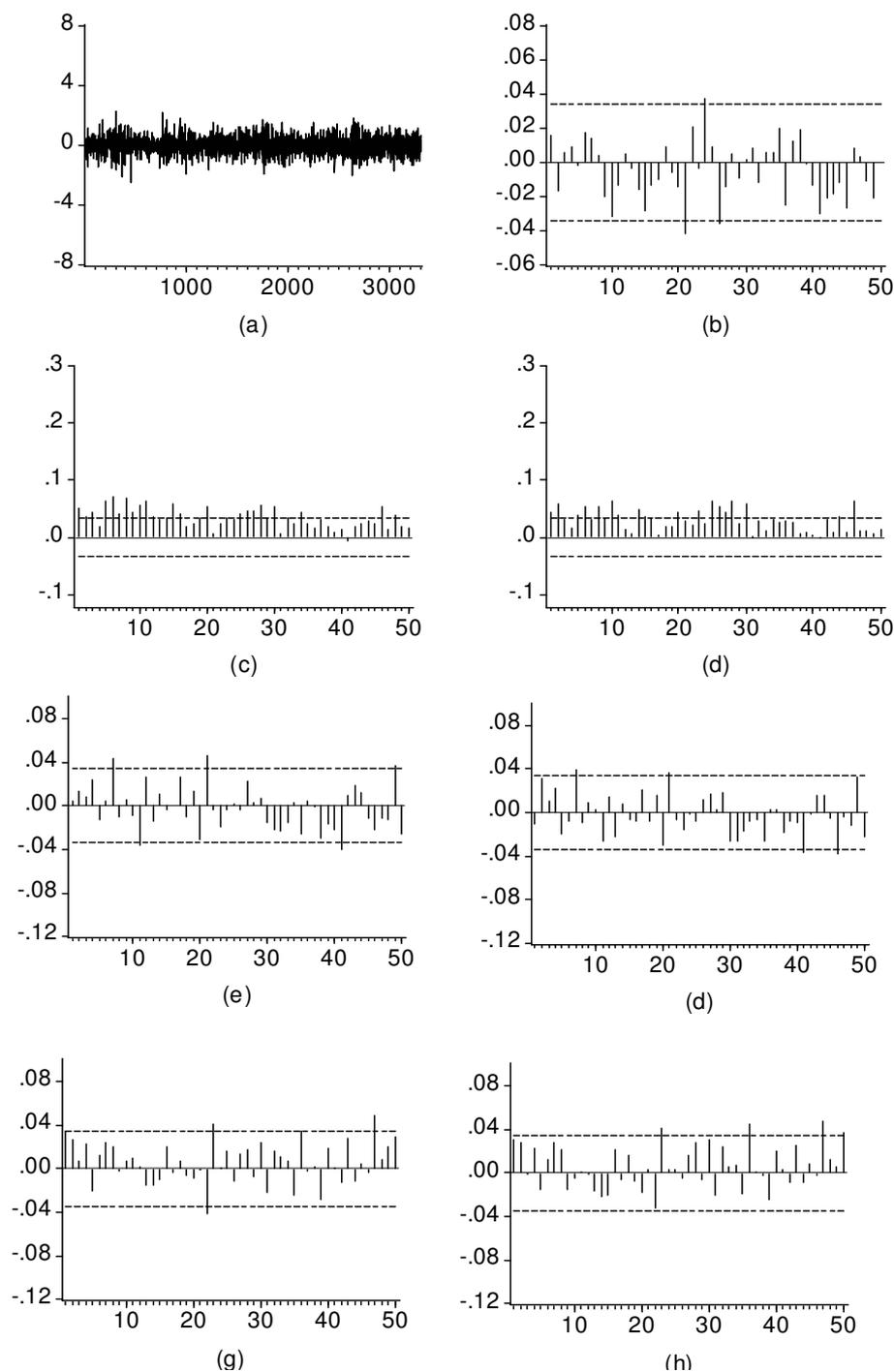


Figura 2: (a) Rendimientos diarios del tipo de cambio Dólar/Libra observados desde 3/1/1994 hasta 6/9/2006, (b) autocorrelaciones muestrales de  $y_t$ , (c) de  $|y_t|$  y (d) de  $y_t^2$  (e) correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|$ , (f) entre  $y_t$  y  $y_{t+k}^2$ , (g) entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|$ , y (h) entre  $y_t$  y  $y_{t-k}^2$ .

