

ELASTICIDAD

Juan Carlos del Caño Sánchez
Dr. Ingeniero Industrial
Profesor titular

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Valladolid

Capítulo 1.- Introducción
Capítulo 2.- Tensión
Capítulo 3.- Deformación
Capítulo 4.- Ley de Comportamiento
Capítulo 5.- Ecuaciones y Teoremas de la Elasticidad
Capítulo 6.- Estados Elásticos Bidimensionales
Capítulo 7.- Introducción a los Métodos Aproximados

ELASTICIDAD

Juan Carlos del Caño Sánchez
Dr. Ingeniero Industrial
Profesor titular

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Valladolid

Capítulo 1.- Introducción
Capítulo 2.- Tensión
Capítulo 3.- Deformación
Capítulo 4.- Ley de Comportamiento
Capítulo 5.- Ecuaciones y Teoremas de la Elasticidad
Capítulo 6.- Estados Elásticos Bidimensionales
Capítulo 7.- Introducción a los Métodos Aproximados

Capítulo 1

Introducción.

En el estudio de la Teoría de la Elasticidad, al igual que en el estudio de cualquier otra materia, es conveniente comenzar por establecer cuál será el ámbito de aplicación, las hipótesis básicas, y las limitaciones o posibles extensiones del modelo teórico que nos disponemos a desarrollar. Es además particularmente necesario en este caso presentar la notación que se utilizará, y algunos conceptos matemáticos que el lector puede no conocer. Todo ello constituye un material idóneo para un capítulo de introducción como el presente.

1.1.- Objeto de la Teoría de la Elasticidad.

La Mecánica Racional se ocupa típicamente del estudio del punto material y del sólido rígido. Estos dos conceptos son abstracciones -entes creados por la razón humana-, que han mostrado ser sumamente útiles para el mejor entendimiento de muchos aspectos del comportamiento de los sólidos reales. Sin embargo, éstos siempre se deforman bajo la acción de las cargas que les son aplicadas, existiendo un gran número de aplicaciones prácticas en cuyo estudio es necesario considerar la deformación, y que en consecuencia requieren herramientas de análisis distintas de las proporcionadas por la Mecánica Racional.

La Teoría de la Elasticidad intenta dar respuesta al requerimiento anterior, siendo su propósito describir el comportamiento del sólido deformable desde el punto de vista macroscópico propio de la mecánica de los medios continuos. El modelo matemático que se construye para describir el comportamiento del sólido, que en principio puede tener geometría y cargas cualesquiera, tiene como incógnitas fundamentales los desplazamientos de los puntos del sólido. Desde el punto de vista práctico, resulta además importante predecir si el sólido se romperá (o también si su comportamiento se alejará significativamente de las hipótesis del modelo matemático), lo que le impediría desempeñar la misión resistente para la que fue concebido. Finalmente, desearemos realizar el diseño del sólido resistente de forma que resulte económico, o conveniente en algún otro sentido, manteniéndose las características funcionales requeridas.

La Resistencia de Materiales se ocupa del estudio de los sólidos deformables que presentan ciertas peculiaridades geométricas (típicamente forma de barra), bajo las mismas hipótesis generales y con los mismos propósitos que la Teoría de la Elasticidad. Es del mayor interés el estudio pormenorizado de las simplificaciones que estas peculiaridades geométricas permiten, dado que la inmensa mayoría de los elementos resistentes que se diseñan tienen forma de barra (una dimensión espacial es mucho mayor que las otras dos), o forma de placa (una dimensión espacial es mucho menor que

las otras dos). La frontera entre la Teoría de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales es por tanto imprecisa, y el estudio de ciertos tipos de problemas en uno u otro contexto es en muchos casos una cuestión de tradición histórica.

En el establecimiento de los principios básicos de la Teoría de la Elasticidad cabe destacar las aportaciones fundamentales de A.L. Cauchy (1789-1857) y de L.M.H. Navier (1785-1836). Desde entonces han sido muchas las técnicas matemáticas que se han desarrollado sobre esas mismas bases para estudiar nuevos y cada vez más complejos problemas, como el comportamiento de materiales para construcción y de materiales especiales, la propagación de grietas, el contacto entre sólidos, el acoplamiento de fenómenos elásticos y térmicos, y la interacción de un sólido elástico con un fluido circundante, entre otros muchos. La consideración o no de diversos efectos (dinámicos, temperatura,...), o de diversas hipótesis (respecto del tipo de respuesta del material a las cargas, de la magnitud de los movimientos y de los cambios de forma,...), conduce a complicaciones o simplificaciones en el modelo matemático.

Este texto pretende introducir al lector en los aspectos elementales de la Teoría de la Elasticidad, proporcionándole información adecuada para la posterior profundización en aspectos más específicos de la mecánica de sólidos, que no serán tratados aquí.

1.2.- Hipótesis básicas.

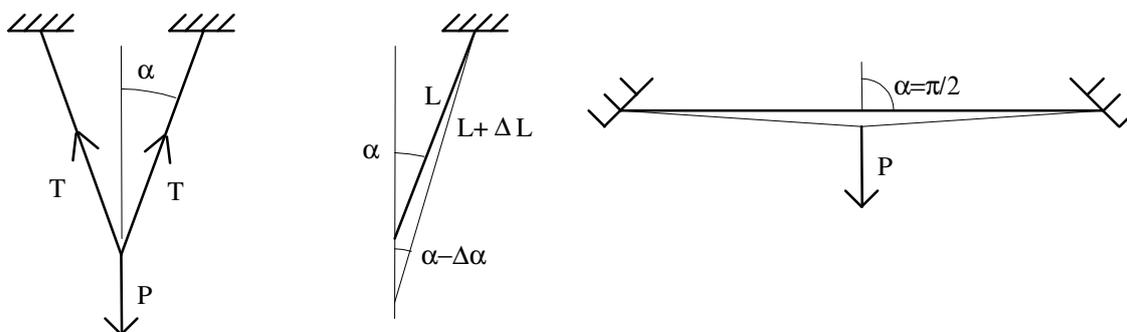
Adoptaremos en nuestro estudio las hipótesis más simplificativas que pueden considerarse en mecánica de sólidos. Estas hipótesis se enumeran a continuación.

- 1.-Homogeneidad: cualquier elemento de volumen del sólido tendrá idénticas propiedades físicas.
- 2.-Isotropía: las propiedades físicas del material no dependerán de la dirección en que estas sean observadas o medidas.
- 3.-Ausencia de efectos dinámicos: las cargas son aplicadas con lentitud, lo que produce una evolución lenta de desplazamientos que permite despreñar los llamados efectos de inercia. Como consecuencia, el equilibrio estático de cualquier porción del sólido debe satisfacerse en cualquier instante durante el proceso de carga.
- 4.-Comportamiento elástico del material: el sólido recupera su geometría inicial cuando cesa la aplicación de las cargas.
- 5.-Comportamiento lineal del material a nivel local. Consiste en lo siguiente: imaginemos aislada una pequeña porción de sólido (un diferencial de volumen), que está sometida a idénticas acciones a las que el resto del sólido ejercía sobre ella. Si multiplicamos el valor de esas acciones por un cierto número, el alargamiento o acortamiento que se obtiene para cualquier línea contenida en el diferencial de volumen quedará multiplicado por el mismo número.

6.-Los desplazamientos y sus derivadas espaciales primeras (directamente relacionadas con las magnitudes que más tarde llamaremos deformaciones) son pequeños. En muchos casos esto posibilita el planteamiento del equilibrio en la configuración indeformada con un error despreciable, dado que normalmente se mantendrán sin cambios significativos las líneas de acción de las fuerzas, y los demás elementos que intervienen en el planteamiento del equilibrio estático.

Es de gran interés saber si en un problema dado los desplazamientos y deformaciones guardarán una relación lineal con el nivel de cargas exteriores, porque en este caso resultará aplicable el *principio de superposición de efectos*, del que haremos uso ocasional en los capítulos siguientes. Las hipótesis anteriores, significativamente las de comportamiento elástico lineal del material, junto con la de que los desplazamientos y sus derivadas son pequeños, conllevan muy frecuentemente la relación lineal entre las cargas y los desplazamientos o deformaciones, pero no siempre es así.

Para identificar las eventuales excepciones, podemos enunciar esta sencilla regla: cualquier problema en que resulte necesario plantear el equilibrio en la configuración deformada presentará en general relaciones no lineales entre las cargas aplicadas y los desplazamientos (o deformaciones). Y ello aunque el material conserve comportamiento lineal a nivel local, y los desplazamientos y deformaciones sean pequeños. Frecuentemente se denomina "*no linealidad geométrica*" a este tipo de no linealidad, de la que el fenómeno de inestabilidad de barras comprimidas, que suele estudiarse en el contexto de la Resistencia de Materiales, es un ejemplo de gran interés práctico. Para ilustrar ahora el efecto de no linealidad geométrica es preferible el ejemplo más sencillo que se muestra en las figuras 1.1.



Figuras 1.1.- Ejemplo de problema con no linealidad geométrica

Se trata de un cable sujeto por sus extremos y con una fuerza P aplicada en su centro, según se indica. En el caso sencillo de cables, el comportamiento lineal del material a nivel local, que asumiremos en nuestro análisis, conduce a:

$$T = K \Delta L$$

siendo T la fuerza en el cable, ΔL su incremento de longitud, y K una constante que depende de las características del cable. Si planteamos el equilibrio en la configuración indeformada, obtenemos que el alargamiento de cada mitad del cable es $\Delta L = P/(2K \cos \alpha)$, lo que constituye una relación lineal con P. Sin embargo, el equilibrio en la configuración deformada -la única que realmente existe-, viene dado por:

$$P = 2T \cos(\alpha - \Delta\alpha) = 2K \Delta L \cos(\alpha - \Delta\alpha)$$

En donde podemos eliminar $\Delta\alpha$ utilizando una relación geométrica, como por ejemplo:

$$L \sin \alpha = (L + \Delta L) \sin(\alpha - \Delta\alpha)$$

Resultando que:

$$\frac{P}{2KL} = \frac{\Delta L}{L} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{1 + \Delta L/L} \right)^2}$$

Lo que claramente supone una relación no lineal entre P e ΔL , a pesar de haberse supuesto comportamiento lineal del material. Apreciamos sin embargo que la condición de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos $\Delta L/L \ll 1$ hace degenerar a la ecuación anterior hacia la misma relación lineal obtenida al plantear el equilibrio en la configuración indeformada. Pero esto no es así en todos los casos, ya que cuando $\alpha = \pi/2$, la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{P}{2KL} = \frac{\sqrt{2 + \Delta L/L}}{1 + \Delta L/L} (\Delta L/L)^{3/2}$$

que es una relación no lineal aún en el caso en que $\Delta L/L \ll 1$. Como indica la tercera de las figuras 1.1, en el caso de $\alpha = \pi/2$, el sistema no puede alcanzar el equilibrio sin que varíe α , por lo que no es posible plantear el equilibrio en la configuración indeformada.

Del sencillo ejemplo anterior podemos extraer la enseñanza importante de que la linealidad del comportamiento del material junto con que los desplazamientos y deformaciones sean pequeños, no son condiciones suficientes para asegurar la existencia de una relación lineal entre cargas y deformaciones. Tal como habíamos anticipado, si el cambio de geometría, aunque sea pequeño, juega un papel importante en el equilibrio del sólido, puede darse el efecto de *no linealidad geométrica*. A falta de contraejemplos conocidos, consideraremos suficiente para que exista relación lineal entre cargas y deformaciones el que se cumplan las hipótesis 3, 4, 5 y 6, junto con el que el planteamiento del equilibrio en la configuración indeformada suponga un error despreciable. Desafortunadamente, la única manera formalmente correcta de justificar si esto último se dará o no en un problema dado, es resolviendo el problema en la configuración deformada y procediendo después a realizar las simplificaciones oportunas. En la gran mayoría de los casos nos ahorraremos este esfuerzo, haciendo en su lugar una apreciación física *a priori* acerca de si los cambios geométricos intervendrán o no significativamente en el planteamiento del equilibrio del sólido.

Merece la pena apuntar finalmente que aunque las hipótesis que adoptamos son las más simplificativas que cabe plantear en el estudio del sólido deformable, el modelo matemático que construiremos en base a las mismas será útil para muchos propósitos prácticos, resultando por ejemplo un excelente punto de partida para abordar el estudio de los temas típicos de la Resistencia de Materiales. Indiquemos también en este sentido que los materiales metálicos, y de modo destacado el acero, son en general muy aproximadamente homogéneos e isótropos, presentando comportamiento elástico y

lineal en condiciones habituales de servicio, en las que además los desplazamientos y sus derivadas suelen ser muy pequeños. La Teoría Lineal de la Elasticidad encuentra su campo de aplicación más idóneo cuando se dan estas circunstancias.

1.3.- Preliminares matemáticos.

Notación

Para favorecer la concisión, en el desarrollo de este texto nos apoyaremos en una notación abreviada que es de uso frecuente en la literatura de investigación. La pequeña inversión de tiempo que requiere familiarizarse con ella es ampliamente recompensada en el desarrollo de la teoría general. Utilizaremos tipo de letra **negrita** para notar vectores, y ocasionalmente también para matrices. Para relaciones tipo "sistema de ecuaciones" adoptaremos, por razones de eficiencia, el tipo de notación sistemática que se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

La ecuación anterior puede ser escrita en forma más concisa como

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

La simplificación final en la notación consiste en omitir el símbolo de sumatorio, con lo que en lo sucesivo entenderemos, salvo mención expresa en contrario, que un subíndice que se repite (j en la ecuación 1.2) en un producto de magnitudes (a y x en 1.2), indica un sumatorio que afecta a ese subíndice. Con esta consideración (1.1) queda de la forma:

$$a_{ij} x_j = b_i \quad (1.3)$$

A los subíndices que, como j en la expresión anterior, implican sumatorio, se les llama subíndices mudos, y a los que como i no implican sumatorio se les llama subíndices libres. En cualquier expresión podemos sustituir el símbolo utilizado para un subíndice mudo por otro cualquiera (excepto por los que ya figuren como subíndices en la expresión), sin que se altere su significado. Apréciase que con esta notación el orden en que se escriben los factores es indiferente, contrariamente a lo que ocurre con la notación matricial. También entenderemos que existe sumatorio cuando el subíndice se repita en la misma magnitud; por ejemplo expresaremos la traza de la matriz de coeficientes de (1.1) como:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{ii} \quad (1.4)$$

Sean x_1, x_2, x_3 , unas coordenadas cartesianas (salvo indicación en contrario, asumiremos que los sistemas de coordenadas que utilizamos son cartesianos) que

describen el espacio tridimensional. La derivada parcial de una magnitud, digamos f , respecto de una de las coordenadas, digamos x_1 , será denotada con un subíndice que indica la coordenada respecto de la que se deriva, al que se le antepone una coma. Así por ejemplo $\partial f / \partial x_1 = f_{,1}$. La magnitud a derivar puede a su vez tener subíndices, aplicándose también el convenio de suma. Por ejemplo, la siguiente expresión se abrevia notablemente:

$$\begin{aligned} & x_1(\partial a_{11} / \partial x_1 + \partial a_{12} / \partial x_2 + \partial a_{13} / \partial x_3) + \\ & x_2(\partial a_{21} / \partial x_1 + \partial a_{22} / \partial x_2 + \partial a_{23} / \partial x_3) + \\ & x_3(\partial a_{31} / \partial x_1 + \partial a_{32} / \partial x_2 + \partial a_{33} / \partial x_3) = a_{ij,j} x_i \end{aligned} \quad (1.5)$$

Puede haber varios subíndices tras la coma, lo que indica derivación respecto de cada una de las coordenadas correspondientes, manteniéndose en todo caso el convenio de suma. Por ejemplo el operador Laplaciano se expresa en esta notación mediante un subíndice repetido tras la coma:

$$\nabla^2 f = \partial^2 f / \partial x_1^2 + \partial^2 f / \partial x_2^2 + \partial^2 f / \partial x_3^2 = f_{,jj} \quad (1.6)$$

El convenio de suma no se aplica a sumas de magnitudes (por ejemplo en $f_i + g_i$ no se sobreentiende ningún sumatorio). Nótese que para que se mantenga la asociatividad entre los factores, no debe aparecer mas de dos veces un mismo subíndice de suma en un mismo término (por ejemplo $a_i b_i c_i$ será una expresión sin sentido en nuestro contexto). Salvo indicación en contrario, suele entenderse que el rango de valores de los subíndices coincide con el número de dimensiones del espacio: 1,2 para casos bidimensionales o 1,2,3 para tridimensionales. Se atribuye a Albert Einstein la introducción de la notación con convenio de suma. Esta notación es especialmente conveniente cuando se usa en combinación con el concepto de tensor, que será presentado más tarde.

Existen dos convenciones para las que reservaremos una notación particular: la conocida "delta de Kronecker", y el "símbolo de permutación". La función delta de Kronecker se define mediante:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.7)$$

Teniendo en cuenta el convenio de suma, es inmediato apreciar que $\delta_{ij} b_j = b_i$, por lo que a veces se llama operador de sustitución al delta de Kronecker. Es también inmediato comprobar que $\delta_{ii} = 3$. Por otra parte, definimos el símbolo de permutación como:

$$e_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \quad ; \quad i, j, k = 1 \dots 3 \quad (1.8)$$

en donde no se sobreentiende suma en el miembro derecho, ya que los símbolos no figuran como subíndices. Por sustitución directa se comprueba que:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si uno o más subíndices se repiten} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ no está en la secuencia } 12312 \\ 1 & \text{si } ijk \text{ está en la secuencia } 12312\dots \end{cases} \quad (1.9)$$

El símbolo de permutación y la delta de Kronecker satisfacen la siguiente relación:

$$e_{ijk} e_{ist} = \delta_{js} \delta_{kt} - \delta_{jt} \delta_{ks} \quad (1.10)$$

Mediante el símbolo de permutación es posible expresar en forma concisa algunas operaciones vectoriales de uso frecuente. Sean por ejemplo b_i y c_j las componentes de los vectores \mathbf{b} y \mathbf{c} en una cierta base asociada a un sistema de ejes cartesianos. Puede comprobarse que el producto vectorial $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ tiene como resultado un vector \mathbf{p} cuyas componentes p_k en la misma base vienen dadas por

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad p_k = e_{ijk} b_i c_j = e_{kij} b_i c_j \quad (1.11)$$

Es inmediato comprobar que las componentes r_i del rotacional de un campo vectorial w_i pueden expresarse como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{rot} \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad r_i = e_{ijk} w_{k,j} \quad (1.12)$$

Utilizando la notación indicial se simplifican las demostraciones de muchas propiedades de los campos vectoriales. Por ejemplo, el hecho conocido de que la divergencia del rotacional de un campo vectorial \mathbf{w} es siempre nulo resulta prácticamente inmediato sin más que observar su expresión: $\text{div } \mathbf{rot} \mathbf{w} = (e_{ijk} w_{k,j})_{,i} = e_{ijk} w_{k,j,i}$. Para un valor de k cualquiera, existirán 9 sumandos correspondientes a la variación de i, j , desde 1 hasta 3. De ellos, los tres que tienen $i=j$ se anulan por anularse el símbolo de permutación, y los seis restantes se cancelan por parejas, dado que al intercambiar los valores de i, j , entre sí, se obtienen sumandos idénticos pero con signo cambiado. En efecto: $e_{ijk} = -e_{jik}$; $w_{k,j,i} = w_{k,i,j} \Rightarrow e_{ijk} w_{k,j,i} = -e_{jik} w_{k,i,j}$ (sin convenio de suma). Así:

$$\text{div } \mathbf{rot} \mathbf{w} = e_{ijk} w_{k,j,i} = 0 \quad (1.13)$$

El producto triple de tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, se define como $v = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, y su resultado es un escalar cuyo valor coincide con el volumen del paralelepípedo que definen los tres vectores. Teniendo en cuenta (1.12) y que el producto escalar de dos vectores de componentes p_k y c_k puede expresarse como $p_k c_k$, el triple producto de vectores queda:

$$v = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = e_{ijk} a_i b_j c_k \quad (1.14)$$

Cambio de base

Sea un sistema directo de ejes coordenados cartesianos x_1, x_2, x_3 , que tiene asociada una base de vectores unitarios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, y otro sistema también cartesiano x_1', x_2', x_3' girado respecto del anterior, con vectores asociados $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$, como se indica en la figura 1.2. Aunque un vector representa una entidad física que existe

independientemente de que se defina o no un sistema de ejes coordenados, sus componentes varían con la elección particular del sistema de ejes, resultando distintas representaciones del mismo vector. Así, el vector \mathbf{r} puede ser expresado en función de sus coordenadas en uno u otro sistema de ejes:

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i = x_i' \mathbf{e}_i' \quad (1.15)$$

multiplicando escalarmente la ecuación anterior por \mathbf{e}_k' , y teniendo en cuenta la evidencia de que $\mathbf{e}_i' \mathbf{e}_k' = \delta_{i'k'}$, se llega inmediatamente a:

$$x_k' = a_{k'i'} x_i \quad (1.16)$$

siendo $a_{k'i'} = \mathbf{e}_k' \mathbf{e}_i' = \cos(\mathbf{e}_k', \mathbf{e}_i')$

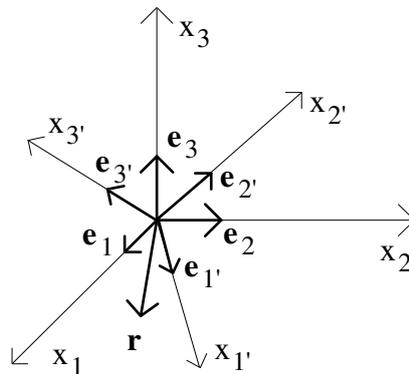


Figura 1.2.- Rotación del sistema de ejes coordenados.

Un desarrollo similar permite demostrar la relación homóloga $x_k = a_{ki'} x_i'$. La relación (1.16) es la ecuación de cambio de base de vectores, expresada en notación indicial. En ocasiones desearemos expresar relaciones como la (1.16) en forma matricial. Para ello basta con ajustarse a la regla de escribir el producto de matrices en el orden que resulta en la expresión de subíndices cuando cada último subíndice de una magnitud coincide con el primero de la siguiente. Como (1.16) ya está escrita en esta forma (el último subíndice de $a_{k'i'}$ y el primero de x_i' coinciden), esta ecuación es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{o simbólicamente} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{a} \mathbf{x} \quad (1.17)$$

Es bien conocido que la matriz \mathbf{a} es ortogonal (su inversa coincide con su traspuesta), por ser la matriz de cambio de base asociada a dos triedros ortogonales directos. De la definición de $a_{i'j'}$ es inmediato que $a_{1'2'} = a_{2'1'}$, etc, lo que no quiere decir que al emplear notación matricial, \mathbf{a} resulte una matriz simétrica. Véase que no lo es:

$$\mathbf{a} = (a_{i'j'}) = \begin{bmatrix} \cos(1'1) & \cos(1'2) & \cos(1'3) \\ \cos(2'1) & \cos(2'2) & \cos(2'3) \\ \cos(3'1) & \cos(3'2) & \cos(3'3) \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Hay que notar que en general el que $z_{ij} = z_{ji}$ sí tiene la implicación de que la matriz asociada a la magnitud \mathbf{z} sea simétrica, siendo $a_k{}'_k$ una excepción debido al especial significado que hemos dado a los subíndices en este caso. Finalmente, derivando (1.16) respecto de x_k se tiene que $x_k{}'_k = a_k{}'_i x_i{}',k = a_k{}'_i \delta_{ik} = a_k{}'_k$. Es decir:

$$a_k{}'_k = x_k{}',k \quad (1.19)$$

Tensores en coordenadas cartesianas

Como veremos, el carácter tensorial (o no tensorial) de una magnitud se establece en base a como se transforman sus componentes frente a cambios de sistemas de coordenadas. Cuando sólo se emplean sistemas de coordenadas cartesianas se habla de tensores en coordenadas cartesianas, como un caso particular respecto de la definición general de tensor, en la que se consideran transformaciones entre sistemas de coordenadas más generales. En lo que sigue se asume que los sistemas de coordenadas utilizados son cartesianos. Las leyes de transformación (de las magnitudes que definiremos como tensores) entre sistemas cartesianos, caracterizan el álgebra de tensores en coordenadas cartesianas, o abreviadamente de tensores cartesianos.

Aunque la concepción de vector como una entidad con módulo y dirección tiene un considerable atractivo físico, vamos a presentar un punto de vista alternativo que tiene la ventaja de ser inmediatamente generalizable. La relación entre las componentes de un vector en dos sistemas -sin prima y con prima-, como los mostrados en la figura 1.2, viene dada por (1.16). Podemos adoptar esta relación como definición de vector, y diremos así que una entidad matemática de tres componentes β_i será un vector sólo si sus componentes se transforman de acuerdo con (1.16). De modo natural podemos plantear la siguiente generalización para objetos matemáticos que tengan más de un subíndice:

$$\beta_{i'j'k'...l'} = a_{i'}{}_i a_{j'}{}_j a_{k'}{}_k \dots a_{l'}{}_l \beta_{ijk...l} \quad (1.20)$$

Si el objeto matemático $\beta_{ijk...l}$ transforma sus componentes en distintos sistemas de ejes cartesianos de acuerdo con (1.20), entonces diremos que es un tensor cartesiano. Llamaremos orden del tensor al número de subíndices que posea. El número de componentes de un tensor es igual a la dimensión del espacio (en general 3) elevado al orden del tensor. Así, un tensor de orden 2 tiene 9 componentes, uno de orden 3 tiene 27 componentes, etc. La generalización anterior se aplica también para orden cero, lo que conduce a un tensor de una sola componente, correspondiéndose con el concepto de escalar, cuya única componente no varía frente a cambios de ejes. Los tensores de orden uno son evidentemente vectores en su concepción usual.

El lector puede identificar como tensores algunas magnitudes que ya conoce. Por ejemplo, los momentos y productos de inercia de un sólido respecto de los ejes coordenados pueden expresarse en forma compacta como:

$$I_{ij} = \int_{\text{Sólido}} x_i x_j dm \quad (1.21)$$

siendo dm un elemento diferencial de masa del sólido. El carácter tensorial de la magnitud I_{ij} se demuestra expresándola respecto de unos ejes girados:

$$I_{i'j'} = \int_{\text{Sólido}} x_{i'} x_{j'} dm = \int_{\text{Sólido}} a_{i'i} a_{j'j} x_i x_j dm = a_{i'i} a_{j'j} \int_{\text{Sólido}} x_i x_j dm = a_{i'i} a_{j'j} I_{ij} \quad (1.22)$$

Otro ejemplo de tensor es el conjunto de las derivadas parciales segundas de una función escalar $f_{,ij}$. En efecto: $f_{,ij} = (f_{,i'} x_{i',i})_{,j} = (f_{,i'} x_{i',i})_{,j'} x_{j',j} = (f_{,i'j'} x_{i',i} + f_{,i'} x_{i',ij'}) x_{j',j}$ (el segundo término del paréntesis contiene una derivada de $a_{i'j'}$, que vale cero *si los sistemas de ejes son ambos cartesianos*) = $a_{i'i'} a_{j'j'} f_{,ij'}$. También tiene carácter tensorial el conjunto de coeficientes c_{ij} que relacionan el desplazamiento u_i de un punto con la fuerza aplicada F_j en el mismo punto o en otro punto (siendo $u_i = c_{ij} F_j$), cuando el sólido presenta relación lineal entre cargas y desplazamientos. Existen en la física muchas magnitudes que se ajustan a la definición formal de tensor, habiéndose indicado anteriormente sólo algunos ejemplos. Por ello es de interés extraer las propiedades matemáticas comunes de este tipo de magnitudes.

Cuando planteamos una ecuación, con tensores o sin ellos, debemos comprobar un primer requisito en relación con la invariabilidad de la forma de las ecuaciones que describen los fenómenos físicos: las leyes de la naturaleza operan independientemente del sistema de coordenadas, el cual se introduce por conveniencia (para poder realizar cálculos en forma numérica). Por lo tanto, *la forma* de una ecuación que pretenda representar a una ley de la naturaleza no debe depender del sistema de coordenadas elegido, ya que si se diese esta dependencia esa "ley" no merecería tal nombre, sino que sería simplemente una relación fortuita o circunstancial.

Las ecuaciones escritas en forma tensorial cumplen en efecto con esta premisa básica de invarianza de forma respecto del sistema de coordenadas. El siguiente teorema expresa la invarianza aludida:

"Sean $B_{ij\dots k}$ y $C_{ij\dots k}$ dos tensores. Si la ecuación tensorial $B_{ij\dots k} = C_{ij\dots k}$ es cierta en un sistema de coordenadas, entonces es también cierta en cualquier otro sistema de coordenadas."

Este teorema puede demostrarse sin dificultad escribiendo la igualdad como la sustracción de ambos tensores igualada a cero, y haciendo uso de la propiedad, que el lector puede a su vez demostrar, de que si las componentes de un tensor son nulas en un sistema de coordenadas, entonces lo son también en cualquier otro sistema de coordenadas.

Como comentario final acerca de la invarianza de forma de las ecuaciones que representan leyes físicas, llamemos la atención sobre el hecho de que el lector probablemente habrá asumido hace años como natural el que las ecuaciones vectoriales que conoce (la segunda ley de Newton, las ecuaciones de equilibrio estático, ...) sean válidas en cualquier sistema de ejes. Esta aceptación sin recelos por parte del estudiante es debida simplemente al claro sentido físico que cabe atribuir tanto a los vectores como a las operaciones entre ellos. Aunque los tensores de orden superior a uno no cuentan en general con una interpretación física tan inmediata, su utilidad para manejar magnitudes

tensoriales es análoga a la utilidad del concepto de vector para manejar las magnitudes vectoriales, que pueden considerarse como un caso particular de tensores.

Operaciones con tensores en coordenadas cartesianas

La suma (o resta) de tensores del mismo orden es un tensor del mismo orden, cuyas componentes son la suma de las componentes correspondientes de los tensores a sumar. La suma de tensores de distinto orden no está definida.

Llamamos producto exterior de dos tensores a su multiplicación cuando ningún subíndice se repite. El resultado es un tensor (demuéstrese) cuyo orden es la suma de los órdenes de los factores. Por ejemplo, $b_{ijk} = c_{ij} d_k$ es el producto exterior de c_{ij} y d_k .

La contracción de un tensor es la operación que lleva implícito (según el convenio de suma) el hacer iguales dos subíndices en la notación de un tensor. El resultado de una contracción es un tensor (demuéstrese) de orden el inicial menos dos. Por ejemplo c_{ij} es una contracción cuyo resultado es un tensor de orden $2-2=0$ (un escalar).

El producto interior de dos tensores es un producto exterior seguido de una contracción. Por ejemplo $b_{iji} = c_{ij} d_i$ es un producto interior de c_{ij} y d_k . El resultado es evidentemente un tensor.

La derivada parcial de un tensor respecto de una coordenada es otro tensor en el ámbito de los tensores cartesianos (solamente). La demostración se realiza derivando directamente un tensor: $b_{i',k'} = (b_i x_{i,i'})_{,k'} = (b_i x_{i,i'})_{,k} x_{k,k'} = (b_{i,k} x_{i,i'} + b_i x_{i,i',k}) x_{k,k'}$. El segundo término del último paréntesis se anula por contener una derivada de $x_{i,i'}$ (que en coordenadas cartesianas es constante, de valor $a_{ji'}$). Por lo tanto resulta que

$$b_{i',k'} = x_{i,i'} x_{k,k'} b_{i,k} \quad (1.23)$$

Lo que muestra que $b_{i,k}$ se transforma como un tensor de segundo orden, pudiendo realizarse con términos de este tipo las operaciones tensoriales que se han definido. La generalización a tensores de orden superior y derivadas sucesivas es inmediata.

Definimos como módulo de un tensor de orden uno, d_i , y lo denotaremos $|d_i|$ al módulo del vector en su sentido habitual. Siendo d_i sus coordenadas cartesianas, tenemos:

$$|d_i| = \sqrt{d_i d_i} \quad (1.24)$$

El cálculo del módulo conlleva un producto interior, siendo el resultado un escalar. En consecuencia, el subíndice i es mudo en una expresión como $|d_i|$, a pesar de que en la notación adoptada aparezca una sola vez el subíndice.

Existe una propiedad conocida como "Regla del Cociente", la cual no define una operación entre tensores (la división entre ellos no está definida). Dicha propiedad sirve para identificar de modo inmediato el carácter tensorial de una magnitud, y admite diversos enunciados. Para nuestros propósitos, el más interesante será probablemente el que sigue: Si se cumple

$$b_{ij} c_j = d_i \quad (1.25)$$

y además es conocido que tanto c_i como d_i son vectores, ello es suficiente para asegurar que b_{ij} es un tensor (se requiere además que c_i sea independiente de b_{ij}). Para probar esta propiedad partimos de (1.25) expresada en unos ejes girados: $b_{i'j'} c_{j'} = d_{i'} = a_{i'i} d_i = a_{i'i} b_{ij} c_j = a_{i'i} b_{ij} a_{j'j} c_{j'}$. Esta igualdad se satisfará para unas componentes $c_{j'}$ arbitrarias, por lo que podemos eliminar este símbolo de la igualdad entre el primer y último término de la ecuación anterior, resultando $b_{i'j'} = a_{i'i} a_{j'j} b_{ij}$, como queríamos demostrar.

El teorema de la divergencia.

Si \mathbf{f} es cualquier campo vectorial cuyas componentes son diferenciables, que está definido en una región del espacio V limitada por una superficie cerrada S , y \mathbf{n} es el vector unitario normal exterior a la superficie S un punto considerado, la integral de volumen de la divergencia de \mathbf{f} ($\text{div}(\mathbf{f})=f_{i,i}$) puede calcularse mediante una integral de superficie mediante:

$$\int_V f_{i,i} dV = \int_S f_i n_i dS \quad (1.26)$$

Este resultado del cálculo integral, conocido como teorema de la divergencia, será de uso frecuente en los capítulos siguientes.

Bibliografía:

REISMANN, H., & PAWLIK, P., "Elasticity", Wiley - Interscience
 FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall

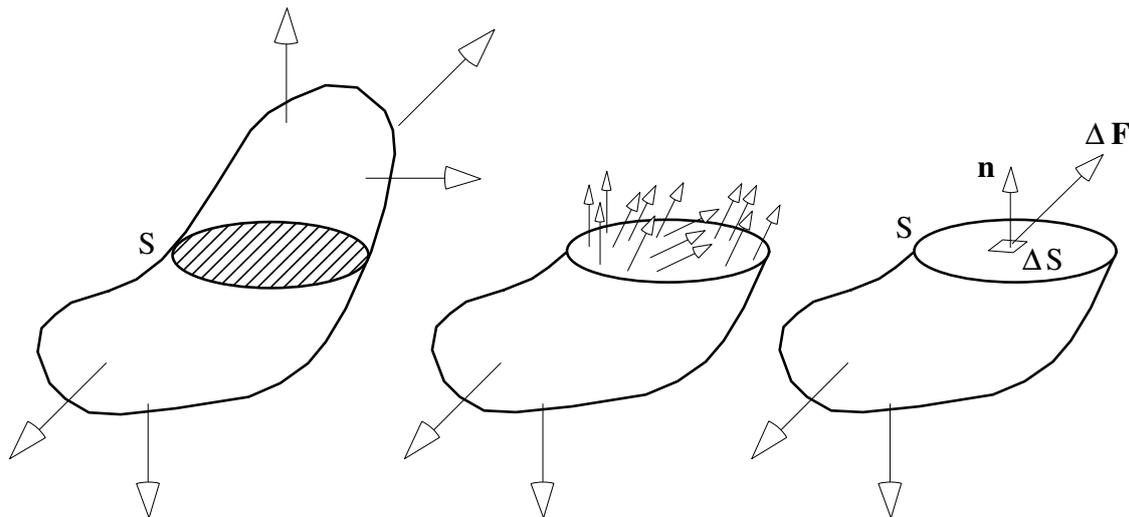
Capítulo 2

Tensión.

Para explicar cómo se transmiten a través del sólido las fuerzas aplicadas, es necesario introducir el concepto de tensión, que es probablemente el concepto físico más importante de toda la mecánica de los medios continuos, y de la teoría de la elasticidad en particular. Este capítulo presenta al lector el concepto de tensión junto con su caracterización matemática como tensor, y algunas de sus propiedades más importantes.

2.1.- Concepto de tensión: vector tensión.

Consideremos un sólido en equilibrio estático bajo la acción de fuerzas, como muestra la primera figura 2.1. Por conveniencia consideraremos dos tipos distintos de fuerzas: "fuerzas de superficie" y "fuerzas de volumen". Las fuerzas de superficie son distribuciones de fuerzas (o fuerzas puntuales) que actúan sobre la superficie del sólido considerado, las cuales pueden por ejemplo estar producidas por el contacto con otro sólido. Las fuerzas de volumen, que no necesitaremos considerar hasta el epígrafe 2.3, actúan sobre el interior del sólido (por ejemplo la gravedad). Tienen unidades de fuerza por unidad de superficie y de fuerza por unidad de volumen, respectivamente.



Figuras 2.1.- Porción de un sólido en equilibrio.

Consideremos una porción cualquiera del sólido, como por ejemplo la que se obtendría al cortar el mismo por una superficie continua S según se indica en la segunda figura 2.1. Cada porción del sólido que podamos considerar estará en equilibrio

asumiendo que en el corte imaginario realizado actúan las mismas acciones que ejercía en él el resto del sólido. Admitiremos el postulado de que estas acciones en el corte están representadas mediante una cierta distribución continua de fuerzas, como muestra la segunda de las figuras 2.1, sin momentos concentrados ni distribución de momentos. Esta distribución de fuerzas tiene unidades de presión (fuerza por unidad de superficie), si bien su dirección no será en general perpendicular a la superficie S . El postulado de que existe en cualquier superficie continua S una distribución también continua de fuerzas estáticamente equivalente a la acción que ejerce el material existente en el otro lado de la superficie S , constituye el concepto de tensión de Cauchy, y es la hipótesis fundamental de la mecánica de medios continuos.

Definimos como vector tensión en un punto de la superficie S el valor (vectorial) de la distribución de fuerzas en ese punto.

Debe apreciarse que en general el vector tensión no es único en un punto del sólido, ya que variará con la orientación de la superficie S que pase por el punto. Denotaremos como \mathbf{n} al vector unitario normal a la superficie S en el punto considerado, que tomaremos en el sentido exterior a la porción de sólido analizada. Denotaremos como $\mathbf{T}^{\mathbf{n}}$ el valor de la distribución de fuerzas, es decir, el vector tensión. Así, el superíndice \mathbf{n} indica que la superficie S tiene normal exterior \mathbf{n} en el punto considerado (tercera de las figuras 2.1).

Es inmediato calcular la resultante de las fuerzas (tensiones) que actúan en un elemento de la superficie S . Dado que hemos supuesto que esta distribución de fuerzas es continua, podemos reducir las fuerzas que actúan sobre un elemento muy pequeño de superficie ΔS , a su resultante $\Delta \mathbf{F}$ aplicada en el centro de áreas de ΔS . La reducción anterior se realiza dentro de la aproximación de que la distribución de fuerzas mantendrá dirección y módulo sensiblemente constantes en todo ΔS (un sistema de vectores que no sean paralelos no podría en general reducirse sólo a su resultante). Cuando ΔS tiende a un valor indefinidamente pequeño dS , la resultante $d\mathbf{F}$ tendrá un valor:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{T}^{\mathbf{n}} dS \quad (2.1)$$

Llamaremos componentes intrínsecas del vector tensión a sus proyecciones sobre la dirección normal a la superficie S (dada por \mathbf{n}), y sobre el plano tangente a la superficie, que será perpendicular a \mathbf{n} , como indica la figura 2.2. En general estaremos interesados en conocer los siguientes valores escalares asociados a estas proyecciones:

$$\sigma = \mathbf{T}^{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = T_i^{\mathbf{n}} n_i \quad (2.2)$$

$$\tau^2 = |\mathbf{T}^{\mathbf{n}}|^2 - \sigma^2 \quad (2.3)$$

Llamaremos a σ componente normal y a τ componente tangencial. En las fórmulas anteriores es inmediato apreciar que σ está calculado como un escalar con signo, ya que es el resultado de un producto escalar de vectores. El convenio de signos que deriva de este cálculo es que σ es positivo si la proyección del vector tensión sobre la dirección normal a S tiene el sentido de \mathbf{n} (diremos que la componente normal es de tracción en

este caso). El procedimiento de cálculo (2.3) para la componente tangencial indica que el signo del escalar τ es indiferente. De hecho, no adoptaremos ningún convenio de signos para τ , excepto en el ámbito del diagrama de Mohr para problemas bidimensionales, que estudiaremos más tarde en este capítulo. Lo anterior es independiente de que hayamos definido un convenio de signos *para las componentes del tensor de tensiones*, en particular para las tangenciales.

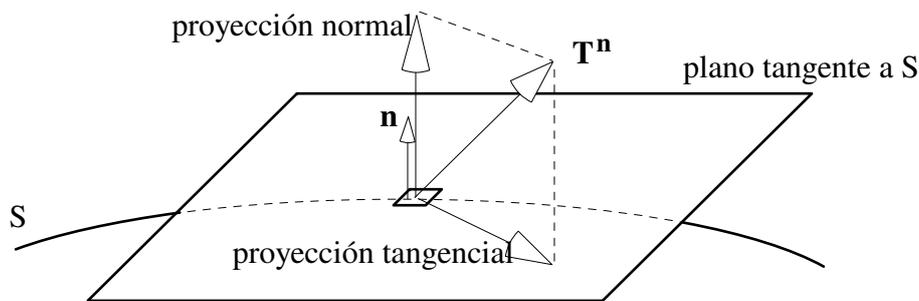
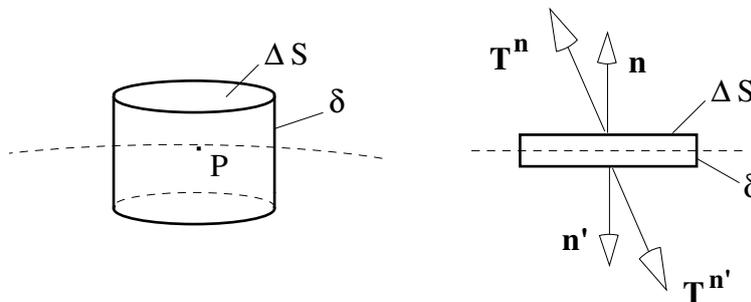


Figura 2.2.- Componentes intrínsecas del vector tensión.

Los vectores tensión en un punto según una superficie de corte S , y considerando las porciones de sólido a uno y otro lado del corte, son iguales en módulo y dirección, y de sentido opuesto. Esta propiedad puede considerarse una consecuencia directa del principio de acción y reacción de Newton, aunque cabe realizar una comprobación adicional basada en un razonamiento de equilibrio: consideremos aislado del seno de un sólido un pequeño cilindro de base ΔS y altura δ que contiene al punto P , y cuyas caras son paralelas al plano tangente a la superficie S , como indica la primera figura 2.3.



Figuras 2.3.- Equilibrio de un cilindro elemental.

Sobre las caras planas del sólido considerado actuarán las tensiones \mathbf{T}^n y $\mathbf{T}^{n'}$, y sobre cada punto de la superficie lateral cilíndrica existirá un cierto vector tensión, variable al variar la orientación del plano tangente al cilindro. Adicionalmente consideraremos la existencia de fuerzas de volumen, tales como la acción de la gravedad. Al hacer tender a cero la altura δ del cilindro de manera que P se mantenga dentro de él, la superficie lateral tiende a cero y las tensiones en esta superficie producirán fuerzas de magnitud despreciable frente a las correspondientes a \mathbf{T}^n y $\mathbf{T}^{n'}$, que actúan sobre superficies que no tienden a cero. Las fuerzas de volumen también serán despreciables, puesto que el volumen del sólido tiende a cero con δ . Por tanto, sólo quedan como magnitudes significativas las tensiones \mathbf{T}^n y $\mathbf{T}^{n'}$, que producirán

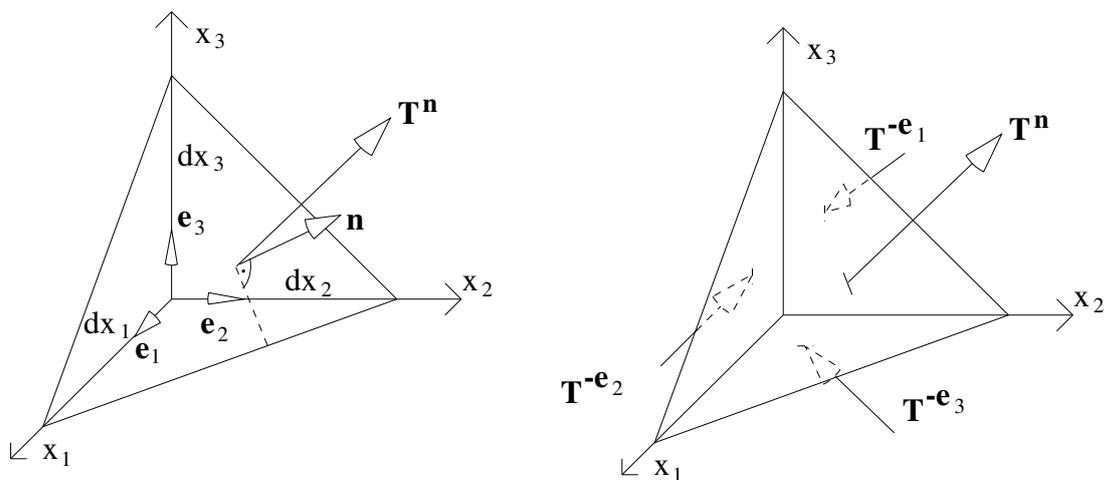
fuerzas $\mathbf{T}^{\mathbf{n}}\Delta S$ y $\mathbf{T}^{\mathbf{n}'}\Delta S$ respectivamente. Del planteamiento del equilibrio del sólido que hemos aislado se tiene:

$$\mathbf{T}^{\mathbf{n}}\Delta S + \mathbf{T}^{\mathbf{n}'}\Delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}^{\mathbf{n}} = -\mathbf{T}^{\mathbf{n}'} \quad (2.4)$$

lo que plasma el esperado resultado de que en un punto P, el vector tensión en un plano de normal exterior $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ es opuesto al que se da en el de normal exterior \mathbf{n} .

2.2.- Tensor de tensiones.

Consideremos el equilibrio de un sólido diferencial con forma de tetraedro (extraído del seno de un sólido finito) como el mostrado en las figuras 2.4, cuyas caras están definidas por los tres planos coordenados y una cara oblicua de normal \mathbf{n} . En alguna posición dentro del tetraedro -no importa donde-, se encuentra un punto P, en el que los vectores tensión según planos paralelos a los coordenados valen $\mathbf{T}^{-\mathbf{e}_1}; \mathbf{T}^{-\mathbf{e}_2}; \mathbf{T}^{-\mathbf{e}_3}$ (especificamos el sentido negativo de cada \mathbf{e}_i por tener esa orientación la normal exterior a cada una de las tres superficies). Llamaremos $\mathbf{T}^{\mathbf{n}}$ al vector tensión en el plano de normal \mathbf{n} que pasa por P. Las superficies del tetraedro tendrán unas tensiones iguales a las anteriores salvo un diferencial, puesto que las distancias de P a estas superficies son diferenciales de primer orden. Tomaremos pues como aproximación de los valores de los vectores tensión en las caras de tetraedro los valores en planos paralelos a ellas que pasan por P. En el límite, esta aproximación no introducirá error al plantear el equilibrio, a no ser que se produjese una eventual cancelación de los términos finitos del desarrollo en serie de las tensiones (los correspondientes a la tensión en P, citados anteriormente), lo que no sucederá en este caso como veremos. Al no cancelarse estos términos finitos de tensión, las fuerzas de superficie en el tetraedro (diferenciales de segundo orden = tensión finita por superficie diferencial) dominarán sobre las fuerzas de volumen (diferenciales de tercer orden), que consecuentemente despreciaremos.



Figuras 2.4.- Equilibrio de un tetraedro elemental del seno de un sólido.

Caracterizaremos la magnitud de una superficie mediante un escalar positivo. Si la cara oblicua del tetraedro tiene una superficie dS , la cara paralela al plano 23 tendrá una superficie $n_1 dS$, la paralela al plano 31 será $n_2 dS$, y la paralela a 12 será $n_3 dS$. Nótese que tal como se ha considerado \mathbf{n} en la figura 2.4, todas sus componentes n_j son positivas, por lo que no es necesaria ninguna corrección de signo en el cálculo de las superficies anteriores. La ecuación de equilibrio de fuerzas se expresará como:

$$\mathbf{T}^{-e_1} n_1 dS + \mathbf{T}^{-e_2} n_2 dS + \mathbf{T}^{-e_3} n_3 dS + \mathbf{T}^n dS = 0$$

Dividiendo la ecuación anterior por dS , y teniendo en cuenta que $\mathbf{T}^{-e_j} = -\mathbf{T}^{e_j}$, resulta $\mathbf{T}^{e_j} n_j = \mathbf{T}^n$ (entendemos sumatorio en j). La igualdad vectorial anterior puede expresarse en componentes como:

$$T_i^n = T_i^{e_j} n_j \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) anterior es un resultado muy interesante. Por una parte, asegura que podemos calcular la tensión en cualquier plano de normal \mathbf{n} que pase por un punto, si conocemos las tensiones en planos paralelos a los coordenados que pasen por ese punto. Por otra parte, la estructura formal de la ecuación sugiere que la magnitud $T_i^{e_j}$ que tiene dos subíndices (i, j) será un tensor. En efecto, la regla del cociente nos asegura que será un tensor si tanto T_i^n como n_j son vectores (evidentemente lo son), y la ecuación se cumple para cualquier vector \mathbf{n} arbitrario. Hemos de cerciorarnos de esto último, dado que en proceso de obtención de la fórmula hicimos intervenir el hecho accidental de que las componentes de \mathbf{n} fuesen positivas. Con este fin, podemos comprobar que la ecuación de equilibrio mantiene la forma general (2.5) para un tetraedro en el que la cara oblicua tenga una normal exterior \mathbf{n}' con todas sus componentes negativas (figura 2.5).

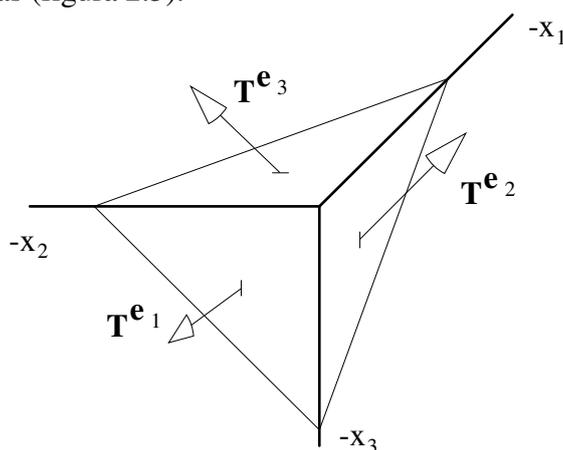


Figura 2.5.- Tetraedro con componentes negativas de la normal \mathbf{n}' a la cara oblicua.

En este caso, la cara paralela al plano 23 tendrá una superficie $-n'_1 dS$, la paralela al plano 31 será $-n'_2 dS$, y la paralela a 12 será $-n'_3 dS$. El signo menos se introduce para que las áreas se calculen siempre como cantidades positivas. El equilibrio de fuerzas vendrá expresado como

$$\mathbf{T}^{e_1} (-n'_1 dS) + \mathbf{T}^{e_2} (-n'_2 dS) + \mathbf{T}^{e_3} (-n'_3 dS) + \mathbf{T}^n dS = 0$$

Dividiendo la ecuación anterior por dS , resulta inmediatamente que $T_i^n = T_i^{e_j} n'_j$. Por lo tanto, la forma de la ecuación (2.5) se mantiene aunque las componentes de \mathbf{n} sean negativas. Es inmediato comprobar que ocurre lo mismo cuando \mathbf{n} está contenido en cualquier otro octante, ya que para una componente negativa n_j siempre habrá que realizar el ajuste de signo del área, y considerar la tensión T^{+e_j} en el plano coordenado correspondiente.

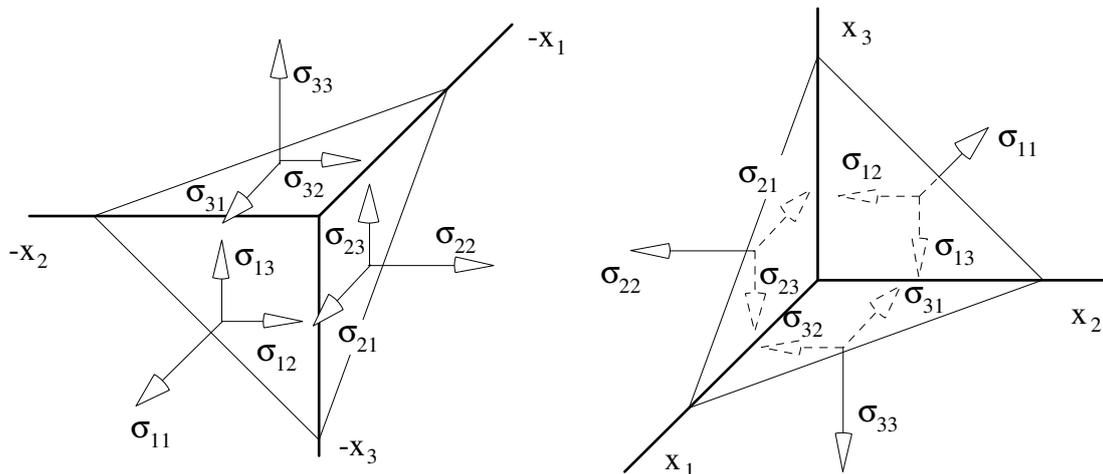
Realizada la comprobación anterior, podemos asegurar que (2.5) implica que el conjunto de cantidades $T_i^{e_j}$ son las componentes de un tensor, que denominaremos tensor de tensiones y denotaremos como σ_{ji} :

$$\sigma_{ji} = T_i^{e_j} \quad (2.6)$$

Con esta notación, el primer subíndice de σ_{ji} indica qué eje es perpendicular al plano donde actúa la componente de tensión, y el segundo subíndice indica la dirección de la componente de tensión. La ecuación de equilibrio de un tetraedro elemental (2.5) se escribe en función del tensor de tensiones como:

$$T_i^n = \sigma_{ji} n_j \quad (2.7)$$

Conviene enfatizar que las componentes del tensor de tensiones se definen según (2.6) en base a las componentes de los vectores tensión en planos paralelos a los coordenados *cuya normal exterior tiene el sentido positivo del eje correspondiente*. Por lo tanto, todas las componentes del tensor de tensiones que muestra la primera de las figuras 2.6 son positivas tal como están dibujadas.



Figuras 2.6.- Componentes positivas del tensor de tensiones.

Si conocemos las componentes del vector tensión en un punto sobre un plano cuya normal exterior está dirigida en sentido opuesto a un eje coordenado, y queremos saber el signo de las componentes correspondientes del tensor de tensiones en ese punto, debemos calcular primero las componentes del vector tensión en el mismo plano pero con normal exterior en el sentido positivo del eje (este "cálculo" consiste simplemente en cambiar de signo las componentes del vector tensión, según la ecuación (2.4)), e

identificar las componentes de este último vector tensión con las componentes correspondientes del tensor de tensiones. Por lo tanto, diremos que si las componentes de tensión están dirigidas según se muestra en el sólido de la segunda de las figuras 2.6, éstas son también positivas. Podemos resumir que:

Una componente de tensión es positiva si tiene el sentido de un eje y la normal al plano sobre el que actúa tiene el sentido de un eje, o si tiene sentido contrario a un eje y la normal al plano tiene sentido a un eje. Es negativa en otro caso.

2.3.- Ecuaciones de equilibrio.

Al comienzo de la sección 2.1 propusimos la consideración de dos tipos de fuerzas actuantes: fuerzas de volumen y fuerzas de contorno. Denotaremos mediante X_i las fuerzas asociadas al volumen del sólido y \bar{X}_i a las asociadas a su superficie exterior. La ecuación de equilibrio local en función de los términos del tensor de tensiones en un punto de la superficie del sólido será la misma ecuación (2.7), pero considerando que \mathbf{n} es la normal exterior al contorno real del sólido. La ecuación que resulta, a la que llamaremos ecuación de equilibrio en el contorno, es:

$$\bar{X}_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.8)$$

Plantearémos ahora el equilibrio de un sólido diferencial con forma de cubo de aristas paralelas a los ejes, aislado del seno de un sólido macroscópico. La figura 2.7 muestra un sólido diferencial de este tipo.

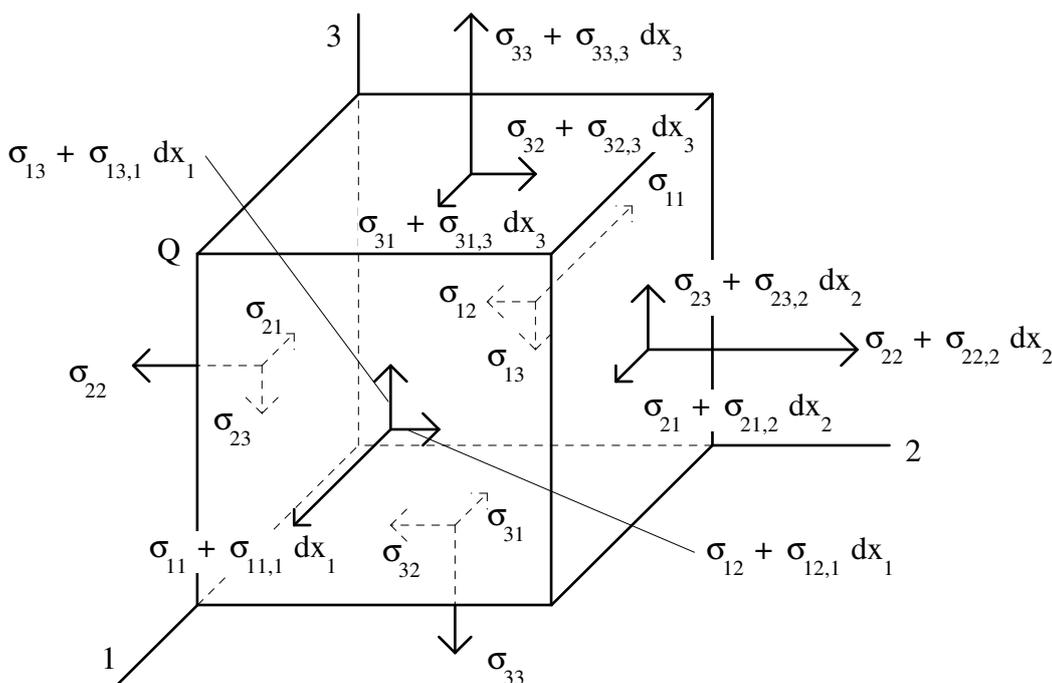


Figura 2.7.- Tensiones en un cubo elemental de aristas paralelas a los ejes. En él se han dibujado (supuestas positivas) las componentes del tensor de tensiones sobre sus caras. Una componente de tensión, por ejemplo la 22, no tendrá exactamente

el mismo valor en la cara $x_2=0$ (en la que diremos que vale σ_{22}) que en la cara $x_2=dx_2$, habiéndose representado en la figura 2.7 el valor dado por su desarrollo en serie truncado al segundo término. El lector debe observar en la siguiente exposición que los diferenciales primeros del desarrollo en serie de las tensiones cobran una importancia que no tenían en el ámbito de la ecuación (2.5), debido a que ahora los primeros términos (con tensiones finitas) de estos desarrollos se cancelan exactamente al plantear el equilibrio. Imponiendo por ejemplo que la suma de fuerzas según la dirección 2 sea cero, tenemos:

$$(-\sigma_{22} + \sigma_{22,2} dx_2) dx_1 dx_3 + (-\sigma_{12} + \sigma_{12,1} dx_1) dx_2 dx_3 + (-\sigma_{32} + \sigma_{32,3} dx_3) dx_1 dx_2 + X_2 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

Tras cancelar las cantidades σ_{22} , σ_{12} y σ_{32} en el interior de cada paréntesis respectivo, y dividir por $dx_1 dx_2 dx_3$, el resultado adopta la forma $\sigma_{j2,j} + X_2 = 0$. Las ecuaciones que expresan el equilibrio de fuerzas en las otras dos direcciones, 1 y 3, se obtienen análogamente y presentan la misma forma. Podemos por tanto expresar estas tres ecuaciones en la forma compacta:

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0 \quad (2.9)$$

El equilibrio del sólido implica también que el momento de las fuerzas que actúan sobre él respecto de cualquier punto debe ser nulo. Tomemos momentos respecto del punto Q de la figura 2.7. Según la dirección 2, por ejemplo, aparecen los momentos producidos por las tensiones σ_{31} y σ_{13} , de valor $(\sigma_{31} dx_1 dx_2) dx_3$, y $-(\sigma_{13} dx_2 dx_3) dx_1$, respectivamente (tomamos como positivas las componentes de momento dirigidas en el sentido del eje). Los momentos producidos por las demás componentes de tensión son infinitésimos de orden superior que despreciaremos: por ejemplo las tensiones σ_{11} producirían un momento:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{11,1} dx_1) (dx_2 dx_3) (dx_3/2) = -\sigma_{11,1} dx_1 dx_2 dx_3 dx_3/2,$$

que es un diferencial de cuarto orden. Por tanto, salvo estos diferenciales de orden superior a tres, la ecuación de suma de momentos según la dirección 2 queda:

$$(\sigma_{31} dx_1 dx_2) dx_3 - (\sigma_{13} dx_2 dx_3) dx_1 = 0,$$

Es decir $\sigma_{31} = \sigma_{13}$. Al imponer que el momento sea nulo en las otras dos direcciones, 1 y 3, se obtiene análogamente la igualdad de las componentes de tensión tangencial de subíndices 23 y 12, respectivamente. Estas tres ecuaciones se resumen por tanto en:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.10)$$

Que expresa que el tensor de tensiones es simétrico. En la literatura aparece a veces el término "principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales", cuyo enunciado es que las componentes de tensión tangencial perpendiculares entre sí, que actúan sobre dos planos también perpendiculares entre sí, son iguales en módulo, y tienen sentidos convergentes o bien divergentes (figura 2.8). Por supuesto, se trata de la misma

propiedad de simetría expresada en (2.10). Hay que notar que si existiese una distribución de momentos por unidad de volumen, aportaría un momento diferencial de tercer orden que modificaría la ecuación de equilibrio (2.10), perdiéndose la simetría del tensor de tensiones. Tales distribuciones de momentos pueden ser importantes en presencia de campos electromagnéticos extraordinariamente intensos, siendo despreciables en la inmensa mayoría de las aplicaciones prácticas.

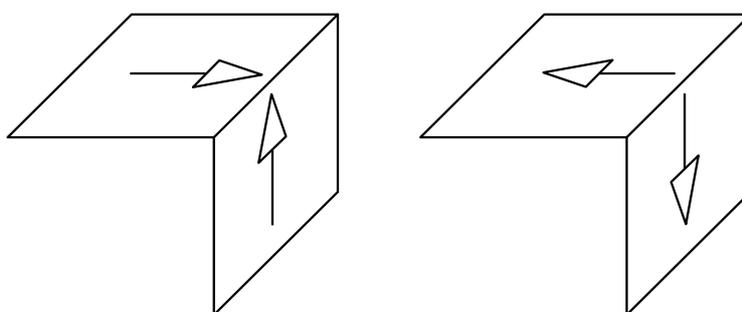


Figura 2.8.- Reciprocidad de las tensiones tangenciales.

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) expresan el equilibrio del sólido elemental de la figura 2.7. Podemos utilizar la (2.10) para reescribir las ecuaciones (2.7), (2.8), y (2.9) en la forma en que las usaremos en lo sucesivo. El vector tensión en un punto interior al sólido, y en un punto del contorno del sólido según su superficie, son respectivamente:

$$T_i^n = \sigma_{ij}n_j \quad (2.11)$$

$$\bar{X}_i = \sigma_{ij}n_j \quad (2.12)$$

Donde n_j denota las componentes del vector normal al plano adecuado en cada caso. La ecuación de equilibrio interno queda:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (2.13)$$

2.4.- Tensiones y direcciones principales. Su carácter invariante.

Nos preguntamos si dado un punto arbitrario del sólido existirá algún plano (de normal \mathbf{n}) en el que el vector tensión sea perpendicular al plano, y por tanto paralelo a \mathbf{n} . Podemos enunciar equivalentemente la pregunta de si habrá planos en que la componente tangencial τ del vector tensión sea nula. Seguidamente demostraremos que efectivamente siempre existen planos que cumplen esta propiedad. A las direcciones perpendiculares a estos planos se las denomina "direcciones principales". Se llama "tensiones principales" a los valores escalares de la tensión normal en estos planos, en que la tensión es puramente normal.

Sea σ_{ij} el tensor de tensiones en el punto considerado. Sea \mathbf{n} el vector unitario normal a un plano de tensión puramente normal que pasa por el punto, y sea σ (escalar) el valor de la tensión normal en ese plano. La condición de que el vector tensión que actúa sobre el plano tiene la dirección \mathbf{n} , viene dada por:

$$T_i^n = \sigma n_i$$

Expresando el vector tensión en función de los términos del tensor de tensiones mediante (2.11), obtenemos:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \quad (2.14)$$

O lo que es lo mismo, $(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$, que tiene la forma de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que en forma explícita es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

Para que el sistema de ecuaciones anterior tenga una solución no trivial en n_1, n_2, n_3 , el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) define un polinomio cúbico en σ , que llamaremos ecuación característica, y que escribiremos en la siguiente forma normalizada:

$$-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0 \quad (2.17)$$

Los coeficientes, I_1, I_2, I_3 , se calculan inmediatamente mediante identificación con el desarrollo del determinante de (2.16). Sus valores son:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

La ecuación característica (2.17) tendrá tres soluciones en σ , que denotaremos como σ_I, σ_{II} y σ_{III} , y que serán las tensiones principales. Más tarde demostraremos que las tres tensiones principales serán siempre números reales. Cada uno de estos valores es la tensión normal en uno de los planos en que la tensión es puramente normal. Las orientaciones $\mathbf{n}^I, \mathbf{n}^{II}$, y \mathbf{n}^{III} , de las normales a estos planos pueden obtenerse particularizando en la ecuación inicial (2.15) σ_I, σ_{II} y σ_{III} respectivamente como valores de σ :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_I \delta_{ij}) n_j^I = 0 \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{II} \delta_{ij}) n_j^{II} = 0 \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{III} \delta_{ij}) n_j^{III} = 0 \quad (2.18)$$

Donde I, II, III son índices fijos que no indican sumatorio. Cada uno de los tres sistemas de ecuaciones (2.18), en los que las incógnitas son las componentes de los respectivos vectores según las direcciones principales, tiene matriz de coeficientes singular (véase ecuación (2.16)). Por ello hemos de plantear alguna ecuación adicional para encontrar su solución. En general es suficiente descartar una de las ecuaciones de cada sistema de 2.18 (que será combinación lineal de las otras dos), e imponer a cambio la correspondiente condición adicional (2.19), que expresa que el módulo del vector que buscamos es la unidad.

$$(n_1^I)^2 + (n_2^I)^2 + (n_3^I)^2 = n_1^I n_1^I = 1 \quad n_1^{II} n_1^{II} = 1 \quad n_1^{III} n_1^{III} = 1 \quad (2.19)$$

Las ecuaciones (2.17), (2.18) y (2.19) permiten en general encontrar la orientación de los planos que no tienen tensión tangencial, así como el valor de la tensión normal σ correspondiente. Demostraremos más tarde que a raíces σ distintas de la ecuación característica corresponden direcciones principales distintas, y que las direcciones principales son perpendiculares entre sí. Esta última circunstancia nos ofrece la posibilidad de adoptar un sistema de ejes coordenados cuyas direcciones coincidan con las principales, resultando evidente que, por definición, las componentes tangenciales del tensor de tensiones se anularán en estos ejes, con lo que la matriz asociada al tensor tiene forma diagonal:

$$\sigma_{i,j'} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (\text{cuando los ejes } 1',2',3' \text{ coinciden con las direcciones principales})$$

Demostración del carácter invariante de las direcciones y tensiones principales.

Si las tensiones y direcciones principales en un punto, solución de (2.14), dependieran del sistema de ejes adoptado, serían propiedades sin demasiado interés, y no tendría sentido por ejemplo hablar de adoptar ejes según direcciones principales, como acabamos de hacer. La intuición física nos dice que no se dará esta dependencia, ya que los planos principales en un punto son planos en los que físicamente ocurre algo tangible (la ausencia de tensión tangencial), y la tensión principal es una medida asociada a ese algo. No obstante, nos proponemos presentar una demostración formal de la invarianza de tensiones y direcciones principales respecto del sistema de ejes adoptado.

Para ello, consideremos la ecuación inicial (2.14) aplicada en un punto del sólido, y referida a dos sistemas de ejes distintos. Supondremos que en ambos sistemas de ejes los valores principales de tensión pueden ser distintos (σ y σ'), así como las direcciones principales (que notaremos n_i y $v_{i'}$). Realizaremos la demostración mostrando que, tras las manipulaciones adecuadas, la forma de (2.14) es la misma en ambos sistemas de ejes. Por tanto partimos de:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \quad \sigma_{i'j'} v_{j'} = \sigma' v_{i'} \quad (2.20)$$

Multiplicando a la primera ecuación anterior por a_{ii}' (podemos hacerlo, ya que la matriz que la representa tiene inversa):

$$a_{ii}' \sigma_{ij} n_j = a_{ii}' \sigma n_i$$

Agrupamos términos del miembro derecho, y hacemos aparecer n_j' en el izquierdo:

$$a_{ii}' \sigma_{ij} (a_{jj}' n_j') = \sigma n_i'$$

Como σ_{ij} y $\sigma_{i'j'}$ representan al mismo tensor, cumplen la relación de transformación (1.19), por lo que agrupando términos resulta:

$$\sigma_{i'j'} n_j' = \sigma n_i'$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la segunda de las ecuaciones (2.20). Es inmediato apreciar que la ecuación característica que resulta de ambas es la misma, lo que implica que las soluciones de σ y σ' coincidirán, y que una vez sustituidas éstas (en la ecuación anterior y en la segunda (2.20)), se obtendrán soluciones coincidentes para n_i' y para v_i' , con lo que queda demostrada la invarianza de las direcciones y tensiones principales respecto del sistema de ejes coordenados adoptado.

El que el valor de las tensiones principales sea independiente del sistema de ejes, implica automáticamente que el valor de los coeficientes de la ecuación característica (2.17) debe ser también invariante frente a cambios de ejes. Por esto se llama a estos coeficientes "invariantes del tensor de tensiones". En particular, y por razones obvias, se llama primer invariante o invariante lineal a I_1 , segundo invariante o invariante cuadrático a I_2 , y tercer invariante o invariante cúbico a I_3 .

Demostración de que las soluciones de la ecuación característica son números reales.

La ecuación característica (2.16) es un polinomio con coeficientes reales, por lo que sabemos que puede tener raíces reales y pares de raíces complejas conjugadas. Como el polinomio es de tercer grado tendrá tres raíces, por lo que al menos una será siempre real. Sea σ_I el valor de esta raíz real, y sea \mathbf{n}^I el vector unitario en la dirección principal asociada a esta raíz. Elegiremos un sistema de ejes $x_1 x_2 x_3$ de tal manera que x_1 coincida con esta dirección. Las componentes de tensión σ_{12} y σ_{13} serán evidentemente nulas en estos ejes, siendo el tensor de tensiones de la forma que se muestra en la figura 2.9.

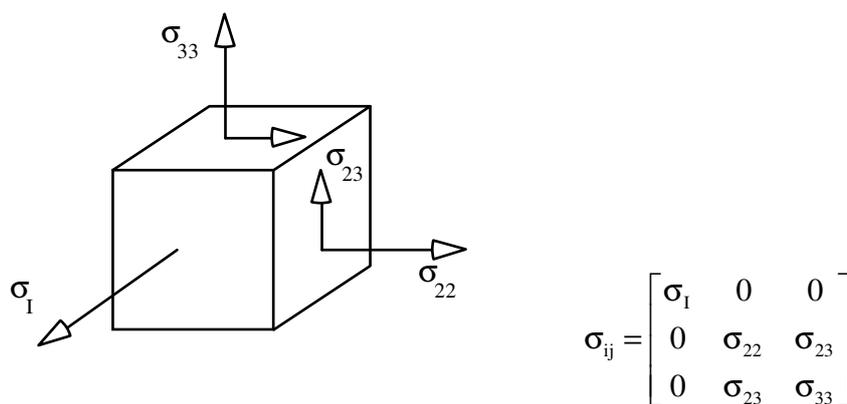


Figura 2.9.- Tensor de tensiones cuando x_1 coincide con una dirección principal.

La ecuación característica adopta la forma:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Siendo sus soluciones la ya conocida $\sigma = \sigma_1$, y las dos raíces de

$$\sigma^2 - (\sigma_{22} + \sigma_{33})\sigma + (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) = 0$$

Esta ecuación de segundo grado tiene sus raíces reales siempre que su discriminante Δ sea mayor que cero, lo cual ocurrirá siempre, ya que puede expresarse como suma de cuadrados:

$$\Delta = (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - 4(\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) = (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2 \geq 0$$

Por lo tanto, las tres tensiones principales deben ser números reales, como queríamos demostrar.

Demostración de que tensiones principales distintas llevan asociadas direcciones principales distintas

Supongamos que pasando por un punto existen dos planos, de normales n_i y v_i , en los que el vector tensión tiene solamente componente normal a su plano, de valores σ y σ' respectivamente. Siendo σ_{ij} el tensor de tensiones en ese punto se cumplirá:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \qquad \sigma_{ij} v_j = \sigma' v_i \qquad (2.21)$$

Asumamos que $\sigma \neq \sigma'$. Para comprobar que sus direcciones principales asociadas, \mathbf{n} y \mathbf{v} no pueden coincidir, observemos que si coincidieran ($\mathbf{v}=\mathbf{n}$) podríamos obtener la siguiente ecuación mediante sustracción de las ecuaciones (2.21):

$$0 = (\sigma - \sigma') n_i$$

La cual no puede satisfacerse para ninguna dirección \mathbf{n} , a no ser que sea $\sigma = \sigma'$. Por lo tanto, la coincidencia de las direcciones principales \mathbf{n} y \mathbf{v} solo puede darse cuando sus tensiones principales asociadas σ y σ' , también coinciden, como queríamos demostrar.

Demostración de que las direcciones principales son perpendiculares entre sí.

Supongamos nuevamente que en un punto existen dos planos, de normales \mathbf{n} y \mathbf{v} , en los que el vector tensión tiene solamente componente normal, de valores σ y σ' respectivamente, lo que permite plantear otra vez las ecuaciones (2.21). Multiplicando escalarmente a la primera de estas ecuaciones por \mathbf{v} , a la segunda por \mathbf{n} , y restando, obtenemos:

$$\sigma_{ij} n_j v_i - \sigma_{ij} v_j n_i = \sigma n_i v_i - \sigma' v_i n_i$$

Intercambiando los subíndices mudos del segundo término del primer miembro, y teniendo en cuenta que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, tenemos:

$$\sigma_{ij} n_j v_i - \sigma_{ij} n_j v_i = (\sigma - \sigma') v_i n_i$$

El primer miembro es evidentemente nulo. Hay dos maneras de que el segundo miembro satisfaga esta igualdad a cero: que se anule $(\sigma - \sigma')$ o bien que se anule $v_i n_i$. La primera de las soluciones, $(\sigma - \sigma')=0$, claramente no es una solución general, ya que los valores de dos tensiones principales no tienen porqué coincidir (aunque eventualmente *pueden* coincidir, lo que constituye un caso particular que analizaremos más adelante). Por lo tanto, en el caso general en el que la ecuación característica no tiene raíz doble, debe ser:

$$v_i n_i = 0$$

Que expresa que el producto escalar $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ es cero, es decir, que ambas direcciones principales son perpendiculares entre sí, como queríamos demostrar.

Caso de raíz múltiple de la ecuación característica.

Como se ha apuntado, en general no cabe esperar que el valor de las tensiones principales coincida, ya que no hay ninguna razón particular para que la ecuación característica deba tener raíces múltiples. Sin embargo esta circunstancia puede presentarse, y constituye un caso particular interesante. Para analizarlo, volvamos a plantear las ecuaciones (2.21), pero suponiendo que los valores de las dos tensiones principales σ y σ' coinciden (denotaremos como σ su valor):

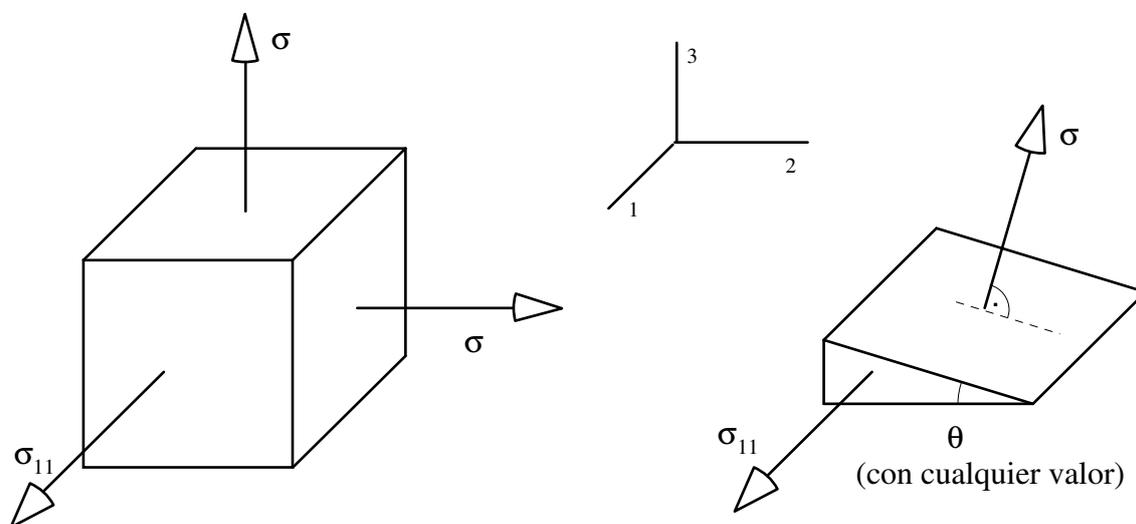
$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \qquad \sigma_{ij} v_j = \sigma v_i$$

Si multiplicamos a la primera de estas ecuaciones por un escalar arbitrario λ , a la segunda por otro escalar arbitrario λ' , y sumamos ambas, obtenemos:

$$\sigma_{ij} (\lambda n_j + \lambda' v_j) = \sigma (\lambda n_i + \lambda' v_i)$$

Pero esta ecuación expresa que la dirección $(\lambda \mathbf{n} + \lambda' \mathbf{v})$ es una dirección principal (apréciese en efecto la coincidencia formal con la ecuación 2.14). La conclusión por lo tanto es que si existe sólo tensión normal en dos direcciones distintas, y ésta es del mismo valor σ , entonces habrá sólo tensión normal en cualquier dirección dada por una combinación lineal de los vectores que definen las dos direcciones originales, y además la tensión tendrá el mismo valor σ .

Las figuras 2.10 ilustra la conclusión anterior. A la izquierda se muestra un sólido cúbico elemental de aristas paralelas a los ejes coordenados, en el que las caras de normal dirigida según los ejes 2 y 3 tienen tensión puramente normal, de valor σ . De paso, es interesante notar que la reciprocidad de las tensiones tangenciales implica que la dirección 1 será también principal, aunque su tensión será en general distinta de σ . La figura derecha muestra una porción del sólido anterior, en el que la normal a la cara oblicua puede obtenerse como combinación lineal de los vectores unitarios en las direcciones 2 y 3 (que tenían sólo tensión normal de valor σ), para cualquier valor del ángulo θ . Como acabamos de demostrar, esta cara oblicua tendrá también solamente tensión normal, y también de valor σ . Dicho de otra manera, cualquier plano que pertenezca a la radiación de planos que pasan por el punto considerado y son paralelos al eje 1, será también plano principal.



Figuras 2.10.- Caso de valor igual de dos tensiones principales.

También es posible que la ecuación característica tenga una raíz triple $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$. En este caso es sencillo demostrar que cualquier plano que pase por el punto considerado tiene sólo tensión normal, y que es del mismo valor. En efecto, si en unos ejes el tensor de tensiones vale $\sigma_{ij} = c \delta_{ij}$, siendo c una constante, el vector tensión en un plano genérico de normal \mathbf{n} tendrá como componentes:

$$T_i^n = \sigma_{ij} n_j = c \delta_{ij} n_j = c n_i$$

Con lo que queda demostrado que en este caso el vector tensión tiene siempre el mismo módulo c , y la dirección de la normal al plano. Este hecho tiene la implicación inmediata de que las componentes del tensor de tensiones serán $c\delta_{ij}$ en cualquier sistema de ejes (recuérdese la definición de los términos del tensor de tensiones en función de los vectores tensión que se expuso en el epígrafe 2.2). Este estado de tensión suele denominarse como "estado de presión hidrostática", ya que, en efecto, un fluido en reposo no puede soportar tensiones tangenciales, siendo el estado de tensiones referido el único posible en cada punto del fluido.

2.5.- Tensiones tangenciales máximas

Como indicaremos en un capítulo posterior, en muchos materiales (los llamados materiales dúctiles) el límite del comportamiento elástico está asociado a grandes rasgos con que el nivel de tensión tangencial alcance o no un cierto valor crítico. Por ello nos interesa saber el valor de las máximas tensiones tangenciales en un punto dado del sólido. Tomemos unos ejes coordenados coincidiendo con las direcciones principales de tensión. En estos ejes el vector tensión, dado por $T_i^n = \sigma_{ij} n_j$, resulta:

$$\mathbf{T}^n = \begin{bmatrix} \sigma_I n_1 \\ \sigma_{II} n_2 \\ \sigma_{III} n_3 \end{bmatrix}$$

La componente normal de tensión es la proyección de \mathbf{T}^n sobre \mathbf{n} :

$$\sigma = T_i^n n_i = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

La componente tangencial de tensión se obtiene como:

$$\tau^2 = |\mathbf{T}^n|^2 - \sigma^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2 \quad (2.22)$$

Mediante la condición $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ eliminamos una de las componentes de \mathbf{n} , por ejemplo n_3 :

$$\tau^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 (1 - n_1^2 - n_2^2) - [\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} (1 - n_1^2 - n_2^2)]^2$$

El máximo módulo de τ y de τ^2 ocurrirán en los mismos planos, por lo que planteamos las condiciones de máximo (o mínimo) para τ^2 . Tras agrupar términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^2}{\partial n_1} = 0 &\Rightarrow n_1 [(\sigma_I - \sigma_{III}) - 2(\sigma_I - \sigma_{III})n_1^2 - 2(\sigma_{II} - \sigma_{III})n_2^2] = 0 \\ \frac{\partial \tau^2}{\partial n_2} = 0 &\Rightarrow n_2 [(\sigma_{II} - \sigma_{III}) - 2(\sigma_I - \sigma_{III})n_1^2 - 2(\sigma_{II} - \sigma_{III})n_2^2] = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Vamos a investigar las soluciones del sistema de ecuaciones (2.23):

Solución tipo $n_1 = n_2 = 0$

$$\Rightarrow n_3 = \pm 1$$

Es decir, un eje principal, del que sabemos $\tau=0$ (es un mínimo).
No es una solución interesante.

Solución tipo $n_1 = 0$

$$\text{La 2ª ecuación (2.23) da: } n_2 [(\sigma_{II} - \sigma_{III}) - 2(\sigma_{II} - \sigma_{III})n_2^2] = 0$$

$$\Rightarrow n_2 = \pm 1/\sqrt{2} \Rightarrow n_3 = \pm 1/\sqrt{2}$$

$$\text{Que llevado a (2.22) produce } \tau = (\sigma_{II} - \sigma_{III}) / 2$$

Solución tipo $n_2 = 0$

$$\text{La 1ª ecuación (2.23) da: } n_1 [(\sigma_I - \sigma_{III}) - 2(\sigma_I - \sigma_{III})n_1^2] = 0$$

$$\Rightarrow n_1 = \pm 1/\sqrt{2} \Rightarrow n_3 = \pm 1/\sqrt{2}$$

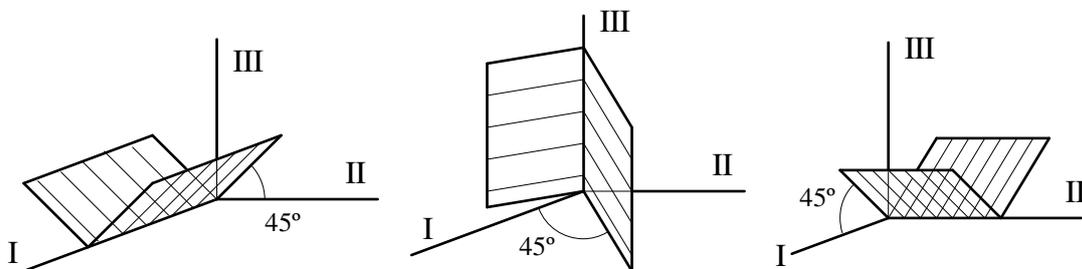
$$\text{Que llevado a (2.22) produce } \tau = (\sigma_I - \sigma_{III}) / 2$$

Finalmente, nótese que no existen soluciones tipo $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$, ya que el sistema (2.23) sería en general incompatible bajo estas condiciones. Por lo tanto, el esquema anterior recoge todas las posibles soluciones de (2.23).

Partiendo de (2.22), podríamos haber elegido eliminar un parámetro que no fuese n_3 . Si hubiésemos eliminado n_1 o n_2 , habríamos obtenido los mínimos del módulo de tensión tangencial correspondientes al eje principal I y al eje principal II, más alguna de las soluciones de máximo anteriores, y otra nueva solución de máximo, que es:

$$n_3 = 0 \quad n_1 = \pm 1/\sqrt{2} \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = (\sigma_I - \sigma_{II}) / 2$$

El resultado de este análisis es por tanto, que existen tres mínimos relativos del módulo de la tensión tangencial, en los que la misma vale cero, y que corresponden a las direcciones principales. Existen seis máximos relativos del módulo de la tensión tangencial, que ocurren en los planos bisectores entre cada pareja de planos principales, como se ilustra en la figura 2.11. El valor de estos máximos de tensión tangencial es igual a la semidiferencia de las tensiones principales correspondientes. El máximo absoluto es evidentemente el mayor de estos máximos relativos.



Figuras 2.11.- Planos de tensión tangencial máxima.

2.6.- Representación de Mohr

La representación de Mohr es una construcción gráfica que permite relacionar las componentes intrínsecas del vector tensión con la orientación del plano correspondiente en el espacio. Aunque es claro que muchos métodos gráficos han perdido gran parte de su interés ante las posibilidades que ofrece el cálculo por ordenador, el lector no debe pensar de ningún modo que es ésta una de tantas representaciones gráficas de interés escaso. Muy al contrario, la representación de Mohr constituirá probablemente la idea más clara y perdurable que el lector poseerá acerca del estado de tensiones en un punto.

Para estructurar su estudio, trataremos en primer lugar la representación de Mohr desde un punto de vista analítico, que revela sus particularidades más interesantes sin desviar la atención hacia complicaciones de tipo geométrico. Estas últimas son sin embargo necesarias si se quiere utilizar la representación de Mohr como instrumento gráfico de cálculo, y serán tratadas en segundo lugar.

Enfoque analítico de la representación de Mohr

Adoptemos unos ejes coordenados según las direcciones principales. Obtuvimos en la sección anterior el vector tensión en estos ejes, así como las expresiones de sus componentes intrínsecas σ y τ , que satisfacían las relaciones:

$$\sigma^2 + \tau^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2$$

$$\sigma = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

La tercera de las ecuaciones expresa que \mathbf{n} es un vector unitario. En forma compacta, estas ecuaciones pueden escribirse:

$$\begin{bmatrix} \sigma_I^2 & \sigma_{II}^2 & \sigma_{III}^2 \\ \sigma_I & \sigma_{II} & \sigma_{III} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Las ecuaciones (2.24) constituyen el fundamento de la representación de Mohr, la cual se elaborará manipulando apropiadamente dichas ecuaciones, e interpretando gráficamente los resultados. Conviene enfatizar que, pese a la aparente complejidad que tendrán dichas manipulaciones, no vamos a utilizar ninguna información adicional para construir la representación de Mohr. El saber esto nos permite adelantar cuáles serán las posibilidades y limitaciones de dicha representación, aunque todavía no sepamos en qué consiste exactamente. Estas posibilidades y limitaciones serán las mismas que presente el conjunto de ecuaciones (2.24). Realicemos una breve reflexión preliminar acerca de ello :

- La tensión tangencial τ aparece solo como τ^2 , por lo que el signo de la tensión tangencial será indiferente en la formulación. Nótese que de hecho no hemos definido ningún convenio de signos para τ .
- La tensión normal σ aparece como tal en la segunda de las ecuaciones, por lo que esta formulación la recoge como un escalar con signo. Recordemos que el convenio de signos adoptado es el que se desprende de la definición de σ como producto escalar, ecuación (2.2), resultando positiva si es de tracción.
- Las componentes n_j del vector normal al plano aparecen como n_j^2 . Por lo tanto su signo es indiferente en la formulación. Ello implica que si unas componentes de \mathbf{n} , digamos (a, b, c) , satisfacen (2.24), también lo harán $(-a, b, c)$, $(-a, -b, -c)$, etc. Resulta así que para unas componentes intrínsecas dadas σ, τ de la tensión, existirán ocho planos solución sobre los que la tensión presenta esas componentes intrínsecas. Cuatro de las soluciones del vector \mathbf{n} son directamente opuestas a las otras cuatro, definiendo en realidad el mismo plano, salvo por la dirección exterior. La figura 2.12 ilustra esta multiplicidad de soluciones.
- En cuanto a las posibilidades que ofrece (2.24), las más inmediatas se derivan de considerar conocidas las tensiones y direcciones principales, y son las siguientes: 1º) el cálculo de las componentes intrínsecas del vector tensión que actúa sobre un plano dado. 2º) el cálculo de la orientación del plano (los planos) cuyo vector tensión tiene componentes intrínsecas dadas. El determinante de la matriz cuadrada de (2.24) es distinto de cero siempre que las tensiones principales sean todas de distinto valor: $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$. Este es el caso general, y supondremos que esto es así salvo indicación en contrario. El caso particular de dos o tres tensiones principales iguales se analizará separadamente más tarde.

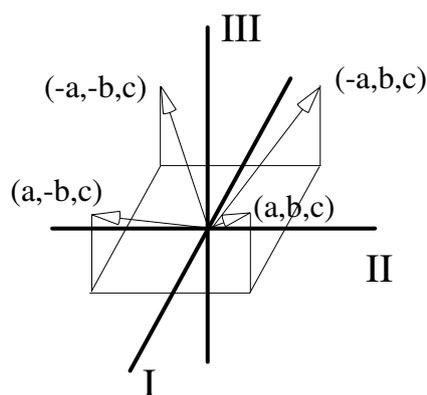


Figura 2.12.- Cuatro soluciones de \mathbf{n} que definen planos con σ y τ dadas (las otras cuatro serían directamente opuestas).

Pasemos ya a la obtención de la representación de Mohr. Supongamos n_1 conocido, lo que equivale a limitar el vector \mathbf{n} a la superficie de un cono de eje x_1 y semiángulo arco coseno de n_1 . La ecuación (2.24) puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{II}^2 & \sigma_{III}^2 \\ \sigma_{II} & \sigma_{III} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 - \sigma_I^2 n_1^2 \\ \sigma - \sigma_I n_1^2 \\ 1 - n_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Recordemos brevemente las condiciones básicas de existencia de solución para un sistema de ecuaciones lineales tipo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \text{Compatible: } & \text{Rango}(\mathbf{A}) = \text{Rango}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \\ & \text{Determinado :} && \text{Rango} = \text{N}^\circ \text{ de incógnitas} \\ & \text{Indeterminado:} && \text{Rango} < \text{N}^\circ \text{ de incógnitas} \\ \text{Incompatible: } & \text{Rango}(\mathbf{A}) < \text{Rango}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que (2.25) sea compatible (exista solución en n_2, n_3), las matrices de coeficientes y la matriz ampliada deben ser del mismo rango, lo cual sólo puede ocurrir en este caso si el determinante de la matriz ampliada es cero:

$$\begin{vmatrix} \sigma^2 + \tau^2 - \sigma_I^2 n_1^2 & \sigma_{II}^2 & \sigma_{III}^2 \\ \sigma - \sigma_I n_1^2 & \sigma_{II} & \sigma_{III} \\ 1 - n_1^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

Desarrollemos este determinante por la primera columna:

$$(\sigma^2 + \tau^2 - \sigma_I^2 n_1^2)(\sigma_{II} - \sigma_{III}) - (\sigma - \sigma_I n_1^2)(\sigma_{II}^2 - \sigma_{III}^2) + (1 - n_1^2)(\sigma_{II}^2 \sigma_{III} - \sigma_{III}^2 \sigma_{II}) = 0$$

Dividiendo entre $(\sigma_{II} - \sigma_{III})$ y agrupando términos se obtiene:

$$\sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_{II} + \sigma_{III}) + [\sigma_{II} \sigma_{III} + n_1^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_I - \sigma_{II})] = 0 \quad (\text{familia 1}) \quad (2.27)$$

Que es la ecuación de una familia de circunferencias de parámetro n_1 en un espacio bidimensional $\sigma - \tau$, a la que llamaremos familia 1 de circunferencias. La primera de las figuras 2.13 muestra la circunferencia de esta familia que se obtiene para $n_1 = 0$. Por tanto, las combinaciones posibles de tensión normal y tangencial en planos paralelos al eje I que pasan por el punto considerado, son las que describe esta circunferencia.