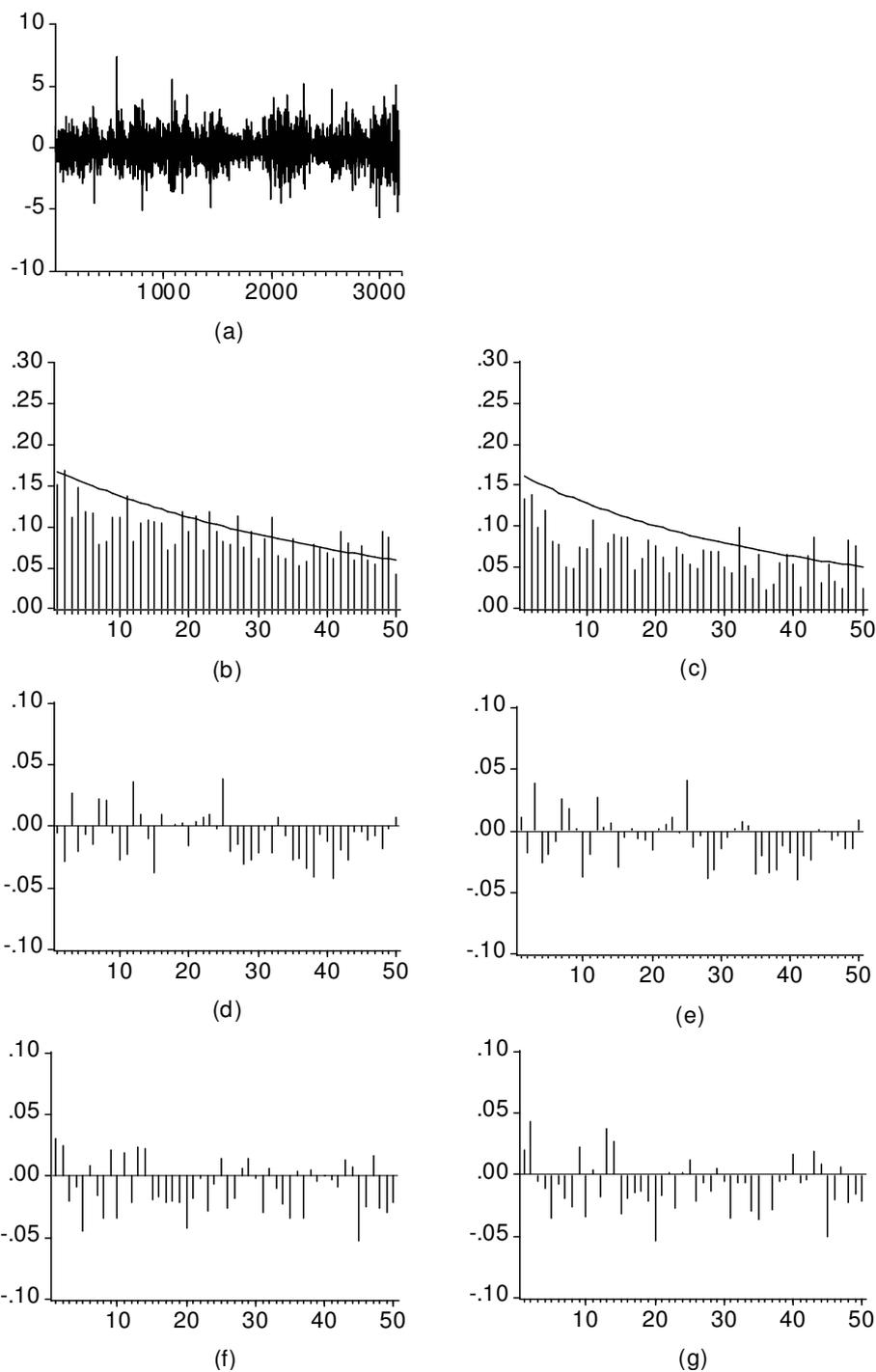


Figura 3: (a) Serie generada por el modelo ARSV(1) con parámetros  $\sigma_*^2 = 1$ ,  $\phi = 0,98$ ,  $\sigma_h^2 = 0,5$  y errores Gaussianos, (b) autocorrelaciones teóricas (trazo continuo) y muestrales de  $|y_t|$  y (c) de  $y_t^2$  (d) correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|$ , (e) entre  $y_t$  y  $y_{t+k}^2$ , (f) entre  $y_t$  y  $|y_{t-k}|$  y (g) entre  $y_t$  y  $y_{t-k}^2$ .

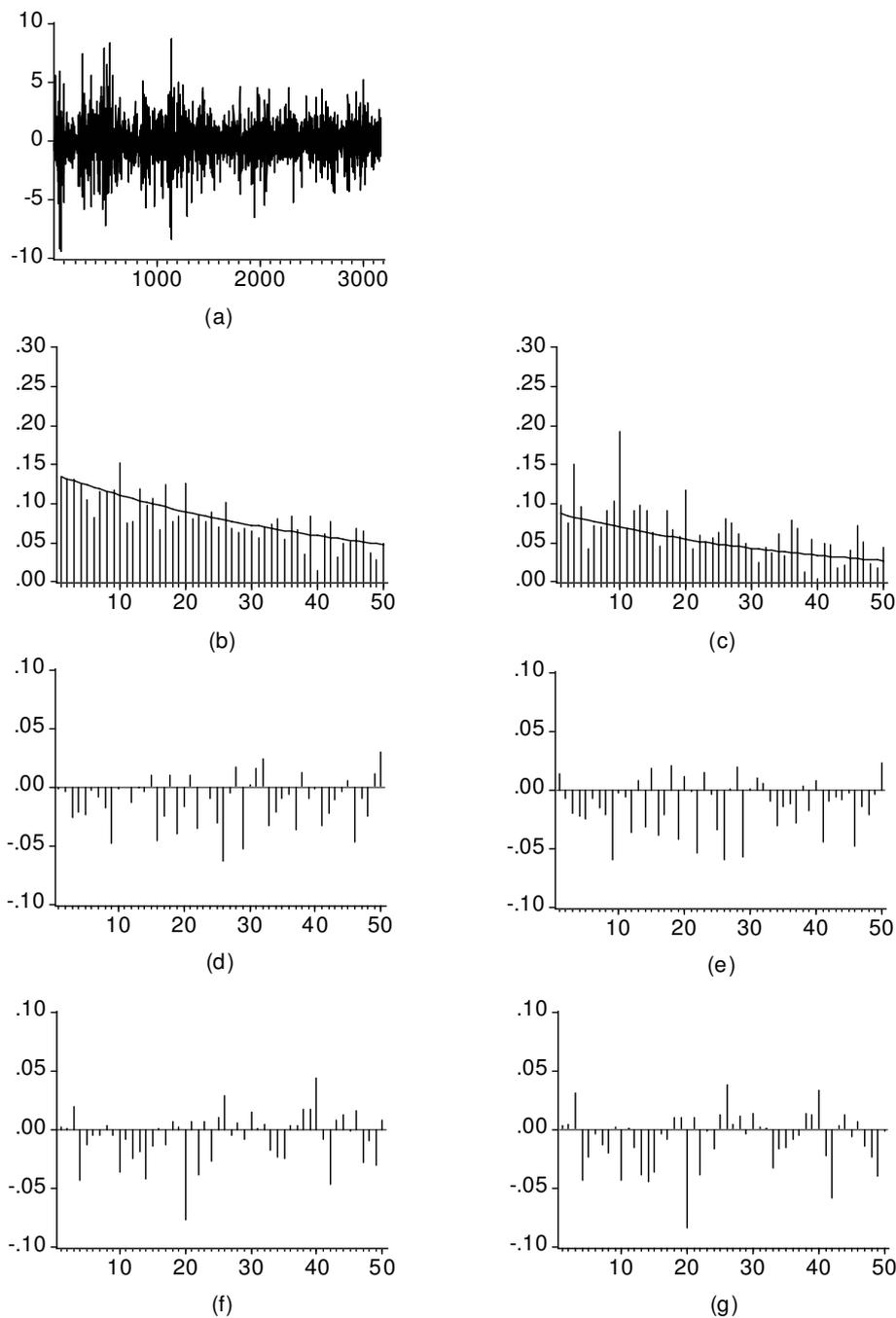


Figura 4: (a) Serie generada por el modelo ARSV(1) con parámetros  $\sigma_*^2 = 1$ ,  $\phi = 0,98$ ,  $\sigma_h^2 = 0,5$  y errores Student-7, (b) correlaciones teóricas (trazo continuo) y muestrales de  $|y_t|$  y (c) de  $y_t^2$  (d) correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|$ , (e) entre  $y_t$  y  $y_{t+k}^2$ , (f) entre  $y_t$  y  $|y_{t-k}|$  y (g) entre  $y_t$  y  $y_{t-k}^2$ .