Recordemos que la ecuación de una circunferencia de centro (a,b) y radio R en un espacio descrito por coordenadas cartesianas $x-y$, es: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, pudiéndose identificar inmediatamente que el centro es común a toda la familia 1 de circunferencias (son por tanto concéntricas), y está en la posición $\sigma = (\sigma_{II} + \sigma_{III})/2$; $\tau = 0$.

Si en (2.24) hubiésemos elegido dar por conocido n_2 , hubiésemos obtenido la ecuación de otra familia de circunferencias de parámetro n_2 , que llamaremos familia 2 de circunferencias. Su expresión es:

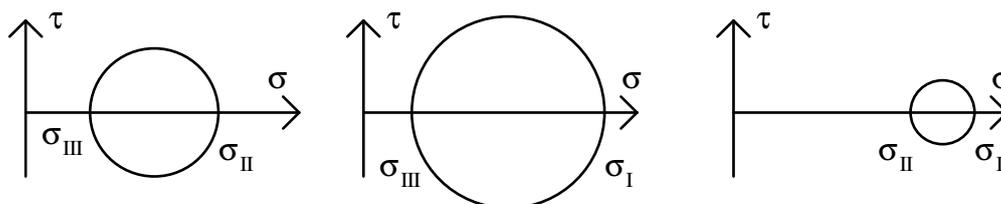
$$\sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_{III} + \sigma_I) + [\sigma_{III} \sigma_I + n_2^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_{III})] = 0 \quad (\text{familia 2}) \quad (2.28)$$

Nuevamente se trata de una familia de circunferencias concéntricas. El centro está en la posición $\sigma = (\sigma_{III} + \sigma_I)/2$; $\tau=0$. La circunferencia de esta familia que tiene $n_2 = 0$ se muestra en la segunda de las figuras 2.13. Las combinaciones posibles de tensión normal y tangencial en planos paralelos al eje II que pasan por el punto considerado, son las que describe esta circunferencia.

Finalmente, si en (2.24) elegimos dar por conocido n_3 , obtendremos la ecuación de otra familia de circunferencias de parámetro n_3 , que llamaremos familia 3 de circunferencias. Su expresión es:

$$\sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_I + \sigma_{II}) + [\sigma_I \sigma_{II} + n_3^2(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{III} - \sigma_I)] = 0 \quad (\text{familia 3}) \quad (2.29)$$

Esta familia de circunferencias concéntricas tiene su centro en $\sigma = (\sigma_{II} + \sigma_I)/2$; $\tau=0$. La circunferencia de esta familia que tiene $n_3=0$ se muestra en la tercera de las figuras 2.13. Los puntos de esta circunferencia representan las combinaciones posibles de tensión normal y tangencial en planos paralelos al eje III que pasan por el punto considerado.



Figuras 2.13.- Circunferencias de las familias 1, 2 y 3, de $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, y $n_3 = 0$, respectivamente.

Supondremos sin pérdida de generalidad que las tensiones principales están ordenadas de la manera siguiente:

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \quad (2.30)$$

Las tres circunferencias de la figura 2.13 aparecerán como muestra la figura 2.14.

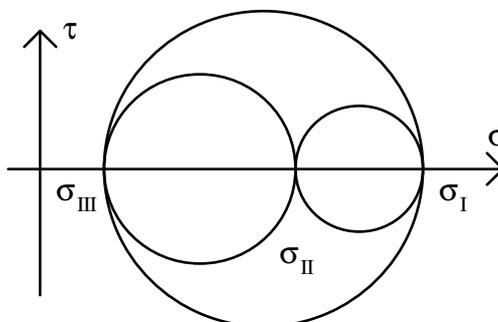


Figura 2.14.- Circunferencias de las familias 1, 2 y 3, de $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, y $n_3 = 0$, respectivamente, siendo $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

Desde un punto de vista físico es evidente que no todos los puntos del plano σ - τ serán representativos de tensiones en planos que pasen por el punto considerado, ya que por ejemplo, ello implicaría la existencia de planos en los que actuarían vectores tensión

de componentes arbitrariamente grandes. Nos proponemos averiguar cuáles son las zonas del plano σ - τ que son representativas. Para ello, consideremos un plano arbitrario cuya normal tiene componentes n_1 , n_2 , n_3 , y veamos dónde puede estar representado su vector tensión en el plano σ - τ .

El círculo de familia 1 que corresponde a la tensión en ese plano tendrá por ecuación la (2.27), que reproducimos a continuación para efectuar cómodamente la identificación de términos con la circunferencia estándar de centro $(a,0)$ y radio R en un espacio x - y :

$$\begin{aligned} \sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_{II} + \sigma_{III}) + [\sigma_{II}\sigma_{III} + n_1^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_I - \sigma_{II})] &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax + [a^2 - R_1^2] &= 0 \end{aligned}$$

Es inmediato identificar el ya conocido centro de la familia, $a=(\sigma_{II} + \sigma_{III})/2$, y el radio que resulta ser:

$$R_1^2 = \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right)^2 - n_1^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_I - \sigma_{II}) \quad (2.31)$$

El primer término del miembro derecho es el radio al cuadrado de la circunferencia de familia 1 de $n_1=0$. El segundo término supone la adición de una cantidad positiva, por lo que R_1 será siempre mayor que el radio de la primera circunferencia de la figura 2.13. Esto supone que la zona de puntos σ - τ representativos es exterior a esa circunferencia, como indica la primera de las figuras 2.15.

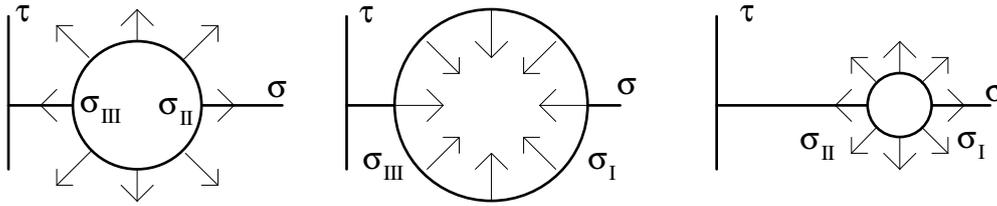
Mediante idéntico procedimiento, obtenemos el radio de la circunferencia de familia 2 a partir de su ecuación (2.28). El resultado es

$$R_2^2 = \left(\frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2} \right)^2 - n_2^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \quad (2.32)$$

Que supone que el radio de una circunferencia de familia 2 será siempre menor que el de la de $n_2=0$, segunda de las circunferencias de la figura 2.13. Por lo tanto sólo los puntos interiores a esta circunferencia serán representativos, lo que se indica en la segunda de las figuras 2.15. Finalmente, obtenemos de la misma forma el radio de la circunferencia de familia 3 a partir de su ecuación (2.29), resultando:

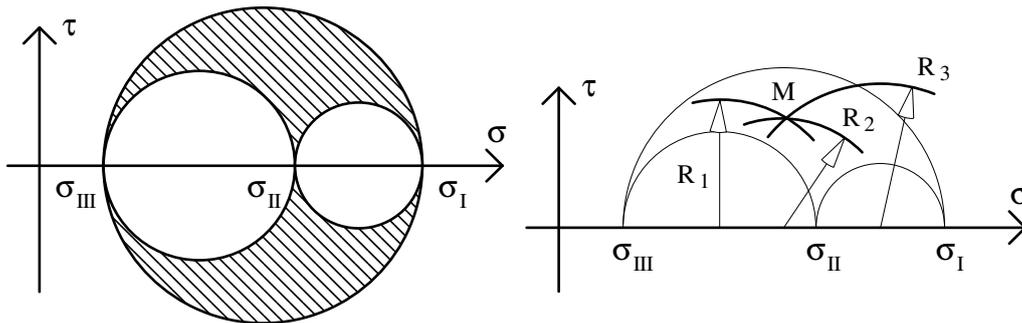
$$R_3^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 - n_3^2(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{III} - \sigma_I) \quad (2.33)$$

Lo que indica que sólo la zona exterior a la circunferencia de familia 3 de $n_3=0$ es representativa de las componentes intrínsecas del vector tensión en algún plano que pasa por el punto. Ello se ilustra en la tercera de las figuras 2.15.



Figuras 2.15.- Acotación de las zonas que son representativas de la tensión en algún plano de corte en el punto considerado.

En definitiva, dadas las tensiones principales, la zona de puntos σ - τ representativa del vector tensión (sobre algún plano que pasa por el punto considerado del sólido) es la limitada por las tres condiciones mostradas en la figura 2.15. Esta zona se muestra sombreada en la primera de las figuras 2.16. Por un punto del diagrama dado, de coordenadas σ - τ , interior a la zona sombreada, pasará una circunferencia de cada familia, como indica la segunda figura 2.16. Se ha representado sólo la mitad superior del diagrama porque como se indicó al principio de este epígrafe, el signo de la tensión tangencial no juega ningún papel en la formulación que sustenta el diagrama de Mohr.



Figuras 2.16.- Región representativa de σ - τ , y circunferencias de las tres familias que pasan por un punto $M(\sigma, \tau)$.

Partiendo del conocimiento de las tensiones principales (para poder trazar el diagrama), y de las direcciones principales (a las que estarán referidas las componentes n_i), las posibilidades más inmediatas que ofrece la representación de Mohr son las siguientes: Si se dan unas componentes intrínsecas del vector tensión (σ, τ) y se quiere calcular la orientación del plano sobre el que actúa esta tensión, se puede trazar el punto (σ, τ) en el diagrama, medir (o calcular) los radios R_1, R_2, R_3 , de las circunferencias de las tres familias, y utilizar las ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.33) para obtener n_1^2, n_2^2 , y n_3^2 . Si se da la orientación de un plano, de normal (n_1, n_2, n_3) , y se quieren saber las componentes intrínsecas del vector tensión que actúa en ese plano, se pueden calcular directamente R_1, R_2 , y R_3 con las ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.33) (será en realidad suficiente con dos de los radios), trazar el punto M en el diagrama, y medir sus componentes (σ, τ).

Las posibilidades anteriores coinciden con las enumeradas al principio de este epígrafe, relativas al sistema de ecuaciones original (2.24). Lo que es más, el cálculo de las componentes intrínsecas dada la orientación del plano era notablemente sencillo

usando aquellas ecuaciones, mientras que el uso del diagrama requiere el uso de compás y regla, o bien realizar cálculos algo molestos. ¿Porqué introducimos entonces la complicación adicional de un diagrama? La respuesta está en que permite apreciar a primera vista algunas características importantes del estado de tensión en el punto. Por ejemplo, permite saber inmediatamente cuál es el máximo absoluto de la tensión tangencial (que será el mayor de los máximos relativos estudiados en el epígrafe 2.5). Vendrá dado por el punto más alto del diagrama, y su valor coincidirá con el radio de la circunferencia de familia 2 de $n_2 = 0$. También permite dilucidar al instante si en algún plano existirá tensión normal de tracción (existirá tracción si parte o todo el diagrama está en la zona positiva del eje σ), lo que es de interés por ejemplo cuando el material tiene poca capacidad de soportar tracción, como es el caso de los hormigones. Además, es frecuente que por ciertos motivos sólo nos interese conocer la tensión en planos paralelos a un eje principal (\mathbf{n} será perpendicular a ese eje). En este caso, sabemos que nos moveremos por una de las circunferencias extremas del diagrama (la de familia i de $n_i = 0$, siendo i el eje respecto al que \mathbf{n} se mantiene perpendicular). Veremos en un apartado posterior que ello supone una simplificación importante, siendo mucho más sencillo en estos casos recordar el modo de operar con el diagrama que memorizar las expresiones analíticas.

Tras la obtención de las ecuaciones (2.24) habíamos decidido aplazar la discusión del caso de dos tensiones principales iguales, que consideraremos ahora. Si dos tensiones principales, por ejemplo σ_{II} y σ_{III} , tienen el mismo valor σ_R , podemos escribir (2.24) como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_I^2 & \sigma_R^2 \\ \sigma_I & \sigma_R \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 + n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Para que el conjunto de tres ecuaciones anterior tenga solución en \mathbf{n} para unas σ y τ dadas, el determinante de la matriz ampliada debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} \sigma^2 + \tau^2 & \sigma_I^2 & \sigma_R^2 \\ \sigma & \sigma_I & \sigma_R \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante por la primera columna, y dividiendo por $(\sigma_I - \sigma_R)$, obtenemos:

$$\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_I + \sigma_R)\sigma + \sigma_I\sigma_R = 0$$

Que es precisamente la ecuación de la circunferencia de familia 2 de $n_2 = 0$ (ver ecuación (2.28)), o también la de familia 3 de $n_3 = 0$ (ver ec. (2.29)), ya que ambas circunferencias coinciden si $\sigma_{II} = \sigma_{III}$. Esto nos muestra que si dos tensiones principales son iguales, las componentes de tensión (σ, τ) de *cualquier* plano solo pueden estar sobre una circunferencia. La figura 2.17 ayuda a entender esta situación como límite del caso de tensiones principales muy similares, en donde resulta claro que la región representativa degenera hacia la circunferencia exterior.

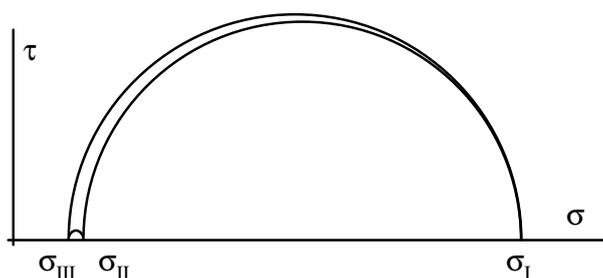


Figura 2.17.- Diagrama casi degenerado, con dos tensiones principales muy próximas.

Por tanto, cuando dos tensiones principales coinciden, el diagrama degenera hacia una única circunferencia. La construcción gráfica pone pues de manifiesto que el valor de τ quedará definido por el de σ . En efecto, si consideramos un valor dado de σ , las dos últimas ecuaciones de (2.34) permiten calcular n^2_1 (en general la componente de \mathbf{n} correspondiente a la tensión principal no degenerada), y también la suma $n^2_2+n^2_3$ (aunque quedan indeterminados los valores de n^2_2 y n^2_3). Calculados estos valores, la primera de las ecuaciones (2.34) permite calcular τ . Para el ejemplo anterior de degeneración de σ_{II} y σ_{III} , el resultado es:

$$n^2_1 = \frac{\sigma - \sigma_R}{\sigma_I - \sigma_R} \quad n^2_2 + n^2_3 = \frac{\sigma_I - \sigma}{\sigma_I - \sigma_R} \quad \tau^2 = -\sigma^2 + (\sigma_I + \sigma_R)\sigma - \sigma_I\sigma_R$$

Puede comprobarse que la última ecuación proporciona valores positivos para τ^2 en el rango $\sigma_R < \sigma < \sigma_I$, anulándose en $\sigma = \sigma_R$ y en $\sigma = \sigma_I$. Esto último era lo esperado a la vista del diagrama degenerado de la figura 2.17.

Enfoque gráfico de la representación de Mohr

Veremos ahora cómo utilizar el diagrama de Mohr como herramienta gráfica de cálculo. El interés de este cálculo gráfico en sí mismo es limitado, ya que el manejo directo de las ecuaciones (2.24) permite realizar las mismas tareas, y resulta más cómodo si se dispone de ayuda automática para los cálculos (por ejemplo cualquier calculadora programable de bolsillo). Las razones por las que abordamos aquí el enfoque gráfico, son por una parte que su particularización a lo que llamaremos "problemas planos" será inmediata y resulta interesante, y por otra parte que llegados a este punto del estudio del diagrama, el esfuerzo adicional requerido es pequeño. Antes de abordar las construcciones gráficas sobre el diagrama recordaremos algunas definiciones y propiedades geométricas:

En primer lugar, recordemos que la potencia de un punto P respecto de una circunferencia se define como el número real que se obtiene al multiplicar las distancias de P a los dos puntos de intersección de la circunferencia con una secante a la misma que pase por P. La potencia resulta ser independiente de cuál sea la secante elegida. Se

adopta la convención de asignarle signo positivo si P es exterior a la circunferencia, y negativo si es interior. Así, con relación a la figura 2.18, tendremos:

$$\text{Pot} = PM \times PN = PM' \times PN' = PQ^2 \quad (2.35)$$

Por otra parte, si en unas coordenadas cartesianas x - y escribimos la ecuación de la circunferencia de radio R y centro (a,b) en la forma $F(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$, se demuestra que la potencia puede calcularse particularizando en las coordenadas del punto $P(x_p, y_p)$ la función $F(x,y)$:

$$\text{Pot} = F(x_p, y_p) = (x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 - R^2 \quad (2.36)$$

Utilizaremos la notación tipo $\text{Pot}(P/C)$ para especificar que se trata de la potencia del punto P respecto de la circunferencia C , para la cual a su vez utilizaremos alguna notación adecuada (generalmente los dos puntos del diámetro definido por el eje σ).

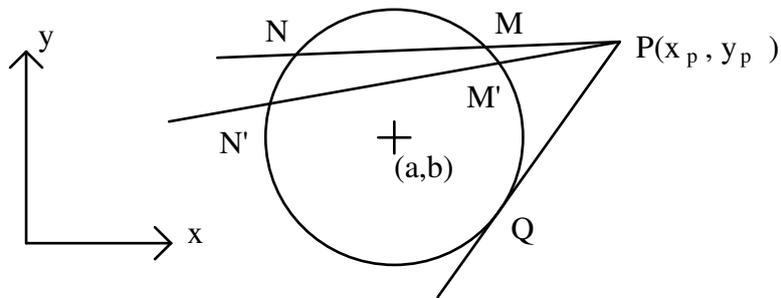
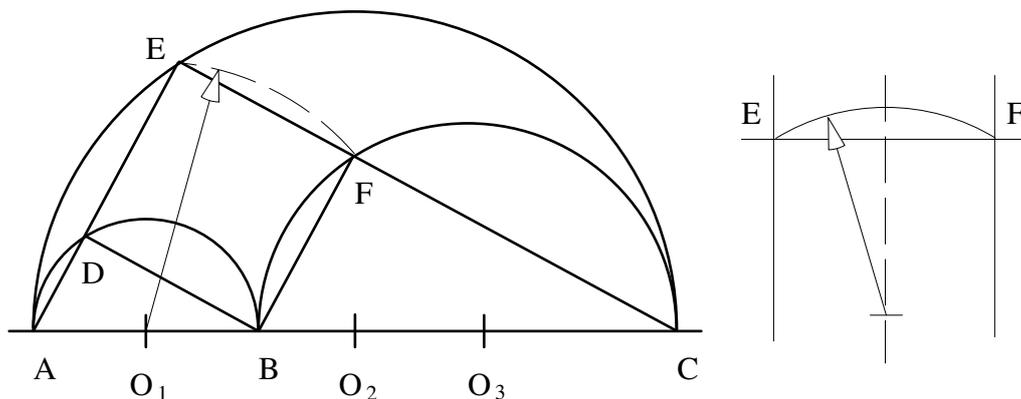


Figura 2.18.- Secantes a una circunferencia trazadas desde un punto P .

En segundo lugar, llamemos la atención sobre algunas relaciones que se presentan en una construcción gráfica del tipo a la de la figura 2.16. Comencemos observando, ver figura 2.19, que un triángulo como AEC será siempre rectángulo, por abarcar un diámetro de una circunferencia.



Figuras 2.19.- Algunas particularidades geométricas de la representación.

Si con los puntos de intersección D y F de el triángulo anterior con las dos circunferencias pequeñas trazamos dos nuevos triángulos, ADB y BFC según se indica, estos triángulos serán también rectángulos, y además semejantes al AEC , dado que comparten con él un vértice (A o C) que no es el que tiene ángulo recto. Si trazamos con

centro O_1 un arco de circunferencia que pase por E, este arco pasará también por F. Esto debe ser así porque O_1 es equidistante de las dos paralelas AE y BF, y los puntos E y F están sobre una misma perpendicular a estas paralelas. La segunda de las figuras 2.19 permiten apreciar claramente que la simetría del trazado respecto de la mediana entre las rectas paralelas implica que el arco de circunferencia debe pasar por E y por F.

Pasemos ya al problema de cálculo gráfico de los cosenos directores (n_1, n_2, n_3) que corresponden a unas componentes (σ, τ) del vector tensión. Estas componentes definirán un punto $M(\sigma, \tau)$ en el plano σ - τ , cuyo trazado se muestra en la figura 2.20. El punto E de la circunferencia de familia 1 que pasa por M tiene evidentemente la misma potencia que M respecto de la circunferencia menor de la familia 1, a la que nos referiremos como circunferencia AB. Esta potencia es, según (2.36):

$$\text{Pot}(M/AB) = \sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_{II} + \sigma_{III}) + \sigma_{II}\sigma_{III} \quad (2.37)$$

Pero las componentes de $M(\sigma, \tau)$ satisfacen la ecuación de la circunferencia de familia 1 que le corresponde (la que pasa por E y F). Esa ecuación no es otra que (2.27), la que podemos utilizar en combinación con (2.37) para obtener:

$$\text{Pot}(M/AB) = -n_1^2 (\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_I - \sigma_{II}) \quad (2.38)$$

Utilizando su definición inicial, esta potencia puede expresarse también como:

$$\text{Pot}(M/AB) = ED \times EA = FB \times EA = (\sigma_I - \sigma_{II}) \cos \alpha (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos \alpha \quad (2.39)$$

Identificando (2.38) y (2.39) tenemos $n_1^2 = \cos^2 \alpha$, es decir:

$$n_1 = \pm \cos \alpha \quad (2.40)$$

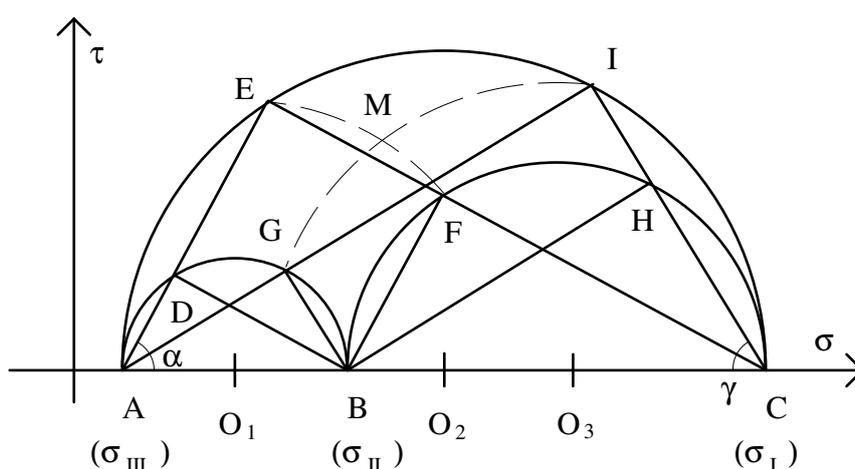


Figura 2.20.- Cálculo gráfico con el Diagrama de Mohr.

Siguiendo una construcción análoga, consideremos ahora el punto I, que pertenece simultáneamente a la circunferencia de familia 3 que pasa por M, y a la mayor de las circunferencias de familia 2. Este punto tendrá la misma potencia que M respecto de la

menor de las circunferencias de familia 3 (circunferencia BC). Los triángulos IAC, GAB, y HBC, serán rectángulos y semejantes entre sí, por lo que GB será paralelo a IC, y el arco de circunferencia de familia 3 que pasa por I deberá pasar también por G. Por tanto, tendremos:

$$\text{Pot (M/BC)} = \sigma^2 + \tau^2 - \sigma (\sigma_I + \sigma_{II}) + \sigma_I \sigma_{II} \quad (2.41)$$

Nuevamente, las componentes (σ, τ) de M satisfacen la ecuación de la circunferencia de familia 3 que le corresponde (la que pasa por I y G). Esta ecuación es la (2.29). Combinándola con (2.41) obtenemos:

$$\text{Pot (M/BC)} = -n_3^2 (\sigma_{II} - \sigma_{III}) (\sigma_{III} - \sigma_I) \quad (2.42)$$

Que desde el punto de vista geométrico puede expresarse como:

$$\text{Pot (M/BC)} = IH \times IC = GB \times IC = (\sigma_{II} - \sigma_{III}) \cos \gamma (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos \gamma \quad (2.43)$$

Identificando (2.42) y (2.43) tenemos $n_3^2 = \cos^2 \gamma$, es decir:

$$n_3 = \pm \cos \gamma \quad (2.44)$$

El cálculo de la componente n_2 resulta inmediato una vez conocidos n_1 y n_3 , sin más que utilizar la condición de que \mathbf{n} es un vector unitario. Sin embargo, en algunos casos puede resultar conveniente calcular n_2 directamente, lo que realizaremos a continuación. La figura 2.21 reproduce una vez más el diagrama de Mohr y el punto M de componentes (σ, τ) .

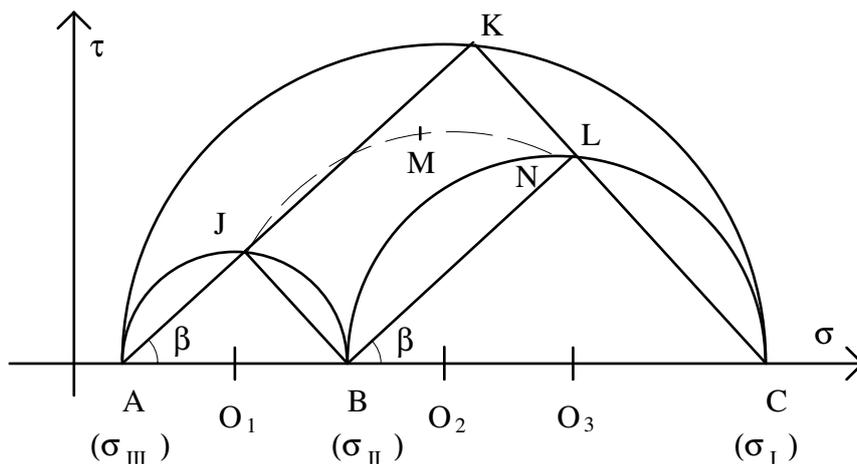


Figura 2.21.- Cálculo gráfico de n_2 .

El punto J se obtiene como la intersección entre la circunferencia de familia 2 que pasa por M y la circunferencia AB (la más pequeña de la familia 1). La recta que pasa por A y J define el punto K sobre la circunferencia AC. La recta que pasa por K y C define el punto L sobre la circunferencia BC. Los triángulos KAC, JAB, y LBC son semejantes. Nótese que no existe ninguna razón para que el arco de circunferencia JM pase por el

punto L. El punto J tiene la misma potencia que M respecto de la circunferencia AC, y vale:

$$\text{Pot (M/AC)} = \sigma^2 + \tau^2 - \sigma (\sigma_I + \sigma_{III}) + \sigma_I \sigma_{III} = (\text{ver ec. (2.28)}) = -n_2^2 (\sigma_I - \sigma_{II}) (\sigma_{II} - \sigma_{III})$$

Por otra parte, de la definición geométrica de la potencia obtenemos:

$$\text{Pot (M/AC)} = -JA \times JK = -JA \times BL = -(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \cos \beta (\sigma_I - \sigma_{II}) \cos \beta$$

Identificando el valor obtenido del cálculo analítico con el del cálculo gráfico, obtenemos $n_2^2 = \cos^2 \beta$, es decir:

$$n_2 = \pm \cos \beta \quad (2.45)$$

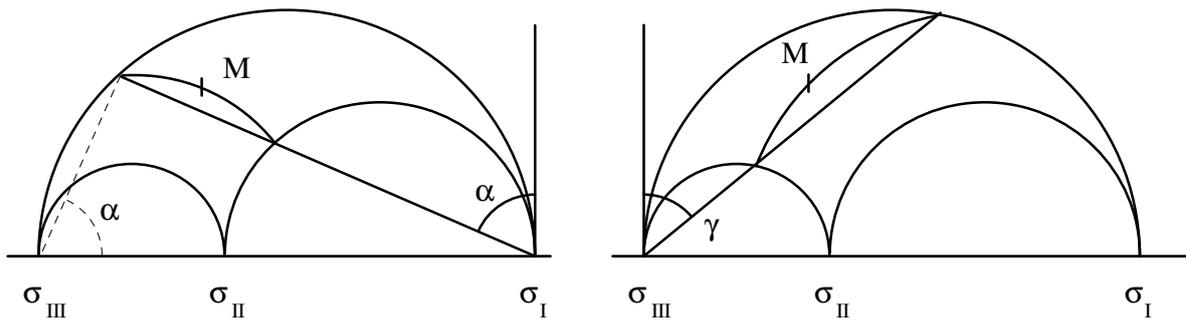
En la figura 2.21 se ha elegido utilizar el punto J como base del trazado, aunque puede realizarse un trazado homólogo utilizando el punto N, definido por la intersección entre la circunferencia BC (la menor de la familia 3), y la circunferencia de familia 2 que pasa por M. El lector puede realizar ese trazado y demostrar de manera totalmente análoga que del mismo se obtiene también al ángulo β .

Las ecuaciones (2.40), (2.44), y (2.45), junto con las correspondientes construcciones gráficas permiten calcular las componentes n_i de los vectores normales a los planos en que las componentes del vector tensión (σ, τ) son dadas, o bien resolver el problema inverso de determinación de las componentes (σ, τ) que corresponden a unas n_i dadas. Sin embargo, tal como se han desarrollado, los procedimientos a seguir resultan más bien difíciles de recordar. Por ello presentamos seguidamente a modo de recapitulación dichos procedimientos, organizados en un esquema más mnemotécnico.

a) σ, τ dados. Se pretende calcular n_1, n_2, n_3 .

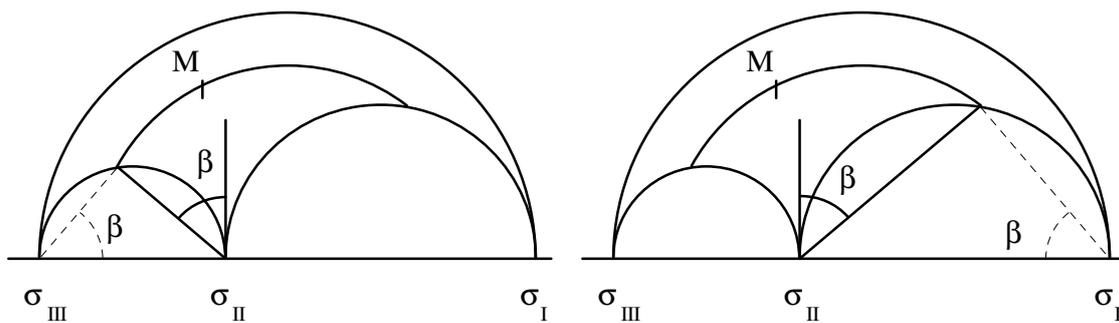
Para calcular n_1 , trazamos la circunferencia de familia 1 que pasa por $M(\sigma, \tau)$. Trazamos la recta que pasa por su intersección con las circunferencias extremas de las familias 2 y 3. Esta recta debe pasar por el punto $(\sigma_I, 0)$, y forma con la vertical en este punto (σ_I) el ángulo $\alpha = \text{acos } n_1$ (ver primera de las figuras 2.22). Nótese que el ángulo indicado coincide efectivamente con α tal como fue calculado en la figura 2.20, por ser sus lados perpendiculares entre sí. Resulta más fácil de recordar que el ángulo correspondiente a n_1 se mide en la vertical de $\sigma = \sigma_I$.

Para calcular n_3 , trazamos la circunferencia de familia 3 que pasa por $M(\sigma, \tau)$. Trazamos la recta que pasa por su intersección con las circunferencias extremas de las familias 1 y 2. Esta recta debe pasar por el punto $(\sigma_{III}, 0)$, y forma con la vertical en este punto (σ_{III}) el ángulo $\gamma = \text{acos } n_3$ (ver segunda de las figuras 2.22). Nuevamente resulta más fácil de recordar que el ángulo correspondiente a n_3 se mide en la vertical de $\sigma_{III} = 0$.



Figuras 2.22.- Resumen del procedimiento para el cálculo gráfico de n_1 y n_3 .

Para calcular n_2 , trazamos la circunferencia de familia 2 que pasa por $M(\sigma, \tau)$. Trazamos la recta que pasa por su intersección con la circunferencia extrema de la familia 1 (o bien de la familia 3) y por el punto $(\sigma_{II}, 0)$. Esta recta (también la alternativa) forma con la vertical en este punto $(\sigma_{II}, 0)$ el ángulo $\beta = \text{acos } n_2$ (ver figuras 2.23).



Figuras 2.23.- Resumen del procedimiento para el cálculo gráfico de n_2 .

b) n_1, n_2, n_3 dados. Se pretende calcular σ, τ .

El problema se reduce a trazar dos de las circunferencias de la familia 1, 2, o 3 que corresponden al vector \mathbf{n} dado. La intersección de las dos circunferencias define el punto (σ, τ) buscado. La tercera circunferencia debe pasar por el mismo punto, y puede utilizarse como comprobación. Por ejemplo trazamos el ángulo $\alpha = \text{acos } n_1$ desde la vertical en $\sigma = \sigma_I$. Con los puntos de intersección de la recta así obtenida con las circunferencias extremas de las familias 2 y 3 trazamos el círculo de familia 1, sobre el que estará el punto buscado. Trazamos después el ángulo $\gamma = \text{acos } n_3$ en la vertical de $\sigma = \sigma_{III}$. Con los puntos de intersección con las circunferencias extremas de las familias 1 y 2 trazamos la circunferencia de familia 3, sobre la que también debe estar el punto buscado, con lo que éste queda definido. Como comprobación, podemos trazar desde la vertical en $\sigma = \sigma_{II}$ el ángulo $\beta = \text{acos } n_2$ (siendo indiferente si se traza hacia la derecha o hacia la izquierda). Si β se trazó hacia la izquierda, la intersección de la recta obtenida con la circunferencia extrema de la familia 1, define un punto de la circunferencia de familia 2 que debe pasar también por nuestro punto (σ, τ) . Si β se trazó hacia la derecha, la intersección se

produce con la circunferencia extrema de la familia 3 (ver figura 2.23), procediéndose análogamente. Las figuras 2.22 y 2.23 sirven también para ilustrar el procedimiento descrito, sin más que pensar que el orden de trazado es el indicado aquí en lugar del indicado en los párrafos anteriores.

Particularización de la representación de Mohr para problemas planos.

En el punto en que nos encontramos en el estudio de la Teoría de la Elasticidad no podemos aún enunciar en qué consistirá lo que más tarde entenderemos por problemas planos. Daremos ahora una definición con carácter provisional, suficiente para los propósitos de este epígrafe, y completaremos esta definición en un capítulo posterior. Por ahora, entenderemos que el estado de tensión en un punto constituye para nosotros un problema plano cuando se dan los siguientes requisitos:

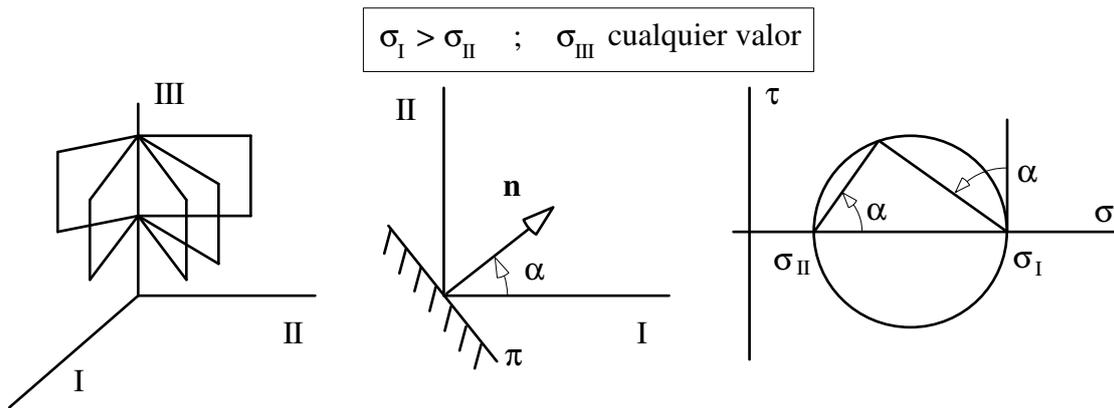
- Una dirección principal de tensión es conocida en ese punto (usualmente será constante en todo el sólido, pero esa consideración no es imprescindible aquí).
- Sólo nos interesa calcular el vector tensión en planos paralelos a esa dirección.

En estos casos, sabemos que las componentes (σ, τ) del vector tensión estarán representadas en el círculo extremo del diagrama de Mohr de la familia "i", siendo n_i la componente nula del vector normal al plano (referido a ejes principales). Tendremos así la importante simplificación de que manejaremos sólo una circunferencia.

Representaremos el sólido en la perspectiva plana que resulta de observar el mismo desde un punto del eje principal conocido. Este eje se confunde con un punto, y los planos en que interesa analizar el vector tensión se ven como rectas en esta perspectiva. Entre estos planos de nuestro interés, existirán dos que sean principales. Por simplicidad, vamos a denotar como σ_I y σ_{II} las tensiones que se dan en estos planos, independientemente de que el valor de la tensión principal de la dirección conocida inicialmente sea mayor, intermedio, o menor que σ_I y σ_{II} . Nótese por tanto que el orden de los ejes principales puede no ser coincidente con el orden adoptado en el problema general (dado por $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$) cuando usamos esta convención para problemas planos. Las figuras 2.24 muestran esquemáticamente esta convención.

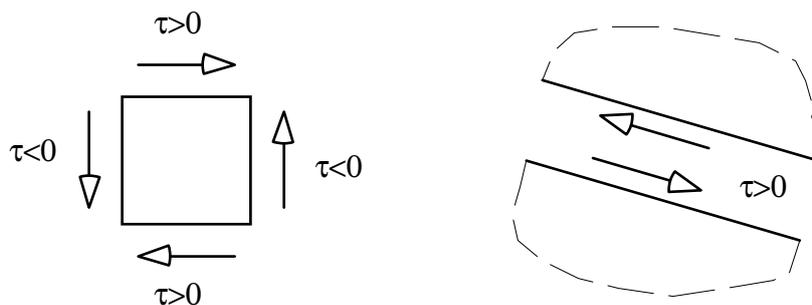
Tratándose de problemas planos, es posible definir un convenio de signos para la componente tangencial τ del vector tensión. Vamos a ver además como una vez definido el convenio de signos podemos recuperar la mitad inferior del diagrama de Mohr para los cálculos. El convenio de signos que usaremos será el siguiente:

Asignamos valor positivo al escalar τ si el sólido queda a la derecha, según un observador que avanza en la dirección de la tensión tangencial.



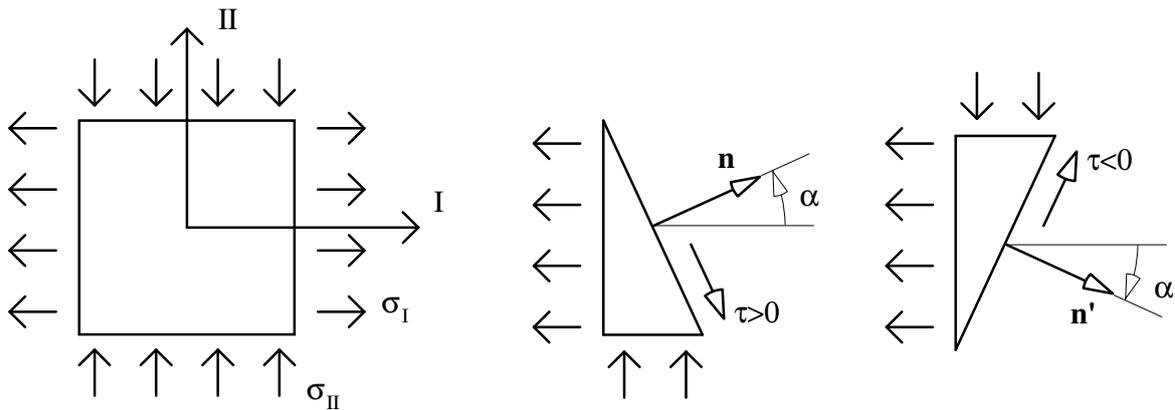
Figuras 2.24.- Convenciones para el diagrama de Mohr en problemas planos.

Es preciso insistir en que este convenio de signos se define con el único objetivo de sacar mayor partido de la representación de Mohr en problemas bidimensionales, y que no guarda ninguna relación con el convenio de signos adoptado para las componentes del tensor de tensiones. De hecho, ambos convenios son contradictorios entre sí, circunstancia ineludible que el lector debería asumir con urgencia. Por ejemplo, la primera figura 2.25 muestra un elemento diferencial de sólido en un problema bidimensional. Si las tensiones tangenciales tienen los sentidos especificados por las flechas, sus signos según el convenio de signos del diagrama de Mohr serían los indicados. Sin embargo, si consideramos un sistema de ejes 12 paralelos a las caras del elemento (no serían ejes principales, claro está), esas componentes de tensión tangencial serían todas positivas según el convenio de signos del tensor de tensiones. En la segunda figura 2.25 puede apreciarse también que, con este convenio, la tensión tangencial mantiene su signo al considerar el sólido a uno u otro lado del plano de corte.



Figuras 2.25.- Convenio de signos para τ , aplicable al diagrama de Mohr bidimensional.

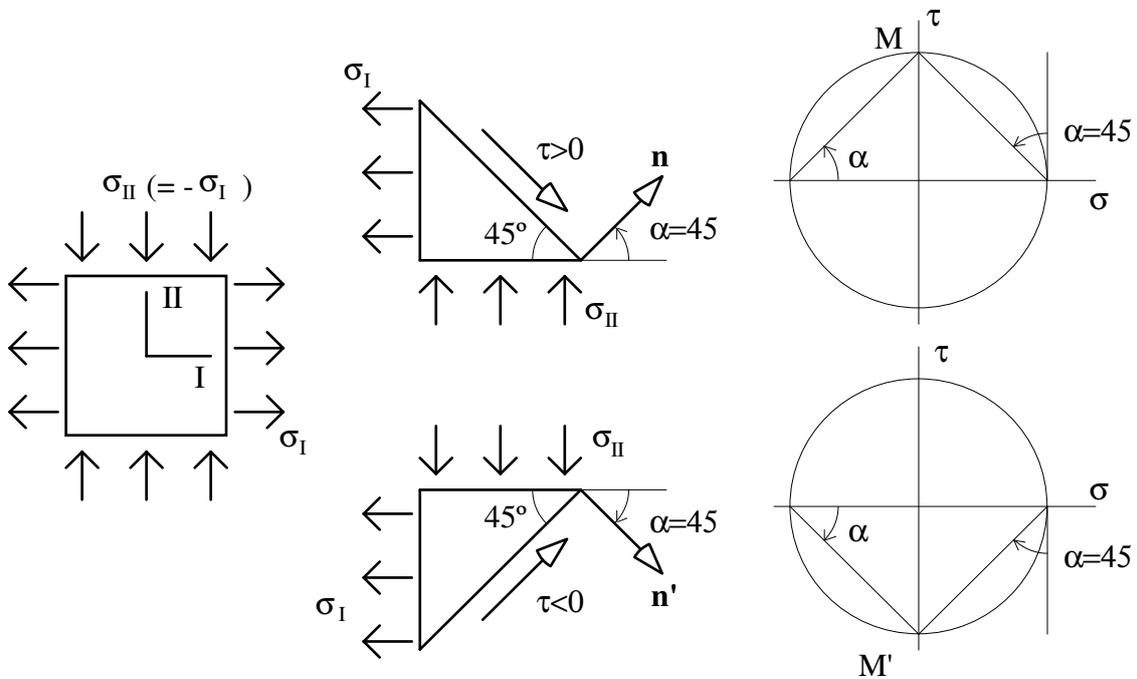
Sabemos que el módulo de la tensión tangencial será el mismo en un plano de orientación $+\alpha$ que en uno de orientación $-\alpha$ (notemos de paso que en problemas bidimensionales la orientación del plano queda definida por un sólo ángulo). Esto debe ser así porque siendo $n_1 = \cos \alpha$ obtenemos el mismo valor n_1 , y a la vista de las ecuaciones (2.24) ello implica la obtención del mismo valor de τ como escalar sin signo. Dado que ahora tenemos definido el signo de τ , nos preguntamos si ese signo se mantiene o no cuando cambiamos el signo de α . Para responder esta pregunta, podemos analizar un ejemplo sencillo como el de la figura 2.26.



Figuras 2.26.- Cambio de signo de τ al cambiar el sentido del ángulo α .

En este ejemplo τ cambia su signo al cambiar el sentido de α . Es fácil darse cuenta de que esto ocurrirá siempre, si observamos que la tercera figura puede obtenerse a partir de la segunda mediante una reflexión respecto del eje I, operación en la que el signo de τ siempre cambiará.

Lo anterior muestra que el haber establecido un convenio de signos para τ , conlleva el que sea necesario precisar el sentido de giro de α , que ahora no es indiferente. En el manejo del diagrama de Mohr se dará una de las dos situaciones siguientes: o bien el sentido de giro de α es el mismo en el espacio físico que en el diagrama, o bien es contrario. Para dilucidar cuál de las dos alternativas es la correcta, es suficiente analizar un caso particular como el mostrado en las figuras 2.27, en que $\sigma_I = -\sigma_{II}$.



Figuras 2.27.- El sentido de giro de α coincide en el espacio físico y en el diagrama.

En estas figuras apreciamos que si $\alpha = +45^\circ$ (asignaremos por ejemplo signo positivo a los ángulos en sentido antihorario), el equilibrio requiere que sólo exista tensión tangencial, y que ésta sea positiva. El diagrama de Mohr es una circunferencia de centro en el origen, y M debe ser el punto que represente al vector tensión en el plano correspondiente. Este punto se obtiene en el diagrama mediante un giro α del mismo sentido que el aplicado en el espacio físico. Se ilustra también el caso de $\alpha = -45^\circ$, en el que el punto representativo del vector tensión es M'. Como detalle final, recordemos que debido a las propiedades geométricas de la circunferencia, el ángulo α que forma un diámetro AB de la misma con una recta que pasa por uno de sus extremos A y por otro punto M de la circunferencia es la mitad del ángulo que forma el diámetro AB con la recta que pasa por M y por el centro de la circunferencia. Esta propiedad se ilustra en la figura 2.28. Su interés radica en que permite asegurar que los vectores tensión en dos planos perpendiculares entre sí estarán representados en puntos diametralmente opuestos en la circunferencia de Mohr.

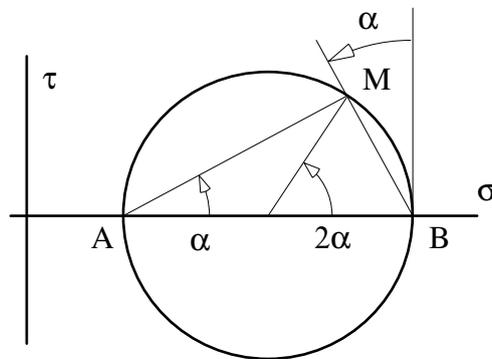
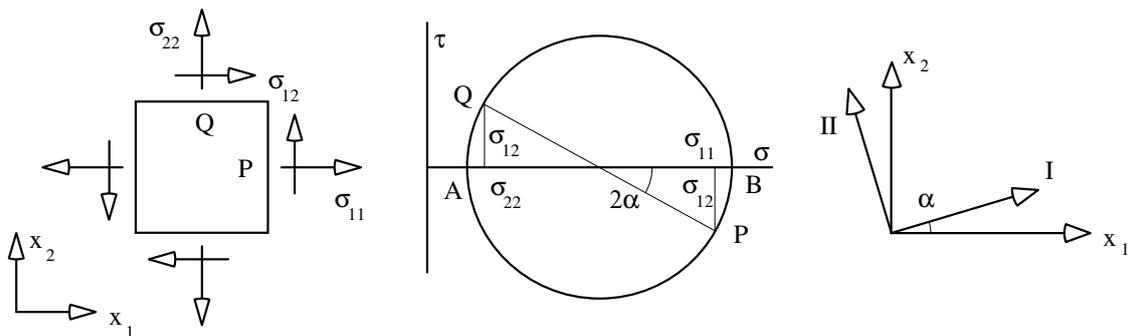


Figura 2.28.- Relación de ángulos en la circunferencia de Mohr.



Figuras 2.29.- Trazado del diagrama conocido el tensor de tensiones.

Una de las utilidades de esta propiedad la encontramos cuando necesitamos trazar el diagrama de Mohr a partir de las componentes del tensor de tensiones en unos ejes no principales. El procedimiento se ilustra en las figuras 2.29, en las que el estado de tensiones en el punto respecto de los ejes (x_1, x_2) se supone conocido. Comenzamos trazando el punto P del diagrama que representa la tensión en el plano que también hemos llamado P. Trazamos análogamente el punto Q. Como ambos planos forman 90° , sabemos que estarán representados en los extremos de un diámetro en el diagrama. Por tanto, el centro de la circunferencia estará en la intersección de la recta PQ con el eje σ , con lo que su trazado es ya inmediato. La construcción anterior permite saber también la

orientación de las direcciones principales. La dirección principal I se encontrará a un ángulo α de la normal al plano P, ángulo que tenemos trazado (como 2α). También se indica aproximadamente la orientación de las direcciones principales en este ejemplo.

2.7.- Tensor medio y tensor desviador. Espacio de tensiones principales.

Dadas las componentes σ_{ij} del tensor de tensiones en un punto, es en ocasiones conveniente considerar su descomposición en suma de dos nuevos tensores, a los que llamaremos tensor medio (o tensor esférico) y tensor desviador. El primero es en cierto sentido una medida del nivel de presión hidrostática media en ese punto, tomando como valor de la presión el promedio de las tensiones principales, que podemos calcular como el primer invariante dividido entre tres. El segundo tensor contiene la desviación respecto de ese estado de presión hidrostática. Por tanto, estos tensores están definidos por:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^m + \sigma_{ij}^d \\ \sigma_{ij}^m &= (\sigma_{kk} / 3)\delta_{ij} = (I_1 / 3)\delta_{ij} \\ \sigma_{ij}^d &= \sigma_{ij} - (\sigma_{kk} / 3)\delta_{ij}\end{aligned}\tag{2.46}$$

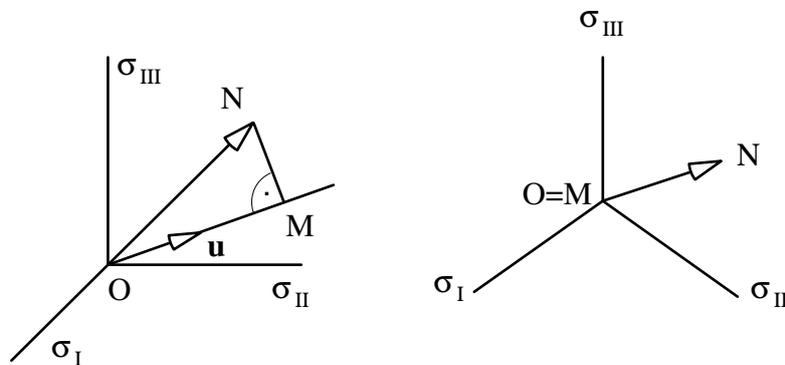
Puede demostrarse que las direcciones principales del tensor desviador son las mismas que las del tensor original. Omitimos esta demostración remitiéndonos a la propiedad, que el lector recordará de sus estudios de álgebra lineal, de que los vectores propios de una matriz cuadrada no varían si se suma una constante (en este caso $I_1/3$) a toda su diagonal. No obstante, podemos evidenciar esta propiedad junto con alguna otra mediante sencillos razonamientos sobre el diagrama de Mohr. Presentamos algunos de estos posibles razonamientos como un ejemplo más de las posibilidades que nos ofrece el manejar con soltura ese diagrama:

Supongamos que expresamos el tensor de tensiones en ejes principales, con lo que podemos imaginar trazado el diagrama inmediatamente. El tensor es diagonal en estos ejes, y al sumar una constante K a la diagonal, el tensor sigue siendo diagonal, luego las direcciones principales no han cambiado. El diagrama de Mohr sufrirá una traslación (de magnitud K) a lo largo del eje σ , manteniéndose su forma. Por tanto (piénsese en el enfoque gráfico), la tensión normal en cualquier plano dado, en particular en los definidos por unos ejes coordenados no principales, se verá incrementada en la misma constante K. Esto hace ver que el estado de tensión obtenido al sumar una constante a la diagonal no depende del sistema de ejes al que tuviésemos referido el tensor.

Por otra parte, la traslación del diagrama no afectará al cálculo de los valores de las tensiones tangenciales (piénsese nuevamente en el procedimiento gráfico), por lo que todos los planos mantendrán la misma tensión tangencial al sumar una constante a la diagonal del tensor.

En algunos textos el lector encontrará referencias al concepto de tensiones octaédricas. Se denomina así a las componentes del vector tensión en planos cuya normal \mathbf{n} está dirigida según alguna trisectriz de las direcciones principales. Puede demostrarse sin ninguna dificultad que la componente normal del vector tensión en estos planos, σ^{oct} , coincide con la tensión media σ^m . Es evidente que estos planos "octaédricos" tienen además una componente no nula de tensión tangencial.

La descomposición del tensor de tensiones en un punto en sus componentes media (o esférica) y desviadora, admite una visualización cómoda representando el estado de tensión en un espacio descrito por unas coordenadas cartesianas que son los valores de las tensiones principales. En este espacio, todos los posibles tensores esféricos estarán representados en la trisectriz de los ejes coordenados. En la primera figura 2.30 se muestra este espacio de tensiones principales, así como la trisectriz mencionada, cuyo vector director unitario es \mathbf{u} , de componentes $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.



Figuras 2.30.- Espacio de tensiones principales.

Si el punto $N(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ de este espacio representa nuestro estado de tensión, la componente de tensión media (o esférica) está representada por el punto M , obtenido mediante la proyección del vector \mathbf{ON} sobre la trisectriz. Véase:

$$|\mathbf{OM}| = \mathbf{ON} \cdot \mathbf{u} = \sigma^m \sqrt{3}$$

$$\mathbf{OM} = |\mathbf{OM}| \mathbf{u} = (\sigma^m, \sigma^m, \sigma^m)$$

Por lo tanto, la componente desviadora del tensor de tensiones está representada por \mathbf{MN} . Si observamos esta representación desde una perspectiva isométrica, la componente \mathbf{OM} se confunde en un punto con el origen, mientras que la componente desviadora \mathbf{MN} se aprecia en su verdadera magnitud, como muestra la segunda de las figuras 2.30. Esta representación isométrica del espacio de tensiones principales se conoce como representación de Haig-Westergaard.

Parece obligado un comentario final acerca de la posible utilidad de la descomposición anterior del tensor de tensiones. Existen muchos materiales de interés en los que el límite de comportamiento elástico lineal depende sólo de la componente desviadora del tensor de tensiones, siendo este hecho lo que justifica la descomposición aludida. Incidiremos con mayor profundidad sobre ello en un capítulo posterior.

2.8.- Propiedades compartidas por otras magnitudes tensoriales.

Como se indicó en el capítulo primero, existen muchas magnitudes de la física que tienen carácter tensorial. Aprovecharemos el esfuerzo que hemos dedicado al estudio del tensor de tensiones poniendo de manifiesto las propiedades ya estudiadas del mismo que también poseerán otros tensores. Resulta claro que estas propiedades comunes serán las que deriven de la ley de transformación de los tensores. Es notorio que en realidad casi todos los desarrollos de este capítulo están precisamente basados en la ley de transformación. Sólo las ecuaciones de equilibrio (2.9) y (2.10) derivan de la naturaleza de fuerzas por unidad de superficie de las componentes del tensor de tensiones, no habiendo motivo para que estas ecuaciones sean satisfechas por otros tensores.

La ecuación de equilibrio (2.10) expresa que el tensor de tensiones será simétrico. Tensores de diferente naturaleza pueden ser simétricos por otros motivos (no procederá en general aplicar razonamientos de equilibrio; piénsese por ejemplo en el tensor de inercia). De hecho muchos tensores de interés son simétricos, entre ellos los enumerados a título de ejemplo en el epígrafe 1.3, y el tensor que representa a la magnitud que definiremos como deformación en el capítulo siguiente. Repasemos por tanto estas propiedades comunes a los tensores simétricos de orden dos. Dado un tensor simétrico β_{ij} asociado a un punto del espacio, es posible:

- Definir un vector \mathbf{b} en ese punto asociado a cada dirección \mathbf{n} , cuyas componentes están dadas por $b_i = \beta_{ij} n_j$
- Encontrar tres direcciones principales $\mathbf{n}^I, \mathbf{n}^{II}, \mathbf{n}^{III}$, perpendiculares entre sí, en las que el vector \mathbf{b} tiene la misma dirección que \mathbf{n} . Los tres valores de $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}$ correspondientes serán los valores principales del tensor.
- Calcular los máximos de la componente tangencial de \mathbf{b} , utilizando expresiones análogas a las presentadas en el epígrafe 2.5.
- Utilizar la representación de Mohr de manera totalmente análoga a como se ha desarrollado en el epígrafe 2.6, con todas sus particularidades. Se han de representar las componentes normal y tangencial del vector \mathbf{b} .
- Descomponer el tensor en sus componentes media y desviadora, y realizar representaciones en el espacio valores principales, si ello tiene interés para la magnitud tensorial en cuestión.

Hay que notar que las componentes normal y tangencial de \mathbf{b} (asociado a \mathbf{n}) pueden no tener siempre un significado físico tan claro como en el caso del tensor de tensiones. Por esto mismo es útil tener en cuenta que la componente normal siempre sería un término de la diagonal del tensor si adoptásemos unos ejes de forma que uno de ellos tenga la dirección de \mathbf{n} . La componente tangencial sería el módulo de la composición vectorial de dos términos no diagonales del tensor, o bien sería directamente la componente no diagonal si el problema es bidimensional.

Es instructivo el intentar plantear situaciones en que podamos aplicar las propiedades estudiadas en el contexto de la tensión a otras magnitudes tensoriales. Por ejemplo, es interesante el caso de presión hidrostática, en el que sabemos que las tres

tensiones principales son iguales, y que por tanto el diagrama de Mohr se reduce a un punto, resultando que cualquier dirección es principal y tiene el mismo valor de tensión principal. Presentamos seguidamente a título de ejemplo algunas curiosidades relacionadas con este tipo de estados en los que el diagrama de Mohr se reduce a un punto:

- En el estudio del movimiento del sólido rígido en el espacio es de interés la magnitud "tensor de inercia" I_{ij} respecto de un punto, que generalmente es el centro de masas del sólido. Si el sólido es tal que podemos apreciar que tres ejes perpendiculares que pasan por el centro de masas son principales de inercia y tienen asociado el mismo momento de inercia ($I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}$) como ocurre por simetría en el sólido de la figura 2.31, entonces el diagrama de Mohr se reduce a un punto, y cualquier recta que pase por el punto considerado del sólido será eje principal de inercia, y el momento de inercia correspondiente será el mismo. El saber esto nos puede ahorrar cálculos molestos de integrales que contengan distancias respecto de una recta de orientación arbitraria.

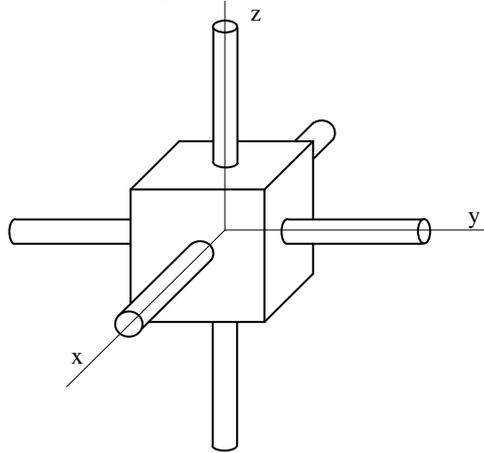


Figura 2.31.- Sólido cuyo tensor de inercia respecto del centro de masas se reduce a un punto en la representación de Mohr.

- En la disciplina de Resistencia de Materiales es de interés la magnitud "tensor de inercia de áreas", cuyas componentes son los momentos y productos de inercia del área de la sección transversal de la barra respecto de unos ejes que pasan por un punto dado, que frecuentemente es el centro de áreas de la sección. Nuevamente, si apreciamos que dos ejes perpendiculares que pasan por el punto son principales, y tienen el mismo momento de inercia, podemos asegurar que cualquier otro eje que pase por el punto será principal de inercia, y con el mismo valor del momento de inercia. Seguramente este resultado no resultaría tan obvio para el lector a partir de la simple inspección de secciones como las mostradas en la figura 2.32.

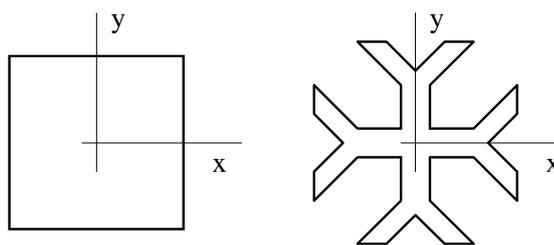
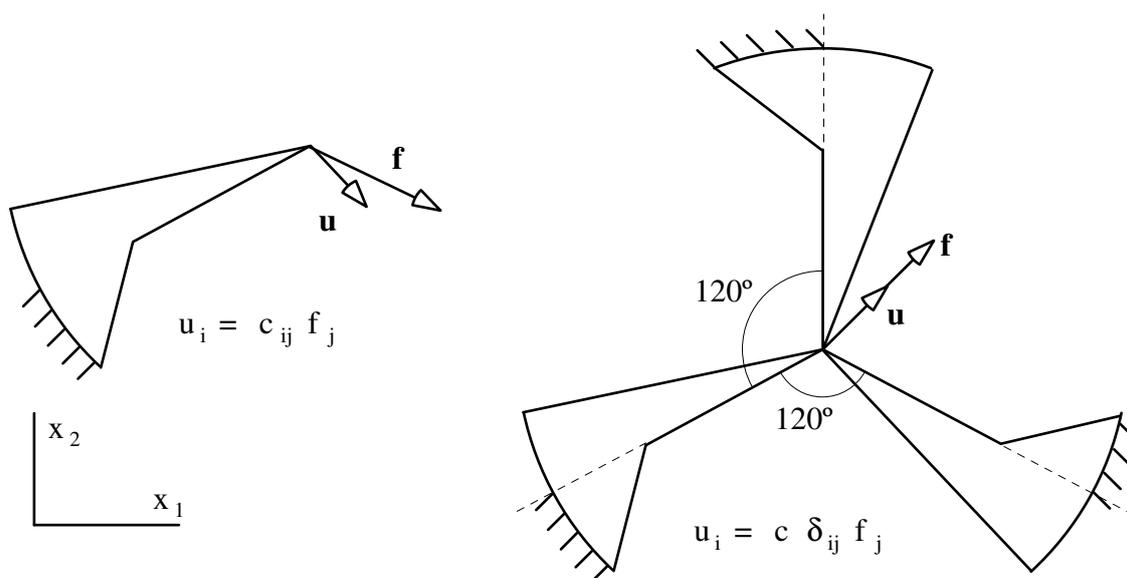


Figura 2.32.- Secciones de barras cuyo tensor de inercia respecto del centro de áreas se reduce a un punto en la representación de Mohr.



Figuras 2.33.- Relaciones lineales entre carga y desplazamiento.

- En el ámbito de la mecánica lineal de sólidos, el vector desplazamiento de un punto del sólido, \mathbf{u} , está relacionado con el vector fuerza puntual \mathbf{f} aplicado en el mismo punto, mediante un tensor simétrico \mathbf{c} que depende del punto considerado (ello se justificará en un capítulo posterior, al estudiar los teoremas integrales). Adoptando un sistema de ejes (x_1, x_2, x_3) las componentes de \mathbf{u} y \mathbf{f} están relacionadas por los "coeficientes de influencia" representados en las componentes del tensor, mediante $u_i = c_{ij} f_j$. En general, el desplazamiento no tendrá la dirección de la fuerza, como se indica en el sólido bidimensional de la primera figura 2.33. Si disponemos en el plano un número cualquiera de sólidos iguales (más de dos) conectados entre sí por el punto donde aplicaremos la fuerza, de forma que la distancia angular entre ellos sea constante, obtenemos una estructura como la mostrada en la segunda figura 2.33. Supongamos aplicada una fuerza (podemos pensar que es unitaria para que su analogía con el vector \mathbf{n} que asociamos al tensor de tensiones sea más patente) en una dirección cualquiera. En principio no sabemos que dirección tendrá el desplazamiento, pero si giramos la fuerza un ángulo igual al que forman los sólidos entre sí (120° en la figura), obtenemos una configuración análoga a la inicial, pero girada ese mismo ángulo. Las componentes intrínsecas (normal y tangencial) del desplazamiento serán por tanto las

mismas, lo que también ocurrirá si aplicamos sucesivos giros del mismo valor a \mathbf{f} . Ahora bien, pensando en el diagrama de Mohr asociado al tensor c_{ij} , lo anterior significa que sucesivos giros del valor correspondiente en el diagrama (240° en el ejemplo de la figura) deben conducir al mismo punto del diagrama. El único diagrama de Mohr en el que esto es posible es el que se reduce a un punto. Como sabemos, esto implica que todas las direcciones serán principales, es decir que el desplazamiento siempre tendrá lugar en la misma dirección que la fuerza aplicada, y además que la constante de proporcionalidad entre la fuerza y el desplazamiento será independiente de la orientación de la fuerza.

Bibliografía:

- FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall
BARBER, J.R., "Elasticity", Kluwer Academic Publishers
PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla
ORTIZ, L., "Elasticidad", ETSII-Univ. Politécnica de Madrid.

Capítulo 3

Deformación.

(“alla breve”)

La capacidad más característica del sólido deformable es precisamente la de poder deformarse, es decir experimentar cambios de forma como consecuencia de las acciones que se le aplican. Este capítulo presenta las magnitudes tensoriales que caracterizan localmente a la deformación, así como su relación con el campo de movimientos del sólido.

3.1.- Análisis de la deformación en el entorno de un punto.

Vamos a considerar la deformación de un sólido como una relación biunívoca y continua entre la posición que ocupa cada punto material del sólido en un estado de referencia, que llamaremos estado inicial o indeformado, y la posición que ocupa en un estado final o deformado. El exigir que esa relación sea biunívoca y continua excluye por ejemplo que a un punto material correspondan dos posiciones distintas de destino, lo que podría darse en situaciones como la propagación de una grieta. Consideraremos estas situaciones de discontinuidad como excepcionales, siendo preciso un análisis especial para su estudio, el cual excede el ámbito de la presente exposición.

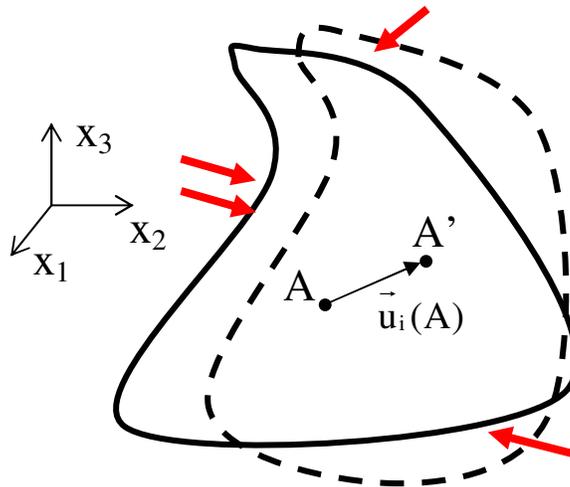


Figura 3.1.- Estados deformado e indeformado de un sólido.

Adoptaremos un sistema de coordenadas cartesianas x_1, x_2, x_3 para describir los puntos del espacio. Este sistema de coordenadas será inmóvil, en el sentido de que sólo

consideraremos que un punto material se ha movido si el valor de sus coordenadas ha cambiado en este sistema. La figura 3.1 representa los estados indeformado y deformado (en línea de puntos) de un sólido. Llamaremos A a la posición que ocupa un punto material del sólido en el estado inicial, y A' a la posición que ese mismo punto material ocupa en el estado final. Definimos el movimiento de ese punto como el vector \mathbf{u} , de componentes u_i , que une las posiciones final e inicial. De acuerdo con las hipótesis básicas que se enunciaron en el capítulo 1, se asume que los desplazamientos son pequeños comparados con las dimensiones del sólido. Más precisamente, y en lo que al modelo matemático se refiere, asumiremos que los desplazamientos son del orden de magnitud de los diferenciales de longitud que adoptemos.

Pretendemos obtener una magnitud tal que, sabido su valor en un punto, permita conocer el incremento de longitud de cualquier segmento recto diferencial que pase por ese punto. Esta idea es en realidad análoga a la que hemos desarrollado para las tensiones: en aquel caso había infinitos planos posibles que pasaban por el punto, y en este caso hay infinitas orientaciones posibles del segmento diferencial. Para las tensiones encontramos una magnitud (el tensor de tensiones) que permitía obtener el vector tensión en cualquier plano. En el estudio de la deformación, buscamos una magnitud que permita conocer el incremento de longitud de cualquier segmento.

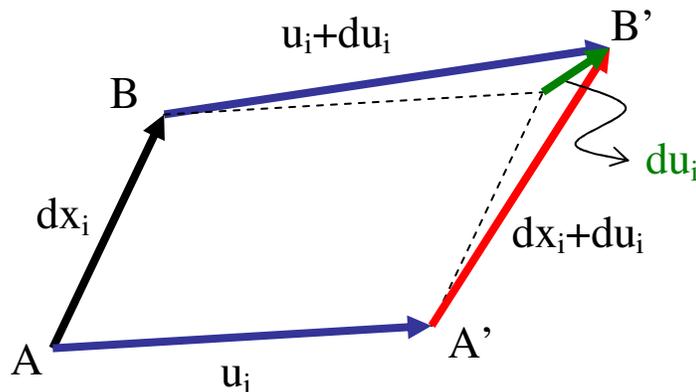


Figura 3.2.- Posiciones inicial y final de dos puntos próximos.

Para tal fin, consideremos dos puntos del sólido, separados por una distancia diferencial, que en estado inicial ocupan las posiciones A y B, y que pasan a las posiciones finales A' y B' como se indica en la figura 3.2. Sean x_i las coordenadas de la posición A, y u_i los movimientos del punto correspondiente. La posición B tendrá coordenadas ligeramente distintas, $x_i + dx_i$, y los movimientos del punto material correspondiente serán también ligeramente distintos, $u_i + du_i$. El diferencial de movimiento, du_i , se interpreta físicamente como la diferencia de movimientos entre esos dos puntos muy próximos, y será un diferencial de 2º orden. Puede expresarse matemáticamente de la forma habitual como:

$$du_i = u_{i,j} dx_j$$

La magnitud $u_{i,j}$ describe el campo de movimientos del sólido, ya que si se conoce su valor,

en todos los puntos, la igualdad anterior permitiría calcular el desplazamiento de cualquier punto del sólido mediante integración y aplicación de las condiciones de contorno adecuadas. Además la “regla del cociente” asegura que $u_{i,j}$ es un tensor (aunque no simétrico), ya que tanto el diferencial de desplazamiento como el de longitud lo son.

El inconveniente principal que tendría utilizar esta magnitud para describir el estado local de deformación sería que tomaría valores distintos para estados de desplazamientos locales que fuesen iguales salvo un movimiento como sólido rígido. Precisamente, nuestra intención es conseguir una magnitud representativa de la deformación (“cambio de la forma”, en sentido estricto), siendo por tanto deseable que sea insensible frente a movimientos de sólido rígido, en los que no hay deformación propiamente dicha. Para conseguir esto, planteamos el artificio de sumar y restar $u_{j,i}/2$ y agrupar términos de la siguiente forma:

$$du_i = u_{i,j} dx_j = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) dx_j + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) dx_j = \varepsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j \quad (3.1)$$

Aparecen así dos nuevos tensores, cuyas expresiones en función del campo de desplazamientos son:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (3.2)$$

O en forma matricial desarrollada,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2} & \frac{u_{1,3} + u_{3,1}}{2} \\ \frac{u_{2,1} + u_{1,2}}{2} & u_{2,2} & \frac{u_{2,3} + u_{3,2}}{2} \\ \frac{u_{3,1} + u_{1,3}}{2} & \frac{u_{3,2} + u_{2,3}}{2} & u_{3,3} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{u_{1,2} - u_{2,1}}{2} & \frac{u_{1,3} - u_{3,1}}{2} \\ \frac{u_{2,1} - u_{1,2}}{2} & 0 & \frac{u_{2,3} - u_{3,2}}{2} \\ \frac{u_{3,1} - u_{1,3}}{2} & \frac{u_{3,2} - u_{2,3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

El primero, ε_{ij} , es un tensor simétrico ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$), mientras que el segundo, ω_{ij} , es un tensor antisimétrico ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$): su matriz asociada coincide con “menos su traspuesta” y tiene ceros en su diagonal. El que ambos son efectivamente tensores es nuevamente inmediato por aplicación de la “regla del cociente”.

Otra particularidad interesante es que el término $\omega_{ij}dx_j$ de (3.1) resulta ser perpendicular al vector dx_j . Véase que en efecto, el producto escalar de ambos vectores es nulo:

$$(dx_i) (\omega_{ij} dx_j) = \omega_{ij} dx_i dx_j = \omega_{12} dx_1 dx_2 + \omega_{13} dx_1 dx_3 + \omega_{21} dx_2 dx_1 + \omega_{23} dx_2 dx_3 + \omega_{31} dx_3 dx_1 + \omega_{32} dx_3 dx_2 = (\text{los sumados } 1^\circ \text{ y } 3^\circ \text{ se cancelan, así como los } 2^\circ \text{ y } 4^\circ, \text{ y los } 3^\circ \text{ y } 6^\circ) = 0$$

Por tanto, en la fig. 3.2 podemos descomponer el vector du_i en los dos sumandos dados por la ecuación (3.1). Nótese que ambos son diferenciales de segundo orden. El trazado resultante se muestra en la fig. 3.3, en la que se ha dibujado en primer lugar el término $\omega_{ij} dx_j$, que es perpendicular a dx_j (o segmento AB). El efecto de este sumando es el de cambiar la orientación de AB en un ángulo diferencial de primer orden, y producir un incremento de longitud que será despreciable en esta formulación. Para razonar esto último, recuérdese que el coseno de un ángulo pequeño, digamos θ , admite desarrollo de la forma $1 - \theta^2/2 + \dots$, de forma que el incremento de longitud debido a este efecto sería del orden de $\theta^2 \cdot dx$, es decir de tercer orden, y vemos que el primer sumando de (3.1), que no tiene porqué ser perpendicular a dx , producirá incrementos de longitud de segundo orden, y por tanto dominantes.

En cuanto al segundo sumando, $\varepsilon_{ij} dx_j$, cabe apuntar que, de igual forma que no esperamos que sea perpendicular a dx , tampoco hay ningún motivo para pensar que deba ser paralelo. Por ello el vector correspondiente se ha dibujado formando un cierto ángulo (no diferencial) respecto del segmento AB.

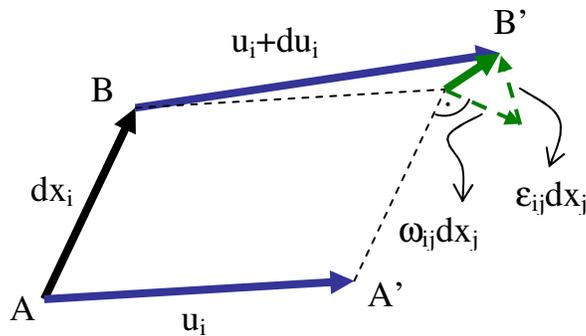


Figura 3.3.- Descomposición del diferencial de movimiento.

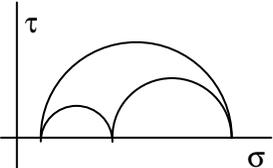
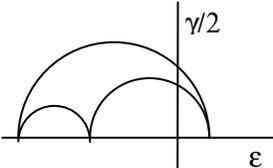
A la vista de lo anterior, es evidente que todo el incremento de longitud del segmento está asociado al primer sumando de (3.1), el vector $\varepsilon_{ij} dx_j$. Dicho incremento de longitud será la proyección del vector $\varepsilon_{ij} dx_j$ sobre la dirección del segmento AB. Esta proyección dividida por la longitud inicial de AB será el incremento de longitud unitario de este segmento:

$$\frac{\Delta \text{Long}}{\text{Long}} = \frac{(\varepsilon_{ij} dx_j) \cdot (dx_i / |dx|)}{|dx|} = \varepsilon_{ij} n_j n_i = \varepsilon_i n_i = \varepsilon \quad (3.3)$$

Como se aprecia, hemos introducido la denominación ε (escalar) para dicho incremento de longitud unitario, que denominaremos “deformación longitudinal” ó “deformación normal”. El hecho relevante que muestra el desarrollo anterior es que, conocidos los 6 escalares ε_{ij} en un punto, es posible calcular el incremento de longitud unitario de cualquier segmento diferencial de dirección \mathbf{n} que pase por ese punto. Para ello sólo hay que efectuar la sencilla operación $\varepsilon_{ij} n_j n_i$, como aparece en (3.3). Por tanto el tensor ε_{ij} es la magnitud que nos

proponíamos encontrar. Se denomina “Tensor de Cauchy” o “Tensor de Pequeñas Deformaciones”.

Es muy notoria la similitud formal entre la expresión $\epsilon = \epsilon_{ij}n_i n_j$ recién obtenida y la $\sigma = \sigma_{ij}n_i n_j$ obtenida en el capítulo anterior, que expresa la componente normal de tensión. De hecho es posible plantear una analogía muy completa entre el tratamiento del problema de tensión y el de deformación del entorno de un punto. Esta analogía permite razonar, sin necesidad de nuevos desarrollos, que gran parte de las operaciones y conceptos presentados en el ámbito de la tensión son directamente generalizables en el ámbito de la deformación (y en realidad generalizables al ámbito de cualquier otra magnitud que pudiera expresarse mediante un tensor simétrico de segundo orden). A continuación se destacan los aspectos más relevantes de dicha analogía:

Tensión	Deformación
n_i vector normal al plano	n_i vector en dirección del segmento
σ tensión normal	ϵ deformación normal (Δ Long. unitario)
T_i (vector tensión) = $\sigma_{ij}n_j$	$\epsilon_i = \epsilon_{ij}n_j$ (definición de ϵ vector)
τ (tensión tangencial) = $\sqrt{T_i T_i - \sigma^2}$	$\gamma/2 = \sqrt{\epsilon_i \epsilon_i - \epsilon^2}$ (definición de “deformación transversal”)
Direcciones principales de tensión. (aquellas con $\tau = 0$)	Direcciones principales de deformación. (aquellas con $\gamma/2 = 0$)
Diagramas de Mohr: 	Diagramas de Mohr: 

En el cuadro anterior se ha introducido la definición de dos nuevas magnitudes: el “vector deformación” ϵ_i y la “deformación transversal” $\gamma/2$. Por el momento, y hasta la lectura del apartado siguiente, pueden considerarse estas denominaciones como meras convenciones, ya que simplemente se han presentado como fruto de una analogía.

No obstante, su sola definición ya pone de manifiesto que será posible realizar diagramas de Mohr también en deformaciones, representando las componentes normal y transversal del vector deformación, de la misma forma que en tensión se realizaban representando las componentes normal y tangencial del vector tensión. Por su propia construcción, no existe duda de que estas representaciones gozarán de idénticas propiedades en los dos ámbitos. La duda que puede plantearse en este momento es si tendrán o no interés dichas representaciones en el ámbito de la deformación. Evidentemente, dicho interés estará en función del posible significado físico que podamos atribuir a las magnitudes que representamos, en particular a $\gamma/2$, que acabamos de introducir de forma un tanto convencional. Veremos en el apartado siguiente que sí tiene un significado físico concreto,

y que la representación de Mohr es efectivamente interesante (no siempre resulta así; por ejemplo, para las magnitudes de inercia asociadas al sólido rígido, que también pueden describirse mediante un tensor simétrico de orden 2, la representación de Mohr, aunque posible, suele considerarse de escaso interés).

3.2.- Interpretación física de las magnitudes asociadas a la deformación.

a) Interpretación de los términos de ϵ_{ij}

En primer lugar, si consideramos un segmento diferencial dirigido según uno de los ejes coordenados, por ejemplo $\mathbf{n} (1,0,0)$, su incremento de longitud unitario calculado según (3.3) será:

$$\epsilon = n_i \epsilon_{ij} n_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \epsilon_{11}$$

Es decir que ϵ_{11} es el incremento de longitud unitario de un segmento diferencial dirigido inicialmente según el eje x_1 . Los términos ϵ_{22} y ϵ_{33} admiten una interpretación análoga en las direcciones x_2 y x_3 respectivamente.

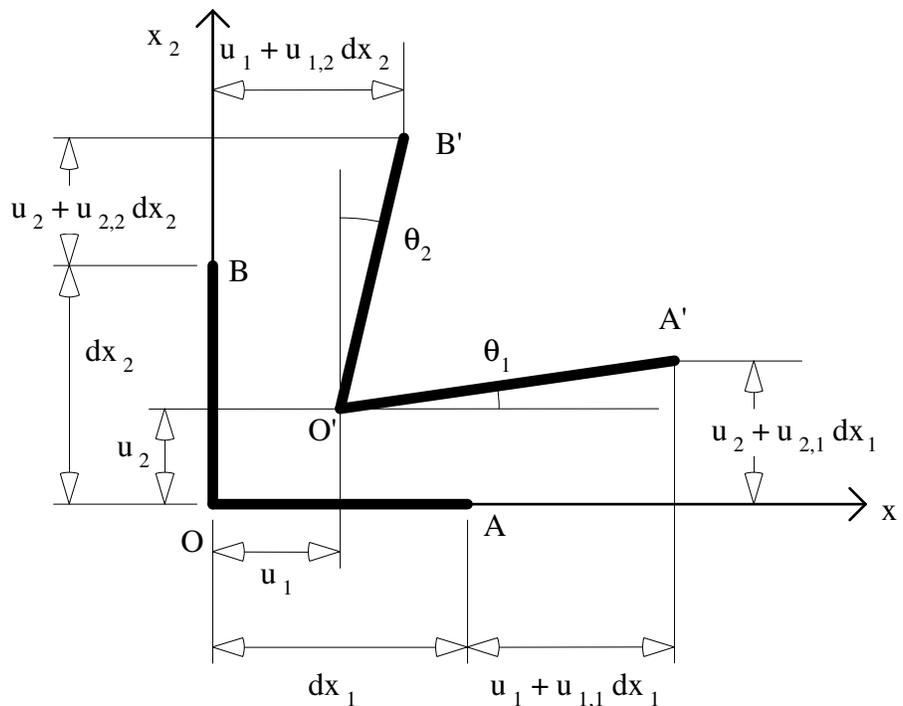


Figura 3.4.- Movimiento de segmentos paralelos a los ejes coordenados (proyección sobre el plano 12).

Para encontrar el significado físico de los términos no diagonales de ε_{ij} , analizaremos los movimientos de dos segmentos OA y OB, perpendiculares entre sí e inicialmente paralelos a dos de los ejes coordenados, como muestra la figura 3.4.

Calcularemos los ángulos θ_1 y θ_2 que forman los segmentos deformados con su orientación inicial. Estos ángulos serán pequeños (diferenciales de primer orden), por lo que podemos aproximar su valor por el de su tangente. Despreciando diferenciales de orden superior, tenemos:

$$\theta_1 \cong \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{u_{2,1}dx_1}{dx_1 + u_{1,1}dx_1} \cong \frac{u_{2,1}dx_1}{dx_1} = u_{2,1} ; \quad \theta_2 \cong \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{u_{1,2}dx_2}{dx_2 + u_{2,2}dx_2} \cong \frac{u_{1,2}dx_2}{dx_2} = u_{1,2}$$

La suma de ambos ángulos es lo que se aparta de $\pi/2$ el ángulo inicialmente recto que formaban los segmentos paralelos a los ejes. Llamaremos a esta cantidad γ_{12} . Por lo tanto,

$$\gamma_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = 2\varepsilon_{12} \quad (3.4)$$

Es decir, que los términos no diagonales del tensor representan la mitad de lo que se cierra el ángulo recto que forman segmentos inicialmente paralelos a los ejes correspondientes a los subíndices.

Aunque ya no es necesario, puede llegarse también a partir de la fig. 3.4 a la conclusión de que los términos diagonales representan las deformaciones longitudinales unitarias de segmentos dirigidos según los ejes. Para ello basta con apreciar que el incremento de longitud de, por ejemplo, OA, puede obtenerse con error despreciable a partir de la proyección sobre x_1 de su estado final, dado que el ángulo que ha girado será en todo caso diferencial. Es inmediato observar que el incremento absoluto de longitud así medido será $u_{1,1}dx_1$, y por lo tanto el incremento relativo será $u_{1,1} = \varepsilon_{11}$, como ya habíamos obtenido.

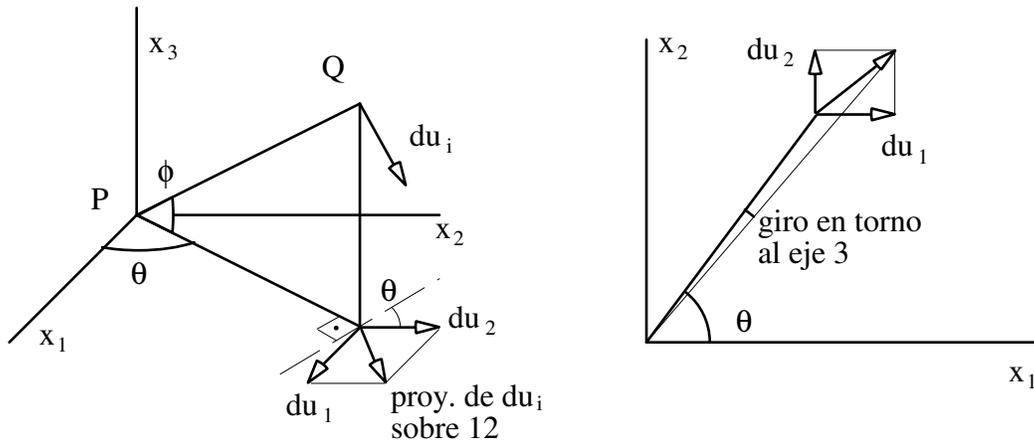
b) Interpretación de los términos de ω_{ij}

Conviene comenzar poniendo de manifiesto que un producto del tipo $\omega_{ij}dx_j$ admite ser expresado como producto vectorial de un cierto vector $\boldsymbol{\omega}$ por el vector $d\mathbf{x}$. En la disciplina de álgebra suele estudiarse esta propiedad bajo un título como “vector dual asociado a una matriz hemisimétrica”, o similar. Su demostración es inmediata sin más que igualar términos e identificar componentes:

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{12}dx_2 + \omega_{13}dx_3 \\ -\omega_{12}dx_1 + \omega_{23}dx_3 \\ -\omega_{13}dx_1 - \omega_{23}dx_3 \end{bmatrix} ; \quad \overline{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \omega_2dx_3 - \omega_3dx_2 \\ -\omega_1dx_3 + \omega_3dx_1 \\ \omega_1dx_2 - \omega_2dx_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_{12} = -\omega_3 ; \quad \omega_{23} = -\omega_1 ; \quad \omega_{31} = -\omega_2 \quad (3.5)$$

Evidentemente, tanto el vector ω_i como el tensor ω_{ij} contienen la misma información. Puede también comprobarse de forma inmediata que $\omega = \text{rot } \mathbf{u} / 2$. En todo caso, el objetivo de este epígrafe es demostrar que los tres escalares independientes contenidos en ω_{ij} (o en ω_i) coinciden con la rotación promedio, en torno a cada uno de los tres ejes coordenados, de todos los segmentos diferenciales posibles que pasan por el punto considerado. Debido a este hecho, el tensor ω_{ij} recibe el nombre de “Tensor Rotación”, y el vector ω_i “Vector Rotación”. Para demostrar lo anterior, vamos a calcular directamente el promedio de giro del entorno de un punto, en torno al eje 3, por ejemplo.



Figuras 3.5.- Rotación de un segmento diferencial en torno al eje 3.

La primera de las figuras 3.5 muestra un punto P del sólido que representamos ya en su posición final, y un punto muy próximo Q, que representamos en la posición resultante de aplicarle un movimiento igual al del punto P (alternativamente podemos pensar sin pérdida de generalidad que el punto P no se mueve, y que el punto Q se representa en su posición inicial). El movimiento del punto Q diferirá del de P en un vector du_i , siendo esta diferencia la que cabe representar en la figura 3.5. En la segunda de las figuras 3.5 se muestra la misma representación, pero proyectada sobre el plano 12, perspectiva en la que vemos con más claridad el giro en torno al eje 3. Teniendo en cuenta que las componentes du_i son diferenciales de un orden superior a dx_i , podemos calcular la rotación en torno al eje 3 como:

$$\text{giro}_3 = \frac{du_2 \cos\theta - du_1 \text{sen}\theta}{|PQ| \cos\phi}$$

En donde hemos incorporado como positivos los giros que están dirigidos en el sentido positivo del eje 3 según la regla del tornillo. Podemos calcular el valor de du_1 , du_2 , a partir de la expresión $du_i = u_{i,j} dx_j$. En nuestro caso $dx_j = (PQ)_j$, es decir:

$$dx_1 = (PQ)_1 = |PQ| \cos \phi \cos \theta$$

$$dx_2 = (PQ)_2 = |PQ| \cos \phi \sin \theta$$

$$dx_3 = (PQ)_3 = |PQ| \sin \phi$$

Con lo que:

$$du_1 = u_{1,1}|PQ| \cos \phi \cos \theta + u_{1,2}|PQ| \cos \phi \sin \theta + u_{1,3}|PQ| \sin \phi$$

$$du_2 = u_{2,1}|PQ| \cos \phi \cos \theta + u_{2,2}|PQ| \cos \phi \sin \theta + u_{2,3}|PQ| \sin \phi$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{giro}_3 = & \left(u_{2,1} \cos^2 \theta + u_{2,2} \sin \theta \cos \theta + u_{2,3} \frac{\sin \phi \cos \theta}{\cos \phi} \right) - \\ & - \left(u_{1,1} \cos \theta \sin \theta + u_{1,2} \sin^2 \theta + u_{1,3} \frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \phi} \right) \end{aligned}$$

Consideremos por un momento ϕ constante. Ello equivale a considerar sólo los segmentos que están sobre un cono de eje 3 en lugar de todos los segmentos posibles. Para calcular el promedio del giro de estos segmentos en torno al eje 3, integramos respecto de θ :

$$\text{promedio giro}_3(\phi = \text{cte}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0; \phi=\text{cte}}^{\theta=2\pi} \text{giro}_3 d\theta$$

Teniendo en cuenta que los valores medios de los productos de funciones trigonométricas que aparecen son:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 1/2 ; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

El promedio del giro de los segmentos considerados es:

$$\text{promedio giro}_3(\phi = \text{cte}) = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2})$$

Apreciamos que este promedio de giro de los segmentos que tienen $\phi=\text{cte}$ no depende del propio ángulo ϕ . Por tanto, el valor promedio anterior es también el promedio del giro de todos los segmentos diferenciales del entorno de P. Además, vemos que este valor coincide con el de la tercera componente del vector rotación:

$$\text{promedio giro}_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}) = \omega_3 \tag{3.6}$$

El resultado anterior puede reproducirse de manera análoga para las componentes 1 y 2, con lo que se demuestra que las componentes del que hemos llamado vector rotación representan efectivamente los promedios del giro del entorno del punto considerado alrededor de cada eje.

Otra apreciación interesante es que el promedio del giro del entorno del punto en torno a cada eje puede calcularse como el promedio de giro respecto de ese eje de dos segmentos cualesquiera perpendiculares entre sí y perpendiculares al eje. En efecto, nótese que en (3.6), $u_{2,1}$ representa el giro en torno al eje 3 de un segmento sobre el eje 1, y análogamente que $-u_{1,2}$ representa el giro entorno al eje 3 de un segmento sobre el eje 2. Como no hemos impuesto ninguna condición al elegir los ejes, (3.6) se satisfará independientemente de la elección de ejes 1 y 2 (perpendiculares a 3).

Como última apreciación, y volviendo sobre la figura 3.3 sabiendo ya el significado físico de ω_{ij} , podemos considerar el movimiento del segmento AB descompuesto de la siguiente manera: Una traslación que lleva al punto inicialmente en A a su posición final A', más una rotación con el punto en A' fijo, que coincide con la rotación promedio del entorno, más otro movimiento que lleva el punto inicialmente en B a su posición final B', también con A' fijo. Este último movimiento implica en general tanto un cambio de longitud del segmento como un cambio de orientación.

c) Interpretación del vector ϵ_i y sus componentes

Dado que $\epsilon_i = \epsilon_{ij} n_j = \epsilon_{ij} dx_j / |dx|$, es claro que el vector ϵ_i es colineal con el vector $\epsilon_{ij} dx_j$ representado en la fig. 3.3. La figura 3.6 ilustra la posición y orden de magnitud de este vector, que en sí mismo no tiene una interpretación física que pueda resultarnos interesante. Sin embargo, sus componentes intrínsecas sí la tienen. De hecho ya hemos visto que su componente normal, $\epsilon = \epsilon_i n_i$, es el incremento de longitud unitario del segmento considerado.