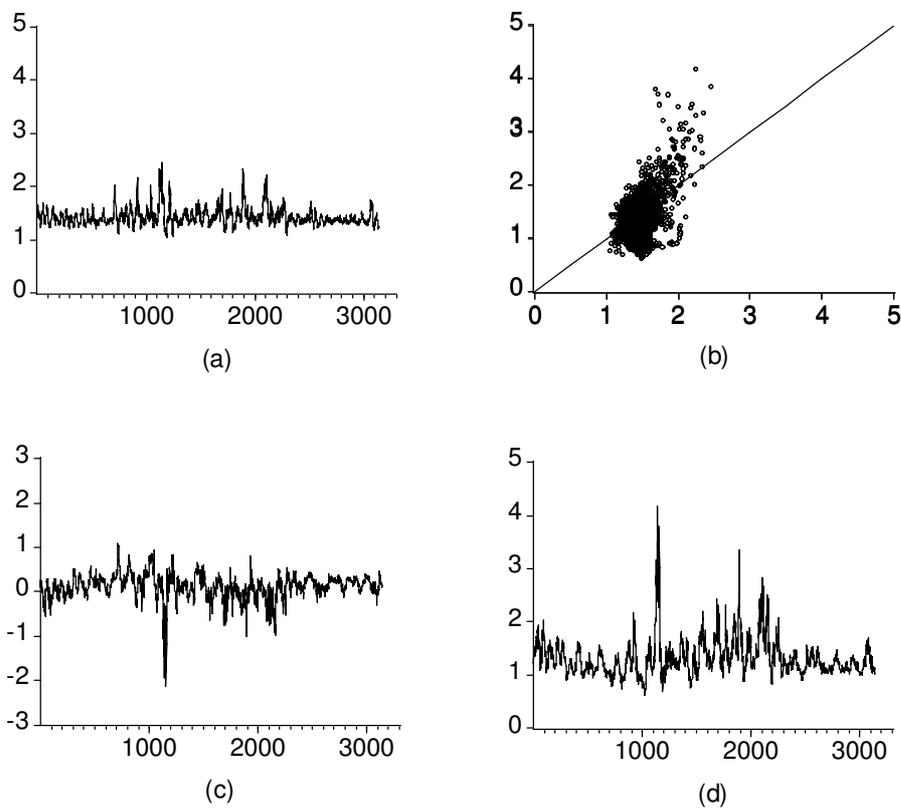


Figura 5: Estimaciones de la volatilidad de los rendimientos del IBEX35 obtenidas después de ajustar los modelos ARSV(1) (panel a) y A-ARSV(1) (panel d), diagrama de puntos de las estimaciones del modelo asimétrico frente a las del modelo simétrico (panel b) y diferencias entre ambas estimaciones (panel c).

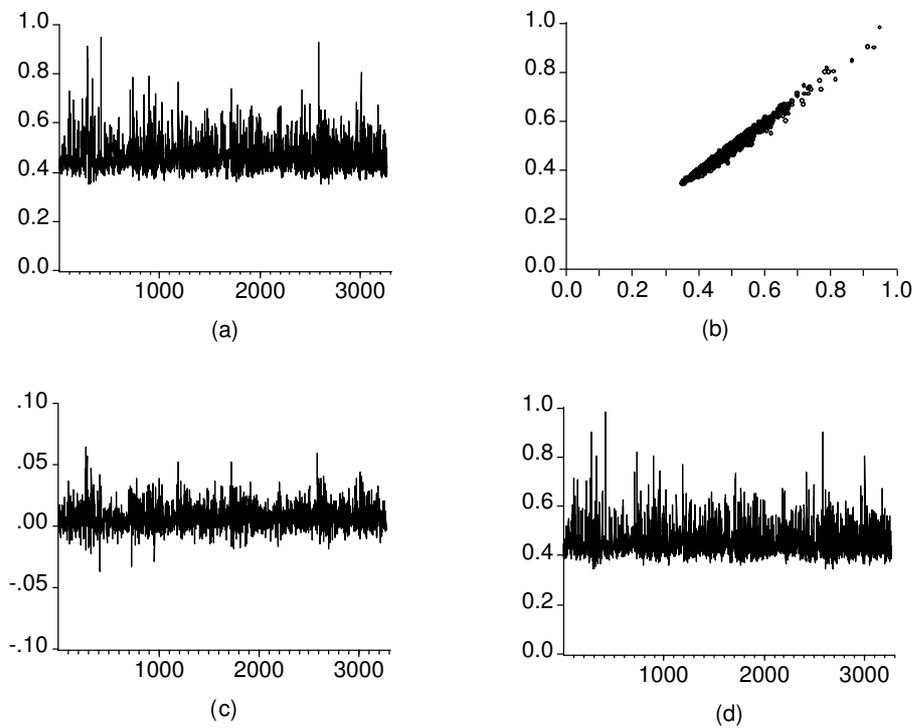
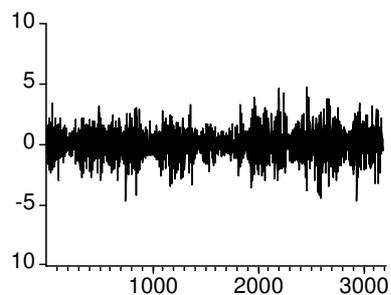
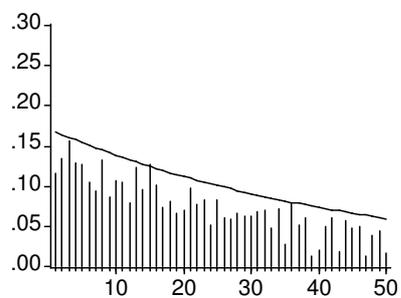


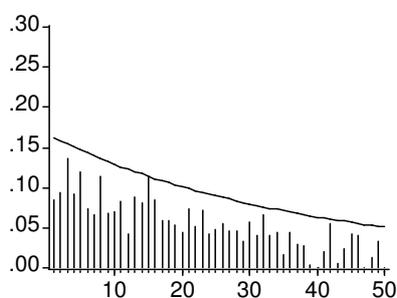
Figura 6: Estimaciones de la volatilidad de los rendimientos del tipo de cambio Dólar/Libra obtenidas después de ajustar los modelos ARSV(1) (panel a) y A-ARSV(1) (panel d), diagrama de puntos de las estimaciones del modelo asimétrico frente a las del modelo simétrico (panel b) y diferencias entre ambas estimaciones (panel c).



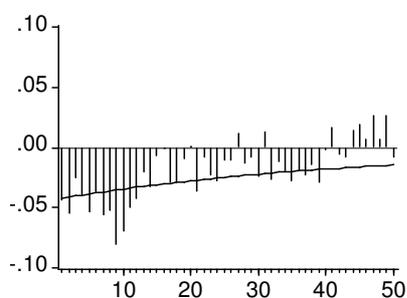
(a)



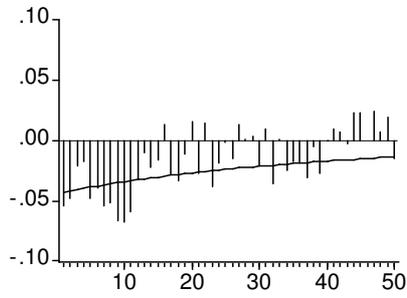
(b)



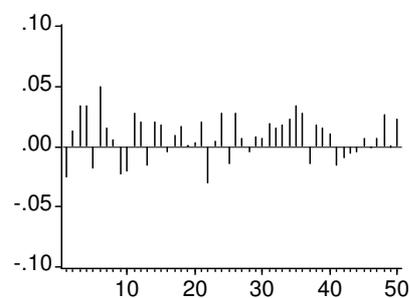
(c)



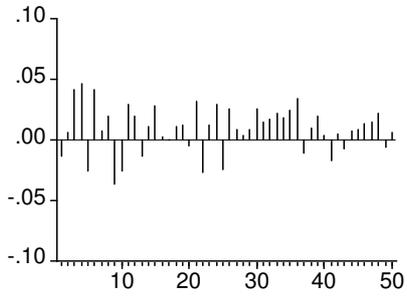
(d)



(e)



(f)



(g)

Figura 7: (a) Serie generada por el modelo A-ARSV(1) con parámetros  $\sigma_*^2 = 1$ ,  $\phi = 0,98$ ,  $\sigma_h^2 = 0,5$ ,  $\delta = -0,5$  y errores Gaussianos (b) correlaciones teóricas (trazo continuo) y muestrales de  $|y_t|$  y (c) de  $y_t^2$  (d) correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|$ , (e) entre  $y_t$  y  $y_{t+k}^2$ , (f) entre  $y_t$  y  $|y_{t-k}|$  y (g) entre  $y_t$  y  $y_{t-k}^2$ .