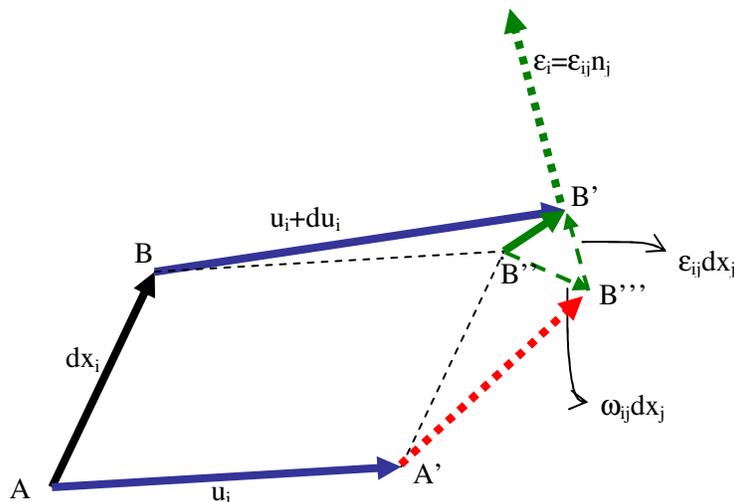


Figura 3.6.- Vector deformación.

Veremos a continuación que la componente transversal $\gamma/2$ también tiene una interpretación física interesante. La fig 3.7 muestra el segmento considerado con sus extremos en las

posiciones A' y B''' indicadas en la fig. 3.6, es decir, tras la traslación y rotación promedio descritas en un párrafo anterior. Por lo demás, la fig. 3.7 puede considerarse como un detalle o subconjunto de la fig. 3.6, en el que se ha dado nombre (θ) al ángulo diferencial que girará el segmento a partir de la posición representada, y también (β) al ángulo que forma el vector deformación con el plano perpendicular al segmento. Nótese que este último ángulo será sensiblemente el mismo tanto si decidimos considerar el segmento en su posición inicial, final, o tras aplicar sólo el giro promedio (esa casuística produce sólo variaciones diferenciales de la orientación del segmento, mientras que β es un ángulo finito). En la fig. 3.7 aparezcan indicaciones “salvo dif. 2º orden” junto a las diversas posiciones del segmento AB, porque es indiferente qué posición se tome, tanto a efectos de cálculo de β como para ser usado como divisor en el eventual cálculo de una deformación unitaria, como se hará de inmediato.

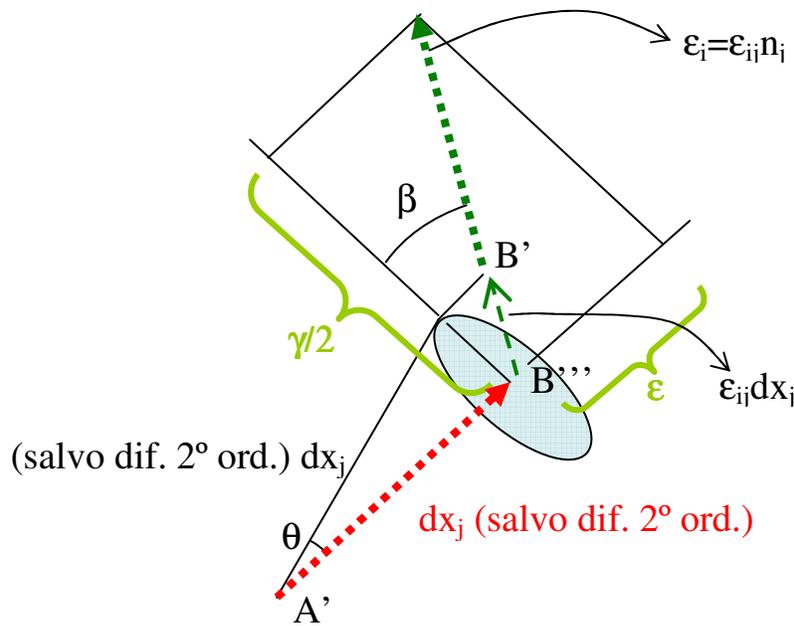


Figura 3.7.- Componente transversal y normal del vector deformación.

Expuesto lo anterior, es sencillo demostrar que el ángulo diferencial θ que gira el segmento a partir de la posición representada coincide con lo que hemos llamado deformación transversal $\gamma/2$. En efecto, teniendo en cuenta que $dx_j/|dx_i|=n_j$, tenemos que:

$$\theta \cong \text{tg}\theta = \frac{|\epsilon_{ij} dx_j| \cos\beta}{|dx_i|} = |\epsilon_{ij} n_j| \cos\beta = |\epsilon_i| \cos\beta = \gamma/2 \quad (3.7)$$

No debe sorprender que, a la vista de la fig. 3.7, lo anterior implique calcular un ángulo como medida de una longitud. Nótese que $\gamma/2$ es adimensional, y su “longitud” puede perfectamente expresar un ángulo en radianes. En definitiva, la deformación transversal $\gamma/2$ se interpreta como el ángulo que gira un segmento AB, medido a partir del movimiento

como sólido rígido que lleva A a su posición final y aplica al segmento la rotación promedio del entorno.

3.3.- Incremento de longitud, superficie y volumen de regiones finitas.

Para conocer el incremento de longitud Δs de una línea s contenida en el sólido o en su superficie, integraremos los incrementos de longitud de cada segmento diferencial de la línea. Para ello es necesario conocer el valor del tensor de deformaciones en cada punto de esa línea. Así, siendo n_i el vector tangente a la curva en cada punto, y ϵ_{ij} el tensor de deformaciones en el mismo punto, tenemos:

$$\Delta L = \int_L \epsilon dL = \int_L \epsilon_j n_j dL = \int_L \epsilon_{ij} n_i n_j dL \quad (3.8)$$

Para calcular el incremento de superficie de una superficie elemental dA , perteneciente a una superficie finita A que puede estar en el contorno del sólido o ser interior al mismo, tomaremos unos ejes coordenados de forma que dos de ellos (ejes 1 y 2) estén en el plano tangente a la superficie A en el punto considerado, y calcularemos el incremento de área de un elemento de lados inicialmente paralelos a esos ejes. La figura 3.8 muestra tal elemento diferencial, de área $OPQR$. Se supone sin pérdida de generalidad que el punto O no se mueve. Tras la deformación el elemento de área deja de estar contenido en el plano 12, mostrándose en la figura su proyección sobre este plano. Entre los lados del elemento de área y sus proyecciones existe una diferencia de longitud de tercer orden. A la vista del desarrollo que sigue, es claro que pueden despreciarse estas diferencias y calcular el incremento de área sobre la proyección en el plano 12 (las longitudes se multiplicarán siempre por otras longitudes al calcular áreas, por lo que esos diferenciales de tercer orden se multiplicarían por otros de primer orden, resultando términos de área de cuarto orden, despreciables frente a los de tercer orden que resultarán ser los significativos).

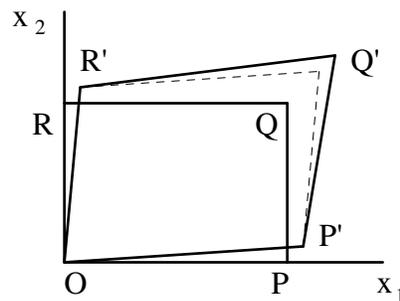


Figura 3.8.- Elemento de área paralelo a los ejes 1 y 2

Las proyecciones de los movimientos de los vértices sobre el plano 12, aproximadas mediante el primer término de su desarrollo en serie, son:

$$\begin{aligned} u_1(P) &= u_{1,1}dx_1 & u_1(R) &= u_{1,2}dx_2 & u_1(Q) &= u_{1,1}dx_1 + u_{1,2}dx_2 \\ u_2(P) &= u_{2,1}dx_1 & u_2(R) &= u_{2,2}dx_2 & u_2(Q) &= u_{2,1}dx_1 + u_{2,2}dx_2 \end{aligned}$$

El área inicial del elemento es $dA=|OP||OR|=dx_1dx_2$. El área final dA' será la suma de las áreas de los dos triángulos $OP'Q'$ y $OQ'R'$. Cada una de estas áreas puede a su vez calcularse como la mitad del módulo del producto vectorial de dos de sus lados:

$$dA' = \frac{1}{2}|\mathbf{OQ}' \times \mathbf{OR}'| + \frac{1}{2}|\mathbf{OP}' \times \mathbf{OQ}'|$$

Despreciando diferenciales de cuarto orden, y tras agrupar términos, los valores absolutos de los productos vectoriales resultan ser independientes de las derivadas cruzadas $u_{1,2}$, $u_{2,1}$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{OQ}' \times \mathbf{OR}'| &= \begin{vmatrix} [dx_1 + u_1(Q)] & [dx_2 + u_2(Q)] \\ [u_1(R)] & [dx_2 + u_2(R)] \end{vmatrix} = dx_1dx_2(1 + u_{1,1} + u_{2,2}) \\ |\mathbf{OP}' \times \mathbf{OQ}'| &= \begin{vmatrix} [dx_1 + u_1(P)] & [u_2(P)] \\ [dx_1 + u_1(Q)] & [dx_2 + u_2(Q)] \end{vmatrix} = dx_1dx_2(1 + u_{1,1} + u_{2,2}) \end{aligned}$$

El área tras la deformación es por tanto $dA' = dx_1dx_2(1 + u_{1,1} + u_{2,2})$. El incremento unitario de área resulta:

$$\frac{dA' - dA}{dA} = u_{1,1} + u_{2,2} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} \quad (3.9)$$

En el resultado anterior se aprecia que en el incremento de área no intervienen las derivadas cruzadas del desplazamiento. Conocido el incremento unitario de área de un elemento diferencial, el cálculo del incremento de área de la superficie finita A se reduce a un problema de integración:

$$\Delta A = \int_A (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})dA = \int_A [\epsilon(\alpha) + \epsilon(\beta)]dA \quad (3.10)$$

En la ecuación anterior los ejes 1 y 2 podrían ser cualesquiera perpendiculares entre sí, con tal que estén contenidos en el plano tangente a la superficie A en cada punto. En general, la superficie puede ser curva, en cuyo caso estas direcciones pueden no ser constantes al realizar la integral. Por ello se indica una segunda notación más explícita para la misma integral, en la que aparecen las deformaciones longitudinales $\epsilon(\alpha)$ y $\epsilon(\beta)$ asociadas a dos direcciones α y β , que deben ser perpendiculares entre sí y contenidas en el plano tangente a la superficie en cada punto.

Puede demostrarse que en el incremento de volumen de un diferencial de volumen dV tampoco intervienen significativamente las derivadas cruzadas, $u_{i,j}$ ($i \neq j$), de los

desplazamientos. La demostración se basa en consideraciones análogas a las presentadas para el caso de incremento de área de superficies, y puede ser completada por el lector sin dificultad (utilice la propiedad de que el volumen de un paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores que describen sus aristas). Como consecuencia de lo anterior, en el incremento de volumen de un elemento diferencial de aristas inicialmente paralelas a los ejes sólo intervendrán los términos diagonales del tensor de deformación. Es decir, este incremento de volumen dependerá solo de las deformaciones longitudinales. Así, si el volumen inicial es $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, el volumen tras la deformación será $dV' = dx_1(1+\epsilon_{11})dx_2(1+\epsilon_{22})dx_3(1+\epsilon_{33})$, y el incremento de volumen unitario será, despreciando diferenciales de orden superior:

$$\frac{dV' - dV}{dV} = (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = e \quad (3.11)$$

Por tanto, la dilatación cúbica unitaria (o incremento unitario de volumen) resulta ser el primer invariante del tensor de deformaciones, que llamaremos "e". El incremento de volumen de una región finita se calcula, una vez más, mediante integración:

$$\Delta V = \int_V (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) dV = \int_V e dV \quad (3.12)$$

3.6.- Obtención del campo de desplazamientos a partir de las deformaciones.

En este epígrafe estudiaremos las particularidades que presenta el problema del cálculo del campo de desplazamientos de un sólido conocido su campo de deformaciones. Las ecuaciones que definen el Tensor de Cauchy (3.2), se nos presentan en este caso como un sistema de ecuaciones diferenciales en las que las incógnitas a calcular son las funciones u_i , mientras que las componentes ϵ_{ij} son funciones dadas.

Estructura básica de la solución.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales dado por el primer conjunto de ecuaciones (3.2):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.13)$$

Sabemos que si un cierto conjunto de tres funciones u_i^p , $i=1...3$ (que llamamos solución particular) son solución de este sistema, también será solución un nuevo campo de desplazamientos u_i obtenido como suma del anterior más otro campo u_i' que tenga asociado deformaciones nulas. En efecto, dada la linealidad del sistema de ecuaciones anterior, el

campo de deformaciones asociado a u_i será la suma de los asociados a u_i^p y a u'_i , y siendo nulo el segundo de ellos la deformación asociada a u_i será la misma que la asociada u_i^p . Por tanto, si u_i^p es solución (es decir, sus deformaciones son ϵ_{ij}), también lo será u_i (porque tendrá las mismas deformaciones). La solución general u_i tiene por tanto la expresión:

$$u_i = u_i^p + u'_i \quad (3.14)$$

La solución particular u_i^p será tal que sus deformaciones coincidan con las estipuladas en el sistema original de ecuaciones, y tendrá en general una expresión cerrada (no contendrá ningún parámetro indeterminado). La solución general del sistema homogéneo, u'_i , debe ser capaz de representar *cualquier* campo de movimientos posible que tenga asociadas deformaciones nulas, y por lo tanto deberá contener parámetros indeterminados para poder representar esa multiplicidad de posibilidades. Razonamientos directos basados en la definición del tensor de deformaciones conducen inmediatamente a la conclusión de que el único tipo posible de movimiento con deformación nula es un movimiento como sólido rígido. Aunque probablemente es innecesario incidir más en este aspecto, presentamos a modo de ejercicio una demostración formal de que es condición necesaria y suficiente para que no exista deformación el que los desplazamientos se correspondan con los de un movimiento como sólido rígido.

La implicación directa es evidente y se comprueba sin dificultad: Si u'_i representa un movimiento de sólido rígido, se puede expresar como una traslación más una rotación con un punto fijo (sea "o" este punto): $u'_i = u^o_i + \omega^o_{ik}(x_k - x^o_k)$. Por tanto:

$$\epsilon'_{ij} = 1/2(u'_{i,j} + u'_{j,i}) = 1/2[u^o_{i,j} + \omega^o_{ik,j}(x_k - x^o_k) + \omega^o_{ik}(x_k - x^o_k)_{,j} + u^o_{j,i} + \omega^o_{jk,i}(x_k - x^o_k) + \omega^o_{jk}(x_k - x^o_k)_{,i}]$$

Tanto ω^o_{ij} como u^o_i son constantes, por lo que sus derivadas se anulan, con lo que:

$$\epsilon'_{ij} = 1/2[\omega^o_{ik}\delta_{kj} + \omega^o_{jk}\delta_{ki}] = 1/2[\omega^o_{ij} + \omega^o_{ji}] = (\omega^o_{ij} \text{ es antisimétrico}) = 0$$

Luego no hay deformación asociada a un movimiento como sólido rígido.

La implicación inversa, consistente en demostrar que si un movimiento transcurre sin deformación no existe más posibilidad que el que sea un movimiento como sólido rígido, se realiza también sin dificultad, aunque es preciso un proceso de integración. Si todas las componentes de deformación son nulas, tenemos:

$$u'_{1,1} = u'_{2,2} = u'_{3,3} = u'_{1,2} + u'_{2,1} = u'_{1,3} + u'_{3,1} = u'_{2,3} + u'_{3,2} = 0 \quad (3.15)$$

De las tres primeras igualdades anteriores se concluye que u_1 no contiene a x_1 , u_2 no contiene a x_2 , y u_3 no contiene a x_3 . Las otras tres igualdades derivadas respectivamente respecto de x_3 , x_2 , y x_1 , proporcionan:

$$\begin{array}{lcl}
 u'_{1,23} + u'_{2,13} = 0 & & u'_{2,13} = 0 \\
 u'_{1,32} + u'_{3,12} = 0 & \Rightarrow & u'_{3,12} = 0 \\
 u'_{2,31} + u'_{3,21} = 0 & & u'_{1,23} = 0
 \end{array}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos escribir las siguientes expresiones para el campo de desplazamientos:

$$\begin{array}{l}
 u'_1 = f^1(x_2) + f^2(x_3) \\
 u'_2 = f^3(x_1) + f^4(x_3) \\
 u'_3 = f^5(x_1) + f^6(x_2)
 \end{array}$$

Estas expresiones introducidas en las tres últimas igualdades de (3.15) producen:

$$\begin{array}{l}
 \frac{df^1(x_2)}{dx_2} + \frac{df^3(x_1)}{dx_1} = 0 \\
 \frac{df^2(x_3)}{dx_3} + \frac{df^5(x_1)}{dx_1} = 0 \\
 \frac{df^4(x_3)}{dx_3} + \frac{df^6(x_2)}{dx_2} = 0
 \end{array}$$

Todos los términos de las ecuaciones anteriores deben ser constantes, porque cada ecuación correspondiente a su izquierda supone que la adición de una función de una variable independiente más otra función de otra variable independiente distinta sea cero. Esto no puede ocurrir en algún rango de valores de las variables a no ser que las funciones sean constantes, y que esas constantes se cancelen entre sí en cada ecuación. Por tanto:

$$\begin{array}{l}
 \frac{df^1(x_2)}{dx_2} = -\frac{df^3(x_1)}{dx_1} = K \\
 \frac{df^2(x_3)}{dx_3} = -\frac{df^5(x_1)}{dx_1} = L \\
 \frac{df^4(x_3)}{dx_3} = -\frac{df^6(x_2)}{dx_2} = M
 \end{array}$$

Siendo K, L y M constantes arbitrarias. Las ecuaciones anteriores son de integración inmediata, resultando las siguientes expresiones para las funciones f^k ($k=1\dots 6$):

$$\begin{array}{ll}
 f^1(x_2) = Kx_2 + \text{cte} & f^4(x_3) = Mx_3 + \text{cte} \\
 f^2(x_3) = Lx_3 + \text{cte} & f^5(x_1) = -Lx_1 + \text{cte} \\
 f^3(x_1) = -Kx_1 + \text{cte} & f^6(x_2) = -Mx_2 + \text{cte}
 \end{array}$$

Donde la indicación "cte" indica la adición de una constante arbitraria, distinta en cada ecuación. Tenemos así calculada la expresión del campo de desplazamientos u'_i :

$$\begin{aligned}u'_1 &= Kx_2 + Lx_3 + A \\u'_2 &= -Kx_1 + Mx_3 + B \\u'_3 &= -Lx_1 - Mx_2 + C\end{aligned}$$

Siendo A, B, C, constantes arbitrarias que agrupan a parejas de términos constantes ("cte") que provienen de la integración de las f^k . Es inmediato apreciar que la solución u'_i anterior consta de una traslación, de componentes A, B, C, y de una rotación, cuyo vector rotación tiene componentes -M, L, -K. Con esto queda demostrado que un movimiento sin deformaciones *siempre* ha de ser un movimiento como sólido rígido.

Volviendo a la estructura de la solución de desplazamientos (3.14), hemos visto que el término u'_i representa un movimiento arbitrario como sólido rígido, y que como tal contiene seis parámetros indeterminados. El cálculo de una solución particular u_i^p es un problema más o menos complicado, pero que una vez resuelto conduce a una expresión sin parámetros indeterminados. Por lo tanto, tal como hemos planteado nuestro problema, la solución quedará en función de seis parámetros indeterminados.

Lo anterior en el hecho de que el conocer las deformaciones del sólido no permite calcular unívocamente el campo de desplazamientos, ya que quedarían por determinar los seis grados de libertad asociados a la superposición de un movimiento arbitrario como sólido rígido. Sería necesario aplicar las condiciones de contorno en desplazamientos (sustentación del sólido) para determinar completamente el campo de desplazamientos.

Condiciones de integrabilidad del tensor de deformaciones.

En la discusión anterior hemos dado por supuesto que a unos términos dados ϵ_{ij} del tensor de deformaciones les corresponde una cierta solución de desplazamientos u_i . En realidad, si se eligen arbitrariamente seis funciones para los seis términos del tensor de deformaciones, lo más probable es que no exista una solución de desplazamientos univaluada y continua asociada a esas deformaciones. En este apartado se presentan unas condiciones necesarias y suficientes para que los seis términos del tensor de deformaciones tengan asociado un campo de desplazamientos posible. Nos ocuparemos en primer lugar de la parte más difícil del problema, que es encontrar unas condiciones suficientes para que exista un campo de desplazamientos asociado a ϵ_{ij} . El encontrar condiciones necesarias para que el sistema de ecuaciones diferenciales (3.13) tenga solución es sencillo, pudiéndose obtener una variedad de posibilidades dando por hecho que tal solución u_i existe, y realizando alguna manipulación matemática. Nosotros estaremos sólo interesados en comprobar si las condiciones suficientes que hayamos obtenido son también condiciones necesarias.

Pasamos pues a buscar unas condiciones suficientes para que el campo de desplazamientos sea univaluado. El desarrollo que sigue, debido a Cesario, permite encontrar estas condiciones suficientes.

En primer lugar, sabemos que el conocimiento del tensor de deformaciones en los puntos del sólido no basta para determinar completamente el campo de desplazamientos, ya que siempre quedaría la indeterminación asociada a un movimiento arbitrario como sólido rígido. Esta indeterminación queda eliminada, por ejemplo, si se especifica el desplazamiento u_i^o y la rotación media ω_{ij}^o de un punto "o" del sólido, de coordenadas x_i^o . Supondremos como premisa básica que hemos realizado dicha especificación.

Sea A un punto arbitrario del sólido, cuyas coordenadas son x_i^A y cuyo desplazamiento es u_i^A . Planteamos la identidad siguiente:

$$\int_0^A du_i = u_i(x_1^A, x_2^A, x_3^A) - u_i(x_1^o, x_2^o, x_3^o) = u_i^A - u_i^o$$

En donde la integral se realiza a lo largo de cualquier línea rectificable que esté contenida en el sólido. Es inmediato que:

$$u_i^A = u_i^o + \int_0^A du_i = u_i^o + \int_0^A \epsilon_{ij} dx_j + \int_0^A \omega_{ij} dx_j \quad (3.16)$$

Queremos que en la última integral no aparezca ω_{ij} , sino sus derivadas, para lo que vamos a realizar una integración por partes. Primero sustituimos dx_j por $d(x_j - x_j^A)$, lo que podemos hacer puesto que las coordenadas x_j^A son constantes (aunque arbitrarias) y su diferencial es nulo:

$$\begin{aligned} \int_0^A \omega_{ij} dx_j &= \int_0^A \omega_{ij} d(x_j - x_j^A) = \left[\omega_{ij} (x_j - x_j^A) \right]_0^A + \int_0^A (x_j^A - x_j) \omega_{ij,k} dx_k = \\ &= \omega_{ij}^o (x_j^A - x_j^o) + \int_0^A (x_j^A - x_j) \omega_{ij,k} dx_k \end{aligned}$$

Vamos a ver que es posible expresar $\omega_{ij,k}$ en función de derivadas de las deformaciones. Precisamente este es el motivo de que hayamos buscado la aparición de derivadas de la rotación en lugar de la rotación misma (téngase presente que pretendemos llegar a alguna ecuación que relacione las deformaciones entre sí). En efecto podemos escribir:

$$\omega_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} - u_{j,ik}) = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{k,ij}) - \frac{1}{2}(u_{j,ik} + u_{k,ij}) = \epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}$$

Con lo que la integral de la rotación queda:

$$\int_0^A \omega_{ij} dx_j = \omega_{ij}^o (x_j^A - x_j^o) + \int_0^A (x_j^A - x_j) (\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}) dx_k$$

Con este resultado, (3.16) puede escribirse como:

$$u_i^A = u_i^o + \omega_{ij}^o(x_j^A - x_j^o) + \int_0^A \left[\epsilon_{ik} + (x_j^A - x_j)(\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}) \right] dx_k \quad (3.17)$$

Ahora bien, para que el campo de desplazamientos sea univaluado, la última integral no debe depender del camino de integración que elijamos en el sólido. Es decir, que cada una de las tres componentes del integrando ($i=1,2,3$) debe ser una diferencial exacta. Si llamamos U_{ik} al contenido del corchete de la integral, y dV_i a las diferenciales exactas mencionadas, tenemos que $U_{ik}dx_k = dV_i = V_{i,k}dx_k$. Por tanto, $U_{ik} = V_{i,k}$. Derivando respecto de x_s : $U_{ik,s} = V_{i,ks} = V_{i,sk} = U_{is,k}$. Esta última ecuación:

$$U_{ik,s} = U_{is,k} \quad (3.18)$$

Es una condición necesaria y suficiente para que la integral de (3.17) no dependa del camino elegido, y por tanto para que el campo de desplazamientos sea univaluado, siempre que el dominio sea simplemente conexo (es decir siempre que el sólido no tenga agujeros interiores). Desarrollando la ecuación anterior obtenemos:

$$\epsilon_{ik,s} - \delta_{js}(\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i}) + (x_j^A - x_j)(\epsilon_{ik,js} - \epsilon_{jk,is}) = \epsilon_{is,k} - \delta_{jk}(\epsilon_{is,j} - \epsilon_{js,i}) + (x_j^A - x_j)(\epsilon_{is,jk} - \epsilon_{js,ik})$$

Es decir:

$$\epsilon_{ik,s} - \epsilon_{ik,s} + \epsilon_{sk,i} + (x_j^A - x_j)(\epsilon_{ik,js} - \epsilon_{jk,is}) = \epsilon_{is,k} - \epsilon_{is,k} + \epsilon_{ks,i} + (x_j^A - x_j)(\epsilon_{is,jk} - \epsilon_{js,ik})$$

Los tres primeros términos de cada miembro se cancelan entre sí. El resto de la ecuación queda multiplicada por $(x_j^A - x_j)$. Como las cantidades $(x_j^A - x_j)$ son arbitrarias, el factor que les multiplica debe ser cero:

$$\epsilon_{ik,js} + \epsilon_{js,ik} - \epsilon_{jk,is} - \epsilon_{is,jk} = 0 \quad (3.19)$$

Las ecuaciones anteriores se llaman ecuaciones de integrabilidad del tensor de deformaciones, o también ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant. Son condiciones suficientes para que exista un campo de desplazamientos univaluado asociado a ϵ_{ij} en dominios simplemente conexos, dado que su cumplimiento implica que (3.17) sea una expresión univaluada. Sabemos que si el dominio no es simplemente conexo, la ecuación (3.18) no es suficiente para asegurar que la integral de (3.17) sea univaluada, y por tanto (3.19) tampoco será condición suficiente para que el campo de desplazamientos sea univaluado. Además de (3.18) se requiere que se satisfaga una ecuación como la siguiente para cada uno de los agujeros del sólido:

$$\oint_{\Gamma} U_{ik} dx_k = 0 \quad (3.20)$$

Donde Γ representa una línea cerrada arbitraria en torno al agujero considerado.

La comprobación de que las ecuaciones (3.19) son también condiciones necesarias para la existencia de un campo de desplazamientos posible, se realiza sin ninguna dificultad. Se trata de comprobar que si asumimos como cierta la existencia de u_i con las propiedades requeridas, entonces se satisface (3.19). Podemos partir de la ecuación (3.13) derivada dos veces, escrita de distintas maneras:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ik,js} &= (u_{i,kjs} + u_{k,ij s})/2 \\ \epsilon_{js,ik} &= (u_{j,sik} + u_{s,jik})/2 \\ \epsilon_{jk,is} &= (u_{j,kis} + u_{k,jis})/2 \\ \epsilon_{is,jk} &= (u_{i,sjk} + u_{s,ijk})/2\end{aligned}$$

La operación de sumar la primera de las ecuaciones más la segunda, menos la tercera y menos la cuarta, conduce a la cancelación de los términos en derivada tercera de desplazamientos, resultando la ecuación (3.19). Por tanto (3.19) es una condición necesaria para la existencia de las funciones u_i .

La expresión (3.19) tiene cuatro subíndices libres, por lo que aparentemente representa a $3^4=81$ ecuaciones escalares. En realidad, de estas 81 ecuaciones sólo 6 son independientes. El resto son identidades o repeticiones. Ello puede apreciarse sin más que realizar el siguiente cálculo directo. Partimos de las seis ecuaciones escalares:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Si derivamos dos veces de todas las maneras posibles cada una de esas 6 ecuaciones, obtendremos $6 \times 6 = 36$ ecuaciones (existen seis posibles derivadas segundas: 11, 12, 13, 22, 23, y 33). Estas ecuaciones contendrán todas las posibles derivadas terceras de las tres funciones u_i , osea que en las 36 ecuaciones figurarán $3 \times 10 = 30$ funciones distintas del tipo $u_{i,jkl}$ (existen 10 posibles derivadas terceras: 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, y 333). Con manipulaciones sencillas, -restando y sumando ecuaciones entre si-, podríamos eliminar las 30 funciones $u_{i,jkl}$ utilizando 30 de las ecuaciones. Quedarían finalmente $36 - 30 = 6$ ecuaciones que ya no contendrían más que términos del tipo $\epsilon_{ij,ks}$. Estas 6 ecuaciones son las ecuaciones independientes de integrabilidad contenidas en (3.19). A continuación se escriben estas seis ecuaciones en forma desarrollada:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11,23} + \epsilon_{23,11} &= \epsilon_{12,13} + \epsilon_{13,12} & 2\epsilon_{12,12} &= \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} \\ \epsilon_{22,31} + \epsilon_{31,22} &= \epsilon_{23,21} + \epsilon_{21,23} & 2\epsilon_{23,23} &= \epsilon_{22,33} + \epsilon_{33,22} \\ \epsilon_{33,12} + \epsilon_{12,33} &= \epsilon_{31,32} + \epsilon_{32,31} & 2\epsilon_{31,31} &= \epsilon_{33,11} + \epsilon_{11,33}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Bibliografía:

FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall

PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla

SAMARTIN, A., "Curso de Elasticidad", Bellisco.

DOBLARE, M., "Teoría de la Elasticidad lineal", ETSII-Univ. Zaragoza

Capítulo 4

Ley de Comportamiento.

(“alla breve”)

Sólidos con la misma geometría y sustentación sometidos a idénticas cargas se deformarán de manera diferente si son de materiales distintos. La ley de comportamiento recoge el conjunto de propiedades específicamente asociadas al material, al margen de la forma del sólido, su sustentación, etc. En este capítulo se presentan algunas leyes sencillas de comportamiento, especialmente de tipo elástico lineal, extensamente utilizadas en las aplicaciones más comunes.

4.1.- Introducción.

En los dos capítulos anteriores se establecen las relaciones entre las cargas aplicadas y las tensiones por una parte, y entre los desplazamientos y las deformaciones por otra parte. Por tanto, en este momento tenemos un bloque de magnitudes cinemáticas relacionadas entre sí (en la que se incluyen los desplazamientos y los diversos tensores que representan la deformación), y un bloque de magnitudes asociadas a las fuerzas (cargas de contorno y de dominio, y tensor de tensiones) también relacionadas entre sí. Para completar el modelo matemático necesitamos disponer de alguna relación entre magnitudes del bloque cinemático y del bloque de fuerzas.

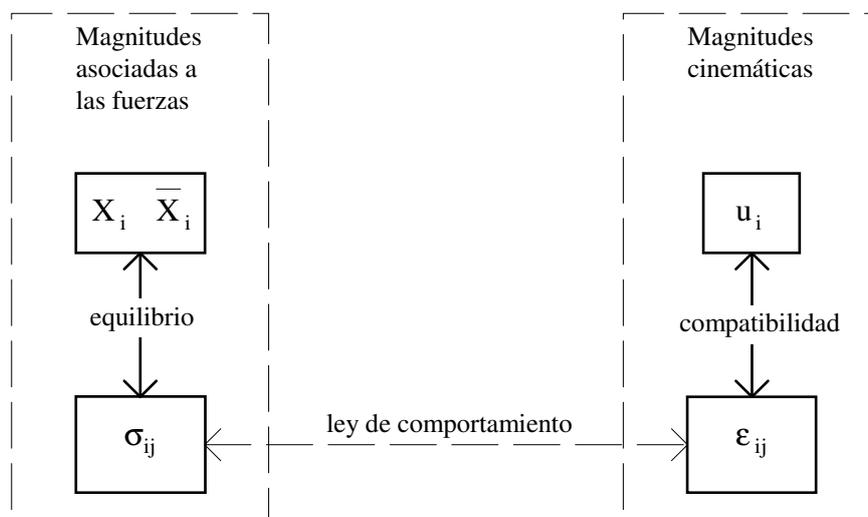


Figura 4.1.- Magnitudes del modelo matemático para pequeñas deformaciones.

A la hora de plantear esa relación, encontraremos claras ventajas en la utilización de las magnitudes definidas a nivel local en el interior del sólido, es decir las tensiones y las deformaciones. La razón es que usando tales magnitudes la relación no dependerá de la geometría del sólido, la localización de las cargas, etc., y dependerá solamente de las características locales del material, como pretendemos. La figura 4.1 muestra esquemáticamente las relaciones básicas del modelo matemático para el caso de pequeñas deformaciones y desplazamientos. La ley de comportamiento será en este caso una relación entre el tensor de tensiones y el tensor de pequeñas deformaciones de Cauchy.

Si tenemos un problema de grandes deformaciones y desplazamientos, las ecuaciones de equilibrio, y por tanto el tensor de tensiones, están referidas al estado deformado (insistimos en que es el único estado que realmente existe, y por tanto en el que ha de plantearse el equilibrio). Un tensor de tensiones referido al estado deformado es pues un concepto físico natural, pero en mecánica de sólidos es habitual emplear una descripción lagrangiana de la deformación. Como hemos de relacionar tensiones con deformaciones, es conveniente utilizar tensores de tensión definidos también respecto de la configuración indeformada, aunque sus componentes dependan de las tensiones reales de la configuración deformada (los tensores de tensión habitualmente utilizados para estos fines se conocen como primer y segundo tensor de Piola-Kirchoff). Lo anterior sólo pretende indicar al lector que en problemas más generales se utilizan posibilidades distintas de la que aparece en la figura 4.1 en cuanto a la elección de magnitudes locales para plantear la ley de comportamiento.

El conocimiento de cómo y cuánto se deforma el material en función de las tensiones que soporta a nivel local es la información básica asociada a lo que denominamos ley de comportamiento. Es evidente que este conocimiento sólo puede adquirirse mediante experimentación. La evidencia experimental revela precisamente una gran variedad y complejidad de comportamientos en los materiales reales. Para establecer un modelo matemático del tipo al indicado en la figura 4.1, es necesario plantear la ley de comportamiento como una relación matemática, siendo deseable que ésta sea además lo más sencilla posible. El conjugar esta sencillez con una suficiente exactitud obliga normalmente a tomar en consideración sólo aquellos aspectos del comportamiento del material que tengan mayor relevancia en el rango de condiciones de servicio (temperatura, humedad, deformaciones, cargas, ...). Por ejemplo, el análisis de una pieza de goma necesitará en general considerar grandes deformaciones y desplazamientos, posibles no linealidades, y quizá introducir la variable tiempo. Pero si la temperatura de servicio es de, digamos, -140°C , el comportamiento puede variar tanto que una simple ley lineal de pequeñas deformaciones sea suficiente hasta llegar a la rotura. Por tanto, nunca debemos considerar que una ley de comportamiento dada por una expresión matemática relativamente simple es exactamente representativa del comportamiento de ningún material, sino que debemos pensar en ella como el resultado de una aproximación a un comportamiento observado experimentalmente.

La ley de comportamiento es la parte del modelo matemático de la Teoría de la Elasticidad más sujeta a errores. De ella, y de lo ajustado de las simplificaciones que se asuman, depende la exactitud de cualquier solución obtenida a partir de dicho modelo.

4.2.- Noción de comportamiento elástico, viscoelástico, y plástico.

A partir de este epígrafe se asumirá sistemáticamente comportamiento lineal elástico del material. Por útil que este comportamiento sea, debemos tener noticia de que no es éste el único comportamiento que encontraremos en la práctica. En este epígrafe se describen muy sucintamente y a título informativo los tipos de comportamiento más relevantes en mecánica de sólidos.

Comportamiento elástico.

Si apreciamos una relación biunívoca entre el tensor de tensiones y el de deformaciones, diremos que existe comportamiento elástico. Esa correspondencia biunívoca es en realidad una condición más exigente que el enunciado de “elasticidad” dado en la hipótesis cuarta del epígrafe 1.2, dado que implica la recuperación de la deformación para todos los estados intermedios de carga, y no solo para el inicial y el final. A efectos del modelo matemático, se suele entender por comportamiento elástico esta condición más exigente, aunque por el contrario se suele entender por comportamiento no elástico el que no se ajusta a la definición de 1.2. En lo sucesivo distinguiremos entre ambas definiciones cuando sea necesario. Si el comportamiento además de elástico es localmente lineal según la definición de 1.2, entonces la ley de comportamiento será una relación lineal (en el sentido usual de ecuaciones algebraicas lineales) entre las componentes de tensión y de deformación. Podemos escribir la relación lineal más general posible como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.1)$$

En donde los coeficientes C_{ijkl} son constantes, y forman un tensor de cuarto orden, de acuerdo con la regla del cociente. Se ha asumido por concisión que el estado inicial de deformaciones nulas está exento de tensiones. De no ser así, se añadiría un término de “tensión residual” σ_{ij}^0 al miembro derecho de la ecuación, quedando $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0$. Si el problema presenta deformaciones no nulas para tensiones nulas, procede usar $\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0)$, donde ε_{kl}^0 representa la deformación inicial. Desde el punto de vista del modelo matemático, la existencia de tensiones con deformación nula (o viceversa), no supone complicaciones especiales, ni afecta al valor de las componentes C_{ijkl} .

No existe ningún motivo especial para expresar la ley de comportamiento como tensiones en función de deformaciones. Es igualmente posible expresarla como deformaciones en función de tensiones mediante una ecuación del tipo $\varepsilon_{ij} = J_{ijkl} \sigma_{kl}$. Los coeficientes J_{ijkl} podrán calcularse en función de los C_{ijkl} y viceversa.

La modelización de un material en el que se aprecia comportamiento elástico aunque no lineal, se realiza habitualmente mediante una ecuación como la (4.1), pero en la que los coeficientes C_{ijkl} no son constantes, sino que dependen adecuadamente de los términos del tensor de deformaciones o bien del de tensiones. El que pueda asumirse con buena aproximación comportamiento elástico del material, suele suponer una simplificación importante en cuanto a la manejabilidad del modelo matemático (con mayor motivo si además puede suponerse lineal). Se habla de comportamiento plástico

cuando no es elástico según la definición dada en 1.2, es decir cuando el sólido no recupera su forma inicial tras la descarga. Se asocia la deformación remanente tras la descarga al concepto de “deformación plástica”.

El que se pueda asumir comportamiento elástico no depende sólo del material, sino que también depende del nivel de sollicitación del mismo, y del tipo de problema. Así, si el nivel de sollicitación es muy pequeño (el material está muy lejos de romperse), y las cargas son de tipo estático, muchos materiales usuales pueden considerarse elásticos, entre ellos los aceros y la mayoría de las aleaciones férricas y no férricas, las maderas, las gomas y cauchos, los vidrios, y muchas resinas y otros materiales sintéticos. Sin embargo, a niveles de carga estática más elevados muchos de estos materiales dejan de presentar comportamiento elástico. También el que el problema sea de cargas cíclicas o repetitivas puede hacer que las deformaciones plásticas no sean ya despreciables, debido a efectos acumulativos que pueden producirse.

Para ilustrar los diversos modelos, analizaremos el comportamiento que implican en un estado de tensión unidireccional. Tal estado unidireccional puede conseguirse muy aproximadamente en la práctica en una barra esbelta recta del material, sometiéndola a tracción tirando de sus extremos mediante mordazas u otros dispositivos. Esta disposición, esquematizada en la figura 4.2, se conoce como "ensayo de tracción", y es ampliamente utilizada en la caracterización de materiales. Por ahora sólo pretendemos ilustrar como se comportaría un material en ese ensayo si obedeciese exactamente determinada ley idealizada.

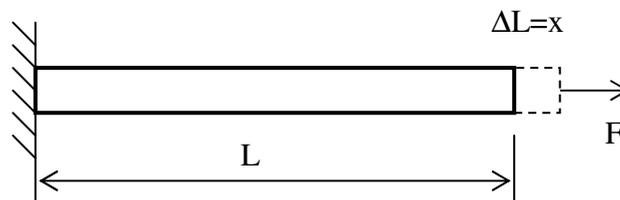
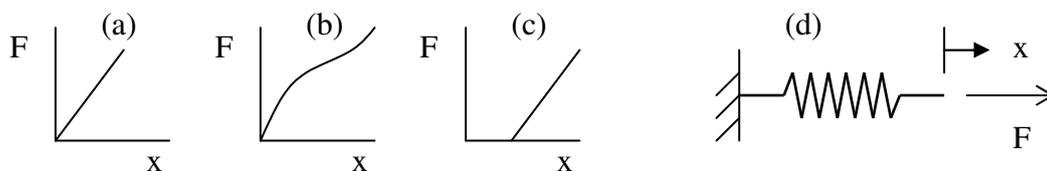


Figura 4.2.- Esquema del ensayo de tracción.

El comportamiento elástico implicaría gráficas de fuerza F frente a alargamiento x del tipo a las mostradas en las figuras 4.3: (a) elástico lineal, (b) elástico no lineal, y (c) elástico lineal con deformaciones iniciales. En todos los casos, se puede representar esquemáticamente a la barra mediante un resorte, ya sea lineal o no lineal (d).



Figuras 4.3.- Algunos casos de comportamiento elástico unidireccional.

Comportamiento viscoelástico.

En ciertos problemas, la inclusión de la variable tiempo en el análisis no puede evitarse, aunque los efectos dinámicos (fuerzas de inercia) sean despreciables. Por ejemplo, si el material tiene respuesta lenta (tarda horas, semanas o meses en estabilizar sus deformaciones frente a las cargas aplicadas), y las condiciones de carga cambian antes de que la deformación se estabilice, entonces toda la historia de carga influye en el estado del sólido en un instante de observación dado. Para modelar este tipo de respuesta, se emplean modelos con resistencias de tipo viscoso (fuerzas proporcionales a la velocidad), que se oponen momentáneamente a la deformación pero que alcanzan asintóticamente una configuración deformada estable en el tiempo. La inclusión de estas resistencias de tipo viscoso es precisamente la característica principal de los modelos viscoelásticos.

En general, estos modelos viscoelásticos ofrecen comportamiento elástico según la definición de 1.2, ya que la forma inicial acaba por recuperarse en ausencia de cargas. En cambio, no es en rigor elástico según la definición dada en este epígrafe 4.2, ya que las deformaciones no dependen solamente de las tensiones en el instante de observación, sino también de la historia de carga. No obstante, puede entenderse que sí es elástico en el sentido de que a una misma historia de tensiones corresponde una deformación determinada.

En todo caso, los modelos viscoelásticos conducen a leyes de comportamiento lineales, ya que el multiplicar todas las acciones de la *historia* de carga por dos produce deformaciones de valor doble en el instante de observación.

Los modelos viscoelásticos se utilizan también en problemas de cargas cíclicas en los que es preciso modelar la disipación interna de energía del material en el proceso de deformación repetitiva. Ocurre que la disipación de energía no está asociada necesariamente a deformaciones que permanezcan una vez que se descarga el sólido, y en estos casos son particularmente adecuados los modelos *elásticos* de viscoelasticidad. Además, la eventual inclusión de efectos dinámicos puede considerarse un problema menor una vez que hemos introducido la variable tiempo en el análisis, por lo que es típica la aplicación de modelos viscoelásticos también a problemas de vibraciones mecánicas.

Para ilustrar el comportamiento unidireccional de un material viscoelástico nos apoyaremos en el usual amortiguador viscoso representado en la Figura 4.4. La ecuación de comportamiento de este elemento aislado, así como su respuesta en el tiempo frente a una fuerza F de distintas evoluciones se muestra en la misma figura.

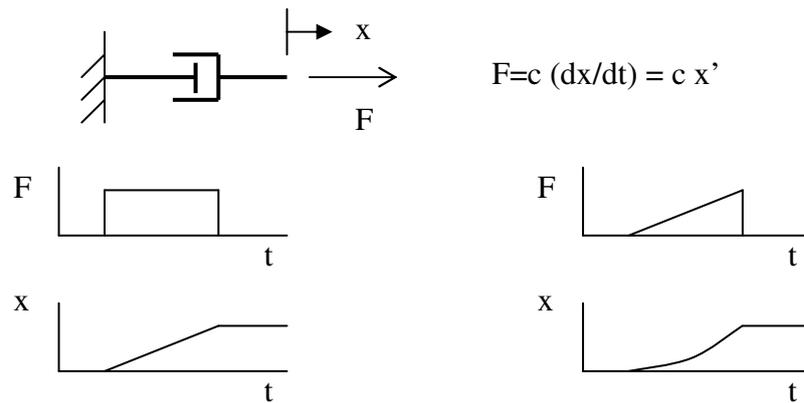


Figura 4.4.- Respuesta del amortiguador viscoso.

Mediante combinaciones de resortes lineales y amortiguadores viscosos se consigue reproducir una gran variedad de comportamientos. La figura 4.5 muestra dos ejemplos típicos. Para la elección del modelo, y del valor de los parámetros de rigidez y amortiguamiento, se sigue un criterio de “mejor ajuste” al comportamiento observado experimentalmente en el material.

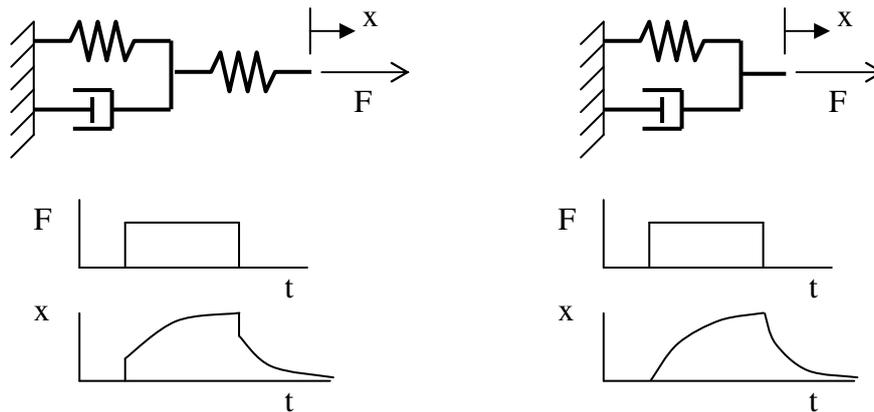


Figura 4.5.- Dos modelos viscoelásticos unidireccionales.

Los ejemplos unidireccionales anteriores son suficientes para ofrecer una idea intuitiva del comportamiento viscoelástico, pero su generalización al caso tridimensional no es inmediata, máxime cuando se pretende conseguir un modelo que englobe cualquier posible casuística de amortiguamiento e historia de carga. El lector interesado puede consultar al respecto las dos primeras referencias que figuran al final del capítulo. En particular, puede profundizar en el modelo llamado “sólido lineal con memoria”, debido a Boltzmann. Su postulado básico es que, a nivel elemental, un incremento diferencial de tensión aplicado en el instante τ ($d\sigma_{ij}(\tau)$) producirá en un momento posterior t un incremento diferencial de deformación ($d\varepsilon_{ij}(t)$), que será proporcional al diferencial de tensión y a una cierta función del lapso de tiempo ($J_{ijkl}(t-\tau)$), la cual es característica del material. De este modelo puede obtenerse como caso particular cualquier comportamiento viscoelástico, y es capaz también de describir otros tipos de comportamiento.

Comportamiento plástico.

En el contexto que nos ocupa, debe entenderse que hay comportamiento plástico del material si el mismo presenta deformaciones permanentes tras la descarga. De acuerdo con lo observado experimentalmente en muchos materiales de interés, los modelos de comportamiento plástico suelen admitir que el comportamiento es elástico (y frecuentemente lineal, aunque no necesariamente) cuando el estado de tensión-deformación es "poco exigente" para el material, y asumen un comportamiento del tipo resistencia viscosa (pero cuyas deformaciones no se recuperan) cuando la sollicitación es "muy exigente" para el material en cuestión.

Para cuantificar si el estado de tensión-deformación es o no "muy exigente", es decir, para delimitar el límite de comportamiento elástico del material, se utilizan teorías llamadas Criterios de Plastificación. No hay un criterio absolutamente válido para todos los materiales, sino que existen varios de estos criterios, que la experimentación ha refrendado como suficientemente aproximados para unos u otros materiales. En un epígrafe posterior se expondrán algunos criterios válidos para el acero dúctil y otros metales.

El comportamiento de tipo viscoso asumido para altas sollicitaciones del material requiere implícitamente la consideración de la evolución temporal de la deformación. Se habla de viscoplasticidad cuando es de interés el describir la evolución en el tiempo de la respuesta del sólido. Los modelos de viscoplasticidad son de aplicación, entre otros materiales, a los aceros normalmente utilizados en estructuras metálicas y órganos de máquinas, y a otras aleaciones metálicas.

Como en todos los modelos de resistencia viscosa, se tiende al estado de equilibrio de la estructura (si existe) de forma asintótica, y por lo tanto en un tiempo teóricamente infinito. Pero en la práctica es frecuente que tras un tiempo relativamente breve las deformaciones hayan evolucionado casi totalmente. Lo habitual en estos casos es que no se necesite conocer la evolución en el tiempo. En resumen, es frecuente considerar que la configuración de equilibrio se alcanza instantáneamente, como en un análisis estático. Cuando se prescinde así de la variable tiempo, se habla simplemente de "plasticidad" en lugar de viscoplasticidad.

Seguidamente mostraremos el comportamiento según distintos modelos de plasticidad en el estado unidireccional de tensión de la figura 4.2 que se viene considerando como ejemplo.

La figura 4.6 muestra un ciclo de carga y descarga según el modelo unidireccional de plasticidad más sencillo posible, que se suele identificar como comportamiento plástico ideal (también elastoplástico ideal). Como ya se apuntó, muchos materiales de interés no presentan deformaciones plásticas hasta que el estado de sollicitación alcanza un determinado nivel. Por ello, en el caso unidireccional que nos ocupa existe un valor crítico de la fuerza, F^{cr} , por debajo del cual el comportamiento es elástico y lineal. Cualquier proceso de carga y descarga con $F < F^{cr}$, implicaría estados intermedios contenidos en la recta OA, volviéndose al punto O tras la descarga. El comportamiento en este tramo es análogo al de un resorte lineal, como se indica.

Cuando la fuerza llega y se mantiene en su valor crítico, F^{cr} , se sigue el tramo horizontal AB de la gráfica. Sus puntos representan los diversos estados de la barra según avanza el tiempo. Este fenómeno, que como se aprecia implica que el alargamiento crece sin que la fuerza lo haga, se observa en muchos materiales reales y se denomina “fluencia”. El comportamiento de la barra en este tramo es semejante al que presentaría un amortiguador viscoso, como sugiere la figura.

Si llegado un instante dado (cuando se alcanza el punto B), la carga F comienza a decrecer, el proceso de descarga tiene lugar según la recta BC, que es paralela a la inicial de carga (OA). El punto C indica el estado tras la descarga, por lo que la barra quedaría con la deformación remanente (“plástica”) indicada por este punto. En el tramo BC de descarga, la barra vuelve a comportarse como un resorte lineal de la misma rigidez, pero cuya longitud natural fuese la inicial de la barra mas la distancia OC. Un eventual nuevo proceso de carga comenzaría desde C, y recorrería el segmento CB.

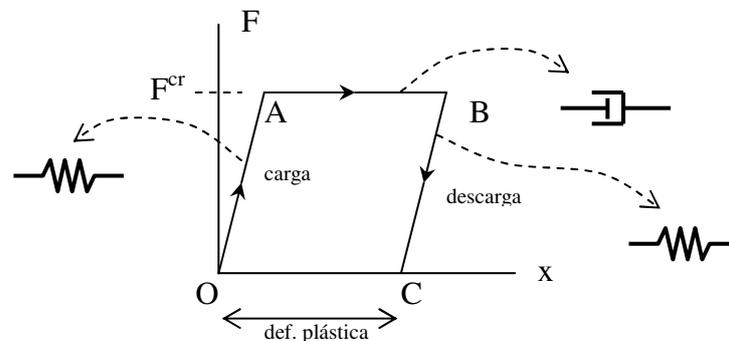
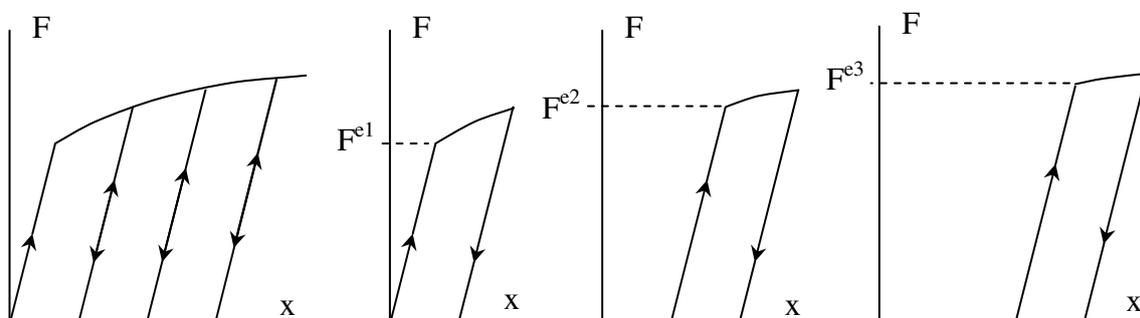


Figura 4.6.- Modelo unidireccional de “comportamiento plástico ideal”.

En el proceso ilustrado, la carga se estabiliza en el valor crítico (F^{cr}), aunque un modelo de viscoplasticidad admitiría perfectamente superar este valor. Pero en este tipo de modelo (plástico) en el que se obvia la variable tiempo, se suele asumir que la carga no supera el valor crítico, porque en situaciones reales las zonas de la estructura que aún no han plastificado soportan los incrementos de carga adicionales, manteniendo las zonas plastificadas a valor crítico de tensión.

Existen otros modelos de comportamiento plástico que describen más aproximadamente el comportamiento de muchos materiales. Se trata de los modelos de plasticidad "con endurecimiento por deformación". El comportamiento implicado en estos modelos para el caso unidireccional es del tipo al mostrado en la figura 4.7. Nótese la ausencia de tramos horizontales. El término "endurecimiento" proviene del aumento aparente del límite elástico (carga F^e la que se puede llegar con comportamiento elástico) en sucesivos procesos de carga y descarga que lleguen a producir deformación plástica. El cómo se produce este aumento aparente del límite elástico se ilustra en la misma figura 4.7: las tres últimas figuras representan el resultado de tres ciclos sucesivos de carga y descarga, realizados de forma que cada uno de ellos produzca nuevas deformaciones plásticas. Como se aprecia, en la segunda carga es preciso llegar a una carga F de valor F^{e2} (mayor que F^{e1}) para comenzar a producir deformaciones plásticas. Análogamente, en la tercera carga es preciso superar el valor F^{e3} , mayor que

F_{e2} , F_{e2} y F_{e3} coinciden respectivamente con el valor máximo alcanzado en el ciclo de carga primero y segundo. Por tanto, la línea curva superior de la primera figura puede recorrerse tanto sin descargas como siguiendo sucesivos ciclos de carga y descarga.



Figuras 4.7.- Comportamiento plástico con endurecimiento: aumento del límite elástico F_e ante cargas y descargas sucesivas.

La generalización del comportamiento plástico unidireccional al caso tridimensional general requiere como primer paso la generalización de la fuerza crítica F_{cr} , a la que corresponde el concepto de "superficie de plastificación", concepto que se expone en un epígrafe posterior de este tema. Ésta es una superficie en un espacio de tensiones que delimita el fin del comportamiento elástico, existiendo varios modelos o teorías acerca de la forma de la misma, y acerca de la manera en que ésta puede variar durante un proceso de carga (de modo análogo a como varía el límite elástico en el ensayo de tracción, figura 4.7). Adicionalmente existen varios modelos o teorías acerca de cómo se producen los aumentos de deformación plástica, normalmente utilizando argumentos basados en la superficie de plastificación adoptada. Todo ello supone aún mayor complicación que, por ejemplo, la generalización del comportamiento viscoelástico, excediendo también los propósitos de esta breve exposición.

La información presentada en los párrafos anteriores acerca de los comportamientos viscoelástico, viscoplástico y plástico, es apenas introductoria, pero su conocimiento será suficiente para que el lector pueda comprender las precauciones con las que debe ser empleado el comportamiento lineal elástico, el cual será asumido en el resto del texto.

Por ejemplo, es patente que cualquier análisis en el que no aparezca la variable tiempo deberá implicar aplicaciones lentas de las cargas, no sólo para evitar efectos dinámicos (ver 1.2, "hipótesis básicas") sino también para que se establezcan los efectos viscoelásticos, que actúan en una escala de tiempo mucho más dilatada, y que siempre existirán en mayor o menor medida.

4.3.- Ensayo de tracción típico para un acero.

El material en el que resulta más típica la aplicación del modelo de comportamiento elástico lineal, es el acero. Ocurre además que desde el punto de vista macroscópico, el

acero es muy aproximadamente homogéneo e isótropo. Puede considerarse una circunstancia afortunada que un material de uso tan extendido en todo tipo de aplicaciones industriales se ajuste, en un nivel razonable de solicitaciones, a un comportamiento tan relativamente simple.

El análisis elástico lineal se aplica a otros muchos materiales, en unos casos con buena precisión, y en otros a sabiendas de que el material no obedece exactamente ese comportamiento, para conseguir una primera aproximación, o una solución orientativa.

El valor de los coeficientes de la ecuación 4.1 debe ser obtenido mediante experimentación. El ensayo de tracción que se describe a continuación es sencillo de realizar, y además es suficiente para obtener toda la información relevante si el material es isótropo, por lo que es ampliamente utilizado. Su configuración básica fue presentada anteriormente (figura 4.2), y se reproduce con algún detalle adicional en la figura 4.8. Básicamente el ensayo consiste en someter lentamente a tracción una barra esbelta del material, hasta romperla. La configuración del ensayo pretende conseguir que la tensión sea uniforme en la sección de la barra con la mayor aproximación posible. La forma de la probeta, que se muestra aproximadamente en la figura 4.8, permite que la hipótesis de tensión uniforme sea plenamente asumible en la longitud L en que la sección es constante.

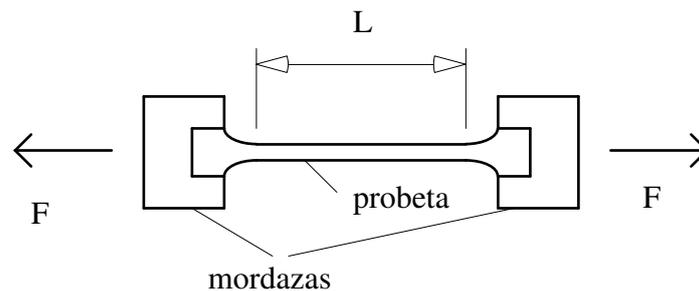


Figura 4.8.- El ensayo de tracción.

La uniformidad de tensiones en todos los puntos de la barra, implica también la de deformaciones, ya que el comportamiento es elástico en el sentido del epígrafe 4.2. La tensión tendrá sólo componente normal en las secciones transversales de la barra, y será igual a la fuerza F de tracción en la barra dividida por el área de la sección. Una dirección principal será el eje de la barra, con el que haremos coincidir la dirección x_1 . Además, cualquier dirección perpendicular al eje de la barra será también dirección principal (nótese que el círculo de Mohr de familia 1 de $n_1=0$ se reduce a un punto). Debido a la uniformidad del estado de tensión-deformación en la barra, obtendremos el mismo resultado si medimos los alargamientos unitarios (en la dirección x_1 y en dirección transversal) en cualquier punto de la barra, o si les calculamos haciendo un promedio en segmentos de longitud finita, dividiendo el incremento de longitud del segmento entre su longitud inicial. Por ejemplo, la deformación longitudinal unitaria se obtiene frecuentemente como el desplazamiento relativo de las mordazas dividido por su distancia inicial. Este procedimiento implica un cierto error debido a que en las zonas próximas a las mordazas el estado de tensión no será unidireccional. Sin embargo estas zonas son pequeñas en comparación con la longitud de la probeta, y el error suele ser pequeño. Quizá el procedimiento más exacto sea la utilización de una galga

extensométrica en algún punto de la zona central de la probeta, alejada de las mordazas. Este dispositivo consiste básicamente en adherir un pequeño filamento conductor a la superficie del sólido, para que se deforme con él. Al estirarse se produce una variación en la resistencia eléctrica del filamento, lo que se utiliza para medir la deformación. Existen galgas con filamentos en varias direcciones, lo que facilita la medición simultánea de la deformación en la dirección del eje de la barra y en una dirección perpendicular.

Mediante alguno de los procedimientos descritos se obtiene la información de cuánto vale la deformación en la dirección x_1 y en una dirección perpendicular, para cada nivel de tensión. La figura 4.9 muestra un resultado típico de deformación longitudinal para un acero dulce.

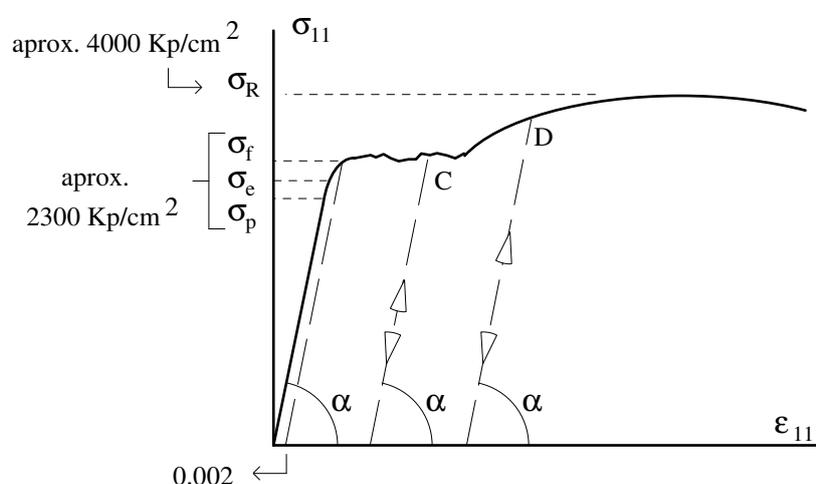


Figura 4.9.- Diagrama $\sigma_{11}/\epsilon_{11}$ típico de un ensayo de tracción para un acero dulce.

Lo primero que llama nuestra atención en la gráfica anterior es el tramo recto inicial, que indica una proporcionalidad entre tensión y deformación. La gráfica deja de ser recta cuando la tensión alcanza el valor σ_p , que llamamos límite de proporcionalidad. El comportamiento en este tramo es elástico, ya que si se procede a descargar la probeta antes de haber alcanzado σ_e , la misma recupera sus dimensiones originales. El comportamiento elástico se extiende a niveles de carga ligeramente superiores al límite de proporcionalidad, siendo σ_e el valor límite pasado el cual una eventual descarga deja ya cierta deformación permanente en la probeta.

A una tensión ligeramente superior, que llamamos tensión de fluencia σ_f , se produce el fenómeno de "fluencia" del material. Consiste en un periodo de alargamiento a tensión sensiblemente constante, como indica el tramo irregular horizontal de la gráfica. Este fenómeno de fluencia no es tan acusado en otros materiales como lo es en el acero. Las tensiones σ_p , σ_e , y σ_f son muy próximas, siendo difícil realizar distinción entre ellas. Es frecuente aceptar que las tres coinciden, tomándose como su valor el de la tensión necesaria para producir una deformación plástica de 0.002 (0.2%), que a su vez suele considerarse como el menor valor de deformación plástica digno de ser tenido en cuenta.

Si una vez en la zona de fluencia, en el nivel de deformación correspondiente al punto C de la figura, descargamos la probeta, la gráfica sigue la línea recta de puntos paralela a la recta del periodo elástico, quedando una deformación remanente (deformación plástica) en la probeta. Nótese la similitud de este comportamiento con el modelo de plasticidad ideal de la figura 4.6.

Llegado un cierto nivel de deformación, vuelve a ser necesario aumentar la carga para que la deformación siga aumentando, como indica el tramo curvo que sigue al de fluencia. Este tramo curvo, hasta que se alcanza en máximo, es el tramo de endurecimiento por deformación. Si se descarga la probeta desde un punto D correspondiente a esta zona, la descarga se produce nuevamente siguiendo una línea recta paralela a la del periodo elástico. Si se vuelve a cargar desde este estado se observará que el límite elástico ha aumentado, como puede apreciarse en la figura. Nótese la similitud de este comportamiento con el modelo de plasticidad con endurecimiento de la figura 4.7.

El punto máximo de la gráfica nos da la tensión de rotura, σ_R . En efecto, puede apreciarse que el tramo descendente final indica un comportamiento inestable, ya que para obtener más deformación es necesaria menor tensión. En la práctica ello implica que este tramo se recorre sin control hasta la rotura de la probeta. Hay que decir aquí que la tensión de la gráfica se obtiene siempre como la fuerza aplicada dividida por la sección *inicial* de la barra, lo cual es una buena aproximación durante todo el experimento, salvo precisamente en este tramo final. La razón es que previamente a la rotura se produce una estricción importante de la sección en algún punto de la longitud de la barra, probablemente en la sección en que el material contenga más imperfecciones. El área real de esta sección es menor que la nominal empleada para obtener la tensión del gráfico, por lo que las tensiones reales serán apreciablemente mayores que las del gráfico en esta zona.

Finalmente, hay que apuntar que la carga y descarga durante el periodo elástico no siguen exactamente el mismo camino, dibujándose en realidad un pequeño bucle en el gráfico tras la carga y descarga. Este efecto se denomina histeresis del material, y lleva asociado un fenómeno de disipación de energía que siempre acaba por resolverse como calor generado en el seno del sólido, y finalmente cedido al ambiente.

Generalmente, las condiciones de servicio de un acero se plantean en el período elástico, siendo menos frecuente el contar en el diseño con el comportamiento post-elástico del material. Esto hace cobrar una importancia particular a la hipótesis de comportamiento elástico lineal del material, dándose la afortunada circunstancia de que además es el más sencillo desde el punto de vista matemático, como se apuntó al principio. Del resultado del ensayo en este tramo lineal de interés, obtenemos dos constantes. En primer lugar definimos la constante E, que llamaremos módulo de Young, como la pendiente de la recta en el periodo elástico. Es decir:

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} \quad (\text{en el ensayo}) \quad (4.2)$$

Podemos calcular esta constante como $E = \tan \alpha$, siendo α el ángulo indicado en la figura 4.9. Definimos una segunda constante, ν , llamada coeficiente de Poisson, como la

relación del acortamiento transversal unitario (es indiferente cuál sea la dirección transversal considerada debido a la isotropía del material) entre alargamiento longitudinal unitario. Por tanto:

$$\nu = \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \left(= \frac{-\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \right) = \frac{-E\varepsilon_{22}}{\sigma_{11}} \quad (\text{en el ensayo}) \quad (4.3)$$

Unos valores típicos para el acero dulce son $E=2.1 \times 10^6 \text{ Kp/cm}^2 \cong 210 \text{ GPa}$; $\nu=0.3$ (adimensional). El elevado valor de E para el acero hace que las deformaciones sean pequeñas durante el período elástico, siendo plausible la hipótesis de pequeñas deformaciones. Orientativamente, el módulo de Young de las fundiciones, bronce y otras aleaciones metálicas suele ser del orden de la mitad del de los aceros, y el de los cementos y maderas menos de la décima parte. Hay que notar al respecto que no todos los materiales presentan un periodo lineal tan claramente definido. El Módulo de Young se entiende en estos casos como un valor obtenido mediante “ajuste razonable” en cierto rango de valores de tensión.

4.4.- Ley de comportamiento para materiales elásticos, lineales e isótropos.

Pretendemos obtener la expresión de la ley de comportamiento lineal elástica, -que se expresa de forma general mediante la ecuación 4.1, para el caso particular de material isótropo. Comencemos por resaltar algunos hechos de interés:

a) Por tratarse de una relación lineal, será aplicable el Principio de Superposición.

Se trata de una propiedad bien conocida de las relaciones lineales. En nuestro caso implica que dados dos estados de tensión en un punto (en un “cubo diferencial”), las deformaciones cuando actúan ambos simultáneamente coinciden con la suma de las deformaciones correspondientes a los estados de tensión por separado. Lo mismo cabe decir de dos estados de deformación dados en cuanto a sus tensiones asociadas.

b) Si el material es isótropo y solamente actúan tensiones normales, no habrá deformaciones transversales.

Por ejemplo, si solamente actúa σ_{11} , las deformaciones ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} , serán nulas. Para verlo puede razonarse como ilustra la figura 4.10. La misma representa una deformación ε_{12} en un cubo diferencial en el que solamente actúa tensión σ_{11} . También existirían las esperadas deformaciones ε_{11} (alargamiento) y ε_{22} , ε_{33} (contracción de Poisson), las cuales no se han representado por claridad, ya que no afectan al razonamiento. Si girásemos el cubo 180° respecto de un eje paralelo a x_2 como el representado, obtendríamos el mismo sólido (afirmar esto con generalidad requiere que el material sea isótropo), sometido a las mismas cargas, pero que se deforma de distintas maneras. Esta violación del principio de causalidad es físicamente un absurdo, amén de contravenir la biunicidad entre tensión y deformación asumida en el comportamiento lineal, por lo que cabe llegar a la conclusión de que ε_{12} será nulo. La misma conclusión se obtiene girando respecto de un eje paralelo a x_1 .

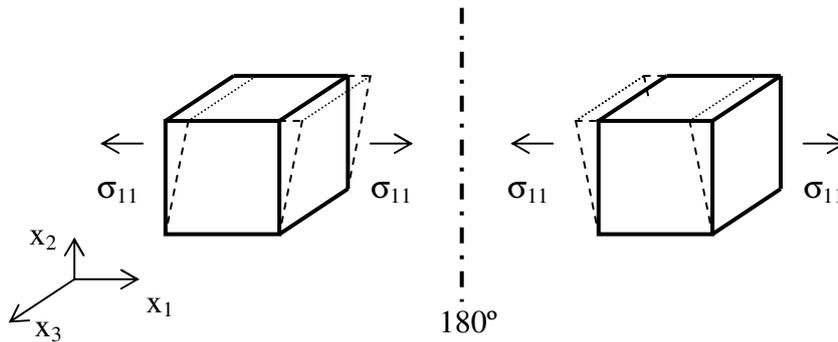


Figura 4.10.- Imposibilidad de deformación transversal ϵ_{12} bajo tensión normal σ_{11} en un material isotrópico.

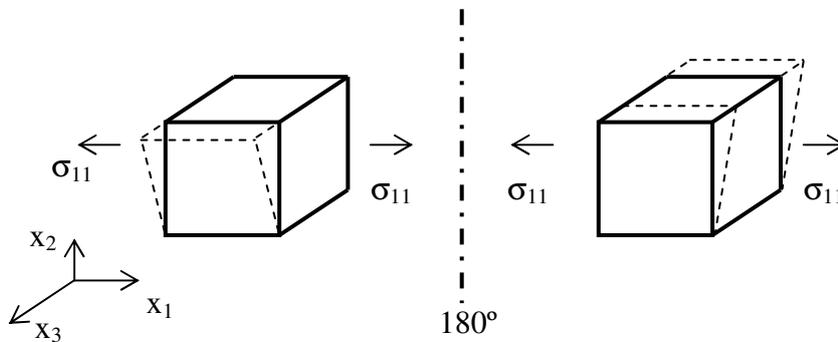


Figura 4.11.- Imposibilidad de deformación transversal ϵ_{23} bajo tensión normal σ_{11} en un material isotrópico.

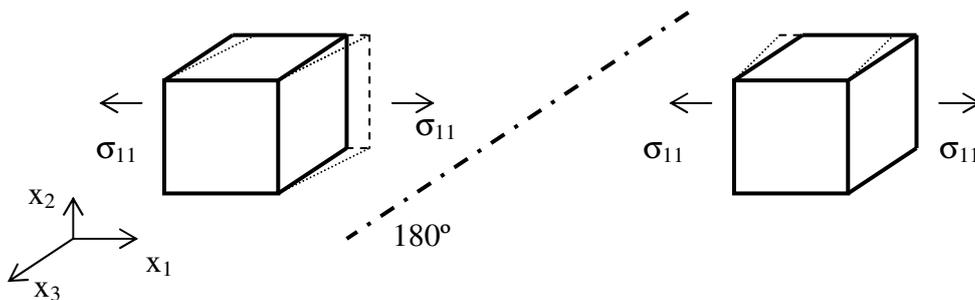


Figura 4.12.- Imposibilidad de deformación transversal ϵ_{13} bajo tensión normal σ_{11} en un material isotrópico.

La figura 4.11 muestra el mismo cubo diferencial, ahora con una deformación ϵ_{23} . Con el mismo giro que en el caso anterior se llega análogamente a la conclusión de que ϵ_{23} debe ser nulo. La misma conclusión se obtiene girando respecto de un eje paralelo a x_3 .

La figura 4.12 muestra el mismo cubo con la misma carga pero con una deformación ϵ_{13} . Girando 180° respecto de un eje paralelo a x_3 se obtiene el mismo sólido elemental (dada la isotropía), con la misma tensión, pero distinta deformación. La conclusión es

que ϵ_{13} debe ser nulo. La misma conclusión se obtiene girando respecto de un eje paralelo a x_1 .

Se ha mostrado que si solamente hay tensión σ_{11} en el elemento, no se producirá ninguna deformación transversal (ϵ_{12} , ϵ_{13} , ϵ_{23}) en el mismo. El demostrar que lo mismo ocurre con σ_{22} o σ_{33} es tan fácil como cambiar de nombre a los ejes en los razonamientos precedentes. Finalmente, si actúan simultáneamente σ_{11} , σ_{22} , y σ_{33} , el principio de superposición indica que tampoco aparecerán deformaciones transversales en este caso, como afirmaba el enunciado b) inicialmente.

c) Si el material es isótropo y la única acción es una componente de tensión tangencial, todas las componentes de deformación serán nulas salvo la de iguales subíndices que la componente de tensión.

Por ejemplo, asumamos que solamente actúa σ_{12} , y supongamos que ello produce, entre otras posibles componentes, la deformación ϵ_{11} positiva que se representa en la figura 4.13. Girando 180° el cubo diferencial respecto de un eje paralelo a x_2 se obtiene el mismo sólido (nuevamente el poder afirmar lo anterior con generalidad requiere que el material sea isótropo), con la misma deformación (un alargamiento del cubo), pero con las tensiones en sentido contrario. Dada la linealidad del comportamiento, al cambiar el signo de las tensiones debiera cambiar el signo de las deformaciones, lo que como se muestra no ocurrirá en este caso a no ser que ϵ_{11} sea cero. La misma conclusión se obtiene girando respecto de un eje paralelo a x_1 .

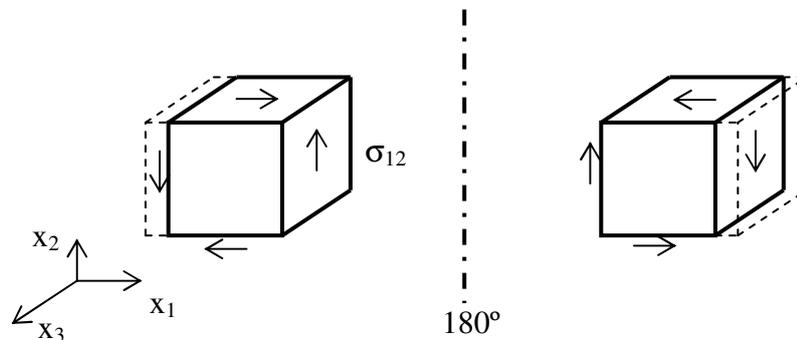


Figura 4.13.- Imposibilidad de deformación normal ϵ_{11} bajo tensión tangencial σ_{12} en un material isótropo.

Sobre la misma figura 4.13 puede razonarse que ϵ_{22} y ϵ_{33} serán también nulos. Véase: el giro que se propone cambia en todo caso el signo de σ_{12} y mantiene el de la deformación normal que se esté considerando, ya sea ϵ_{22} o ϵ_{33} .

La figura 4.14 muestra el cubo diferencial sometido a la misma tensión σ_{12} , y con una deformación ϵ_{13} . Girando 180° respecto de un eje paralelo a x_3 se obtiene el mismo sólido (por la isotropía), con las mismas tensiones aplicadas, pero con la deformación ϵ_{13} en sentido contrario. Usando argumentos análogos a los de párrafos precedentes, concluimos que ϵ_{13} debe ser nulo.

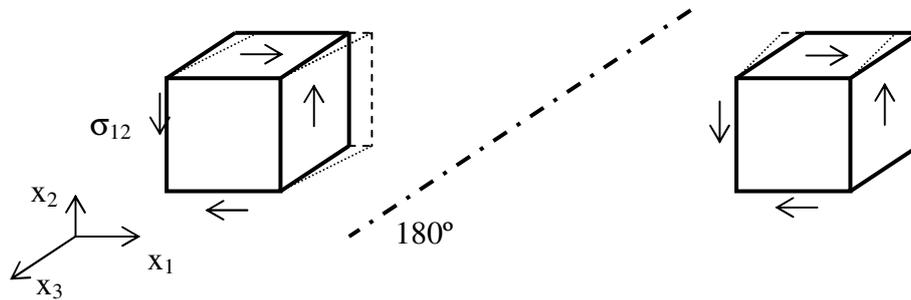


Figura 4.14.- Imposibilidad de deformación transversal ϵ_{13} bajo tensión tangencial σ_{12} en un material isótropo.

La demostración de que la componente de tensión σ_{12} no puede producir por sí misma deformación ϵ_{23} se realiza razonando sobre el mismo giro empleado en la figura 4.14 anterior, y se deja ya del cuidado del lector. Con esto se ha mostrado que si la única componente de tensión que actúa en el cubo diferencial es σ_{12} , solamente habrá deformación ϵ_{12} , siendo nulas todas las demás componentes de tensión, ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} , ϵ_{13} , ϵ_{23} . El realizar una demostración análoga para σ_{13} y σ_{23} solamente requiere cambiar el nombre de los ejes en el razonamiento anterior.

Conocidas las premisas a), b), y c) anteriores, pasamos a construir la ley de comportamiento para el material isótropo. Tomaremos un cubo diferencial sobre el que actúan todas las posibles componentes de tensión, σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} , y calcularemos cada componente de deformación.

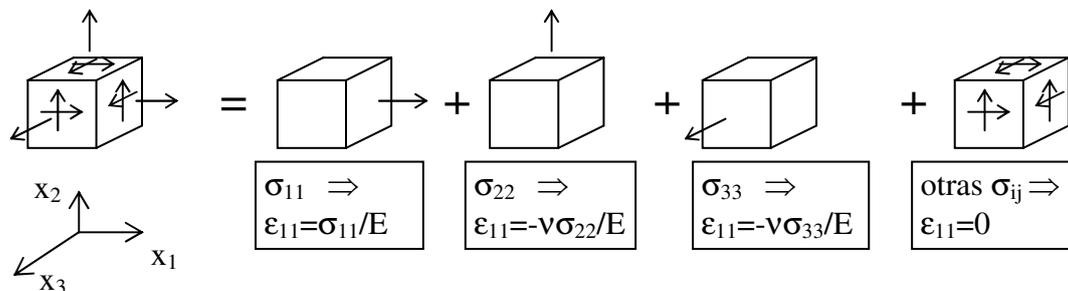


Figura 4.15.- Superposición de efectos aplicada a la componente ϵ_{11} .

Comenzaremos por ϵ_{11} . Calcularemos su valor aplicando el principio de superposición de efectos, como sugiere la figura 4.15. Las componentes de tensión transversal no producen deformación ϵ_{11} , y las componentes normales de tensión producen deformaciones ϵ_{11} cuyos valores se obtienen del ensayo de tracción. Por tanto:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \sigma_{11}/E - \nu\sigma_{22}/E - \nu\sigma_{33}/E \\ \epsilon_{22} &= \sigma_{22}/E - \nu\sigma_{11}/E - \nu\sigma_{33}/E \\ \epsilon_{33} &= \sigma_{33}/E - \nu\sigma_{11}/E - \nu\sigma_{22}/E\end{aligned}\quad (4.4)$$

En donde las componentes ϵ_{22} y ϵ_{33} anteriores se han obtenido razonando de forma análoga a como se ha hecho para ϵ_{11} .

Las premisa c) se resume en que cada componente de tensión tangencial depende solamente de su correspondiente componente de deformación transversal (o viceversa). Habrá por tanto una constante de proporcionalidad, que notaremos $2G$, entre ϵ_{12} y σ_{12} . La isotropía del material implica evidentemente que esta constante será la misma para las componentes 13 y 23 de tensión-deformación. Por tanto:

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{12} &= \gamma_{12} = \sigma_{12}/G \\ 2\epsilon_{13} &= \gamma_{13} = \sigma_{13}/G \\ 2\epsilon_{23} &= \gamma_{23} = \sigma_{23}/G \end{aligned} \tag{4.5}$$

La nueva constante G que hemos introducido se conoce como “Módulo de Cortadura”. En principio, podría pensarse que se trata de una constante elástica más, y que es necesaria para describir el comportamiento del material isótropo. Pero en realidad ocurre que esta constante no es independiente de las otras dos, E , ν , que hemos definido antes. Una manera sencilla de comprobarlo es considerar un elemento diferencial cuyas caras sean planos principales de tensión, con tensiones principales $\sigma_I=s$, $\sigma_{II}=-s$, $\sigma_{III}=0$, como indica la primera de las figuras 4.16.

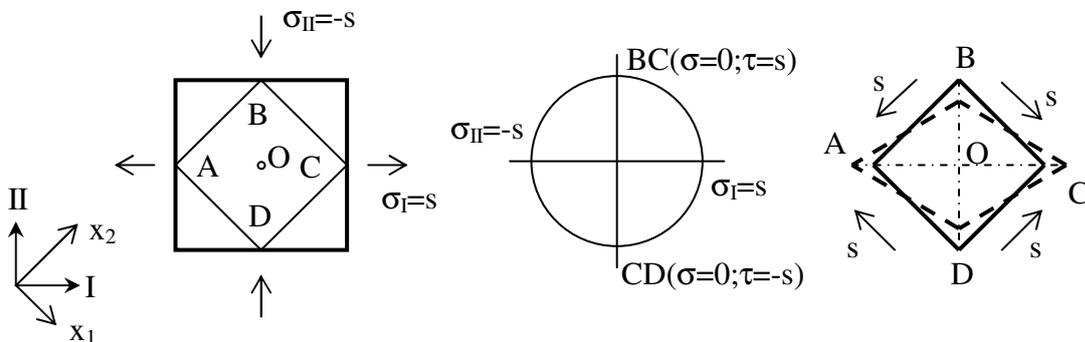


Figura 4.16.- Caso particular para mostrar la dependencia entre G , E y ν .

Tomaremos un elemento cuadrado, de forma que $OA = OB = OC = OD$, digamos $=L$. Obtenemos las deformaciones en las direcciones I y II aplicando la misma idea de superposición de estados de tracción que se usó para obtener las ecuaciones 4.4. Conocidas estas deformaciones, es inmediato calcular la longitud final de los segmentos OA y OB .

$$\begin{aligned} \epsilon_I &= s/E - \nu(-s)/E = s(1+\nu)/E \Rightarrow OA + \Delta_{OA} = L + L\epsilon_I = L [1 + s(1+\nu)/E] \\ \epsilon_{II} &= (-s)/E - \nu s/E = -s(1+\nu)/E \Rightarrow OB + \Delta_{OB} = L + L\epsilon_{II} = L [1 - s(1+\nu)/E] \end{aligned}$$

La tangente del ángulo que forman AO y AB tras la deformación puede calcularse como el cociente entre las longitudes finales de OA y OB anteriores:

$$\operatorname{tg}(\text{AO}, \text{AB}) = \frac{1 - s(1 + \nu)/E}{1 + s(1 + \nu)/E} \quad (4.6)$$

Por otra parte, considerando unos ejes x_1, x_2 , como se muestra en la figura 4.16, el ángulo entre AD y AB tras la deformación será $\pi/2 - \gamma_{12}$, por propia definición de γ_{12} . A la vista de la simetría, el ángulo entre AO y AB tras la deformación será justamente la mitad, $\pi/4 - \gamma_{12}/2$. Empleando la fórmula trigonométrica de la tangente de la suma de dos ángulos, tenemos:

$$\operatorname{tg}(\text{AO}, \text{AB}) = \operatorname{tg}(\pi/4 - \gamma_{12}/2) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}(\gamma_{12}/2)}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}(\gamma_{12}/2)} \cong \frac{1 - \gamma_{12}/2}{1 + \gamma_{12}/2}$$

La segunda figura muestra el diagrama de Mohr (en el plano del dibujo) para el estado de tensión propuesto. Como se aprecia, en planos a 45° de los principales, como AB, AD, etc, solamente hay tensión tangencial, y ésta tiene valor absoluto 's'. Aplicando la primera ecuación de comportamiento de (4.5), en los ejes x_1, x_2 (si el material es isótropo la ley de comportamiento tendrá la misma forma en cualesquiera ejes), se tiene que $\gamma_{12} = s/G$, que sustituido en la ecuación anterior produce:

$$\operatorname{tg}(\text{AO}, \text{AB}) = \operatorname{tg}(\pi/4 - \gamma_{12}/2) \cong \frac{1 - s/2G}{1 + s/2G}$$

Comparando la expresión anterior con la (4.6) observamos directamente que debe ser $s(1 + \nu)/E = s/2G$, y por tanto:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.7)$$

La relación anterior muestra explícitamente que G no es en realidad una nueva constante independiente, sino que depende de las E, ν , utilizadas anteriormente.

Llevando este valor de G a (4.5) resulta posible escribir todas las ecuaciones de comportamiento, (4.4) y (4.5), de una manera compacta:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} \right] \quad (4.8)$$

La ley de comportamiento puede expresarse de muchas otras maneras, jugando con si se muestran despejadas las tensiones en función de las deformaciones o al contrario, y haciendo intervenir distintas parejas de constantes elásticas. Como ejemplo, vamos a obtener las tensiones en función de las deformaciones a partir de (4.8). El camino más sencillo es expresar σ_{kk} en función de las deformaciones, llevar ese valor a (4.8), y despejar σ_{ij} . Para calcular σ_{kk} en función de las deformaciones podemos escribir (4.8) con un mismo símbolo, digamos p, en lugar de los i, j. Esto equivale estrictamente a sumar las tres ecuaciones (4.4). Tenemos así: $\varepsilon_{pp} = [(1 + \nu)\sigma_{pp} - 3\nu\sigma_{kk}]/E = \sigma_{pp}(1 - 2\nu)/E$. Por tanto,

$$\sigma_{kk} = \frac{E}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \quad (4.9)$$

Llevando este valor a (4.8) y despejando σ_{ij} resulta:

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} \quad (4.10)$$

Que es otra forma igualmente válida de la ley de comportamiento lineal isótropa, y que expresa tensiones en función de deformaciones usando las constantes E, ν . Se suele usar la notación λ para la primera fracción que aparece en (4.10):

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.11)$$

Al parámetro λ , que depende de las propiedades del material como se aprecia, se le denomina “Módulo de Lamé”, y es otra constante que podemos usar para caracterizar el comportamiento del material, si bien, al igual que ocurre con G, no es independiente de las introducidas anteriormente. La segunda fracción que aparece en (4.10) es, según (4.7) igual a 2G, con lo que (4.10) puede escribirse alternativamente como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (4.12)$$

Que nuevamente es otra forma válida de la ley de comportamiento, expresando también tensiones en función de deformaciones, pero esta vez usando las constantes λ , G. La ley de comportamiento admite otras muchas expresiones que se obtienen de forma análoga, no siendo de especial interés continuar detallándolas. Más interesante se considera dejar claramente expuestos los hechos que gobiernan toda esa posible casuística, y que se resumen a continuación.

- El comportamiento del material lineal elástico isótropo queda identificado por sólo dos constantes independientes.
- Se comprueba que cualquiera de las constantes elásticas E, G, λ , ν , puede expresarse en función de otras dos elegidas entre las tres restantes.
- Puede elegirse cualquier pareja de constantes elásticas de entre E, G, λ , ν , para expresar la ley de comportamiento.
- Es posible expresar tensiones en función de deformaciones o viceversa utilizando cualquier pareja de constantes que se elija, entre E, G, λ , ν .

Direcciones principales de tensión y de deformación.

Por ser tensores simétricos de orden dos, tanto la tensión como la deformación poseen direcciones principales, pero eso no significa que deban ser las mismas para ambos. De hecho, en general (materiales anisótropos) no coinciden, pero se da la circunstancia de que en materiales isótropos sí. Para demostrarlo bastará con observar por ejemplo la forma (4.12) de la ley de comportamiento, y recordar del álgebra lineal que las direcciones propias asociadas a una matriz no cambian si se multiplica a la matriz por una constante ($2G$ en nuestro caso) y tampoco si se le suma una constante a su diagonal principal (λe en este caso). Por tanto:

En el caso de comportamiento isótropo las direcciones principales de tensión y de deformación coinciden.

Rango de valores de las constantes elásticas

Es de interés conocer el rango de valores que adoptan las constantes elásticas. En relación con ello, conviene comenzar precisando que la deformación de los sólidos no es excepción respecto de las reglas que obedecen todos los procesos conocidos de la naturaleza, y que son las leyes de la termodinámica. Con esto se quiere poner de manifiesto que habrá determinados rangos de valores que las constantes no puedan adoptar, independientemente de lo moderno que sea el material. Por otra parte, tendremos el rango de valores de las constantes observado experimentalmente, que evidentemente no se saldrá de lo que es termodinámicamente posible, pero que se obtiene independientemente. Aunque el ofrecer argumentos más completos al respecto se sale del propósito de la exposición que sigue, la misma intenta poner de manifiesto de qué naturaleza son los límites enunciados.

Comencemos por lo más evidente: en la experimentación se observa invariablemente que una barra de cualquier material siempre se alarga (en ningún caso se acorta) cuando se le aplica una tracción. Se trata en realidad de una imposición termodinámica, ya que no sería difícil diseñar un ascensor que trabajase sin consumir energía usando resortes de un material que no se comportase así. Por tanto siempre debe ser:

$$E > 0$$

También se observa que un sólido sometido a compresión hidrostática siempre experimenta un decremento de volumen, nunca un aumento. También se trata de una imposición termodinámica: piénsese por ejemplo que un sólido que se comportase contrariamente sumergido en un recipiente lleno de agua y cerrado, haría aumentar la presión en el mismo indefinidamente. Como es sabido, en un estado de presión hidrostática el tensor de tensiones tiene la forma $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$, siendo p el valor de la presión. La ecuación (4.9) conduce a:

$$e = \epsilon_{kk} = \frac{-3p}{E}(1 - 2\nu)$$

Lo que indica que para que la dilatación cúbica unitaria sea efectivamente negativa, debe ser $\nu < 0.5$. Vemos el valor extremo $\nu=0.5$ correspondería a un material incompresible, ya que no cambiaría su volumen por grande que fuese la presión.

Por otra parte siempre se observa experimentalmente que una barra a tracción sufre un acortamiento de las dimensiones transversales. Luego a la vista de la definición (4.3), tenemos que ν será positivo. Pero no hay razones termodinámicas por las que esto deba ser así. De hecho, se ha conseguido sintetizar en laboratorio algún material con coeficiente de Poisson negativo. Curiosidades aparte, podemos considerar a efectos prácticos que:

$$0 < \nu < 0.5$$

Las restricciones anteriores para E y ν llevadas a las ecuaciones (4.7) y (4.11) conducen inmediatamente a:

$$\lambda > 0 \quad ; \quad G > 0$$

La restricción $G > 0$ anterior es una imposición termodinámica. Pero $\lambda > 0$ no lo es, de la misma forma que no lo es $\nu > 0$, aunque puede darse por sentado que ambas serán efectivamente positivas en cualquier material usual. Argumentos basados en la energía de deformación (concepto introducido en un epígrafe posterior) de un estado de contracción hidrostática, permiten obtener que un límite termodinámico para λ viene dado por $\lambda > -2G/3$.

4.5.- Comportamiento termoelástico desacoplado en materiales lineales isótropos.

En muchas situaciones de interés práctico, el estado de tensión-deformación de los sólidos está fuertemente influido por fenómenos térmicos, debido a la tendencia de los materiales a dilatarse al aumentar la temperatura. Conviene distinguir entre dos niveles en cuanto a dicha influencia:

- Por una parte, está el hecho de que el propio proceso de deformación lleva asociados fenómenos térmicos. Para proceder con rigor, el proceso de deformación debiera verse como un proceso termodinámico en su conjunto, en el que el trabajo de las fuerzas aplicadas es sólo un término más en las ecuaciones energéticas. Algunas de las conclusiones de este enfoque riguroso son, por ejemplo, que las constantes elásticas son distintas (aunque ligeramente) dependiendo de si el proceso de deformación es adiabático o isoterma, y que con la deformación se genera calor (aunque en cantidad usualmente pequeña) que a su vez influencia a la propia deformación, estando acoplados ambos fenómenos.
- Por otra parte, tenemos la posible concurrencia de fenómenos térmicos producidos por causas externas a la deformación, como calentamiento por irradiación solar, cercanía de calderas o motores de combustión, exposición al ambiente de invierno y de verano, etc. Estos efectos son de mucha mayor magnitud que los efectos térmicos asociados a la deformación, y son los únicos que se tienen en cuenta en las aplicaciones usuales de ingeniería.

A título meramente informativo, indicaremos que el modelo de comportamiento termoelástico lineal general puede resumirse en dos ecuaciones, una fundamentalmente térmica (expresa la entropía) pero que contiene un término elástico, y otra fundamentalmente elástica (expresa la tensión) pero que contiene un término térmico. El despreciar los “efectos térmicos asociados a la deformación” se traduce en despreciar la generación de entropía asociada a la deformación frente a la asociada a las variaciones de temperatura en la primera ecuación, que queda solamente con variables térmicas (es la conocida $\nabla^2 T = T_{,ii} = 0$ en su forma más sencilla, y para régimen estacionario). Ésta puede resolverse en primer lugar, y permite manejar la segunda ecuación con el término térmico ya conocido.

El hecho de que puedan resolverse independientemente (“desacopladamente”) las ecuaciones térmicas y elásticas es lo que hace que este modelo se identifique como “termoelasticidad desacoplada”. Seguidamente asumiremos que el problema térmico ha sido resuelto independientemente, de forma que el campo de temperaturas es un dato a efectos operativos, y obtendremos la ecuación de comportamiento elástico en presencia un campo de temperaturas. Los razonamientos utilizados serán sencillos, si bien la ecuación que se obtendrá coincide con la que se obtiene del modelo termoelástico acoplado.

Es un hecho conocido que cuando un cuerpo se calienta, generalmente aumenta de volumen. Si la temperatura es constante en todo el sólido, y el mismo no tiene impedimentos para su dilatación, el incremento de longitud de cualquier línea del sólido, independientemente de la orientación de ésta, es proporcional al incremento de temperatura y a su longitud inicial. Se llama “coeficiente de dilatación térmica” α al coeficiente de proporcionalidad, de unidades $^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Consideremos ahora un cubo diferencial del material, sometido a un incremento de temperatura θ , que siempre podremos considerar constante en ese pequeño volumen, sin ninguna otra acción ni restricción. El cubo se dilatará libremente, por igual en las tres direcciones, por lo que su tensor de deformaciones ϵ_{ij}^{θ} será:

$$\epsilon_{ij}^{\theta} = \alpha \theta \delta_{ij}$$

ϵ_{ij}
Temperatura y tensiones
=
 ϵ_{ij}^{θ}
Solamente temperatura
+
 ϵ_{ij}^{σ}
Solamente tensiones

Figura 4.17.- Superposición de las deformaciones debidas a la tensión y a la temperatura.

En realidad el cubo diferencial no está aislado, sino en el seno del sólido al que pertenece, por lo que sobre sus caras se ejercen unas ciertas tensiones σ_{ij} , que producirán deformaciones adicionales. Calculamos la deformación total mediante superposición de ambas, como sugiere la figura 4.17. Tomando por ejemplo (4.8) como expresión de las deformaciones debidas a la tensión, que llamaremos ε_{ij}^σ , tenemos:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^\sigma + \varepsilon_{ij}^\theta = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (4.13)$$

La anterior es una forma de la ley de comportamiento termoelástica para materiales isotrópicos. Se aprecia que las direcciones principales de tensión y deformación serán también coincidentes (para obtener las deformaciones se multiplica a σ por una constante y se añade otra constante a su diagonal).

Al igual que en ausencia de campo térmico, la ley de comportamiento admite multitud de expresiones. Como ejemplo, las siguientes son algunas de ellas:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2G) \alpha \theta \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] + \alpha \theta \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Acerca de la posibilidad de deformación sin tensión.

Como excepción en este capítulo, vamos a plantear un problema macroscópico, en atención a que su interés es general. Consideremos un sólido homogéneo e isotrópico que no tiene impedida su libre dilatación (sus condiciones de contorno en desplazamientos impiden, a lo sumo, posibles movimientos como sólido rígido). Sometemos al sólido a una cierta distribución de temperatura, pero no aplicamos ninguna fuerza. La pregunta que nos hacemos es si será o no será nula la tensión en el interior del sólido.

Para responder a la pregunta anterior, vamos a suponer que la tensión es cero, e impondremos esta hipótesis en las ecuaciones del modelo elástico. Encontraremos que deben satisfacerse algunas condiciones adicionales para que no haya incompatibilidades, por lo que la deformación sin tensión será posible solo bajo esas condiciones. Comenzamos apreciando que para tensiones nulas, (4.13) implica:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \theta \delta_{ij} \quad (4.15)$$

Las ecuaciones de equilibrio (2.12) y (2.13) se satisfacen idénticamente, dado que tanto las tensiones como las fuerzas de contorno y de volumen son nulas por hipótesis, por lo que su consideración no aporta ningún resultado de interés. Las ecuaciones de integrabilidad del tensor de deformaciones (3.32) permiten obtener:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{,kl} \delta_{ij} + \theta_{,ij} \delta_{kl} - \theta_{,jl} \delta_{ik} - \theta_{,ik} \delta_{jl} = 0$$

La solución más sencilla de la ecuación diferencial anterior es una expresión lineal:

$$\theta = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Por tanto, si el campo de temperaturas es lineal y no existen restricciones exteriores a la dilatación, habrá deformación sin tensión. Si el campo de temperaturas no es lineal, en general la ecuación diferencial anterior no se satisfará, indicando que la deformación será distinta de la dada por (4.15), para lo que debe existir tensión distinta de cero.

4.6.- Densidad de Energía de Deformación.

Propongámonos calcular el trabajo que realizan las fuerzas, tanto de contorno como de volumen, que causan el proceso de deformación en el sólido.

Siendo tanto las aceleraciones como las transferencias de calor despreciables, el trabajo de las fuerzas actuantes se empleará exclusivamente en deformar el sólido, no en acelerarlo ni en calentarlo. En ausencia de esos fenómenos energéticos, el trabajo que queremos calcular coincidirá con el incremento de Energía Interna del sólido, en su concepción termodinámica. Como la Energía Interna es una función de estado, el trabajo que queremos calcular dependerá solamente del estado actual del sólido, y no de la historia de carga.

Lo anterior implica que podemos suponer cualquier historia de carga que nos sea cómoda para los cálculos, con tal de que deje el sistema con sus cargas actuales. Supondremos en concreto que todas las cargas (incluidas las de volumen) crecen a la vez desde su valor inicial nulo hasta su valor final. La figura 4.18 muestra un ejemplo sencillo, con sólo una fuerza aplicada. Para calcular el trabajo interesa la gráfica de fuerza F frente a desplazamiento u del punto de acción de la fuerza (en realidad la componente de desplazamiento en la dirección de F). La gráfica es recta debido a la linealidad del comportamiento. El trabajo es el área bajo la gráfica, de valor $u \cdot F/2$, siendo u y F los valores finales.

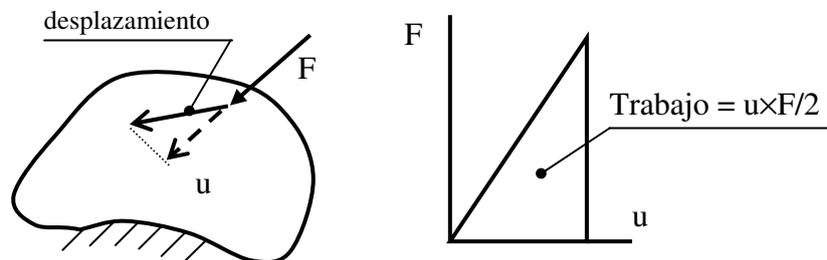


Figura 4.18.- Cálculo del trabajo de las fuerzas aplicadas en un caso sencillo.

Aunque existan más fuerzas aplicadas, la linealidad del sistema implica que en cualquier momento intermedio del proceso de carga, en el que se ha aplicado una fracción dada de todas las cargas, los desplazamientos son la misma fracción de su valor final. Por ello, la gráfica de cualquier fuerza (ya sea diferencial o finita, de contorno o de volumen) frente

al desplazamiento de su punto de acción, tendría el mismo aspecto que el mostrado en la figura 4.18. El trabajo de cada una de ellas es, en todo caso, la mitad del producto del valor final de la fuerza por el del desplazamiento.

Ocupémonos ahora de un caso general, en el que el sólido ocupa un volumen V limitado por su contorno S , sobre el que se aplican distribuciones de fuerzas de contorno y de volumen de cualquier tipología (la eventual presencia de fuerzas concentradas sería considerada como un caso particular de fuerza de contorno). Las consideraciones del párrafo anterior nos permiten escribir que la expresión del trabajo, como:

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2} \int_V X_i u_i dV + \frac{1}{2} \int_S \bar{X}_i u_i dS \quad (4.16)$$

Vamos a manipular la expresión anterior para hacer aparecer las tensiones y deformaciones. Comenzamos por sustituir las fuerzas de contorno y de volumen por sus expresiones según las ecuaciones de equilibrio (2.8) y (2.13):

$$\text{Trabajo} = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS =$$

Aplicamos integración por partes a la primera integral:

$$= -\frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS =$$

Aplicamos el teorema de la divergencia a la primera de las integrales anteriores, para transformarla en una integral de contorno. En la segunda integral hacemos uso de que $\sigma_{ij} u_{i,j} = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$. Véase: $\sigma_{ij} u_{i,j} =$ (cualquier símbolo puede usarse como subíndice mudo) $= \sigma_{ij} u_{i,j}/2 + \sigma_{ji} u_{j,i}/2 =$ (simetría de σ_{ij} aplicada al segundo sumando) $= \sigma_{ij} u_{i,j}/2 + \sigma_{ij} u_{j,i}/2 =$ (factor común σ_{ij}) $= \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i})/2 =$ (por definición de ϵ_{ij}) $= \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$.

$$= -\frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} u_i n_j dS + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV =$$

Evidentemente la primera y tercera integral se han cancelado entre sí. Resulta pues que el trabajo de las fuerzas actuantes se puede expresar como la integral en el volumen del sólido de la magnitud $\sigma_{ij} \epsilon_{ij}/2$. Llamaremos a esta magnitud “Densidad de Energía de Deformación”, y la denotaremos como W :

$$= \text{Trabajo} = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_V W dV \quad (4.17)$$

Hemos definido por tanto “Densidad de Energía de Deformación” como:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (4.18)$$

Esta magnitud tiene también un significado físico: Coincide con el trabajo que realizan las tensiones que actúan sobre las caras de un cubo diferencial de volumen $dx_1 dx_2 dx_3 = dV$, dividido por ese volumen. Esto puede comprobarse calculando ese trabajo directamente en el elemento diferencial, usando los movimientos relativos de sus caras y sus tensiones (por ejemplo, uno de los términos es $\sigma_{11} dx_2 dx_3 \epsilon_{11} dx_1 / 2$). Se deja del cuidado del lector esa comprobación, con el aviso de que las deformaciones no aparecen de forma directa en los términos del trabajo de las tensiones tangenciales, sino que hay que manipular las expresiones usando la simetría del tensor de tensiones. Por razones obvias la integral de este trabajo diferencial $W dV$, expresada por (4.17), se denomina “trabajo interno”. Como hemos demostrado, esa integral es igual al trabajo de las fuerzas actuantes sobre el sólido, que está dado por (4.16), y que se suele denominar “trabajo externo”. Es pues de aplicación la conocida máxima de “trabajo interno igual a trabajo externo”, que también reza en otros tipos de problemas de la física mecánica. A esa cantidad, calculada de cualquiera de las dos maneras, se le denomina frecuentemente “energía de deformación” del sólido.

Es notable el que W no dependa linealmente de las demás magnitudes del modelo elástico. De hecho, la energía es la única magnitud no lineal de la Teoría de la Elasticidad. Ello tiene algunas implicaciones evidentes, como por ejemplo que sería incorrecto calcular la energía de deformación de un sólido aplicando el principio de superposición de efectos. Es éste un error frecuente contra el que conviene estar advertido.

Dos propiedades fundamentales de la Densidad de Energía de Deformación.

Para finalizar este epígrafe, expondremos dos propiedades fundamentales de la Densidad de Energía de Deformación. La primera de ellas consiste en que

*La derivada parcial de W respecto de una
componente de deformación, da como resultado
la correspondiente componente de tensión:*

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (4.19)$$

Entiéndase en primer lugar el contexto implícito en la ecuación anterior, que contiene algunas sutilezas:

Por una parte, la derivación respecto de una componente de deformación merece algunas aclaraciones. W puede considerarse a la vista de (4.18) como dependiente de σ y de ϵ , pero es sencillo expresar σ en función de ϵ mediante la ley de comportamiento. Así pues, no hay inconveniente en pensar que W depende de las componentes de ϵ solamente, y realizar una derivada parcial suya respecto de una de esas componentes. Adicionalmente, (4.19) asume una expresión de W como la (4.18), en cuyo desarrollo aparecen tanto ϵ_{12} como ϵ_{21} (por ejemplo), considerándose ambas como variables

distintas para la derivación. Esto es preciso si queremos que (4.19) tenga la generalidad de, por ejemplo, expresar tanto σ_{12} como σ_{21} .

Por otra parte, debe entenderse el carácter local de (4.19): La densidad de energía es una función de punto, y (4.19) nos sitúa por tanto en un punto del sólido. Cada componente de deformación en el entorno de ese punto habrá crecido desde cero, pensemos que en incrementos arbitrariamente pequeños de deformación. (4.19) expresa que la pequeña variación de W producida por uno de los pequeños incrementos de una componente de deformación (y dividida por la magnitud de dicho incremento), manteniéndose constantes las demás componentes, es igual a la correspondiente componente de tensión en ese punto, para los valores de deformación en los que se realizó el incremento.

Aclarado lo anterior, pasamos a comprobar la veracidad de (4.19). Podemos plantear una comprobación directa usando la ley de comportamiento en su forma (4.12):

$$W = \sigma_{ij}\epsilon_{ij}/2 = (\lambda e\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij})\epsilon_{ij}/2 = \lambda e^2/2 + G\epsilon_{kp}\epsilon_{kp}$$

Derivando respecto de ϵ_{ij} , teniendo en cuenta las relaciones $\partial e/\partial\epsilon_{ij} = \delta_{ij}$, $\partial\epsilon_{kp}/\partial\epsilon_{ij} = \delta_{ki}\delta_{pj}$, (en efecto, tal como se apuntó ϵ_{kp} es una variable distinta de ϵ_{pk} , aunque su valor sea el mismo), tenemos:

$$\frac{\partial W}{\partial\epsilon_{ij}} = 2 \frac{1}{2} \lambda e \frac{\partial e}{\partial\epsilon_{ij}} + 2G\epsilon_{kp} \frac{\partial\epsilon_{kp}}{\partial\epsilon_{ij}} = \lambda e\delta_{ij} + 2G\epsilon_{kp} \delta_{ki} \delta_{pj} = \lambda e\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} = \sigma_{ij}$$

Como queríamos demostrar.

La densidad de energía de deformación, con su propiedad (4.19), existe en condiciones mucho más generales que las de linealidad e isotropía que manejamos aquí. Su existencia sirve como base de muchos desarrollos de la mecánica de sólidos, hasta tal punto que los problemas en los que puede definirse una función de Densidad de Energía de Deformación con esa propiedad (4.19), reciben un nombre propio: se llaman “hiperelásticos”.

La segunda propiedad fundamental de la Densidad de Energía de Deformación es la siguiente:

La Densidad de Energía de Deformación puede tener un valor positivo o bien nulo, pero nunca negativo.

$$W \geq 0 \tag{4.20}$$

Hay argumentos termodinámicos que indican que W debe ser en efecto una función positiva. Se presenta al respecto el siguiente razonamiento, de carácter intuitivo, pero que ayudará a comprender el porqué de esta propiedad sin complicar demasiado la exposición.

Considérese la expresión (4.16) del trabajo de las fuerzas aplicadas. Si pensamos en el caso sencillo de un ensayo de tracción, es evidente que ese trabajo es positivo, ya que el desplazamiento del extremo de la barra siempre se produce en el sentido de la fuerza. El hecho que se pretende resaltar es que el material *cede* ante la fuerza. El que el material reaccionase *contra* la fuerza sería termodinámicamente imposible (recuérdense los argumentos del final de 4.4 acerca de $E > 0$), ya que nos proporcionaría trabajo “gratis”. En casos más complicados en cuanto a geometría y cargas, el hecho básico sigue siendo el mismo: el material debe *ceder* ante las cargas, esta vez en un cierto sentido promedio. Este “sentido promedio” es el proporcionado por el trabajo (4.16), que debe mantenerse positivo por los mismos motivos que en el ensayo de tracción.

Admitido lo anterior, piénsese en una porción del sólido aislada mediante un corte ideal. Si en la superficie de corte aplicamos las tensiones que existían, tenemos un nuevo sólido, en el que el trabajo de las fuerzas debe ser también positivo. Como podemos aplicar lo anterior a cualquier porción del sólido, se concluye que el integrando de (4.17) debe ser positivo en todo el sólido. El integrando no es otro que W , en concordancia con el enunciado propuesto.

El valor nulo de W se dará cuando la deformación sea nula en el punto considerado, como resulta evidente a la vista de (4.18). Cuando utilizando modelos de primer orden (como el caso de la teoría de la elasticidad) se definen magnitudes locales basándose en propiedades que deben satisfacerse a nivel macroscópico, pueden surgir algunas paradojas en ciertos puntos particulares del dominio. El lector interesado en este tipo de curiosidades matemáticas puede consultar al respecto los artículos de Woods referenciados al final del capítulo.

Concluiremos con una nota acerca del rango posible de valores del Módulo de Lamé, λ . Al final del epígrafe 4.4 se indicó que un límite inferior suyo impuesto por la termodinámica es $-2G/3$ siendo G el módulo de cortadura. Estamos ahora en condiciones de justificarlo. Considérese un estado de equicontracción en un punto de un material, digamos $\epsilon_{ij} = -a\delta_{ij}$, siendo a un cierto valor dado. La densidad de energía de deformación sería $W = \sigma_{ij}\epsilon_{ij}/2 = (\lambda e\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij})\epsilon_{ij}/2 = [\lambda e e + 2G\epsilon_{ij}\epsilon_{ij}]/2 =$ (se tiene en este caso $e = \epsilon_{kk} = -3a$; $\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = a^2\delta_{ij}\delta_{ij} = 3a^2$) $= [\lambda 9a^2 + 2G3a^2]/2$. Para que sea mayor que cero, debe ser $3\lambda + 2G > 0$, lo que justifica el límite para λ aludido.

4.7.- Criterios de plastificación.

Parece evidente a la vista de los resultados en ensayos de tracción para el acero, que la hipótesis de comportamiento lineal elástico del material sólo será razonable en determinado rango de valores de las cargas. En este epígrafe daremos noticia de la información experimental básica asociada al comienzo de las deformaciones no elásticas, y presentaremos algunos criterios o teorías acerca de los mecanismos que gobiernan el fin del comportamiento elástico.

Como primer paso, es importante comprender que la información obtenida del ensayo de tracción (el valor del límite elástico σ_e), sólo es indicativa del comportamiento en un estado unidireccional de tensión, siendo insuficiente para predecir la plastificación en un estado general de tensión tridimensional. Una evidencia experimental clara de que la plastificación no depende sólo de que la mayor tensión normal alcance el valor σ_e , es que la plastificación se produce antes de llegar a este valor si favorecemos el efecto de acortamiento lateral de Poisson mediante una compresión lateral adicional, como se indica en la figura 4.19 para un elemento diferencial.

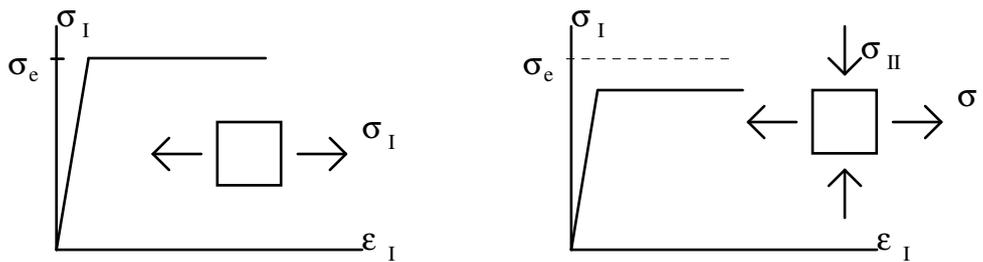


Figura 4.19.- Efecto de una compresión lateral en la plastificación bajo tracción.

Por tanto, debemos desechar generalizaciones tales como asumir que el límite elástico σ_e medido en el ensayo de tracción sea el valor límite de la tensión normal en una situación general. De hecho, los primeros criterios que fueron propuestos en la segunda mitad del siglo XIX por Rankine, Saint-Venant y otros investigadores, se basaban en extrapolaciones más o menos directas de los resultados de tensión unidireccional, y contradecían la evidencia experimental en estados más generales.

Es pues necesario disponer de alguna información experimental adicional que nos sugiera la manera en que el final del comportamiento elástico depende del estado tridimensional de sollicitación. A parte de los resultados del propio ensayo de tracción, contamos con los resultados de los ensayos de Lode, realizados en la década de 1920. Estos ensayos consisten en someter tubos de pared delgada a tracción (o compresión) combinada con torsión y con presión interior. De esta manera se consigue gran versatilidad en el control de la sollicitación en cualquier elemento de la superficie del tubo, sollicitación que será la misma en todos los puntos (salvo efectos de borde en los extremos del tubo). En efecto, bajo hipótesis de reparto uniforme de tensiones asumibles en este caso, la tracción exterior provocará solamente tensión σ_{11} en el elemento de tubo (la orientación asumida del elemento se muestra en la figura 4.20), el momento torsor solamente tensión tangencial σ_{12} , y la presión interna produce principalmente tensión σ_{22} (la componente σ_{33} es despreciable por tratarse de tubos de pared delgada; la tensión σ_{11} debida a la presión depende de las condiciones de apoyo en los extremos del tubo). Resumiremos brevemente las conclusiones de estos ensayos diciendo que la plastificación depende poco de la forma que tenga el diagrama de Mohr (es decir, de la posición de la tensión principal intermedia σ_{II} en relación a las otras dos), y tampoco depende apreciablemente de si el diagrama se desplaza en el eje σ manteniendo su forma. El que se produzca o no la plastificación depende fundamentalmente del tamaño del diagrama, es decir del tamaño de la mayor de las circunferencias, o lo que es lo mismo, del valor de la máxima tensión tangencial. Para ser más precisos, se observa el

comienzo de la plastificación cuando la tensión tangencial máxima llega a valores entre $0.5\sigma_e$ (correspondiendo a los casos de tracción o compresión pura) y $0.56\sigma_e$ (que corresponde al caso llamado "tensión tangencial pura", obtenido cuando sólo se aplica momento torsor). El estado de tensión bajo el que se obtiene este último resultado se ilustra en la figura 4.20, y será usado posteriormente como indicador de la exactitud de los diversos criterios.

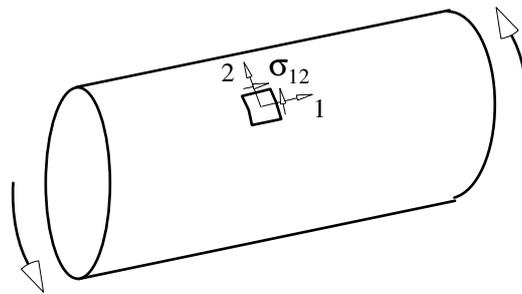


Figura 4.20.- Estado de "tensión tangencial pura".

Citaremos también que en la década de 1950, Bridgman observó que la compresión hidrostática de los sólidos produce siempre deformación elástica. Admitiendo la validez del principio de superposición cuando el material no ha plastificado, lo anterior indica que la plastificación o no de un material no depende de si se le superpone o no determinado estado de presión hidrostática al estado de tensión inicial. Esto equivale a decir que la plastificación no dependerá del tensor medio de tensiones (ver epígrafe 2.7). El conjunto de evidencias experimentales que hemos citado, y que están referidas fundamentalmente al acero y otros materiales metálicos, servirán de guía general para juzgar la verosimilitud de un criterio dado en los apartados posteriores.

Superficie de plastificación

Es posible establecer algunas características generales que cualquier criterio debe satisfacer para ajustarse al comportamiento observado experimentalmente. Para tomar como punto de partida un planteamiento de suficiente generalidad, podemos recabar la evidencia básica de que la plastificación depende del estado de tensión en el punto considerado. Además, a la vista del comportamiento "con endurecimiento" observado en el ensayo de tracción, esperamos que la plastificación se produzca a niveles mayores de tensión si ha habido plastificación en procesos de carga previos. En consecuencia, la plastificación o no en el proceso de carga actual también dependerá de la deformación plástica de esos procesos previos. Esperamos así que la plastificación se produzca cuando una cierta función del estado de tensión y de la deformación plástica acumulada alcance cierto valor. Este valor dependerá de las propiedades del material, asumiéndose que solamente el límite elástico σ_e es relevante a estos efectos. Por tanto la forma que consideraremos como más general de un criterio de plastificación será:

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^{plast}) \leq g(\sigma_e) \quad (4.21)$$

En donde f y g representan genéricamente cierta dependencia funcional, a especificar por cada criterio particular, y no existirá nueva plastificación hasta que no se llegue a la igualdad de ambos términos. En gran parte de las aplicaciones prácticas, desearíamos que el material permanezca dentro del periodo elástico, en cuyo caso no se considerará la posibilidad de deformaciones plásticas, y la forma de un criterio pasará a ser:

$$f(\sigma_{ij}) \leq g(\sigma_e) \quad (4.22)$$

Si el material es isótropo, la plastificación es independiente de la orientación de los ejes a los que esté referido el tensor de tensiones. Para materiales isótropos, las tensiones principales, o bien los invariantes del tensor, son pues información suficiente para un criterio de plastificación del tipo (4.22), que puede ponerse de la forma:

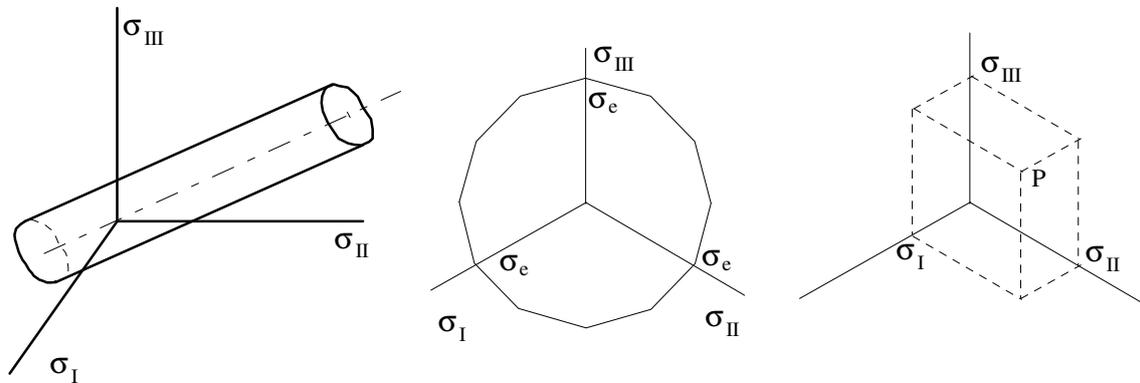
$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq g(\sigma_e) \quad (4.23)$$

O bien en función de los invariantes: $f(I_1, I_2, I_3) \leq g(\sigma_e)$. Los ensayos de Bridgman comentados anteriormente sugieren que la plastificación depende solamente del tensor desviador de tensiones. Si llamamos J_1, J_2, J_3 , a los invariantes del tensor desviador, y conociendo que siempre será $J_1=0$, concluimos que un criterio de plastificación podrá escribirse de forma que sólo dependa de J_2 y J_3 :

$$f(J_2, J_3) \leq g(\sigma_e) \quad (4.24)$$

La superficie de plastificación es la superficie dada por una ecuación del tipo (4.23) en el espacio de tensiones principales, con igualdad de sus miembros. En el estudio de la superficie de plastificación (y de los diversos criterios), se abandona la suposición de que las tensiones principales están ordenadas de mayor a menor, lo que conducirá como veremos a simetrías de la superficie, facilitando su trazado y manejo. Admitiendo que la plastificación depende sólo de la parte desviadora del tensor, la superficie de plastificación será un prisma recto cuyo eje es la trisectriz de los ejes coordenados. La representación plana de Haigh-Westergaard (epígrafe 2.7) contendrá por tanto toda la información relevante relativa a la plastificación. La forma de la sección del prisma será la que proponga cada criterio de plastificación particular. La primera figura 4.21 muestra la forma general de la superficie de plastificación. Se insiste en que la sección transversal del prisma, que se muestra en perspectiva isométrica en la segunda de las figuras 4.21, no tiene porqué ser circular. Pero sí debe cumplir ciertas condiciones: el que el material sea isótropo implica que la ordenación de los ejes principales es indiferente, por lo que en la última representación, los tres ejes coordenados serán de simetría de la sección, y habrá repetitividad cada 120° . Si además el material tiene idéntico comportamiento a tracción que a compresión, como supondremos, entonces debe tener centro de simetría en el origen de la representación isométrica. La repetitividad cada 120° y cada 180° implica que debe haber repetitividad cada 60° (el máximo común divisor de ambos valores). La segunda figura 4.21 muestra una forma de la sección del prisma coherente con los condicionantes anteriores, y con el requisito adicional de que la superficie sea convexa. La justificación de este último requisito se basa en el comportamiento en régimen plástico, y cae fuera del ámbito de este texto. La tercera figura 4.21 nos recuerda cómo trazar un punto P en la representación isométrica

dadas las tensiones principales, lo que le será útil si desea comprobar los argumentos de simetría expuestos en este párrafo.



Figuras 4.21.- Prototipo de superficie de plastificación.

Ocurre que, en realidad, el comportamiento similar en tracción y en compresión habitualmente observado en los metales, deja de serlo llegado cierto nivel de tensiones. En efecto, cuando las tres tensiones principales son de tracción y se hacen progresivamente mayores, llega un momento en que se produce "rotura frágil" del material (es decir, rotura sin plastificación previa). El prisma no será por tanto ilimitado, sino que estará acotado en la zona de tracciones por la "superficie de rotura", que es el lugar geométrico de los puntos del espacio de tensiones principales en que se produce la rotura del material. Esta superficie es independiente de la superficie de plastificación, ya que está asociada a un fenómeno distinto. En la figura 4.22 se muestra la manera en que la superficie de rotura intersectará típicamente a la de plastificación, haciendo perder todo significado a la zona de ésta que sobrepasa a aquella.

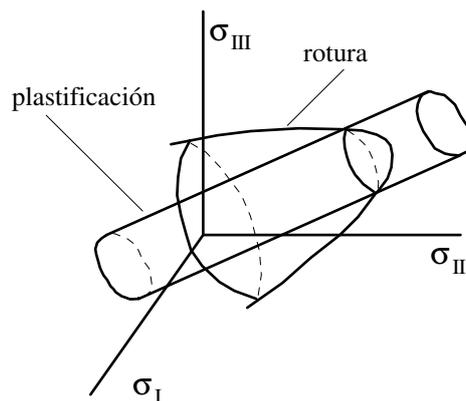


Figura 4.22.- Superficie de plastificación y superficie de rotura.

Para prevenir el riesgo de rotura frágil, las normas recomiendan habitualmente como condición de diseño que si las tres tensiones principales son de tracción, la mayor de ellas no sobrepase el valor $2\sigma_e$. Puede comprobarse que una limitación de este tipo equivale a postular que la superficie de rotura tiene forma puntiaguda triangular al aproximarse a la trisectriz. Por supuesto, la condición anterior se entiende como

adicional a la de que el estado de tensión sea interior a la superficie de plastificación según el criterio adoptado.

Criterio de Tresca

El criterio de Tresca predice que la plastificación llegará cuando la tensión tangencial máxima en el punto alcance cierto valor. En apoyo de esta teoría está el hecho de que no contradice en lo fundamental ninguna de las evidencias experimentales que hemos comentado. Adicionalmente, cuando llega la plastificación en el ensayo de tracción, aparecen unas líneas en el material (líneas Lueder), a 45° de la dirección del eje de la barra. Esto sugiere que la tensión tangencial está asociada a la plastificación al menos en ese ensayo, ya que sus máximos ocurren precisamente a 45°. La máxima tensión tangencial es el máximo de los valores siguientes:

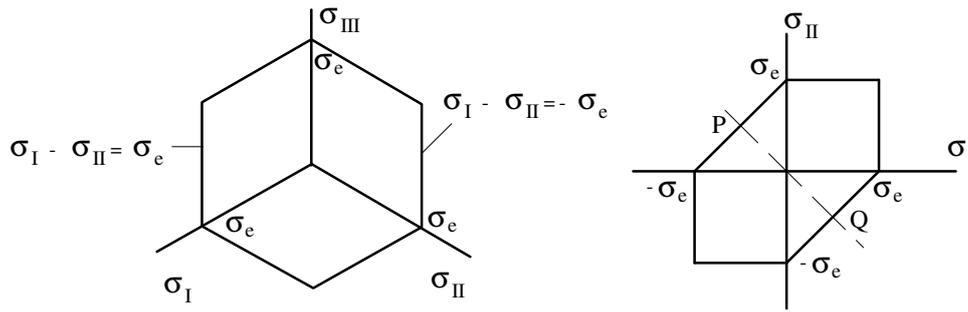
$$\left| \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right| ; \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right| ; \left| \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right| \quad (4.25)$$

Como valor de tensión tangencial de plastificación se toma el alcanzado en el ensayo de tracción. Como sabemos, en este ensayo la plastificación llega cuando la tensión normal vale σ_e , siendo la tensión tangencial máxima $\tau^{\max} = \sigma_e/2$. Por tanto el criterio de Tresca predice la plastificación cuando el máximo de las cantidades (4.25) alcanza el valor $\sigma_e/2$. Para el trazado de la superficie de plastificación es más cómodo considerar las condiciones límite por separado:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \pm \sigma_e ; \sigma_I - \sigma_{III} = \pm \sigma_e ; \sigma_{II} - \sigma_{III} = \pm \sigma_e \quad (4.26)$$

El trazado de los seis planos anteriores en la representación isométrica del espacio de tensiones principales se muestra en la primera figura 4.23. Como se aprecia, resulta una superficie de plastificación con forma de prisma de sección hexagonal, que cumple con los requisitos generales esperados para una superficie de plastificación.

Para juzgar la exactitud del criterio, consideremos el estado de tensión tangencial pura en el plano I-II (esto es $\sigma_{II} = -\sigma_I$, con $\sigma_{III} = 0$), para el que los ensayos de Lode predicen la plastificación cuando $\tau^{\max} = 0.56 \sigma_e$. Este estado de tensión está representado por la línea PQ en la segunda figura 4.23, que muestra la sección de la superficie de plastificación por el plano $\sigma_{III} = 0$. El punto Q (o el P) es el punto en que el criterio de Tresca predice la plastificación en el estado de tensión tangencial pura. Como vemos, en este punto se tiene un valor de $\sigma_I = 0.5 \sigma_e = \tau^{\max}$. Nótese que en este caso el círculo de Mohr está centrado respecto de los ejes σ - τ , por lo que $\tau^{\max} = \sigma_I$. La aproximación de este factor 0.5 al valor 0.56 esperado puede considerarse como aceptable desde el punto de vista de la inmensa mayoría de las aplicaciones de ingeniería. Además, la discrepancia entre ambos valores situará del lado de la seguridad a los diseños efectuados en base a este criterio.



Figuras 4.23.- Superficie de plastificación según el Criterio de Tresca.

Criterio de Von-Mises

Beltrami postuló que la plastificación llegaría cuando la densidad de energía de deformación (W , ver epígrafe 4.6) alcanzase cierto valor. El criterio basado en este postulado resultó discordante con los resultados experimentales de Lode. No obstante, la idea básica de asociar la plastificación a alguna magnitud energética resulta físicamente atractiva.

Nos interesará considerar el tensor de tensiones descompuesto en su parte desviadora y en su parte media. Descompondremos también la deformación en suma de tensor medio y tensor desviador de deformaciones, que se definen de forma similar a sus homólogos en tensiones. Es interesante apreciar que al ser lineal la ley de comportamiento, se cumple que las componentes del tensor medio de tensiones son las que se obtienen a partir de las componentes del tensor medio de deformaciones a través de la ley de comportamiento, y análogamente para los tensores desviadores. Podemos expresar la densidad de energía de deformación, ecuación (4.18), como:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^m + \sigma_{ij}^d) (\epsilon_{ij}^m + \epsilon_{ij}^d) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^m \epsilon_{ij}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \epsilon_{ij}^d + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \epsilon_{ij}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^m \epsilon_{ij}^d$$

Puede comprobarse que los dos últimos términos de la ecuación anterior son nulos. Véase como ejemplo que el último de ellos puede escribirse:

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij}^d - \nu\sigma_{pp}^d \delta_{ij}] = \frac{\sigma_{kk}}{6E} [(1+\nu)\sigma_{ii}^d - 3\nu\sigma_{pp}^d] = 0$$

Que se anula al ser nulo el primer invariante de un tensor desviador ($\sigma_{jj}^d = 0$). Por tanto, la densidad de energía de deformación admite la expresión:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^m \epsilon_{ij}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \epsilon_{ij}^d \quad (4.27)$$

La expresión anterior hace cobrar sentido a la idea, en principio injustificada, de que W puede calcularse mediante superposición de la energía debida al tensor medio (de tensiones, con sus correspondientes deformaciones) más la debida al tensor desviador.

En relación con lo anterior, el lector debe quedar avisado de que los casos en que una energía puede calcularse por superposición de efectos son contadas excepciones. Debe recordarse que la energía *es una función no lineal* de las deformaciones (o de las tensiones), como se comentó tras la ecuación (4.18).

En todo caso, la expresión (4.27) permite concebir la densidad de energía de deformación como suma de las aportaciones debidas al tensor medio y al tensor desviador. Esto, junto con la indicación experimental de que la plastificación no depende de la adición de una presión hidrostática, la cual está asociada a los tensores medios, hace natural el concebir que la plastificación dependerá del valor de la densidad de energía debida al tensor desviador, es decir, del último término de (4.27) que llamaremos "energía de distorsión", W^d :

$$\begin{aligned} W^d &= \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \epsilon_{ij}^d = \frac{1}{2E} \sigma_{ij}^d \left[(1+\nu) \sigma_{ij}^d - \nu \sigma_{kk}^d \delta_{ij} \right] = (\sigma_{kk}^d = 0) = \frac{1+\nu}{2E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\sigma_{pp}}{3} \delta_{ij} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) \\ &= \frac{1+\nu}{2E} \left[\sigma_{ij} \sigma_{ij} + \frac{\sigma_{pp}}{3} \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ii} - \frac{\sigma_{pp} \sigma_{ii}}{3} - \frac{\sigma_{ii} \sigma_{kk}}{3} \right] \end{aligned}$$

En el último corchete, el segundo término se cancela con el tercero (o con el cuarto). Para simplificar el desarrollo vamos a suponer por ahora que los ejes adoptados son ejes principales. La expresión anterior resulta:

$$W^d = \frac{1+\nu}{2E} \left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \frac{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2}{3} \right] = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 \right]$$

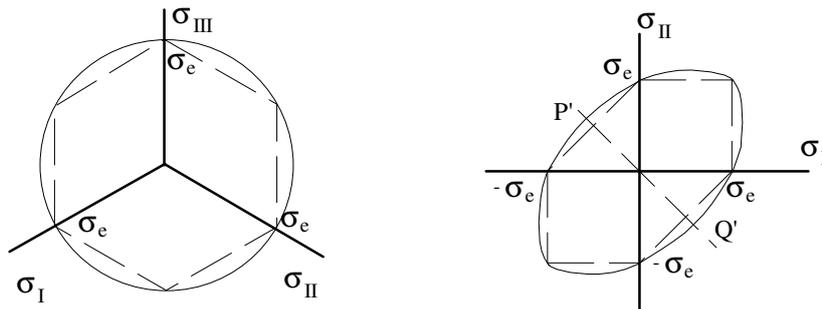
El criterio de Von-Mises propone que la plastificación ocurrirá cuando la expresión anterior alcance cierto valor. Nuevamente, se toma como referencia el ensayo de tracción para fijar ese valor. En este ensayo, sólo σ_I es distinto de cero, por lo que al llegar la plastificación tenemos:

$$W_{(\text{Ensayo Tr.})}^d = \frac{1+\nu}{6E} (2\sigma_I^2) = \frac{1+\nu}{6E} (2\sigma_e^2)$$

Que se adopta como valor límite que puede tomar W^d sin que el material plastifique. Con esto obtenemos la forma final del criterio de Von-Mises:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 \leq 2\sigma_e^2 \quad (4.28)$$

Puede apreciarse que la representación de la ecuación anterior en el espacio de tensiones principales es un cilindro de sección circular cuyo eje está dirigido según la trisectriz de los ejes coordenados. Su representación en la perspectiva isométrica de Haigh-Westergaard se muestra en la primera figura 4.24. El cilindro asociado al criterio de Von-Mises es justamente el que circunscribe al prisma hexagonal de Tresca, que también se muestra en la figura, en línea de puntos.



Figuras 4.24.- Superficie de plastificación según el Criterio de Von-Mises.

Para juzgar el grado de verosimilitud del criterio compararemos nuevamente la predicción que ofrece para el estado de tensión tangencial pura con los resultados de Lode. La intersección de la superficie de plastificación con el plano $\sigma_{III} = 0$ se muestra en la segunda de las figuras 4.24. Los estados de tensión tangencial pura se encuentran en la línea $P'Q'$, siendo el punto Q' (o el P') el que representa la plastificación según este criterio. Sustituyendo $\sigma_{III} = 0$, $\sigma_{II} = -\sigma_I$ en (4.28) obtenemos:

$$6\sigma_I^2 \leq 2\sigma_e^2 \Rightarrow \sigma_I \leq 0.577\sigma_e$$

Valor muy próximo al $0.56\sigma_e$ encontrado experimentalmente por Lode. Podemos por tanto juzgar que el criterio de Von-Mises se ajusta satisfactoriamente a los resultados experimentales, si bien sus predicciones quedarán ligeramente fuera del lado de la seguridad. Este criterio, junto con el de Tresca, que a efectos prácticos es sensiblemente equivalente, es ampliamente utilizado para materiales metálicos. Históricamente, Von-Mises propuso en 1912 sustituir el prisma hexagonal de Tresca por el cilindro que le circunscribe sin más argumento que la sencillez de su manejo, y el que el nivel de precisión en la concordancia con los resultados experimentales no resultaba sensiblemente afectado, o en todo caso mejoraba. Fue Hencky quién doce años más tarde realizó la interpretación física en base a la energía de distorsión que hemos presentado aquí.

Para su aplicación práctica, conviene disponer de una expresión del criterio análoga a (4.28), pero respecto de ejes no principales cualesquiera. Para ello podríamos proceder a desarrollar directamente W^d en ejes no principales, pero es más elegante apreciar que el segundo invariante del tensor desviador de tensiones, que llamamos J_2 , admite la siguiente expresión en ejes principales:

$$\begin{aligned} J_2 &= (\sigma_I - \sigma_{kk} / 3)(\sigma_{II} - \sigma_{kk} / 3) + (\sigma_I - \sigma_{kk} / 3)(\sigma_{III} - \sigma_{kk} / 3) + (\sigma_{II} - \sigma_{kk} / 3)(\sigma_{III} - \sigma_{kk} / 3) = \\ &= -\frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2] \end{aligned}$$

Lo que se obtiene tras operaciones algebraicas rutinarias. Se aprecia que el segundo invariante es siempre negativo. Con el resultado anterior, la ecuación (4.61) puede escribirse como:

$$|J_2| = -J_2 \leq \frac{\sigma_e^2}{3} \quad (4.29)$$

Que expresa el criterio de Von-Mises en función del segundo invariante del tensor desviador. Esta forma del criterio es del tipo a la anunciada en (4.56), aunque eventualmente no aparece el tercer invariante del tensor desviador. El conseguir una expresión del criterio en función de las componentes de tensión en ejes no principales es inmediato a partir de (4.62), teniendo en cuenta que J_2 es invariante frente a cambios de orientación de los ejes:

$$J_2 = \left| \begin{array}{cc} \sigma_{11} - s/3 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - s/3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \sigma_{11} - s/3 & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} - s/3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \sigma_{22} - s/3 & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} - s/3 \end{array} \right|$$

En donde $s/3$ es la tensión media, $\sigma_{kk}/3$. Desarrollando la ecuación anterior obtenemos (nótese que los productos de las diagonales principales reproducen un cálculo formalmente análogo al que condujo a la expresión de J_2 en ejes principales):

$$J_2 = -\frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2] - [\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2]$$

Sustituyendo lo anterior en (4.29) obtenemos la expresión del criterio de Von-Mises en función de tensiones no principales:

$$[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2] + 6[\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2] \leq 2\sigma_e^2 \quad (4.30)$$

Bibliografía:

- FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall
 LUBLINER, J., "Plasticity theory", Maxwell Macmillan International Editors
 PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla
 DOBLARE, M., "Teoría de la Elasticidad lineal", ETSII-Univ. Zaragoza
 WOODS, L.C., "On the local form of the second law of thermodynamics in continuum mechanics", Quarterly of applied mathematics 39, pp.119-126 (1981).
 WOODS, L.C., "The bogus axioms of continuum mechanics", Bulletin of the institute of mathematics and its applications. 17, pp.98-102 (1981).

Ecuaciones y Teoremas de la Elasticidad.

A partir de las ecuaciones básicas de la Teoría de la Elasticidad, presentadas en los tres capítulos anteriores, se derivan un conjunto de ecuaciones y teoremas de gran utilidad a la hora de abordar la resolución de un problema dado, o que son el fundamento de ciertas estrategias o métodos generales de resolución. En este capítulo se presentan algunas de estas ecuaciones y teoremas.

5.1.- Ecuaciones de Navier.

Estas ecuaciones fueron desarrolladas por Louis Navier en la década de 1820. La idea fundamental que se persigue es evitar la complicación asociada al manejo de magnitudes de varios tipos (deformaciones, tensiones, desplazamientos), formulando un conjunto de ecuaciones que contengan solamente a los desplazamientos, y cuya solución sea la solución del problema elástico. La elección de los desplazamientos como variables básicas del problema obedece a que conocidos éstos, la obtención de los campos de deformaciones y tensiones requiere simples derivaciones y operaciones algebraicas ordinarias. Para conseguir tales ecuaciones, partimos de las ecuaciones de equilibrio (2.13), las de compatibilidad deformación-desplazamiento (3.11), y de la ley de comportamiento lineal isótropa (4.40), que reproducimos por comodidad:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad ; \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}$$

Es posible poner en la tercera ecuación las deformaciones en función de los desplazamientos (usando la segunda ecuación). Obtenemos así la tensión en función de los desplazamientos. Después llevamos la tensión a la primera ecuación, realizando la derivación que ésta indica. Seguidamente se detalla este sencillo proceso:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) &\Rightarrow \sigma_{ij,j} = \lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) = (\lambda + G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} \Rightarrow \\ &(\lambda + G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} + X_i = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Conocemos como Ecuaciones de Navier a las tres ecuaciones anteriores ($i=1,2,3$). El procedimiento seguido por Navier para su obtención no fue el presentado aquí, dado que la mecánica de medios continuos no contaba en la época con la popularidad que tiene hoy día. Las mismas fueron obtenidas a partir de un modelo de sólido consistente en partículas conectadas entre sí. Inicialmente Navier propuso unas ecuaciones con una sola constante elástica para el material isótropo (eran, por lo tanto, incorrectas). Fue un

amplio periodo de discusión de los investigadores más relevantes del momento el que condujo a la forma (5.1) de estas ecuaciones. Las mismas admiten ser expresadas en función de operadores usuales en teoría vectorial de campos, lo que resulta cómodo si se han de expresar en otros sistemas de coordenadas no cartesianos:

$$(\lambda+G) \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{u}) + G \nabla^2(\mathbf{u}) + \mathbf{X} = 0$$

Es inmediato apreciar que si un campo de desplazamientos satisface las ecuaciones de Navier y todas las condiciones de contorno de un problema, entonces ese campo de desplazamientos es solución de nuestro problema elástico. En efecto, las tensiones que derivan de ese campo de desplazamientos cumplirá las ecuaciones de equilibrio interno (dado que las ecuaciones de Navier son en realidad estas ecuaciones de equilibrio expresadas en función de los desplazamientos), y las demás ecuaciones del modelo matemático se satisfacen por propia definición: el campo de deformaciones es aquel que deriva de los desplazamientos mediante (3.11), y las tensiones son las que se obtienen mediante (4.40) con las mismas constantes elásticas empleadas en (5.1).

Nociones sobre la búsqueda de solución para las ecuaciones de Navier

Cuando se pretende integrar las ecuaciones de Navier, un paso previo es expresar las condiciones de contorno en tensiones en función de los desplazamientos, para poder imponerlas en estas variables. Su expresión es:

$$\bar{X}_i = \sigma_{ij} n_j = (\lambda \epsilon_{ij} + 2G \epsilon_{ij}) n_j = [\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i})] n_j$$

En principio, es posible integrar (analíticamente o mediante métodos aproximados) las ecuaciones de Navier en un problema dado, y ajustar las constantes de integración mediante las condiciones de contorno en tensiones anteriores, y las condiciones de contorno en desplazamientos. Estas últimas se imponen de manera más sencilla, ya que los desplazamientos son precisamente las variables en las que están planteadas las ecuaciones. Seguidamente presentamos algunas breves nociones acerca de la obtención de soluciones por métodos analíticos.

Si las fuerzas de volumen son constantes, $X_i = \text{cte}$, la ecuación de Navier permite observar algunas particularidades de la solución. Derivando cada ecuación (5.1) respecto de la coordenada x_i respectiva y sumándolas, se tiene:

$$(\lambda + G) u_{j, jii} + G u_{i, jji} + X_{i,i} = 0 \Rightarrow [(\lambda + G) + G] u_{j, jii} = 0 \Rightarrow \nabla^2 u_{j,j} = \nabla^2 e = 0$$

Es decir, que si las fuerzas de volumen son constantes, la dilatación "e" es una función armónica. Teniendo en cuenta este resultado, si aplicamos ∇^2 a cada ecuación (5.1) por separado obtenemos inmediatamente que $\nabla^2(\nabla^2 u_i) = \nabla^4 u_i = 0$, propiedad que enunciaremos como: "si las fuerzas de volumen son constantes, cada componente de desplazamiento es una función biarmónica". De esta propiedad se deduce obviamente que cada componente de deformación y cada componente de tensión será también biarmónica en el caso de fuerzas de volumen constantes. Esta propiedad ofrece para

estos casos una orientación acerca de qué tipo de soluciones plantear o ensayar para las ecuaciones de Navier.

En la búsqueda de soluciones analíticas de la ecuación de Navier se utilizan técnicas matemáticas complementarias, tales como el planteamiento de funciones potenciales de desplazamiento. Estas técnicas están basadas en la propiedad de que cualquier campo vectorial analítico (\mathbf{u} en nuestro caso) puede expresarse como el gradiente de un cierto campo escalar ϕ más el rotacional de un cierto campo vectorial Ψ (teorema de Helmholtz):

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} \phi + \mathbf{rot} \Psi, \quad \text{o bien} \quad u_i = \phi_{,i} + e_{ijk} \Psi_{k,j}$$

Puede demostrarse que existen las funciones ϕ y Ψ anteriores asociadas al campo analítico \mathbf{u} bajo la condición adicional $\text{div} \Psi = 0$. Llamamos entonces a ϕ y Ψ respectivamente potencial escalar y potencial vector.

La dilatación se expresa en función de los potenciales como: $e = u_{i,i} = \phi_{,ii} + e_{ijk} \Psi_{k,ji}$. El último término es nulo ya que expresa la divergencia de un rotacional. Por tanto se tiene $e = \nabla^2 \phi$. En el caso de fuerzas de volumen nulas, $X_i = 0$, al que nos referiremos en lo sucesivo, las ecuaciones de Navier quedan:

$$(\lambda + G)(\nabla^2 \phi)_{,i} + G(\nabla^2 \phi)_{,i} + G e_{ijk} (\nabla^2 \Psi_k)_{,j} = 0$$

La ecuación anterior se satisface si $\nabla^2 \phi = e = \text{cte}$, $\nabla^2 \Psi_i = \text{cte}$ (aunque no se trate de una solución general). Cuando se espere de antemano que la dilatación sea constante en el sólido, es natural intentar encontrar la solución bajo estas condiciones.

Analicemos el caso aún más particular en el que el campo de desplazamientos derive únicamente del potencial escalar:

$$2Gu_i = \phi_{,i}$$

Al potencial escalar ϕ así definido se le llama potencial de Lamé. La constante $2G$ se incluye por razones históricas. La dilatación asociada a este campo se obtiene por derivación:

$$2Gu_{i,i} = 2Ge = \phi_{,ii} \\ (= \text{cte, para satisfacer (5.1)})$$

Las deformaciones y tensiones dadas por este potencial son, respectivamente:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \phi_{,ij} \quad \sigma_{ij} = \frac{\lambda}{2G} \phi_{,kk} \delta_{ij} + \phi_{,ij}$$

Si la dilatación es nula, $e = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$ (caso de material incompresible), entonces los campos de deformaciones y tensiones asociados al potencial de Lamé son:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \phi_{,ij} \quad \sigma_{ij} = \phi_{,ij}$$

El potencial de Lamé da solución, entre otros, a problemas del tipo esfera maciza o hueca con presión exterior (e interior en su caso), y también bajo otras condiciones de contorno sencillas. El procedimiento suele basarse en plantear la función potencial ϕ como suma de varias funciones, una del tipo $\nabla^2 = \text{cte}$ (típicamente Cr^2), que produce la aportación constante no nula a la dilatación, más otras del tipo armónico $\nabla^2 = 0$, de las que se conoce una amplia variedad. Por ejemplo, las siguientes son funciones armónicas:

2D:	$Ax^2 + 2Bxy - Ay^2$	x, y , coordenadas cartesianas
	$Ar^n \cos(n\theta)$	$r^2 = x^2 + y^2$; $\theta = \text{atg}(y/x)$
3D:	$A \ln(Br)$	A, B , constantes arbitrarias
	$A\theta$	n , número entero
	A/R	$(R^2 = x^2 + y^2 + z^2)$
	$A \ln(R + z)$	$(x, y, z$ coordenadas cartesianas)
	$A \ln \left[\frac{(r^2 + (z - B)^2 + z - B)(r^2 + (z + B)^2 - z - B)}{r^2} \right]$	

Pueden plantearse también otras funciones polinómicas armónicas, del tipo a la primera de las anteriores, lo que da solución a algunos problemas en coordenadas cartesianas. El resto de las funciones bidimensionales anteriores resuelven algunos problemas relativos a sólidos circulares. La primera de las tridimensionales resuelve específicamente problemas de esferas con solicitaciones simétricas respecto de todos los planos que pasan por su centro. Las dos últimas resuelven algunos problemas de sólidos con geometría de revolución entorno al eje z .

Pese a lo atractivo de su sencillez, resulta claro que el potencial de Lamé no es lo bastante general para representar cualquier campo dado de desplazamientos u_i , ya que en general éste no podrá ser expresado en función del potencial escalar solamente. Existen otros enfoques más generales de solución basados en potenciales. Entre ellos merece especial mención la técnica del "Vector de Galerkin", que consiste en expresar el potencial vector Ψ como rotacional de otro campo vectorial. Esta técnica ha permitido encontrar la solución de muchos problemas clásicos de la elasticidad, notablemente los relacionados con cargas concentradas en el sólido infinito o semi-infinito (un semiespacio limitado por un plano). Los detalles de esta y otras técnicas de particular interés para problemas tridimensionales no serán presentados aquí, remitiéndose al lector interesado a bibliografía más especializada (por ejemplo el texto de J.R. Barber, capítulos 15 y 16).

5.2.- Ecuaciones de Beltrami y Michell.

En ocasiones es posible obtener la solución de tensiones del problema sin llegar a obtener los desplazamientos. Cuando se da esta posibilidad suele ser ventajoso hacer uso de ella, ya que la obtención de las tensiones implica un orden menos de integración

que la obtención de los desplazamientos. Es especialmente razonable pensar en un enfoque en tensiones cuando todas las tensiones del contorno sean conocidas, aunque puede aplicarse en otras situaciones. Puesto que en principio no tenemos intención de calcular el campo de desplazamientos, hemos de asegurarnos de que el campo de tensiones tenga asociado un campo de desplazamientos físicamente posible. Para ello imponemos el cumplimiento de las ecuaciones de integrabilidad (3.32):

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{il,kj} - \varepsilon_{kj,il} = 0$$

Que expresamos en función de las tensiones a través de la ley de comportamiento en su forma (4.52):

$$\sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{il,kj} - \sigma_{kj,il} = \frac{\nu}{1+\nu} [\sigma_{pp,kl} \delta_{ij} + \sigma_{pp,ij} \delta_{kl} - \sigma_{pp,kj} \delta_{il} - \sigma_{pp,il} \delta_{kj}]$$

Recordemos que solo hay 6 ecuaciones independientes de integrabilidad, por tanto solo 6 de las 81 aparentes ecuaciones anteriores serán independientes. Realizamos una combinación lineal con estas 81 ecuaciones, consistente en hacer iguales los subíndices "i" y "l", con el sumatorio que ello conlleva. De esta manera obtenemos un conjunto de 9 ecuaciones (subíndices libres j y k). Más tarde comprobaremos que 6 de estas 9 ecuaciones son independientes, lo que indica que no se pierde información al realizar esta combinación lineal:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,ki} + \sigma_{ki,ij} - \sigma_{ii,kj} - \sigma_{kj,ii} &= \frac{\nu}{1+\nu} [\sigma_{pp,ki} \delta_{ij} + \sigma_{pp,ij} \delta_{ki} - \sigma_{pp,kj} \delta_{ii} - \sigma_{pp,ii} \delta_{kj}] = \\ &= \frac{\nu}{1+\nu} [\sigma_{pp,kj} + \sigma_{pp,kj} - 3\sigma_{pp,kj} - \sigma_{pp,ii} \delta_{kj}] \end{aligned}$$

Utilizamos la ecuación de equilibrio en el dominio para transformar los dos primeros términos de la ecuación anterior:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij,ki} = -X_{j,k} \quad ; \quad \sigma_{ki,ij} = -X_{k,j}$$

Por tanto:

$$-(X_{j,k} + X_{k,j}) = \frac{1}{1+\nu} \sigma_{pp,kj} + \sigma_{kj,ii} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{pp,ii} \delta_{kj}$$

Hay que notar que esta transformación de algunos términos utilizando las ecuaciones de equilibrio no supone que la eventual aplicación de la ecuación anterior lleve implícita la imposición de las propias ecuaciones de equilibrio. Lo que sí es cierto es que la anterior es una forma válida de las ecuaciones de integrabilidad *solo cuando* se cumplen las ecuaciones de equilibrio. Pero si deseamos imponer las propias ecuaciones de equilibrio (lo que en general necesitaremos), tendremos que hacerlo separadamente. Como operación final, podemos calcular el valor de $\sigma_{pp,ii}$ (último término de la ecuación anterior) haciendo $k=j$ en la propia ecuación anterior:

$$-2X_{k,k} = \frac{1}{1+\nu} \sigma_{pp,kk} + \sigma_{kk,ii} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{pp,ii} \quad 3 = \frac{2-2\nu}{1+\nu} \sigma_{pp,kk} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{pp,kk} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} X_{i,i}$$

Con lo que tenemos:

$$\sigma_{kj,ii} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ii,kj} = -(X_{j,k} + X_{k,j}) - \frac{\nu}{1-\nu} X_{i,i} \delta_{kj} \quad (5.2)$$

Las anteriores son las ecuaciones de integrabilidad expresadas en función de las tensiones cuando se cumplen las ecuaciones de equilibrio. Se conocen como ecuaciones de Michell y Beltrami. Cabe insistir en el hecho de que un campo de desplazamientos que ensayemos como solución de un problema, puede satisfacer estas ecuaciones sin satisfacer las de equilibrio. En forma desarrollada, las seis ecuaciones independientes contenidas en la expresión (5.2) son:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,11} &= -2X_{1,1} - \frac{\nu}{1-\nu} (X_{1,1} + X_{2,2} + X_{3,3}) \\ \nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,22} &= -2X_{2,2} - \frac{\nu}{1-\nu} (X_{1,1} + X_{2,2} + X_{3,3}) \\ \nabla^2 \sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,33} &= -2X_{3,3} - \frac{\nu}{1-\nu} (X_{1,1} + X_{2,2} + X_{3,3}) \\ \nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,12} &= -(X_{1,2} + X_{2,1}) \\ \nabla^2 \sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,13} &= -(X_{1,3} + X_{3,1}) \\ \nabla^2 \sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_{,23} &= -(X_{2,3} + X_{3,2}) \end{aligned}$$

En el caso en que las fuerzas de volumen sean constantes, $X_i = \text{cte}$, los miembros derechos se anulan, resultando:

$$\sigma_{kj,ii} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ii,kj} = 0 \quad (5.3)$$

Si a partir de las ecuaciones de Beltrami-Michell y de las ecuaciones de equilibrio se consigue calcular el campo de tensiones, puede procederse al cálculo de desplazamientos aplicando lo expuesto en el epígrafe 3.6 acerca de la obtención del campo de desplazamientos a partir del de deformaciones.

Contraejemplo a la suficiencia de las ecuaciones de Beltrami-Michell

Hemos insistido en el hecho de que un campo de desplazamientos que ensayemos como solución de un problema, puede satisfacer las ecuaciones de Beltrami-Michell sin satisfacer las de equilibrio. Ello puede sorprender en un principio, dado que las ecuaciones de equilibrio fueron utilizadas en su obtención.

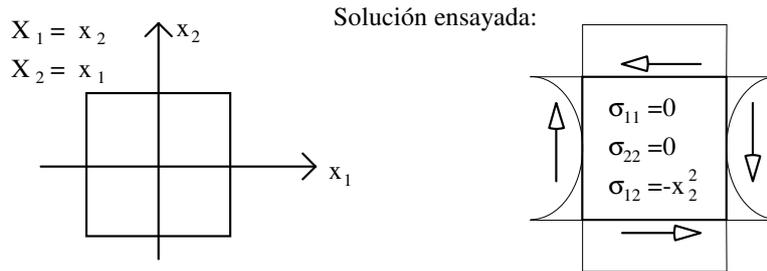


Figura 5.1.- Problema y tensiones en el contorno de la solución ensayada.

Si las aclaraciones presentadas en su momento no infunden aún suficiente seguridad en el lector, puede considerarse el siguiente contraejemplo: Sea un sólido bidimensional cuadrado como indica la figura 5.1, sometido a las fuerzas de volumen $X_1 = x_2$; $X_2 = x_1$. Asumiendo $\sigma_{33} = 0$, y que las derivadas respecto de x_3 son nulas, las ecuaciones significativas en (5.2) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} &= 0 & \frac{2+\nu}{1+\nu} \sigma_{11,11} + \sigma_{11,22} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{22,11} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} &= 0 & \frac{2+\nu}{1+\nu} \sigma_{22,22} + \sigma_{22,11} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{11,22} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,12} &= -2 & \sigma_{12,11} + \sigma_{12,22} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,12} &= -2 \end{aligned} \Rightarrow$$

Como campo de tensiones elegimos ensayar $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$; $\sigma_{12} = -x_1^2$, que cumple las ecuaciones anteriores. Pero es fácil comprobar que no satisfacen las de equilibrio:

$$\begin{aligned} -X_1 &= \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} \Rightarrow -x_2 = -2x_2 && \text{(Falso!)} \\ -X_2 &= \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} \Rightarrow -x_1 = 0 + 0 = 0 && \text{(Falso!)} \end{aligned}$$

Lo que muestra que efectivamente un campo de tensiones que propongamos puede satisfacer las ecuaciones de Beltrami-Michell sin ser la solución de nuestro problema, ya que puede no satisfacer las de equilibrio. Notemos de paso que la no satisfacción de las ecuaciones de equilibrio interno implica en general el no equilibrio del conjunto del sólido. Así, en este caso las fuerzas de volumen son un sistema autoequilibrado en la placa, por lo que las fuerzas de contorno también tendrían que serlo para que la misma estuviera en equilibrio. Puede comprobarse que lo anterior no se da en la solución de tensiones ensayada: las fuerzas de contorno tienen resultante nula pero su momento respecto de un punto no lo es (ver segunda figura 5.1).

5.3.- Teorema de unicidad de solución del problema elástico lineal.

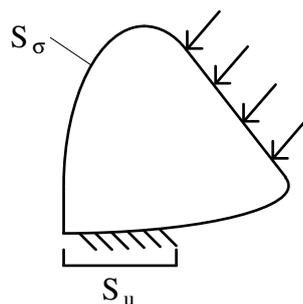
La experiencia física común indica que en general existe una relación causa - efecto unívoca en los fenómenos naturales. En particular esperamos que cada vez que apliquemos determinada acción sobre un sólido, éste adopte la misma configuración deformada. En principio, demos por válida esa apreciación de la realidad, al menos mientras no ocurran fenómenos especiales, como deformaciones no elásticas en el material, o inestabilidad. Admitida esta relación unívoca entre causa y efecto en el fenómeno físico, nos preguntamos si también existe el mismo tipo de relación en el

modelo matemático que hemos desarrollado. Es decir, deseamos saber si a un conjunto de solicitaciones particular de un sólido le corresponde una configuración deformada única en el modelo matemático. La cuestión planteada es, por tanto, la de unicidad de solución del problema elástico.

Antes de presentar el teorema que nos ocupa, conviene tener noticia de la importancia y el alcance de la cuestión planteada: En elasticidad es habitual emplear métodos de resolución de tipo inverso, que consisten básicamente en ensayar una solución y comprobar a posteriori que la misma cumple las ecuaciones del modelo matemático (ajustando en su caso algunos parámetros). Este tipo de procedimientos carecería de fundamento si no estuviera asegurado que la solución del problema es única.

La demostración de unicidad de solución del problema elástico bajo ciertas condiciones, que se consideran las condiciones que debe cumplir un problema para estar planteado correctamente, es debida a Kirchoff. Dicha demostración se presenta a continuación.

Sea un sólido cuyo contorno exterior es S . En una parte del contorno, S_u , están prescritos los desplazamientos y se desconocen las tensiones, y en otra parte del contorno, S_σ , están prescritas las tensiones y se desconocen los desplazamientos. En ningún punto del contorno se prescribe simultáneamente la tensión y el desplazamiento, por lo que las porciones S_u y S_σ no tienen intersección, y además S_u y S_σ cubren por completo la superficie S del sólido. Un ejemplo de estas condiciones se muestra en la figura 5.2. Nótese que la ausencia de actuación exterior sobre un punto del contorno supone en realidad prescribir tensión nula en ese punto, por lo que el mismo pertenecerá a S_σ . Se supone además que las restricciones al desplazamiento son por lo menos suficientes para evitar la indeterminación asociada a movimientos como sólido rígido.



$$\text{En } S_u \quad u_i = u_i^* \quad (\text{funciones dadas})$$

$$\text{En } S_\sigma \quad \bar{X}_i = \bar{X}_i^* \quad (\text{funciones dadas})$$

$$S_u + S_\sigma = S$$

Figura 5.2.- Ejemplo de condiciones para el teorema de unicidad de Kirchoff

El teorema establece que *bajo las condiciones anteriores, y si existe la función de densidad de energía de deformación, y ésta es definida positiva, entonces la solución de desplazamientos es única* (y por lo tanto también lo son los campos de deformaciones y de tensiones).

Existen argumentos termodinámicos que indican que la función de densidad de energía de deformación, W , debe ser definida positiva en condiciones más generales. Nosotros simplemente comprobaremos que efectivamente lo es para el caso lineal elástico isótropo de nuestro interés. De (4.59) tenemos:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\lambda e \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij}) \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \lambda e^2 + G \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \geq 0$$

Que nunca es negativa por ser una suma de términos de deformación al cuadrado, y que sólo puede ser cero si todas las componentes de deformación son nulas (estas condiciones definen a una función como "definida positiva"). Realizada la comprobación anterior, vamos a demostrar el teorema. Supongamos que bajo unas mismas condiciones de contorno existen dos soluciones de desplazamiento, que llamaremos u'_i y u''_i . Cada una tendrá asociado un campo de deformaciones y de tensiones. Como suponemos que ambas son soluciones válidas, ambos campos de tensiones cumplirán las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} u'_i &\xrightarrow{(u_{i,j}+u_{j,i})/2} \epsilon'_{ij} \xrightarrow{\text{Hooke}} \sigma'_{ij} \quad (\sigma'_{ij,j} + X_i^* = 0) \\ u''_i &\xrightarrow{(u_{i,j}+u_{j,i})/2} \epsilon''_{ij} \xrightarrow{\text{Hooke}} \sigma''_{ij} \quad (\sigma''_{ij,j} + X_i^* = 0) \end{aligned}$$

Siendo X_i^* la fuerza de volumen, dato del problema. Consideremos un nuevo campo de desplazamientos u_i , obtenido como diferencia de los dos anteriores. Como todas las relaciones son lineales, las deformaciones y tensiones asociadas a este nuevo campo también se obtienen por diferencia:

$$u_i = u'_i - u''_i \quad ; \quad \epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} - \epsilon''_{ij} \quad ; \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}$$

Derivando la última igualdad tenemos:

$$\sigma_{ij,j} = \sigma'_{ij,j} - \sigma''_{ij,j} = -X_i^* + X_i^* = 0$$

Multiplicando $\sigma_{ij,j}$ por u_i e integrando en el volumen se tiene:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV = 0 &= \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \int_S \sigma_{ij} u_i n_j dS - \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \\ &= \int_S \bar{X}_i u_i dS - \int_V 2W dV \quad \Rightarrow \quad \int_S \bar{X}_i u_i dS = \int_V 2W dV \end{aligned}$$

En donde \bar{X}_i es el vector tensión en el contorno asociado a la solución diferencia. La integral de contorno se anula porque en una parte de ese contorno (S_u) se anula u_i (nótese que esto sucede aunque los desplazamientos prescritos u_i^* no sean nulos, ya que se trata del campo de desplazamientos diferencia), y en el resto del contorno (S_σ) se anula la tensión en el contorno (ya que en las zonas de tensión prescrita es $\bar{X}_i = \bar{X}_i^* - \bar{X}_i^* = 0$). Por lo tanto:

$$\int_S \bar{X}_i u_i dS = \int_V 2W dV = 0 \tag{5.4}$$

Como W es una función definida positiva, lo anterior implica que la deformación ϵ_{ij} asociada al campo u_i debe ser nula en todos los puntos del sólido. Sabemos que el único campo de movimientos posible con estas características corresponde a un movimiento

como sólido rígido. Pero tal movimiento no es posible, dado que en S_u el campo u_i tiene desplazamientos prescritos nulos (y según nuestras premisas, en cantidad suficiente para impedir movimientos arbitrarios como sólido rígido). Por tanto es $u_i = 0$, como única posibilidad de movimiento con deformación nula y además movimiento nulo de un número suficiente de puntos del contorno. De esta conclusión se sigue inmediatamente que las dos soluciones distintas supuestas inicialmente, deben en realidad coincidir:

$$u_i = u'_i - u''_i = 0 \Rightarrow u'_i = u''_i$$

El hecho de que si existiesen dos soluciones distintas las mismas coincidirían, es equivalente a enunciar que, tal como ha sido planteado, la solución del problema elástico es única, como queríamos demostrar. Evidentemente, la igualdad del campo de desplazamientos implica la de los campos de deformaciones y de tensiones.

Ampliación de las condiciones para el teorema de unicidad.

Desde el punto de vista de su aplicación, el aspecto más interesante a recordar del teorema de unicidad es sin duda el conjunto de premisas del teorema, que como se ha demostrado son condiciones suficientes para que el problema elástico tenga solución única. Mostraremos que dichas premisas no son todas estrictamente necesarias: la premisa de que en cada punto del contorno esté prescrito el vector tensión o bien el vector desplazamiento puede ampliarse ligeramente, para recoger algunos tipos usuales de condiciones de contorno.

En efecto, observamos que esta premisa ha servido únicamente para asegurar que la integral de contorno de (5.4) se anule. Pero esta integral se anula igualmente si en puntos del contorno está prescrita la tensión según una dirección y el desplazamiento según la dirección perpendicular (nótese que el integrando tiene la forma de un producto escalar). Esto permite incluir entre las condiciones de contorno aceptables las asociadas a "apoyos móviles", que permiten el movimiento solamente según una dirección (usualmente tangente al contorno S). En el epígrafe 5.9 de este capítulo se detallarán esta y otras condiciones de apoyo.

5.4.- Planteamiento integral de las ecuaciones de equilibrio: Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV).

En este epígrafe y en los tres siguientes estudiaremos un conjunto de principios y teoremas formulados de forma integral, en oposición al enfoque directo sobre las ecuaciones diferenciales aportado por las ecuaciones de Navier y las de Beltrami-Michell. Estas formulaciones integrales pueden considerarse la base de los potentes métodos de resolución que han progresado enormemente con la creciente capacidad de cálculo de los ordenadores. Por ejemplo, el PDV que estudiamos en este epígrafe está en la base del popular Método de los Elementos Finitos, así como del cálculo matricial de estructuras.

Sea σ_{ij} un campo de tensiones cualquiera en un sólido, que llamaremos "campo real" de tensiones. Sea φ_i un campo cualquiera de desplazamientos, univaluado y tres veces derivable, cuyas deformaciones asociadas son ε_{ij}^φ , y que llamaremos "campo virtual" de desplazamientos. Nótese que no se requiere que el campo virtual guarde ninguna relación con el campo real. Bajo estas condiciones, el enunciado del PDV es el siguiente:

El cumplimiento para *cualquier campo virtual* φ_i de la ecuación integral siguiente:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\varphi dV = \int_V X_i \varphi_i dV + \int_S \bar{X}_i \varphi_i dS \quad (5.5)$$

Es condición necesaria y suficiente para que el campo real de tensiones satisfaga la ecuación de equilibrio en el dominio con X_i ($\sigma_{ij,j} + X_i = 0$ en V), y la ecuación de equilibrio en el contorno con \bar{X}_i ($\bar{X}_i = \sigma_{ij} n_j$ en S).

Como es habitual, V es el dominio ocupado por el sólido, y S su contorno. Demostraremos en primer lugar que la ecuación integral es una *condición necesaria* para que el conjunto de magnitudes "reales" esté en equilibrio. Es decir, partimos de que se satisface el equilibrio y llegaremos a que debe cumplirse la ecuación (5.5). Tomamos la ecuación de equilibrio en el dominio, $\sigma_{ij,j} + X_i = 0$, la multiplicamos por φ_i e integramos en el sólido:

$$\int_V \sigma_{ij,j} \varphi_i dV + \int_V X_i \varphi_i dV = 0 \Rightarrow \int_V (\sigma_{ij} \varphi_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} \varphi_{i,j} dV + \int_V X_i \varphi_i dV = 0$$

Hemos integrado por partes la integral de volumen. Mediante el teorema de la divergencia transformamos la primera integral de la última igualdad en una integral de contorno. El integrando de la segunda integral puede transformarse teniendo en cuenta que $\varphi_{i,j} = \varepsilon_{ij}^\varphi + \omega_{ij}^\varphi$ (tensores deformación y rotación asociados al campo virtual), y por tanto $\sigma_{ij} \varphi_{i,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\varphi$, puesto que el producto $\sigma_{ij} \omega_{ij}^\varphi$ es siempre nulo (tensor simétrico por tensor antisimétrico). Con esto tenemos:

$$\int_S \sigma_{ij} \varphi_i n_j dV - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\varphi dV + \int_V X_i \varphi_i dV = 0$$

Podemos utilizar la relación $\sigma_{ij} n_j = \bar{X}_i$ en la primera de las integrales anteriores, dado que en este sentido de la demostración se asume el equilibrio del campo real. Haciendo esto y reordenando términos obtenemos la ecuación integral (5.5), como queríamos demostrar.

Demostraremos ahora que el cumplimiento de la ecuación integral (5.5) en las condiciones establecidas en el enunciado, es también condición suficiente para que el campo de tensiones "real" cumpla las ecuaciones de equilibrio. Es decir, ahora tomamos como punto de partida el que la ecuación integral se satisface, y deseamos obtener a partir de ella las ecuaciones de equilibrio. Comenzaremos manipulando la primera integral de (5.5):

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{\phi} dV &= \int_V \sigma_{ij} \phi_{i,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \phi_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \phi_i dV = \int_S \sigma_{ij} \phi_i n_j dV - \int_V \sigma_{ij,j} \phi_i dV = \\ &= (\text{por (5.5)}) = \int_V X_i \phi_i dV + \int_S \bar{X}_i \phi_i dS \end{aligned}$$

Agrupando términos tenemos:
$$\int_V (X_i + \sigma_{ij,j}) \phi_i dV + \int_S (\bar{X}_i - \sigma_{ij} n_j) \phi_i dS = 0$$

El que la igualdad anterior se satisficiera para un sólo campo particular de desplazamientos virtuales ϕ_i , no permitiría asegurar nada acerca de sus cofactores en los integrandos. Pero si tal como establece el enunciado, el campo virtual puede ser *cualquiera* que podamos imaginar, entonces los factores que multiplican a ϕ_i en las integrales deben ser nulos para que se cumpla en todo caso la igualdad a cero (esto se admite por principio). Los factores de ϕ_i en los integrandos igualados a cero son precisamente las ecuaciones de equilibrio, como queríamos demostrar:

$$X_i + \sigma_{ij,j} = 0 \quad ; \quad \bar{X}_i - \sigma_{ij} n_j = 0$$

Cabe hacer algunas observaciones acerca del Principio de los desplazamientos Virtuales. La primera es que el cumplimiento de la ecuación integral (5.5) no garantiza absolutamente nada acerca del campo de desplazamientos "real" u_i (asociado a σ_{ij}), que como se aprecia, ni siquiera aparece. Los métodos de resolución basados en el PDV deben en algún momento asegurar la continuidad, univaluación, etc, del campo de desplazamientos ("real"). Por ejemplo, los métodos matriciales de cálculo de estructuras imponen la igualdad de desplazamientos y giros (cuando proceda) en las uniones de las barras, y el método de los elementos finitos obvia el problema utilizando los desplazamientos como variables básicas, y realizando una aproximación de los mismos que tiene desde el principio las propiedades requeridas. Este método será presentado en un capítulo posterior. La segunda observación es que el PDV es válido sea cual sea la ley de comportamiento, ya que no se usó ninguna en su formulación. Lo anterior incluye tanto leyes no lineales como comportamiento plástico. No abordaremos la consideración del tiempo como variable y de los efectos de inercia en el contexto de los teoremas integrales. Una tercera observación está relacionada con el hecho de que los términos de la ecuación integral (5.5) tienen dimensiones de trabajo. De hecho, cada término representa el trabajo que realizaría la fuerza o tensión correspondiente, permaneciendo constante, si se produjera el desplazamiento virtual. Se suele denominar al miembro izquierdo "trabajo virtual interno", y al miembro derecho "trabajo virtual exterior", lo que asigna a la ecuación integral el significado de "trabajo interno igual a trabajo exterior". La cuarta y última observación es que el uso práctico del PDV se centra sobre todo en el uso de la ecuación (5.5) como "una ecuación que debe cumplirse" (es decir, como condición necesaria), y que es posible plantear tantas veces como necesitemos, con distintos estados virtuales, para obtener tantas ecuaciones como queramos involucrando a los parámetros de nuestro problema.

5.5.- Planteamiento integral de las ecuaciones de compatibilidad: Principio de las Fuerzas virtuales (PFV).

Se trata de un enunciado dual del anterior. Es también la base de una familia de métodos de resolución de problemas elásticos, llamados "métodos de compatibilidad". Estos métodos tienen en general la desventaja de ser poco apropiados para ser sistematizados e implementados en ordenador. Cuando se deben efectuar cálculos manualmente, es en ocasiones ventajoso utilizar métodos de esta familia en lugar de métodos de equilibrio.

Sea ϵ_{ij} un campo de deformaciones cualquiera en un sólido, que llamaremos "campo real" de deformaciones. Sea σ_{ij}^ϕ un campo cualquiera de tensiones, que llamaremos "campo virtual" de tensiones, y que está en equilibrio con las fuerzas "virtuales" de volumen y de contorno. Es decir:

$$\sigma_{ij,j}^\phi + X_i^\phi = 0, \quad \bar{X}_i^\phi = \sigma_{ij}^\phi n_j$$

Nótese que no se requiere que el campo virtual guarde ninguna relación particular con el campo real. Bajo estas condiciones, el enunciado del PFV es el siguiente:

El cumplimiento para *cualquier campo virtual* σ_{ij}^ϕ de la ecuación integral siguiente:

$$\int_V \sigma_{ij}^\phi \epsilon_{ij} dV = \int_V X_i^\phi u_i dV + \int_S \bar{X}_i^\phi u_i^c dS \tag{5.6}$$

Es condición necesaria y suficiente para que el campo real de deformaciones ϵ_{ij} satisfaga la ecuación de compatibilidad con u_i ($\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2$ en V), y que los desplazamientos en el contorno tengan el valor u_i^c ($u_i = u_i^c$ en S).

Por analogía con las ecuaciones de equilibrio, llamaremos ecuación de compatibilidad en el dominio y ecuación de compatibilidad en el contorno a cada una de las dos últimas relaciones entre paréntesis del enunciado, respectivamente. En general, un sólido tendrá prescritos los desplazamientos en una parte del contorno S y en otra no, pero ello no es de interés ahora: u_i^c son los desplazamientos del campo real en *todo* el contorno S (si el enunciado del PFV es cierto; como demostraremos, lo es), de la misma manera que en el PDV era \bar{X}_i la tensión en el contorno, estuviere ésta prescrita o no en un punto particular del mismo.

Demostraremos en primer lugar que el cumplimiento de la ecuación integral es una condición necesaria para que se satisfagan las ecuaciones de compatibilidad. Partimos por tanto de que las mismas se satisfacen, y llegaremos a obtener la ecuación (5.6). Multiplicando la ecuación de compatibilidad en el dominio por el campo virtual de tensiones e integrando en el sólido, tenemos:

$$\int_V \epsilon_{ij} \sigma_{ij}^\phi dV = \int_V \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \sigma_{ij}^\phi dV = \int_V u_{i,j} \sigma_{ij}^\phi dV = \int_V (u_i \sigma_{ij}^\phi)_{,j} dV - \int_V u_i \sigma_{ij,j}^\phi dV$$

En donde se ha hecho uso de que el tensor de tensiones es simétrico junto con que es indiferente el símbolo utilizado para un subíndice mudo (segunda igualdad), y se ha realizado una integración por partes (tercera igualdad). La primera integral del último

miembro puede pasarse al contorno mediante el teorema de la divergencia, y una vez hecho esto puede hacerse la sustitución de u_i por u_i^c , ya que en este sentido de la demostración se asume que $u_i = u_i^c$ en S . Finalmente podemos utilizar las ecuaciones de equilibrio del campo virtual en el dominio y el contorno, que se satisfacen en todo caso, para que aparezcan las cargas virtuales en lugar de las tensiones:

$$\int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^{\phi} dV = \int_S u_i^c \sigma_{ij}^{\phi} n_j dS - \int_V u_i \sigma_{ij,j}^{\phi} dV = \int_S u_i^c \sigma_{ij}^{\phi} n_j dS - \int_V u_i \sigma_{ij,j}^{\phi} dV = \int_S u_i^c \bar{X}_i^{\phi} dS + \int_V u_i X_i^{\phi} dV$$

El primer y último miembros de la igualdad anterior reproducen la ecuación (5.6), como queríamos demostrar.

Ahora demostraremos que el cumplimiento de la ecuación integral (5.6) es también una condición suficiente para que el campo "real" de deformaciones y desplazamientos cumpla las ecuaciones de compatibilidad en el dominio y en el contorno. Partimos pues de la ecuación integral, y queremos obtener a partir de ella las ecuaciones de compatibilidad. Comenzamos manipulando la integral de volumen del segundo miembro de (5.6):

$$\int_V X_i^{\phi} u_i dV = - \int_V \sigma_{ij,j}^{\phi} u_i dV = - \int_V (\sigma_{ij}^{\phi} u_i)_{,j} dV + \int_V \sigma_{ij}^{\phi} u_{i,j} dV = - \int_S \sigma_{ij}^{\phi} u_i n_j dS + \int_V \sigma_{ij}^{\phi} \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} dV$$

Las manipulaciones anteriores son formalmente análogas a las realizadas en el epígrafe anterior. Como en este sentido de la demostración se asume que se cumple (5.6), lo anterior debe ser igual a:

$$= \int_V \sigma_{ij}^{\phi} \varepsilon_{ij} dV - \int_S \bar{X}_i^{\phi} u_i^c dS$$

Agrupando términos de la última igualdad, tenemos:

$$\int_V \sigma_{ij}^{\phi} \left[\varepsilon_{ij} - (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \right] dV + \int_S \bar{X}_i^{\phi} (u_i - u_i^c) dS = 0$$

Nuevamente, si la igualdad anterior fuese cierta sólo para un campo virtual de tensiones, no cabría extraer ninguna conclusión acerca de sus cofactores en los integrandos. Pero su cumplimiento para cualquier campo virtual de tensiones imaginable exige que los cofactores sean nulos, para que la igualdad a cero se asegure en todos los casos:

$$\varepsilon_{ij} - (u_{i,j} + u_{j,i})/2 = 0 \quad ; \quad u_i - u_i^c = 0$$

Las anteriores son precisamente las relaciones que queríamos obtener. Por tanto, el cumplimiento de la ecuación integral (5.6) para todo campo virtual posible de tensiones es también condición suficiente para que las deformaciones ε_{ij} sean las que corresponden a los desplazamientos u_i , y para que el valor de estos desplazamientos en S sea u_i^c .

Cabe también hacer algunas observaciones acerca del Principio de las Fuerzas Virtuales, que serán en gran parte paralelas a las realizadas acerca del PDV. La primera es que el cumplimiento de la ecuación integral (5.6) no garantiza absolutamente nada acerca del campo de tensiones "real" σ_{ij} (asociado a u_i), que como se aprecia, ni siquiera aparece en (5.6). Los métodos de resolución basados en el PFV deben en algún momento imponer el equilibrio. La segunda observación es que el PFV es también válido para cualquier ley de comportamiento. Como tercera observación apuntaremos también que los términos de la ecuación integral (5.6) tienen dimensiones de trabajo, denominándose al miembro izquierdo trabajo interno de las tensiones virtuales, y al miembro derecho trabajo externo de las cargas virtuales. La cuarta y última observación es que la forma más frecuente del uso del PFV es el de la ecuación (5.6) como condición necesaria, planteándola para algún o algunos estados virtuales particulares.

Finalmente apuntaremos que cuando el único objetivo es utilizar las ecuaciones (5.5) o (5.6) como "ecuaciones que deben cumplirse" (como condiciones necesarias), es frecuente prescindir de las diferencias conceptuales entre ellas, considerando un campo de tensiones y fuerzas en equilibrio, pertenecientes a un estado "1", y un campo de deformaciones y desplazamientos compatibles, pertenecientes a otro estado "2" del sólido. De esta manera, tanto (5.5) como (5.6) se escriben:

$$\int_V \sigma_{ij}^1 \epsilon_{ij}^2 dV = \int_V X_i^1 u_i^2 dV + \int_S \bar{X}_i^1 u_i^{2c} dS$$

Donde los superíndices 1 y 2 refieren a los mencionados estados distintos del sólido, siendo circunstancial la consideración de uno de ellos como estado virtual. La ecuación integral anterior es una condición necesaria para que el conjunto de magnitudes (tipo fuerza) del estado 1 que aparecen cumplan las ecuaciones de equilibrio, junto con que las magnitudes (tipo deformación) del estado 2 que aparecen cumplan las condiciones de compatibilidad. Se conoce como Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) al enunciado de esta condición necesaria, refundida del PDV y del PFV.

5.6.- Teoremas de Reciprocidad de Betti.

Los teoremas de reciprocidad que estudiaremos a continuación permiten dar respuesta a algunas posibles cuestiones sin necesidad de resolver completamente un problema elástico. En este aspecto, su utilidad es más patente en el cálculo de magnitudes definidas como promedios (u otro tipo de expresiones integrales) de las tensiones o desplazamientos. Estos teoremas serán también la herramienta básica que utilizaremos para calcular "coeficientes de influencia" en un epígrafe posterior. Además, el segundo teorema de reciprocidad puede considerarse como la base del Método de los Elementos de Contorno (MEC) en elasticidad. Se trata de un moderno método de cálculo que presenta ciertas ventajas sobre el Método de los Elementos Finitos en algunas aplicaciones, si bien sus posibilidades están aún bajo estudio.

Primer Teorema de Reciprocidad.

Considérese un campo cualquiera de tensiones y deformaciones "virtuales" σ_{ij}^0 , ϵ_{ij}^0 , que verifiquen la ley de Hooke: $\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^0$.

El cumplimiento de la ecuación integral siguiente para cualquier campo de magnitudes virtuales:

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 dV = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 dV \quad (5.7)$$

Es condición necesaria y suficiente para que las tensiones y deformaciones reales σ_{ij} , ϵ_{ij} , satisfagan la ley de Hooke con las mismas constantes, es decir:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Demostraremos en primer lugar que la expresión integral es una condición necesaria para que el campo real cumpla la ley de Hooke, con las mismas constantes elásticas que el virtual. Partimos pues de que se cumple $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$. Multiplicando por el campo virtual de deformaciones e integrando, tenemos:

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 dV = \int_V C_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij}^0 dV = (C_{ijkl} = C_{klij}) = \int_V C_{klij} \epsilon_{ij}^0 \epsilon_{kl} dV$$

Como las magnitudes virtuales satisfacen en todo caso la ley de Hooke, será:

$$= \int_V \sigma_{kl}^0 \epsilon_{kl} dV = \int_V \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij} dV$$

Como queríamos demostrar. La demostración de que el cumplimiento de (5.7) es condición suficiente para que el campo real satisfaga la ley de Hooke se realiza también sin dificultad. Partimos del cumplimiento de la ecuación (5.7) y manipulamos el miembro izquierdo:

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij} dV = \int_V \epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl}^0 dV = (C_{ijkl} = C_{klij}) = \int_V \epsilon_{ij} C_{klij} \epsilon_{kl}^0 dV = \int_V \epsilon_{kl} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^0 dV$$

En la última igualdad se ha intercambiado la pareja de subíndices mudos "ij" con la "kl" (es indiferente el símbolo empleado como subíndice mudo). Esta última integral debe ser, en virtud de (5.7):

$$\int_V C_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij}^0 dV = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 dV$$

La única manera de asegurar que se cumpla lo anterior para cualquier campo virtual imaginable de deformaciones ϵ_{ij}^0 , es que los factores que le multiplican en los integrandos sean iguales:

$$C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \sigma_{ij}$$

Que es la igualdad que queríamos demostrar.

Segundo Teorema de Reciprocidad.

Considérese un campo "real" cualquiera de magnitudes elásticas (tensiones, deformaciones y desplazamientos), y otro campo "virtual", cada uno satisfaciendo las ecuaciones de compatibilidad, comportamiento y equilibrio:

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_i & \xleftarrow{\text{compatib.}} & \varepsilon_{ij}^\varphi & \xleftarrow{C_{ijkl}} & \sigma_{ij}^\varphi & \xleftarrow{\text{equilibrio}} & X_i^\varphi, \bar{X}_i^\varphi \\ u_i & \xleftarrow{\text{compatib.}} & \varepsilon_{ij} & \xleftarrow{C_{ijkl}} & \sigma_{ij} & \xleftarrow{\text{equilibrio}} & X_i, \bar{X}_i \end{array}$$

En estas condiciones se cumple la siguiente ecuación integral:

$$\int_V X_i^\varphi u_i dV + \int_S \bar{X}_i^\varphi u_i^c dS = \int_V X_i \varphi_i dV + \int_S \bar{X}_i \varphi_i dS \quad (5.8)$$

La demostración de lo anterior se realiza sin dificultad teniendo en cuenta en primer lugar que por cumplir el campo real las ecuaciones de equilibrio, y cumplir el campo virtual la ecuación de compatibilidad en el dominio, se cumplirá la ecuación integral del PDV (5.5). Nótese que, al igual que en el PDV, la "compatibilidad en el contorno" de los desplazamientos virtuales con unas ciertas funciones φ_i^c , no se incluye como premisa por no ser habitualmente de interés. En segundo lugar, por cumplir el campo real las ecuaciones de compatibilidad interna y en el contorno, y cumplir el campo virtual las ecuaciones de equilibrio, se cumplirá la ecuación del PFV (5.6). Reproducimos por comodidad estas ecuaciones:

$$\int_V \sigma_{ij}^\varphi \varepsilon_{ij} dV = \int_V X_i^\varphi u_i dV + \int_S \bar{X}_i^\varphi u_i^c dS \qquad \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\varphi dV = \int_V X_i \varphi_i dV + \int_S \bar{X}_i \varphi_i dS$$

Por otra parte, por estar relacionadas las tensiones y deformaciones del campo real mediante la ley de Hooke con las mismas constantes elásticas que lo están las tensiones y deformaciones virtuales, se satisface la ecuación (5.7) del Primer Teorema de Reciprocidad. Observamos que esto implica precisamente la igualdad entre los miembros izquierdos de las ecuaciones anteriores del PDV y PFV. Por lo tanto, los miembros derechos serán a su vez iguales entre sí, lo que constituye la ecuación (5.8) que queríamos demostrar.