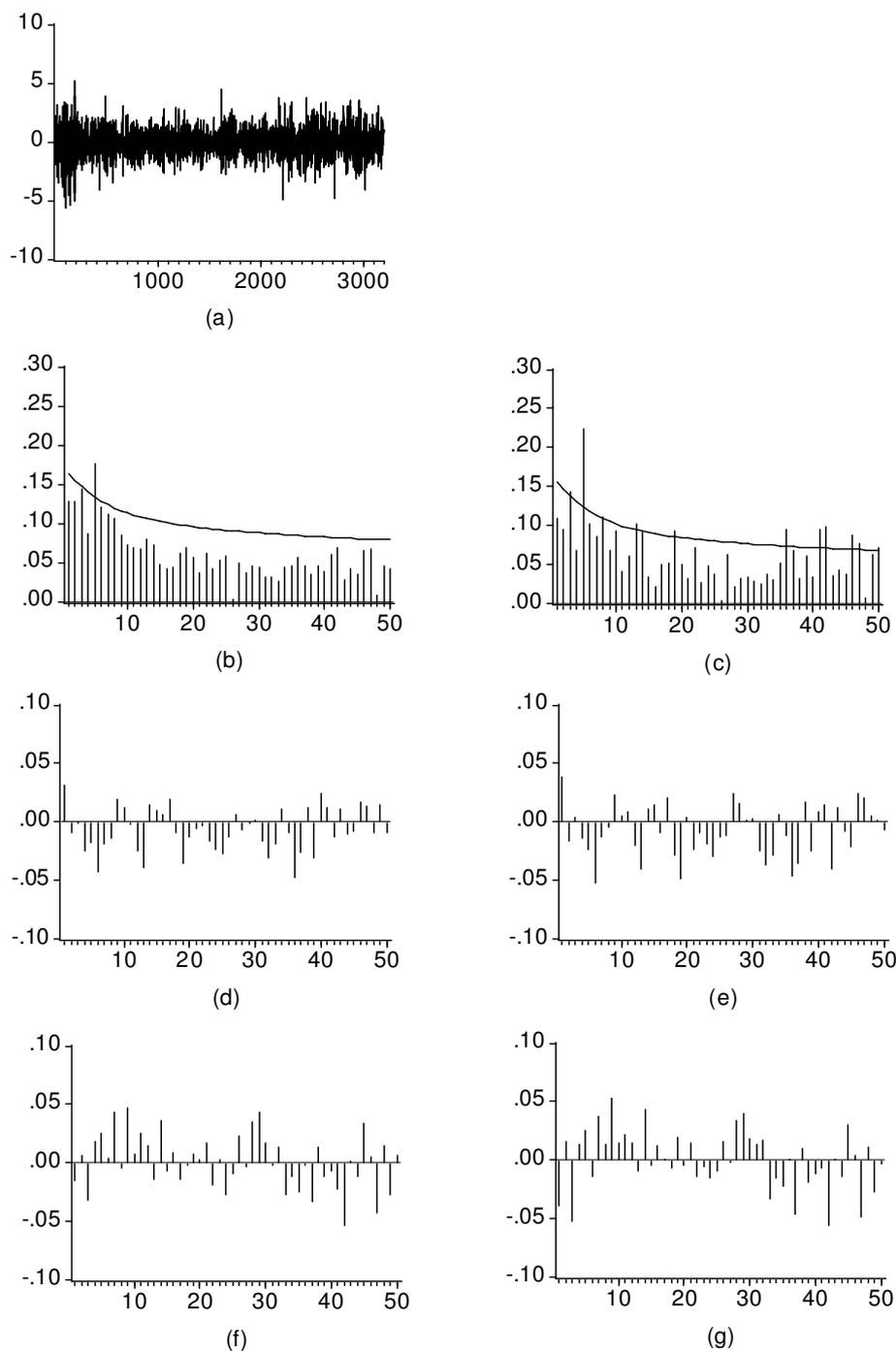


Figura 8: (a) Serie generada por el modelo LMSV(1,d,0) con parámetros  $\sigma_*^2 = 1$ ,  $\phi = 0,9$ ,  $d = 0,4$ ,  $\sigma_h^2 = 0,5$  y errores Normales (b) correlaciones teóricas (trazo continuo) y muestrales de  $|y_t|$  y (c) de  $y_t^2$  (d) correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|$ , (e) entre  $y_t$  y  $y_{t+k}^2$ , (f) entre  $y_t$  y  $|y_{t-k}|$ , (g) entre  $y_t$  y  $y_{t-k}^2$ .

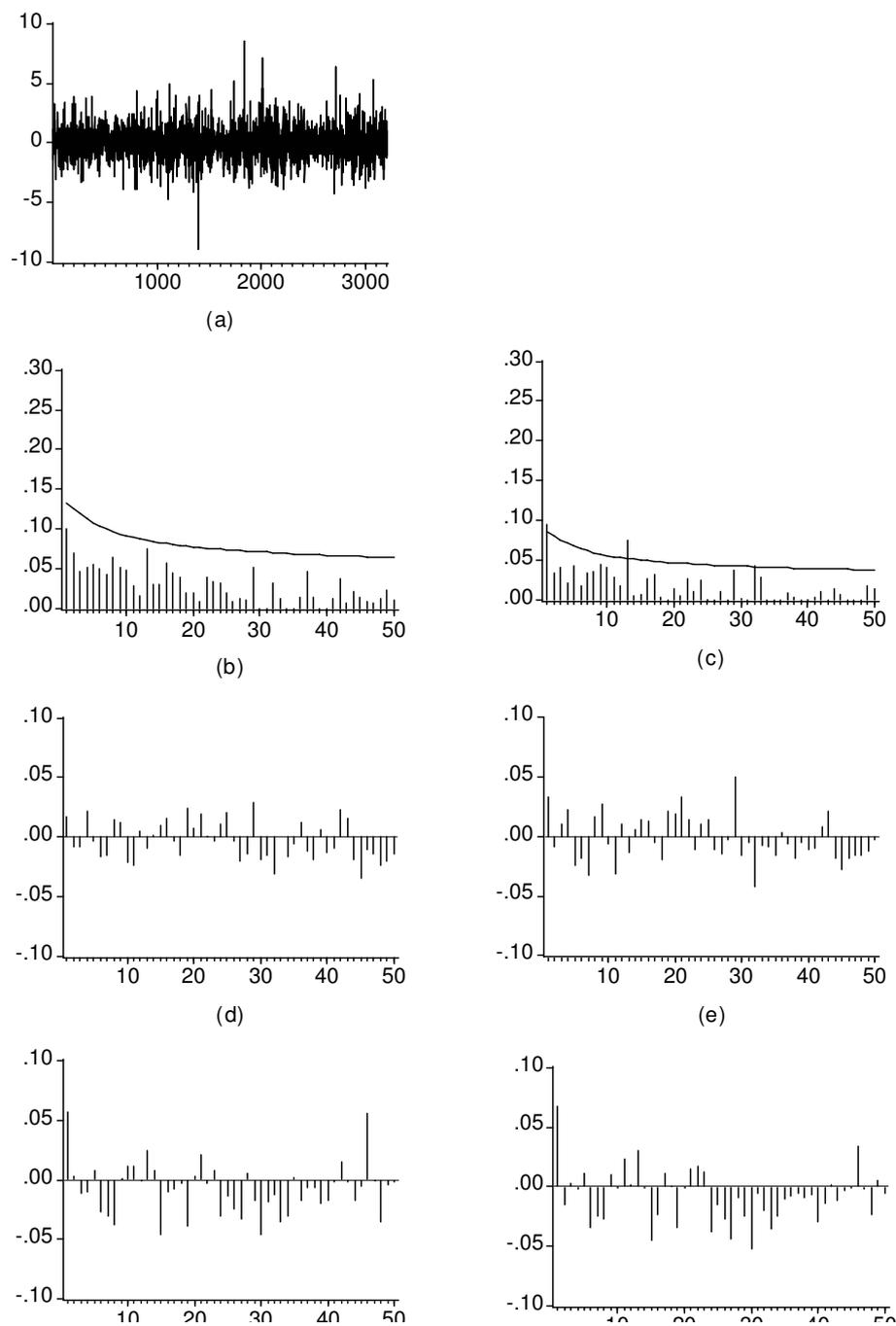


Figura 9: (a) Serie generada por el modelo LMSV(1,d,0) con parámetros  $\sigma_*^2 = 1$ ,  $\phi = 0,9$ ,  $d = 0,4$ ,  $\sigma_h^2 = 0,5$  y errores Student-7 (b) correlaciones teóricas (trazo continuo) y muestrales de  $|y_t|$  y (c) de  $y_t^2$  (d) correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|$ , (e) entre  $y_t$  y  $y_{t+k}^2$ , (f) entre  $y_t$  y  $|y_{t-k}|$ , (g) entre  $y_t$  y  $y_{t-k}^2$ .

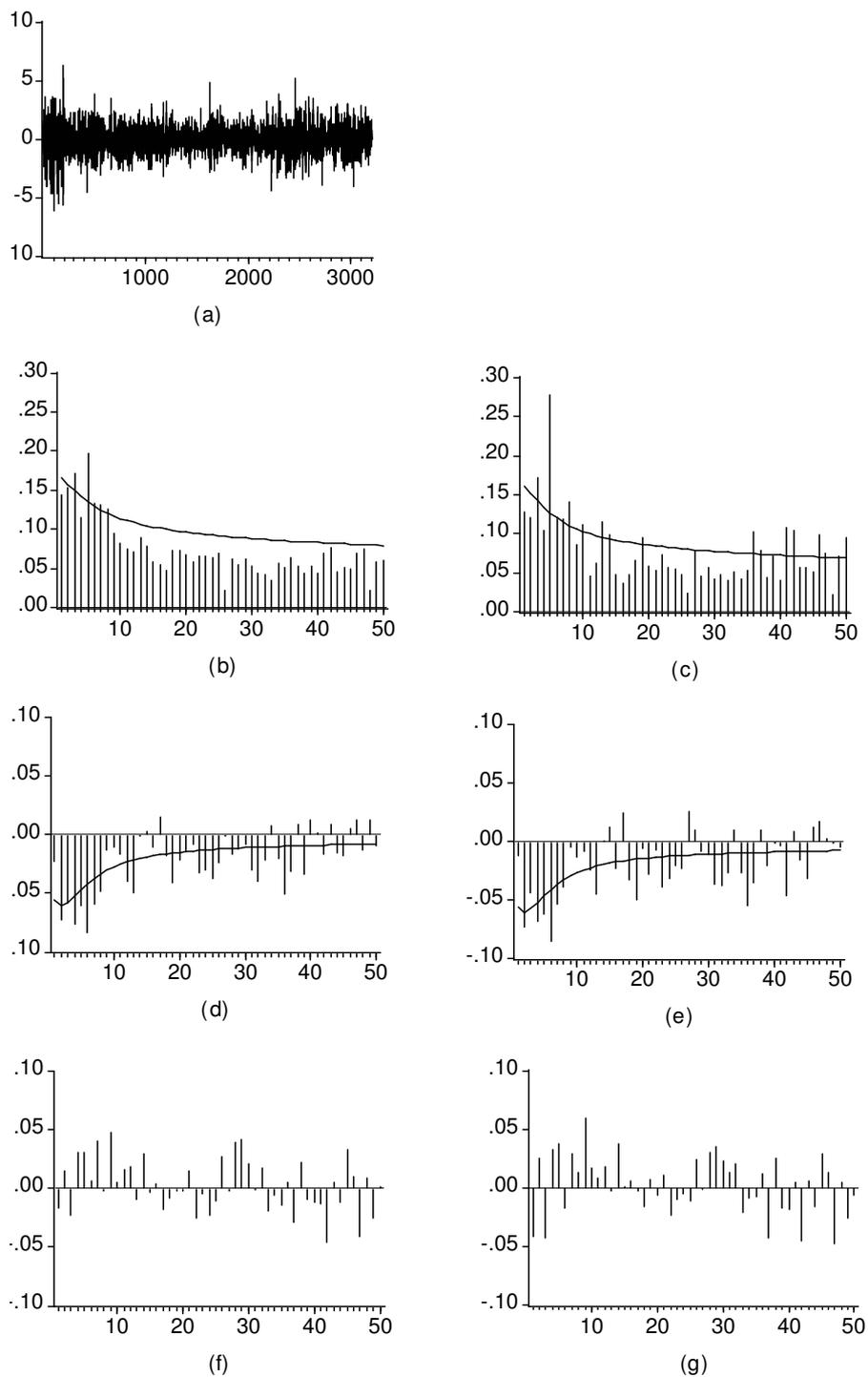


Figura 10: (a) Serie generada por el modelo A-LMARSV(1) con parámetros  $\sigma_*^2 = 1$ ,  $\phi = 0,7$ ,  $d = 0,4$ ,  $\sigma_h^2 = 0,5$ ,  $\delta = -0,5$  y errores Normales (b) correlaciones teóricas y muestrales de  $|y_t|$  y (c)  $y_t^2$  (d) correlaciones cruzadas entre  $y_t$  y  $|y_{t+k}|$ , (e) entre  $y_t$  y  $y_{t+k}^2$ , (f) entre  $y_t$  y  $|y_{t-k}|$ , (g) entre  $y_t$  y  $y_{t-k}^2$ .

## Referencias

1. An, L. y S.E. Ahmed (2008): Improving the Performance of Kurtosis Estimator. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52, 2669-2681.
2. Andersen, T.G. (1994): Stochastic Autoregressive Volatility: a Framework for Volatility Modeling. *Mathematical Finance*, 4, 75-102.
3. Andersen, T.G. y B.E. Sørensen (1996): GMM Estimation of a Stochastic Volatility Model: A Monte Carlo Study. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, 328-352.
4. Andersen, T.G., T. Bollerslev, F.X. Diebold y H. Ebens (2001): The Distribution of Realized Stock Return Volatility. *Journal of Financial Economics* 61, 43-76.
5. Andersen, T.G., T. Bollerslev, F.X. Diebold y P. Labys (2001): The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility. *Journal of the American Statistical Association* 96, 42-55.
6. Andersen, T.G., T. Bollerslev, F.X. Diebold y P. Labys (2003): Modelling and Forecasting Volatility. *Econometrica* 71, 579-625.
7. Areal, N.M.P.C. y S.J. Taylor (2002): The Realized Volatility of FTSE-100 Future Prices. *Journal of Futures Markets* 22, 627-648.
8. Arteche, J. (2004): Gaussian Semiparametric Estimation in Long Memory in Stochastic Volatility and Signal Plus Noise Models. *Journal of Econometrics*, 119, 131-154.
9. Arteche, J. (2006): Semiparametric Estimation in Perturbed Long Memory Series. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 2118-2141.
10. Asai, M. (2008): Autoregressive Stochastic Volatility Models with Heavy-Tailed Distributions: A Comparison with Multifactor Volatility Models. *Journal of Empirical Finance*, 15, 332-341.
11. Asai, M. y M. McAleer (2005): Dynamic Asymmetric Leverage in Stochastic Volatility Models. *Econometric Reviews*, 24, 317-332.
12. Bai, J. y S. Ng (2005) Tests for Skewness, Kurtosis and Normality For Time Series Data. *Journal of Business & Economic Statistics*, 23(1), 49-60.
13. Bartolucci, F. y G. De Luca (2003): Likelihood-Based Inference for Asymmetric Stochastic Volatility Models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 42(3), 445-449.