Aunque el enunciado propuesto ha quedado demostrado, estableciendo que el cumplimiento de la ecuación integral (5.8) es condición necesaria para que el campo real satisfaga las ecuaciones básicas de la Elasticidad, el lector se preguntará acerca de la posibilidad de que la ecuación integral sea también condición suficiente, en analogía con las ecuaciones integrales de epígrafes precedentes. A este respecto, debemos apreciar que en la ecuación (5.8) no aparecen ni las tensiones ni las deformaciones reales, por lo que no cabe plantear que dicha ecuación pudiera ser condición suficiente por sí misma de ningún enunciado que afectase a estas variables.

No obstante, si se unen algunas hipótesis adicionales al cumplimiento de la propia ecuación (5.8), el conjunto resulta suficiente para que se satisfagan algunas otras relaciones. Por ejemplo, si el campo virtual satisface todas las ecuaciones de la elasticidad (lo que suponemos en todo caso), podemos demostrar el siguiente enunciado:

Si se satisface la ecuación integral (5.8) para todo campo virtual, y ε_{ij} es el campo de deformaciones asociado a u_i mediante las ecuaciones de compatibilidad interna, y además es σ_{ij} el campo de tensiones asociado a ε_{ij} mediante la ley de Hooke (con las mismas constantes elásticas que el campo virtual), entonces el campo real satisface la ecuación de compatibilidad en el contorno, y las de equilibrio interno y en el contorno. En forma más compacta, el enunciado anterior puede expresarse como:

$$\int_V X_i^\phi u_i dV + \int_S \bar{X}_i^\phi u_i^c dS = \int_V X_i \phi_i dV + \int_S \bar{X}_i \phi_i dS \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_i &= u_i^c ; \quad \bar{X}_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{en } S \\ \varepsilon_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2 ; \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \text{en } V \end{aligned}$$

Para demostrar lo anterior comenzamos por manipular la primera de las integrales:

$$\begin{aligned} \int_V X_i^\phi u_i dV &= -\int_V \sigma_{ij,j}^\phi u_i dV = -\int_V (\sigma_{ij}^\phi u_i)_{,j} dV + \int_V \sigma_{ij}^\phi u_{i,j} dV = -\int_S \sigma_{ij}^\phi u_i n_j dS + \int_V \sigma_{ij}^\phi \varepsilon_{ij} dV = \\ & \text{(1er Tª Recipr.)} = -\int_S \bar{X}_i^\phi u_i dS + \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\phi dV = -\int_S \bar{X}_i^\phi u_i dS + \int_V \sigma_{ij} \phi_{i,j} dV = \\ & = -\int_S \bar{X}_i^\phi u_i dS + \int_S \sigma_{ij} \phi_i n_j dS - \int_V \sigma_{ij,j} \phi_i dV \end{aligned}$$

Nótese que en la manipulación anterior se ha hecho uso de las dos hipótesis adicionales: compatibilidad del campo real (3ª igualdad), y ley de Hooke en el campo real (primer teorema de reciprocidad). Llevando esto a la expresión integral y agrupando términos, resulta:

$$\int_S (u_i^c - u_i) \bar{X}_i^\phi dS + \int_S (\sigma_{ij} n_j - \bar{X}_i) \phi_i dS - \int_V (\sigma_{ij,j} + X_i) \phi_i dV = 0$$

Para asegurar que lo anterior se satisfaga para cualquier campo virtual imaginable de magnitudes, deben ser cero los factores que multiplican a las magnitudes virtuales en los integrandos, es decir:

$$u_i^c - u_i = 0 \quad \text{en } S ; \quad \sigma_{ij} n_j - \bar{X}_i = 0 \quad \text{en } S ; \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \text{en } V$$

Las tres ecuaciones anteriores reproducen la ecuación de compatibilidad en el contorno, y las ecuaciones de equilibrio en el contorno y en el dominio, respectivamente, como queríamos demostrar. Por lo tanto, con las condiciones adicionales que se han especificado, la ecuación integral (5.8) es también condición suficiente para que el campo real esté en equilibrio, y además se satisfaga la ecuación de compatibilidad en el contorno.

Como nota final insistiremos en que la dificultad de establecer la suficiencia de la ecuación integral (5.8) estriba en que en la misma no aparecen ni ϵ_{ij} ni σ_{ij} . Estos sólo pueden introducirse a partir de u_i si se asume que $\epsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$, como se ha mostrado, o a partir de las fuerzas de volumen y de contorno si se asume el equilibrio del campo real. Esto último tiene menor interés teórico, por lo que se omite la demostración correspondiente. De todas formas el interés práctico se centra en la utilización de la expresión integral (5.8) como condición necesaria, para uno o varios estados virtuales concretos, tal como ocurre con las demás expresiones integrales.

5.7.- Teorema de la mínima energía potencial.

Las formulaciones variacionales son una técnica matemática potente que tiene el atractivo de permitir un tratamiento formal unificado (hasta cierto punto) de los problemas físicos, poniendo de relieve analogías entre las magnitudes de diversas disciplinas. Para utilizar este tipo de enfoque debe encontrarse una magnitud escalar que tome distintos valores para las distintas soluciones que podamos ensayar, pero que alcance un mínimo para la solución verdadera. Si ello es posible, entonces la resolución del problema se reduce al de encontrar un valor mínimo. Demostraremos que en elasticidad existe una magnitud con estas características, que llamaremos energía potencial.

Consideremos un sólido en equilibrio bajo las acciones X_i , \bar{X}_i , de volumen y de contorno respectivamente, y cuyo campo de desplazamientos es u_i . Consideremos un campo de desplazamientos ligeramente modificado, $u_i + \delta u_i$, donde δu_i es una pequeña variación virtual. El trabajo de las acciones durante el pequeño desplazamiento virtual será:

$$\int_V X_i \delta u_i dV + \int_S \bar{X}_i \delta u_i dS$$

Esta suma de dos integrales reproduce el miembro derecho de la expresión (5.5) del PDV, siendo ahora δu_i el campo virtual de desplazamientos. El campo de tensiones del sólido en equilibrio, σ_{ij} , cumplirá las ecuaciones de equilibrio con las fuerzas de volumen y de contorno. Por ello, la expresión (5.5) del PDV debe satisfacerse. Llamando $\delta \epsilon_{ij}$ a las deformaciones asociadas a δu_i , tenemos:

$$\int_V X_i \delta u_i dV + \int_S \bar{X}_i \delta u_i dS = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV$$

La ecuación anterior es una forma de expresar el PDV sin ninguna hipótesis adicional, y por tanto es válida para cualquier ley de comportamiento. Poniendo el tensor de tensiones en función de la densidad de energía de deformación, y aplicando a la variación virtual las propiedades usuales de los diferenciales, la última integral puede escribirse como:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \delta W dV = \delta \left[\int_V W dV \right]$$

Por lo tanto:

$$\delta \left[\int_V W dV \right] - \int_V X_i \delta u_i dV - \int_S \bar{X}_i \delta u_i dS = 0 \quad (5.9)$$

La anterior es una forma del PDV válida sólo cuando existe la densidad de energía de deformación, y por tanto requiere que el sólido tenga comportamiento elástico, ya sea lineal o no lineal. Vamos a particularizar esta expresión para el caso en que las fuerzas actuantes sean conservativas, lo que es frecuente en los problemas de mecánica de sólidos. Por definición, una fuerza es conservativa si su valor puede obtenerse como la derivada respecto a los desplazamientos de una cierta función potencial. Ejemplos de este tipo de fuerzas son las gravitatorias, y las fuerzas de contorno aplicadas por contacto o tracción directa. Una excepción notable son las fuerzas de tipo aerodinámico que un fluido en movimiento puede ejercer sobre un sólido. Sean ξ y $\bar{\xi}$ los potenciales de los que derivan respectivamente las fuerzas de volumen y de contorno de nuestro problema. Por ejemplo, en el caso sencillo de un resorte de rigidez K , hay que producir un alargamiento x para que la fuerza sobre el resorte sea $F=Kx$. La función potencial en este caso sería $\xi = -Kx^2/2$, ya que $F=-\partial\xi/\partial x$. Con nuestras funciones potenciales tendremos, por su definición:

$$X_i = -\frac{\partial \xi}{\partial u_i} \quad ; \quad \bar{X}_i = -\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_i}$$

Con lo que las dos últimas integrales de (5.7) quedan:

$$-\int_V X_i \delta u_i dV - \int_S \bar{X}_i \delta u_i dS = \int_V \frac{\partial \xi}{\partial u_i} \delta u_i dV + \int_S \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_i} \delta u_i dS = \delta \left[\int_V \xi dV + \int_S \bar{\xi} dS \right]$$

Lo que permite escribir (5.9) como:

$$\delta \left[\int_V (W + \xi) dV + \int_S \bar{\xi} dS \right] = \delta V = 0 \quad (5.10)$$

En donde se ha definido la "energía potencial total" \mathcal{V} del sistema como la expresión entre corchetes del primer miembro. Esta expresión encierra el enunciado del teorema objeto de este epígrafe:

En la posición de equilibrio, la energía potencial total \mathcal{V} tiene un valor extremo (máximo o mínimo).

Puede demostrarse que siendo la densidad de energía de deformación una función definida positiva, el extremo aludido es un mínimo. Omitimos aquí esta demostración.

Finalmente, nótese que el campo de desplazamientos que incluye la variación virtual, $u_i + \delta u_i$, puede ser absolutamente general. No obstante en la práctica suele restringirse esta generalidad, haciendo que este campo satisfaga las condiciones de contorno en desplazamientos (es decir, se impone $\delta u_i = 0$ en las zonas de desplazamiento prescrito). La ventaja práctica que se persigue con ello es excluir de la evaluación de la integral de contorno de (5.9), o su homóloga de (5.10), las zonas en donde la tensión de contorno es desconocida a priori.

5.8.- Principio de Saint-Venant.

Presentaremos ahora un principio cuya justificación es totalmente experimental, aunque sea posible dar argumentos físicos en su favor. Además, este principio no es aplicable en ciertas situaciones. Ello hace que pueda resultar sorprendente encontrar su enunciado en el contexto del modelo matemático de la Teoría de la Elasticidad, cuya robustez es notoria. No obstante, se trata de un principio muy útil para conseguir soluciones de suficiente exactitud desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas. La exposición siguiente no se ajusta exactamente a la forma presentada por Saint-Venant en 1855, sino que incide en la conclusión de mayor aplicabilidad práctica.

Sea ΔS una pequeña porción del contorno S de un sólido, como indica la figura 5.3. El principio de Saint-Venant establece que a distancias grandes, -comparadas con las dimensiones de ΔS -, la solución elástica (desplazamientos, tensiones, etc.) diferirá muy poco si se sustituyen las cargas que actúan sobre ΔS por otro sistema de cargas distinto, pero estáticamente equivalente (de igual resultante e igual momento resultante). Por ejemplo, en el punto P de la figura, esperamos similares movimientos y tensiones cuando actúa el sistema de cargas a) sobre la porción ΔS del contorno, que cuando actúa el sistema b), que es estáticamente equivalente. Ambos sistemas de cargas constan de la superposición de una distribución de tensiones de resultante F mas otra distribución de resultante nula y momento M .

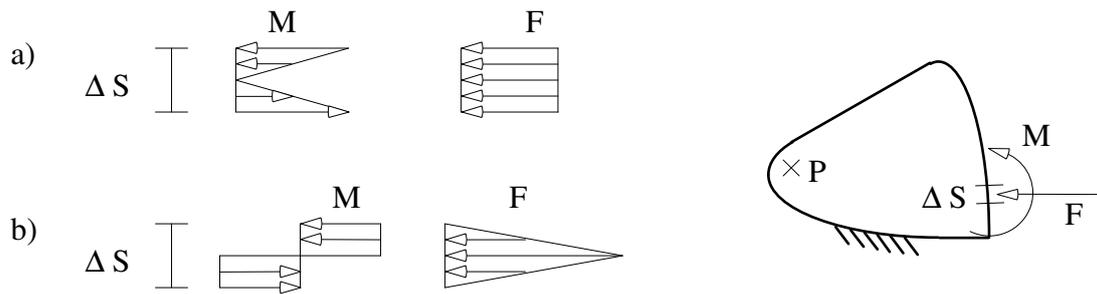


Figura 5.3.- Acciones estáticamente equivalentes sobre una pequeña superficie.

A pesar de que la intuición física pudiera parecer suficiente para justificar este principio, hay ocasiones en que el mismo no es de aplicación. Desafortunadamente hay que invocar a la experiencia previa si se pretende juzgar de antemano cuándo puede aplicarse razonablemente y cuando no. Una excepción notable es la torsión con alabeo restringido de barras de perfil de pared delgada, que se estudia habitualmente en el contexto de la Resistencia de Materiales. Pueden encontrarse algunas excepciones más en algunas estructuras particulares de barras con nudos articulados, como la de la figura 5.4. En efecto, si contemplamos la estructura en su conjunto, la zona en la que actúa el sistema autoequilibrado de cargas ($p/2$, $-p$, $p/2$) es una pequeña zona del contorno de la misma, por lo que cabría esperar que a grandes distancias (zona derecha de la estructura) los esfuerzos en las barras fuesen próximos a cero. Sin embargo, puede comprobarse (equilibrando sucesivamente los nudos), que tanto las barras próximas a la zona de aplicación de las cargas como las más lejanas soportan esfuerzos de idéntica magnitud.

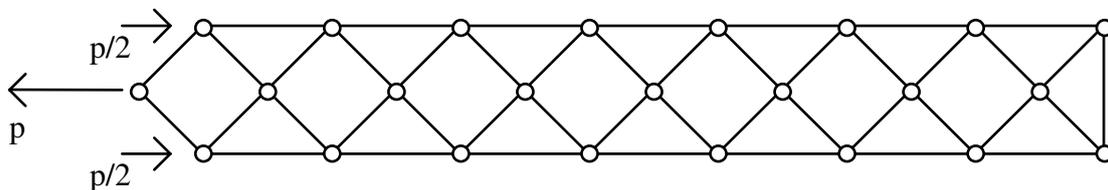


Figura 5.4.- Una excepción respecto del Principio de Saint-Venant.

5.9.- Algunas notas acerca de las condiciones de contorno.

Independientemente del enfoque o de las ecuaciones que se empleen para resolver un problema, siempre deben imponerse las condiciones de contorno del mismo durante la resolución. Como es evidente, una deficiente imposición de las condiciones de contorno hará inútil el esfuerzo posterior de resolución, ya que en el mejor de los casos se estará resolviendo un problema distinto del planteado inicialmente. Seguidamente revisaremos algunos tipos básicos de condiciones de contorno.

En problemas elásticos que afectan a un solo sólido, debe tenerse presente como regla básica que en cada punto del contorno, si está restringido el movimiento según una dirección del espacio, la componente del vector tensión según esa dirección debe ser incógnita. Análogamente, si es conocida una componente de tensión, la correspondiente componente de desplazamiento debe ser incógnita. Esta sencilla regla nos asegura el

correcto planteamiento de nuestro problema, en el sentido de que cumpla las condiciones del teorema de unicidad de Kirchoff. Todas condiciones de contorno representadas esquemáticamente en la figura 5.5 son posibilidades válidas. Existen otras posibilidades válidas, como por ejemplo la imposición de un valor no nulo de desplazamiento en lugar del valor nulo representado en las condiciones de apoyo.

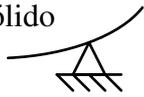
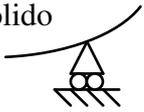
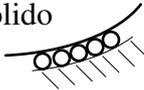
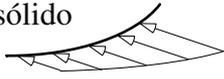
Desplazamiento prescrito	Prescrita una componente de desplaz. y otra de tensión.	Tensión prescrita
<p>sólido</p>  <p>En un punto ("apoyo fijo")</p>	<p>sólido</p>  <p>En un punto ("apoyo móvil")</p>	<p>sólido</p>  <p>("fuerza puntual")</p>
<p>sólido</p>  <p>En una región de S</p>	<p>sólido</p>  <p>En una región de S</p>	<p>sólido</p>  <p>\bar{X} prescrito</p>

Figura 5.5.- Algunas posibilidades válidas de condiciones de contorno.

Se entiende como "fuerza puntual" al límite de una distribución de tensiones \bar{X}_i usual (también de una fuerza de volumen X_i), cuyos valores son arbitrariamente grandes, pero que actúa sobre una porción arbitrariamente pequeña del contorno, de tal manera que la fuerza resultante (integral del vector tensión o de la fuerza de volumen) tiene el valor vectorial de la fuerza concentrada especificada. Así, si se da una fuerza puntual de componentes F_i sobre un punto P del contorno, debemos entender que se trata de una distribución muy intensa de tensiones \bar{X}_i , que actúa sobre una porción muy pequeña $\epsilon S(P)$ del contorno, en torno al punto P dado, de manera que se cumple:

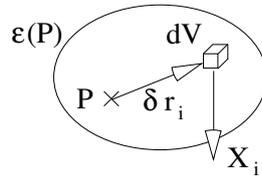
$$\int_{\epsilon S(P)} \bar{X}_i dS = F_i$$

La interpretación anterior debiera ser tenida en cuenta cada vez que se necesite tratar una fuerza puntual, por ejemplo en el contexto de los teoremas integrales presentados en este capítulo. En todo caso, si una componente de fuerza es conocida, la componente del desplazamiento en ese punto debe ser incógnita, y viceversa (caso de un apoyo). Una fuerza concentrada interior al sólido se interpreta análogamente, como una distribución de fuerzas de volumen X_i muy intensa que actúa sobre un volumen muy pequeño. El trabajo virtual de una fuerza concentrada es igual al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento virtual de su punto de aplicación. Un momento concentrado admite una interpretación similar, con salvedades que analizaremos detenidamente a continuación.

El trabajo de un momento.

Al igual que una fuerza concentrada, un momento concentrado es una abstracción matemática que físicamente se interpreta como una distribución de fuerzas de volumen

X_i muy intensa que actúa sobre una porción muy pequeña del sólido, de forma que su resultante es nula, pero no así su momento resultante, cuyas componentes serán M_i . La figura 5.6 ilustra la idea anterior, siendo $\varepsilon(P)$ la pequeña porción de sólido en torno al punto P en que la fuerza de volumen X_i no es nula, y δr_i el vector que une el punto P con un elemento diferencial de volumen genérico.



$$\int_{\varepsilon(P)} X_i dV = 0$$

$$\int_{\varepsilon(P)} r \times X dV = \int_{\varepsilon(P)} e_{ijk} r_j X_k dV = M_i$$

Figura 5.6.- Esquema físico de la aplicación de un momento concentrado.

El trabajo virtual de la fuerza de volumen X_i con el campo de desplazamientos φ_i vendrá dado por la integral:

$$\int_{\varepsilon(P)} X_i \varphi_i dV \cong \int_{\varepsilon(P)} X_i [\varphi_i(P) + \varphi_{i,j}(P) \delta r_j] dV = \varphi_i(P) \int_{\varepsilon(P)} X_i dV + \varphi_{i,j}(P) \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV$$

La primera integral del último miembro se anula por ser nula la resultante de la fuerza de volumen. Precisamente ha sido preciso considerar un desarrollo en serie de φ_i hasta derivadas primeras para retener las aportaciones no nulas (ni despreciables). La última integral puede escribirse como:

$$\varphi_{i,j}(P) \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV = (\varepsilon_{ij}^\varphi + \omega_{ij}^\varphi) \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV = \varepsilon_{ij}^\varphi \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV + \omega_{ij}^\varphi \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV$$

En donde la deformación y la rotación se entienden evaluadas en el punto P . Así pues, el trabajo del momento (es decir, de las fuerzas de volumen a las que representa) tiene los dos sumandos que aparecen en el último miembro de la igualdad anterior. Es fácil comprobar que el segundo sumando tiene el significado de "producto escalar del vector rotación por el momento", que nos resulta familiar. Véase:

$$\omega_{ij}^\varphi \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV = e_{jik} \omega_k^\varphi \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV = \omega_k^\varphi \int_{\varepsilon(P)} e_{jik} X_i \delta r_j dV = \omega_k^\varphi M_k$$

Pero no hay razón para que el sumando que contiene a la deformación se anule. Por otra parte, el mismo no es expresable en función del momento resultante, en general. El valor de este sumando depende de la tipología particular de la distribución X_i en el pequeño dominio $\varepsilon(P)$ en el que actúa. Por lo tanto, la expresión más concreta que podemos ofrecer del trabajo de un momento es:

$$\int_{\varepsilon(P)} X_i \varphi_i dV = \omega_i^\varphi M_i + \varepsilon_{ij}^\varphi \int_{\varepsilon(P)} X_i \delta r_j dV$$

En mecánica del sólido rígido las deformaciones son nulas, por lo que el segundo sumando se anula. En sólidos con forma de barra, las hipótesis que usualmente adopta la Resistencia de Materiales hacen que el último sumando sea despreciable. En ambos casos se revierte a la expresión más familiar de "momento por giro". Todo ello podría inducir al lector a pensar que el trabajo de un momento tiene siempre ese valor, cosa que, en rigor, es incorrecta. Existen sin embargo argumentos físicos que permiten despreciar el segundo sumando en ciertas situaciones. Por ejemplo, si el momento está aplicado mediante la torsión de una varilla de pequeña sección (en comparación con las dimensiones del sólido), que tiene uno de sus extremos soldado a la superficie del sólido, es concebible que el efecto rigidizador de la varilla en la zona soldada impida que existan deformaciones importantes *en esa zona* (aunque sean grandes en sus proximidades). Por tanto, en este caso pueden existir argumentos para despreciar el segundo sumando.

Por otra parte, la integral que multiplica a la deformación en el segundo sumando tiene *cierta propensión* a ser un tensor antisimétrico en casos prácticos. En el caso en que esto sea así, su producto por la deformación (tensor simétrico) será nulo. Por ejemplo, puede comprobarse que si el momento se aplica en un pequeño dominio circular mediante una distribución de fuerzas dada en coordenadas polares por $X_\theta = -Ar$; $X_r=0$, la integral del segundo sumando resulta ser un tensor antisimétrico, por lo que dicho sumando se anula. Esta forma de aplicar el momento correspondería aproximadamente a la utilización de una varilla de sección circular sometida a torsión, y soldada por un extremo a la superficie del sólido. Los argumentos anteriores conducen a despreciar el segundo sumando en la ecuación del trabajo del momento, en muchas situaciones usuales.

Con el fin de comprobar que el referido segundo sumando no tiene porqué anularse en condiciones más generales, se sugiere que el lector trabaje el ejemplo bidimensional de una distribución de fuerzas $X_1 = A x_2$, $X_2 = -B x_1$, actuando sobre un rectángulo de dimensiones pequeñas $2\delta_1 \times 2\delta_2$, con los lados paralelos a los ejes $x_1 x_2$, y en cuyo centro se sitúa el origen de coordenadas. Esta distribución es equivalente a un momento, pudiéndose comprobar que "el segundo sumando" no se anula en general (aunque lo haga en algún caso particular, como por ejemplo $\delta_1 = \delta_2$; $A=B$). Otro caso en el que el segundo sumando tampoco se anula, es cuando el momento está aplicado como un par de fuerzas concentradas de gran valor, y muy próximas entre sí. Esta última imagen de un momento es probablemente la más popular, pero es la menos representativa de la realidad física, ya que describe una abstracción (momento concentrado) en base a otra abstracción (fuerza concentrada).

Problemas con un plano de simetría.

Cuando el problema a analizar presenta simetría respecto de un plano, es posible analizar solamente una de las mitades del sólido, imponiendo en el plano de simetría las condiciones de contorno adecuadas. Para encontrar estas condiciones de contorno, basta

reparar en que si el problema presenta simetría (tanto geométrica como en condiciones de contorno en tensiones y desplazamientos), las tensiones, desplazamientos, etc., en puntos simétricos serán también simétricos. Por ejemplo, si como indica la figura 5.7, el plano 1-3 es de simetría, tendremos que:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, -x_2, x_3)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -u_2(x_1, -x_2, x_3)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, -x_2, x_3)$$

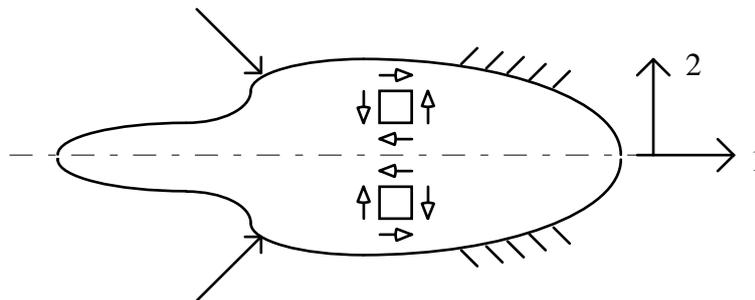


Figura 5.7.- Problema con plano de simetría 1-3.

La segunda de las ecuaciones anteriores implica que en el plano 1-3 ($x_2=0$) debe ser $u_2=0$. Por otra parte, el que el estado de tensiones sea simétrico requiere que (la figura 5.7 muestra la simetría de la componente 12 de tensión, como ejemplo):

$$\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{11}(x_1, -x_2, x_3)$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{12}(x_1, -x_2, x_3)$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{22}(x_1, -x_2, x_3)$$

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{13}(x_1, -x_2, x_3)$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{33}(x_1, -x_2, x_3)$$

$$\sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{23}(x_1, -x_2, x_3)$$

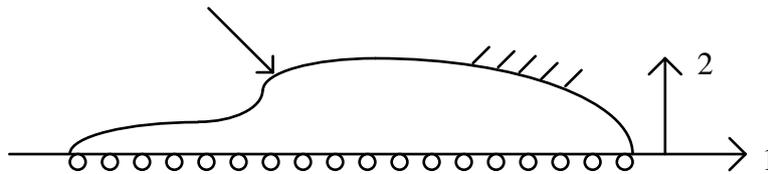


Figura 5.8.- Condiciones de contorno a aplicar en un plano de simetría.

De las ecuaciones relativas a σ_{12} y a σ_{23} anteriores, se sigue que en el plano 1-3 ($x_2=0$) deben ser $\sigma_{12} = 0$ y $\sigma_{23} = 0$. Recapitulando las condiciones encontradas, el plano de simetría debe permanecer plano con sus puntos moviéndose en el mismo plano ($u_2=0$), y debe tener tensión tangencial nula $\tau=0$ (σ_{12} y σ_{23} son las componentes de τ en el plano 1-3). Estas condiciones se reproducen esquemáticamente en la figura 5.8, y son las condiciones a imponer en un plano de simetría cuando se desee analizar sólo la mitad del sólido.

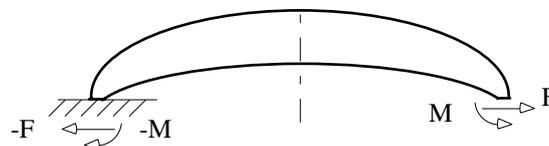


Figura 5.9.- Ejemplo de simetría en tensiones pero no en desplazamientos.

Pueden presentarse también casos con simetría de tensiones respecto de un plano, pero no de desplazamientos. En la figura 5.9, con la aproximación (razonable en el sentido de Saint-Venant) de que la distribución de tensiones en el apoyo izquierdo es simétrica respecto de la de la zona derecha homóloga, tenemos un ejemplo de este tipo de problema. En casos como este, evidentemente se mantiene el hecho de que las tensiones tangenciales son nulas en el plano de simetría de tensiones. Un razonamiento basado en la superposición de un movimiento de sólido rígido al problema del mismo sólido con las mismas tensiones en (todo) el contorno, y que además presente simetría en desplazamientos, conduce inmediatamente a que el plano de simetría debe seguir siendo plano tras la deformación. Sin embargo, ya no será cierto que los puntos del plano de simetría se muevan dentro de su plano.

Planos que no permanecen planos.

Como acaba de mostrarse, un plano de simetría de tensiones permanecerá plano tras la deformación. Además, un plano de simetría de tensiones siempre tendrá tensión tangencial nula. Esto puede hacer pensar erróneamente que el que la tensión tangencial sea nula en un plano implique que el mismo deba permanecer plano tras la deformación. Otro indicio que puede contribuir a reforzar esta idea equivocada, es que en sólidos con forma de barra sometidos a diversas sollicitaciones, que constituyen el objeto de estudio de la Resistencia de Materiales, el alabeo de la sección se asocia típicamente a la presencia de tensiones tangenciales ("alabeo" es el término que describe que una sección transversal de la barra deja de ser plana tras la deformación). La conclusión anterior no es generalizable a sólidos de geometría arbitraria. Para mostrarlo, puede analizarse un contraejemplo sencillo, construido como se propone a continuación.

Consideremos un sólido bidimensional que ocupa una cierta región del plano $x_1 x_2$, y que contiene al menos a la porción del eje x_2 entre el origen y un punto $A(0, x_2)$. La deformación transversal ϵ_{12} (y por tanto σ_{12}) es nula en los puntos que están situados sobre el eje x_2 . Aunque serán irrelevantes para nuestros propósitos, podemos considerar como condiciones de contorno, que el origen $(0,0)$ tiene desplazamiento y rotación nulos. En forma concisa, tenemos:

En puntos del eje x_2 :	Condiciones de contorno en $(0,0)$:
$\epsilon_{11}(0, x_2) = u_{1,1}(0, x_2) \neq 0$	$u_1(0,0) = 0$
$\epsilon_{22}(0, x_2) = u_{2,2}(0, x_2) \neq 0$	$u_2(0,0) = 0$
$2\epsilon_{12}(0, x_2) = u_{1,2}(0, x_2) + u_{2,1}(0, x_2) = 0$	$2\omega_{12}(0,0) = u_{1,2}(0,0) - u_{2,1}(0,0) = 0$

Integrando, calcularemos el desplazamiento del punto genérico A sobre el eje 2:

$$u_1 = \int_0^A \epsilon_{11} dx_1 + f(x_2) \quad (dx_1 \equiv 0) = f(x_2) ; \quad u_2 = \int_0^A \epsilon_{22} dx_2 + g(x_1)$$

$$2\epsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = 0 \Rightarrow \frac{df(x_2)}{dx_2} + \frac{dg(x_1)}{dx_1} + \int_0^A \epsilon_{22,1} dx_2 = 0$$

Donde $f(x_2)$ y $g(x_1)$ son por ahora funciones arbitrarias. Puesto que se requiere calcular derivadas u_2 respecto de x_1 , no se particularizó aún $g(x_1)$ en $x_1=0$. Para completar el cálculo de los desplazamientos se necesita conocer la forma de ϵ_{22} . Dado que solo pretendemos encontrar un contraejemplo, sirve cualquier caso particular que conduzca al resultado deseado. Consideremos que $\epsilon_{22} = x_1 h(x_2)$ en todo el sólido, o al menos en una región en torno al eje x_2 , siendo $h(x_2)$ una cierta función conocida, que supondremos polinómica para fijar ideas. Tendremos:

$$\frac{df(x_2)}{dx_2} + \int_0^{x_2} h(x_2) dx_2 + \left. \frac{dg(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0 \Rightarrow \frac{df(x_2)}{dx_2} + H(x_2) + \left. \frac{dg(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0$$

Hemos llamado $H(x_2)$ a la función primitiva de $h(x_2)$, que será un polinomio de un orden superior al de $h(x_2)$. La última ecuación consta de una adición de términos que dependen de x_2 igualada a cero. Nótese que la derivada de $g(x_1)$ en $x_1=0$ es una cierta constante, que llamaremos $-K$. Por tanto:

$$\left. \frac{dg(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=0} = -K ; \quad \frac{df(x_2)}{dx_2} = -H(x_2) + K$$

Integrando:

$$f(x_2) = -\int H(x_2) dx_2 + Kx_2 + B$$

La integral de H representa un polinomio de un orden mayor que H , y que no tiene término constante (B recoge esta constante). Nótese que las condiciones establecidas en nuestro enunciado no determinan completamente la función $g(x_1)$. Las componentes de desplazamiento son:

$$u_1 = -\int H(x_2) dx_2 + Kx_2 + B ; \quad u_2 = \int_0^A x_1 h(x_2) dx_2 + g(x_1) = (x_1 = 0) = g(0)$$

De la aplicación de las condiciones de contorno en el origen resulta:

$$u_1(0,0) = 0 \Rightarrow B = 0 ; \quad u_2(0,0) = 0 \Rightarrow g(x_1 = 0) = 0$$

$$u_{1,2}(0,0) = u_{2,1}(0,0) \Rightarrow -H(0) + K = \left[\int_0^A h(x_2) dx_2 + \left. \frac{dg(x_1)}{dx_1} \right]_{(0,0)} = H(0) - K$$

Al ser $H(x_2)$ una integral de h entre el origen y la coordenada x_2 del punto A , será $H(0)=0$, dado que el intervalo de integración se anula. Por tanto, la última igualdad conduce a que $K=0$. Con esto, los desplazamientos del punto $A(0,x_2)$ quedan:

$$u_1(0, x_2) = -\int H(x_2) dx_2 ; \quad u_2(0, x_2) = 0$$

Las coordenadas (z_1, z_2) de la posición final de los puntos A que inicialmente estaban en las posiciones $(0, x_2)$ se obtienen mediante $z_i = x_i + u_i$, es decir:

$$z_1 = -\int H(x_2)dx_2 \quad ; \quad z_2 = x_2$$

Las dos ecuaciones anteriores definen de forma paramétrica (siendo el parámetro x_2) las coordenadas z_1, z_2 de los puntos de la curva en que se ha transformado la línea del sólido que inicialmente coincidía con el eje 2. La curvatura de una curva dada su expresión paramétrica es:

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} z'_1 & z'_2 \\ z''_1 & z''_2 \end{vmatrix}}{\left[(z'_1)^2 + (z'_2)^2 \right]^{3/2}}$$

Donde las primas denotan el orden de derivación de la coordenada respecto del parámetro. La curvatura será distinta de cero si lo es el determinante que aparece en el numerador. Sustituyendo los valores $z'_1 = -H(x_2)$, $z'_2 = 1$, $z''_1 = -h(x_2)$, $z''_2 = 0$, el valor del determinante resulta ser $h(x_2)$. Por tanto la curvatura de la deformada no es nula, mostrando que la condición de que exista tensión tangencial nula en un plano no implica que ese plano permanezca plano tras la deformación.

El lector puede construir contraejemplos concretos referidos a todo un dominio basándose en el desarrollo anterior. Por ejemplo, tomando $\epsilon_{11}(x_2, x_2) = 0$; $h(x_2) = x_2$; $g(x_1) = 0$ (g y su primera derivada deben anularse en $x_1 = 0$; no se le requiere ninguna otra condición), tendremos $H(x_2) = x_2^2/2$, y el campo de desplazamientos (en puntos que ahora pueden no estar sobre el eje x_2) será:

$$u_1 = \int_0^A \epsilon_{11} dx_1 + f(x_2) = 0 - \frac{x_2^3}{6} \quad ; \quad u_2 = \int_0^{x_2} x_1 x_2 dx_1 = \frac{x_1 x_2^2}{2}$$

Puede comprobarse que, en efecto, este campo de desplazamientos tiene $\epsilon_{12} = 0$ en el eje x_2 (y en todo punto) y que la configuración deformada de los puntos inicialmente en $(0, x_2)$ está dada por las coordenadas (z_1, z_2) de valor $z_1 = -x_2^3/6$; $z_2 = x_2$; que no representa la ecuación de una recta. En el caso en que hubiéramos tomado $h(x_2) = 0$, y por tanto $\epsilon_{22} = 0$, se habría obtenido curvatura nula de la deformada del eje. En el caso en que ϵ_{22} dependiera solamente de x_2 , también se obtendría curvatura nula.

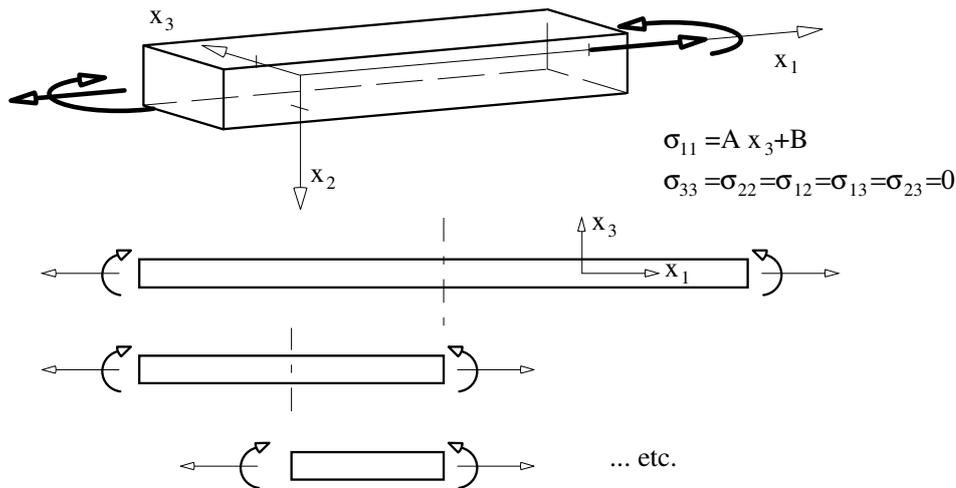


Figura 5.10.- Simetrías sucesivas en una barra recta sometida a flexión-tracción.

Dado su especial interés, el caso de barras rectas que estudia la Resistencia de Materiales merece una referencia particular. Las condiciones de tracción-flexión asumen que la componente normal de tensión varía linealmente en la sección y las demás son nulas, incluso en los extremos de la barra. Por ejemplo $\sigma_{11} = A x_3 + B$ (que en la figura 5.10 se representa por simplicidad mediante una fuerza y un momento aplicados en el centro de áreas de la sección). Bajo estas condiciones, un razonamiento de simetrías sucesivas evidencia que cualquier sección permanecerá plana tras la deformación. Bajo otros tipos de sollicitación las secciones no permanecerán planas, en general. En el capítulo siguiente retomaremos el caso de tracción-flexión y analizaremos algún otro caso particular.

Problemas con plano de antisimetría.

Existe antisimetría respecto de un plano cuando el sólido tiene geometría inicialmente simétrica respecto del plano, pero en cada mitad del sólido las cargas de volumen y las condiciones de contorno (tanto en tensiones como en desplazamientos) son de signo opuesto al que correspondería si hubiera simetría.

La primera de las figuras 5.11 muestra un ejemplo de antisimetría respecto del plano 2-3. Por simplicidad, pensemos que se trata de un problema bidimensional. Esta antisimetría implica que si giramos 180° el sólido en torno al eje 2, veríamos el mismo problema, pero con todas las cargas y condiciones de contorno en sentidos opuestos a los del problema inicial. Al nuevo problema corresponden evidentemente desplazamientos y tensiones cuyo sentido es opuesto respecto del problema original (porqué?). Utilizaremos esta conclusión para simplificar el análisis.

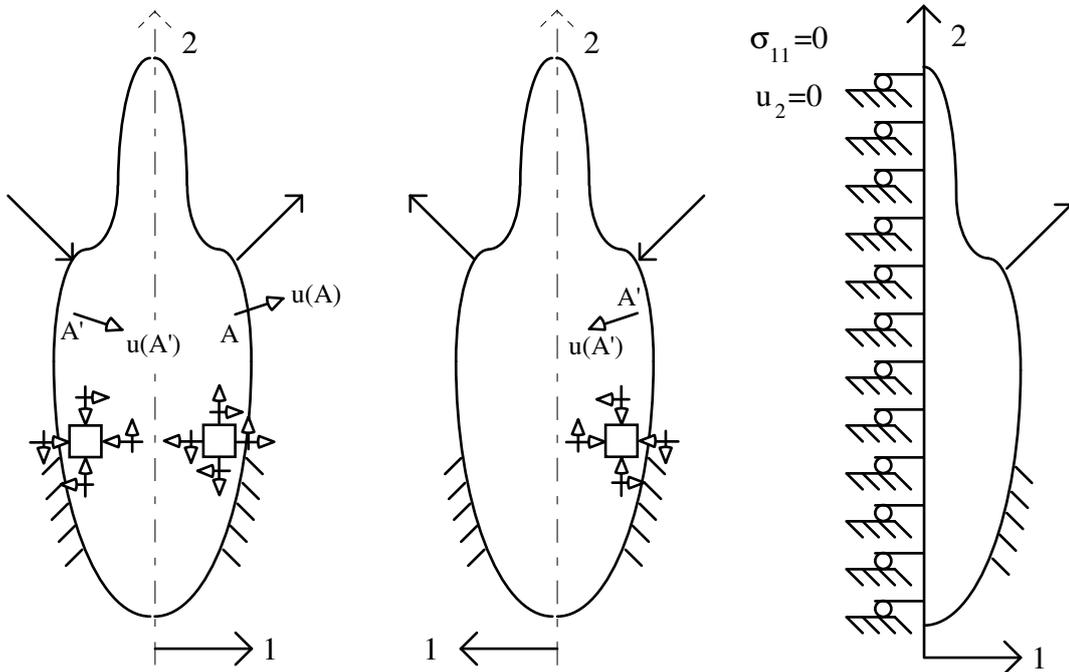


Figura 5.11.- Ejemplo de problema antisimétrico, y condiciones de contorno a aplicar.

Consideremos dos puntos simétricos A y A'. El desplazamiento del punto A' en la perspectiva de la segunda figura 5.11 será opuesto al desplazamiento del punto A en la perspectiva de la primera figura, como se indica. Trazamos en la primera figura el desplazamiento de A' (que acabamos de calcular en la segunda figura en función del de A). Esta sencilla operación permite observar que:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1(-x_1, x_2) \quad ; \quad u_2(x_1, x_2) = -u_2(-x_1, x_2)$$

Lo anterior implica que un punto en $x_1=0$ puede tener movimiento horizontal u_1 distinto de cero, pero su movimiento vertical debe ser nulo:

$$u_2(0, x_2) = 0$$

Razonando análogamente con las tensiones, trazamos en un punto de x_1 positivo las componentes de tensión (primera figura). Si como antes observamos el sólido rotado 180° , se nos presenta un problema con todas las cargas, etc, cambiadas de sentido. En este problema (segunda figura), las tensiones serán iguales y de signo contrario que en el problema original. Girando nuevamente 180° la segunda figura revertimos al problema original, obteniendo con ello las tensiones en un punto en función de las del punto simétrico, como se representa en la primera figura. Observando el resultado es inmediato concluir que:

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = -\sigma_{11}(-x_1, x_2) \quad ; \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) = -\sigma_{22}(-x_1, x_2) \quad ; \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) = \sigma_{12}(-x_1, x_2)$$

Lo anterior implica que en un punto sobre el plano de simetría geométrica, las dos componentes de tensión normal, σ_{11} y σ_{22} , serán nulas. En cambio la componente de tensión tangencial σ_{12} puede ser distinta de cero. El interés aquí se reduce a obtener las

condiciones de contorno a aplicar en el plano de antisimetría cuando simplificamos el análisis tomando sólo medio sólido. En la nueva "superficie exterior", -el plano 23-, la componente σ_{11} debe ser nula. La componente σ_{12} no está condicionada. Resumiendo, los puntos del plano de antisimetría sólo se moverán perpendicularmente al plano, y la tensión normal en ese plano será nula. La tercera de las figuras 5.11 muestra la simbología utilizada habitualmente para representar este tipo de condiciones de contorno.

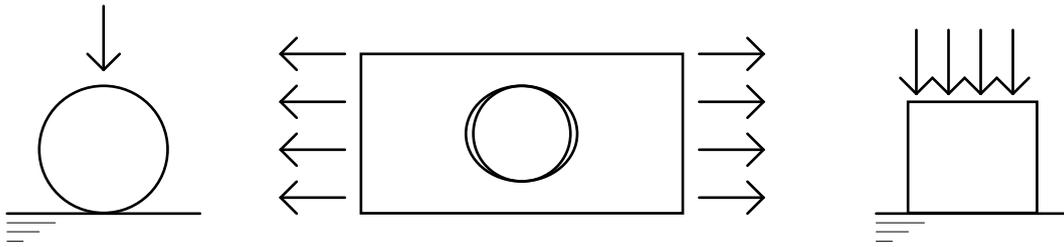
Notemos finalmente que la componente σ_{22} no se aprecia en el plano 23, por lo que no cabe incluir su valor entre las condiciones de contorno. Ello no obsta para que deba ser nula, como efectivamente obtendremos en el proceso de resolución, ya que las condiciones en el plano 23 $\sigma_{11}=0$, $u_2=0$, implican $\sigma_{22}=0$ a través de la ley de comportamiento.

Contacto según la Ley de Coulomb.

Frecuentemente, un sólido tiene limitadas sus posibilidades de movimiento debido a la vecindad de otro sólido. En efecto, la experiencia común indica que dos sólidos no ocuparán el mismo espacio físico, y que si se aproximan mutuamente llegará a producirse *contacto* entre sus superficies, y no su interpenetración. La primera noción fundamental en el fenómeno de contacto es pues la de "zona de contacto", que es la superficie geoméricamente común a los contornos de ambos sólidos. Supongamos por simplicidad que todas las cargas aplicadas a los sólidos se hacen crecer simultáneamente. En este proceso de carga, la zona de contacto puede variar de tamaño. Según la forma de evolución de la zona de contacto, los problemas de contacto se clasifican en:

- *Contacto en avance.* Cuando nuevos puntos materiales de los sólidos se incorporan a la zona de contacto en el proceso de carga.
- *Contacto en retroceso.* Cuando puntos materiales de los sólidos abandonan la zona de contacto, sin que exista incorporación de nuevos puntos.
- *Contacto conforme.* Cuando no se incorporan ni salen de la zona de contacto puntos materiales de los sólidos durante el proceso de carga.

La figura 5.12 muestra ejemplos bidimensionales típicos de los tipos de contacto anteriores. Como ejemplo de problema en avance se muestra el contacto de un cilindro sobre una superficie horizontal. La zona de contacto crecerá al aumentar la carga vertical. Como ejemplo de retroceso tenemos el contacto de un cilindro rodeado de otro sólido, a cuyo agujero se ajusta perfectamente (sin huecos y sin compresión) cuando la carga es nula. Como ejemplo de contacto conforme se muestra el problema de una cara plana de un sólido sobre una superficie horizontal. La zona de contacto no varía al aumentar la carga, en este caso.

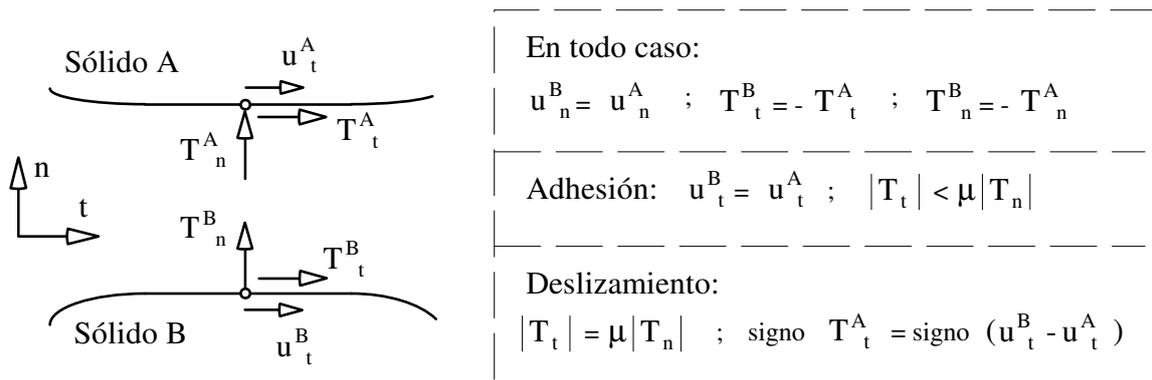


Figuras 5.12.- Ejemplos de tipos de problemas de contacto

La ley de fricción de Coulomb es un modelo sencillo y aceptable para representar los fenómenos elásticos asociados al contacto entre sólidos con superficies secas. Según esta ley, la tensión tangencial a las superficies en un punto tendrá, como máximo, el valor de la tensión normal de compresión, multiplicada por un coeficiente de rozamiento μ , que depende del material, el acabado de las superficies, etc. Si en un punto de la zona de contacto la tensión tangencial no alcanza ese límite, los correspondientes dos puntos de ambos sólidos continuarán compartiendo la misma posición geométrica. Se dice que ambos puntos están en *estado de adhesión*. Si se llega al referido límite, puede producirse movimiento tangencial relativo entre los puntos materiales que estaban en contacto. Decimos entonces que esos puntos están en *estado de deslizamiento*. Adicionalmente se establece que la dirección de la tensión tangencial será, en cada sólido, opuesta al deslizamiento relativo entre los puntos inicialmente en contacto, cuando tal deslizamiento exista. Así pues, la zona de contacto puede estar subdividida en subzona(s) en estado de adhesión, y subzona(s) en estado de deslizamiento. Llamando σ la componente normal del vector tensión, y τ a la componente tangencial, definidas en el epígrafe 2.1, la ley de Coulomb se puede expresar mediante:

$$\begin{aligned} \tau < \mu |\sigma| & \quad \text{Estado de adhesión.} \\ \tau = \mu |\sigma| & \quad \text{Estado de deslizamiento.} \\ & \quad \text{(tens. tangencial opuesta al desliz. relativo)} \\ \tau > \mu |\sigma| & \quad \text{Imposible.} \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno a imponer en zonas de contacto se resumen en la figura 5.13. En ella se muestra un punto de cada sólido, inicialmente en mutuo contacto, aunque se dibujan separados por claridad. Se han notado las componentes de sus desplazamientos normales como u_n^A, u_n^B , según se trate del punto del sólido A o del B, y las componentes tangenciales como u_t^A, u_t^B , de acuerdo con los ejes tangencial y normal (t-n) dibujados. En hipótesis de pequeños desplazamientos, la suposición de que ambos puntos seguirán formando parte de la zona de contacto, conduce a que $u_n^A = u_n^B$, en todos los casos. Para el vector tensión en esos puntos se usa la notación T^A, T^B , según se trate del punto del sólido A o del B. En la figura se representan mediante sus componentes en los ejes t-n, es decir T_n^A, T_t^A , y T_n^B, T_t^B , dibujadas en sentido positivo. El equilibrio local exige en todos los casos que sea $T_n^A = -T_n^B$; $T_t^A = -T_t^B$.



Figuras 5.13.- Condiciones de contorno posibles en un punto de la zona de contacto.

Cuando sea posible adoptar como aproximación que el coeficiente de fricción sea nulo, diremos que existe contacto sin fricción. Esta condición se produce por ejemplo cuando se considera impedido el movimiento normal a la superficie, y no el tangencial (como se mostró en la figura 5.5). Bajo esta hipótesis la tensión tangencial es nula, y habrá estado de deslizamiento en todos los puntos de la zona de contacto.

Respecto de los problemas elásticos más típicos, la resolución de un problema de contacto tiene la dificultad añadida de que es necesario encontrar el tamaño de la zona de contacto para el nivel de carga establecido, así como su partición en subzonas de adhesión y deslizamiento. En general esto no puede llevarse a cabo desacopladamente de la resolución en tensiones, desplazamientos, etc, del problema. Si además no se da la circunstancia supuesta al principio de que todas las cargas crecen a la vez desde cero, y el coeficiente de fricción no es nulo, la solución dependerá también de la historia de carga. Incluso con sólo alguna de las complicaciones mencionadas, la resolución analítica de un problema de contacto puede resultar muy compleja. El tratamiento específico de los problemas de contacto se sale de los propósitos de este texto. Puede consultarse al respecto el texto de Barber, capítulos 12 y 21. Un tratamiento mucho más extenso y detallado puede encontrarse en el libro de Gladwell, dedicado íntegramente a problemas de contacto.

Si el lector llega a tener necesidad en el futuro de analizar problemas de contacto, lo más probable es que se plantee utilizar para ello métodos numéricos aptos para ordenador, como el Método de los Elementos Finitos o el Método de los Elementos de Contorno (el cual presenta ventajas claras para problemas elásticos de contacto), en lugar de procedimientos analíticos. Para concluir este apartado, se resumirán algunas particularidades especiales de ciertos problemas, cuyo conocimiento será muy útil a la hora de diseñar una estrategia de solución basada en algún método numérico como los citados.

Problemas sin fricción:

La solución no depende de la historia de cargas.

Si hay avance, el tamaño de la zona de contacto depende del nivel de cargas.

Problemas con fricción:

La solución depende siempre de la historia de cargas.

Problemas con o sin fricción:

Si el contacto es conforme o en retroceso, y las cargas (y eventualmente los desplazamientos prescritos no nulos) crecen todas en la misma proporción desde cero, entonces el tamaño de la zona de contacto, así como el de las subzonas de adhesión y deslizamiento si hay fricción, es independiente del nivel de carga, suponiendo que se aplica al menos una fracción no nula de la misma.

Como se aprecia, la dependencia de la historia de cargas está asociada a la presencia de fricción, y es consecuencia de la irreversibilidad termodinámica implicada. La única excepción a lo anterior se tendría en el caso en que no se produjese deslizamiento en ningún momento de cada uno de los procesos de carga considerados.

La tercera propiedad de las enunciadas indica que, por ejemplo el caso de retroceso de la figura 5.12 presentará zonas de contacto cuyo tamaño será independiente del valor de la tracción lateral. Esto será así aunque pueda sorprender a primera vista. Piénsese que el comportamiento de cada sólido es lineal, y que si el estado de contacto de cada punto no cambia, el problema completo será lineal en el sentido de que a niveles de carga mayores corresponderán desplazamientos y tensiones proporcionalmente mayores (el multiplicar la tensión normal y tangencial por el mismo factor en un punto de la zona de contacto dejará a dicho punto en el mismo estado de adhesión o deslizamiento que tuviese). En los problemas conformes o de retroceso no es factible que un punto de la zona de contacto cambie de estado al aumentar el nivel de carga. Para darnos cuenta de ello basta apreciar que multiplicando todas las tensiones, desplazamientos (y consecuentemente los acercamientos y alejamientos relativos entre puntos), etc, por un mismo factor, se obtiene una solución sin incompatibilidades, ya que ningún punto de la zona de contacto sale de la misma ni cambia su estado, y ningún punto de zonas vecinas a la de contacto se incorporará al contacto (aquí es crucial que el problema sea de retroceso, para que entre puntos con posibilidad de contactar *sólo haya alejamientos*; nótese que lo anterior no puede decirse de la primera de las figuras 5.12). Por tanto, la solución elástica del problema a un nivel de carga será la misma que a otro nivel de carga, multiplicada por el factor correspondiente.

Respecto de esa tercera propiedad, se llama la atención sobre que la condición de que todas las cargas crezcan uniformemente desde cero excluye por ejemplo la presencia de un desplazamiento prescrito no nulo que no crezca desde cero con el resto de las cargas. Claramente también excluye la presencia de un sistema de cargas previo y distinto del que se pretende analizar.

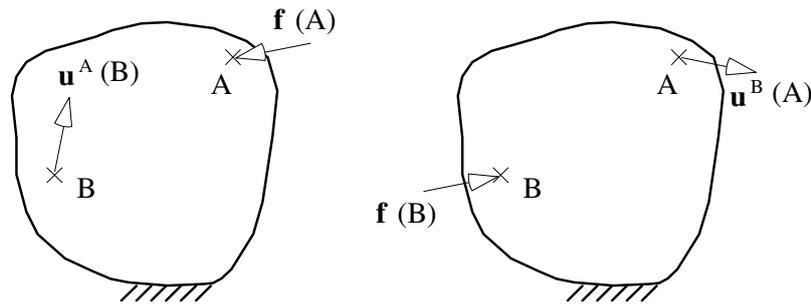
5.10.- Coeficientes de Influencia.

En ocasiones es útil conocer cómo están relacionados el desplazamiento en un punto B con una fuerza puntual aplicada en otro punto A del sólido. Bajo las condiciones de comportamiento elástico lineal que asumimos, y si las condiciones de contorno en desplazamiento son homogéneas (tipo $u=0$), en ausencia de fuerzas de volumen dicha relación será lineal. Llamamos de modo genérico "*Coeficientes de Influencia*" a los coeficientes (constantes) de esa relación lineal entre fuerza y

desplazamiento, o también a los de las que relacionan sus proyecciones sobre alguna dirección especificada.

Llamaremos $f_i(A)$ a las componentes de la fuerza que se aplique en el punto A, y $u_i^A(P)$ a los desplazamientos en un cierto punto P debidos a esa fuerza aplicada en A, como indica la figura 5.14. Escribiremos la relación lineal entre componentes de fuerza y desplazamiento su forma general, para cada caso ilustrado en las figuras 5.14:

$$u_i^A(B) = C_{ij}^{BA} f_j(A) ; \quad u_i^B(A) = C_{ij}^{AB} f_j(B) \quad (5.11)$$



Figuras 5.14.- Desplazamientos de dos puntos para definir Coeficientes de Influencia.

Donde el primer superíndice de los coeficientes indica el punto cuyo desplazamiento se observa, y el segundo superíndice el punto de aplicación de la fuerza. La simple inspección de las ecuaciones anteriores permite asegurar que tanto C^{AB} como C^{BA} son tensores de orden dos. Supondremos que todas las condiciones de contorno en desplazamientos son homogéneas (desplazamientos nulos), y que las fuerzas de volumen son despreciables. La aplicación del segundo teorema de reciprocidad entre los dos estados de carga conduce a:

$$f_i(A)u_i^B(A) = f_i(B)u_i^A(B)$$

Que con (5.11) resulta:

$$f_i(A)C_{ij}^{AB}f_j(B) = f_i(B)C_{ij}^{BA}f_j(A) = f_j(B)C_{ji}^{BA}f_i(A)$$

En la última igualdad se ha hecho uso de que cualquier símbolo puede utilizarse como subíndice mudo. Como $f(A)$ y $f(B)$ son vectores que pueden tomar cualquier valor, será:

$$C_{ij}^{AB} = C_{ji}^{BA} \quad (5.12)$$

La ecuación anterior resume la característica principal de los tensores de coeficientes de influencia. Nótese que la misma no implica que ninguno de los dos tensores sea simétrico. Solamente en el caso en que se esté observando el desplazamiento en el mismo punto que se aplica la fuerza sucede que el tensor de coeficientes de influencia es simétrico. Por ejemplo, (5.12) implica la simetría de C^{AA} :

$$C_{ij}^{AA} = C_{ji}^{AA} \quad (5.13)$$

Alternativamente, también se denominan "coeficientes de influencia" los escalares que relacionan los módulos de las fuerzas con las proyecciones de los desplazamientos sobre las fuerzas (que son aplicadas en el punto donde se observa el desplazamiento, pero que corresponden a otro estado de carga). Esta definición es diferente de la del tensor de coeficientes de influencia, aunque guarda relación con ella, como veremos. Por ahora, y con el objeto de precisar la nueva definición, definimos el escalar $u^B(A)$ como la proyección de $\mathbf{u}^B(A)$ sobre $\mathbf{f}(A)$, siempre con referencia a la figura 5.14. Nótese que el desplazamiento y la fuerza anteriores corresponden a estados de carga distintos. Los nuevos coeficientes de influencia escalares son definidos mediante:

$$u^A(B) = C^{BA} f(A) \quad ; \quad u^B(A) = C^{AB} f(B) \tag{5.14}$$

Siendo $f(A)$ el módulo de la fuerza $\mathbf{f}(A)$, y análogamente para $f(B)$. Para encontrar la relación entre estos coeficientes, C^{AB} , C^{BA} , y los términos de los tensores de coeficientes de influencia, multiplicamos escalarmente la segunda igualdad (5.11) por un vector unitario en la dirección y sentido de $\mathbf{f}(A)$, que llamaremos \mathbf{n}^A :

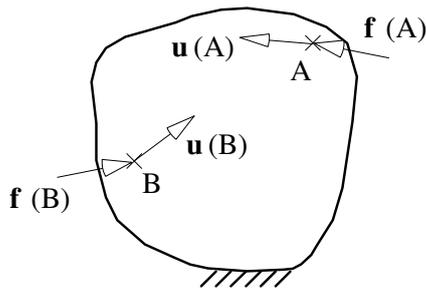
$$u_i^B(A) = C_{ij}^{AB} f_j(B) \Rightarrow n_i^A u_i^B(A) = n_i^A C_{ij}^{AB} f_j(B)$$

El primer miembro es $u^B(A)$. En el segundo miembro utilizamos la identidad $\mathbf{f}(B) = f(B)\mathbf{n}(B)$. Así:

$$u^B(A) = C_{ij}^{AB} n_i^A n_j^B f(B)$$

Identificando términos entre la ecuación anterior y la segunda de (5.14) tenemos:

$$C^{AB} = C_{ij}^{AB} n_i^A n_j^B \quad ; \quad \text{y análogamente: } C^{BA} = C_{ij}^{BA} n_i^B n_j^A \tag{5.15}$$



$$u_i(A) = u_i^A(A) + u_i^B(A) = C_{ij}^{AA} f_j(A) + C_{ij}^{AB} f_j(B)$$

$$u_i(B) = u_i^A(B) + u_i^B(B) = C_{ij}^{BA} f_j(A) + C_{ij}^{BB} f_j(B)$$

Figura 5.15.- Movimientos cuando actúan fuerzas en A y en B.

Las relaciones anteriores determinan el valor de los coeficientes de influencia escalares en función de las componentes de los tensores de coeficientes de influencia. Si en la última de las ecuaciones anteriores intercambiamos los subíndices mudos y hacemos uso de (5.12), resulta:

$$C^{BA} = C_{ji}^{BA} n_j^B n_i^A = C_{ij}^{AB} n_j^B n_i^A$$

Que en virtud de la primera ecuación (5.15) es precisamente C^{AB} . Por tanto, entre los coeficientes de influencia (escalares) se cumple la relación:

$$C^{AB} = C^{BA} \quad (5.16)$$

Los coeficientes de influencia también permiten calcular el desplazamiento de los puntos cuando actúan fuerzas en más de un punto. Solo hay que emplear el principio de superposición de efectos. Así, los desplazamientos de A y B cuando actúan simultáneamente fuerzas en ambos puntos, pueden calcularse como se indica en la figura 5.15. Vamos a escribir una expresión matricial que englobe las dos relaciones anteriores (para un caso bidimensional, por simplicidad). Para ello definimos una matriz columna \mathbf{u} que contenga en sus dos primeros términos las dos componentes de $\mathbf{u}(A)$, y en los otros dos las de $\mathbf{u}(B)$; análogamente definimos una matriz columna \mathbf{f} que contenga a $\mathbf{f}(A)$ y a $\mathbf{f}(B)$, y una matriz cuadrada \mathbf{C} , de dimensiones 4x4 en este caso, que contenga a las submatrices (2x2) C^{AA} , C^{AB} , etc. Podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} u_1(A) \\ u_2(A) \\ u_1(B) \\ u_2(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{AA} & C_{12}^{AA} & C_{11}^{AB} & C_{12}^{AB} \\ C_{21}^{AA} & C_{22}^{AA} & C_{21}^{AB} & C_{22}^{AB} \\ C_{11}^{BA} & C_{12}^{BA} & C_{11}^{BB} & C_{12}^{BB} \\ C_{21}^{BA} & C_{22}^{BA} & C_{21}^{BB} & C_{22}^{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(A) \\ f_2(A) \\ f_1(B) \\ f_2(B) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u}(A) \\ \mathbf{u}(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{AA} & C^{AB} \\ C^{BA} & C^{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(A) \\ \mathbf{f}(B) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{f}$$

Como (5.12) expresa que C^{AB} es la traspuesta de C^{BA} , y (5.13) indica que C^{AA} y C^{BB} son simétricas, resulta que la matriz de coeficientes de influencia \mathbf{C} que hemos definido, es simétrica. Aunque se ha considerado un problema bidimensional por simplicidad, el razonamiento es evidentemente aplicable a casos tridimensionales. La única diferencia es que las submatrices serán (3x1) o (3x3), manteniéndose la conclusión de que la matriz \mathbf{C} es simétrica. Por otra parte, pueden incluirse más de dos puntos (en los que aplicar fuerza y observar desplazamiento) en el desarrollo anterior. El razonamiento de superposición de efectos conduce en este caso a una matriz \mathbf{C} de (NxN) submatrices, siendo N el número de puntos elegidos en el sólido. Cuanto mayor sea el número de puntos elegidos, conseguiremos una mejor descripción del comportamiento elástico del sólido. Esta descripción podrá utilizarse como aproximación en aplicaciones prácticas. Tendremos ocasión de apreciar algunas características comunes entre el procedimiento de aproximación sugerido y la técnica de aproximación por Elementos Finitos, presentada en un capítulo posterior. El coste de disponer de una información más precisa acerca del comportamiento del sólido es, en todo caso, el cálculo -y manejo- de matrices de coeficientes mayor tamaño.

Hemos definido la matriz global de coeficientes de influencia anterior, \mathbf{C} , en base a las componentes de los tensores de coeficientes de influencia. Es también posible emplear un enfoque basado en los coeficientes de influencia escalares. Como ventaja, tendremos un escalar donde antes teníamos una submatriz, con la consiguiente economía operativa. La desventaja es que la información contenida se limita a la proyección de los desplazamientos sobre la dirección de las fuerzas (notados como, $u(A)$, etc), no apareciendo los vectores desplazamiento como tales. Por otra parte, este enfoque sólo es útil si la fuerza en cada punto va a mantener su dirección en todos los casos a analizar. Con este enfoque basado en coeficientes de influencia escalares, tenemos:

$$\begin{bmatrix} u(A) \\ u(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^A(A) + u^B(A) \\ u^A(B) + u^B(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{AA} & C^{AB} \\ C^{BA} & C^{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(A) \\ f(B) \end{bmatrix}; \quad u' = C'f$$

Tanto la matriz global C' definida en la última igualdad, como u' y f' , son evidentemente distintas de las definidas en base a los tensores de coeficientes de influencia. De la ecuación (5.16) se sigue que la nueva matriz C' es también simétrica.

Para finalizar, apuntaremos que basándose en las propiedades de los coeficientes de influencia pueden encontrarse relaciones, que a primera vista pueden resultar sorprendentes, entre los desplazamientos de los puntos de un sólido bajo distintos estados de carga. Un ejemplo clásico se muestra en la figura 5.16. Se trata de una viga con uno de sus extremos empotrado (con desplazamientos y giro impedidos), a la que se aplica perpendicularmente una fuerza de magnitud F en dos posiciones distintas.

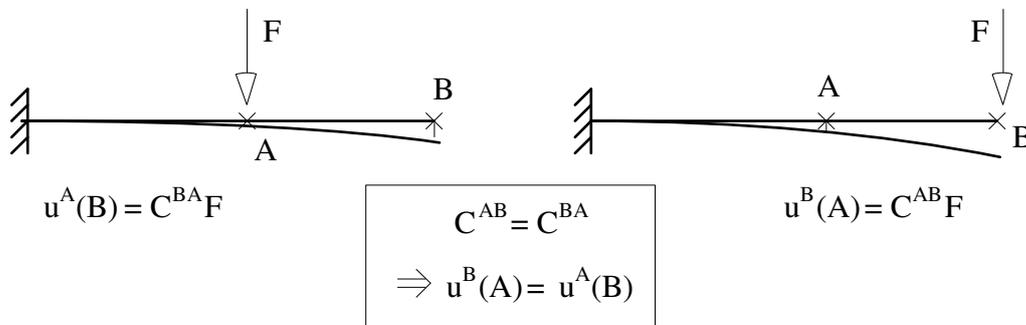


Figura 5.16.- Ejemplo de aplicación de propiedades de los coeficientes de influencia.

La conclusión es, en este caso, que el movimiento vertical del punto B en la figura izquierda debe ser igual que el de A en la figura derecha. Por supuesto, esta misma conclusión se alcanza aplicando directamente el segundo teorema de reciprocidad entre los dos estados de carga.

Bibliografía:

FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall
 BARBER, J.R., "Elasticity", Kluwer Academic Publishers
 GLADWELL, G.M.L. "Contact problems in the classical theory of elasticity",
 Sijthoof & Noordhoff International Publishers
 PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla
 DOBLARE, M., "Teoría de la Elasticidad lineal", ETSII-Univ. Zaragoza
 REISMANN, H., & PAWLIK, P., "Elasticity", Wiley - Interscience

Capítulo 6

Estados elásticos bidimensionales.

Existe un gran número de problemas elásticos cuya solución puede ser descrita con aproximación razonable involucrando sólo a las componentes de desplazamiento, tensión y deformación que son visibles en la proyección del sólido sobre un plano. El conjunto de circunstancias que deben concurrir para que este tipo de simplificación sea factible, así como algunos métodos de análisis típicos para este tipo de problemas, constituyen el objeto de estudio de este capítulo.

6.1.- Introducción.

La realidad física en que nos desenvolvemos es tridimensional, y todos los problemas de mecánica de sólidos son, en rigor, tridimensionales. No obstante, en muchas ocasiones es posible obtener una solución *aproximada*, útil desde el punto de vista práctico, en función solamente de las componentes de desplazamiento en un plano, digamos u_1 y u_2 , y de las correspondientes componentes de deformación, ε_{11} , ε_{12} , ε_{22} , y de tensión, σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} . Cuando esto es posible, tenemos como primera ventaja la simplificación operativa en la resolución del problema que corresponde a la reducción del número de dimensiones del mismo. Como segunda ventaja, encontraremos que es posible aplicar ciertas técnicas particulares de solución, válidas sólo para problemas bidimensionales. Estas técnicas son por una parte la basada en la "Función de Airy", que presentaremos más tarde en este capítulo, y por otra parte las técnicas de variable compleja, de desarrollo más reciente. Estas últimas técnicas no serán tratadas aquí, recomendándose al lector interesado que consulte la referencia original de N. Muskhelishvili, en la que dichas técnicas fueron presentadas por primera vez. La primera edición en ruso de este texto data de 1933, habiendo sido editado posteriormente en inglés (referencia que figura al final del capítulo).

Al estudiar los estados elásticos bidimensionales debe tenerse presente, como idea de fondo, que una representación bidimensional de un problema es casi siempre una aproximación a un comportamiento que realmente es tridimensional. En los epígrafes siguientes enunciaremos las condiciones teóricas que deben darse para que la representación bidimensional de un problema sea aceptable, o eventualmente exacta (desde el punto de vista del modelo elástico tridimensional). La aproximación que consigamos será tanto mejor cuanto más se ajuste la configuración del problema a las condiciones teóricas que enunciaremos.

6.2.- Estado de deformación plana.

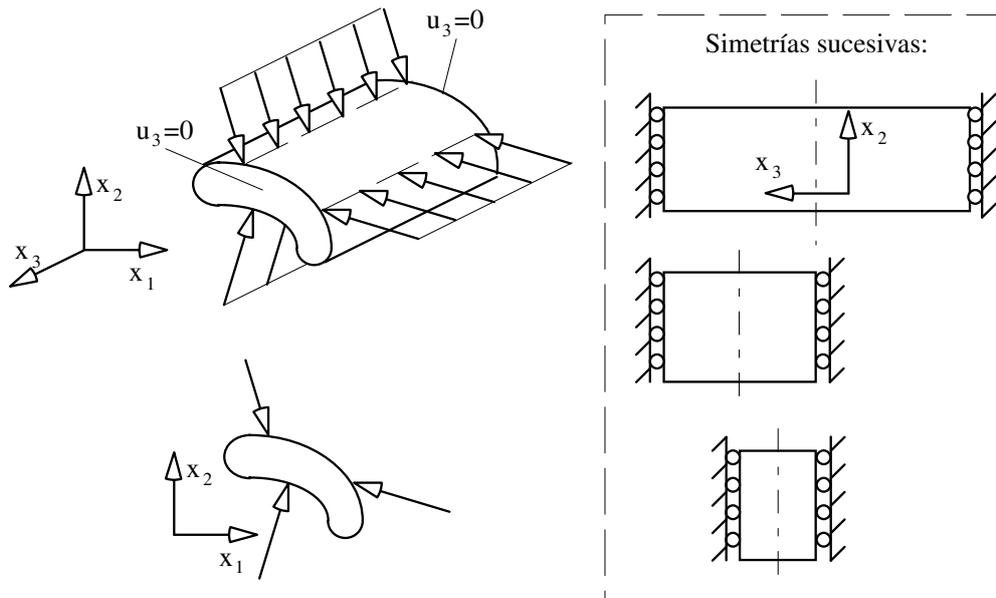
Comenzaremos enunciando las condiciones que definen desde el punto de vista matemático el estado de deformación plana (abreviadamente D.P.). Decimos que se presenta estado de deformación plana en el plano 1-2 si se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_3 &\equiv 0 \\ u_1 &= u_1(x_1, x_2) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Es decir, si en todos los puntos del sólido el movimiento en dirección 3 es nulo, y además los movimientos u_1 y u_2 no dependen de la coordenada x_3 . Para analizar en qué situaciones es razonable adoptar la hipótesis de D.P., reparemos en que la condición $u_3=0$ implica que los planos $x_3=\text{cte}$ del sólido permanecerán planos tras la deformación, y sus puntos se mantendrán en su plano inicial. Por otra parte, de (6.1) se deduce que $u_{1,3}=u_{3,1}=u_{2,3}=u_{3,2}=0$. Por tanto:

$$\varepsilon_{33}=\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0; \quad \sigma_{13}=\sigma_{23}=0.$$

Luego los planos $x_3=\text{cte}$ tienen tensión tangencial nula. En ciertos problemas, por ejemplo en el de la figura 6.1, un razonamiento de simetrías sucesivas permite asegurar que cualquier plano $x_3=\text{cte}$ tendrá tensión tangencial nula y se moverá en su plano.



Figuras 6.1.- Identificación del estado de deformación plana.

Las figuras representan un sólido prismático, cuya geometría se obtiene como desarrollo a lo largo de una porción del eje x_3 de una superficie en el plano $x_1 x_2$, que llamamos sección del prisma. Las cargas aplicadas son perpendiculares a x_3 , y se mantienen constantes a lo largo de x_3 , como indican las figuras de la izquierda. Además, las secciones extremas tienen impedido el desplazamiento u_3 , como indican las figuras de la

derecha. El plano de simetría geométrica es claramente también un plano de simetría del problema elástico, como indica la primera figura de la derecha (en estas figuras no se representa la carga por claridad). Por tanto podemos analizar solamente una mitad del sólido haciendo uso de lo expuesto en el epígrafe 5.9. El problema se transforma así en el representado en la segunda figura del recuadro derecho. Pero en esta última, también hay simetría de geometría y condiciones de contorno, siendo posible a su vez considerar sólo medio sólido, como se indica en la tercera figura. Procediendo sucesivamente, se llega a la conclusión de que cualquier plano $x_3 = \text{cte}$ es plano de simetría de un cierto problema (que es una cierta porción del problema original), por lo que sus puntos se moverán sin salirse del plano inicial, y en todos estos planos la tensión tangencial será nula. Por otra parte el razonamiento de simetrías sucesivas evidencia que los desplazamientos u_1 y u_2 no dependerán de x_3 , puesto que dos porciones arbitrarias de igual longitud (limitadas por dos planos $x_3 = \text{cte}$ en los que u_3 está impedido) constituyen exactamente el mismo problema elástico. Por lo tanto, el problema de las figuras 6.1 contiene un conjunto de condiciones suficientes para que la hipótesis de D.P. resulte rigurosamente correcta. Resumimos a continuación este conjunto de condiciones:

- a) El sólido tiene geometría de prisma recto, de sección arbitraria.
 - b) Los extremos planos del prisma tienen impedido el desplazamiento normal al plano, pero no tienen impedido su desplazamiento en el propio plano.
 - c) Las cargas tienen componente nula según el eje del prisma.
 - d) Las cargas no varían en la dirección del eje del prisma.
- (6.2)

Comentario: Página: 3
e6b

"Las cargas" referidas en c) excluyen evidentemente la tensión normal en los extremos planos del prisma. Esta tensión existirá debido a la restricción del movimiento en esos extremos. Como se ha mostrado, las condiciones (6.2) son suficientes para que se dé exactamente un estado de deformación plana. No hemos demostrado que estas condiciones sean necesarias, por lo que teóricamente podrían darse estados de D.P. fuera de las pautas (6.2) anteriores, por ejemplo en un sólido no prismático bajo un extraño sistema de cargas. Esta posibilidad no es realista. Por otra parte, si el sólido es prismático (condición a)), las condiciones b) c) y d) son también necesarias (además de suficientes) para que exista estado de D.P. La justificación de la última afirmación se presentará al estudiar las ecuaciones de equilibrio, en este mismo epígrafe. El lector encontrará también en el resto de este epígrafe las ideas clave para identificar de modo seguro si un problema es analizable razonablemente bajo hipótesis de deformación plana, o no lo es.

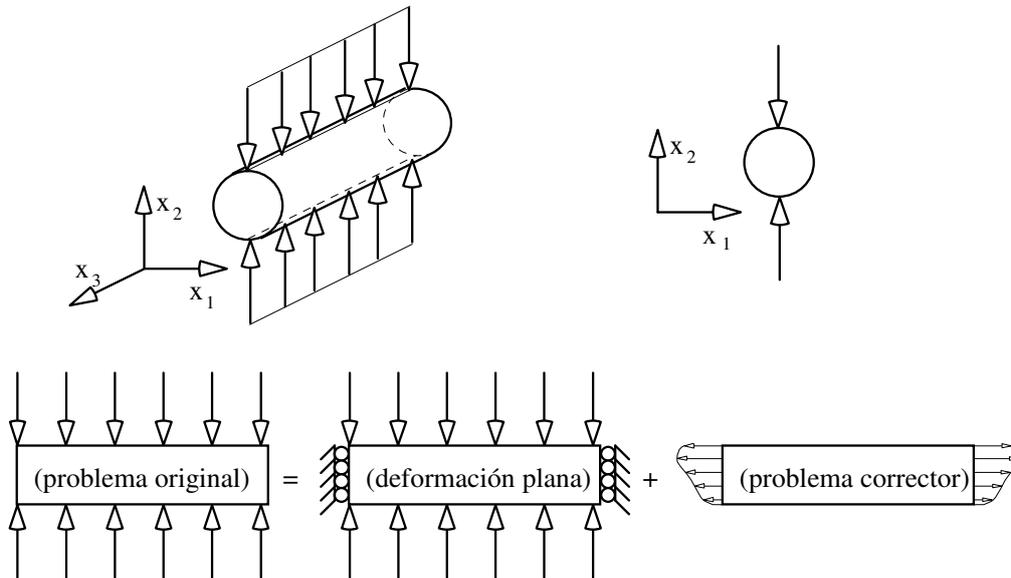
La solución correctora.

Entre las condiciones (6.2), la menos frecuente en problemas reales es que el prisma esté entre dos paredes absolutamente rígidas con las que mantiene contacto sin fricción. Afortunadamente, la solución de D.P. puede ser usada como aproximación cuando la longitud del prisma es grande comparada con las dimensiones transversales del mismo, cualesquiera que sean las condiciones en los extremos.

Un argumento frecuentemente presentado en la literatura en favor de lo anterior consiste en plantear la similitud con el caso límite de un prisma de longitud infinita. En ese caso, todas las secciones serían de simetría (ya que cada una tendría infinito sólido a

su derecha e infinito sólido a su izquierda), lo que al menos asegura que las secciones permanecen planas. Esto sería aproximadamente extrapolable a una cierta porción central de un prisma largo aunque no infinito. Sin embargo, el considerar un prisma de longitud infinita no aclara realmente la cuestión de las condiciones de contorno en los extremos, ya que de una u otra manera se han de considerar algunas "condiciones de contorno en el infinito".

Un enfoque mucho menos equívoco consiste en plantear la solución del problema original como superposición de un problema de deformación plana, más otro problema definido adecuadamente para que añada o quite del anterior las cargas oportunas, de forma que la superposición constituya el problema original. Llamamos solución correctora a la solución de este problema definido con el propósito de añadir al problema de D.P. lo necesario para reproducir nuestro problema original. Lo más frecuente en la práctica es que los extremos del prisma estén libres de acciones, lo que supondremos para fijar ideas, si bien la conclusión fundamental que obtendremos no se verá afectada por la presencia de otro tipo de condiciones en los extremos. La figura 6.2 muestra el caso de un problema que se ajusta a las condiciones de D.P., excepto a la relativa a los extremos del prisma. Se trata de un cilindro comprimido por un diámetro, y sin tensiones en las superficies extremas, que podría representar el rodillo de un cojinete. La solución correctora debe tener tensión nula en la superficie cilíndrica, y tensiones normales en los extremos planos de valor igual pero de sentido contrario a las que aparecen en el problema de deformación plana. La última de las figuras 6.2 representa un problema corrector *típico*, que no pretende ilustrar el ejemplo planteado en particular.



Figuras 6.2.- Definición de la solución correctora.

Un procedimiento riguroso de solución sería resolver el problema de D.P. (solución 1), tomar las tensiones σ_{33} encontradas, cambiarlas de signo para formular el problema corrector, resolver este último (solución 2) y superponer ambas soluciones (las referidas 1 y 2). Desafortunadamente, salvo en casos muy particulares la obtención de la solución correctora de forma rigurosa constituye un problema tridimensional complicado, en

general sin expresión analítica cerrada. Para obviar esta desventaja, podemos considerar una solución correctora aproximada, con distribuciones lineales de tensiones σ_{33} en los extremos, de forma que su resultante y momento sean iguales a los que actúan en las caras extremas del problema corrector original. Esta aproximación se ilustra en la figura 6.3.

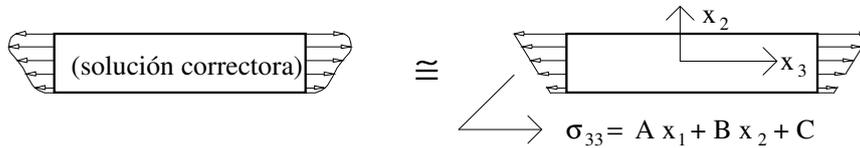


Figura 6.3.- La solución correctora aproximada.

Esta solución correctora aproximada corresponde al problema de una barra recta sometida a tracción-flexión, al que ya hicimos referencia en el contexto de la figura 5.10. Cuando la barra es larga, y en virtud del principio de Saint-Venant, esperamos que la solución de este problema sea una buena aproximación de la solución correctora, salvo en zonas cercanas a los extremos de la barra. La resolución de este problema corrector aproximado puede plantearse en el contexto de la Teoría de la Elasticidad, como un genuino problema tridimensional. Los detalles se presentarán más tarde, para no difuminar ahora la línea de razonamiento. La solución de tensiones tiene la forma (en todos los puntos del sólido):

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= A x_1 + B x_2 + C \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0\end{aligned}$$

Es decir, sólo es distinta de cero σ_{33} . Las deformaciones transversales son nulas, pero no así las longitudinales (ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33}). La solución de desplazamientos tiene las tres componentes no nulas. De lo anterior se deriva la siguiente conclusión de interés:

En el nivel de precisión que se alcanza usando la solución correctora aproximada, las componentes de tensión σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , que obtenemos resolviendo el problema de deformación plana son ya las correspondientes al problema original.

En el problema original, con los extremos del prisma libres, estas componentes de tensión serán evidentemente mucho mayores que σ_{33} , por lo que cualquier cálculo relativo a la plastificación del material puede realizarse con error despreciable utilizando solamente las componentes σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , obtenidas del análisis de D.P. La situación es muy distinta si los extremos del prisma tienen impedido el desplazamiento normal (el problema original sería precisamente de D.P., no necesitando solución correctora). En este caso la condición $\epsilon_{33}=0$ conduce a $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, que puede ser del mismo orden que σ_{11} y σ_{22} , no siendo razonable prescindir de ella.

Por otra parte, las componentes de desplazamiento obtenidas en el análisis de D.P. (u_1 y u_2) no coincidirán con las del problema original, puesto que los desplazamientos de la solución correctora no son nulos. Interesa saber hasta qué punto la solución correctora supone correcciones substanciales al campo de desplazamientos

correspondiente a D.P. En el apartado siguiente se presenta la solución elástica del problema corrector aproximado. No obstante, es posible conformarse con la solución correctora proporcionada para flexión-tracción por la Resistencia de Materiales (que es una buena aproximación). En este modelo el movimiento de la sección es un movimiento como sólido rígido, por lo que los desplazamientos u_1 , u_2 , obtenidos con D.P. tendrían asociado el error correspondiente a ese movimiento como sólido rígido. Este tipo de error carece de importancia en muchas situaciones. Seguidamente veremos que en rigor el movimiento de una sección no es exactamente un movimiento como sólido rígido, lo que implica discrepancias adicionales entre los campos de desplazamientos de deformación plana y del problema original.

La solución correctora aproximada: El problema de tracción-flexión.

Como se indicó en las figuras 6.2 y 6.3, el problema corrector tendrá aplicadas unas ciertas tensiones normales en los extremos de la barra prismática. En el problema corrector aproximado las tensiones normales se sustituyen por otras de evolución lineal en la sección, que tengan la misma resultante y momento (respecto de cualquier punto). Por simplicidad algebraica, elegimos los ejes de forma que x_2 tenga la dirección del momento, con lo que visto en el plano 1-3 el problema tiene el aspecto mostrado en la figura 6.4.

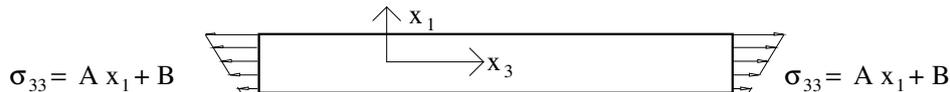


Figura 6.4.- El problema corrector aproximado.

Para obtener la solución elástica del problema, supongamos que las tensiones en el interior del sólido siguen el mismo patrón que en los contornos extremos. Si obtenemos así una solución será la correcta, en virtud del teorema de unicidad (si la suposición no fuera correcta no encontraremos una solución satisfactoria). Por tanto planteamos:

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= A x_1 + B \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0\end{aligned}$$

en todo el sólido. La ley de comportamiento nos da la expresión de las componentes longitudinales de deformación, y mediante integración obtenemos una primera forma de las componentes de desplazamiento:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} = -\frac{\nu}{E}(A x_1 + B) \Rightarrow u_1 = -\frac{\nu}{E}\left(A \frac{x_1^2}{2} + B x_1\right) + f(x_2, x_3) \\ \epsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} = -\frac{\nu}{E}(A x_1 + B) \Rightarrow u_2 = -\frac{\nu}{E}(A x_1 + B)x_2 + f(x_1, x_3) \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{E}\sigma_{33} = \frac{1}{E}(A x_1 + B) \Rightarrow u_3 = \frac{1}{E}(A x_1 + B)x_3 + f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

En donde $f(x_2, x_3)$, $f(x_1, x_3)$, $f(x_1, x_2)$, son tres funciones por determinar. Como las componentes de tensión tangencial son nulas, lo serán también las correspondientes componentes de deformación. Es decir:

$$u_{1,2} + u_{2,1} = 0 \Rightarrow f(x_2, x_3)_{,2} - \frac{\nu}{E} A x_2 + f(x_1, x_3)_{,1} = 0 \quad (6.3)$$

$$u_{1,3} + u_{3,1} = 0 \Rightarrow f(x_2, x_3)_{,3} + \frac{1}{E} A x_3 + f(x_1, x_2)_{,1} = 0 \quad (6.4)$$

$$u_{2,3} + u_{3,2} = 0 \Rightarrow f(x_1, x_3)_{,3} + f(x_1, x_2)_{,2} = 0 \quad (6.5)$$

Para que la ecuación (6.5) se satisfaga al variar los valores de las variables independientes, debe cumplirse que:

$$f(x_1, x_3)_{,3} \text{ no dependa de } x_3 \Rightarrow f(x_1, x_3) = g_1(x_1) x_3 + g_2(x_1)$$

$$f(x_1, x_2)_{,2} \text{ no dependa de } x_2 \Rightarrow f(x_1, x_2) = g_3(x_1) x_2 + g_4(x_1)$$

$$(6.5) \text{ por sí misma conduce a } g_1(x_1) = -g_3(x_1) = (\text{por simplicidad}) = g(x_1)$$

Las $g_j(x_1)$ son funciones por determinar. Con lo anterior, la ecuación (6.3) se escribe como:

$$f(x_2, x_3)_{,2} - \frac{\nu}{E} A x_2 + g'(x_1) x_3 + g'_2(x_1) = 0$$

Las primas (') denotan derivada primera respecto a la única variable de la que depende la función correspondiente. Para que la ecuación anterior se satisfaga para todo un rango de valores de x_1 y x_3 , es preciso que ni g' ni g'_2 dependan realmente de x_1 , por lo que deben ser constantes:

$$g'(x_1) = C_1 \Rightarrow g(x_1) = C_1 x_1 + C_3$$

$$g'_2(x_1) = C_2 \Rightarrow g_2(x_1) = C_2 x_1 + C_4$$

Con lo que, mediante integración, obtenemos:

$$f(x_2, x_3) = \frac{\nu A}{2E} x_2^2 - C_1 x_3 x_2 - C_2 x_2 + h_1(x_3) + C_5 \quad (6.6)$$

Similarmente, sustituyendo en la ecuación (6.4) el valor encontrado de $f(x_1, x_2)$ tenemos:

$$f(x_2, x_3)_{,3} + \frac{A}{E} x_3 - g'(x_1) x_2 + g'_4(x_1) = 0$$

Para que la ecuación anterior se satisfaga para todo un rango de valores de x_1 y x_2 , es preciso que ni g' ni g'_4 dependan realmente de x_1 , por lo que deben ser constantes:

$$g'(x_1) = \text{cte} \Rightarrow g(x_1) = \text{cte} \cdot x_1 + \text{cte} \text{ (resultado ya obtenido antes)}$$

$$g'_4(x_1) = C_6 \Rightarrow g_4(x_1) = C_6 x_1 + C_7$$

Con lo que, mediante integración, obtenemos:

$$f(x_2, x_3) = \frac{-A}{2E} x_3^2 + C_1 x_2 x_3 - C_6 x_3 + h_2(x_2) + C_8 \quad (6.7)$$

Identificando términos entre (6.6) y (6.7), encontramos:

$$h_1(x_3) = -\frac{A}{2E} x_3^2 - C_6 x_3; \quad h_2(x_1) = \frac{vA}{2E} x_2^2 - C_2 x_2; \quad C_1 = 0; \quad C_5 = C_8$$

Con la información obtenida conocemos ya las expresiones de las funciones f:

$$f(x_1, x_3) = C_3 x_3 + C_2 x_1 + C_4; \quad f(x_1, x_2) = -C_3 x_2 + C_6 x_1 + C_7$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{-A}{2E} x_3^2 - C_6 x_3 + \frac{vA}{2E} x_2^2 - C_2 x_2 + C_5$$

Con lo que la expresión final del campo de desplazamientos es:

$$u_1 = -\frac{v}{E} \left(A \frac{x_1^2}{2} + B x_1 \right) - \frac{A}{2E} x_3^2 - C_6 x_3 + \frac{vA}{2E} x_2^2 - C_2 x_2 + C_5$$

$$u_2 = -\frac{v}{E} (A x_1 + B) x_2 + C_3 x_3 + C_2 x_1 + C_4$$

$$u_3 = \frac{1}{E} (A x_1 + B) x_3 - C_3 x_2 + C_6 x_1 + C_7 \quad (6.8)$$

La solución anterior en desplazamientos (6.8), es *la solución exacta del problema corrector aproximado*, que debe superponerse a una solución de deformación plana. A la vez, es la solución tridimensional "exacta" de un problema importante por sí mismo, cual es el de flexión-tracción de barras rectas. Esta solución contiene las seis constantes indeterminadas ($C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$) asociadas a un movimiento arbitrario como sólido rígido, como es de esperar tratándose de una solución obtenida sólo a partir de las tensiones (o equivalentemente de las deformaciones, ver epígrafe 3.6). Puede comprobarse que si se impone desplazamiento y rotación nulos del origen de coordenadas, las seis constantes se anulan.

En el contexto en que presentamos esta solución, el mayor interés se centra en sus componentes u_1 y u_2 , que hemos de añadir a las correspondientes de la solución de D.P. para obtener las del problema original. Para una sección determinada, $x_3 = \text{cte} = x_3^0$, se aprecia que las componentes u_1 y u_2 de la solución correctora (6.8) implican algo más que un movimiento de sólido rígido, ya que contienen términos no lineales en x_1 y x_2 . En efecto, la figura 6.5 muestra el cambio de forma de la sección dado por las dos primeras ecuaciones (6.8). En el ejemplo adoptado el sólido prismático tiene sección cuadrada, y existe flexión sin tracción ($B=0$, estando el origen de coordenadas en el centro de la sección). Es inmediato comprobar (dentro de la hipótesis de pequeños desplazamientos) que los lados $x_1 = \text{cte}$ se transforman en parábolas y los lados $x_2 = \text{cte}$ permanecen rectos, con inclinación simétrica según se indica. Entiéndase que los desplazamientos de la solución correctora aproximada serían, para cada sección del

prisma los correspondientes a la figura (6.5) más un cierto movimiento como sólido rígido.

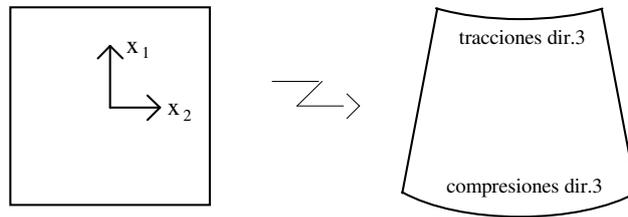


Figura 6.5.- Cambio de forma de una sección cuadrada sometida a flexión.