14. Basak, G.K., N.H. Chan y W. Palma (2001): On the Approximation of Long Memory Processes by an Arma Model. *Journal of Forecasting*, 20, 367-389.
15. Bauwens, L. y J.V.K. Rombouts (2004): Econometrics. En *Gentle, J.E., W. Härdle y Y. Mori (eds.), Handbook of Computational Statistics*, Springer, Nueva York.
16. Bertelli, S. y M. Caporin (2002): A Note on Calculating Autocovariances of Long-Memory Processes. *Journal of Time Series Analysis*, 23(5), 503-508.
17. Black, F. (1976): Studies of Stock Price Volatility Changes. *Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economic Statistics, American Statistical Society*, 177-181.
18. Bollerslev, T. (1986): Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 51, 307-327.
19. Bontemps, C. y N. Meddahi (2005): Testing Normality: A Gmm Approach. *Journal of Econometrics*, 124, 149-186.
20. Bos, C. y N.G. Shephard (2006): Inference for Adaptive Time Series Models: Stochastic Volatility and Conditionally Gaussian State Space Form. *Econometric Reviews*, 25(2-3), 219-244.
21. Breidt, F.J. y A.L. Carriquiry (1996): Improved Quasi-Maximum Likelihood Estimation for Stochastic Volatility. En *Zellner, A., y J.S. Lee (eds.), Modelling and Prediction: Honoring Seymour Geisel*, Springer, Nueva York.
22. Breidt, F. J., N. Crato, y P. de Lima (1998): The Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility. *Journal of Econometrics*, 83, 325-348.
23. Brockwell, A.E. (2006): Likelihood-Based Analysis of a Class of Generalized Long-Memory Time Series Models. *Journal of Time Series Analysis*, 28(3), 386-407.
24. Broto, C. y E. Ruiz (2004): Estimation Methods for Stochastic Volatility Models: A Survey. *Journal of Economic Surveys*, 18(5), 613-649.
25. Carnero, M.A., D. Peña, y E. Ruiz (2004): Persistence and Kurtosis in Garch and Stochastic Volatility Models. *Journal of Financial Econometrics*, 2, 319-342.
26. Carter, C. y R. Kohn (1997): Semiparametric Bayesian Inference for Time Series with Mixed Spectra. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 255-268.
27. Carvalho, C.M. y H.F. Lopes (2007): Simulation-Based Sequential Analysis of Markov Switching Stochastic Volatility Models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 4526-4542.

28. Chan, N.H. y W. Palma (1998): State Space Modeling of Long-Memory Processes. *Annals of Statistics*, 26, 719-40.
29. Chan, N.H. y G. Petris (2000): Long Memory Stochastic Volatility: A Bayesian Approach. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 29, 1367-1378.
30. Chen, W.W. y R.S. Deo (2006): Estimation of Mis-Specified Long-Memory Models. *Journal of Econometrics*, 134, 257-281.
31. Chen, Y.-T. y C.-C. Lin (2008): On the Robustness of Symmetry Tests for Stock Returns. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 12(2).
32. Chen, C.W.S., R. Gerlach y M. So (2006): Comparison of Non-Nested Asymmetric Heteroscedastic Models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 2164-2178.
33. Chen, W.W., C.M. Hurvich y Y. Lu (2006): On the Correlation Matrix of the Discrete Fourier Transform and the Fast Solution of Large Toeplitz Systems for Long-Memory Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 101, 812-822.
34. Chib, S., F. Nardari y N. Shephard (2002): Markov Chain Monte Carlo Methods for Stochastic Volatility Models. *Journal of Econometrics*, 108, 281-316 .
35. Cipollini, A. y G. Kapetanios (2008): A Stochastic Factor Model for Large Datasets and an Application to S&P Data. *Economic Letters*, forthcoming.
36. Crato, N. y B. Ray (2002): Semi-Parametric Smoothing Estimators of Long-Memory Processes with Added Noise. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 105, 283-297.
37. Dacorogna, M.M., R. Gencay, U. Muller, R.B. Olsen y O.V. Pictet (2001): *An Introduction to High-Frequency Finance*, Academic Press, San Diego.
38. Dalla, V., L. Giraitis y J. Hidalgo (2005): Consistent Estimation of the Memory Parameter for Non-Linear Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, 27(2), 211-251.
39. Danielsson, J. (1994): Stochastic Volatility in Asset Prices: Estimation with Simulated Maximum Likelihood. *Journal of Econometrics*, 61, 375-400.
40. Davis, R.A. y G. Rodríguez-Yam (2005): Estimation for State-Space Models Based on a Likelihood Approximation. *Statistica Sinica*, 15, 381-406.
41. Demos, A. (2002): Moments and Dynamic Structure of a Time-Varying Parameter Stochastic Volatility in Mean Model. *Econometrics Journal*, 5, 345-357.

42. Deo, R. (1995): On GMM and QML Estimation for the Long Memory Stochastic Volatility Model, WP.
43. Deo, R.S. y C.M. Hurvich (2001): On the Log Periodogram Regression Estimator of the Memory Parameter in Long Memory Stochastic Volatility Models. *Econometric Theory*, 17, 686-710.
44. Deo, R.S. y C. M. Hurvich (2003): Estimation of Long Memory in Volatility. En *Doukhan, P., G. Oppenheim y M.S. Taqqu (eds.), Theory and Applications of Long-Range Dependence*, Birkhäuser, Boston.
45. Deo, R.S., C. Hurvich y Y. Lu (2006): Forecasting Realized Volatility Using a Long-Memory Stochastic Volatility Model: Estimation, Prediction and Seasonal Adjustment. *Journal of Econometrics*, 131, 29-58.
46. Diebold, F.X. (1988): *Modelling of Exchange Rate Dynamics*, Springer Verlag, Nueva York.
47. Ding, Z., C.W.J. Granger and R.F. Engle (1993): A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance* 1, 83-106.
48. Durham, B.D. (2006): Monte Carlo Methods for Estimating, Smoothing, and Filtering One- and Two-Factor Stochastic Volatility Models. *Journal of Econometrics*, 133, 273-305.
49. Durham, B.D. (2007): SV mixture Models with Application to S&P500 Index Returns. *Journal of Financial Economics*, 85, 822-856.
50. Eberlein, E., J. Kallsen y J. Kristen (2003): Risk Management Based on Stochastic Volatility. *Journal of Risk*, 5, 19-44.
51. Engle, R.F. (1982): Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.
52. Ferraz, R.O. y L.K. Hotta (2007): Quasi-Maximum Likelihood Estimator of Long Memory Stochastic Volatility Models. *Brazilian Review of Econometrics*, 27(2), 225-233.
53. Fiorentini, G., E. Sentana y G. Calzolari (2004): On the Validity of the Jarque-Bera Normality Test in Conditionally Heteroskedastic Dynamic Regression Models. *Economics Letters*, 83, 307-312.