Aunque hemos obtenido la solución del problema de flexión-tracción de barras rectas con el objeto de utilizarla como solución correctora, la ocasión es propicia para indicar el grado de aproximación a esta solución elástica rigurosa (6.8) que se consigue al emplear las simplificaciones usuales de la Resistencia de Materiales. El lector interesado podrá comprobar que *para el caso de flexión-tracción* los siguientes resultados (y/o hipótesis) del modelo simplificado de Resistencia de Materiales resultan ser exactos (omitimos aquí los detalles por brevedad):

- El estado de tensiones.
- La deformada de la línea media (la formada por los centros de áreas de las secciones).
- El que las secciones de la barra permanecen planas tras la deformación.

Sin embargo, la hipótesis de que el movimiento de la sección sea un movimiento como sólido rígido no es exacta ni siquiera en el caso de flexión-tracción, como se mostró en la figura 6.5. En el contexto de la Resistencia de Materiales, los fenómenos de interés están muy poco afectados por la inexactitud de esta hipótesis, por lo que la misma es aceptable en dicho contexto. Por el contrario, los cambios de distancias entre puntos de la sección en su plano pueden llegar a ser relevantes cuando se trata de corregir una solución de D.P. Aunque es común que las *deformaciones de la sección* del problema corrector puedan despreciarse frente a las deformaciones de la solución de D.P. (debido a que los momentos flectores implicados suelen ser pequeños), es recomendable realizar en cada caso particular una sencilla comprobación al respecto. Como orientación, las deformaciones ϵ_{22} son del orden de 3×10^{-6} en una barra de acero de sección cuadrada, cuando las tensiones σ_{33} de flexión son próximas a la de fluencia (mucho mayores que las esperables en un problema corrector).

Ecuaciones de campo.

Lo expuesto hasta ahora en este epígrafe puede resumirse en que, a la hora de asumir la hipótesis de deformación plana en un problema, no es muy preocupante que el mismo viole las condiciones de movimiento normal nulo en los extremos del prisma, ya que podemos superponer una solución correctora aproximada que es bien conocida. En la mayoría de los casos una sencilla comprobación puede revelar que la solución correctora no modifica substancialmente la solución de deformación plana. En esos

casos la corrección resultará innecesaria. Nuestro interés se centra ahora en conseguir la propia solución de D.P., para lo que necesitamos conocer las ecuaciones de campo que rigen el comportamiento del sólido bajo las correspondientes hipótesis. Obtendremos estas ecuaciones mediante particularización de las ecuaciones generales de la elasticidad tridimensional.

-Ley de Comportamiento-

De las ecuaciones (6.1) se deduce inmediatamente que $\epsilon_{33}=\epsilon_{13}=\epsilon_{23}=0$ Haciendo nulos esos términos en la ley tridimensional de comportamiento (4.40), la misma puede escribirse sencillamente como:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \epsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2G \epsilon_{\alpha\beta} \quad (6.9)$$

Donde adoptamos el convenio de que los subíndices griegos (α, β, \dots) varían desde 1 hasta 2 solamente. Como sabemos, además de las componentes visibles en el plano 1-2, existe también una componente no nula de tensión, σ_{33} , la cual no está recogida en (6.9). Su valor en función de las componentes visibles en el plano se calcula fácilmente: siendo $\epsilon_{33}=0=[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})]/E$, tenemos:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (6.10)$$

Como en el caso tridimensional, podemos expresar la ley de comportamiento de distintas formas, con las tensiones en función de las deformaciones o viceversa, y usando unas u otras constantes elásticas. Por ejemplo, utilizando la ecuación (6.10) para sustituir el valor de σ_{33} en las dos primeras ecuaciones (4.52), que son $\epsilon_{11}=[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})]/E$, y $\epsilon_{22}=[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{33})]/E$, obtenemos un resultado que expresado en forma compacta es:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{\alpha\beta} - \nu \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}] \quad (6.11)$$

-Ecuaciones de equilibrio-

Dado que las hipótesis de D.P. implican que ninguna componente de desplazamiento varía en la dirección 3, tampoco lo hará ninguna de las magnitudes que se obtienen mediante derivadas de los mismos (tales son las tensiones y deformaciones). Eliminando las derivadas respecto de x_3 en las dos primeras ecuaciones de equilibrio (2.9), obtenemos:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + X_\alpha = 0 \quad (6.12)$$

La tercera ecuación de equilibrio (2.9), $\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + X_3 = 0$, teniendo en cuenta que $\sigma_{33,3}=0$ (por ser derivada respecto de x_3), y que también $\sigma_{31,1}=\sigma_{32,2}=0$ (por ser σ_{13} y σ_{23} idénticamente nulas, como se explicó al principio del capítulo), se reduce a $X_3=0$.

Las dos primeras ecuaciones de equilibrio en el contorno (2.8), se expresan (teniendo en cuenta que $\sigma_{13} \equiv \sigma_{23} \equiv 0$):

$$\sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} = \bar{X}_{\alpha} \quad (6.13)$$

La tercera ecuación de equilibrio en el contorno se reduce a $\bar{X}_3 = \sigma_{33} n_3$, lo que indica que solamente puede haber tensión en el contorno en dirección 3 en los extremos planos del prisma (únicas superficies del mismo con $n_3 \neq 0$).

Hemos obtenido que $X_3 = 0$ y $\bar{X}_3 = 0$, son relaciones que deben cumplirse en el estado de D.P. (la última salvo en los extremos del prisma). Por tanto la condición c) de (6.2) es una condición no sólo suficiente, sino también necesaria para que se dé el estado de deformación plana en un sólido prismático. La condición d) es también necesaria puesto que las ecuaciones (6.1) implican que ninguna magnitud que se exprese como derivadas de los desplazamientos, en particular las cargas, pueden variar a lo largo de x_3 .

-Ecuaciones de compatibilidad y de integrabilidad-

La expresión $\epsilon_{\alpha\beta} = (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})/2$, donde los subíndices griegos varían de 1 a 2, recoge los únicos tres términos no nulos del tensor de deformaciones. Existen tres posibles derivadas segundas involucrando a las variables x_1, x_2 , (la derivada 11, la 22, y la 12). Recuérdese que cualquier derivada respecto de x_3 será nula, y su consideración conduciría a una identidad. Derivando dos veces de las tres maneras posibles cada una de las tres ecuaciones anteriores se obtienen $3 \cdot 3 = 9$ ecuaciones. En estas nueve ecuaciones figurarán derivadas terceras de los desplazamientos u_1 y u_2 . Hay cuatro posibles derivadas terceras de una función (las 111, 112, 122, y 222), por lo que tendremos $4 \cdot 2 = 8$ funciones del tipo $u_{\alpha,\beta,\gamma\theta}$, que aparecen linealmente en las 9 ecuaciones. Si utilizamos ocho de las nueve ecuaciones para eliminar las ocho funciones, quedará $9 - 8 = 1$ ecuación, que sólo contendrá derivadas segundas de deformaciones. Esta es la ecuación de integrabilidad (solamente una) en el estado de D.P. Su forma explícita es:

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = 2 \epsilon_{12,12} \quad (6.14)$$

-Ecuaciones de Navier-

Dado que $u_3 \equiv 0$, y que cualquier derivada respecto de x_3 es nula, de (5.1) se tiene:

$$(\lambda + G)u_{\beta,\alpha\beta} + Gu_{\alpha,\beta\beta} + X_{\alpha} = 0 \quad (6.15)$$

-Ecuaciones de Michell y Beltrami-

Utilizando la ley de comportamiento para escribir la (única) ecuación de integrabilidad en función de las tensiones, y haciendo aparecer las cargas de volumen mediante la

ecuación de equilibrio correspondiente, se obtiene la (única) ecuación de Michell y Beltrami en los problemas de D.P. El resultado es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{-1}{1-\nu} [X_{1,1} + X_{2,2}] \quad (6.16)$$

Cabe recordar que el que un campo de tensiones cumpla las ecuaciones de Michell y Beltrami no es suficiente para asegurar que dicho campo sea la solución de nuestro problema elástico, sino que debe satisfacer además las ecuaciones de equilibrio.

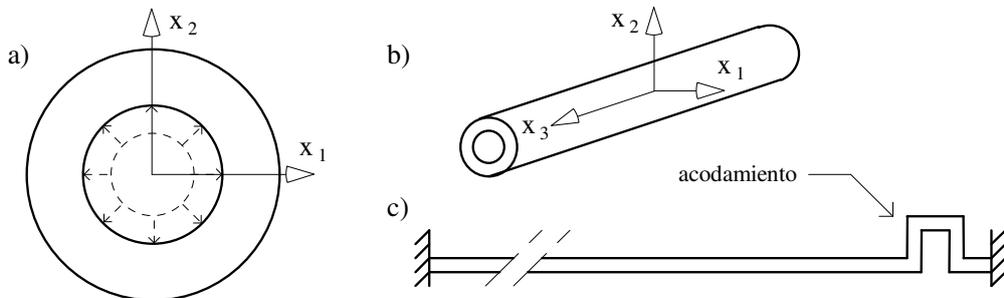
Notas sobre la aplicabilidad y el orden de magnitud del error.

Una vez que se ha identificado la posibilidad razonable de analizar un problema bajo hipótesis de D.P., los pasos a seguir son los siguientes:

1º) Obtención de la solución del problema de deformación plana, que debe satisfacer las ecuaciones de campo obtenidas en el apartado anterior. Para casos relativamente sencillos pueden emplearse enfoques de integración directa, o algún método particular que presentaremos más tarde en este capítulo. El empleo de métodos aproximados puede ser necesario en muchos casos.

2º) Cálculo de la tensión de la solución correctora ($-\sigma_{33} = -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ en el caso de extremos libres), y *en caso de estimarse necesario*, plantear la solución correctora aproximada y superponerla a la solución de deformación plana.

En este punto el lector está probablemente capacitado para reconocer si es o no razonable analizar un problema dado bajo hipótesis de D.P., si bien puede encontrar dificultad en evaluar *a priori* la necesidad o no de considerar la solución correctora. Como orientación en este sentido, se comentan seguidamente algunos casos particulares.

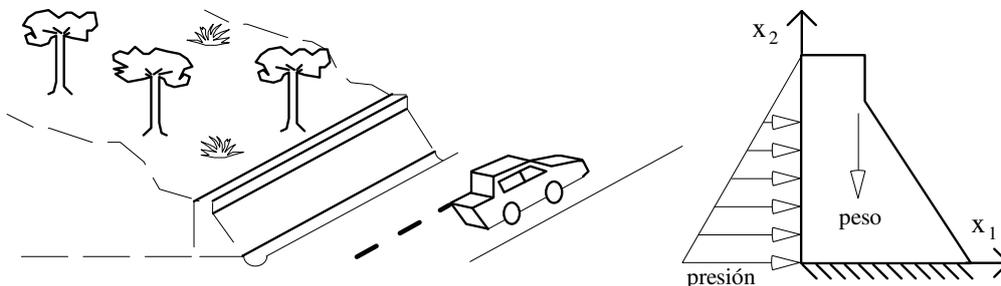


Figuras 6.6.- a) y b) Tubería a presión. c) Montaje para reducir tensiones longitudinales.

El primero y más emblemático es el caso de tuberías sometidas a presión interior y/o exterior que se ilustra en las figuras 6.6. Una tubería es habitualmente extremadamente larga comparada con su diámetro, por lo que los errores debidos a efectos de borde serán inapreciables en prácticamente toda su longitud. Cabe apuntar que muy raramente se montan tuberías rectas entre extremos rígidos, sino que incluso en los casos en que una recta sea topológicamente suficiente, suelen incluirse acodamientos

para evitar que las dilataciones térmicas produzcan grandes empujes longitudinales, y las consiguientes tensiones (figura 6.6c). En este caso las tensiones σ_{33} pueden ser despreciables en primera aproximación (existe un efecto secundario de flexión que ahora no consideramos), y la solución de D.P. ofrece ya todas las componentes de tensión relevantes. Si se quiere conocer con precisión el campo de desplazamientos, habrá necesidad de considerar la solución correctora. En este caso, por tratarse de un problema plano axisimétrico (el centro de la tubería es centro de simetría en el plano x_1 x_2), la distribución de tensiones σ_{33} de la solución correctora será equivalente a una fuerza longitudinal aplicada en el centro, siendo nulo el momento.

Como segundo ejemplo considérese un muro de contención, o una presa de gravedad, cuya forma típica se muestra en las figuras 6.7. Su función es mantener a un lado del muro o de la presa un volumen de tierra o de agua, respectivamente. El peso propio del muro es un factor clave para resistir los empujes y generalmente no puede simplificarse ni despreciarse en el análisis (en el resto de los casos comentados en esta sección suele ser razonable despreciarlo o considerar una fuerza de contorno equivalente). Las condiciones de contorno típicas constan de la presión ejercida por el medio a contener, que crece linealmente con la profundidad, y algunas condiciones en la base del muro que reproduzcan razonablemente su interacción con el terreno. Según el caso, puede ser adecuado imponer desplazamiento nulo en la base (como muestra la figura), o bien imponer algunas condiciones de contorno en tensiones que garanticen el equilibrio del muro y que sean consistentes con el tipo de interacción. Puede incluirse en el análisis la solución correctora cuando los extremos de la presa no apoyen en terreno rocoso, aunque en este tipo de aplicaciones de ingeniería civil los requerimientos de exactitud suelen dar margen más que suficiente para poder prescindir de solución correctora en todos los casos.



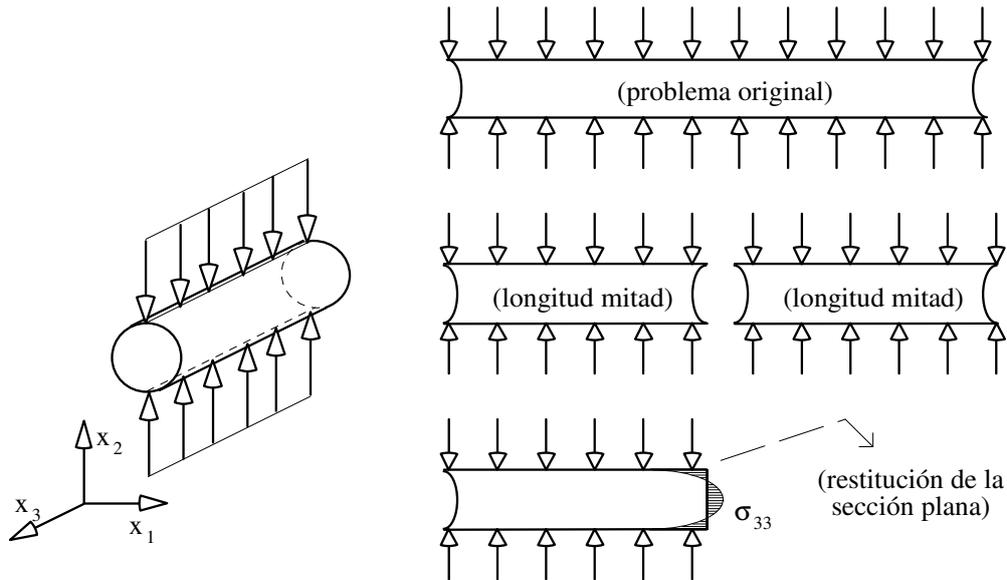
Figuras 6.7.- Presa de gravedad típica.

Otro caso típico de aplicabilidad del estado de D.P. es en cojinetes de rodillo o de aguja, utilizados para reducir el rozamiento entre elementos fuertemente comprimidos entre los que debe permitirse el deslizamiento relativo. Su configuración se mostró esquemáticamente en las figuras 6.2. Las tensiones más importantes serán las σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , que nos proporcionará el análisis de D.P., siendo suficientemente aproximado despreciar la tensión σ_{33} para la mayoría de los propósitos prácticos. Como se apuntó en el contexto de la figura 6.2, un cálculo afinado de desplazamientos requiere la consideración de solución correctora, la cual no incluirá momentos flectores (sino únicamente tracciones axiales), debido a la simetría de geometría y cargas que se aprecia

en el plano 1-2 respecto del eje x_1 y respecto del eje x_2 . Como cabe intuir, la solución correctora aproximada supondrá un desplazamiento radial constante del contorno (hacia el interior, visto en el plano 1-2). Por tanto, el cilindro se achatará en la dirección de las cargas exteriores (ver figuras 6.2) un poco más de lo que corresponde al estado de D.P., mientras que el ensanchamiento en la dirección perpendicular será un poco menor. El analista debe juzgar en cada caso el nivel de precisión requerido en el cálculo, y decidir en consecuencia si procede o no utilizar solución correctora.

Como nota final, y pensando en el caso de extremos del prisma libres, destaquemos la evidencia de que la solución obtenida como superposición de la solución de D.P. más la solución correctora aproximada, no es rigurosamente la exacta en el contexto de la elasticidad tridimensional. En efecto, resulta claro que estamos asumiendo el error asociado a lo que sería una segunda solución correctora, correspondiente al problema con cargas en los extremos de valor la diferencia entre las del problema corrector y las del problema corrector aproximado. *La única fuente de error en un análisis de deformación plana más solución correctora aproximada, corresponde a este segundo problema corrector.* Sus cargas tendrán resultante y momento nulos en cada extremo, lo que constituye nuestra justificación para despreciar esta segunda corrección en virtud del principio de Saint-Venant, tratándose de un prisma esbelto. Si el prisma no fuera esbelto, sería más adecuado desistir del análisis de D.P., y abordar el problema como tridimensional, ya que el segundo problema corrector será en sí mismo un problema tridimensional no menos complicado que el original.

Una manera intuitiva de apreciar que el problema de extremos libres es, en rigor, de naturaleza tridimensional es razonando sobre las tensiones σ_{33} . Consideremos nuevamente como ejemplo el problema del rodillo comprimido por un diámetro, figuras 6.2, que se reproduce por comodidad en la primera de las figuras 6.8. Imaginemos el rodillo dividido físicamente en dos mitades independientes, y observemos en el plano 2-3 la configuración deformada. Como las zonas extremas del diámetro vertical son las más comprimidas, tendrán la mayor deformación ϵ_{33} , resultando las secciones extremas con la forma indicada (esta explicación es cualitativa y la figura no refleja todos los detalles: no se piense por ejemplo que u_3 deba ser constante en las líneas $x_2 = \text{cte}$ de una sección). Se revierte al problema original restableciendo la continuidad en la sección imaginaria. Para ello deben aparecer tensiones σ_{33} de compresión en los extremos del diámetro vertical, y de tracción en su zona central, que devuelvan a la sección su geometría plana (debe ser plana porque dicha sección está en un plano de simetría del problema completo; por otra parte debe haber tensiones de tracción y de compresión porque las tensiones σ_{33} deben ser autoequilibradas en la sección, para que cada mitad de sólido pueda estar en equilibrio). Con este razonamiento llegamos a la conclusión de que en la sección central existirán tensiones σ_{33} con una distribución del tipo a la indicada en la última figura 6.8, mientras que en las secciones extremas será σ_{33} idénticamente nula por condición de contorno. Por tanto la tensión σ_{33} debe variar con x_3 , lo que pone de manifiesto que cualquier descripción del estado de tensiones en función de sólo x_1 y x_2 (como la que consigue una solución de D.P. más solución correctora aproximada) será inexacta. Adicionalmente, al ser $\sigma_{33,3}$ distinto de cero, la tercera ecuación de equilibrio interno ($\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0$, en ausencia de fuerzas de volumen) implica la presencia de tensiones σ_{31} y σ_{32} no nulas.



Figuras 6.8.- Evidencia de la tridimensionalidad del problema con extremos libres.

Pretendemos finalmente obtener una orientación de validez general acerca del orden de magnitud de los términos de la solución correctora aproximada. Es posible extraer dicha orientación general mediante el análisis de un caso particular. Consideremos por ejemplo el problema de *deformación plana* mostrado en la primera figura 6.9, cuya solución analítica podemos obtener. Más tarde corregiremos esta solución de D.P. para conseguir que no haya tensiones en las caras extremas del prisma. Para obtener la solución de D.P. partimos de la hipótesis de que en todo el dominio (no sólo en los contornos verticales) existe el siguiente estado de tensiones:

$$\sigma_{22} = x_1/a; \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0; \quad (\Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu \frac{x_1}{a})$$

Mediante integración directa, se obtiene la siguiente solución de desplazamientos:

$$u_1 = \frac{-\nu(1+\nu)}{E} \frac{x_1^2}{2a} - \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} \frac{x_2^2}{2a} + (C_1 x_2 + C_2)$$

$$u_2 = \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} \frac{x_1 x_2}{a} + (-C_1 x_1 + C_3)$$

Las constantes C_1 , C_2 , C_3 , corresponden a un posible movimiento como sólido rígido en el plano 1-2. Si el origen de coordenadas no se mueve ni gira, resulta $C_1=C_2=C_3=0$, lo que supondremos para fijar ideas. El hecho de que se obtenga una solución ("la solución", única en virtud del teorema de unicidad) sin violar ninguna de las ecuaciones de campo, indica que la hipótesis inicial acerca del estado de tensiones es correcta.

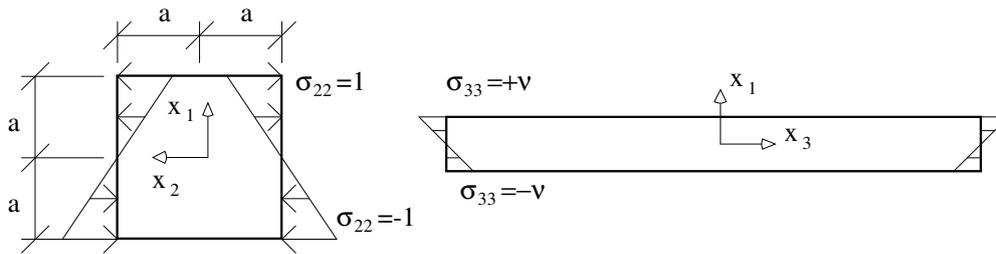


Figura 6.9.- Ejemplo particular: tensiones en deformación plana.

Nos ocuparemos ahora de la solución correctora, que corresponderá al problema de la barra sometida en sus extremos a unas tensiones opuestas a las que aparecen en la solución de D.P. (es decir, opuestas a las de la segunda figura 6.9,):

$$\sigma_{33} = -v \frac{x_1}{a}$$

La solución correctora dada por (6.8) se ajusta *exactamente* a este caso particular, dado que la distribución de tensiones σ_{33} es exactamente lineal. Manteniendo el hecho de que el centro de la barra (0,0,0) no se mueve, y que su entorno no gira, los desplazamientos de la solución correctora son:

$$u_1 = \frac{v^2}{2aE} x_1^2 - \frac{v}{2aE} x_3^2 - \frac{v^2}{2aE} x_2^2 ; \quad u_2 = \frac{v^2}{aE} x_1 x_2 ; \quad u_3 = \frac{-v}{aE} x_1 x_3$$

Resumamos las conclusiones que se desprenden de este ejemplo. Para problemas con extremos libres, y siendo respectivamente $O(\sigma)$ y $O(u)$ el orden de magnitud de las mayores tensiones y desplazamientos obtenidas con las ecuaciones de D.P. (en el plano 1-2), tenemos que:

- Las tensiones (σ_{33}) de la solución correctora aproximada son de orden $vO(\sigma)$.
- La solución correctora contiene desplazamientos u_1 y u_2 , que en general tendrán términos cuadráticos dependientes de x_1 , x_2 , y de x_3 . Los términos que dependen de x_1 y/o de x_2 son de orden $v^2 O(u)$. Los términos que dependen de x_3 pueden ser arbitrariamente grandes (ya que la cota x_3 también puede serlo). Su orden de magnitud es $vO(u)O(x_3^2/x_1^2)$.
- La solución correctora aproximada también contiene desplazamiento u_3 , que en general constará de términos cuadráticos tipo $x_1 x_3$ y $x_2 x_3$. Su orden de magnitud será $vO(u)O(x_3/x_1)$.

Como se hizo notar anteriormente, la "solución correctora aproximada" (6.8) resulta ser exacta en este caso particular, y su superposición a la solución de D.P. conduce a la solución exacta. En un problema más general, existiría el error asociado a una segunda solución correctora con tensiones σ_{33} autoequilibradas en las secciones. El orden de estas tensiones es, *en los extremos*, el de la diferencia entre la distribución (lineal) de la solución correctora aproximada, y la distribución de σ_{33} obtenida en el análisis de D.P. (cambiada de signo). Usualmente, las tensiones asociadas a esta segunda solución

correctora son muy pequeñas, y además decrecen rápidamente con la distancia a los extremos de la barra, quedando confinadas a longitudes del orden del de la sección junto a esos extremos. En el capítulo sexto del texto de Barber se estudian estas tensiones. Es oportuno hacer notar que existen casos especiales en los que dichas tensiones no decaen rápidamente, pudiendo extenderse a longitudes importantes de la barra. Existe mayor propensión a que esto suceda cuando la sección es muy poco maciza (secciones de pared delgada, especialmente si no forman una figura cerrada), como el lector podrá identificar al estudiar la torsión no uniforme en Resistencia de Materiales.

6.3.- Estado de tensión plana.

Decimos que en un sólido se presenta estado de tensión plana (abreviadamente T.P.) en el plano 1-2, si las tensiones, y en consecuencia las deformaciones, no dependen de la coordenada x_3 , y además se satisface en todos los puntos que:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (6.17)$$

Como se justificará en los apartados siguientes, la situación anterior ocurre *aproximadamente* cuando el sólido es una placa plana de pequeño espesor $2h$, limitada por los planos $x_3 = -h$ y $x_3 = +h$ como indica la figura 6.10, en la que las cargas de volumen y de superficie satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \bar{X}_3 &= 0 \text{ en el dominio} \\ \bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \bar{X}_3 &= 0 \text{ en los contornos } x_3 = \pm h \\ \bar{X}_3 &= 0 \text{ en el borde de la placa (de } n_3 = 0). \end{aligned} \quad (6.18)$$

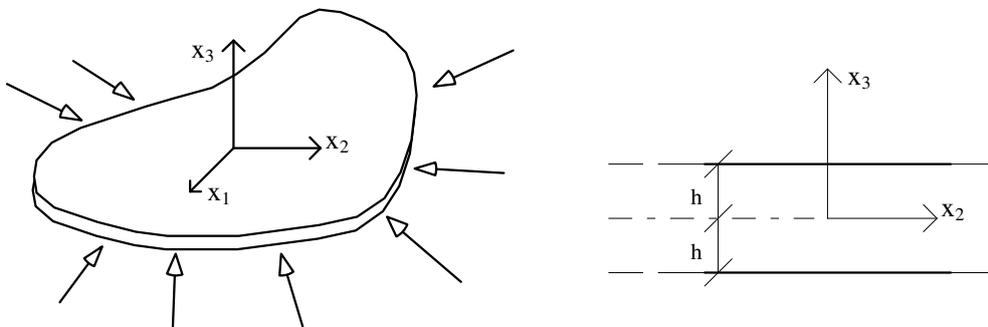


Figura 6.10.- Ejemplo típico de tensión plana.

Incompatibilidad de las hipótesis de tensión plana.

El estado de T.P. debe entenderse como una aproximación: generalmente existirá cierta discrepancia con la solución elástica tridimensional, incluso cuando se satisfacen todas las premisas enunciadas anteriormente. Nótese que no ocurre lo mismo en el estado de deformación plana, el cual proporciona la solución tridimensional exacta si se satisfacen las premisas correspondientes (sin olvidar la de desplazamiento normal nulo de los extremos). Mostraremos seguidamente que las hipótesis de T.P. no son en rigor consistentes, porque en general no puede existir solución elástica bajo dichas hipótesis. Sin embargo, la solución de T.P. tiende asintóticamente al estado de tensiones "exacto" cuando el espesor de la placa tiende a cero, proporcionando soluciones de buena aproximación en muchas aplicaciones prácticas.

Se aprecia inmediatamente que el cumplimiento de las condiciones (6.17) implicaría $\epsilon_{13}=\epsilon_{23}=0$, y la independencia de las deformaciones respecto de x_3 implicaría que cualquier derivada suya respecto de x_3 fuese nula. Con esto, las ecuaciones de integrabilidad (3.34), escritas en el mismo orden para facilitar su identificación, se reducen a:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0 + 0 & \text{(identidad)} \\ 0 + 0 = 0 + 0 & \text{(identidad)} \\ \epsilon_{33,12} = 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2\epsilon_{12,12} = \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} \\ 0 = \epsilon_{33,22} \\ 0 = \epsilon_{33,11} \end{array}$$

Vemos que todas las derivadas segundas de ϵ_{33} en el plano 1-2 serían nulas, por lo que ϵ_{33} debiera ser una función lineal de x_1 y x_2 . Pero la condición (6.17) $\sigma_{33} \equiv 0$, a través de la ley de comportamiento, implica que:

$$\epsilon_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2G} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = \frac{-\lambda}{2G(3\lambda + 2G)} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Por lo tanto la magnitud $(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$, o equivalentemente $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, debiera ser una función lineal de x_1 y x_2 para que las hipótesis fuesen consistentes. Es evidente que esto no tiene porqué ocurrir en un caso general (por ejemplo considérese $\sigma_{11}=x_2^2$, $\sigma_{22}=-x_1^2$, $\sigma_{12}=0$, que es compatible con las ecuaciones de campo para tensión plana, que enumeraremos más tarde). En consecuencia, *la solución de tensión plana será exacta sólo en ciertos casos muy particulares*: aquellos en que $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ resulte ser lineal.

Merece la pena resaltar la siguiente coincidencia relativa a la posibilidad de obtener la solución exacta en problemas de D.P. con extremos libres, y de T.P.:

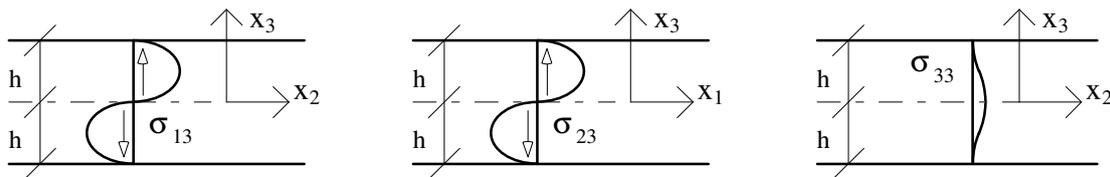
Problema: prisma muy largo (barra) con extremos libres, cargas tipo D.P.
Solución: superposición de deformación plana y "solución correctora aproximada"

Problema: de prisma muy corto (placa) con cargas sólo en los bordes, tipo T.P.
Solución: tensión plana.

La solución es exacta si $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ es lineal en x_1 y x_2 .	La solución es exacta si $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ es lineal en x_1 y x_2 .
---	---

Se obtiene la solución exacta si se da *precisamente la misma circunstancia* en ambos casos. Por supuesto, existe una razón que explica esta coincidencia: siendo $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ lineal, al descargar las caras del prisma largo usando la solución correctora estamos haciendo $\sigma_{33} = 0$ también en el interior del prisma, por lo que la solución obtenida por superposición satisface las hipótesis de T.P. (es por tanto la solución que habríamos obtenido mediante T.P.), y además es exacta, como se mostró en su momento. De aquí la "coincidencia" mencionada.

Seguidamente profundizaremos algo más en la inconsistencia de las hipótesis de T.P. a partir de condiciones de simetría. En la figura 6.10 se aprecia que el plano 1-2 es plano de simetría del problema, al menos en tensiones. Para satisfacer esta simetría (recordar figura 5.7 del epígrafe 5.9), la componente de tensión tangencial σ_{13} será del mismo valor y signo contrario en puntos simétricos, y lo mismo ocurrirá con σ_{23} , es decir: $\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{13}(x_1, x_2, -x_3)$; $\sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{23}(x_1, x_2, -x_3)$. Por otra parte, no se aplican acciones sobre las caras de la placa ($x_3 = \pm h$), por lo que σ_{13} , σ_{23} , y σ_{33} serán nulas en $x_3 = \pm h$. Las dos primeras figuras 6.11 muestran la distribución tipo de tensiones σ_{13} y σ_{23} que cumplen las condiciones anteriores.



Figuras 6.11.- Distribuciones típicas de σ_{13} , σ_{23} , y σ_{33} en estado de tensión plana.

En cuanto a σ_{33} , será nula en $x_3 = \pm h$ por condición de contorno, cumplirá la condición de simetría $\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{33}(x_1, x_2, -x_3)$, y además su derivada respecto a x_3 será nula en $x_3 = \pm h$. Para ver esto último, consideremos la tercera ecuación de equilibrio, $\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} = 0$ (puesto que es $X_3 = 0$). En puntos de las superficies $x_3 = \pm h$, σ_{13} y σ_{23} son constantes (nulas), y por lo tanto sus derivadas respecto de x_1 , o de x_2 , son nulas: $\sigma_{13,1} = \sigma_{23,2} = 0$. Por tanto será $\sigma_{33,3} = 0$ en puntos $x_3 = \pm h$. En definitiva, para unas coordenadas x_1, x_2 dadas, la representación gráfica de σ_{33} en el espesor de la placa será como se muestra en la tercera figura 6.11.

Recapitulando, vemos que la simetría limita la posibilidad de evolución de las tensiones en el espesor a lo mostrado en las figuras 6.11. Las tensiones σ_{13} , σ_{23} , y σ_{33} serán nulas (lo que es una posibilidad acorde con la figura), en los casos excepcionales en que $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ sea lineal. En los demás casos serán no nulas con la forma indicada, aunque si $2h$ es muy pequeño será razonable despreocuparse de estas tensiones. Un argumento intuitivo en este sentido es que σ_{13} y σ_{23} deben ser continuas y valer cero en los extremos y en el centro, con lo que no pueden crecer mucho en un espesor pequeño, y que σ_{33} es nula en los extremos, y su pendiente también lo es, por lo que tampoco crecerá mucho. En el epígrafe 84 del texto de Timoshenko y Goodier puede encontrarse una demostración rigurosa de que las tensiones σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} de la solución tridimensional "exacta" constan de los valores obtenidos mediante tensión plana, más otro sumando que depende de x_3 , y que tiende a cero al hacerlo h .

Debido a su naturaleza aproximada, los estudiosos de inclinación más matemática suelen encontrar poco elegante la formulación de tensión plana. Para preservar un mayor rigor formal, puede realizarse la formulación en base a valores medios en el espesor, en lugar de usar las variables originales. Por ejemplo:

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{22} dx_3$$

Se conoce como "tensión plana generalizada" a la formulación resultante de este procedimiento, la cual conduce a ecuaciones de campo idénticas a las de tensión plana, salvo que aparecen los valores medios de las variables. Por supuesto, la ganancia en cuanto a rigor es ilusoria en la práctica, a menos que podamos asegurar que las variaciones de tensión en el espesor son pequeñas, para que la tensión local sea razonablemente próxima al promedio. Esto último solo puede asegurarse si la placa es delgada, por lo que desde el punto de vista de la aplicabilidad no hay ninguna novedad.

Ecuaciones de campo.

Asumiendo las condiciones (6.17) y (6.18) de tensión plana, nos proponemos encontrar las relaciones entre las variables elásticas de subíndices 1 y 2, es decir, las representables en la proyección del problema sobre el plano de la placa. Estas relaciones serán las ecuaciones de campo a utilizar para obtener una solución bajo hipótesis de T.P.

-Ley de comportamiento-

Partiendo de la expresión (4.52) de las deformaciones en función de las tensiones, y teniendo en cuenta (6.17), tenemos sencillamente:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{\alpha\beta} - \nu \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (6.19)$$

En donde los subíndices griegos varían entre 1 y 2. La componente ε_{33} será no nula en general, aunque no queda recogida en la expresión anterior. Otra posibilidad es partir de (4.40) y utilizar $\sigma_{33}=0$ para eliminar ε_{33} . Véase: $\sigma_{33}=\lambda e+2G\varepsilon_{33}=0 \Rightarrow (\lambda+2G)\varepsilon_{33}+\lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}=0 \Rightarrow \varepsilon_{33}=-\varepsilon_{\gamma\gamma}\lambda/(\lambda+2G) \Rightarrow e=\varepsilon_{33}+\varepsilon_{\gamma\gamma}=\varepsilon_{\gamma\gamma}2G/(\lambda+2G)$. Llevando este valor de 'e' a (4.40), los términos de tensión que nos interesan pueden expresarse en forma compacta como:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G} \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2G\varepsilon_{\alpha\beta} \quad (6.20)$$

Comparando (6.19) con (6.11), o bien (6.20) con (6.9), apreciamos que la forma de la ley de comportamiento es análoga para T.P. y para D.P., diferenciándose en los valores de los factores (constantes) que multiplican a las variables. Es posible por tanto obtener la ley de T.P. a partir de la de D.P. o viceversa mediante un cambio adecuado del valor de dichos factores. El lector debe tener presente que *el ajuste necesario depende de la pareja de constantes elásticas que se estén utilizando para describir el comportamiento del material*. Cuando se están utilizando las constantes G, ν , el ajuste a

realizar es particularmente sencillo. Utilizando (4.51) para eliminar E en favor de G y de ν en (6.19) y (6.11), podemos comparar fácilmente:

$$\begin{array}{cc} \text{D.P.:} & \text{T.P.:} \\ \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{2G} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} & \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{2G(1+\nu)} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \end{array}$$

Vemos que si en la ley de D.P. sustituimos el valor de ν por el valor $\nu/(1+\nu)$, obtenemos la ley de T.P. Análogamente, si en la ley de T.P. sustituimos el valor de ν por el valor $\nu/(1-\nu)$, obtenemos la ley de D.P.

La utilidad de manipulaciones como la anterior radica en que si se dispone de una solución de T.P. será posible obtener la correspondiente de D.P. o viceversa, sin más que ajustar los factores oportunos (veremos que las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad son idénticas para ambos estados, por lo que ajustar la ley de comportamiento resulta suficiente). Por tanto, obtener una solución para uno u otro estado es indiferente desde el punto de vista operativo. Por ejemplo, si se dispone de una manera (típicamente un programa de ordenador) de obtener soluciones de D.P. mediante cualquier método (ya sea aproximado o capaz de proporcionar la solución analítica exacta, etc), se puede forzar (al programa) a que produzca la solución de T.P. sin más que "mentirle" acerca del valor de ν . Lo anterior presupone que internamente el programa sólo utiliza G y ν ; en otro caso habría que modificar convenientemente las dos constantes elásticas utilizadas.

-Ecuaciones de equilibrio-

A la vista de (6.17) la particularización de las ecuaciones de equilibrio tridimensionales resulta inmediata:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + X_{\alpha} = 0 ; \quad \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} = \bar{X}_{\alpha} \quad (6.21)$$

-Ecuaciones de compatibilidad y de integrabilidad-

Las ecuaciones de compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos para T.P. son las mismas que para D.P.: $\epsilon_{\alpha\beta} = (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})/2$. Las ecuaciones de integrabilidad han sido ya analizadas en el apartado anterior, y aquí solo resumiremos los resultados. Análogamente al caso de D.P, debe cumplirse:

$$2\epsilon_{12,12} = \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} \quad (6.22)$$

Además, como en tensión plana es $\epsilon_{33} \neq 0$, hay otras tres ecuaciones de integrabilidad que no son identidades: $\epsilon_{33,11} = \epsilon_{33,22} = \epsilon_{33,12} = 0$. Como vimos, estas tres ecuaciones no podrán satisfacerse exactamente en general, por lo que cuando se adopta la hipótesis de tensión plana se debe tener presente que se realiza una aproximación.

-Ecuaciones de Michell y Beltrami-

En tensión plana, al igual que en D.P, sólo habrá una ecuación de Michell y Beltrami, que es la de integrabilidad (6.22) escrita en función de las tensiones, y con algunos términos retocados mediante de las ecuaciones de equilibrio para hacer aparecer las fuerzas de volumen. Una manera fácil de ahorrarnos estos cálculos es tomar la correspondiente ecuación de D.P. (6.16), y alterar el valor de ν de la manera que se expuso más arriba. De esta sencilla sustitución resulta:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu) [X_{1,1} + X_{2,2}] \quad (6.23)$$

Nuevamente cabe recordar que el que un campo de tensiones satisfaga la ecuación anterior no es condición suficiente para asegurar que el mismo sea la solución de nuestro problema. Apuntemos también que la ecuación anterior indica que para que la solución de tensión plana sea exacta es condición necesaria que:

$$X_{i,i} = \text{div } \mathbf{X} = 0$$

En efecto, el que la solución sea exacta requiere $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ lineal en x_1, x_2 , y el miembro izquierdo de (6.23) se anulará en este caso, anulándose por tanto $\text{div } \mathbf{X}$. La condición no es suficiente, dado que lo que la misma implica a través de (6.23) es que $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ sea una función armónica, circunstancia que abarca otras posibilidades a parte de la linealidad.

-Ecuaciones de Navier-

Combinando las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento de manera análoga a como se hizo en el caso tridimensional, se llega a:

$$\left(\frac{2\lambda G}{\lambda + 2G} + G \right) u_{\beta,\beta\alpha} + G u_{\alpha,\beta\beta} + X_{\alpha} = 0 \quad (6.24)$$

6.4.- Función potencial de tensiones.

En general, es más sencillo realizar manipulaciones matemáticas sobre las magnitudes escalares que sobre las vectoriales, en particular si se requiere hacer cambios de sistemas de coordenadas, operación complicada con vectores y tensores. Por eso, cuando es posible, las ciencias físicas buscan apoyarse en la definición de campos escalares a partir de los que obtener mediante derivación las componentes de las magnitudes no escalares de interés. Los potenciales eléctrico y gravitatorio son dos ejemplos típicos. En ciertas ciencias físicas el potencial escalar tiene un significado obvio. Por ejemplo, en el caso de la conducción de calor, la temperatura es un potencial escalar en función del cual se obtiene el vector flujo de calor. Sin embargo, no es necesario que una función potencial tenga una interpretación física tan obvia. En la Teoría de la Elasticidad se emplean frecuentemente funciones potenciales sin

significado físico aparente. Algunos de estos potenciales fueron comentados brevemente en el epígrafe 5.1. Aquellos potenciales se clasifican como "potenciales de desplazamiento", porque se formulan originalmente con la intención de obtener el campo de desplazamientos. Análogamente, un "potencial de tensiones" es una función escalar que derivada adecuadamente produce las componentes del tensor de tensiones. En problemas planos (de T.P. o de D.P.) es posible plantear un potencial de tensiones particularmente conveniente, conocido como Función de Airy, que será el objeto de estudio fundamental de este epígrafe.

Elección de una forma adecuada.

A la hora de definir un potencial contamos con libertad para elegir entre una variedad de alternativas. Sólo existe una regla obvia que debe ser respetada en todo caso: si la magnitud a representar es un tensor, las operaciones que apliquemos al potencial (que serán fundamentalmente derivaciones), deben definir precisamente un tensor. Además, sus componentes deben cumplir las características requeridas (simetría...). Por ejemplo es apropiado intentar obtener un campo vectorial mediante derivadas primeras de un potencial, o un campo tensorial mediante derivadas segundas, ya que, *si nos limitamos a coordenadas cartesianas*, las derivadas segundas de un campo escalar producen las componentes de un tensor. Como ejemplo, puede comprobarse que las componentes de tensión obtenidas a partir de un potencial ψ mediante $\sigma_{11}=\psi_{,22}$; $\sigma_{22}=\psi_{,11}$; $\sigma_{12}=-\psi_{,12}$; cumplen en efecto con las relaciones de transformación (1.19) que definen un tensor (procedimiento sugerido: calcule la expresión de la derivada en ejes girados $\psi_{,2'2'}$ en función de las derivadas en ejes sin girar $\psi_{,11}$; $\psi_{,22}$; $\psi_{,12}$, y compruebe que coincide con la expresión de $\sigma_{1'1'}$ obtenida bajo la hipótesis de que σ_{ij} se transforma como un tensor; realice análoga comprobación para la pareja $\psi_{,11}$ y σ_{22} , y para la $-\psi_{,12}$ y σ_{12}). Apréciense que el potencial de tensiones que definiremos a continuación se ajusta precisamente al patrón anterior.

Función de Airy.

Nos proponemos expresar las componentes de tensión del problema elástico bidimensional mediante derivadas de una función potencial ϕ . Vamos a limitarnos de momento al caso en que las fuerzas de volumen sean nulas, $X_i=0$. Si derivamos las ecuaciones de equilibrio en el dominio, (6.21) o (6.12), respecto de x_1 y x_2 respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 &\rightarrow \partial / \partial x_1 \rightarrow -\sigma_{12,12} = \sigma_{11,11} \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0 &\rightarrow \text{###} / \text{###} x_2 \rightarrow -\sigma_{21,12} = \sigma_{22,22} \end{aligned}$$

Por tanto las tres cantidades $-\sigma_{12,12}$; $\sigma_{11,11}$; y $\sigma_{22,22}$; deben ser iguales. Elegimos igualarlas a la derivada cuarta $\phi_{,1122}$ de la función potencial:

$$-\sigma_{12,12} = \sigma_{11,11} = \sigma_{22,22} = \phi_{,1122}$$

Debemos asegurar que se satisfaga la condición anterior (elegida por nosotros mismos en cuanto a ϕ), y las ecuaciones de equilibrio. Por simple inspección encontramos que ambas se satisfacen si hacemos:

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} ; \sigma_{22} = \phi_{,11} ; \sigma_{12} = -\phi_{,12} \quad (6.25)$$

Cualquier función ϕ que utilicemos conducirá, mediante (6.25) a un campo de tensiones que cumple las ecuaciones de equilibrio interno. Pero esto no asegura que exista un campo de desplazamientos físicamente aceptable asociado a tal campo de tensiones. Para asegurarlo debe satisfacerse además la ecuación de integrabilidad. Vamos a usar su expresión en función de las tensiones (la ecuación de Michell y Beltrami), que en los casos $X_i=0$ que analizamos adopta la misma forma tanto en T.P. como en D.P:

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \sigma_{\alpha\alpha,\beta\beta} = 0$$

Expresando las tensiones en función de las derivadas del potencial mediante (6.25), tenemos que $\sigma_{11} + \sigma_{22} = \phi_{,22} + \phi_{,11} = \nabla^2\phi$. La ecuación de integrabilidad se reduce pues a la siguiente, que expresa la "condición de biarmonicidad" para ϕ :

$$\nabla^2(\nabla^2\phi) = \nabla^4\phi = \phi_{,1111} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,2222} = 0 \quad (6.26)$$

Por lo tanto, un campo de tensiones obtenido mediante (6.25) utilizando una función ϕ biarmónica, cumplirá las ecuaciones de equilibrio en el dominio y la de integrabilidad. Sólo quedan por satisfacer las condiciones de contorno de nuestro problema para que ϕ represente la solución del mismo. Así pues, el problema elástico plano se resuelve si encontramos la función ϕ biarmónica adecuada a las condiciones de contorno. El potencial que hemos descrito fue introducido por G. B. Airy en 1862, y se conoce como función de Airy. El lector no debe desanimarse por no ser capaz de *adivinar* qué función de Airy resuelve cada problema dado. De hecho, la mayoría de las soluciones han sido obtenidas por un procedimiento de tipo inverso: tomando una función biarmónica, obteniendo su campo de tensiones asociado, y observando a posteriori si el mismo corresponde a las condiciones de contorno de algún problema de interés. No obstante, cuando la benevolencia del problema, o nuestra experiencia previa, nos sugiere de qué tipo será la solución de ϕ (un polinomio de cierto grado en x_1, x_2 , una función que dependa sólo de la distancia al origen, ...), es posible intentar un procedimiento directo: partiendo de una función de ese tipo que contenga constantes indeterminadas, se intenta ajustar las constantes para que se satisfagan las condiciones de contorno y la de biarmonicidad. Es evidente que solo será posible ajustar las constantes si la función que hemos elegido es lo bastante general.

Finalmente, haremos notar que la forma (6.25) de plantear un potencial de tensiones no es la más obvia. En un primer intento, parecería más natural probar con $\sigma_{11} = \psi_{,11}$; $\sigma_{22} = \psi_{,22}$; $\sigma_{12} = \psi_{,12}$; Es fácil comprobar que la elección anterior restringida a funciones ψ biarmónicas satisface la ecuación de integrabilidad, pero no las de equilibrio. Para satisfacer las ecuaciones de equilibrio debe restringirse más la elección de ψ (compruébese que debe ser $\nabla^2\psi = \text{cte}$). Lo anterior permite intuir que la propuesta de Airy será capaz de representar estados de tensión más generales que esta alternativa "más obvia", ya que permite elegir la función potencial con menos restricciones. Esta es la auténtica razón para preferir la función de Airy a otras alternativas. De hecho, mediante la función de Airy es teóricamente posible describir cualquier estado bidimensional de tensión. Aunque no lo probaremos explícitamente, el lector apreciará

la posibilidad de realizarlo cuando se estudien los enfoques de solución basados en series, en epígrafes posteriores.

Independencia de las tensiones respecto del material.

Las ecuaciones (6.25) y (6.26), que relacionan la función de Airy con las tensiones y delimitan las posibilidades de elección de la misma, no contienen ninguna referencia explícita a las constantes elásticas del material. No obstante, algunos problemas requerirán que la función de Airy contenga esas constantes, mientras que otros problemas no lo requerirán. Planteamos esta cuestión por el motivo siguiente: si podemos dar solución a un problema mediante una función de Airy en la que no aparezcan las constantes elásticas, la distribución de tensiones no dependerá de las mismas, y será por tanto la misma para cualquier material, y tanto para el caso de T.P. como para el de D.P. Es por tanto interesante dilucidar las circunstancias en que las tensiones de un problema plano son independientes del material.

Cuando *todas las condiciones de contorno* del problema están dadas en tensiones, el problema matemático que se plantea es encontrar una función ϕ biarmónica cuyas derivadas tomen ciertos valores prefijados en el contorno. El problema matemático anterior no involucra de ninguna manera a las constantes elásticas. Por tanto, el campo de tensiones es independiente del material en los problemas en que todas las condiciones de contorno están dadas en tensiones.

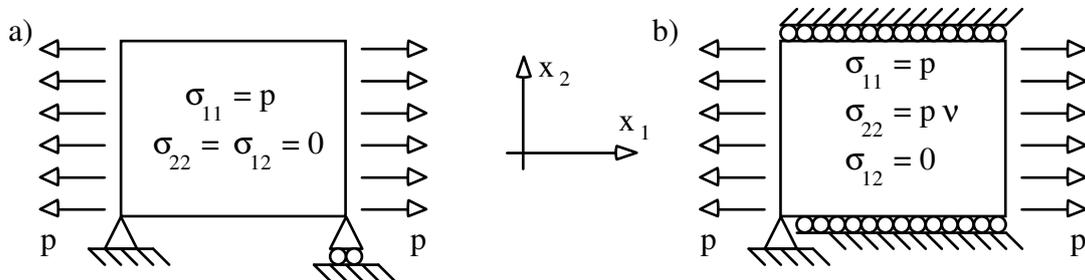


Figura 6.12.- a) Caso de independencia del campo de tensiones respecto de las ctes. elásticas y/o tipo de estado plano (T.P. o D.P.). b) Ejemplo de dependencia (T.P.).

Por el contrario, en los problemas en que existan restricciones superabundantes al desplazamiento (más de las necesarias para evitar movimientos de sólido rígido), el proceso matemático de solución requerirá involucrar a los desplazamientos para poder imponer sus valores prescritos. El manejar tensiones y desplazamientos implica el acoplamiento de ambas magnitudes a través de la ley de comportamiento, por lo que las constantes elásticas del material influirán en la solución de tensiones. La primera de las figuras 6.12 muestra un ejemplo sencillo en el que la solución de tensiones no depende del material. En este caso no aparecerán las constantes elásticas en la función de Airy (que en efecto es $\phi = p \cdot x_2^2 / 2$). El ejemplo de la segunda figura 6.12 es también de sencilla resolución sin acudir a funciones potenciales, y en él se observa que la solución de tensiones depende del material, y tiene distinta forma para T.P. y D.P., como corresponde a la superabundancia de condiciones de contorno en desplazamiento. Claramente, la función de Airy dependerá en este ejemplo de las constantes elásticas

(para T.P. es $\phi = p \cdot x_2^2 / 2 - \nu p x_1^2 / 2$). Adicionalmente debe entenderse que las constantes elásticas influyen *en todo caso* en el campo de desplazamientos, lo hagan o no en el de tensiones.

El que las tensiones sean independientes del material en ciertas configuraciones, abre la posibilidad de utilizar modelos de laboratorio en elasticidad. Por ejemplo es posible utilizar cualquier material de nuestra conveniencia (siempre que se comporte linealmente) para realizar un pequeño modelo a escala de un gran pórtico metálico, y medir en el modelo la distribución de tensiones, bajo cargas proporcionales a las reales. La independencia de la solución respecto del tipo de material junto con la relación lineal entre cargas y desplazamientos permite conocer las tensiones en el pórtico real experimentando únicamente sobre el pequeño modelo. La técnica conocida como "fotoelasticidad" consiste en construir los modelos con un material particular (material fotoelástico), que produce una birrefringencia al paso de la luz proporcional a la diferencia de tensiones principales. El paso de luz polarizada a través del modelo cargado, y de un segundo polarizador llamado analizador, produce franjas de luz y de sombra de las que se obtiene información precisa acerca del campo de tensiones.

6.5.- Fuerzas de volumen que derivan de un potencial.

Cuando las fuerzas de volumen son tales que sus componentes X_i pueden obtenerse como las derivadas de un cierto potencial escalar V respecto de las coordenadas espaciales ($X_i = -V_{,i}$; $\mathbf{X} = -\mathbf{grad} V$), entonces las ecuaciones (6.25) pueden generalizarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_1 &= -V_{,1}; X_2 = -V_{,2} \Rightarrow \\ \sigma_{11} &= \phi_{,22} + V; \sigma_{22} = \phi_{,11} + V; \sigma_{12} = -\phi_{,12} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Notemos que las ecuaciones anteriores definen en efecto componentes que siguen la ley de transformación de los tensores: las componentes definidas en (6.25) lo hacían, y en (6.27) sólo hemos superpuesto una presión hidrostática de valor V (adición del valor V a la diagonal del tensor), que como sabemos es invariante frente a transformaciones de coordenadas. Por otra parte, es fácil mostrar que las ecuaciones de equilibrio se satisfacen:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + X_1 &= 0 \quad \rightarrow \quad \phi_{,221} + V_{,1} - \phi_{,122} - V_{,1} \equiv 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + X_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad -\phi_{,211} + \phi_{,222} + V_{,2} - V_{,2} \equiv 0 \end{aligned}$$

Sabemos que en presencia de fuerzas de volumen la ecuación de Beltrami-Michell adopta formas ligeramente diferentes para T.P. y D.P., que respectivamente son:

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\nu) \operatorname{div} \mathbf{X}; \quad \nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1-\nu)^{-1} \operatorname{div} \mathbf{X}$$

Expresando las tensiones en función de ϕ mediante (6.27), tenemos respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{T.P.:} & & \text{D.P.:} & \\ \nabla^2 (\nabla^2 \phi) &= -(1-\nu) \nabla^2 V & \nabla^2 (\nabla^2 \phi) &= -(1-2\nu)(1-\nu)^{-1} \nabla^2 V \end{aligned} \quad (6.28)$$

Por tanto, en problemas con fuerzas de volumen que derivan de un potencial, la función de Airy debe cumplir la ecuación anterior que corresponda (según sea T.P. o D.P), en lugar de la de biarmonicidad. Vemos que en un caso con fuerzas de volumen la solución de tensiones dependerá del material, en general. No obstante, si las fuerzas de volumen derivan de un potencial armónico (es decir, se cumple $\nabla^2 V=0$), entonces las dos ecuaciones anteriores revierten a la condición de biarmonicidad para ϕ ($\nabla^4 \phi=0$). En este caso, desaparece nuevamente cualquier referencia explícita a las constantes elásticas del material, y es de aplicación lo dicho en el apartado anterior a cerca de la independencia de la distribución de tensiones respecto de las constantes elásticas.

Una ecuación diferencial en derivadas parciales como (6.28), que es no homogénea (el miembro derecho es una función conocida no nula de las coordenadas espaciales), puede resolverse de la misma manera que una ecuación diferencial no homogénea ordinaria: encontrando una solución particular y superponiéndole la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. Como solución particular podemos tomar *cualquier* función ϕ que satisfaga la ecuación, no siendo necesario que contenga constantes indeterminadas. La "generalidad" de la solución general proviene de las constantes indeterminadas de la solución homogénea. Con frecuencia es muy útil pensar en el sentido físico del proceso anterior: la solución puede obtenerse como superposición de dos estados elásticos, uno correspondiente a un problema particular cuyas condiciones de contorno podemos elegir libremente con tal que actúen las fuerzas de volumen establecidas (ya que su función ϕ correspondiente debe satisfacer (6.28)), más un cierto estado con fuerzas de volumen nulas (ya que su función ϕ debe satisfacer la condición $\nabla^4 \phi=0$) elegido convenientemente. Los pasos de resolución según este procedimiento son pues:

- a) Encontrar la solución de un problema cualquiera que tenga las mismas fuerzas de volumen X_i , pero condiciones de contorno más sencillas. Por ejemplo, para analizar rigurosamente una viga con una sustentación dada y sometida a la acción de la gravedad, podemos utilizar como solución particular la de la viga totalmente apoyada sobre un suelo rígido sin fricción (esta solución es muy sencilla de obtener, ya que su estado de tensión resulta unidireccional).
- b) Superponer la solución correspondiente a una función ϕ biarmonica que sea *lo bastante general*. No es necesario asegurar que sea la solución absolutamente general de $\nabla^4 \phi=0$ (lo que supondría una extraordinaria complicación). Solo se requiere que sea lo bastante general como para que sea posible elegir sus constantes indeterminadas de acuerdo con el criterio del punto siguiente.
- c) Elegir las constantes indeterminadas de manera que la superposición reproduzca las condiciones de contorno dadas en el problema.

El enfoque anterior no es el único posible para la encontrar una solución de (6.28). Por ejemplo, si sospechamos que la solución de ϕ podría ser de determinado tipo, digamos un polinomio de cierto orden, podemos probar una función lo bastante general de ese tipo despreocupándonos de (6.28), y después ajustar las constantes imponiendo las condiciones de contorno y (6.28), por el orden que deseemos. Apréciase que en todo caso, y tanto si existen fuerzas de volumen como si no, la mayor dificultad radica en acertar con una función ϕ que perteneciendo a la tipología adecuada (biarmonica o bien que satisfaga (6.28)), sea lo bastante general para representar ciertas condiciones de

contorno (las originales del problema o unas complementarias, en caso de que empleemos superposición).

Seguidamente presentaremos algunos casos particulares frecuentes de fuerzas de volumen que derivan de potencial. Antes de ello merece la pena anunciar que la mayoría de los componentes mecánicos en ingeniería están sujetos a cargas de contorno mucho más intensas que las de volumen, por lo que estas últimas suelen poder despreciarse. Esto es menos cierto en las aplicaciones de ingeniería civil, en las que el peso de la construcción supera frecuentemente a las cargas aplicadas. No obstante, en el caso de vigas suele ser posible sustituir su peso propio por cargas de contorno, con excelente aproximación. En el caso de los pilares, el peso propio suele ser despreciable frente a las cargas de servicio. En otras aplicaciones de ingeniería civil, como elementos de contención, es preferible el tratamiento riguroso del peso propio como fuerza de volumen. En ingeniería de máquinas pueden darse aceleraciones importantes en los componentes, produciendo efectos de inercia que normalmente deben ser tratados con rigor como fuerzas de volumen. Es típicamente el caso de elementos extensos que rotan a gran velocidad. Si hablamos sólo de problemas abordables mediante un enfoque estático (al menos en cada instante), la necesidad de tratamiento riguroso de las fuerzas de volumen en ingeniería se limita prácticamente a los casos enumerados en este párrafo.

Peso propio.

Si se trata en efecto de un problema bidimensional, las fuerzas de gravedad deben estar contenidas en el plano 1-2. Si la densidad del sólido es constante, la fuerza por unidad de volumen será constante, de valor ρg , siendo g la aceleración de la gravedad y ρ la densidad. Según la orientación de los ejes respecto de la gravedad, la fuerza de volumen anterior tendrá componentes cartesianas X_1^* , X_2^* , de valor constante. Las fuerzas de volumen constantes derivan del potencial V que se indica a continuación, por lo que el campo de tensiones adopta, según (6.27), la forma que también se indica:

$$V = -X_1^* x_1 - X_2^* x_2$$

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} - X_1^* x_1 - X_2^* x_2; \quad \sigma_{22} = \phi_{,11} - X_1^* x_1 - X_2^* x_2; \quad \sigma_{12} = -\phi_{,12} \quad (6.29)$$

Además, V es en este caso armónico, por lo que la función ϕ debe ser biarmónica, como en el caso de fuerzas de volumen nulas (pudiéndose dar la independencia de las tensiones respecto del material en las condiciones que se expusieron). Un problema se reduce a encontrar la función ϕ biarmónica que satisfaga, a través (6.29), las condiciones de contorno. Para fijar ideas: si la gravedad tiene el sentido negativo del eje x_2 , será $X_1^*=0$, $X_2^*=-\rho g$, $V = \rho g x_2$, $\sigma_{11} = \phi_{,22} + \rho g x_2$, $\sigma_{22} = \phi_{,11} + \rho g x_2$, $\sigma_{12} = -\phi_{,12}$.

Efectos de inercia sin aceleración angular.

Como es sabido, las aceleraciones de los puntos de un cuerpo rígido en un instante, pueden describirse en base a movimientos diferenciales (de traslación y de rotación) del sólido en su conjunto. En un cuerpo deformable, las distancias entre partículas pueden variar con el tiempo, dando lugar a términos adicionales de aceleración que dependen del campo de deformaciones (ya que su presencia conlleva que las distancias relativas no se mantengan). Los dos efectos anteriores requieren tratamientos muy diferentes. En el primer caso, la cinemática del sistema o mecanismo al que pertenezca nuestro sólido

permite conocer las aceleraciones a priori. En el segundo caso, las aceleraciones están asociadas a la deformación del sólido, y por tanto no se conocen a priori, sino que deben ser encontradas como parte de la solución. Este tipo de problema en que las aceleraciones y las deformaciones están matemáticamente acopladas es el objeto de estudio de la *Elastodinámica*. En las ecuaciones de campo de esta disciplina interviene inevitablemente el tiempo como variable. Los problemas más emblemáticos que estudia son aquellos en que se debe analizar la propagación de ondas elásticas, ya sean transitorias (como en los problemas elastodinámicos de impacto), o en régimen estacionario (como en los problemas más frecuentes de vibraciones mecánicas). Vamos a restringir aquí nuestra atención al caso en que las aceleraciones asociadas a la deformación sean despreciables frente a las debidas al movimiento del conjunto del sólido. Veremos que en estos casos es posible un enfoque estático del problema referido a un instante dado.

Conocidas la velocidad angular Ω y la aceleración angular $\dot{\Omega}$ (supuestas ambas en el sentido de x_3), así como la aceleración a^o de un punto O de un sólido (el cual haremos coincidir en el instante considerado con el origen del sistema cartesiano x_1, x_2), la aceleración a de otro punto P del sólido, que en ese instante ocupa las coordenadas x_1, x_2 , se expresa en componentes como:

$$a_1 = a^o_1 - \dot{\Omega} x_2 - \Omega^2 x_1 ; \quad a_2 = a^o_2 + \dot{\Omega} x_1 - \Omega^2 x_2$$

Utilizaremos el principio de D'Alembert para poder contemplar este problema dinámico bajo el enfoque de equilibrio estático en que hemos desarrollado la teoría de la Elasticidad. Las componentes de la fuerza de volumen serán las aceleraciones anteriores cambiadas de signo, y multiplicadas por la densidad, que supondremos constante:

$$X_1 = -\rho (a^o_1 - \dot{\Omega} x_2 - \Omega^2 x_1) ; \quad X_2 = -\rho (a^o_2 + \dot{\Omega} x_1 - \Omega^2 x_2)$$

Nuestra primera pregunta es si existe un potencial del que deriven las componentes anteriores. De las primeras condiciones expresadas en (6.26) se deduce inmediatamente que para que dicho potencial exista debe ser $X_{1,2} = X_{2,1}$ (véase: $X_{1,2} = -V_{,12} = -V_{,21} = X_{2,1}$), lo que solamente se cumple si la aceleración angular es nula. Bajo esta condición encontramos el potencial V por simple inspección:

$$\dot{\Omega} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= -\rho (a^o_1 - \Omega^2 x_1) \\ X_2 &= -\rho (a^o_2 - \Omega^2 x_2) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$V = \rho (a^o_1 x_1 + a^o_2 x_2 - \Omega^2 (x_1^2 + x_2^2)/2) \quad (6.30)$$

Hay que notar que la expresión de V anterior no es armónica: $\nabla^2 V = 2\rho\Omega^2$ (que es una constante distinta de cero) por lo que las ecuaciones (6.28) suponen condiciones distintas para ϕ según se trate de T.P. o D.P. Por tanto, para este tipo de cargas tenemos $\nabla^4 \phi = M$, siendo M una constante que depende, entre otras cosas, de si se trata de T.P. o de D.P.

Como ejercicio, vamos a buscar explícitamente una solución particular para las cargas de volumen debidas a la rotación uniforme de un sólido entorno a un punto (el origen, que tendrá por tanto $a^o_1 = a^o_2 = 0$). Tal solución particular podrá ser usada en el futuro para resolver mediante superposición problemas con este tipo de carga de dominio (ver

epígrafe 6.6 para más detalles acerca de este procedimiento). El potencial de las fuerzas de volumen es en este caso $V = -\rho\Omega^2(x_1^2 + x_2^2)/2$. Para encontrar una solución *particular* de tensiones solo debemos sustituir en (6.27) el valor de V anterior y cualquier función ϕ que satisfaga $\nabla^4\phi = M$, que es la forma de (6.28) para nuestro caso. Dependiendo de la elección de ϕ obtendremos distintas soluciones particulares. Para empezar, es natural pensar en términos de cuarto grado para ϕ , ya que sus derivadas cuartas serán constantes. Existe alguna ventaja en elegir ϕ de forma que dependa solo de la distancia al origen, porque ello corresponde al caso más frecuente en que el sólido en rotación tiene geometría circular (esto se comprenderá mejor al realizar el estudio en coordenadas polares en un epígrafe posterior). Adoptaremos por tanto una función de la forma

$$\phi = A(x_1^2 + x_2^2)^2 = A(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2)$$

Para que se cumpla $\nabla^4\phi = M$ debe ser $A = M/56$. En general, podríamos añadir a esa función cualquier función biarmónica con parámetros indeterminados. No lo hacemos porque no pretendemos ajustar finalmente las tensiones a las de una configuración propuesta, sino simplemente encontrar una solución de tensiones, sea cual fuere. Por supuesto, esta solución corresponderá a algún problema, que podremos identificar a posteriori. La solución particular adoptada para ϕ produce, a través de (6.27) el campo de tensiones siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \phi_{,22} + V = 12Ax_2^2 + 4Ax_1^2 - \rho\Omega^2(x_1^2 + x_2^2)/2 \\ \sigma_{22} &= \phi_{,11} + V = 12Ax_1^2 + 4Ax_2^2 - \rho\Omega^2(x_1^2 + x_2^2)/2 \\ \sigma_{12} &= -\phi_{,12} = -8Ax_1x_2\end{aligned}$$

No olvidemos que la anterior es una solución particular de entre las muchas existentes. Puede comprobarse que para cualquier punto $P(x_1^P, x_2^P)$, el vector tensión asociado a la dirección OP (cuyo vector unitario llamaremos \mathbf{n}) es:

$$\sigma^{\mathbf{n}}_i = (4A(OP)^2 + V) n_i$$

Es decir, $\sigma^{\mathbf{n}}$ es colineal con la dirección \mathbf{n} . Por tanto, en cualquier punto, las direcciones principales son la radial y la perpendicular a ella. Además, como V es también proporcional a OP^2 , la tensión normal en todos los puntos del contorno de un círculo cualquiera centrado en el origen es la misma, y depende del radio al cuadrado del círculo. La tensión tangencial es evidentemente nula, y puede comprobarse que la tensión circunferencial (tensión normal según la dirección perpendicular a \mathbf{n}) depende también del radio al cuadrado. A la vista de las simetrías implicadas en las consideraciones anteriores, estamos en disposición de identificar que la solución particular que hemos encontrado podría corresponder al problema físico de un disco macizo girando en torno a su centro, y que además estuviese sometido a una cierta tensión normal en su contorno.

6.6.- Fuerzas de volumen que no derivan de potencial.

Acabamos de encontrar un caso de interés, cual es el de aceleraciones angulares no despreciables, en el que las fuerzas de volumen no derivan de un potencial. Este tipo de problemas no admite un tratamiento sencillo en el contexto de la función de Airy. No obstante, si somos capaces de encontrar (por procedimientos ajenos a la función de Airy) una solución particular para las cargas de volumen dadas, es posible plantear la resolución mediante superposición de esa solución particular y la solución de un cierto problema sin fuerzas de volumen, con las condiciones de contorno adecuadas. La justificación de que tal planteamiento es correcto se encuentra en las mismas ecuaciones de Navier (reproducimos las del caso tridimensional por generalidad; el razonamiento es análogo para las correspondientes ecuaciones en T.P., y en D.P):

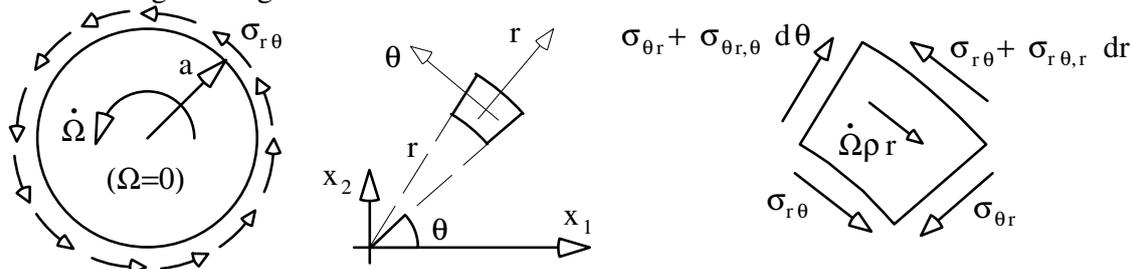
$$(\lambda + G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} = -X_i$$

Se trata de ecuaciones no homogéneas en derivadas parciales, cuya solución general puede obtenerse mediante superposición de una solución particular más una solución general de las ecuaciones homogéneas. Ello significa que para resolver un problema dado hemos de superponer la solución de cualquier problema que tenga las mismas fuerzas de volumen, más la solución de cierto problema sin fuerzas de volumen cuyas condiciones de contorno sean las complementarias del primero, de modo que la superposición reproduzca las del problema original. Con esta idea, y supuesto que seamos capaces de encontrar una solución particular, la complicación revierte a la de un problema matemático sin fuerzas de volumen.

Efecto de inercia debido a la aceleración angular.

Vamos a obtener seguidamente una solución particular que involucra a la aceleración angular. La solución particular que obtendremos podrá utilizarse para tratar el término de fuerza de volumen debido a la aceleración angular en cualquier problema futuro, mediante el enfoque de superposición que hemos apuntado.

El problema particular que planteamos se muestra en la primera figura 6.13, y consiste en un disco giratorio de radio "a" con velocidad angular nula, pero aceleración angular distinta de cero causada por tensiones tangenciales uniformemente distribuidas en el contorno $r=a$. Lo anterior correspondería al instante en que el disco empieza a moverse desde un estado de reposo. Tomamos coordenadas polares r, θ , y definimos unos ejes polares (cuya orientación depende del punto considerado), a los que también notamos como r, θ . Consideramos un elemento diferencial limitado por líneas $r=cte$, $\theta=cte$, como indica la segunda figura 6.13.



Figuras 6.13.- Disco giratorio con tensiones tangenciales en su contorno.

Si cambiásemos el sentido de las tensiones en el contorno, las fuerzas de volumen, así como todas las variables elásticas en general, serían las mismas pero cambiadas de signo. Por otra parte, ese problema sería "una imagen en el espejo" del problema original. La combinación de ambas consideraciones conduce a que el desplazamiento radial u_r de cualquier punto será nulo en ambos problemas, ya que es la única manera de que uno sea imagen especular de otro y a la vez u_r tenga signo opuesto en cada punto homólogo. El mismo razonamiento conduce también a que deben ser $\sigma_{rr}=0$, $\sigma_{\theta\theta}=0$ en todos los puntos. De paso, notemos que pensando en un disco delgado, el mismo razonamiento conduce a que $\sigma_{zz}=0$. Por tanto se trata de uno de los casos excepcionales en que las hipótesis de tensión plana son exactas. La tercera figura 6.13b indica las componentes no nulas de tensión que actúan en las caras del elemento, así como la fuerza unitaria de volumen según el principio de D'Alembert. El equilibrio de fuerzas en la dirección θ se expresa como:

$$(\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta,r} dr)(r+dr)d\theta - \sigma_{r\theta} r d\theta + \\ + \sigma_{\theta r} dr \sin(d\theta/2) + (\sigma_{\theta r} + \sigma_{\theta r,\theta} d\theta) dr \sin(d\theta/2) - \rho r \dot{\Omega} r d\theta dr = 0$$

La anulación de momentos respecto de un punto cualquiera requiere que $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$, similarmente a lo que sucede en coordenadas cartesianas. Los diferenciales de primer orden se cancelan. Despreciando los de orden tres y superiores y dividiendo por $r d\theta dr$ se obtiene:

$$\frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta,r} = \rho r \dot{\Omega}$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes no constantes. Construiremos la solución por superposición de una particular más una general de la homogénea. Como solución de la homogénea ensayamos $\sigma_{r\theta} = Cr^\alpha$, y encontramos por sustitución directa que debe ser $\alpha = -2$. Por tanto, la solución homogénea general es $\sigma_{r\theta} = C/r^2$, donde C es una constante arbitraria. Como solución particular ensayamos nuevamente una función de la forma $\sigma_{r\theta} = C'r^{\alpha'}$, encontrando en este caso que debe ser $\alpha' = +2$, $C' = \rho \dot{\Omega} / 4$, por lo que la solución particular es $\sigma_{r\theta} = r^2 \rho \dot{\Omega} / 4$. La solución de nuestra ecuación diferencial es la superposición:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\rho \dot{\Omega}}{4} r^2 + \frac{C}{r^2}; \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} \equiv 0 \quad (6.31)$$

La constante C debe ser nula en este caso para mantener la continuidad en el origen (podría no serlo para un disco con agujero interior). Con esto, tenemos la solución particular de tensiones debidas a aceleración angular que necesitábamos para el tratamiento de los efectos de inercia realizado en el apartado anterior. Por supuesto, las componentes de tensión en un sistema de coordenadas cartesianas se obtienen mediante las ecuaciones de transformación (1.20) habituales, o equivalentemente utilizando el diagrama bidimensional de Mohr.

Lo cierto es que todavía no hemos abordado formalmente el tratamiento del problema elástico plano en coordenadas polares (se abordará más tarde en este mismo capítulo).

Por ello, y aunque en esencia se trata sólo de un problema matemático de cambio de variables, el desarrollo anterior puede plantear algunas dudas al lector. En particular, hemos obtenido la solución de tensiones en base al equilibrio del elemento, sin asegurar la existencia de un campo de desplazamientos asociado a esas tensiones. Esto hace que la solución de tensiones (6.31) sea simplemente una tentativa que requiere comprobación. Para no diferir dicha comprobación a un epígrafe posterior, apreciemos que el primer invariante (bidimensional) de tensión de nuestra tentativa (6.31), $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \dots$, es idénticamente nulo en todos los puntos del sólido, por lo que también lo será su laplaciano, $\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0$. Por otra parte se comprueba fácilmente que el campo de fuerzas de volumen del problema es adivergente, $\text{div}(\mathbf{X}) = 0$. La ecuación de Beltrami-Michell, $\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \text{cte} \times \text{div}(\mathbf{X})$, resulta por tanto una identidad tanto para T.P. como para D.P. El que esta ecuación se satisface asegura la existencia de un campo de desplazamientos asociado a nuestra solución de tensiones, que por tanto es la correcta.

6.7.- Planteamiento en coordenadas cartesianas.

A continuación presentaremos algunos enfoques para la obtención de soluciones en ciertos tipos de problemas. El sistema cartesiano de coordenadas x_1, x_2 , es claramente idóneo para resolver problemas de sólidos rectangulares, cuyos contornos son de la forma $x_1 = \text{cte}$, $x_2 = \text{cte}$. Los sólidos tipo viga constituyen una categoría importante de problemas con esta geometría. Existen además otros tipos de problemas, que habitualmente tienen todos sus contornos rectos, cuya resolución es factible utilizando coordenadas cartesianas.

Funciones de Airy polinómicas.

Un polinomio en x_1, x_2 , de grado tres o menor siempre será una función biarmónica, que podremos utilizar como función de Airy. La función más general de este tipo es:

$$\phi = Ax^3_1 + Bx^2_1x_2 + Cx_1x^2_2 + Dx^3_2 + Ex^2_1 + Fx_1x_2 + Gx^2_2$$

Se han escrito los términos de tercer grado con coeficientes A, B, C, D, y los de segundo grado con coeficientes E, F, G. No se incluyen términos lineales ni constantes, que no aportarían nada al campo de tensiones (cualquier derivada segunda suya se anula). Las figuras 6.14 recopilan la forma de las tensiones en contornos $x_1 = \text{cte}$ y $x_2 = \text{cte}$ que corresponden a cada término del polinomio, según (6.25). Los valores concretos dependen de los de los coeficientes, y de la posición del origen de coordenadas. En particular, cualquier evolución lineal de tensiones de las mostradas, que se han dibujado de forma que se mantenga su signo en el rango de la figura, tendría un cambio de signo si el origen de coordenadas estuviese dentro del dominio rectangular.

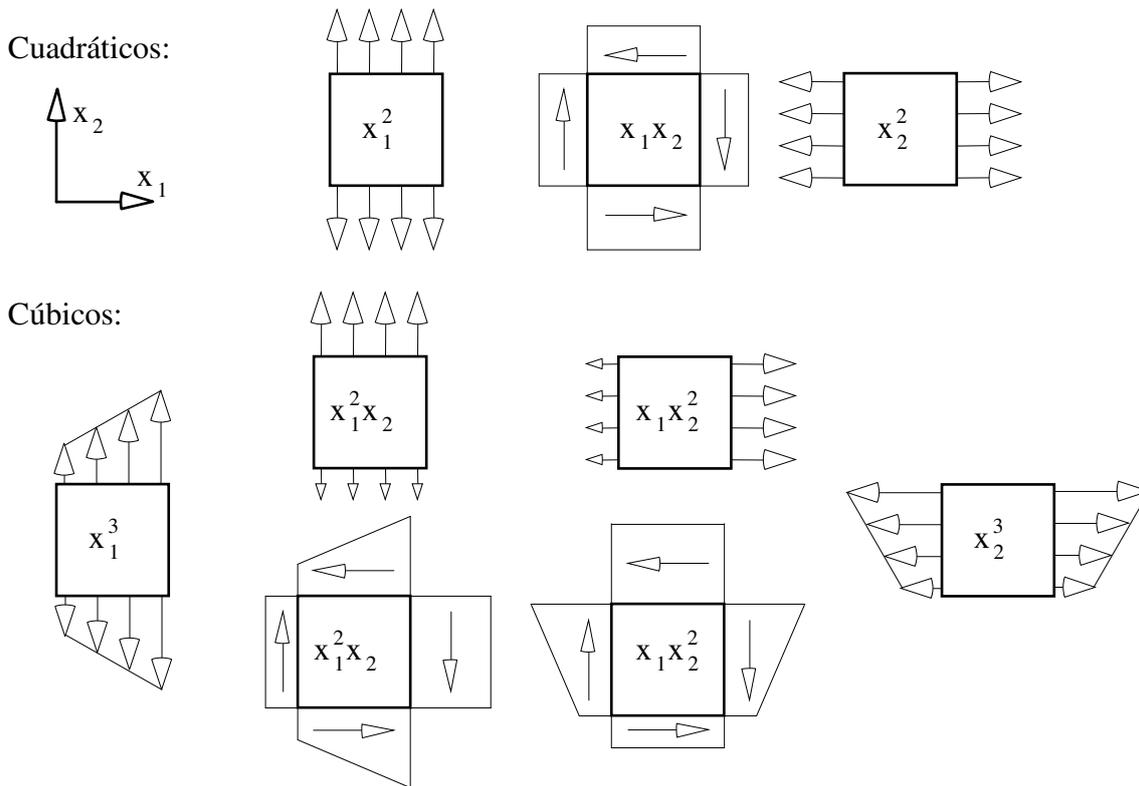


Figura 6.14.- Aportación de términos cuadráticos y cúbicos de ϕ a las tensiones.

La información anterior permite saber inmediatamente si será posible o no ajustar ciertas condiciones de contorno con un polinomio de tercer grado. Por ejemplo, no es posible ajustar con esa limitación las condiciones $\sigma_{22}=-p$ en $x_2 = +a$, $\sigma_{22}=0$ en $x_2 = -a$, $\sigma_{12}=0$ en $x_2=\pm a$ (p , a , ctes), en todo un rango de valores de x_1 , ya que no hay forma de anular la tensión σ_{12} aportada por el término $x_1^2x_2$ de ϕ , que sería necesario introducir. Por supuesto, no estamos limitados a términos polinómicos de orden dos y tres en la función de Airy. Simplemente ocurre que cualquiera de esos términos es biarmónico, y no requieren comprobación al respecto. Los términos de cuarto orden y superiores no son biarmónicos aisladamente, y es necesario imponer que lo sea el conjunto de ellos en el polinomio (los términos de cuarto orden $x_1^3x_2$ y $x_1x_2^3$ si que son biarmónicos excepcionalmente). Por ejemplo, si debemos incluir un término tipo x_1^4 , que no es biarmónico por sí mismo, debemos hacer en alguna forma combinada con la otra coordenada que sí lo sea, como $(x_1^4-x_2^4)$, o $(x_1^4-6x_1^2x_2^2)$.

En general utilizaremos un enfoque semi-inverso de resolución, consistente en observar atentamente las condiciones de contorno y las simetrías del problema para obtener indicios de qué tipo de términos polinómicos serán necesarios. Por ejemplo, si σ_{22} varía linealmente en x_1 , necesitaremos términos en ϕ que contengan x_1^3 . Basándonos en estos indicios propondremos una función ϕ . Conviene que nuestra propuesta sea lo más general posible dentro de lo razonable, porque rara vez resulta ser biarmónica una función que se limite a satisfacer los "indicios" aportados por las condiciones de contorno. Finalmente ajustamos los coeficientes del polinomio de modo que sea biarmónico y satisfaga las condiciones de contorno. Si ello no es posible, es que nuestra

función ϕ propuesta no es lo bastante general, o simplemente no es del tipo adecuado para el problema en cuestión.

Condiciones de contorno en forma débil.

Existen muchos problemas en los que una distribución complicada, o desconocida en detalle, de cargas actúa sobre una pequeña porción del contorno del sólido. En estas situaciones es posible invocar el principio de Saint Venant para obtener una solución útil desde el punto de vista práctico, ignorando la forma particular de la distribución de tensiones en la zona en cuestión, y aproximándola por otra forma que tenga la misma resultante y momento. Esta forma de imponer las condiciones de contorno se conoce como "forma débil". En general, cuando en lugar de imponer condiciones de contorno especificando el valor de la variable en cada punto ("forma fuerte"), se especifica el valor de alguna o algunas integrales suyas en cierto dominio, se dice que se trata de condiciones en forma débil.

Una forma débil es matemáticamente mucho menos exigente que una forma fuerte, por lo que es más probable que una determinada función ϕ que ensayemos resuelva un problema si aceptamos expresar en forma débil algunas de sus condiciones de contorno. Por tanto, desearemos utilizar formas débiles siempre que sea razonable. Como criterio general, debe entenderse que no tendría sentido expresar en forma débil una condición que afectase a una gran zona del contorno del sólido, ya que el principio de Saint Venant no sería de aplicación, y el error asociado a esa aproximación no quedaría confinado a un pequeño dominio.

Un ejemplo: Viga con carga uniforme.

Como ilustración de lo expuesto en los dos apartados anteriores, consideremos el problema de la figura 6.15, que representa una viga simplemente apoyada (así se denomina a la sustentación indicada), con carga uniformemente distribuida en su contorno superior, $x_2=b$. Si p es el valor de la carga por unidad de longitud, la reacción en cada apoyo será pa , como se indica. Para poder ser considerada como tal, el canto ($2b$) de una viga siempre será pequeño comparado con su longitud ($2a$), por lo que los contornos $x_1 = \pm a$ son pequeñas regiones del sólido, y en principio es de esperar poco error si sustituimos las cargas que actúen aquí por otras estáticamente equivalentes. Aplicando la idea anterior, sustituiremos las fuerzas puntuales pa , incómodas de manejar analíticamente, por distribuciones de tensiones tangenciales en los contornos $x_1 = \pm a$. La opción más sencilla sería una tensión tangencial constante.

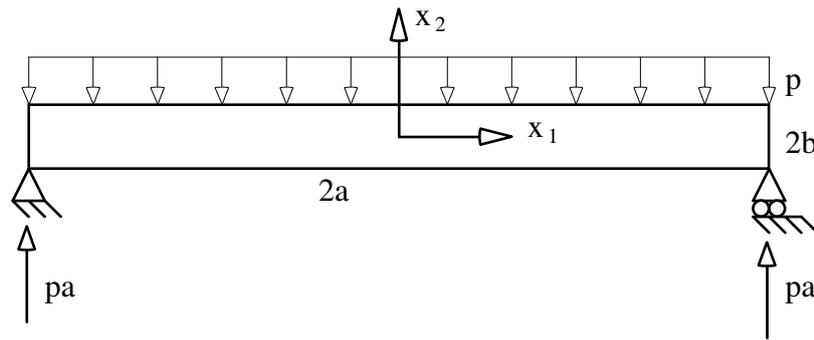


Figura 6.15.- Viga simplemente apoyada con carga uniforme.

Sin embargo, en un elemento diferencial situado en una esquina de la viga (puntos $x_1 = \pm a$, $x_2 = \pm b$), tendríamos un valor no nulo de tensión tangencial en la cara vertical y nulo en la horizontal (esto último según el enunciado, que no deseamos modificar en lo referente a los extensos contornos $x_2 = \pm b$). Tal elemento no podría estar en equilibrio, ya que no se cumpliría la condición $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, lo que no es coherente en nuestro contexto. Para que no se produzca esta incoherencia elegiremos una evolución de tensión tangencial que se anule en $x_2 = \pm b$, como se indica en la figura 6.16.

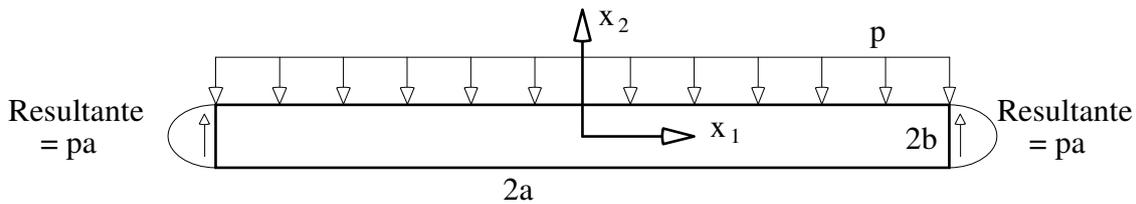


Figura 6.16.- Aproximación de las condiciones de contorno en los extremos.

Lo anterior constituye la aproximación de algunas de las condiciones de contorno en tensiones (las reacciones) por formas débiles en los extremos de la viga, lo que es una forma de decir que consideramos válida cualquier evolución de tensión tangencial en esos extremos, siempre que su resultante tenga el valor correcto, y en este caso que además se anule en las esquinas. Vamos a plantear una solución basada en funciones polinómicas. El polinomio más sencillo que puede adaptarse a los requisitos en $x_1 = \pm a$ es de segundo grado en x_2 . Como $\sigma_{12} = -\phi_{,12}$, hemos de considerar una función de Airy al menos cúbica en x_2 y al menos lineal en x_1 . Por otra parte, las tensiones σ_{22} deben variar al menos linealmente con x_2 , para poder tomar el valor $-p$ en $x_2 = b$, y cero en $x_2 = -b$, y ser constantes al variar x_1 . Como $\sigma_{22} = \phi_{,11}$ tenemos que considerar una función de Airy al menos lineal en x_2 y cuadrática en x_1 .

Las observaciones anteriores nos ofrecen una orientación acerca del tipo de función ϕ que necesitamos, pero no debe esperarse que incluyendo solamente en ϕ los términos que reproducen las condiciones de contorno se obtenga la solución del problema: debemos plantear una ϕ lo bastante general como para que además podamos ajustar la condición de biarmónica. El como dotar a ϕ de generalidad suficiente pero sin llegar a complicar innecesariamente el problema no es una cuestión evidente. En general es preferible incluir términos innecesarios (y encontrar que su coeficiente es cero) a no

incluir términos que hubiesen sido necesarios (y tras un tedioso proceso no obtener más conclusión que la función propuesta no resuelve el problema). Teniendo en cuenta lo anterior, y puesto que los mayores órdenes necesarios son cuadrático en x_1 y cúbico en x_2 , podríamos considerar un polinomio completo de grado $3+2=5$. Un polinomio completo en x_1, x_2 , de grado 5 tiene, tras descartar los términos lineales y constante, 18 coeficientes que debemos ajustar. Podemos simplificar un poco la tarea haciendo intervenir la simetría en tensiones del problema respecto del plano $x_1=0$. En virtud de dicha simetría debe cumplirse:

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \sigma_{11}(-x_1, x_2) ; \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) = \sigma_{22}(-x_1, x_2) ; \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) = -\sigma_{12}(-x_1, x_2)$$

A la vista de (6.25), las condiciones anteriores se satisfacen si la función ϕ es par en x_1 . Por tanto ϕ queda limitada a la forma:

$$\phi = f_1(x_2) + x_1^2 f_2(x_2) + x_1^4 f_3(x_2) + \dots$$

Donde $f_i(x_2)$ son polinomios en x_2 . Nuestra propuesta de función de Airy será pues un polinomio de grado 5 par en x_1 . Como las condiciones de contorno sugieren que será suficiente una variación cuadrática en x_1 , adoptaremos además esta limitación. En problemas que el lector aborde por sí mismo, esto último debe considerarse un riesgo innecesario, ya que no supondría gran complicación incluir los términos x_1^4 , $x_1^4 x_2$. Proponemos en definitiva el siguiente polinomio como función de Airy:

$$\phi = x_1^2 (C_1 x_2^3 + C_2 x_2^2 + C_3 x_2 + C_4) + C_5 x_2^5 + C_6 x_2^4 + C_7 x_2^3 + C_8 x_2^2$$

Intentaremos imponer a este polinomio la condición de biarmonicidad y las condiciones de contorno, vía (6.25). El conjunto de condiciones es:

$$\begin{array}{ll} \sigma_{12}=0 \text{ en } x_2 = \pm b & \int_{-b}^b \sigma_{11} dx_2 = 0 \text{ en } x_1 = \pm a \\ \sigma_{22}=0 \text{ en } x_2 = -b & \int_{-b}^b \sigma_{11} x_2 dx_2 = 0 \text{ en } x_1 = \pm a \\ \sigma_{22}=-p \text{ en } x_2 = +b & \int_{-b}^b \sigma_{12} dx_2 = \pm pa \text{ en } x_1 = \pm a \\ \nabla^4 \phi = 0 & \end{array}$$

Las condiciones dadas en forma integral corresponden a la expresión en forma débil de las condiciones de contorno en los extremos $x_1 = \pm a$ de la barra. Las condiciones en forma fuerte (las que figuran a la izquierda) corresponden a los grandes contornos $x_2 = \pm b$. La condición de biarmonicidad debe imponerse en todo el dominio. Podemos imponer las condiciones en el orden que deseemos, si bien suele resultar operativamente más cómodo comenzar por las condiciones dadas en forma fuerte, y de ellas por las homogéneas (valores dados iguales a cero). Operando así obtenemos:

$$\begin{array}{l} \sigma_{12}=0 = -\phi_{,12} \text{ en } x_2 = \pm b, \Rightarrow 2x_1(3C_1 b^2 \pm 2C_2 b + C_3) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 ; C_3 = -3b^2 C_1 \\ \sigma_{22}=0 = \phi_{,11} \text{ en } x_2 = -b, \Rightarrow 2(-C_1 b^3 - C_3 b + C_4) = 0 \Rightarrow C_4 = -2b^3 C_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Biarmonicidad: } \phi_{,1111} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,2222} = 0 = \\ = 4(6C_1x_2 + 2C_2) + 120C_5x_2 + 24C_6 \Rightarrow C_5 = -C_1/5; C_6 = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = \phi_{,11} = -p \text{ en } x_2 = +b \Rightarrow 2(C_1b^3 + C_3b + C_4) = -p \Rightarrow C_1 = p/(8b^3)$$

Calculado C_1 sabemos también C_3 , C_4 y C_5 . Resumamos lo obtenido hasta aquí:

$$C_1 = p/(8b^3); C_2 = 0; C_3 = -3p/(8b); C_4 = -p/4; C_5 = -p/(40b^3); C_6 = 0$$

Quedan por ajustar las constantes C_7 y C_8 . Pasemos a imponer las condiciones de contorno en forma débil, comenzando por las homogéneas:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \sigma_{11} dx_2 = 0 \text{ en } x_1 = \pm a \\ \Rightarrow \int_{-b}^b (x_1^2 6C_1x_2 + 20C_5x_2^3 + 6C_7x_2 + 2C_8) dx_2 = \left[a^2 3C_1x_2^2 + 5C_5x_2^4 + 3C_7x_2^2 + 2C_8x_2 \right]_{-b}^b = \\ = 4C_8b = 0 \Rightarrow C_8 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \sigma_{11}x_2 dx_2 = 0 \text{ en } x_1 = \pm a \\ \Rightarrow \int_{-b}^b (x_1^2 6C_1x_2 + 20C_5x_2^3 + 6C_7x_2 + 2C_8)x_2 dx_2 = \left[a^2 2C_1x_2^3 + 4C_5x_2^5 + 2C_7x_2^3 \right]_{-b}^b = \\ = a^2p/2 - b^2p/5 + 4b^3C_7 = 0 \Rightarrow C_7 = \left(\frac{1}{20b} - \frac{a^2}{8b^3} \right) p \end{aligned}$$

Con esto tenemos calculadas todas las constantes, pero aún nos queda alguna condición por imponer. Si la misma no se satisficiera para los valores de las C_i ya calculados, concluiríamos que la función ϕ propuesta no resuelve el problema, y pasaríamos a proponer otra más general. Comprobamos que, afortunadamente, sí se satisface:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \sigma_{12} dx_2 = \int_{-b}^b -2x_1(3C_1x_2^2 + C_3) dx_2 = -2x_1 \left[C_1x_2^3 + C_3x_2 \right]_{-b}^b = -2x_1(2C_1b^3 + 2C_3b) = \\ = -2x_1(p/4 - 3p/4) = px_1 \end{aligned}$$

Que efectivamente vale $+pa$ en $x_1=a$, y $-pa$ en $x_1=-a$. La función propuesta satisface todos los requerimientos del problema, y por tanto proporciona la solución del mismo. Seguidamente se detallan las componentes de tensión que derivan de la ϕ calculada:

$$\begin{aligned} \phi = x_1^2 \left[\frac{p}{8b^3} x_2^3 - \frac{3p}{8b} x_2 - \frac{p}{4} \right] - \frac{px_2^5}{40b^3} + p \left[\frac{1}{20b} - \frac{a^2}{8b^3} \right] x_2^3 \\ \sigma_{11} = x_1^2 \frac{3px_2}{4b^3} - \frac{px_2^3}{2b^3} + 3p \left[\frac{1}{10b} - \frac{a^2}{4b^3} \right] x_2 \\ \sigma_{22} = \frac{p}{4b^3} x_2^3 - \frac{3p}{4b} x_2 - \frac{p}{2} \quad \sigma_{12} = -px_1 \left[\frac{3x_2^2}{4b^3} - \frac{3}{4b} \right] \end{aligned}$$

Es interesante observar la evolución de las componentes de tensión anteriores, mostradas a escala en la figura 6.17 para el caso $a=10$, $b=1$, y carga p unidad. La esbeltez, dada por la relación longitud/canto, es pequeña en este caso (10:1), siendo usuales relaciones del orden de 25:1. Precisamente, los efectos que comentaremos ahora son aún más acusados para esbelteces mayores.

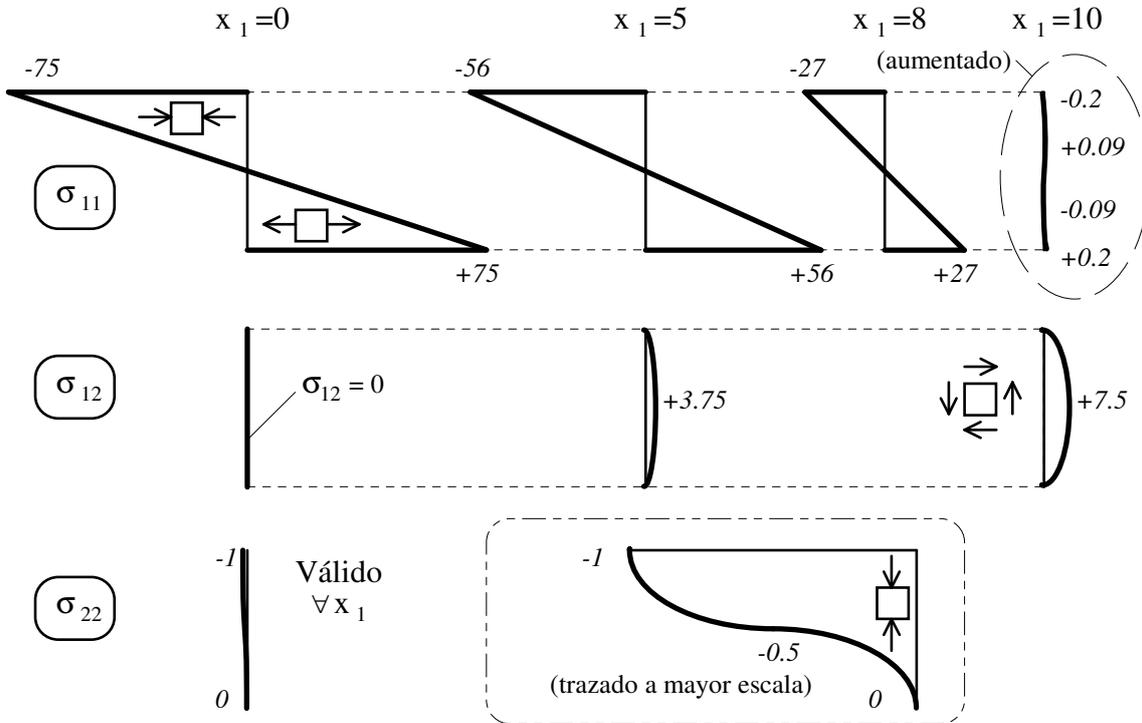


Figura 6.17.- Tensiones en la viga simplemente apoyada. $a=10$, $b=1$, $p=1$.

En las gráficas de tensiones normales σ_{11} , que se dibujan en las secciones $x_1=0$ (mitad de la viga), $x_1=5$, $x_1=8$, y $x_1=10$ (extremo de la viga), y de las demás componentes de tensión, llaman la atención los siguientes aspectos:

- En la inmensa mayoría del sólido, las tensiones σ_{11} son mucho mayores que la carga p aplicada, y que cualquier otra componente de tensión. Esto es una característica general del trabajo a flexión, que es la denominación que recibe la tipología resistente consistente en un elemento esbelto poco sustentado que soporta cargas transversales.
- En el extremo $x_1=10$ de la viga, la tensión σ_{11} obtenida es en cambio muy pequeña, como muestra la acotación de máximos y mínimos (se ha dibujado a escala aumentada para que no se aprecie como cero). Esto es satisfactorio, ya que en el problema original, figura 6.15, las tensiones normales son nulas en esas caras. Nótese que la distribución de σ_{11} es impar en x_2 .
- La evolución de tensiones normales es muy aproximadamente lineal en x_2 para todas las cotas x_1 dibujadas a excepción de la $x_1=10$, lo que evidencia que el término en x_2^3 es prácticamente despreciable salvo en zonas muy próximas a los extremos de la viga.

- Las tensiones tangenciales son pequeñas comparadas con las longitudinales, tienen evolución parabólica en x_2 , y crecen desde valor nulo en $x_1=0$ hasta valores máximos en los extremos de la viga.
- Las tensiones σ_{22} son comparativamente muy pequeñas en todo el sólido, evolucionando desde el valor prescrito no nulo ($p=1$) en $x_2=b$ hasta cero en $x_2=-b$. Es llamativo que se den las menores tensiones precisamente en la dirección en que actúan las cargas exteriores.

El lector tendrá oportunidad de identificar en las hipótesis habituales de Resistencia de Materiales (R.M.) las observaciones anteriores, al estudiar esa disciplina. Para dar noticia de la buena aproximación que se consigue bajo dichas hipótesis (que no entramos a detallar), incluso en una viga de moderada esbeltez como la que hemos analizado, se comentan a continuación los resultados dados por la R.M. para este problema:

$$\sigma_{11}^{\text{RM}} = \frac{3p}{4b^3} x_1^2 x_2 - \frac{3pa^2}{4b^3} x_2 \Rightarrow (\sigma_{11} - \sigma_{11}^{\text{RM}}) = -\frac{px_2^3}{2b^3} + \frac{3px_2}{10b}$$

El error anterior de la solución de R.M. es del orden de 0.5 en nuestro ejemplo, y resulta poco importante en la práctica, ya que afecta a tensiones σ_{11} de valor bastante superior a 20 en casi todo el sólido, como hemos visto. En cuanto a las tensiones tangenciales σ_{12} , las calculadas según la R.M. coinciden con las obtenidas aquí. Las tensiones σ_{22} son directamente obviadas (supuestas nulas) por la R.M.

Como argumento a favor del uso de formas débiles, puede comprobarse que si se sustituye alguna de las condiciones en forma débil que hemos empleado por su correspondiente forma fuerte, por ejemplo si se impone $\sigma_{11}=0$ en $x_1=\pm a$, en lugar de imponer la anulación de su integral, la búsqueda de una función de Airy satisfactoria se complica drásticamente (una solución del tipo de la que hemos encontrado no es capaz de satisfacer ese requerimiento). Si hubiésemos procedido así, habríamos descartado la solución presentada, que en realidad tiene excelente precisión desde el punto de vista de cualquier aplicación práctica.

Se ha mostrado que pueden obtenerse soluciones interesantes mediante funciones de Airy polinómicas. Sin embargo, el número de parámetros independientes entre sí disponibles para ajustar condiciones de contorno no crece tanto como puede parecer en un principio cuando aumentamos el grado del polinomio. En efecto, un polinomio en x_1, x_2 , tiene $n+1$ términos de grado n . Al imponer la condición de biarmonicidad al polinomio, dichos términos pasan a ser de grado $n-4$ (suponemos $n>4$). Nótese que no habrá más términos de grado $n-4$ que los que provengan de términos de grado n en el polinomio original, por lo que la condición de biarmonicidad debe satisfacerse para cada conjunto de términos de grado n independientemente. Aplicada la condición de biarmonicidad, $\nabla^4\phi=0$, aparecerán los $n-3$ términos posibles de grado $n-4$, todos los cuales deben anularse. Esto supone $n-3$ relaciones entre los $n+1$ términos de grado n del polinomio original. Por lo tanto, de los $n+1$ parámetros sólo son independientes $(n+1)-(n-3)=4$ parámetros. Es decir, que cuando decidimos aumentar en uno el grado del polinomio, sólo estamos introduciendo 4 parámetros útiles para ajustar condiciones de contorno, con independencia del grado del polinomio.

Funciones de Airy en forma de serie.

La utilidad del uso de polinomios como funciones de Airy está limitada por la complejidad algebraica que suponen para grados elevados. Esta limitación está agravada por el hecho de que al aumentar el grado del polinomio la complejidad algebraica crece mucho más aprisa que nuestras posibilidades de que el polinomio de solución a nuestro problema, por los motivos expuestos en el párrafo anterior. Además se da la circunstancia de que algunas formas de carga importantes no admiten ser representadas mediante una serie de potencias convergente (por ejemplo una carga concentrada, asociada matemáticamente a la función delta de Dirac). El uso de polinomios será claramente inadecuado en estos casos. A la vista de las limitaciones que se divisan en el uso de polinomios, desearíamos disponer de algún procedimiento que ofrezca mayores garantías de que nuestros esfuerzos serán fructíferos. Un enfoque de utilidad es plantear soluciones en forma de serie de Fourier. Para ilustrar este procedimiento en coordenadas cartesianas nos apoyaremos en el ejemplo de viga simplemente apoyada sometida a carga distribuida de forma arbitraria en su contorno superior, como muestra la figura 6.18. No se indican explícitamente cargas concentradas, aunque podría haberlas.

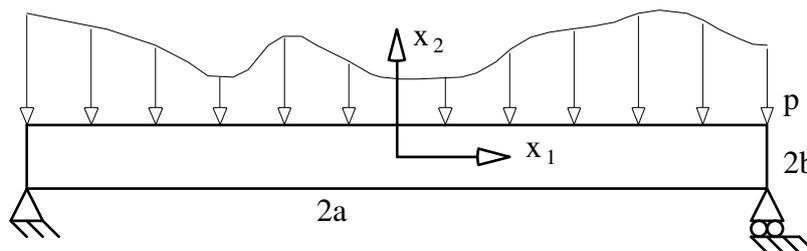


Figura 6.18.- Viga con carga distribuida de forma arbitraria.

La mayor dificultad del problema planteado es aproximar la función de carga $p(x_1)$ en el contorno superior. Consideremos una función de Airy de la forma:

$$\phi = f(x_2) \cos(\lambda x_1)$$

La idea subyacente es que las tensiones que derivan de esta función tendrán un factor tipo coseno (o seno), y superponiendo varias de estas funciones con distintos valores de λ podremos aproximar cualquier evolución de tensiones en x_1 . Impongamos que la función ϕ sea biarmónica:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \phi &= \lambda^4 f(x_2) \cos(\lambda x_1) + f''''(x_2) \cos(\lambda x_1) - 2\lambda^2 f''(x_2) \cos(\lambda x_1) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^4 f(x_2) + f''''(x_2) - 2\lambda^2 f''(x_2) = 0 \end{aligned}$$

Las primas denotan el orden de derivación de f respecto de x_2 . El polinomio característico de esta ecuación diferencial ordinaria de coeficientes constantes es $\lambda^4 + s^4 - 2\lambda^2 s^2 = 0$, cuyas raíces son $s = +\lambda$ (doble), $s = -\lambda$ (doble), por lo que su solución es:

$$f(x_2) = (A + Bx_2)e^{\lambda x_2} + (C + Dx_2)e^{-\lambda x_2}$$

Por tanto, la función $f(x_2)$ contiene cuatro parámetros indeterminados (A,B,C,D). Construimos una función ϕ más general por superposición:

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_2) \cos(\lambda_n x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n + B_n x_2) e^{\lambda_n x_2} + (C_n + D_n x_2) e^{-\lambda_n x_2} \right] \cos(n\pi x_1 / a) \quad (6.32)$$

Hemos elegido $\lambda_n = n\pi/a$ para que ϕ tenga forma de desarrollo en serie de Fourier en $-a < x_1 < +a$. La función anterior es simétrica en x_1 puesto que sólo contiene términos en su coseno. El desarrollo general de una función tendrá también los correspondientes términos tipo seno (antisimétricos respecto de x_1), que reciben idéntico tratamiento, y que omitimos por brevedad. Las componentes de tensión que derivan de (6.32) tienen también forma de serie de Fourier, ya que para el armónico n de la serie tenemos:

$$\sigma_{11} = f_n''(x_2) \cos(\lambda_n x_1) ; \quad \sigma_{22} = -f_n(x_2) \lambda_n^2 \cos(\lambda_n x_1) ; \quad \sigma_{12} = -f_n'(x_2) \lambda_n \operatorname{sen}(\lambda_n x_1)$$

En cada armónico n tenemos cuatro coeficientes (y otros cuatro si hay términos en seno, para los que se aplican idénticas consideraciones), por lo que será posible ajustarlos para que se satisfagan las tres condiciones de contorno homogéneas en los grandes contornos $x_2 = \pm b$. Estas tres condiciones son:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_2 = -b) = 0 &\Rightarrow f_n(-b) = 0 \\ \sigma_{12}(x_2 = +b) = 0 &\Rightarrow f_n'(+b) = 0 \\ \sigma_{12}(x_2 = -b) = 0 &\Rightarrow f_n'(-b) = 0 \end{aligned}$$

Tras imponer las condiciones anteriores aún quedará disponible un parámetro (por ejemplo habremos expresado B_n , C_n , D_n , en función de A_n), que se ajustará para que $f_n(+b)$ tenga el mismo valor que el coeficiente correspondiente del desarrollo en serie de Fourier de la carga actuante el contorno superior. De esta manera podemos ajustar tantos términos como queramos del desarrollo en serie de Fourier de la carga dada, a la vez que se respetan las otras condiciones de contorno en $x_2 = \pm b$. Para realizar lo anterior debemos obviamente disponer del desarrollo en serie de Fourier de la carga, lo que se supone al alcance del lector. Por ejemplo, los coeficientes de una serie de Fourier truncada pueden evaluarse resolviendo el sistema de ecuaciones (ordinarias) resultante de imponer la igualdad entre la función original y la aproximación en serie, en los ceros del primer término descartado de la serie. El desarrollo en serie de Fourier de la carga aplicada ($\sigma_{22}(x_1)$ en $x_2 = b$) incluirá en general un término constante, además de los trigonométricos. Este término no aparece en la superposición de funciones que estamos empleando (nótese que para $n=0$ la ecuación (6.32) degeneraría a un polinomio de grado uno, que no tendría ningún efecto sobre las tensiones). Es por tanto necesario superponer a la función de Airy (6.32) un polinomio de segundo grado para que genere el término de tensión constante mencionado.

Realizado todo lo anterior, hemos de ajustar aún las condiciones de contorno en los contornos $x_1 = \pm a$, lo que haremos en forma débil mediante funciones de tipo polinómico, siguiendo el enfoque del apartado anterior. La solución de este tipo, a superponer a la solución en forma de serie, debe tener σ_{22} y σ_{12} nulas en $x_2 = \pm b$, mientras que σ_{11} y σ_{12}

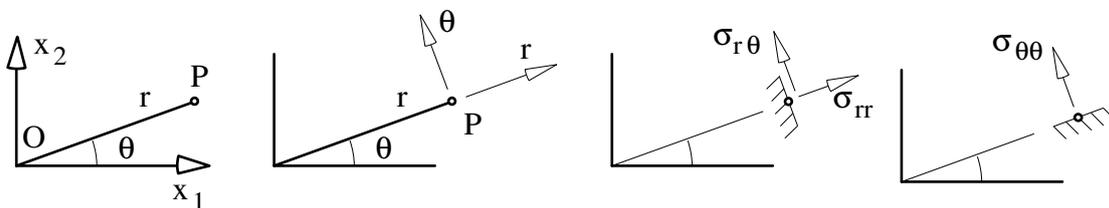
en $x_1 = \pm a$ deben complementar a la solución en serie para que la fuerza resultante y el momento tengan el valor correcto en esos extremos de la viga.

El procedimiento descrito en este apartado muestra un camino de resolución para cualquier problema tipo viga apoyada en sus extremos, si aceptamos imponer las condiciones de contorno en esos extremos en forma débil. Las cargas a lo largo de la viga pueden ser representadas con tanta exactitud como se desee, tomando más términos del desarrollo en serie.

Merece la pena realizar una reflexión final acerca de la aplicabilidad del procedimiento descrito a otros tipos de problemas físicos, con tal de que estén caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales. Dicho procedimiento consiste en buscar una forma sencilla de solución que contenga un parámetro (frecuentemente es buena idea intentar una forma con variables separadas), y construir una solución más general superponiendo soluciones, con un valor distinto del parámetro y una constante multiplicativa cada una, disponible para ser ajustada a conveniencia. El procedimiento es también aplicable cuando el dominio es infinito o semi infinito, en cuyo caso, y supuesto que se empleen funciones armónicas en x_1 , aparecen las integrales asociadas a la transformación de Fourier en lugar de sumatorios de términos armónicos.

6.8.- Planteamiento en coordenadas polares.

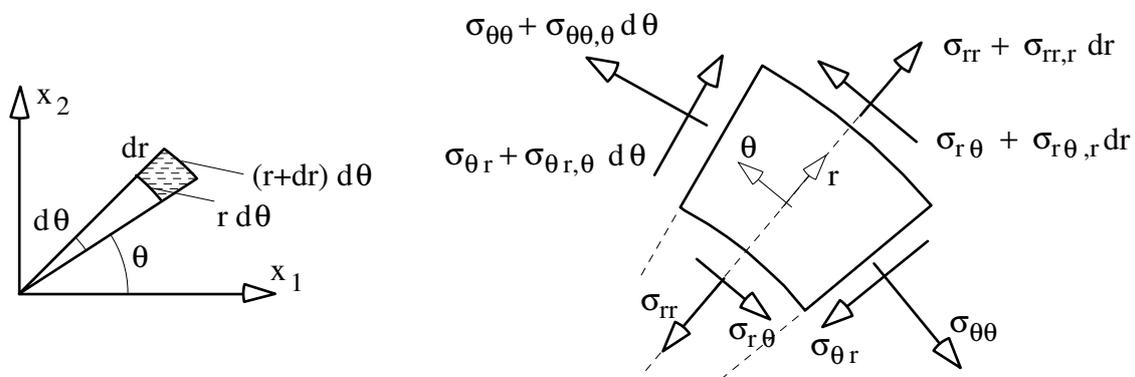
La posición de un punto P del plano puede expresarse mediante coordenadas cartesianas $x_1(P)$, $x_2(P)$, como hemos venido haciendo hasta ahora, pero en muchos problemas es más conveniente elegir otro tipo de coordenadas. En coordenadas polares, la posición de un punto del plano se expresa mediante su distancia a otro punto que llamaremos origen, y el ángulo que forma la recta que pasa por ambos puntos (el origen y el punto P en cuestión) con una dirección fija. Si hemos definido previamente un sistema de coordenadas cartesianas, y hacemos coincidir su origen de O con el origen de coordenadas polares, la posición de un punto P queda determinada por el ángulo θ y la distancia r indicadas en la primera figura 6.19.



Figuras 6.19.- Coordenadas polares y ejemplo de componentes positivas de tensión.

Adicionalmente, definimos dos direcciones asociadas al punto P, que abusando de la notación llamaremos dirección r y dirección θ , y que son respectivamente la dirección obtenida haciendo variar la coordenada r con $\theta = \text{cte}$, y la dirección tangente al círculo obtenido al variar θ con $r = \text{cte}$. Se define un sentido positivo en cada una de estas direcciones, que es el sentido creciente de la coordenada correspondiente, según indican

las flechas en la segunda figura 6.19. Es frecuente denominar a estas direcciones 'eje r ' y 'eje θ ', lo que se hará en lo sucesivo en este texto, aunque estos 'ejes' no se utilicen para especificar la posición de un punto: estas direcciones o 'ejes', que son perpendiculares entre sí, se emplean únicamente para expresar las componentes de las diversas magnitudes vectoriales y tensoriales asociadas al punto considerado. Como ejemplo, las dos últimas figuras 6.19 muestran las componentes del tensor de tensiones en el punto P según los ejes r y θ . Al igual que en coordenadas cartesianas, una componente de tensión es positiva si actúa sobre un plano de normal dirigida en la dirección positiva (alternativamente, negativa) de un eje, y además la propia componente de tensión tiene el sentido del eje al que es paralela (alternativamente, sentido contrario), y es negativa en otro caso. Finalmente, un elemento diferencial de dominio se define de manera que sus caras tengan una coordenada (r o θ) constante, al igual que en cartesianas. La primera figura 6.20 muestra un elemento diferencial de dominio en coordenadas polares.



Figuras 6.20.- Elemento diferencial de dominio y tensiones positivas sobre el mismo.

Existen algunas diferencias destacables entre un sistema de coordenadas como el polar y un sistema de coordenadas cartesianas. En el primero, la dirección de los ejes en los que expresamos las componentes de magnitudes varían con la posición considerada, lo que no ocurre en el segundo. Por tanto al observar una magnitud (vectorial o tensorial) en dos puntos distintos el cambio de valor de sus componentes polares se deberá no sólo a que el punto de observación ha cambiado, sino también a que han cambiado las orientaciones de los ejes en los que expresamos las componentes. La consecuencia más inmediata de lo anterior es que las fórmulas que relacionen magnitudes correspondientes a distintos puntos, como por ejemplo las que expresen alguna propiedad referente a todo un diferencial de sólido, tendrán apariencias distintas en coordenadas polares y en cartesianas. El hecho de que una fórmula contenga derivadas espaciales es el indicativo matemático de que la misma relaciona magnitudes asociadas a puntos distintos, y por lo tanto podemos ya adelantar que las expresiones de las ecuaciones de equilibrio interno, las relaciones deformación - desplazamiento, las ecuaciones de Michell y Beltrami, etc, tendrán diferente aspecto en coordenadas polares que en cartesianas. En cambio, las ecuaciones que expresan la ley de Hooke no contienen derivadas, y la forma de estas ecuaciones no se ve alterada (supuesta la isotropía del material).

Para ilustrar lo anterior, planteemos el equilibrio de un elemento diferencial de sólido. Como referencia, la segunda figura 6.20 muestra las componentes positivas de tensión que actúan en el contorno del elemento diferencial. La suma de fuerzas en la dirección

radial r y en la dirección circunferencial θ deben anularse. Para proyectar fuerzas utilizaremos por ejemplo las direcciones r, θ asociadas al punto medio del diferencial que se indica. Por supuesto, la elección de unas ciertas direcciones para proyectar fuerzas no afecta al hecho de que las direcciones r, θ , y por tanto las de las componentes de tensión, dependan del punto considerado dentro del diferencial. Tendremos respectivamente:

$$\begin{aligned} & (\sigma_{rr} + \sigma_{rr,r} dr)(r + dr)d\theta - \sigma_{rr} r d\theta + [(\sigma_{\theta r} + \sigma_{\theta r, \theta} d\theta) dr - \sigma_{\theta r} dr] \cos \frac{d\theta}{2} - \\ & - [(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta, \theta} d\theta) dr + \sigma_{\theta\theta} dr] \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} + X_r r d\theta dr = 0 \\ & (\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta, r} dr)(r + dr)d\theta - \sigma_{r\theta} r d\theta + [(\sigma_{\theta r} + \sigma_{\theta r, \theta} d\theta) dr + \sigma_{\theta r} dr] \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} + \\ & + [(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta, \theta} d\theta) dr - \sigma_{\theta\theta} dr] \cos \frac{d\theta}{2} + X_\theta r d\theta dr = 0 \end{aligned}$$

Adicionalmente, la igualdad a cero de momentos respecto de un punto cualquiera (por ejemplo el centro del elemento), conduce a $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$. En las igualdades anteriores los diferenciales de primer orden se cancelan exactamente, quedando como significativos los de orden dos. Despreciando los de tercer orden y superiores, aproximando el seno de los diferenciales por los diferenciales y su coseno por la unidad (compruébese que esto produce errores diferenciales de orden superior a dos), agrupando términos y dividiendo entre $r \cdot d\theta \cdot dr$, tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\sigma_{r\theta, \theta}}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + X_r &= 0 \\ \sigma_{r\theta, r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta, \theta} + X_\theta &= 0 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Las dos ecuaciones de equilibrio anteriores (6.33) no tienen apariencia similar a las correspondientes (2.13) en coordenadas cartesianas. Examinando por ejemplo el proceso de obtención de la primera ecuación (6.33) y comparándola con la primera (2.13), podemos apreciar que los términos $\sigma_{rr,r}$; $\sigma_{r\theta, \theta}/r$; X_r ; se corresponden con los $\sigma_{11,1}$; $\sigma_{12,2}$; X_1 (el factor $1/r$ del segundo de ellos es debido a que θ no mide directamente distancias, y no cabe atribuirle significado especial). Los términos σ_{rr}/r ; $\sigma_{\theta\theta}/r$; no tienen contrapartida en la ecuación de equilibrio en cartesianas. El primero está originado por el hecho de que las caras $r=\text{cte}$ del diferencial no tienen ambas la misma longitud, y el segundo por el hecho de que las caras $\theta=\text{cte}$ no son exactamente paralelas entre sí, como anticipábamos en párrafos precedentes. El término $2\sigma_{r\theta}/r$ que aparece en la segunda ecuación (6.33) tampoco tiene contrapartida en la segunda de (2.13). El lector puede comprobar que este término proviene de dos sumandos, cada uno de los cuales admite una interpretación análoga.

Ecuaciones de campo.

Los párrafos precedentes intentan ilustrar desde un punto de vista físico intuitivo las causas por las que las ecuaciones adoptan formas distintas al emplear sistemas de coordenadas de distinto tipo. Para profundizar en la ilustración de tales diferencias,

hemos llegado a obtener las ecuaciones de equilibrio en coordenadas polares planteando directamente el equilibrio del elemento diferencial. Sin embargo, no es necesario seguir razonamientos físicos de este tipo para obtener ninguna de las ecuaciones de campo. De hecho es posible, y mucho más aconsejable desde el punto de vista de la generalidad del procedimiento y de la seguridad operativa, el contemplar la transformación de coordenadas como una simple manipulación matemática, que puede ser más o menos tediosa, pero cuyo planteamiento no requiere apreciar sutiles detalles geométricos (especialmente en todo lo relativo al tensor de deformaciones; los detalles al respecto pueden consultarse por ej. en el texto de Ortiz, cap. 8, o en el de París, cap.7). Seguidamente se presentará la obtención de las ecuaciones de campo empleando un enfoque matemático. El mismo puede aplicarse convenientemente para otros sistemas usuales de coordenadas ortogonales (polares, esféricas, cilíndricas). Es conveniente recordar que el tratamiento clásico para sistemas de coordenadas generales requiere conceptos más elaborados, y no se incluye aquí, y que el lector interesado puede hallar este tratamiento en el texto de Green y Zerna, o en el de Fung, entre otros.

-Ecuaciones de equilibrio-

Las ecuaciones de equilibrio han sido ya obtenidas mediante razonamientos físicos (ecuaciones (6.33)). Como hemos adelantado, no es necesario realizar un razonamiento físico para cada nuevo sistema de coordenadas en que deseemos expresar las ecuaciones. Es suficiente realizarlo en un sistema (cartesiano por ejemplo), y transformar las ecuaciones resultantes mediante manipulaciones puramente matemáticas. Partimos de las ecuaciones de equilibrio (6.12) en coordenadas cartesianas, y la multiplicamos por $a_{\alpha'\alpha}$ que contiene los cosenos directores del cambio de base de los ejes x_1, x_2 (a los que asignamos el papel de ejes sin prima) a los ejes r, θ (ejes con prima), para que las componentes de la ecuación vectorial queden expresadas en los nuevos ejes r, θ :

$$a_{\alpha\alpha'}\sigma_{\alpha\beta,\beta} + X_{\alpha'} = 0$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}) \\ (\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_r \\ X_\theta \end{bmatrix} = 0 \quad (6.34)$$

Usamos la relación $\sigma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\alpha'}\sigma_{\alpha'\beta'}a_{\beta'\beta}$ de cambio de base para expresar las componentes de tensión de la ecuación anterior en ejes r, θ . En forma explícita esta relación es:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \text{sen}^2 \theta - 2\sigma_{r\theta} \text{sen}\theta \cos\theta \\ \sigma_{22} &= \sigma_{rr} \text{sen}^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta + 2\sigma_{r\theta} \text{sen}\theta \cos\theta \\ \sigma_{12} &= (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \text{sen}\theta \cos\theta + \sigma_{r\theta} (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Además necesitamos expresar las derivadas respecto de x_1, x_2 de las componentes de tensión anteriores en función de derivadas respecto de r, θ . Para ello hacemos uso de las relaciones usuales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (6.36)$$

Donde f representa cualquier función, en nuestro caso una componente del tensor de tensiones. Con las ecuaciones (6.34), (6.35) y (6.36) podemos expresar las ecuaciones de equilibrio en coordenadas polares a partir de su expresión en cartesianas. El proceso es tedioso, pero no complicado. Comenzamos buscando la expresión en polares de las cantidades $(\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2})$ y $(\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2})$ que aparecen en (6.34). Por ejemplo utilizando las primeras ecuaciones de (6.35) y (6.36) obtenemos $\sigma_{11,1}$:

$$\sigma_{11,1} = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[\sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \operatorname{sen}^2 \theta - 2\sigma_{r\theta} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right]$$

El cálculo de $\sigma_{12,2}$, $\sigma_{12,1}$, y $\sigma_{22,2}$ se realiza de modo análogo. Tras operar las expresiones de estos sumandos (de complejidad similar a la del $\sigma_{11,1}$ anterior), y realizar las sumas se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= \sigma_{rr,r} \cos \theta - \sigma_{r\theta,r} \operatorname{sen} \theta - \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} \operatorname{sen} \theta + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} \cos \theta + \frac{\sigma_{rr}}{r} \cos \theta - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \cos \theta - 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \operatorname{sen} \theta \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= \sigma_{rr,r} \operatorname{sen} \theta + \sigma_{r\theta,r} \cos \theta + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} \cos \theta + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} \operatorname{sen} \theta + \frac{\sigma_{rr}}{r} \operatorname{sen} \theta - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \operatorname{sen} \theta + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \cos \theta\end{aligned}$$

Finalmente, llevando estas expresiones a (6.34) y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + X_r &= 0 \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + X_\theta &= 0\end{aligned}\quad (6.33)$$

Que por supuesto coinciden con las obtenidas mediante razonamientos físicos en el apartado anterior (de hecho se ha utilizado la misma referencia de ecuación, (6.33)).

-Ecuaciones de compatibilidad-

Es también posible emplear razonamientos físicos para obtener las expresiones que ligan las deformaciones con los desplazamientos en coordenadas polares. Para ello se consideran los movimientos de los vértices de un elemento diferencial como el de la figura 6.20, y se calcula el alargamiento unitario de los lados $r=\text{cte}$ y $\theta=\text{cte}$ (que serán ϵ_{rr} y $\epsilon_{\theta\theta}$ respectivamente), y el cierre del ángulo inicialmente recto formado por estos lados (que será $\gamma_{r\theta}$). Este razonamiento puede consultarse por ejemplo en el texto de París o en el de Ortiz. Para obtener estas relaciones mediante transformaciones matemáticas, partimos de las expresiones correspondientes (3.11) en coordenadas cartesianas:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}; \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}; \quad \varepsilon_{12} = (u_{1,2} + u_{2,1})/2$$

La ley de transformación para vectores, $u_i = a_{ij} u_j$, en nuestro caso se expresa como:

$$u_1 = u_r \cos \theta - u_\theta \sen \theta; \quad u_2 = u_r \sen \theta + u_\theta \cos \theta$$

Aplicando las ecuaciones de derivación (6.36) calculamos las derivadas $u_{1,1}$, $u_{2,2}$, $u_{1,2}$, $u_{2,1}$ en función de r, θ . La expresión de las componentes de deformación resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = u_{1,1} &= (u_{r,r} \cos \theta - u_{\theta,r} \sen \theta) \cos \theta - (u_{r,\theta} \cos \theta - u_{\theta,\theta} \sen \theta - u_r \sen \theta - u_\theta \cos \theta) \frac{\sen \theta}{r} \\ \varepsilon_{22} = u_{2,2} &= (u_{r,r} \sen \theta + u_{\theta,r} \cos \theta) \sen \theta + (u_{r,\theta} \sen \theta + u_{\theta,\theta} \cos \theta + u_r \cos \theta - u_\theta \sen \theta) \frac{\cos \theta}{r} \\ 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} &= 2u_{r,r} \sen \theta \cos \theta + u_{\theta,r} (\cos^2 \theta - \sen^2 \theta) + \\ &+ (u_{r,\theta} (\cos^2 \theta - \sen^2 \theta) - 2u_{\theta,\theta} \sen \theta \cos \theta - 2u_r \sen \theta \cos \theta + u_\theta (\sen^2 \theta - \cos^2 \theta)) \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Nos interesan las componentes del tensor en coordenadas polares, ε_{rr} , etc. Para hallarlas sólo tenemos que transformar las componentes en cartesianas cuyas expresiones acabamos de obtener, utilizando las ecuaciones de transformación usuales para tensores de orden 2, análogas a las (6.35) pero invertidas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{11} \cos^2 \theta + \varepsilon_{22} \sen^2 \theta + 2\varepsilon_{12} \sen \theta \cos \theta \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{11} \sen^2 \theta + \varepsilon_{22} \cos^2 \theta - 2\varepsilon_{12} \sen \theta \cos \theta \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \sen \theta \cos \theta + 2\varepsilon_{12} (\cos^2 \theta - \sen^2 \theta) \end{aligned}$$

Introduciendo las expresiones de ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} , en estas ecuaciones, y simplificando (es llamativa la gran cantidad de términos que se cancelan en el proceso de simplificación), obtenemos:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r}; \quad 2\varepsilon_{r\theta} = u_{\theta,r} + \frac{u_{r,\theta}}{r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (6.37)$$

Las ecuaciones (6.37) anteriores son las relaciones que ligan las componentes de desplazamiento con las de deformación en coordenadas polares, y juegan un papel equivalente a las (3.11) en coordenadas cartesianas.

-Ecuaciones de comportamiento-

La expresión de la ley de comportamiento es análoga en cualquier sistema de coordenadas, con tal que el mismo sea ortogonal. La demostración de ello se realiza independientemente de que se trate de comportamiento bi o tridimensional. Por

generalidad, consideremos la ley de comportamiento en tres dimensiones en coordenadas cartesianas, que en su forma (4.40) es:

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}$$

Como venimos haciendo, denotaremos con primas en los subíndices a las componentes en los nuevos ejes, y $a_{i'j'}$ serán los cosenos entre los ejes de ambos sistemas. Para expresar la ecuación tensorial anterior en los nuevos ejes, multiplicamos toda ella por $a_{i'j'}$:

$$a_{i'j'} \sigma_{ij} = \lambda e a_{i'j'} \delta_{ij} + 2G a_{i'j'} \varepsilon_{ij}$$

El primer miembro es claramente $\sigma_{i'j'}$, y el último término del segundo miembro es $2G \varepsilon_{i'j'}$. Teniendo en cuenta que el valor de e no depende de cuáles sean los ejes (perpendiculares entre sí) considerados, el primer término del segundo miembro es: $\lambda e a_{i'j'} \delta_{ij} = \lambda e a_{i'j'} a_{ij} = (a_{i'j'} a_{ij}) = \lambda e a_{i'j'} a_{ij} =$ (ortogonalidad de la matriz de cosenos) $= \lambda e \delta_{i'j'}$. Por tanto:

$$\sigma_{i'j'} = \lambda e \delta_{i'j'} + 2G \varepsilon_{i'j'}$$

Lo que muestra que la ley de comportamiento mantiene su forma en cualquier sistema de ejes perpendiculares entre sí. En particular, la ley de comportamiento para tensión plana y deformación plana en coordenadas polares adoptará formas análogas a las correspondientes en cartesianas, sin más que reemplazar el subíndice 1 por r , y el subíndice 2 por θ . Por ejemplo tenemos que para deformación plana:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}]; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}]; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G} \sigma_{r\theta} \quad (6.38)$$

Además, siendo z la dirección perpendicular a los ejes r y θ (coincide por tanto con la dirección x_3), se tiene $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0$; $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$.

Para tensión plana se tiene:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}]; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}]; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G} \sigma_{r\theta} \quad (6.39)$$

Y adicionalmente $\varepsilon_{zz} = -\nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/E$; $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$. Otras formas de la ley de comportamiento se obtienen igualmente, sin más que reemplazar los índices correspondientes en las ecuaciones en coordenadas cartesianas.

-Ecuaciones de Beltrami y Michell-

Recordemos que la expresión de esta ecuación para deformación plana en coordenadas cartesianas viene dada por (6.16):

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{X}$$

Para tensión plana el factor que multiplica a $\operatorname{div} \mathbf{X}$ es $-(1+\nu)$. La forma más sencilla de expresar en coordenadas polares esta ecuación es probablemente hacer uso de las fórmulas bien conocidas de la divergencia y el Laplaciano en coordenadas polares:

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{X}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{X}_r}{r} ; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (6.40)$$

El operador Laplaciano ∇^2 en su forma anterior se obtiene a partir de su expresión en cartesianas, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, calculando $\partial^2/\partial x_1^2$ con ayuda de la primera fórmula (6.36), y $\partial^2/\partial x_2^2$ con ayuda de la segunda (6.36). Dado que serán de utilidad posterior, incluimos ahora estos resultados, así como la expresión de $\partial^2/\partial x_1 \partial x_2$, que se obtiene similarmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \cos \theta \left[\cos \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] - \frac{\sin \theta}{r} \left[-\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \sin \theta \left[\sin \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} - \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{\cos \theta}{r} \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} &= \sin \theta \cos \theta \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (6.41)$$

Para obtener la divergencia en la forma dada por (6.40) a partir de su expresión en cartesianas, $\operatorname{div} \mathbf{X} = X_{1,1} + X_{2,2}$, se comienza por expresar \mathbf{X} en coordenadas polares mediante las ecuaciones de transformación usuales (que en nuestro caso son $X_1 = X_r \cos \theta - X_\theta \sin \theta$; $X_2 = X_r \sin \theta + X_\theta \cos \theta$), y después calculando las derivadas, nuevamente con ayuda de (6.36). Con el resultado (6.40), y teniendo en cuenta que $\sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$ (primer invariante de tensión), la transformación de las ecuaciones de Michell y Beltrami a coordenadas polares resulta inmediata:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{-1}{1-\nu} \left(\frac{\partial \mathbf{X}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{X}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{X}_r}{r} \right) \quad (6.42)$$

La expresión anterior corresponde al estado de deformación plana. Para tensión plana la constante que multiplica al paréntesis del segundo miembro es $-(1+\nu)$. Si las fuerzas de volumen \mathbf{X} son adivergentes, $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$, entonces (6.42) adopta la forma de "laplaciano del primer invariante igual a cero", más fácil de recordar, y válida tanto para tensión plana como para deformación plana. Un caso particular frecuente de fuerzas de volumen adivergentes es el caso de fuerzas constantes (típicamente la gravedad). Conviene llamar la atención sobre el hecho de que solamente entendemos que nos encontramos en este

caso si las componentes *cartesianas* son constantes $X_1=\text{cte}$, $X_2=\text{cte}$. Un hipotético caso de componentes polares de \mathbf{X} constantes tendría en general divergencia distinta de cero.

Función de Airy en coordenadas polares.

Para obtener las expresiones que relacionan a la función de Airy con las componentes de tensión en coordenadas polares sólo hay que realizar las transformaciones adecuadas en las expresiones correspondientes en coordenadas cartesianas. Los pasos son los que se enumeran a continuación.

En primer lugar expresamos las componentes cartesianas de tensión σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , en función de las componentes en coordenadas polares mediante las relaciones de transformación habituales:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sen^2 \theta + 2\sigma_{12} \sen \theta \cos \theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{11} \sen^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \sen \theta \cos \theta \\ \sigma_{r\theta} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sen \theta \cos \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sen^2 \theta)\end{aligned}$$

En estas ecuaciones expresamos las componentes cartesianas σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , como derivadas de la función de Airy. Por ejemplo si las fuerzas de volumen son nulas, aplicaremos (6.25) con este fin. Obtenemos así las componentes polares de tensión en función de derivadas segundas de ϕ respecto de x_1, x_2 ($\phi_{,11}$, etc.). Finalmente transformamos las derivadas segundas para que aparezcan derivadas respecto a r, θ , en lugar de respecto a x_1, x_2 . Para esto último utilizamos las relaciones (6.41). Tras un laborioso proceso de agrupar y simplificar términos, se obtiene (suponiendo fuerzas de volumen nulas, $X_i=0$):

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (6.43)$$

Puede comprobarse que las tensiones dadas por (6.43) satisfacen automáticamente las ecuaciones de equilibrio (6.33), para cualquier elección de ϕ . Como sabemos, para que además exista un campo de desplazamientos admisible asociado al campo de tensiones, la función ϕ debe ser biarmónica, lo que observando (6.40) se traduce en:

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] \quad (6.44)$$

Al igual que apuntábamos para coordenadas cartesianas, la solución de un problema elástico se obtiene si se encuentra una función ϕ biarmónica cuyas tensiones asociadas (y en su caso, desplazamientos) se ajusten a las condiciones de contorno del problema.

Función de Airy para problemas planos axisimétricos.

Decimos que un problema plano (tensión o deformación plana) es axisimétrico cuando sus componentes de tensión en coordenadas polares, σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$, no dependen de la coordenada circunferencial θ . Apréciase que esta definición se realiza en base a la tensión y no al desplazamiento, que en general puede depender de θ . Por definición, tenemos entonces que las componentes polares de tensión de los problemas planos axisimétricos depende sólo de r . Debe distinguirse entre esta categoría de problemas y los problemas axisimétricos generales, en los que la dependencia se amplía a las variables " r " y " x_3 " (más típicamente denominados " r " y " z " en un sistema de coordenadas cilíndricas).

Existen situaciones en las que es particularmente evidente que las tensiones no dependerán de θ . Como ejemplo, la primera figura 6.21 muestra la sección de una tubería sometida a presión interior, que constituye el caso más típico de problema plano axisimétrico. La segunda figura muestra un disco macizo girando a velocidad constante Ω entorno a su centro, en el que el carácter radial del efecto centrífugo permite también asegurar la independencia de las componentes de tensión respecto de θ , tratándose por tanto de un problema axisimétrico. Incluso si la velocidad de giro no fuera constante, sabemos por lo expuesto en el epígrafe 6.6 que las tensiones no dependerían de θ .

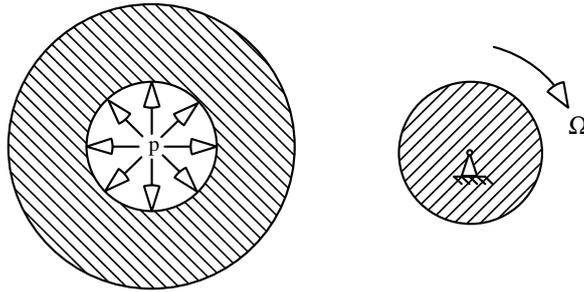
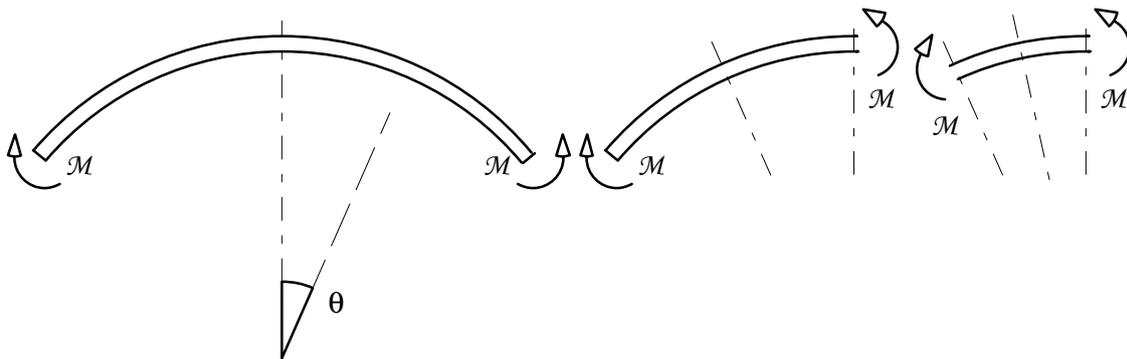


Figura 6.21.- Ejemplos de problemas axisimétricos.

El hecho de que en la clase de problemas que analizamos las componentes de tensión dependan sólo de r , puede inducir incorrectamente a pensar que lo mismo ocurrirá con la función ϕ , ya que de ella derivan las tensiones. Si esto fuese así, sería $\phi=\phi(r)$, y de acuerdo con (6.43), un problema axisimétrico sin fuerzas de volumen siempre tendría $\sigma_{r\theta}$ nula. Sin embargo no hay motivo para que no existan algunas funciones ϕ biarmónicas que dependan de θ (o de r y de θ) cuyas tensiones derivadas según (6.43) dependan sólo de r . Por ejemplo, se comprueba que la sencilla función $\phi=\theta$ es biarmónica, y que de ella derivan tensiones que dependen solamente de r (en particular, $\sigma_{rr}=\sigma_{\theta\theta}=0$; $\sigma_{r\theta}=1/r^2$; compárese con la "solución de la homogénea" en el desarrollo que condujo a (6.31)). No obstante, los problemas axisimétricos planos en los que ϕ depende solamente de r , y que por tanto tienen $\sigma_{r\theta}=0$, constituyen la categoría más usual, y es de la que nos ocuparemos en los párrafos siguientes.

Para apreciar si un problema es axisimétrico en los casos menos obvios, un razonamiento de simetrías sucesivas puede ayudar a dilucidar la cuestión, siempre que la tensión tangencial sea nula. En estos casos, cualquier plano que contenga al eje de simetría debe ser plano de simetría de tensiones (pero recuérdese que si las tensiones

tangenciales $\sigma_{r\theta}$ no fueran nulas, el problema podría ser axisimétrico sin que se cumpla lo anterior, como en el caso del disco giratorio con velocidad no constante, mencionado en el párrafo precedente). Como ejemplo, la primera figura 6.22 muestra una viga de directriz circular sometida a dos momentos en sus extremos. Aceptaremos la aproximación asociada a considerar estos momentos en forma débil, por lo que no especificaremos la distribución concreta de tensión normal $\sigma_{\theta\theta}$ que corresponde a los mismos. Claramente el plano de simetría geométrica lo es también de tensiones. Si aislamos una mitad del sólido (segunda figura 6.22), el equilibrio exige que en el corte exista un momento \mathcal{M} , por lo que, al menos en forma débil, tenemos un nuevo problema simétrico del que a su vez podemos considerar una mitad (tercera figura 6.22) para llegar nuevamente a la conclusión de que es otro problema simétrico, y así sucesivamente. El razonamiento muestra que cualquier plano $\theta=\text{cte}$ será plano de simetría de un subproblema análogo al inicial, por lo que el problema es axisimétrico. Por otra parte, se aprecia claramente que en este problema el campo de desplazamientos dependerá de θ , cualquiera que sea la sustentación que le supongamos para eliminar la posibilidad de movimientos de sólido rígido.



Figuras 6.22.- Simetrías sucesivas en un problema axisimétrico sin tensiones $\sigma_{r\theta}$.

Analizaremos a continuación la categoría más usual de problemas planos axisimétricos, en los que la función potencial depende solamente de r : $\phi=\phi(r)$. La condición de biarmonicidad (6.44) se reduce en este caso a:

$$\nabla^4\phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \left[\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} \right] = \phi_{,rrrr} + \frac{2}{r}\phi_{,rrr} - \frac{1}{r^2}\phi_{,rr} + \frac{1}{r^3}\phi_{,r} = 0 \quad (6.45)$$

Que es una ecuación diferencial ordinaria homogénea de coeficientes variables. Se reduce a coeficientes constantes mediante el cambio de variable $e^t=r$. Tenemos así:

$$\begin{aligned} \phi_{,r} &= \phi_{,t}e^{-t} ; \quad \phi_{,rr} = (\phi_{,tt} - \phi_{,t})e^{-2t} \\ \phi_{,rrr} &= (\phi_{,ttt} - 3\phi_{,tt} + 2\phi_{,t})e^{-3t} ; \quad \phi_{,rrrr} = (\phi_{,tttt} - 6\phi_{,ttt} + 11\phi_{,tt} - 6\phi_{,t})e^{-4t} \end{aligned}$$

Que sustituido en (6.45):

$$\phi_{,tttt} - 4\phi_{,ttt} + 4\phi_{,tt} = 0$$

La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial de coeficientes constantes, $s^4 - 4s^3 + 4s^2 = 0$, tiene dos raíces dobles: $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = s_4 = 2$. Por tanto su solución es: $\phi(t) = At + D + (Bt + C)e^{2t}$. Deshaciendo el cambio de variable tenemos:

$$\phi(r) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D$$

A, B, C, D, son constantes arbitrarias a determinar mediante condiciones de contorno. A esta función potencial corresponden, de acuerdo con (6.43), las tensiones siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \phi_{,r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_{\theta\theta} &= \phi_{,rr} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C ; \quad \sigma_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (6.46)$$

La solución de tensiones (6.46) anterior es válida tanto para tensión plana ($\sigma_{33} = 0$) como para deformación plana ($\sigma_{33} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$). Es posible calcular sin gran complicación el campo de desplazamientos asociado a esta solución de tensiones, dada la sencillez de esta última. El campo de desplazamientos implica a la ley de comportamiento, la cual es distinta en tensión o en deformación plana. Asumiremos por ejemplo tensión plana, y empezamos considerando la deformación radial:

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) = \frac{1}{E} \left[\frac{A}{r^2} (1 + \nu) + 2B(1 - \nu) \ln r + B(1 - 3\nu) + 2C(1 - \nu) \right] = \frac{du_r}{dr}$$

Integramos para obtener u_r (una primitiva de $\ln r$ es $r(-1 + \ln r)$). La misma puede contener un término arbitrario $f(\theta)$ dependiente de θ (ya que su derivada respecto de r será nula):

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-\frac{1 + \nu}{r} A - (1 + \nu) Br + 2(1 - \nu) Br \ln r + 2(1 - \nu) Cr \right] + f(\theta)$$

La componente circunferencial de deformación es:

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) = \frac{1}{E} \left[-\frac{A}{r^2} (1 + \nu) + B(3 + 2 \ln r - \nu(1 + 2 \ln r)) + 2C(1 - \nu) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

Llevando el valor de u_r calculado anteriormente al último término de la ecuación anterior, despejando el valor de $u_{\theta,\theta}$, y simplificando términos, se tiene:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

Similarmente a como se razonó en párrafos precedentes, si una función $u_\theta = \psi(r, \theta)$ satisface la ecuación diferencial anterior, también lo hará la función $\psi + g(r)$, siendo $g(r)$ una función arbitraria. Integrando tenemos:

$$u_{\theta} = \frac{4Br\theta}{E} - \int_0^{\theta} f(\theta)d\theta + g(r)$$

La función $f(\theta)$ se integra desde el origen $\theta=0$ sin pérdida de generalidad, ya que la eventual elección de otro origen simplemente modificaría la constante arbitraria que puede contener $g(r)$. Finalmente hacemos uso de la condición $\sigma_{r\theta}=0$, que implica:

$$2\varepsilon_{r\theta} = 0 = u_{\theta,r} + \frac{1}{r}u_{r,\theta} - \frac{u_{\theta}}{r}$$

Por tanto:

$$\left[\frac{4B\theta}{E} + \frac{dg(r)}{dr} \right] + \left[\frac{1}{r} \frac{df(\theta)}{d\theta} \right] + \left[-\frac{4B\theta}{E} + \frac{1}{r} \int_0^{\theta} f(\theta)d\theta - \frac{1}{r}g(r) \right] = 0$$

Multiplicando este resultado por r obtenemos una suma de términos, cada uno de los cuales depende solamente de r o bien solamente de θ (esta operación no tiene sentido en el punto $r=0$, por lo que los resultados que obtengamos tampoco tendrán sentido en este punto). Para que la suma de una función que depende de r más otra función que depende de θ se anule en todo un rango de valores de las variables, una debe ser en realidad constante de valor K , y la otra también, y de valor $-K$. Tenemos así:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + \int_0^{\theta} f(\theta)d\theta = +K ; \quad r \frac{dg(r)}{dr} - g(r) = -K$$

Siendo K una nueva constante arbitraria. La solución de las ecuaciones integro-diferenciales anteriores se obtiene por simple inspección.

$$f(\theta) = K \text{sen } \theta + L \text{cos } \theta ; \quad g(r) = Mr + K$$

Llevando este resultado a las expresiones de u_i se obtiene el campo de desplazamientos para problemas de tensión plana:

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-\frac{1+\nu}{r} A - (1+\nu)Br + 2(1-\nu)Br \ln r + 2(1-\nu)Cr \right] + K \text{sen } \theta + L \text{cos } \theta$$

$$u_{\theta} = \frac{4Br\theta}{E} + K \text{cos } \theta - L \text{sen } \theta + Mr \quad (6.47)$$

Para problemas de deformación plana el campo de desplazamientos es:

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-\frac{1+\nu}{r} A - (1+\nu)Br + 2(1-\nu-2\nu^2)Br \ln r + 2(1-\nu-2\nu^2)Cr \right] + K \text{sen } \theta + L \text{cos } \theta$$

$$u_{\theta} = (1-\nu^2) \frac{4Br\theta}{E} + K \text{cos } \theta - L \text{sen } \theta + Mr \quad (6.48)$$

Cuando un problema tiene las restricciones de desplazamiento estrictamente suficientes para evitar movimientos de sólido rígido, pueden calcularse a priori las tensiones en todo el contorno (ya que será posible calcular las reacciones en los apoyos planteando el equilibrio del sólido), y por tanto podremos ajustar las constantes del campo de tensiones, A, B, C , empleando sólo las condiciones de contorno en tensiones. En un segundo paso, ajustaremos las constantes adicionales incluidas en el campo de desplazamientos, K, L, M , mediante las condiciones de contorno en desplazamientos. Si existen más restricciones al desplazamiento, este cálculo en dos etapas ya no será posible.

Hay que resaltar la escasez de posibilidades que cubre la solución encontrada bajo la condición $\phi = \phi(r)$, que satisfacen los problemas planos axisimétricos más comunes. Esta solución se concreta en el campo de tensiones (6.46) y en sus desplazamientos asociados (6.47) o (6.48). Examinando la solución de tensiones, vemos que la misma consta de:

- Una presión hidrostática (2C)
- Un término en $1/r^2$, del tipo al encontrado para la "solución de la homogénea" en el problema de la figura 6.13. Este término deberá anularse en los problemas en que exista sólido en el punto $r=0$ ($A=0$ en estos casos)-
- Un término tipo $\ln r$, que está multiplicado por la constante B . Si examinamos la solución de desplazamientos (6.47) apreciamos que u_θ contiene un término lineal en θ multiplicado por B . Debido a ello se obtiene desplazamiento u_θ distinto para el punto (r, θ) y para el punto $(r, \theta + 2\pi)$, que geoméricamente son coincidentes. Por tanto la constante B debe anularse salvo que, como en el problema de la viga curva, el sólido no tenga continuidad al variar θ (en este caso la multiplicidad de desplazamiento puede asignarse a un punto en el que no existe sólido, lo que resulta aceptable).

A la vista de lo anterior, es ciertamente engañoso suponer que bajo la condición $\phi = \phi(r)$ vayamos a hallar una amplia categoría de soluciones. Más realista es asumir que dichas soluciones resolverán un número de problemas tan limitado que acabaremos por reconocerlos en cuanto se nos presenten. Por ello merece la pena revisar brevemente algunos de los problemas más significativos que cabe agrupar en esta categoría, junto con las características más importantes de sus soluciones.

En el problema de una tubería sometida a presión exterior y/o interior, primera de las figuras 6.21, debe ser $B=0$ por continuidad de desplazamientos. Las tensiones σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$ serán del tipo $1/r^2 + \text{cte}$.

El problema de la segunda de las figuras 6.21 es un problema con fuerzas de volumen cuya solución podríamos plantear como suma de una solución particular, cuyas componentes de tensión son típicamente del tipo r^2 (ver epígrafes 6.5 y 6.6), más una solución general sin fuerzas de volumen. De momento supongamos velocidad angular constante para no complicar el razonamiento con la presencia de tensiones $\sigma_{r\theta}$. En la solución general de la homogénea, que será axisimétrica del tipo (6.46), debe ser $A=0$, $B=0$, quedando sólo $C \neq 0$. Las tensiones no nulas, σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, tendrán por tanto la forma $r^2 + \text{cte}$.

Si se tratase del mismo problema de un disco girando a velocidad constante, pero con agujero central interior, no habría motivo para que fuese $A=0$, por lo que las componentes no nulas de tensión (σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$), serían del tipo $r^2 + 1/r^2 + \text{cte}$.

Si el disco girase con aceleración angular no nula, tendríamos además una tensión $\sigma_{r\theta}$ de la forma $r^2 + 1/r^2$ como indica la solución particular (6.31).

Funciones de Airy en forma de serie. La solución de Michell.

En el epígrafe 6.7 se presentó un enfoque basado en desarrollos en serie de funciones, utilizando coordenadas cartesianas en el análisis. Es posible plantear un procedimiento similar cuando se utilizan coordenadas polares, como veremos en este apartado. Centraremos nuestra atención en el problema del tipo "disco con agujero central" (figura 6.23), en que el sólido tiene continuidad a lo largo de la coordenada θ , y asumiremos por ahora que sólo hay condiciones de contorno en tensiones.

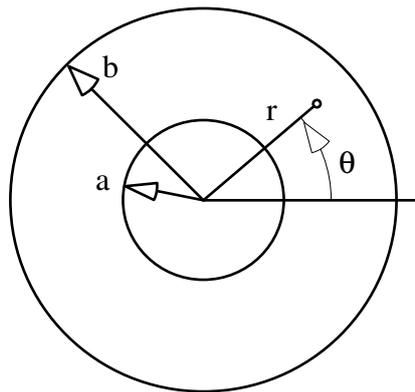


Figura 6.23.- Disco con agujero central.

Pensemos en un desarrollo en serie de funciones periódicas en θ de las tensiones y desplazamientos. Tal desarrollo podrá representar prácticamente cualquier distribución de tensiones (y/o desplazamientos) en los contornos $r=a$, $r=b$. Intentando obtener tensiones y desplazamientos con esta forma, y así una solución general del problema de la figura 6.23, planteamos una función potencial de tensiones de Airy en la forma:

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(r) \sen k\theta \quad (6.49)$$

Vamos a imponer la biarmonicidad de cada término de la forma $h(r)\cos k\theta$, donde $h(r)$ juega el papel f_k (veremos que g_k y f_k tendrán la misma forma, por lo que $h(r)$ juega en realidad el papel de cualquiera de las dos funciones). En el proceso algebraico de derivación son de utilidad las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \right] &= \frac{1}{r} \frac{d^2h}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dh}{dr} & \frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \right] &= \frac{1}{r} \frac{d^3h}{dr^3} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{2}{r^3} \frac{dh}{dr} \\ \frac{d}{dr} \left[\frac{k^2}{r^2} h \right] &= \frac{k^2}{r^2} \frac{dh}{dr} - \frac{2k^2}{r^3} h & \frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{k^2}{r^2} h \right] &= \frac{k^2}{r^2} \frac{d^2h}{dr^2} - \frac{4k^2}{r^3} \frac{dh}{dr} + \frac{6k^2}{r^4} h \end{aligned}$$

Haciendo uso de estas relaciones, y tras operar y agrupar términos, se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^4(h(r)\cos k\theta) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] (h(r)\cos k\theta) = \\ &= \cos k\theta \left[\frac{d^4h}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3h}{dr^3} - \frac{2k^2+1}{r^2} \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{2k^2+1}{r^3} \frac{dh}{dr} + \frac{k^4-4k^2}{r^4} h \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.50)$$

Si hubiesemos considerado un término de ϕ de la forma $h(r)\sen k\theta$, hubiesemos obtenido $\sen k\theta$ (en lugar de $\cos k\theta$) multiplicado por el mismo corchete de la expresión anterior. En ambos casos, para que se satisfaga la igualdad a cero en todo el rango de θ , el corchete debe ser nulo. Esta última condición constituye una ecuación diferencial ordinaria de coeficientes no constantes. La misma se transforma en ecuación de coeficientes constantes mediante el cambio $e^t=r$. Con este cambio es $dt/dr=1/r$, y las derivadas de $h(r)$ tienen la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dr} &= \frac{1}{r} \frac{dh}{dt} & \frac{d^2h}{dr^2} &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{d^2h}{dt^2} - \frac{dh}{dt} \right] \\ \frac{d^3h}{dr^3} &= \frac{1}{r^3} \left[\frac{d^3h}{dt^3} - 3 \frac{d^2h}{dt^2} + 2 \frac{dh}{dt} \right] & \frac{d^4h}{dr^4} &= \frac{1}{r^4} \left[\frac{d^4h}{dt^4} - 6 \frac{d^3h}{dt^3} + 11 \frac{d^2h}{dt^2} - 6 \frac{dh}{dt} \right] \end{aligned}$$

Llevando estos valores de las derivadas al corchete de (6.50), agrupando términos, e igualando a cero tenemos:

$$\frac{d^4h}{dt^4} - 4 \frac{d^3h}{dt^3} + (4 - 2k^2) \frac{d^2h}{dt^2} + 4k^2 \frac{dh}{dt} + (k^4 - 4k^2)h = 0$$

Planteamos la ecuación característica de esta ecuación diferencial de coeficientes constantes, y obtenemos sus raíces:

$$s^4 - 4s^3 + (4 - 2k^2)s^2 + 4k^2s + (k^4 - 4k^2) = 0$$

$$\Rightarrow s_1=k+2; s_2=-k+2; s_3=k; s_4=-k;$$

La solución para un valor dado de k es, por tanto, de la forma:

$$h_k(r(t)) = A_k e^{(k+2)t} + B_k e^{(-k+2)t} + C_k e^{kt} + D_k e^{-kt}$$

Donde A_k, \dots, D_k , son constantes indeterminadas, distintas para cada valor de k . Deshaciendo el cambio de variable tenemos:

$$h_k(r) = A_k r^{k+2} + B_k r^{-k+2} + C_k r^k + D_k r^{-k} \quad (6.51)$$

La solución anterior es válida salvo para $k=0$ y para $k=1$, ya que como se aprecia, en estos casos la ecuación característica tiene raíces múltiples. Para $k=0$ tenemos dos raíces dobles, $s_1=s_2=2$; $s_3=s_4=0$; y la solución es:

$$h_0(r) = (A_0 + B_0 t)e^{2t} + C_0 t + D_0 = A_0 r^2 + B_0 r^2 \ln r + C_0 \ln r + D_0 \quad (6.52)$$

Para $k=1$ las raíces son $s_1=3$; $s_2=s_3=1$; $s_4=-1$. Tenemos por tanto:

$$h_1(r) = A_1 e^{3t} + (B_1 t + C_1)e^t + D_1 e^{-t} = A_1 r^3 + B_1 r \ln r + C_1 r + D_1 / r \quad (6.53)$$

La forma de la función $h_k(r)$, $k=0 \dots \infty$, dada por (6.51), (6.52) y (6.53), es la forma de las funciones $f_k(r)$, y $g_k(r)$, si bien las constantes indeterminadas de g_k serán distintas de las de f_k . Llamaremos A_k, B_k, C_k, D_k , a las asociadas a f_k , y A'_k, B'_k, C'_k, D'_k , a las asociadas a g_k . Hemos determinado así la forma de las funciones que introducimos en el desarrollo en serie (6.49) de la función potencial ϕ . Veamos ahora qué forma tienen las tensiones que derivan de ella según las relaciones (6.43), que reproducimos por comodidad:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{df_k}{dr} - \frac{f_k}{r^2} k^2 \right] \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{dg_k}{dr} - \frac{g_k}{r^2} k^2 \right] \sin k\theta \quad (6.54)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{kg_k}{r^2} - \frac{k}{r} \frac{dg_k}{dr} \right] \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \left[-\frac{kf_k}{r^2} + \frac{k}{r} \frac{df_k}{dr} \right] \sin k\theta \quad (6.55)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2 f_k}{dr^2} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 g_k}{dr^2} \sin k\theta$$

El último sumatorio de (6.55) comienza en $k=0$ por coherencia operativa, aunque el sumando correspondiente es evidentemente nulo. Nos interesa la evolución de las

componentes σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, en círculos $r=\text{cte}$, ya que los contornos de la figura 6.23 tienen precisamente la forma $r=\text{cte}$, y en ellos tendremos que ajustar las condiciones de contorno en tensiones, que vendrán expresadas como valores prescritos de σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ en función de θ , para $r=a$ y $r=b$. Denotaremos como $\sigma_{rr}^*(r=a)$, $\sigma_{rr}^*(r=b)$, $\sigma_{r\theta}^*(r=a)$, $\sigma_{r\theta}^*(r=b)$ a las funciones de θ que expresan las condiciones de contorno del problema. Apreciamos que particularizando (6.54) y (6.55) en $r=a$, $r=b$, las componentes de tensión adoptan forma de desarrollo en serie de Fourier, jugando θ el papel de variable independiente. Las condiciones de contorno en tensiones admitirán a su vez un desarrollo en serie de Fourier en función de θ (cuyos coeficientes podremos calcular mediante las técnicas estándar del análisis armónico) como el siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^*(r=a) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \sen k\theta; & \sigma_{rr}^*(r=b) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \sen k\theta \\ \sigma_{r\theta}^*(r=a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha'_k \sen k\theta; & \sigma_{r\theta}^*(r=b) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \beta'_k \sen k\theta\end{aligned}\quad (6.56)$$

Para un valor dado de k , tendremos en (6.56) los ocho coeficientes conocidos, a_k , b_k , α_k , β_k , a'_k , b'_k , α'_k , β'_k . Cada coeficiente debe ser igual a un corchete de (6.54) o (6.55). Por ejemplo el coeficiente a_k debe ser igual al primer corchete de (6.54) particularizado en $r=a$. Este corchete contendrá los cuatro parámetros de f_k , es decir a A_k , B_k , C_k , y D_k . Podemos realizar ocho identificaciones de este tipo (los cuatro corchetes de (6.54) y (6.55) particularizados en $r=a$ o $r=b$, identificados con el correspondiente coeficiente de (6.56)), lo que proporciona ocho ecuaciones que permitirán calcular los ocho parámetros contenidos en los corchetes a través de f_k y g_k : A_k , B_k , C_k , D_k , A'_k , B'_k , C'_k , y D'_k . En resumen, el cálculo de los parámetros de f_k y g_k se reduce a resolver el siguiente sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas para cada valor de k :

$$\begin{aligned}a_k &= \left[\frac{1}{r} \frac{df_k}{dr} - \frac{f_k}{r^2} k^2 \right]_{r=a}; & a'_k &= \left[\frac{1}{r} \frac{dg_k}{dr} - \frac{g_k}{r^2} k^2 \right]_{r=a} \\ b_k &= \left[\frac{1}{r} \frac{df_k}{dr} - \frac{f_k}{r^2} k^2 \right]_{r=b}; & b'_k &= \left[\frac{1}{r} \frac{dg_k}{dr} - \frac{g_k}{r^2} k^2 \right]_{r=b} \\ \alpha_k &= \left[\frac{kg_k}{r^2} - \frac{k}{r} \frac{dg_k}{dr} \right]_{r=a}; & \alpha'_k &= \left[-\frac{kf_k}{r^2} + \frac{k}{r} \frac{df_k}{dr} \right]_{r=a} \\ \beta_k &= \left[\frac{kg_k}{r^2} - \frac{k}{r} \frac{dg_k}{dr} \right]_{r=b}; & \beta'_k &= \left[-\frac{kf_k}{r^2} + \frac{k}{r} \frac{df_k}{dr} \right]_{r=b}\end{aligned}\quad (6.57)$$

La discusión anterior, así como la forma (6.57) del sistema de ecuaciones, no es válida para $k=0$ y $k=1$, valores para los que las funciones f y g degeneran, en el sentido que se explica a continuación.

Para $k=0$ solamente hay que identificar cuatro coeficientes de (6.56) (a_0 , b_0 , α_0 , β_0) con cuatro corchetes de (6.54) y (6.55). Al plantear dicha identificación resulta lo siguiente:

$$a_o = \left[\frac{1}{r} \frac{df_o}{dr} \right]_{r=a} ; \quad b_o = \left[\frac{1}{r} \frac{df_o}{dr} \right]_{r=b} ; \quad \alpha_o = 0 ; \quad \beta_o = 0$$

Las dos últimas igualdades a cero, las cuales se obtienen porque en (6.55) no existe un término independiente de θ con el que realizar una identificación, suponen una incompatibilidad, puesto que α_o y β_o tienen valores dados a priori que dependen de las condiciones de contorno, y no tienen porqué ser nulos. Apreciamos que la incompatibilidad surge porque la expresión en serie de ϕ que hemos construido es incapaz de representar una tensión $\sigma_{r\theta} = \text{cte}$ en una circunferencia. Esto evidencia una carencia de nuestra expresión de ϕ . Notemos también que en las dos primeras expresiones anteriores desaparece la constante indeterminada D_o . La incompatibilidad no se hubiera dado si en ϕ hubiese habido un término del que derivase tensión $\sigma_{r\theta} = \text{cte}$ en $r = \text{cte}$, término al que hubiésemos podido asignar la desaparecida constante D_o . Tal como hemos propuesto la forma de ϕ , este hipotético término no ha aparecido, y lo cierto es que de momento somos incapaces de determinar las constantes asociadas a $k=0$. Antes de resolver esta carencia, analizaremos alguna otra que también presenta nuestra propuesta (6.49) para ϕ , que a la vista de lo anterior debemos considerar como provisional.

Para $k=1$ la identificación de coeficientes revierte a la forma general (6.57), con f_1 y g_1 ajustándose a la expresión (6.53). Todos los corchetes de (6.57) adoptan para este valor, $k=1$, una misma forma, que salvo el signo es:

$$\frac{1}{r} \frac{dh_1}{dr} - \frac{h_1}{r^2} = (2r)A_1 + (1/r)B_1 - (2/r^3)D_1$$

Es inmediato que lo anterior convierte al sistema (6.57) en incompatible: en efecto, para que se satisficiera tendría que ser $a_1 = \alpha'_1$, $b_1 = \beta'_1$, $a'_1 = -\alpha_1$, $b'_1 = -\beta_1$, relaciones que en general son incompatibilidades, dado que todos esos coeficientes vienen dados por las condiciones de contorno, sin que deban guardar relación entre ellos salvo para asegurar el equilibrio global del sólido. Hay que notar que la constante C_1 , y análogamente C'_1 , ha desaparecido de la expresión de las tensiones (ver ecuación anterior). Hubiese sido preferible haber tenido en ϕ un término en C_1 tipo $f_1 C_1 \cos \theta$, donde f_1 dependiese también de θ (lo mismo cabe decir para C'_1), con lo que el sistema de ecuaciones (que ya no sería exactamente (6.57)) tendría ocho ecuaciones y ocho incógnitas. Lamentaciones aparte, por ahora tampoco podemos determinar los coeficientes asociados a f_1 y g_1 .

Antes de intentar remediar las deficiencias de nuestra ϕ para $k=0,1$, llamemos la atención sobre el hecho de que era esperable que el término D_o (de f_o) así como los términos $C_1 r$ y $C'_1 r$ (de f_1 y g_1 respectivamente), no apareciesen en las tensiones. En efecto, llevando estos términos a (6.49) apreciamos que su aportación a ϕ es una función lineal de x_1 , x_2 (coordenadas cartesianas), que como sabemos siempre desaparece en el proceso de derivación al obtener las tensiones:

$$D_o + C_1 r \cos \theta + C'_1 r \sin \theta = D_o + C_1 x_1 + C'_1 x_2 \quad (6.58)$$

Como última reflexión preliminar, nótese que la forma en serie de la función de tensiones ϕ que hemos encontrado no es degenerada en sí misma, ya que incluso los términos de (6.58) tienen la forma requerida de términos de Fourier, y son independientes de los demás términos del desarrollo. El problema está en que dichos términos producen tensiones nulas, y sus constantes indeterminadas desaparecen de la expresión de las tensiones. Es claro que para remediarlo tendremos que descartar estos términos legítimos del desarrollo en serie de Fourier de ϕ , y poner otros en su lugar, que no serán por tanto legítimos en ese sentido. Esto carece de importancia, ya que nuestro interés es conseguir desarrollos de Fourier completos de las tensiones σ_{rr} y $\sigma_{r\theta}$, no de ϕ que es sólo una herramienta. Los nuevos términos (no legítimos) de ϕ serán útiles en cuanto que proporcionen términos (legítimos) de Fourier de las tensiones.

Los términos degenerantes de ϕ para $k=1$, que son de la forma $C_1 r \cos\theta$ y $C'_1 r \sin\theta$, proceden de la raíz $s=1$, que es eventualmente una raíz doble ($s_2=-k+2=1$, $s_3=k=1$). Buscaremos nuevos términos de ϕ asociados a esta raíz mediante el artificio matemático siguiente. Pensemos por el momento que k pueda ser no entero. Si consideramos un ε arbitrariamente pequeño y tomamos $k=1+\varepsilon$, tendremos las dos raíces $s_2=1-\varepsilon$, $s_3=1+\varepsilon$, muy próximas pero distintas. Si tomamos $k=1-\varepsilon$, las raíces correspondientes serán $s_2=1+\varepsilon$, $s_3=1-\varepsilon$. Escribamos los términos de (6.49) correspondientes a estas raíces s_2 y s_3 para cada uno de estos dos valores de k . Nótese que ninguno de dichos valores de k implica en rigor raíces dobles, por lo que debemos incluir en f_k y g_k los términos del tipo segundo y tercero de (6.51):

$$\begin{aligned} \phi = & \dots + (Ar^{1-\varepsilon} + Br^{1+\varepsilon}) \cos((1+\varepsilon)\theta) + (A'r^{1-\varepsilon} + B'r^{1+\varepsilon}) \sin((1+\varepsilon)\theta) \\ & + (Cr^{1+\varepsilon} + Dr^{1-\varepsilon}) \cos((1-\varepsilon)\theta) + (C'r^{1+\varepsilon} + D'r^{1-\varepsilon}) \sin((1-\varepsilon)\theta) \end{aligned}$$

Perseguiremos que aparezca la derivada de alguno de los términos anteriores. Comenzamos desagrupando términos y hacemos tender ε a cero directamente en los sumandos que contienen A , C , A' , y C' , sobre los que no realizaremos más manipulación:

$$\begin{aligned} \phi = & \dots + (A+C)r \cos\theta + Br^{1+\varepsilon} \cos((1+\varepsilon)\theta) + Dr^{1-\varepsilon} \cos((1-\varepsilon)\theta) + \\ & + (A'+C')r \sin\theta + B'r^{1+\varepsilon} \sin((1+\varepsilon)\theta) + D'r^{1-\varepsilon} \sin((1-\varepsilon)\theta) \end{aligned}$$

Como las constantes son arbitrarias, podemos hacer aparecer la suma y la diferencia de los términos que multiplican a B y a D , definiendo dos nuevas constantes arbitrarias $E=(B+D)/2$, $F=(B-D)/2$ (análogamente para las constantes con prima correspondientes a términos en seno):

$$\begin{aligned} \phi = & \dots + (A+C)r \cos\theta + (A'+C')r \sin\theta + \\ & + E \left[r^{1+\varepsilon} \cos((1+\varepsilon)\theta) + r^{1-\varepsilon} \cos((1-\varepsilon)\theta) \right] + F \left[r^{1+\varepsilon} \cos((1+\varepsilon)\theta) - r^{1-\varepsilon} \cos((1-\varepsilon)\theta) \right] + \\ & + E' \left[r^{1+\varepsilon} \sin((1+\varepsilon)\theta) + r^{1-\varepsilon} \sin((1-\varepsilon)\theta) \right] + F' \left[r^{1+\varepsilon} \sin((1+\varepsilon)\theta) - r^{1-\varepsilon} \sin((1-\varepsilon)\theta) \right] \end{aligned}$$

Dejamos tender ε a cero en los términos en E y E' , que no manipularemos más. Los corchetes de los términos en F y en F' tienen casi la forma de derivada que queremos

conseguir. Para evitar que tiendan a cero definimos una nueva constante arbitraria G de manera que $F=G/(2\varepsilon)$ (también $F'=G'/(2\varepsilon)$):

$$\phi = \dots + (A + C + 2E)r \cos \theta + (A' + C' + 2E')r \sen \theta + \\ + G \frac{r^{1+\varepsilon} \cos((1+\varepsilon)\theta) - r^{1-\varepsilon} \cos((1-\varepsilon)\theta)}{2\varepsilon} + G' \frac{r^{1+\varepsilon} \sen((1+\varepsilon)\theta) - r^{1-\varepsilon} \sen((1-\varepsilon)\theta)}{2\varepsilon}$$

Al tender ε a cero, las fracciones que multiplican a G y a G' representan respectivamente las derivadas respecto de s de las funciones $r^s \cos(s\theta)$, $r^s \sen(s\theta)$, ambas evaluadas en $s=1$. Por tanto:

$$\phi = \dots + (A + C + 2E)r \cos \theta + (A' + C' + 2E')r \sen \theta + \\ + G[r \ln r \cos \theta - r\theta \sen \theta] + G'[r \ln r \sen \theta + r\theta \cos \theta]$$

Analicemos los términos que hemos obtenido. Los términos en $r \cos \theta$, $r \sen \theta$ son de la forma degenerada que ya se obtuvo en (6.53). Los términos en $r \ln r \cos \theta$, $r \ln r \sen \theta$ no degeneran, pero también fueron obtenidos en (6.53). Los términos tipo $r\theta \sen \theta$, $r\theta \cos \theta$, son en cambio novedosos. Las tensiones que derivan de ellos son $\sigma_{rr}=2r^{-1} \cos \theta$, para el primero y $\sigma_{rr}=2r^{-1} \sen \theta$ para el segundo, siendo en ambos casos $\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta\theta}=0$. Estos dos términos de tensión tienen forma correcta de términos de Fourier de σ_{rr} (para $r=\text{cte}$). Claramente, nuestra decisión es eliminar de (6.49) los términos $C_1 r \cos \theta$ y $C'_1 r \sen \theta$ de ϕ , y sustituirlos respectivamente por $C_1 r\theta \sen \theta$ y $C'_1 r\theta \cos \theta$ (de esta manera C_1 sigue estando asociado a un término tipo $\cos \theta$ de σ_{rr} , y C'_1 a uno tipo $\sen \theta$). Con estos nuevos términos C_1 y C'_1 no desaparecen de la formulación, y además se obtiene un sistema compatible de ocho ecuaciones con ocho incógnitas. Es evidente que este sistema de ecuaciones ya no tendrá exactamente la forma (6.57), debido a los nuevos términos introducidos en los corchetes de (6.54) y (6.55). Con esta modificación a ϕ conseguimos por tanto resolver la incompatibilidad en lo que a $k=1$ se refiere.

El término degenerante de ϕ para $k=0$, de la forma constante D_0 , procede de la raíz $s=0$, que eventualmente es una raíz doble ($s_3=s_4=0$). Aplicaremos la misma idea que en los párrafos anteriores para obtener un nuevo término asociado a esta raíz. Con el objeto de no repetir todo el desarrollo, apreciamos que finalmente los cálculos conducirán a que el nuevo término se obtendrá de la derivación respecto de s de $r^s \cos(s\theta)$, y de $r^s \sen(s\theta)$, particularizadas en el valor de la raíz, que esta vez es $s=0$. Obtenemos así términos de la forma $r^s \ln r \cos(s\theta)$, $-r^s \theta \sen(s\theta)$, $r^s \ln r \sen(s\theta)$, $r^s \theta \cos(s\theta)$ que en $s=0$ conducen a $\ln r$ (ya obtenido, ver (6.52)), y θ , que es novedoso. Precisamente de $\phi=\theta$ derivan tensiones $\sigma_{r\theta}=1/r^2$, $\sigma_{rr}=\sigma_{\theta\theta}=0$, que aporta el término de tensión $\sigma_{r\theta}=\text{cte}$ para $r=\text{cte}$, que habíamos echado en falta. Una vez más, nuestra decisión es descartar el término constante D_0 de ϕ , y en su lugar poner uno de la forma $D_0 \theta$. Con esta modificación se resuelve la incompatibilidad también en lo que a $k=0$ se refiere.

Encontrado el modo de resolver las incompatibilidades para $k=0,1$, modificamos convenientemente nuestra propuesta inicial (6.49) de función potencial, que pasa a ser:

$$\begin{aligned}
\phi = & A_0 r^2 + B_0 r^2 \ln r + C_0 \ln r + D_0 \theta + \\
& + [A_1 r^3 + B_1 r \ln r + D_1 / r] \cos \theta + C_1 r \theta \sin \theta + \\
& + [A'_1 r^3 + B'_1 r \ln r + D'_1 / r] \sin \theta + C'_1 r \theta \cos \theta + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} [A_k r^{k+2} + B_k r^{k-2} + C_k r^k + D_k r^{-k}] \cos k\theta + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} [A'_k r^{k+2} + B'_k r^{k-2} + C'_k r^k + D'_k r^{-k}] \sin k\theta
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Tomando tantos términos de ϕ como sea preciso, podemos aproximar con tanta exactitud como deseemos las condiciones de contorno del problema de la figura (6.23), ya que conseguiremos sucesivos términos del desarrollo en serie de Fourier de las condiciones de contorno. Por tanto (6.59) ofrece una solución general de dicho problema, siempre que las condiciones de contorno admitan desarrollo en serie de Fourier. Esta solución general se conoce como solución de Michell, quien la presentó en 1899 como recopilación de soluciones particulares. La tabla siguiente recoge los términos de tensión asociados a cada componente de la función de Airy (6.59). La información así presentada permite escoger unos pocos términos que sean los adecuados para representar las condiciones de contorno de un problema particular.

FUNCIÓN DE AIRY EN COORDENADAS POLARES

COMPONENTES DE TENSIÓN

ϕ	σ_{rr}	$\sigma_{r\theta}$	$\sigma_{\theta\theta}$
(k=0)			
r^2	2	0	2
$r^2 \ln r$	$2 \ln r + 1$	0	$2 \ln r + 3$
$\ln r$	$1/r^2$	0	$-1/r^2$
θ	0	$1/r^2$	0
(k=1)			
$r^3 \cos \theta$	$2r \cos \theta$	$2r \sin \theta$	$6r \cos \theta$
$r\theta \sin \theta$	$2r^{-1} \cos \theta$	0	0
$r \ln r \cos \theta$	$r^{-1} \cos \theta$	$r^{-1} \sin \theta$	$r^{-1} \cos \theta$
$r^{-1} \cos \theta$	$-2r^{-3} \cos \theta$	$-2r^{-3} \sin \theta$	$2r^{-3} \cos \theta$
$r^3 \sin \theta$	$2r \sin \theta$	$-2r \cos \theta$	$6r \sin \theta$
$r\theta \cos \theta$	$-2r^{-1} \sin \theta$	0	0
$r \ln r \sin \theta$	$r^{-1} \sin \theta$	$-r^{-1} \cos \theta$	$r^{-1} \sin \theta$
$r^{-1} \sin \theta$	$-2r^{-3} \sin \theta$	$2r^{-3} \cos \theta$	$2r^{-3} \sin \theta$
(k=n)			
$r^{n+2} \cos n\theta$	$-(n+1)(n-2)r^n \cos n\theta$	$n(n+1)r^n \sin n\theta$	$(n+1)(n+2)r^n \cos n\theta$
$r^{-n+2} \cos n\theta$	$-(n+2)(n-1)r^{-n} \cos n\theta$	$-n(n-1)r^{-n} \sin n\theta$	$(n-1)(n-2)r^{-n} \cos n\theta$
$r^n \cos n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2} \cos n\theta$	$n(n-1)r^{n-2} \sin n\theta$	$n(n-1)r^{n-2} \cos n\theta$
$r^{-n} \cos n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2} \cos n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2} \sin n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2} \cos n\theta$
$r^{n+2} \sin n\theta$	$-(n+1)(n-2)r^n \sin n\theta$	$-n(n+1)r^n \cos n\theta$	$(n+1)(n+2)r^n \sin n\theta$
$r^{-n+2} \sin n\theta$	$-(n+2)(n-1)r^{-n} \sin n\theta$	$n(n-1)r^{-n} \cos n\theta$	$(n-1)(n-2)r^{-n} \sin n\theta$
$r^n \sin n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2} \sin n\theta$	$-n(n-1)r^{n-2} \cos n\theta$	$n(n-1)r^{n-2} \sin n\theta$
$r^{-n} \sin n\theta$	$-n(n+1)r^{-n-2} \sin n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2} \cos n\theta$	$n(n+1)r^{-n-2} \sin n\theta$

El cálculo de los desplazamientos correspondientes a un determinado término de ϕ , ecuación (6.59), se realiza mediante integración de las deformaciones asociadas a las componentes de tensión que derivan del mismo. El proceso siempre sigue los mismos pasos empleados para obtener los desplazamientos de los problemas axisimétricos (6.47) o (6.48). Seguidamente se resume este proceso:

Se comienza calculando las deformaciones a partir de las tensiones a través de la ley de comportamiento. Realizado esto, se tienen las deformaciones en función de derivadas de ϕ , con sus coeficientes indeterminados correspondientes.

Seguidamente emplea la primera ecuación (6.37) para obtener u_r como la integral de ϵ_{rr} más una función de θ indeterminada.

A continuación se emplea la segunda (6.37), en la que se introduce la expresión de $\epsilon_{\theta\theta}$, así como la recién calculada de u_r . Con la ecuación así conseguida se calcula u_θ mediante integración de $u_{\theta,\theta}$. A la primitiva que se encuentre debe sumársele una función de r indeterminada.

Finalmente se sustituyen las expresiones encontradas de u_r , u_θ , así como $\epsilon_{r\theta}$, en la tercera (6.37). Esto produce una ecuación que puede escribirse de forma que cada sumando dependa solamente de r o solamente de θ . Se reescribe la ecuación con todos los términos que dependen de r en un miembro, y los que dependen de θ en el otro, y se razona que dicha ecuación sólo puede cumplirse en todo un rango de valores de r y θ si ambos miembros son constantes. Se iguala pues cada miembro a la misma constante arbitraria. Esto proporciona dos ecuaciones diferenciales desacopladas, una en r y otra en θ . La integración de una de ellas permite calcular la función indeterminada de r , y la integración de la otra la función indeterminada de θ (en ambos casos salvo una constante indeterminada).

Del proceso de integración anterior resultan tres constantes indeterminadas, cuyos términos siempre representan un movimiento de sólido rígido, como cabía esperar (ver epígrafe 3.6). Dichas constantes pueden calcularse mediante la imposición de condiciones de contorno en desplazamientos.

Los desplazamientos obtenidos mediante el procedimiento descrito para las tensiones asociadas a cada término de (6.59), se recogen en la tabla siguiente. Nótese que los desplazamientos dependen de las constantes elásticas, y también de si el problema es de tensión o de deformación plana, como esperábamos. El movimiento arbitrario como sólido rígido mencionado en el párrafo anterior no se reproduce en la tabla por concisión. Se debe tener presente por tanto que a los desplazamientos que figuran siempre podría sumárseles un movimiento como sólido rígido, que en coordenadas polares tiene la forma:

$$u_r = A \cos \theta + B \sin \theta ; \quad u_\theta = -A \sin \theta + B \cos \theta + Cr$$

FUNCIÓN DE AIRY EN COORDENADAS POLARES

COMPONENTES DE DESPLAZAMIENTO

ϕ	$2Gu_r$	$2Gu_\theta$
(k=0)		
r^2	$(\kappa - 1)r$	0
$r^2 \ln r$	$(\kappa - 1)r \ln r - r$	$(\kappa + 1)r\theta$
$\ln r$	$-1/r$	0
θ	0	$-1/r$
(k=1)		
$r^3 \cos \theta$	$(\kappa - 2)r^2 \cos \theta$	$(\kappa + 2)r^2 \sin \theta$
$r\theta \sin \theta$	$\frac{1}{2}[(\kappa - 1)\theta \sin \theta - \cos \theta +$ $+(\kappa + 1)\ln r \cos \theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa - 1)\theta \cos \theta - \sin \theta -$ $-(\kappa + 1)\ln r \sin \theta]$
$r \ln r \cos \theta$	$\frac{1}{2}[(\kappa + 1)\theta \sin \theta - \cos \theta +$ $+(\kappa - 1)\ln r \cos \theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa + 1)\theta \cos \theta - \sin \theta -$ $-(\kappa - 1)\ln r \sin \theta]$
$r^{-1} \cos \theta$	$r^{-2} \cos \theta$	$r^{-2} \sin \theta$
$r^3 \sin \theta$	$(\kappa - 2)r^2 \sin \theta$	$-(\kappa + 2)r^2 \cos \theta$
$r\theta \cos \theta$	$\frac{1}{2}[(\kappa - 1)\theta \cos \theta + \sin \theta -$ $-(\kappa + 1)\ln r \sin \theta]$	$\frac{1}{2}[-(\kappa - 1)\theta \sin \theta - \cos \theta -$ $-(\kappa + 1)\ln r \cos \theta]$
$r \ln r \sin \theta$	$\frac{1}{2}[-(\kappa + 1)\theta \cos \theta - \sin \theta +$ $+(\kappa - 1)\ln r \sin \theta]$	$\frac{1}{2}[(\kappa + 1)\theta \sin \theta + \cos \theta +$ $+(\kappa - 1)\ln r \cos]$
$r^{-1} \sin \theta$	$r^{-2} \sin \theta$	$-r^{-2} \cos \theta$
(k=n)		
$r^{n+2} \cos n\theta$	$(\kappa - n - 1)r^{n+1} \cos n\theta$	$(\kappa + n + 1)r^{n+1} \sin n\theta$
$r^{-n+2} \cos n\theta$	$(\kappa + n - 1)r^{-n+1} \cos n\theta$	$-(\kappa - n + 1)r^{-n+1} \sin n\theta$
$r^n \cos n\theta$	$-nr^{n-1} \cos n\theta$	$nr^{n-1} \sin n\theta$
$r^{-n} \cos n\theta$	$nr^{-n-1} \cos n\theta$	$nr^{-n-1} \sin n\theta$
$r^{n+2} \sin n\theta$	$(\kappa - n - 1)r^{n+1} \sin n\theta$	$-(\kappa + n + 1)r^{n+1} \cos n\theta$
$r^{-n+2} \sin n\theta$	$(\kappa + n - 1)r^{-n+1} \sin n\theta$	$(\kappa - n + 1)r^{-n+1} \cos n\theta$
$r^n \sin n\theta$	$-nr^{n-1} \sin n\theta$	$-nr^{n-1} \cos n\theta$
$r^{-n} \sin n\theta$	$nr^{-n-1} \sin n\theta$	$-nr^{-n-1} \cos n\theta$

$$\text{Deformación Plana: } \kappa = 3 - 4\nu ; \quad \text{Tensión Plana: } \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

Los desplazamientos pueden incluir además un movimiento de sólido rígido.