54. Friedman, M. y L. Harris (1998): A Maximum Likelihood Approach for Non-Gaussian Stochastic Volatility Models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 16, 284-291.
55. Fuller, W.A. (1996): *Introduction to Statistical Time Series*, 2<sup>a</sup> ed., Wiley, Nueva York.
56. Gallant, A.R. y G. Tauchen (1996): Which Moments to Match?. *Econometric Theory*, 12, 657-681.
57. Gallant, A.R., Hsieh, D. y Tauchen, G. (1997): Estimation Of Stochastic Volatility Models with Diagnostics. *Journal of Econometrics*, 81, 159-192.
58. Geweke, J. y C.M. Porter-Hudak (1993): The Estimation and Application of Long-Memory Time Series Models. *Journal of Time Series Analysis*, 4, 221-238.
59. Ghysels, E., A.C. Harvey y E. Renault (1996): Stochastic Volatility. En *C.R.Rao y G.S. Maddala (Eds.), Statistical Methods in Finance*, 119 –191, North-Holland, Amsterdam.
60. Giot, P. y S. Laurent (2003): Value-at-Risk for Long and Short Positions. *Journal of Applied Econometrics*, 18, 641-663.
61. Gouriéroux, C., Monfort and E. Renault (1993): Indirect Inference. *Journal of Applied Econometrics*, 8, 85-118.
62. Harvey, A. C. (1998): Long-Memory in Stochastic Volatility. En *J. Knight y S.E. Satchell (Eds.), Forecasting Volatility in Financial Markets*, Butterworth-Heinemann, London.
63. Harvey, A.C. y N.G. Shephard (1996): Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model for Asset Returns. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, 429-434.
64. Harvey, A.C. y M. Streibel (1998): Testing for a Slowly Changing Level with Special Reference to Stochastic Volatility. *Journal of Econometrics*, 87, 167-189.
65. Harvey, A.C., E. Ruiz y N.G. Shephard (1994): Multivariate Stochastic Variance models. *Review of Economic Studies*, 61, 247-264.
66. Hosking, J.R.M. (1981): Fractional Differencing. *Biometrika*, 68, 165-176.
67. Hull, J. y A. White (1987): The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 42, 281-300.

68. Hurvich, C.M. y B.K. Ray (2003): The Local Whittle Estimator of Long-Memory Stochastic Volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 1, 445-470.
69. Hurvich, C.M. y P. Soulier (2008): Stochastic Volatility Models with Long Memory. *Handbook of Financial Time Series*, Springer, New York.
70. Hurvich, C.M., E. Moulines y P. Soulier (2005): Estimating Long Memory in Volatility. *Econometrica*, 73, 1283-1328.
71. Hurvich, C.M., E. Moulines y P. Soulier (2008): Corrigendum to "Estimating Long Memory in Volatility". *Econometrica*, 76(3), 661-662.
72. Jacquier, E., N.G. Polson y P.E. Rossi (1994): Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models (con discusión). *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 371-417.
73. Jacquier, E., N.G. Polson y P.E. Rossi (2004): Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models with Fat-Tails and Correlated Errors. *Journal of Econometrics*, 122, 185-212.
74. Jensen, M.J. (2004): Semiparametric Bayesian Inference of Long-Memory Stochastic Volatility Models. *Journal of Time Series Analysis*, 25(6), 895-922.
75. Jones, C. (2003): The Dynamics of Stochastic Volatility: Evidence from Underlying and Option Markets. *Journal of Econometrics*, 116, 181-224.
76. Jungbacker, B. y S.J. Koopman (2007): Monte Carlo Estimation for Nonlinear Non-Gaussian State Space Models. *Biometrika*, 94(4), 827-839.
77. Kawakatsu, H. (2007a): Numerical integration-Based Gaussian Mixture Filters for Maximum Likelihood Estimation of Asymmetric Stochastic Volatility Models. *Econometrics Journal*, 10, 342-358.
78. Kawakatsu, H. (2007b): Specification and Estimation of Discrete Time Quadratic Stochastic Volatility Models. *Journal of Empirical Finance*, 14, 424-442.
79. Kiefer, N.M. y M. Salmon (1983): Testing Normality in Econometric Models. *Economics Letters*, 11, 123-127.
80. Kim, J. y D. Stoffer (2008): Fitting Stochastic Volatility Models in The Presence of Irregular Sampling Via Particle Methods and the Em Algorithm. *Journal of Time Series Analysis*, 29(5), 811-833.
81. Kim, S., N. Shephard y S. Chib (1998): Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with Arch Models. *Review of Economic Studies*, 65, 361-393.

82. Kim, T.-H. y H. White (2004): On More Robust Estimation of Skewness and Kurtosis. *Finance Research Letters*, 1, 56-73.
83. Knight J.L., S.E. Satchell y J. Yu (2002): Estimation of the Stochastic Volatility Model by the Empirical Characteristic Function Method. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 44(3), 319-335.
84. Koopman, S.J. y E.H. Uspensky (2002): The Stochastic Volatility in Mean Model: Empirical Evidence from International Stock Markets. *Journal of Applied Econometrics*, 17, 667-689.
85. Liesenfeld, R. y R.C. Jung (2000): Stochastic Volatility Models: Conditional Normality versus Heavy-Tailed Distributions, *Journal of Applied Econometrics*, 15, 137-160.
86. Liesenfeld, R. y J.F. Richard (2003): Univariate and Multivariate Stochastic Volatility Models: Estimation and Diagnostics, *Journal of Empirical Finance*, 10, 505-531.
87. Liesenfeld, R. y J.-F. Richard (2009, en prensa): Improving MCMC Using Efficient Importance Sampling. *Computational Statistics & Data Analysis*.
88. Mahieu, R. y P. Schotman (1998): An empirical Application of Stochastic Volatility Models. *Journal of Applied Econometrics*, 13, 333-360.
89. Maravall, A. (1987): Minimum Mean Squared Error Estimation of the Noise in Unobserved Components Models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 5, 115-120.
90. Marmol F., A. Pérez y J.C. Reboredo (2008): A Computationally Efficient Method for Obtaining Smoothed Volatilities in Long-Memory Stochastic Volatility Models. *Anales de Estudios Económicos y Empresariales*, XVII, 61-81.
91. Melino, A. y S.M. Turnbull (1990): Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility. *Journal of Econometrics*, 45, 239-265.
92. Meyer, R., D.A. Fournier y A. Berg (2003): Stochastic Volatility: Bayesian Computation Using Automatic Differentiation and the Extended Kalman Filter. *Econometrics Journal*, 6, 408-420.
93. Monfardini, C. (1998): Estimating Stochastic Volatility Models through Indirect Inference. *Econometrics Journal*, 1, 113-128.

94. Muñoz, M.P., M.D. Marquez y L.M. Acosta (2007): Forecasting Volatility by Means of Threshold Models. *Journal of Forecasting*, 26, 343-363.
95. Omori, Y. y T. Watanabe (2007): Block Sampler and Posterior Mode Estimation for Asymmetric Stochastic Volatility Models. *Computational Statistics & Data Analysis*, doi: 10.1016/j.csda.2007.09.001
96. Omori, Y., S. Chib, N.G. Shephard y J. Nakajima (2007): Stochastic Volatility with Leverage: Fast and Efficient Likelihood Inference. *Journal of Econometrics*, 140, 425-449.
97. Palma, W. y M. Zevallos (2004): Analysis of the Correlation Structure of Square Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, 25, 529-550.
98. Pérez, A. y E. Ruiz (2001): Finite Sample Properties of a Qml Estimator of Stochastic Volatility Models with Long Memory. *Economics Letters*, 70, 157-164.
99. Pérez, A. y E. Ruiz (2002): Modelos de Memoria Larga en Series Temporales Económicas y Financieras. *Investigaciones Económicas*, 26(3), 359-410.
100. Pérez, A. y E. Ruiz (2003): Properties of the Sample Autocorrelations of Non-Linear Transformations in Long-Memory Stochastic Volatility Models. *Journal of Financial Econometrics*, 1(3), 420-444.
101. Pérez, A. y E. Ruiz (2008): A New Specification Tool for Stochastic Volatility Models Based on the Taylor Effect. *Manuscrito, Universidad Carlos III de Madrid*.
102. Pérez, A., E. Ruiz y H. Veiga (2008): A Note on the Properties of Power Transformed Returns in A-Lmsv Models: Corrigendum to Ruiz and Veiga (2008). *Manuscrito*.
103. Pong S.Y., M.B. Shalton, S.J. Taylor y X. Xu (2004): Forecasting Currency Volatility: A Comparison of Implied Volatilities and AR(FI)MA Models. *Journal of Banking and Finance*, 28(2), 2541-2563.
104. Premaratne, G. y A. Bera (2005): A Test for Symmetry with Leptokurtic Financial Data. *Journal of Financial Econometrics*, 3(2), 169-187.
105. Primiceri, C. (2005): Time Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy. *Review of Economic Studies*, 72, 821-852.
106. Raggi, D. y S. Bordignon (2006): Comparing Stochastic Volatility Models through Monte Carlo Simulations. *Computational Statistics & Data Analysis*, 50, 1678-1699.

107. Richard, J.-F. y W. Zhang (2007): Efficient High-Dimensional Importance Sampling. *Journal of Econometrics*, 141, 1385-1411.
108. Robinson, P.M. (1995): Gaussian Semiparametric Estimation of Long Range Dependence. *Annals of Statistics*, 23, 1630-1661.
109. Ruiz, E. (1994a): Quasi-Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models. *Journal of Econometrics*, 63, 289-306.
110. Ruiz, E. (1994b): Modelos para Series Temporales Heterocedásticas. *Cuadernos Económicos de ICE*, 56, 73-108.
111. Ruiz, E. y H. Veiga (2008): Modelling Long-Memory Volatilities with Leverage Effect: A-LMSV versus FIEGARCH. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(6), 2846-2862.
112. Sandmann, G. y S. Koopman (1998): Estimation of Stochastic Volatility models via Monte Carlo Maximum Likelihood. *Journal of Econometrics*, 87, 271-301.
113. Shephard, N.G. (1996): Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility. En *Cox, D.R., D.V. Hinkley y O. E. Barndorff-Nielsen (eds.) Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*, Monographs on Statistics and Applied Probability 65, Chapman and Hall, Londres.
114. Shephard, N.G. y S. Kim (1994): Comment on E. Jacquier, N. Polson and E. Rossi. *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 406-410.
115. Shephard, N. y M.K. Pitt (1997): Likelihood Analysis of Non-Gaussian Parameter-Driven Models. *Biometrika*, 84, 653-667.
116. So, M.K.P. (2002): Bayesian Analysis of Long Memory Stochastic Volatility Models. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, 64(B), 1, 1-10.
117. So, M.K.P., K. Lam y W.K. Li (1997): An Empirical Study of Volatility in Seven Southeast Asian Stock Markets Using ARV Models. *Journal of Business Finance & Accounting*, 24(2), 261-275.
118. So, M.K.P., K. Lam y W.K. Li (1998): A Stochastic Volatility Model with Markov Switching. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16(2), 244-253.
119. So, M.K.P., W.K. Li y K. Lam (1997): Multivariate Modelling of the Autoregressive Random Variance Process. *Journal of Time Series Analysis*, 18(4), 429-446.
120. So, M.K.P., W.K. Li y K. Lam (2002): A Threshold Stochastic Volatility Model. *Journal of Forecasting*, 21, 473-500.

121. Stoffer, D. y K. Wall (2004): Resampling in State Space Models. En *Harvey, A.C., S.J. Koopman y N.G. Shephard (eds.), State Space and Unobserved Components Models: Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
122. Strickland, C.M., G.M. Martin y C.S. Forbes (2007): Parameterisation and Efficient Mcmc Estimation of Non-Gaussian State Space Models. *Computational Statistics & Data Analysis*, doi: 10.1016/j.csda.2007.10.010.
123. Stroud, J.R., P. Muller y N.G. Polson (2003): Nonlinear State-Space Models with State-Dependent Variances. *Journal of the American Statistical Association*, 98, 377-386.
124. Sun, Y. y P.C.B. Phillips (2003): Nonlinear Log-Periodogram Regression for Perturbed Fractional Processes. *Journal of Econometrics*, 115, 355-389.
125. Taylor, S.J. (1982): Financial Returns Modelled by the Product of Two Stochastic Processes - A Study of Daily Sugar Prices 1961-78. En *O.D. Anderson (ed.), Time Series Analysis: Theory and Practice*, 1, North-Holland, Amsterdam, 203-226.
126. Taylor, S.J. (1986): *Modelling Financial Time Series*, Wiley, New York.
127. Taylor, S.J. (1994): Modelling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study. *Mathematical Finance*, 4, 183-204.
128. Taylor, S.J. (2005): *Asset Price Dynamics, Volatility and Prediction*, Princeton University Press.
129. Thomakos, D.D. y T. Wang (2003): Realized Volatility in the Future Markets. *Journal of Empirical Finance*, 10, 321-353.
130. Watanabe, T. (1999): A Non-Linear Filtering Approach to Stochastic Volatility Models with an Application to Daily Stock Returns. *Journal of Applied Econometrics*, 14, 101-121.
131. Watanabe, T. y Y. Omori (2004) A Multi-Move Sampler for Estimating Non-Gaussian Time Series Models: Comments on Shephard and Pitt, 1997. *Biometrika*, 91, 246-248.
132. Wright, J.H. (1999): A New Estimator of the Fractionally Integrated Stochastic Volatility Model. *Economics Letters*, 63, 295-303.
133. Yu, J. (2002): Forecasting Volatility in the New Zealand Stock Market. *Applied Financial Economics*, 19, 351-372.

134. Yu, J. (2005): On Leverage in a Stochastic Volatility Model. *Journal of Econometrics*, 127, 165-178.
135. Yu, J. y Z. Yang (2006): A Class of Nonlinear Stochastic Volatility Models. *Fifth International Conference on Computational Intelligence in Economics and Finance*, forthcoming.
136. Yu, J., Z. Yang y X. Zhang (2006): A Class of Nonlinear Stochastic Volatility Models and its Implications for Pricing Currency Options. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 2218-2231.
137. Zaffaroni, P. (2008): Whittle Estimation of Exponential Volatility Models. *Manuscript*.
138. Zhang, X. y M.L. King (2008): Box-Cox Stochastic Volatility Models with Heavy-Tails and Correlated Errors. *Journal of Empirical Finance*, 15, 549-566.