Conviene llamar la atención sobre el hecho de que algunos términos u_r o u_θ de la tabla de desplazamientos son lineales en θ , como por ejemplo el correspondiente al conocido término axisimétrico $\phi=r^2 \ln r$. Estos términos son en realidad incompatibles con la continuidad de desplazamientos si la geometría es la de la figura 6.23, ya que en ella la solución debe ser válida en todo el rango $0-2\pi$ de valores de θ , y se obtendrían desplazamientos distintos para $\theta=0$ y $\theta=2\pi$ (para un r dado), que describen el mismo punto del sólido. Los términos de este tipo son en cambio admisibles si el sólido tiene contornos $\theta=\text{cte}$, es decir, presenta discontinuidad al variar θ con $r=\text{cte}$. En estos casos sólo se requiere que la solución matemática de desplazamientos sea univaluada en el rango de θ ocupado por el sólido. Al ser éste menor que 2π , no se incurrirá en multivaluación. Si se prefiere, puede también razonarse que el hipotético punto de multivaluación de desplazamientos estaría fuera del sólido, lo que es aceptable físicamente. En resumen, si el sólido tiene contornos $\theta=\text{cte}$, todos los términos de ϕ propuestos en (6.59) son en principio posibles. En el caso contrario, hay que descartar los términos de ϕ que tienen asociados desplazamientos lineales en θ . Por supuesto, en un caso como $\phi=r\theta \sin\theta$, es preciso no utilizar ninguno de los términos de tensión y desplazamiento que derivan de este término de ϕ , ya que en general hay que incluir todos los términos que derivan de un término de ϕ dado (porqué?).

-Un ejemplo de aplicación-

La función de Airy (6.59) ha sido obtenida con la intención de poder resolver cualquier problema de contorno sobre la geometría de la figura 6.23, mediante una solución en serie. Aparte de esto, hallaremos la solución de muchos problemas de interés seleccionando unas pocas componentes de la función de Airy (6.59). Por ejemplo, los problemas planos axisimétricos (ver páginas 6.52 y siguientes), quedan recogidos en las cuatro funciones ϕ correspondientes a $k=0$.

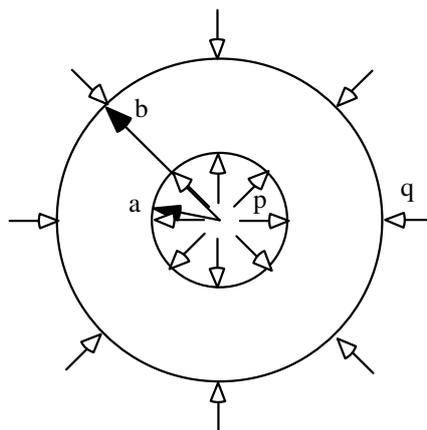


Figura 6.24.- Tubería sometida a presión interior y exterior

Consideremos Como ejemplo el problema de una tubería sometida a presión interior y exterior como indica la figura 6.24. Las tensiones de contorno son independientes de θ , por lo que elegiremos términos de ϕ tipo $k=0$ de la tabla. Como el sólido tiene continuidad al variar θ , descartamos $r^2 \ln r$, que conduciría a desplazamientos multivaluados. Como $\sigma_{r\theta}$ es cero en $r=a$, $r=b$, descartamos también θ de la función ϕ .

Nos quedamos por tanto con la siguiente propuesta para ϕ , de la que derivan las tensiones que también se indican:

$$\phi = Ar^2 + B \ln r$$

$$\sigma_{rr} = 2A + B/r^2 ; \quad \sigma_{r\theta} = 0 ; \quad \sigma_{\theta\theta} = 2A - B/r^2$$

Las constantes indeterminadas A y B se calculan mediante las condiciones de contorno, que en este caso son $\sigma_{rr} = -p$ en $r=a$, $\sigma_{rr} = -q$ en $r=b$:

$$\begin{aligned} 2A + B/a^2 &= -p \\ 2A + B/b^2 &= -q \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{pa^2 - qb^2}{2(b^2 - a^2)} ; \quad B = (p - q) \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}$$

Los desplazamientos se obtienen como suma de los asociados a cada componente de ϕ incluida en la solución, mas un eventual movimiento arbitrario como sólido rígido, que obviamos incluir:

$$2Gu_r = A \frac{2-2\nu}{1+\nu} r - B \frac{1}{r} ; \quad u_\theta = 0$$

La solución del problema tiene las características básicas que cabía anticipar a la vista de sus simetrías: los desplazamientos debían depender solamente de r (salvo un movimiento de sólido rígido), ya que si giramos la figura 6.24 en torno al su centro un ángulo cualquiera, se obtiene exactamente el mismo problema. Las tensiones y deformaciones habían de ser como consecuencia también independientes de θ , tal como se ha obtenido. Este problema es típicamente axisimétrico. Puede comprobarse que se obtienen los mismos desplazamientos y tensiones a partir de la solución axisimétrica (6.46), (6.48).

Siguiendo los pasos básicos utilizados en este ejemplo, es decir, seleccionando componentes de la Función de Airy que convengan para satisfacer las condiciones de contorno, se puede dar solución a muchos problemas interesantes, no necesariamente axisimétricos, y no necesariamente con geometría tipo anillo (por ejemplo pueden resolverse algunos problemas con bordes $\theta = \text{cte}$).

Bibliografía:

- BARBER, J.R., "Elasticity", Kluwer Academic Publishers
 TIMOSHENKO, S. y GOODIER, J.N., "Teoría de la Elasticidad", Urmo
 ORTIZ, L., "Elasticidad", ETSII-Univ. Politécnica de Madrid.
 GREEN, A.E., y ZERNA, W., "Theoretical Elasticity", Dover Publications
 FUNG, Y.C., "Foundations of solid mechanics", Prentice-Hall
 PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla

Capítulo 7

Introducción a los métodos aproximados

El planteamiento analítico del problema elástico con geometría y condiciones de contorno complicadas resulta inabordable en la práctica. Por ello se han desarrollado métodos aproximados que permiten obtener soluciones suficientemente precisas de una forma asequible. El objeto de este capítulo es presentar someramente algunos de estos métodos en el ámbito de la Teoría de la Elasticidad Lineal.

7.1.- Introducción.

A la vista de lo expuesto en los capítulos 5 y 6, la resolución del problema elástico mediante enfoques analíticos solamente es abordable en casos con geometría y/o condiciones de contorno más bien sencillos. Cuando no se dan estas condiciones de simplicidad, es necesario recurrir a métodos aproximados. Es posible aplicar métodos estándar de integración aproximada de ecuaciones diferenciales a las ecuaciones diferenciales del modelo elástico. Por ejemplo es posible plantear la integración de las Ecuaciones de Navier mediante diferencias finitas. Sin embargo han alcanzado mayor aceptación, debido a su mayor eficiencia, algunos métodos basados en los teoremas integrales presentados en el capítulo 5.

Entre estos métodos, el procedimiento más extensamente utilizado es el Método de los Elementos Finitos (MEF), que será presentado brevemente más tarde. El MEF se engloba dentro de los conocidos como Métodos de Equilibrio, cuya característica común es asegurar desde el principio que el campo de desplazamientos va a tener las propiedades deseables (eligiendo una tipología adecuada), plantearlo en función de algunas incógnitas o parámetros a determinar, y obtener tantas ecuaciones como sea necesario imponiendo condiciones de equilibrio, bien sea directamente (como en el popular cálculo matricial de estructuras de barras mediante el método directo de rigidez), o bien a través de la expresión integral del Principio de los Desplazamientos Virtuales, planteando tantos estados virtuales como sea preciso. Las aproximaciones de Galerkin, del MEF, y de Rayleigh-Ritz, pueden plantearse de este modo. Las incógnitas a calcular pueden ser los parámetros indeterminados que hayamos previsto en el campo de desplazamientos que hayamos propuesto, o bien otras incógnitas que hayamos utilizado para formular el problema.

Otra posible alternativa para obtener "tantas ecuaciones como deseemos" es plantear el segundo teorema de reciprocidad para tantos estados virtuales distintos como sea preciso. Esta elección persigue que deban evaluarse solamente integrales de contorno, denominándose genéricamente "métodos de contorno" a los que gozan de esta particularidad. Una condición suficiente para que esto ocurra es que el problema no tenga cargas de volumen y que los estados virtuales se elijan también sin cargas de

volumen (métodos de Trefftz). Cuando los estados virtuales se eligen haciendo variar el punto de aplicación de una fuerza concentrada que actúa en un medio infinito (la solución de este problema se llama "solución fundamental de Kelvin"), también es posible evitar las integrales de dominio del segundo teorema de reciprocidad. Esta técnica, es la base del "Método de los Elementos de Contorno" (MEC), que ha sido desarrollado a partir de los años 70. En todo caso, los métodos de contorno permiten obtener una solución del problema en función tan solo de los valores de las variables en el contorno, reduciéndose así en uno la dimensionalidad del problema (si el sólido es tridimensional su contorno es bidimensional, y si es bidimensional el contorno es monodimensional). Este es el atractivo principal de los métodos de contorno, que son claramente idóneos cuando es suficiente conocer los valores de las variables en el contorno.

Entre algunos otros más, los métodos de Galerkin, Trefftz, Elementos Finitos y Elementos de Contorno enumerados en los párrafos precedentes pueden considerarse como particularizaciones de una técnica más general, conocida como "residuos ponderados". Resumimos seguidamente las ideas básicas de esta técnica. Sea $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$ la incógnita generalizada de nuestro problema (las componentes de desplazamiento en el problema elástico), y \mathbf{x} la variable independiente generalizada (las coordenadas espaciales). Se toma la ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales que rige el problema, escrita en forma de igualdad a cero, simbólicamente $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}=0$, siendo \mathbf{Z} el operador en derivadas que corresponda. Seguidamente se forma el producto de $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}$ por una función $\psi(\mathbf{x})$ que elijamos arbitrariamente, llamada función de ponderación, función de peso o función proyectante, y que tendrá tantas componentes escalares como ecuaciones diferenciales tengamos. Finalmente se integra el producto en el dominio de observación:

$$\int_V (\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u})\psi(\mathbf{x})dV \quad (7.1)$$

Está claro que si introdujésemos en \mathbf{u} una solución exacta de $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}=0$, esa integral se anularía para cualquier ψ . Recíprocamente, si una cierta función \mathbf{u} anula la integral para cualquier ψ imaginable, entonces esa \mathbf{u} debe satisfacer $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}=0$ (en efecto, si $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}$ no fuese cero en un punto o una región, podríamos inmediatamente encontrar una ψ que hiciese no nula la integral). Precisamente desconocemos esa solución para \mathbf{u} , pero podemos "apostar" por una función \mathbf{u} que contenga parámetros indeterminados, e imponer la igualdad a cero de la integral para tantas funciones ψ distintas como necesitemos (para obtener tantas ecuaciones como incógnitas). La solución que obtengamos no será en general exacta, dado que no anulará la integral para cualquier ψ , pero esperamos que sea una aproximación razonable, ya que al menos la anulará para el conjunto de funciones ψ que hemos elegido. El nombre de esta técnica ("residuos ponderados") proviene de que al introducir en la ecuación diferencial una función $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ que no sea solución exacta, $\mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}$ no será nulo, sino igual a un cierto error o "residuo", el cual se "pondera" con la función ψ , imponiéndose finalmente la anulación de la integral de ese "residuo ponderado".

En la aplicación del método de residuos ponderados suelen incluirse algunas manipulaciones adicionales a la integral (7.1). En particular, es habitual integrar por partes una o varias veces, y utilizar cada vez el teorema de la divergencia para

transformar integrales de divergencias en integrales de contorno. Con esto se consigue que en la integral de volumen remanente se reduzca el orden de derivación de \mathbf{u} , a cambio de que aparezcan derivadas de $\boldsymbol{\psi}$. Por una parte, esto tiende a facilitar la imposición de condiciones de contorno "naturales", dadas en función de derivadas de \mathbf{u} (como por ejemplo son las tensiones prescritas), y por otra parte reduce las exigencias en cuanto a orden de derivabilidad de nuestra función \mathbf{u} . Es llamativo que puedan obtenerse así soluciones \mathbf{u} con orden de continuidad menor que el exigido por las ecuaciones diferenciales originales ("orden de continuidad" = orden de la mayor derivada que permanece acotada en todos los puntos del dominio). Se llaman "formas débiles" a este tipo de formulaciones que posibilitan encontrar soluciones de orden de continuidad menor al exigido por las ecuaciones diferenciales originales.

Las maneras más ventajosas de integrar por partes el "residuo ponderado" de las ecuaciones de equilibrio interno ya han sido elaboradas en el capítulo 5. Las mismas son las expresiones integrales del principio de los desplazamientos virtuales y del segundo teorema de reciprocidad. En problemas físicos regidos por otras ecuaciones diferenciales pueden existir teoremas integrales análogos a los de la elasticidad. En caso contrario sería necesario encontrar una manera conveniente de integrar por partes.

La aproximación de cada componente u_i de \mathbf{u} puede ser, en principio, cualquier función de las coordenadas espaciales y de los parámetros indeterminados. Si a_1^i, \dots, a_n^i , son los n parámetros indeterminados que asociamos a u_i , la aproximación de esta componente puede escribirse simbólicamente como:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) \approx f_i(x_1, x_2, x_3, a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i); \quad i = 1, 2, 3$$

En este tema, para las magnitudes que necesiten especificar tanto la dirección del espacio a que están asociadas como el número de orden del parámetro indeterminado a que se refieren, el superíndice indicará la dirección, mientras que el subíndice indicará el número de orden del parámetro indeterminado. Para evitar la posible falta de claridad que conllevaría la proliferación de subíndices y superíndices numéricos, en este tema se denominará a los ejes coordenados x, y, z . Con esta variante de la notación, la aproximación anterior del campo de desplazamientos será :

$$u_i(x, y, z) \approx f_i(x, y, z, a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i); \quad i = x, y, z$$

En realidad, prácticamente siempre se plantea una aproximación para \mathbf{u} lineal en los parámetros indeterminados. Con ello se persigue que las expresiones integrales conduzcan finalmente a ecuaciones lineales ordinarias en estos parámetros. Expresaremos este tipo de aproximación en la forma:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= N_1^x(x, y, z)a_1^x + N_2^x(x, y, z)a_2^x + \dots + N_n^x(x, y, z)a_n^x \\ u_y(x, y, z) &= N_1^y(x, y, z)a_1^y + N_2^y(x, y, z)a_2^y + \dots + N_n^y(x, y, z)a_n^y \\ u_z(x, y, z) &= N_1^z(x, y, z)a_1^z + N_2^z(x, y, z)a_2^z + \dots + N_n^z(x, y, z)a_n^z \end{aligned}$$

En donde las N_k^i son las funciones (elegidas según nuestro criterio) que multiplican al parámetro indeterminado k correspondiente a la componente i de \mathbf{u} . Estas funciones se llaman "funciones aproximantes" o "funciones de forma", y por supuesto, pueden ser no lineales en x, y, z . Salvo casos especiales, como podría ser el de comportamiento fuertemente anisótropo, no suele haber motivo para aproximar de forma distinta cada componente de \mathbf{u} , por lo que en lo sucesivo supondremos que se utilizan las mismas funciones para las tres componentes:

$$N_k^x = N_k^y = N_k^z = N_k; \quad \forall k$$

Con esto, la aproximación del campo de desplazamientos puede escribirse:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} u_x(\underline{\mathbf{x}}) \\ u_y(\underline{\mathbf{x}}) \\ u_z(\underline{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1(\underline{\mathbf{x}}) & & & \\ & N_1(\underline{\mathbf{x}}) & & \\ & & \dots & \\ & & & N_n(\underline{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \\ a_1^z \end{pmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} N_n(\underline{\mathbf{x}}) & & & \\ & N_n(\underline{\mathbf{x}}) & & \\ & & \dots & \\ & & & N_n(\underline{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n^x \\ a_n^y \\ a_n^z \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{a}}}_1 + \dots + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_n \underline{\underline{\mathbf{a}}}_n \end{aligned}$$

En donde cada N_i es una matriz de 3×3 (2×2 en problemas bidimensionales) que contiene a la función N_i en las posiciones de la diagonal y cero en las restantes. Se denota una matriz columna con un subrayado, y una cuadrada o rectangular con dos. En forma compacta podemos expresar esta aproximación como:

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\mathbf{N}}}\underline{\underline{\mathbf{a}}} \quad (7.2)$$

Siendo:

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} = \begin{bmatrix} N_1 & & & & & \\ & N_1 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & N_n & & \\ & & & & N_n & \\ & & & & & N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1 & \dots & \underline{\underline{\mathbf{N}}}_n \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathbf{a}}} = \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \\ a_1^z \\ \vdots \\ a_n^x \\ a_n^y \\ a_n^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}}_n \end{pmatrix}$$

La elección de las funciones de aproximación N_i queda al buen juicio del analista. Es evidente que el propósito debe ser introducir un conjunto de funciones capaces de aproximar suficientemente entre todas (mediante su combinación lineal) la evolución de los desplazamientos del problema particular. Aunque son posibles otras alternativas, lo más inmediato es considerar funciones definidas en todo el dominio ocupado por el sólido. La figura 7.1 muestra gráficamente algunos ejemplos posibles para el caso de un sólido bidimensional elíptico en el plano x, y . En la elección de las N_i pueden hacerse intervenir diversas consideraciones, como por ejemplo la conveniencia de que todas ellas se anulen en las zonas de desplazamiento prescrito nulo, para que estas condiciones de contorno queden satisfechas automáticamente.

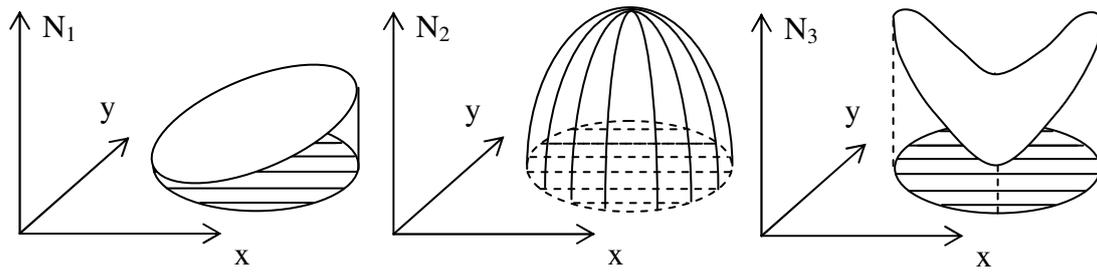


Figura 7.1.- Ejemplos de funciones de aproximación para un problema bidimensional.

En esta introducción se han presentado los fundamentos generales de las técnicas de aproximación más frecuentemente utilizadas en la actualidad, poniendo de manifiesto lo que todas ellas tienen en común: por una parte la posibilidad de ser obtenidas como particularización del método de residuos ponderados, y por otra la forma de plantear el campo de desplazamientos aproximado, como combinación lineal de "funciones de forma". En los epígrafes siguientes centraremos nuestra atención en el Método de los Elementos Finitos, que estudiaremos brevemente, aunque aprovecharemos la ocasión para presentar antes otro método de equilibrio importante por sí mismo, y en el que el anterior está basado: la aproximación de Galerkin.

No se ha hecho mención expresa de los métodos de aproximación basados en principios variacionales, que básicamente consisten en encontrar el mínimo valor de una magnitud escalar, que en el caso elástico es la energía potencial. El método de Rayleigh-Ritz mencionado en un párrafo anterior está formulado originalmente sobre la base de este principio, con la particularidad adicional de que las funciones de aproximación se eligen de forma que satisfagan las condiciones de contorno esenciales (en desplazamientos). Merece la pena apuntar que no en todos los problemas físicos es posible encontrar un principio variacional, es decir, una magnitud escalar asociada al sistema cuyo valor mínimo se alcance para la solución \mathbf{u} correcta. En cambio, siempre es posible plantear las ecuaciones diferenciales que rigen un problema, por lo que los métodos variacionales tienen menor generalidad que los de residuos ponderados. Además puede demostrarse que en los casos en que existe un principio variacional, la aproximación de Galerkin proporcionará la misma solución que el enfoque variacional. Esta es la razón por la que se ha omitido la mención a los principios variacionales en esta introducción, necesariamente esquemática. Cabe insistir en que una aproximación de Galerkin proporcionará la misma solución que una de Rayleigh-Ritz si se emplean las mismas funciones de aproximación.

Tampoco se ha hecho mención de los métodos "de compatibilidad", denominación que engloba a los enfoques de solución basados en el Principio de las Fuerzas Virtuales, o en general en imponer desde el principio el equilibrio del sistema, y más tarde la compatibilidad (continuidad, univaluación, etc.) de su campo de desplazamientos. Tales enfoques son difícilmente sistematizables, y por tanto poco apropiados para su implementación en ordenador. Este último es un defecto muy importante, ya que ha sido precisamente el espectacular desarrollo de los ordenadores lo que ha hecho aumentar la eficiencia de los métodos aproximados. Aunque estos métodos de compatibilidad no pueden competir con los métodos de equilibrio, su uso es en ocasiones adecuado para resolver "a mano" ciertos problemas. Es por ejemplo ocasionalmente conveniente su

empleo en problemas de barras que se estudian en el contexto de la Resistencia de Materiales.

7.2.- La aproximación de Galerkin aplicada al problema elástico.

El planteamiento de la ecuación integral del PDV como condición necesaria para el equilibrio, con tantos estados virtuales distintos como sea preciso, es un procedimiento característico de los Métodos de Equilibrio:

$$\int_V \varepsilon_{ij}^{\phi} \sigma_{ij} dV = \int_V \phi_i X_i dV + \int_S \phi_i \bar{X}_i dS \quad (7.3)$$

Por conveniencia posterior, expresaremos los integrandos en forma matricial. Para ello definimos las siguientes matrices columna:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}; \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}; \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}; \quad \underline{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}; \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix}; \text{ etc.} \quad (7.4a)$$

Y análogamente para las magnitudes asociadas al campo virtual. En problemas bidimensionales definimos similarmente:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}; \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}; \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}; \quad \underline{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}; \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \end{pmatrix}; \text{ etc.} \quad (7.4b)$$

Con estas notaciones, la ecuación (7.3) se expresa como:

$$\int_V (\underline{\varepsilon}^{\phi})^T \underline{\sigma} dV = \int_V (\underline{\phi})^T \underline{X} \cdot dV + \int_S (\underline{\phi})^T \bar{\underline{X}} \cdot dS \quad (7.5)$$

Nótese que en (7.4) la matriz columna de deformaciones incluye las deformaciones transversales γ_{xy} , etc, en lugar de los términos ε_{xy} , etc, de valor mitad, por lo que el primer integrando anterior reproduce efectivamente $\varepsilon_{ij}^{\phi} \sigma_{ij}$. En lugar de las tensiones verdaderas (desconocidas) vamos a introducir las tensiones asociadas al campo aproximado de desplazamientos. Comenzamos poniendo las tensiones en función de las deformaciones. La relación lineal entre ambas magnitudes queda recogida en una ecuación de la forma:

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{\circ}) \quad (7.6)$$

Siendo ε^o la deformación que existiría para tensión nula. Este término permite recoger por ejemplo los efectos de la temperatura en la ley de comportamiento. Así, para un problema bidimensional, siendo α el coeficiente de dilatación térmica y θ el valor de la temperatura, este término sería :

$$\underline{\varepsilon}^o = \begin{pmatrix} \alpha\theta \\ \alpha\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz **D** contiene las constantes elásticas que relacionan la tensión y la deformación. Puede comprobarse que con las definiciones adoptadas en (7.4) debe ser:

Tensión Plana (TP):

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Deformación Plana (DP):

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Problemas tridimensionales:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \\ & & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Pueden considerarse otro tipo de efectos en la ley de comportamiento, lo que da lugar a expresiones ligeramente distintas de la (7.6). Por ejemplo, si existe un campo de tensiones residuales conocido, podría emplearse una expresión como $\sigma - \sigma_o = D\varepsilon$, sin que ello suponga ninguna dificultad especial.

Expresamos ahora las deformaciones en función de los desplazamientos. Siendo la relación diferencial entre ellas de tipo lineal, podemos escribirla usando una matriz **L** de operadores diferenciales de forma que:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{u} \quad (7.7)$$

Donde:

Caso tridimensional (3D):

Caso bidimensional (2D):

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo todas estas expresiones en la ecuación del PDV dada por (7.5), ésta adopta la siguiente forma:

$$\int_V (\underline{\underline{\varepsilon}}^\varphi)^T \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}) \cdot \underline{\underline{a}} \cdot dV = \int_V (\underline{\underline{\varphi}})^T \underline{\underline{X}} \cdot dV + \int_S (\underline{\underline{\varphi}})^T \underline{\underline{X}} \cdot dS + \int_V (\underline{\underline{\varepsilon}}^\varphi)^T \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^\circ \cdot dV \quad (7.8)$$

Nótese que $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}}(\underline{\underline{N}}\underline{\underline{a}}) = (\underline{\underline{L}}\underline{\underline{N}})\underline{\underline{a}}$, ya que las derivaciones del operador $\underline{\underline{L}}$ no afectan al conjunto de parámetros contenidos en $\underline{\underline{a}}$, los cuales no dependen de las coordenadas espaciales (aunque desconozcamos su valor por el momento).

Para proseguir, debemos elegir qué tipo de campos virtuales utilizaremos en la expresión (7.8). Distintas elecciones dan lugar a distintos métodos de resolución. En lugar de plantear "muchos" campos virtuales particulares, elegiremos plantear un solo campo virtual φ_i , pero que sea combinación lineal arbitraria de "muchos" campos virtuales particulares, lo que conceptualmente es equivalente. *Construimos este campo virtual mediante combinación lineal arbitraria de las mismas funciones de forma N_k empleadas para aproximar el campo real de desplazamientos.* Los coeficientes de esta combinación lineal arbitraria serán coeficientes arbitrarios (que pueden tomar cualquier valor a nuestro antojo), y que llamaremos $(a^i_k)^\varphi$, donde los índices i y k juegan un papel análogo a los de a^i_k ($i=x,y,z$) utilizados en la aproximación del campo real. La elección se concreta así en:

$$\underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{a}}^\varphi \quad (7.9)$$

Esta elección es precisamente la que distingue a la aproximación de Galerkin de otros métodos, y es la mejor en muchos sentidos. Indicamos sin demostración algunas de sus propiedades: 1º, generalmente (siempre, en problemas elásticos) implicará el manejo de matrices simétricas; 2º, conducirá a fórmulas finales idénticas, y por tanto a los mismos resultados, que un enfoque variacional equivalente, si éste puede formularse

(siempre se puede en elasticidad); 3º, en problemas elásticos, la aproximación obtenida será la mejor posible con las funciones que hayamos usado, en el sentido de mínimos cuadrados ponderados de las deformaciones. Desde un punto de vista conceptual puede argumentarse además lo siguiente: la relación (7.3) es condición suficiente para asegurar el equilibrio si se satisface para *cualquier* campo virtual concebible. No podemos incluir todos en la formulación, pero la elección de Galerkin contiene a todos los que podemos construir con la aproximación de desplazamientos utilizada. La elección equivale a considerar como concebibles sólo a aquellos campos de desplazamiento que sean representables con el modelo de aproximación. Pensando de esta manera, la elección (7.9) resulta natural y coherente en el sentido de que utiliza como estados virtuales todas las formas de desplazamiento que hemos considerado concebibles.

La ecuación (7.8) del PDV con el campo virtual dado por (7.9) adquiere la forma:

$$\begin{aligned} & \int_V (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T (\underline{\mathbf{LN}})^T \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{LN}}) \cdot \underline{\mathbf{a}} \cdot dV = \\ & = \int_V (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dV + \int_S (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dS + \int_V (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T (\underline{\mathbf{LN}})^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ dV \end{aligned} \quad (7.10)$$

En la ecuación anterior, las matrices $\underline{\mathbf{a}}$ y $\underline{\mathbf{a}}^\varphi$ contienen parámetros indeterminados y coeficientes arbitrarios respectivamente, pero no dependen de las coordenadas espaciales, por lo que pueden salir de las integrales:

$$\begin{aligned} & (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \left[\int_V (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}})^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}}) \cdot dV \right] \cdot \underline{\mathbf{a}} = \\ & = (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \left[\int_V \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dV \right] + (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \left[\int_S \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dS \right] + (\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T \int_V (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}})^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ dV \end{aligned}$$

Pensemos en la ecuación anterior en forma de igualdad a cero con todos los términos en un lado de la igualdad, y con el factor común $(\underline{\mathbf{a}}^\varphi)^T$ extraído. Si esta ecuación se satisficiera sólo para algún o algunos $\underline{\mathbf{a}}^\varphi$ particulares, no podríamos asegurar que su cofactor debiera anularse. Pero como debe cumplirse para cualquier conjunto arbitrario de parámetros $\underline{\mathbf{a}}^\varphi$, sí que podemos asegurarlo. Por tanto debe ser:

$$\begin{aligned} & \left[\int_V (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}})^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}}) \cdot dV \right] \cdot \underline{\mathbf{a}} = \\ & = \int_V \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dV + \int_S \underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{X}} \cdot dS + \int_V (\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}})^T \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ dV \end{aligned} \quad (7.11)$$

Que tiene la siguiente estructura, típica de las aproximaciones de problemas lineales:

$$\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (7.12a)$$

Siendo:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{K}}} &= \int_V (\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}})^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}) \cdot dV ; \\ \underline{\underline{\mathbf{f}}} &= \int_V \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dV + \int_S \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \overline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}} \cdot dS + \int_V (\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}})^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^o dV\end{aligned}\quad (7.12b)$$

Hay que destacar algunas reflexiones importantes acerca del sistema de ecuaciones lineales ordinarias (7.12):

1) El vector de cargas en el contorno, $\overline{\underline{\underline{\mathbf{X}}}}$, suele ser a priori desconocido en una parte del contorno del sólido (aquella parte en la que los desplazamientos están prescritos). Esto supone que los términos de $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ no serán en general calculables explícitamente al principio del problema. Podemos pensar que *las propias integrales* de contorno de varias (o todas) las N_i que aparecen en $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ son incógnitas adicionales del problema, que deberemos calcular. En resumen, algunos o todos los términos de $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ pueden contener incógnitas. Es posible evitarlo en problemas con desplazamientos prescritos nulos, eligiendo funciones de aproximación que sean nulas en esas zonas de desplazamiento prescrito. Pero si tenemos incógnitas en $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$, necesitaremos ecuaciones adicionales a las (7.12). Estas ecuaciones se obtienen de aproximar las condiciones de contorno en desplazamientos. Por otra parte, tanto el vector de fuerzas de volumen, $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$, como la "deformación de tensión nula" $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^o$, suelen ser funciones explícitas conocidas de las coordenadas espaciales, por lo que el cálculo de las integrales correspondientes no tiene más problema que el de su evaluación..

2) La matriz $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ del sistema, que suele llamarse "matriz de rigidez", es cuadrada. Se aprecia fácilmente que en problemas tridimensionales, la misma es de dimensiones $(3n \times 3n)$, mientras que en problemas bidimensionales es $(2n \times 2n)$, siendo n el número de funciones de aproximación (N_i , $i=1..n$) utilizadas para cada componente de desplazamiento. Por tanto, el sistema lineal de ecuaciones tiene tantas ecuaciones como parámetros a_k^i . Por las propiedades elementales de los productos de matrices, también se aprecia que $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ es una matriz simétrica (ya que $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ lo es, y $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{M}}}$ lo será también, cualquiera que sea la matriz $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$).

3) La matriz $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ será en general singular (no tendrá inversa). Por ejemplo, puede apreciarse que debe serlo en problemas con todas las condiciones de contorno dadas en tensiones, en los que $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ es calculable a priori: no cabe esperar calcular $\underline{\underline{\mathbf{a}}}$ como $\underline{\underline{\mathbf{a}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{f}}}$, porque ello dejaría determinado el campo de desplazamientos, y sabemos que no puede estarlo hasta que no impongamos algunas condiciones de contorno en desplazamientos, lo que no hemos hecho hasta el momento. Sin embargo, si el problema tiene condiciones de contorno homogéneas en cantidad suficiente para evitar movimientos de sólido rígido, y se utilizan funciones de aproximación que satisfacen automáticamente esas condiciones, no existe ya motivo para que $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ sea singular.

4) Habitualmente resulta conveniente pensar en la matriz $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$, como formada por submatrices de dimensión 3×3 , (2×2 en problemas bidimensionales), y en $\underline{\underline{\mathbf{a}}}$ (y $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$) como una matriz columna formada por submatrices de 3×1 (o bien 2×1), es decir:

$$\sum_{j=1}^n \underline{\underline{K}}_{ij} \underline{a}_j = \underline{f}_i ; \quad (i=1\dots n) \quad (7.13)$$

Siendo:

$$\underline{\underline{K}}_{ij} = \int_V \left(\underline{L} \cdot \underline{N}_i \right)^T \cdot \underline{D} \cdot \left(\underline{L} \cdot \underline{N}_j \right) \cdot dV ; \quad \underline{f}_i = \int_V \underline{N}_i^T \underline{X} \cdot dV + \int_S \underline{N}_i^T \underline{\bar{X}} \cdot dS + \int_V \left(\underline{L} \cdot \underline{N}_i \right)^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_0 \cdot dV$$

El que la matriz $\underline{\underline{K}}$ del sistema sea simétrica, implica que sus submatrices deben cumplir:

$$\underline{\underline{K}}_{ij} = \left(\underline{\underline{K}}_{ji} \right)^T ; \quad \forall i, j$$

5) Insistiremos en que para resolver el problema, aún bebemos imponer las condiciones de contorno en desplazamientos, salvo que todas ellas sean homogéneas (tipo $u_i=0$) y las funciones de aproximación elegidas las satisfagan. La imposición de estas condiciones de contorno de forma aproximada debe proporcionarnos tantas ecuaciones como incógnitas tengamos en \underline{f} . Esto ocurrirá automáticamente si ajustamos por mínimos cuadrados los desplazamientos prescritos. Puede realizarse también el ajuste aproximado mediante cualquier otra técnica, como por ejemplo haciendo que el desplazamiento tenga exactamente el valor prescrito en un número finito de puntos.

Para finalizar este epígrafe, destaquemos que la única fuente de error del procedimiento de aproximación descrito es que, en la mayoría de los casos, una combinación lineal de las funciones N_i propuestas no será capaz de describir de manera exacta la solución de desplazamientos del problema. El que la solución de desplazamientos sea sólo aproximada conlleva el que las condiciones de contorno se satisfarán solo aproximadamente. En particular, las condiciones de contorno en desplazamientos, las cuales debemos imponer en el proceso de resolución, no pueden satisfacerse más que de forma aproximada, mediante técnicas de ajuste como se indicó en el párrafo anterior. En general, las condiciones de contorno en tensiones tampoco coincidirán exactamente con las tensiones derivadas del campo de desplazamientos calculado, pese a que hayamos introducido la tensión de contorno correcta para el cálculo de \underline{f} . En todo caso, si "acertáramos" a elegir un conjunto de funciones capaces de ajustarse a la solución exacta, hay garantía de que obtendríamos dicha solución exacta. Es casi seguro que no "acertemos", pero tenemos al menos garantía de obtener la (en cierto sentido) mejor aproximación posible basada en las funciones propuestas.

Un ejemplo sencillo.

Consideremos el sólido bidimensional de la figura 7.2, cuya forma es de triángulo rectángulo con base y altura iguales, de longitud L [m], que está sometido a una distribución uniforme de carga p [N/m²] en el contorno $x=0$, y que tiene el desplazamiento totalmente impedido en los puntos del contorno $y=0$, según se indica. El

material tiene peso específico ρ [N/m^3], Módulo de Young E [N/m^2], y Coeficiente de Poisson nulo. El espesor del sólido en la dirección z es b [m]. Utilizaremos las dos funciones de aproximación siguientes para realizar la aproximación de Galerkin: $N_1=x$, $N_2=y$. Con sólo dos funciones, que además no están elegidas especialmente para adaptarse al problema, no cabe esperar que la aproximación final sea buena, pero el procedimiento quedará ilustrado igualmente, y las operaciones resultarán más sencillas.

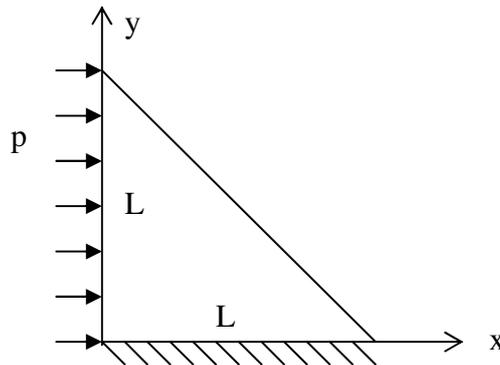


Figura 7.2- Sólido triangular con carga uniforme en una de sus caras.

La aproximación del campo de desplazamientos con las funciones consideradas es:

$$u_x = N_1 a_1^x + N_2 a_2^x = x a_1^x + y a_2^x$$

$$u_y = N_1 a_1^y + N_2 a_2^y = x a_1^y + y a_2^y$$

En primer lugar, calcularemos la matriz de rigidez de la aproximación. Es cómodo realizar el cálculo de sus submatrices:

$$\underline{\underline{K}}_{ij} = \int_V (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i)^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_j) \cdot dV$$

Al ser nulo el coeficiente de Poisson, la ley de comportamiento, y por tanto la matriz $\underline{\underline{D}}$, adopta la misma forma tanto en Tensión Plana como en Deformación Plana, y la solución del problema (tanto la "exacta" como la obtenida mediante aproximación) es la misma para ambas situaciones. La expresión de $\underline{\underline{D}}$ para $\nu=0$ es:

$$\underline{\underline{D}} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Los términos entre paréntesis en los integrandos de $\underline{\underline{K}}_{ij}$ se calculan fácilmente:

$$\underline{\underline{\mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_2}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que por ser en este caso lineales las funciones de aproximación, sus derivadas son constantes, y por tanto las matrices $\underline{\underline{\mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_i}}$ también son constantes que podrán salir de las integrales. Esto simplifica la labor de integración hasta el punto de que sólo es preciso calcular el área del dominio triangular. Tenemos por tanto:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11} = \int_V \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dx dy dz = \frac{\mathbf{E}L^2}{2} \mathbf{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12} = \int_V \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dx dy dz = \frac{\mathbf{E}L^2}{2} \mathbf{b} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22} = \int_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dx dy dz = \frac{\mathbf{E}L^2}{2} \mathbf{b} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por simetría de la matriz $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{21} = (\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12})^T = \frac{\mathbf{E}L^2}{2} \mathbf{b} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En segundo lugar calcularemos el término de cargas \mathbf{f} , que depende de las fuerzas por unidad de volumen (en nuestro caso sólo el peso, ya que no hay temperatura), y de las fuerzas aplicadas en el contorno del sólido. Nuevamente procederemos calculando sus submatrices \mathbf{f}_i :

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i = \int_V \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i^T \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dV + \int_S \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i^T \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dS$$

Empezamos con las integrales de volumen, cuya complicación se reduce a ser evaluadas:

$$\int_V \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dV = \mathbf{b} \int_0^L \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \end{pmatrix} (L-x) dx = -\rho \mathbf{b} L^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\int_V \underline{\underline{\mathbf{N}}}_2^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dV = \mathbf{b} \int_0^L \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \end{pmatrix} (L-y) dy = -\rho \mathbf{b} L^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora las integrales de contorno. La función $N_1 (=x)$ se anula en la cara vertical, mientras que \bar{X} es nula en la oblicua. En consecuencia, sólo la cara horizontal tiene aportación a la integral de contorno que contiene a N_1 . En esta cara la tensión de contorno es desconocida, por tanto:

$$\int_S \underline{N}_1^T \cdot \bar{X} \cdot dS = b \int_0^L \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix}_{y=0} dx = b \begin{pmatrix} t_1^x \\ t_1^y \end{pmatrix}$$

Hemos llamado t_1^x, t_1^y a las cantidades (no son funciones) resultantes de la integración, y consideraremos estas cantidades como incógnitas adicionales del problema. La integral de contorno que contiene a $N_2 (=y)$ solo contendrá la aportación del contorno vertical, ya que en el oblicuo la tensión es nula, y en el horizontal es nula N_2 .

$$\int_S \underline{N}_2^T \cdot \bar{X} \cdot dS = b \int_0^L \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}_{x_1=0} dy = pbL^2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Apréciase comparativamente la ventaja de usar funciones de aproximación que satisfagan las condiciones de contorno homogéneas en desplazamientos: las tensiones desconocidas de la cara inferior se multiplican por el valor nulo de la función N_2 , y el resultado es nulo en todo caso, no apareciendo incógnitas asociadas a esta función en el término de cargas

Estamos ya en condiciones de plantear las ecuaciones (7.12) para nuestro ejemplo. Apréciase que el espesor b del sólido no influirá en el cálculo de las incógnitas:

$$\frac{EbL^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \\ a_2^x \\ a_2^y \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} t_1^x \\ -\frac{\rho L^3}{6} + t_1^y \\ \frac{pL^2}{2} \\ -\frac{\rho L^3}{6} \end{pmatrix}$$

Para poder calcular las incógnitas, debemos imponer las condiciones de contorno en desplazamientos. Las restricciones al desplazamiento de este problema consisten en que todos los puntos de la cara horizontal no se muevan. En este caso es posible hacer que se cumpla exactamente esta condición, ya que imponiéndola en el campo aproximado de desplazamientos tenemos (nótese que $N_2=0$ en $y=0$):

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}_{y=0} = \underline{N}_1 \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \end{pmatrix} + \underline{N}_2 \begin{pmatrix} a_2^x \\ a_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_1^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1^x = 0 \\ a_1^y = 0 \end{matrix}$$

Es decir, la condición se satisface exactamente si los parámetros que multiplican a la función N_1 son cero. Desgraciadamente, esto supone que dicha función no figurará finalmente en el campo de desplazamientos, por lo que todo el trabajo que hemos realizado con ella es baldío. En todo caso, llevamos este resultado al sistema de ecuaciones general, y las dos últimas ecuaciones nos permiten conocer los parámetros asociados a N_2 :

$$\frac{EbL^2}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^x \\ a_2^y \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \frac{\rho L^2}{2} \\ -\frac{\rho L^3}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_2^x &= \frac{2p}{E} \\ a_2^y &= -\frac{\rho L}{3E} \end{aligned}$$

Con lo que la aproximación de desplazamientos obtenida para el problema de la figura 7.2 es:

$$\boxed{u_x = \frac{2p}{E} y ; u_y = -\frac{\rho L}{3E} y}$$

Antes de dar por terminado este sencillo ejemplo, realizaremos unas breves reflexiones finales a modo de recapitulación.

-Según hemos visto, el cumplimiento de las condiciones de contorno en desplazamientos, requiere que $a_{x_1}=a_{y_1}=0$, lo que implica que la función de forma N_1 no aporta nada al campo de movimientos aproximado del problema. Podríamos haber considerado en primer lugar las restricciones de movimiento del problema dado, y no realizar ningún cálculo con N_1 . No se ha hecho así porque raramente es conveniente seguir ese orden en casos más realistas.

-Se ha mostrado porqué es interesante elegir las funciones de aproximación de forma que cumplan las condiciones de contorno en desplazamientos: se evita la aparición de incógnitas en \mathbf{f} . El Método de Rayleigh-Ritz, basado en un enfoque variacional que proporciona los mismos resultados que la aproximación de Galerkin, propone de modo general la utilización de este tipo de funciones de aproximación.

-En este caso, hemos podido satisfacer exactamente las condiciones de contorno en desplazamientos, con la fortuna añadida de que ha sido posible resolver el sistema de ecuaciones sin tener que calcular las incógnitas de \mathbf{f} . Debe entenderse que todo ello ha ocurrido excepcionalmente en este problema particular.

-El sistema lineal de ecuaciones $\mathbf{Ka}=\mathbf{f}$ incluye en este caso cuatro ecuaciones con seis incógnitas, los cuatro parámetros de la aproximación del campo de movimientos, y las dos cantidades t_{x_1} , t_{y_1} , resultantes de la integración de las tensiones del contorno $y=0$. Para resolver dicho sistema, en general hubiésemos necesitado dos ecuaciones más, que hubiésemos obtenido aproximando las condiciones de contorno en desplazamientos. Ilustraremos seguidamente como se hubiese realizado esto último mediante el método de mínimos cuadrados. Se comienza escribiendo la expresión del error que se comete para cada componente de desplazamiento, que es la diferencia entre el valor prescrito y el obtenido de la aproximación. En este caso, el valor prescrito es cero, así que el error es el propio valor de la componente de desplazamiento:

$$\text{Error}_x = u_x - 0 = N_1 \cdot a_1^x + N_2 \cdot a_2^x = x \cdot a_1^x + y \cdot a_2^x$$

$$\text{Error}_y = u_y - 0 = N_1 \cdot a_1^y + N_2 \cdot a_2^y = x \cdot a_1^y + y \cdot a_2^y$$

Seguidamente se impone que la integral de cada error elevado al cuadrado tome un valor mínimo, es decir se minimiza respecto de los parámetros a_k^i , manteniendo $y=0$, la integral del error cuadrático de cada componente. Comenzamos por u_x :

$$\frac{\partial}{\partial a_1^x} \int_0^L (u_x)^2 dx = 0 \Rightarrow 2 \int_0^L [(N_1 a_1^x + N_2 a_2^x) N_1]_{y=0} dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2^x} \int_0^L (u_x)^2 dx = 0 \Rightarrow 2 \int_0^L [(N_1 a_1^x + N_2 a_2^x) N_2]_{y=0} dx = 0 \quad (\text{identidad})$$

Procedemos análogamente para u_y :

$$\frac{\partial}{\partial a_1^y} \int_0^L (u_y)^2 dx = 0 \Rightarrow 2 \int_0^L [(N_1 a_1^y + N_2 a_2^y) N_1]_{y=0} dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2^y} \int_0^L (u_y)^2 dx = 0 \Rightarrow 2 \int_0^L [(N_1 a_1^y + N_2 a_2^y) N_2]_{y=0} dx = 0 \quad (\text{identidad})$$

La última ecuación de cada pareja resulta en este caso una identidad, porque N_2 es idénticamente nulo en $y=0$. Las restantes dos ecuaciones son las que necesitábamos para completar, junto con las cuatro de $\mathbf{Ka}=\mathbf{f}$, un total de seis ecuaciones. En este caso, las dos ecuaciones ofrecen por sí mismas los valores de dos de los parámetros:

$$\int_0^L 2(x)^2 a_1^x dx = \frac{2L^3}{3} a_1^x = 0 \Rightarrow a_1^x = 0$$

$$\int_0^L 2(x)^2 a_1^y dx = \frac{2L^3}{3} a_1^y = 0 \Rightarrow a_1^y = 0$$

Lo que ya se obtuvo por apreciación directa al resolver el problema. Lo obtenido se corresponde con el ajuste exacto de las condiciones de contorno (cuando el ajuste exacto es posible, mínimos cuadrados dará ese ajuste exacto). El ajuste ha proporcionado dos ecuaciones adicionales, que junto con las cuatro de la aproximación de Galerkin permiten calcular las seis incógnitas. En un caso más general, en el que ninguna de las dos funciones de aproximación satisficiera las condiciones de contorno en desplazamientos, habríamos tenido una incógnita (escalar) en cada término de \mathbf{f} , con un total de cuatro incógnitas adicionales. En ese caso, ninguna de las cuatro ecuaciones de mínimos cuadrados habría resultado identidad, y tendríamos un total de ocho ecuaciones útiles para determinar las ocho incógnitas $a_k^i, t_k^i, k=1,2; i=x,y$.

Para finalizar, insistiremos en que la aproximación realizada es realmente muy mala, lo que no es de extrañar: sólo hemos empleado dos funciones, y una de ellas ha sido descartada en el proceso. El campo de movimientos aproximado depende solamente de la coordenada y , de tal forma que el campo de deformaciones y tensiones resulta:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \cdot \underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2P}{E}y \\ -\frac{\rho L}{3E}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho L}{3E} \\ \frac{2p}{E} \end{pmatrix}; \quad \underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho L}{3E} \\ \frac{2p}{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho L}{3} \\ p \end{pmatrix}$$

El estado de tensiones ni siquiera refleja la existencia de una componente σ_{xx} , que evidentemente existe (carga en el contorno $x=0$). Además, resultan tensiones no nulas en la cara oblicua descargada. Los desplazamientos presentan en cambio una mejor apariencia, como muestra la figura 7.3, ya que el vértice superior se mueve hacia la derecha y hacia abajo, como cabe esperar a la vista de la carga horizontal y de la acción del peso propio.

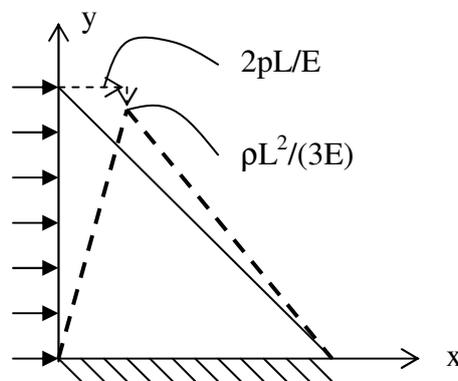


Figura 7.3.- Desplazamientos calculados mediante la aproximación.

Es habitual que, como en este ejemplo, los métodos aproximados ofrezcan resultados más precisos en desplazamientos que en tensiones, las cuales parecen ser inherentemente más difíciles de aproximar por el hecho de ser derivadas de la magnitud fundamental que se aproxima. Se puede argumentar como explicación que si la función se aproximó con orden p , las derivadas primeras se aproximan con orden $p-1$. Pero lo cierto es que se observa un comportamiento similar (aunque quizá menos acusado) en métodos en los que se pueden realizar aproximaciones independientes y del mismo orden para tensiones y desplazamientos, como el Método de los Elementos de Contorno.

7.3.- Formulación básica del Método de los Elementos Finitos (MEF).

El Método de los Elementos Finitos no es más que una aproximación de Galerkin en la que se aplican unas pocas ideas muy sencillas a la hora de elegir las funciones de aproximación. A pesar de su sencillez, dichas ideas incrementan espectacularmente la versatilidad del método para acomodarse a geometrías y condiciones de contorno complicadas. Otras ventajas que se irán apreciando son el claro sentido físico que pasan a tener las incógnitas del problema, así como ventajas de tipo numérico (manejo de matrices casi vacías, entre otras). Pero quizá la mayor de todas radica en que la elección de las funciones de aproximación se sistematiza enormemente, reduciendo la

intervención del analista a una división inicial del dominio en celdas, pudiendo dejarse lo demás para ser ejecutado por una implementación comercial en ordenador. Este factor resultó decisivo en la expansión y popularización del método. Las particularidades que distinguen al MEF de una aproximación general de Galerkin son las siguientes:

a) El campo de desplazamientos (real y virtual) se aproxima mediante funciones N_i de pequeño soporte. Se denomina así, a las funciones que son no nulas únicamente en una pequeña región del dominio.

Una función complicada puede ser aproximada excelentemente por funciones muy sencillas si la aproximación se realiza por trozos pequeños. O lo que es lo mismo, podemos conseguir buena aproximación de u_k ($k=x,y,z$) con funciones N_i muy sencillas si sus soportes son pequeños. Procediendo así, nos encontramos además con que cada integral que contenga a la función de aproximación N_i sólo debe evaluarse sobre su soporte, es decir, sobre la pequeña porción del dominio donde la función N_i no es nula, y el integrando será sencillo. Esto unido a que la geometría del soporte puede elegirse también sencilla, mejora la precisión de la integración, que se realiza numéricamente.

De forma similar, la integral que expresa a K_{ij} , que contiene derivadas de N_i y N_j , únicamente debe evaluarse en el soporte común (la intersección de los soportes de N_i y N_j). Al ser pequeños los soportes, es evidente que dicho soporte común será nulo en muchos casos. Esto implica que muchas submatrices K_{ij} serán nulas, lo que puede detectarse fácilmente a priori, con un ahorro de cálculo muy importante.

Por último, en las condiciones de contorno en desplazamientos, que según vimos en el epígrafe anterior deben imponerse de forma aproximada, intervendrán sólo las funciones de forma N_i que sean no nulas en el contorno. Por tanto, al ajustar las condiciones de contorno en desplazamientos manejaremos solamente algunas de las funciones.

b) Se divide el dominio en celdas (pensemos que triangulares, para 2D). Cada soporte será el entorno de celdas que comparten un vértice de las mismas. Llamamos "elemento" a cada una de las celdas, y "nodo" a cada vértice. De esta manera, cada función de aproximación tendrá como soporte el conjunto de elementos que comparten un nodo. Lo anterior asocia una función de forma N_i a cada nodo i .

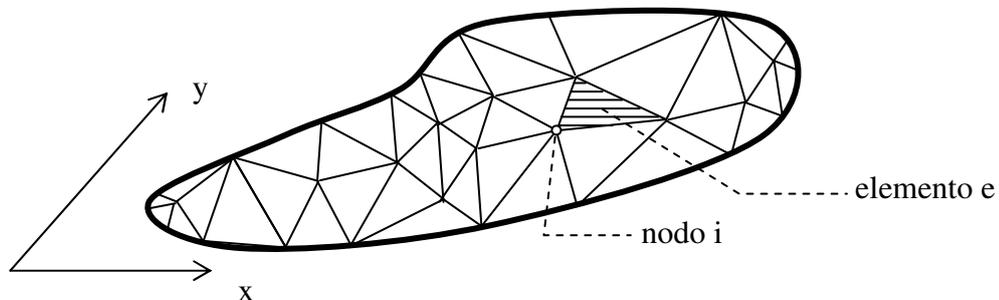


Figura 7.4.- Discretización del dominio mediante elementos triangulares.

Esta manera de elegir los soportes de las funciones admite un tratamiento sistemático por ordenador una vez que se ha establecido la "malla" de elementos. Ya casi todos los

programas comerciales tienen también ayudas para generar la malla a partir de unos pocos parámetros (número de nodos en cada porción del contorno, previamente definido como entidad geométrica, por ejemplo). La figura 7.4 muestra una posible malla de elementos triangulares para un problema bidimensional. Tal como ocurre en la figura, es habitual que la geometría del contorno no pueda ser descrita exactamente por el tipo de elementos que se usen (sea cual sea éste), lo que supone una nueva fuente de inexactitud. Sin embargo, podemos ajustarnos a dicha geometría tanto como queramos aumentando el número de elementos, al coste de aumentar el volumen de cálculos.

c) Cada función de aproximación N_i vale la unidad en su nodo, y cero en los demás. Por supuesto vale cero en los nodos alejados del nodo i , ya que caen fuera del soporte de N_i . Lo que establece esta condición es que N_i valga cero también en los nodos vecinos al nodo i , los cuales están en el borde del soporte de N_i . En problemas bidimensionales, una representación del valor de N_i en la tercera dimensión, es una pirámide cuya base está formada por los elementos que comparten el nodo i , como indica la figura 7.5.

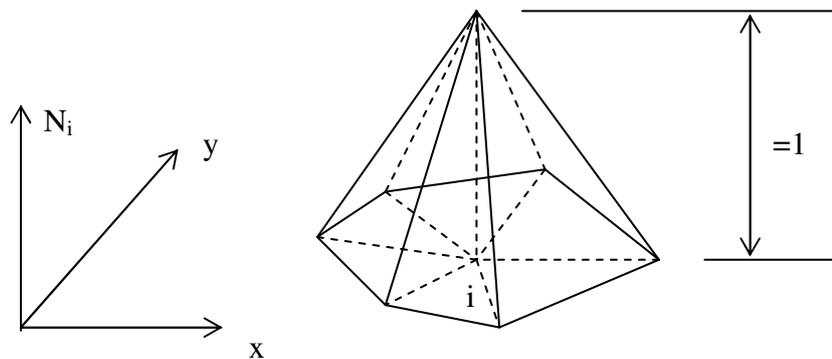


Figura 7.5.- Función de aproximación N_i asociada al nodo i .

Esta elección hace que los $3N$ parámetros indeterminados de la aproximación tengan un claro significado físico, ya que al particularizar el campo de desplazamientos aproximado en las coordenadas del nodo i , resultará que sólo N_i es distinto de cero, y vale la unidad. Véase:

$$\underline{u}(x, y, z) = [\underline{I} \cdot N_1, \dots, \underline{I} \cdot N_i, \dots, \underline{I} \cdot N_n] \cdot \underline{a}$$

$$\text{En las coordenadas del nodo } i \Rightarrow \underline{u}(\text{nodo } i) = [\underline{0}, \dots, \underline{1}, \dots, \underline{0}] \cdot \underline{a} = \begin{pmatrix} a_i^x \\ a_i^y \\ a_i^z \end{pmatrix}$$

La igualdad anterior expresa que los parámetros que multiplican a la función de aproximación N_i son precisamente las componentes de desplazamiento del nodo i del sólido, siendo éste el claro significado físico al que se ha hecho referencia.

También los términos de \mathbf{f} pasan a tener un significado físico. Para verlo, considérese una fuerza concentrada \mathbf{F} , que actúa sobre el nodo i . Recordemos que una fuerza concentrada se interpreta como una distribución de tensiones "muy intensa", pero que actúa en un entorno "muy pequeño" del punto, de forma que su resultante tiene las componentes de la fuerza concentrada. Llamando $\text{Ent}(\text{nodo } i)$ a ese entorno

arbitrariamente pequeño, y pensando por ejemplo que la carga es de contorno (si es de dominio el razonamiento es idéntico), tenemos:

$$\int_{\text{Ent}(\text{nodo } i)} \bar{X} dS = \underline{F}$$

La aportación de esta fuerza concentrada al término de cargas \mathbf{f} se calcula del modo habitual, integrando en la región del dominio donde el integrando no se anula, es decir, en el entorno del nodo. En este dominio de integración, arbitrariamente pequeño, las funciones de forma tienen valores constantes: las de todos los nodos valen cero, salvo la del nodo i , que vale uno. Por tanto solamente habrá aportación a la submatriz \mathbf{f}_i correspondiente al nodo i :

$$\text{Aportación a } \underline{f}_i = \int_S \underline{N}_i \bar{X} dS = \int_{\text{Ent}(\text{nodo } i)} \underline{N}_i \bar{X} dS = \underline{N}_i(\text{nodo } i) \int_{\text{Ent}(\text{nodo } i)} \bar{X} dS = \underline{I} \int_{\text{Ent}(\text{nodo } i)} \bar{X} dS = \underline{F} = \begin{pmatrix} F^x \\ F^y \\ F^z \end{pmatrix}$$

Que son las componentes de la fuerza aplicada en dicho nodo. Por tanto, para incluir el efecto de una fuerza concentrada que actúa sobre el nodo i , sólo hay que llevar a las tres posiciones de \mathbf{f}_i las tres componentes de la fuerza. Esta particularidad es interesante por sí misma para tratar las fuerzas concentradas llegado el caso, pero tiene además una "segunda lectura": podríamos sustituir las cargas originales del problema (distribuidas) por unas fuerzas concentradas en los nodos, cuyas componentes fuesen las de \mathbf{f}_i para cada nodo i . Evidentemente el modelo aproximado resulta idénticamente el mismo, y conduce por tanto a los mismos resultados. De ello obtenemos el significado físico de los términos como \mathbf{f}_i : son fuerzas concentradas en los nodos con las que el modelo de aproximación representa el efecto de las cargas originales del problema. Por ello se suele denominar a las submatrices \mathbf{f}_i de \mathbf{f} fuerzas equivalentes en los nodos.

Interpretación como discretización en elementos.

Cuando tenemos que integrar una función que tiene distinta expresión analítica en distintos trozos del intervalo de integración, de modo natural procedemos evaluando la integral en cada trozo para después sumar los resultados parciales. Del mismo modo, realizaremos la integral necesaria para evaluar \mathbf{K}_{ij} (también \mathbf{f}_i), integrando en trozos del dominio de integración, y sumando después las integrales parciales. Claramente, cada "trozo" referido será un elemento, dado que en un elemento cada función de forma mantiene una expresión analítica. Por ejemplo, la figura 7.6 muestra el caso en que los nodos i y j son adyacentes (decimos que lo son si hay al menos un elemento al que ambos pertenecen).

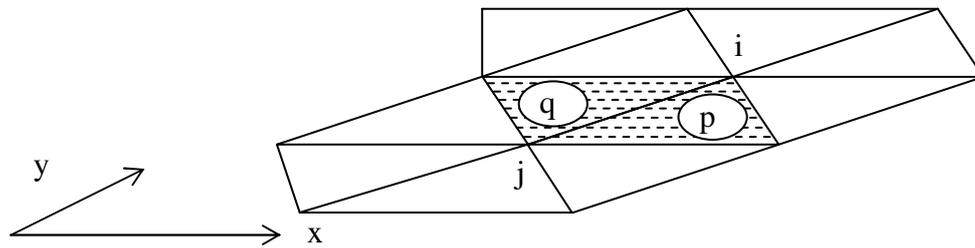


Figura 7.6.- Dominio de integración. Caso de nodos adyacentes.

En este caso, el dominio de integración para $\underline{\underline{K}}_{ij}$ constará de los elementos p y q indicados, ya que ellos constituyen la intersección de los soportes de las funciones N_i y N_j . Realizaremos la integral por trozos, integrando en cada elemento y sumando esas integrales parciales. Distinguiremos el resultado de cada una de esas integrales parciales con un superíndice indicativo del elemento sobre la que está realizada, según se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{ij} &= \int_{p+q} (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i)^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_j) \cdot dV = \\ &= \int_p (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i)^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_j) \cdot dV + \int_q (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i)^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_j) \cdot dV = \underline{\underline{K}}_{ij}^{(p)} + \underline{\underline{K}}_{ij}^{(q)} \end{aligned}$$

Cuando se trata de calcular una submatriz tipo $\underline{\underline{K}}_{ii}$, el dominio de integración constará de todos los elementos que constituyan el soporte de N_i . La figura 7.7 muestra por ejemplo un caso en que dicho dominio está constituido por seis elementos, p, q, r, s, t, m.

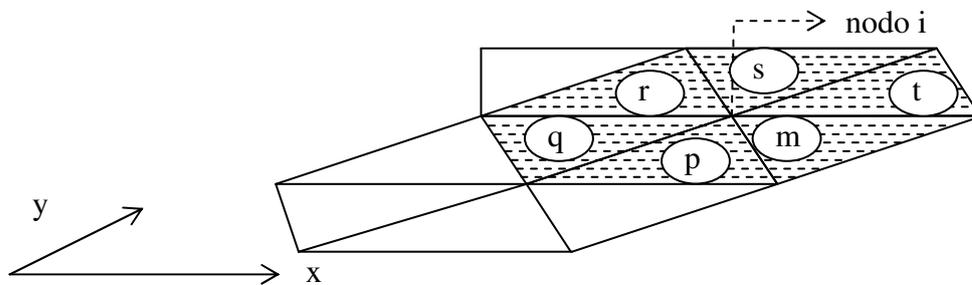


Figura 7.7.- Dominio de integración. Caso de nodos coincidentes.

Procederemos análogamente calculando la integral en cada elemento y sumando:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{ii} &= \int_V (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i)^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}}_i) \cdot dV = \int_{p+q+r+s+t+m} = \int_p + \int_q + \int_r + \int_s + \int_t + \int_m = \\ &= \underline{\underline{K}}_{ii}^{(p)} + \underline{\underline{K}}_{ii}^{(q)} + \underline{\underline{K}}_{ii}^{(r)} + \underline{\underline{K}}_{ii}^{(s)} + \underline{\underline{K}}_{ii}^{(t)} + \underline{\underline{K}}_{ii}^{(m)} \end{aligned}$$

El otro caso posible, en el que los nodos i,j sean no adyacentes, conlleva que la submatriz $\underline{\underline{K}}_{ij}$ sea nula, ya que no hay soporte común de N_i y N_j . En todo caso, podemos expresar de modo simbólico que la submatriz $\underline{\underline{K}}_{ij}$ será la suma de las submatrices $\underline{\underline{K}}_{ij}^{(e)}$ correspondientes a integrar sobre cada elemento "e" que forme el soporte común:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij} = \sum_e \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(e)} \quad (7.14)$$

La submatrices $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i$ del término de cargas admiten una expresión similar. En este caso no hay consideraciones relativas al "soporte común", ya que sólo interviene una función de aproximación (la N_i), y el dominio de integración consta de los elementos que componen el soporte de esa función. Realizando la integral correspondiente por elementos, tendremos:

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i = \sum_e \underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)} \quad (7.15)$$

Donde

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)} = \int_e (\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i)^T \underline{\underline{\mathbf{X}}} dV + \int_{S^e} (\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i)^T \underline{\underline{\mathbf{X}}} dS + \int_e (\underline{\underline{\mathbf{L}}}\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i)^T \underline{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^0 dV$$

Por supuesto, solo deberemos evaluar cada una de estas integrales en los elementos en que exista respectivamente, alguna carga de volumen, carga de contorno, o deformación inicial. Adicionalmente, la segunda integral sólo debe evaluarse en elementos con alguno de sus lados sobre el contorno del sólido, habiéndose notado como S^e la parte de S que corresponde al elemento e .

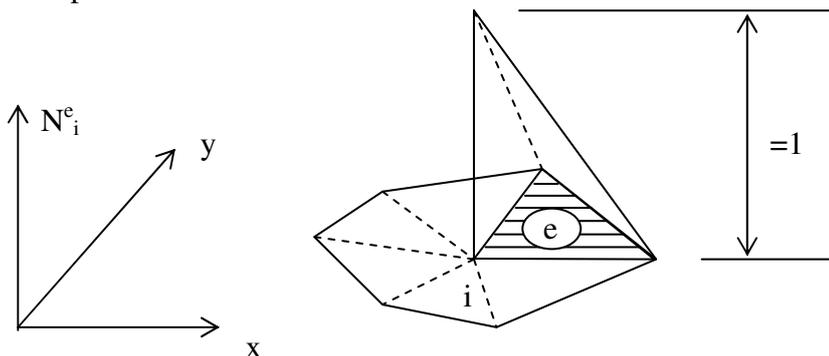


Figura 7.8.- Función de aproximación asociada al nodo i y al elemento e .

El haber definido las aportaciones elementales $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(e)}$, $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)}$, hace natural definir también las "funciones de forma elementales": N_i^e será idéntica a la función de forma N_i dentro del elemento e , pero será nula fuera de este elemento. De esta manera, N_i^e será una de las caras de la pirámide de la figura 7.5. La figura 7.8 muestra gráficamente una representación de esta función de forma del elemento.

Dado que para calcular la submatriz $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(e)}$ sólo vamos a integrar sobre el elemento e , se cumple evidentemente que:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(e)} = \int_e \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_j \right) \cdot dV = \int_e \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i^{(e)} \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_j^{(e)} \right) \cdot dV \quad (7.16)$$

Para $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)}$ cabe aplicar idéntica consideración. Desde el punto de vista conceptual no ha habido ninguna novedad. Operativamente, sin embargo, encontramos que podemos calcular por separado las aportaciones de cada elemento a la matriz de rigidez (también al vector de cargas), y posteriormente sumar las que tengan los mismos subíndices para obtener el valor correspondiente de la matriz global $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ (igualmente para $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$). Al acto de

sumar las aportaciones elementales se le denomina frecuentemente "ensamblar" la matriz de rigidez (o el término de cargas). Es aconsejable proceder considerando por turno cada elemento, calculando todas sus aportaciones de interés, y ensamblar después las matrices globales, con toda la información relevante ya calculada. El cálculo por elementos nos obliga a ser organizados, y lo que es más importante, sistematiza el proceso de manera adecuada para ser implementado en ordenador. Por otra parte, las integrales a calcular serán siempre sobre un elemento, con lo que los integrandos tendrán una sola expresión analítica en cada integral.

La presentación del concepto de matrices y funciones de forma elementales realizado en los párrafos precedentes, constituye la base para poder introducir ahora la interpretación de la aproximación como discretización en elementos, lo que constituye el objeto principal de este apartado. Imaginemos un elemento p separado del resto del sólido, constituido él mismo en sólido independiente, sobre el que actúan fuerzas concentradas en los nodos, que denotaremos como $\mathbf{F}_i^{(p)}$ (elemento p , nodo i), como muestra la figura 7.9.

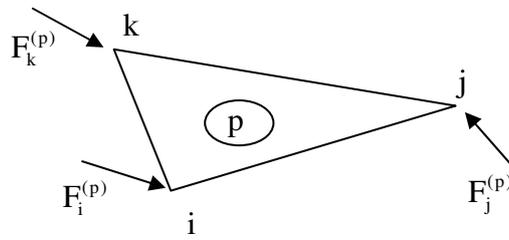


Figura 7.9.- Elemento triangular aislado, sometido a fuerzas en los nodos.

Habiendo calculado las submatrices elementales de rigidez, es inmediato plantear la ecuación que rige el comportamiento de este elemento aislado:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ii}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ik}^{(p)} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ji}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{jj}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{jk}^{(p)} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ki}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{kj}^{(p)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{kk}^{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_i \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}}_j \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{F}}}_i^{(p)} \\ \underline{\underline{\mathbf{F}}}_j^{(p)} \\ \underline{\underline{\mathbf{F}}}_k^{(p)} \end{bmatrix}$$

Pensemos ahora que el elemento, está conectado a otros elementos vecinos a través de sus nodos, y consideremos todos los elementos que comparten el nodo i . Sea por ejemplo la configuración de nodos y elementos que muestra la figura 7.10. Por simplicidad se supone que sólo dos elementos, p , q , comparten el nodo i , pero el razonamiento que sigue no se ve afectado si hay más elementos. Se asume además que actúa una fuerza exterior \mathbf{f}_i sobre el nodo i (que podría ser la "fuerza nodal equivalente", o simplemente una fuerza concentrada).

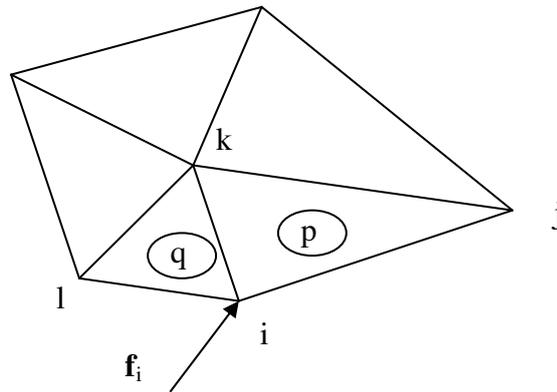


Figura 7.10.- Elemento conectado a otros a través de sus nodos.

La suma de fuerzas que actúan *sobre* el nodo i debe ser cero. Éstas son: la fuerza exterior y las que actúan sobre los elementos cambiadas de signo. Por tanto:

$$\underline{F}_i^{(p)} + \underline{F}_i^{(q)} = \underline{f}_i$$

Es decir:

$$\underline{K}_{ii}^{(p)} \underline{a}_i + \underline{K}_{ij}^{(p)} \underline{a}_j + \underline{K}_{ik}^{(p)} \underline{a}_k + \underline{K}_{ii}^{(q)} \underline{a}_i + \underline{K}_{ik}^{(q)} \underline{a}_k + \underline{K}_{il}^{(q)} \underline{a}_l = \underline{f}_i$$

O sea:

$$(\underline{K}_{ii}^{(p)} + \underline{K}_{ii}^{(q)}) \underline{a}_i + \underline{K}_{ij}^{(p)} \underline{a}_j + (\underline{K}_{ik}^{(p)} + \underline{K}_{ik}^{(q)}) \underline{a}_k + \underline{K}_{il}^{(q)} \underline{a}_l = \underline{f}_i$$

Como se aprecia en la figura 7.10, las aportaciones a \underline{K}_{ii} y a \underline{K}_{ik} son sólo las de los elementos p y q, mientras que la única aportación a \underline{K}_{ij} es la del elemento p, y a \underline{K}_{il} la del elemento q. Por tanto es correcto escribir la última ecuación como:

$$\underline{K}_{ii} \underline{a}_i + \underline{K}_{ij} \underline{a}_j + \underline{K}_{ik} \underline{a}_k + \underline{K}_{il} \underline{a}_l = \underline{f}_i$$

Que contiene todos los términos no nulos de las ecuaciones (dos o tres, según sea un problema 2D o 3D) correspondientes al nodo i en el sistema general de ecuaciones $\underline{K}\underline{a}=\underline{f}$. Lo realizado para el nodo i puede hacerse para cualquier otro, obteniéndose así todas las ecuaciones de la aproximación. Esto nos proporciona la siguiente manera alternativa, atractiva físicamente, de entender la aproximación por Elementos Finitos:

Hubiésemos obtenido el mismo modelo de aproximación dividiendo el sólido en trozos (elementos) y uniéndolos entre sí por sus nodos. Planteando el equilibrio de cada nodo resulta el mismo sistema de ecuaciones obtenido primeramente en este epígrafe 7.3 a partir de la aproximación de Galerkin. Para plantear ese equilibrio debemos conocer (o aproximar) el comportamiento aislado de cada elemento.

Históricamente, el Método de los Elementos Finitos nació hacia los años 1955-1956 basándose en esta idea de "discretización en elementos", es decir, suponiendo un comportamiento simplificado para las porciones pequeñas (pero finitas) del continuo, y conectándolas entre sí de una manera también simplificada. Esta idea tiene sus antecedentes directos en trabajos anteriores (década de 1940), que sustituían el

comportamiento de un continuo por sistemas de barras conectadas entre sí, empleando para ello diversos criterios.

Hoy día, dicho enfoque histórico es todavía empleado por algunos autores para presentar de un modo rápido esta técnica de aproximación, sin necesidad de referir a conocimientos previos como el PDV o la aproximación de Galerkin. Cuando se sigue este camino expositivo se precisa aclarar ciertas cuestiones laterales, como por ejemplo “¿qué ha ocurrido con las tensiones entre las caras de los elementos?”, ya que no es evidente si es razonable (y hasta qué punto) sustituir el sólido continuo por un conjunto de sólidos poligonales unidos sólo por sus esquinas. A pesar de las aclaraciones que se ofrezcan, tal exposición corre probablemente el riesgo de que, a falta de otros conocimientos en los que apoyarse, el lector piense que la aproximación ha sido planteada de modo tentativo, y simplemente "funciona" (históricamente ocurrió precisamente así).

Por ello se ha considerado preferible presentar el Método de los Elementos Finitos en el ámbito de todo un “cuerpo de doctrina” de los métodos aproximados, que deja muy poco lugar a dudas acerca de la verosimilitud de las aproximaciones. El lector tendrá claro, en efecto, que simplemente se han planteado tantas condiciones necesarias para el equilibrio (PDVs) como ha sido preciso para obtener un número de ecuaciones que permita calcular los parámetros indeterminados del campo de desplazamientos aproximado. La interpretación que de ello pueda hacerse será en todo caso un detalle marginal, que no afecta al planteamiento del método.

En resumen, en este apartado se ha mostrado que la aproximación de Elementos Finitos admite la interpretación de considerar al sólido como formado por elementos que están unidos solamente por sus nodos, garantizando la continuidad de los desplazamientos. Por atractiva que esta interpretación pueda resultar, se pretende simplemente que el lector tenga noticia de ella, no que cambie su punto de vista acerca de los fundamentos del método. También se ha mostrado que desde el punto de vista operativo conviene proceder organizadamente, calculando en primer lugar las aportaciones elementales de interés y realizando después su "ensamblado".

Consideraciones adicionales.

El término de cargas \mathbf{f} de la aproximación, ver ecuación (7.12), consta de dos integrales de dominio mas una integral de contorno. El integrando de las integrales de dominio son normalmente conocidos, y esas integrales deben ser evaluadas allí donde no se anule el integrando, es decir en todos los elementos donde la fuerza de volumen o el campo término no se anulen. El integrando de la integral de contorno es desconocido en las zonas de desplazamiento prescrito, por lo que aparecerán incógnitas en \mathbf{f} (nótese que las funciones de forma de Elementos Finitos no satisfacen automáticamente las condiciones de contorno en desplazamientos). Por lo demás, la integral de contorno debe asimismo evaluarse en los elementos en que el integrando no se anule. Discutiremos brevemente los casos que pueden presentarse al respecto. En primer lugar, las funciones de aproximación de nodos que no pertenecen al contorno del sólido, valen cero en dicho contorno (por ejemplo el nodo j de la figura 7.11, y cualquier otro nodo

interior). Las integrales de contorno que incluyan las funciones de forma de estos nodos serán cero. Por ejemplo, en la figura 7.11, $N_j=0$ en el contorno, por lo que la aportación de la integral de contorno correspondiente a \mathbf{f}_j es nula:

$$\int_S \underline{N}_j^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS = 0$$

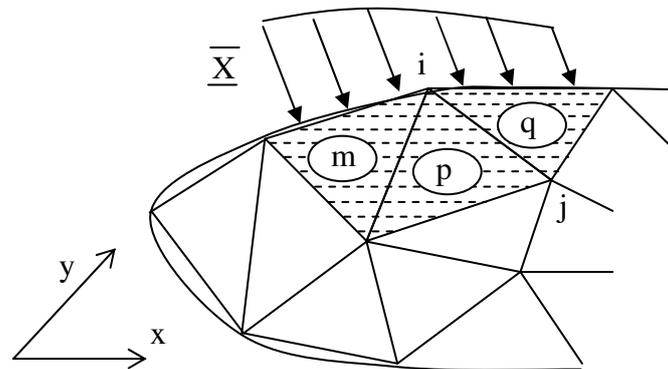


Figura 7.11.- Discretización en el contorno del sólido.

Por consiguiente, hay muchos términos de \mathbf{f} para los que no hay que calcular la integral de contorno: todos los \mathbf{f}_j correspondientes a nodos j interiores, y además todos los nodos de contorno en cuyo soporte (el de su función de forma) no haya carga de contorno. Por el contrario, si el nodo i está situado en el contorno y existe carga de contorno no nula en el soporte, debemos sumar las contribuciones de los elementos que constituyen dicho soporte. Es el caso del nodo i de la figura 7.11, cuya función de forma N_i no es nula en el contorno en los elementos q y m . Realizamos la integral correspondiente sumando ("ensamblando") las aportaciones elementales:

$$\begin{aligned} \int_S \underline{N}_i^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS &= \int_{S_p} (\underline{N}_i^{(p)})^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS + \int_{S_q} (\underline{N}_i^{(q)})^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS + \int_{S_m} (\underline{N}_i^{(m)})^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS = \\ &= \int_{S_q} (\underline{N}_i^{(q)})^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS + \int_{S_m} (\underline{N}_i^{(m)})^T \bar{\mathbf{X}} \cdot dS \end{aligned}$$

En principio se ha incluido también una integral extendida al contorno del sólido perteneciente al elemento p , S_p . Sin embargo, S_p se reduce a un punto, por lo que la integral correspondiente es nula. Cabría discutir que no lo fuera si en integrando se hiciese infinito en ese punto. El único caso que estudiaremos en el que eso puede ocurrir es el de fuerza concentrada, y ya se ha visto que finalmente su tratamiento resulta muy simple, no siendo siquiera provechoso el considerar sus aportaciones elementales.

Como segunda y última "consideración adicional" en este apartado, llamaremos la atención sobre el hecho de que la submatrices \mathbf{K}_{ij} de \mathbf{K} admiten una interpretación como coeficientes de influencia, pero definidos en un sentido de rigidez en lugar de en el sentido inverso, de flexibilidad, con el que se trabajó en el epígrafe 5.10. Es decir, cada componente de un "tensor de coeficientes de influencia" definido en (5.11) representaba el desplazamiento de un punto en cierta dirección cuando se aplicaba una fuerza unidad en otro punto y según otra dirección. En cambio, cada componente de una "submatriz de rigidez" representa la fuerza que aparece en un nodo según una dirección cuando se

impone un movimiento unidad en otro nodo según otra dirección, y movimiento nulo en todas las componentes de todos los nodos, salvo la citada. La figura 7.12 ayudará a apreciar lo anterior.

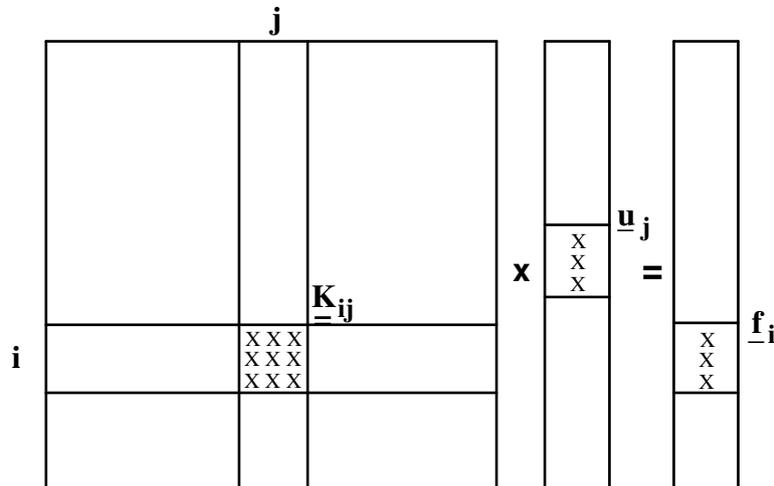


Figura 7.12.- Estructura del sistema de ecuaciones final.

El interés de la apreciación anterior es doble:

Por una parte, establece una relación entre la matriz de rigidez y la de coeficientes de influencia. En efecto, considérese la matriz global de coeficientes de influencia para un problema con determinadas condiciones de contorno en desplazamientos, que relacione todos los movimientos de los nodos con todas las fuerzas nodales existentes, en ambos casos exceptuando a los nodos con desplazamiento impedido. La ecuación correspondiente será del tipo $\mathbf{a}' = \mathbf{C}\mathbf{f}'$ (\mathbf{a}' y \mathbf{f}' contienen las variables asociadas a todos los nodos salvo los de desplazamiento impedido) La matriz global de coeficientes de influencia \mathbf{C} , admite inversa (recuérdese que está definida para unas condiciones de contorno en desplazamientos prefijadas, ver epígrafe 5.10), por lo que podemos escribir la relación inversa $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}' = \mathbf{f}'$. Si en la ecuación global de la aproximación por elementos finitos, $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, imponemos las condiciones de contorno (homogéneas) en desplazamientos y descartamos las variables asociadas a nodos con desplazamiento impedido, obtendremos una relación del tipo $\mathbf{K}'\mathbf{a}' = \mathbf{f}'$. Veremos en los ejemplos que esta imposición de condiciones de contorno se hace simplemente eliminando filas y columnas de \mathbf{K} , por lo que \mathbf{K}' resulta ser simplemente un subconjunto de \mathbf{K} . Es por tanto evidente que \mathbf{C}^{-1} , inversa de la matriz de coeficientes de influencia, es igual que \mathbf{K}' , matriz de rigidez con las condiciones de contorno ya impuestas.

Por otra parte, permite apreciar que las nueve componentes, -cuatro en problemas 2D-, de cada submatriz \mathbf{K}_{ij} forman un tensor (cartesiano de orden dos, pero en general no simétrico), ya que relaciona dos vectores. Frecuentemente es útil transformar las variables a coordenadas inclinadas (para imponer condiciones de contorno según direcciones inclinadas, por ejemplo). Para transformar la submatriz de rigidez a otros ejes sólo hay que aplicarle la ley de transformación de los tensores. Se sugiere que para ello se exprese primeramente la ley de transformación de forma matricial, y se aplique de esta manera, para evitar confusión con los subíndices de \mathbf{K}_{ij} , que aquí no representan las coordenadas espaciales, sino a los nodos i y j .

7.4.- Ejemplos.

Ejemplo 1.

Pretendemos averiguar, sin calcular su valor, qué posiciones de la matriz global \mathbf{K} correspondiente a la discretización bidimensional de la figura 7.13 son distintas de cero. Lo serán aquellas en las que se deba ensamblar la aportación de algún elemento.

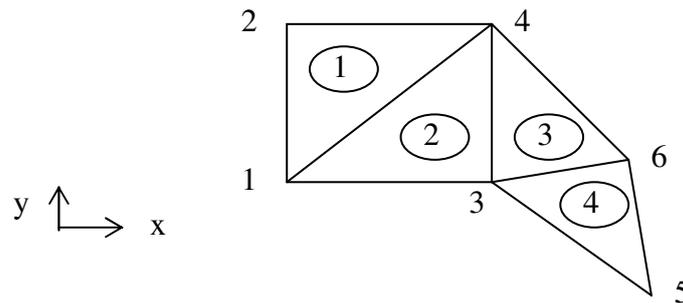


Figura 7.13.- Problema bidimensional. Discretización: seis nodos y cuatro elementos triangulares.

La matriz \mathbf{K} que resulta de aplicar el MEF es una matriz cuadrada, formada por submatrices \mathbf{K}_{ij} de dimensiones (2x2) en problemas bidimensionales. Cada submatriz se expresa como:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij} = \int_V \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_j \right) \cdot dV$$

Cada integral como la anterior debe evaluarse allí donde el integrando no sea nulo, es decir, en el soporte común de las funciones N_i y N_j . Por ejemplo, \mathbf{K}_{11} debe evaluarse en todo el soporte de N_1 , que está formado por los elementos 1 y 2. Por tanto:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11} &= \int_V \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1 \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1 \right) \cdot dV = \int_1 \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^{(1)} \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^{(1)} \right) \cdot dV + \\ &+ \int_2 \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^{(2)} \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^{(2)} \right) \cdot dV = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(2)} \end{aligned}$$

De modo análogo, procederemos sucesivamente para cada par de nodos, siguiendo el orden 11, 12, ..., 16, 22, 23, ..., 26, 33, 34, ..., 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66, apreciando en cada caso si las funciones de forma correspondientes tienen soporte común. En caso afirmativo habrá aportación no nula de cada elemento que constituya el soporte común. En caso negativo la submatriz será nula. No es preciso ocuparse de las submatrices bajo la diagonal principal de \mathbf{K} , como \mathbf{K}_{64} ya que $\mathbf{K}_{64} = \mathbf{K}_{46}^T$.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12} &= \int_V \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1 \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_2 \right) \cdot dV = \int_1 \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_1^{(1)} \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_2^{(1)} \right) \cdot dV = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12}^{(1)} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13} &= \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13}^{(2)} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14} &= \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14}^{(2)} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{15} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{16} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Nos ocupamos ahora de las submatrices cuyo primer subíndice corresponde al nodo 2, comenzando por $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^{(1)} ; \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}; \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{24} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{24}^{(1)} ; \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{25} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{26} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Ahora seguiríamos con las submatrices cuyo primer subíndice corresponde al nodo 3, comenzando por $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}$, etc. El proceso sería en todo análogo para el resto de términos. Si vamos apuntando en su emplazamiento final (de la matriz global) las aportaciones no nulas que vamos encontrando al seguir el proceso anterior, encontramos que la estructura de la matriz global es:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(2)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12}^{(1)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13}^{(2)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14}^{(2)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \hline & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^{(1)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{24}^{(1)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \hline & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(3)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(4)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{34}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{34}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{35}^{(4)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{36}^{(3)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{36}^{(4)} \\ \hline & & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \hline & & & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{55}^{(4)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{56}^{(3)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{56}^{(4)} \end{array} \right)$$

Ejemplo 2.

Nos interesa saber (sin cálculos) como será la estructura del sistema de ecuaciones del MEF aplicado al problema que se indica en la figura 7.14, teniendo en cuenta las condiciones de contorno en tensiones y desplazamientos. La figura izquierda muestra el sólido con sus condiciones de contorno, y la figura derecha muestra la discretización empleada, así como las cargas concentradas y reacciones en los apoyos, empleando la misma notación que venimos manejando en la exposición del MEF.

Comenzamos por imponer las condiciones de contorno en el término de desplazamientos y en el de cargas. Este último no requiere el cálculo de integrales en este caso, ya que todas las cargas son fuerzas concentradas:

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}} = \left[(0 \ 0), (a_2^x \ a_2^y), (0 \ 0), (a_4^x \ a_4^y), (a_5^x \ a_5^y), (a_6^x \ a_6^y) \right]^T$$

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}} = \left[(f_1^x \ f_1^y), (0 \ 0), (f_3^x \ f_3^y), (0 \ 0), (0 \ -1), (+1 \ 0) \right]^T$$

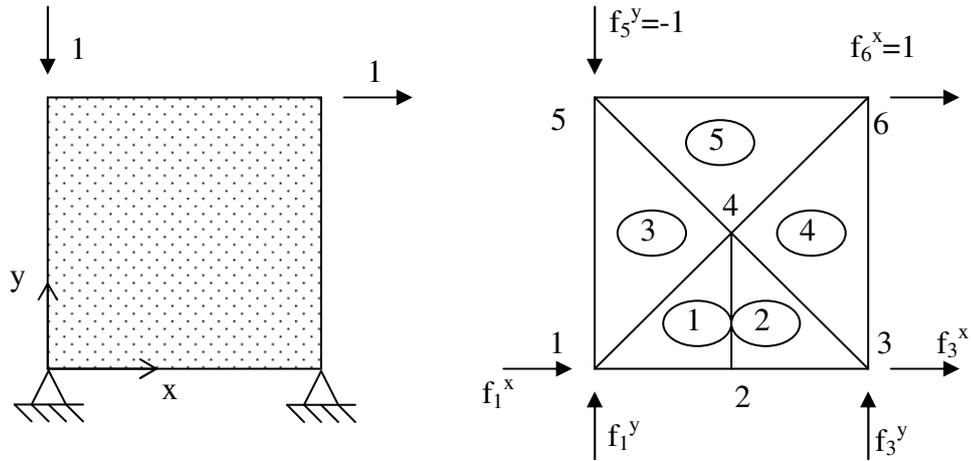


Figura 7.14.- Problema bidimensional y su discretización.

La estructura de la matriz de rigidez se averigua mediante el mismo procedimiento utilizado en el ejemplo anterior:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12}^{(1)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{14}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{15}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^{(2)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23}^{(2)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{24}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{24}^{(2)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(4)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{34}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{34}^{(4)} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{36}^{(4)} \\ & & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(3)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(4)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^{(5)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{45}^{(3)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{45}^{(5)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{46}^{(4)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{46}^{(5)} \\ & & & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{55}^{(3)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{55}^{(5)} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{56}^{(5)} \\ & & & & & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{66}^{(4)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{66}^{(5)} \end{array} \right)$$

Y el sistema de ecuaciones es:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2^x \\ a_2^y \\ 0 \\ 0 \\ a_4^x \\ a_4^y \\ a_5^x \\ a_5^y \\ a_6^x \\ a_6^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^x \\ f_1^y \\ 0 \\ 0 \\ f_3^x \\ f_3^y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos extraer algunas enseñanzas interesantes de este ejemplo:

En primer lugar, todas las submatrices \mathbf{K}_{i1} , \mathbf{K}_{i3} , ($i=1\dots6$), se van a multiplicar por cero en el sistema de ecuaciones. Podríamos haber prestado atención a este detalle y obviar su cálculo. Esto ocurrirá siempre con los nodos cuyo desplazamiento esté totalmente impedido, como es aquí el caso de los nodos 1 y 3.

En segundo lugar, apreciamos que si en un nodo es incógnita la componente de desplazamiento según una dirección, la componente correspondiente de la "fuerza nodal" no es incógnita, y viceversa, si la incógnita es el desplazamiento no lo es la fuerza. Por tanto el sistema de ecuaciones se mantiene con $2n$ incógnitas ($3n$ en problemas tridimensionales; n = número de nodos). Esto ocurrirá siempre en las aproximaciones de Elementos Finitos, pero en general no ocurriría con una aproximación de Galerkin (a menos que las funciones de aproximación se ajustasen de partida a las condiciones de contorno en desplazamientos).

En tercer lugar, vemos que las ecuaciones (escalares) 3ª, 4ª, 7ª, 8ª, 9ª, 10ª, 11ª y 12ª forman un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas (todas ellas desplazamientos). Este sistema de ocho ecuaciones es resoluble, y permite calcular todos los desplazamientos nodales desconocidos. Una vez realizado esto, pueden calcularse las fuerzas nodales desconocidas empleando el resto de las ecuaciones (1ª, 2ª, 5ª y 6ª). Este procedimiento es aplicable con generalidad para calcular las incógnitas de una aproximación por el Método de Elementos Finitos.

Ejemplo 3.

Determinaremos la expresión de la función $N_i^{(e)}$, asociada al nodo i y definida sobre el elemento triangular de tres nodos e (figura 7.15).

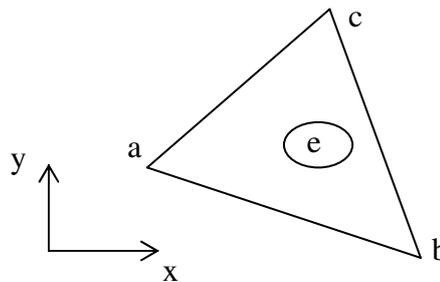


Figura 7.15.- Elemento 2D triangular de tres nodos.

Las condiciones básicas que debe cumplir dicha función son: valer la unidad en el nodo i , y cero en los restantes. Estas condiciones proporcionan en nuestro caso tres ecuaciones, que permiten determinar tres parámetros. Casi siempre se utilizan funciones de forma polinómicas. Podemos completar un polinomio de primer grado en x, y , para la función de forma asociada a cada nodo del elemento:

$$N_a^{(e)} = \alpha_a + \beta_a x + \gamma_a y ; \quad N_b^{(e)} = \alpha_b + \beta_b x + \gamma_b y ; \quad N_c^{(e)} = \alpha_c + \beta_c x + \gamma_c y$$

Que expresado en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} N_a^{(e)} & N_b^{(e)} & N_c^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_a & \alpha_b & \alpha_c \\ \beta_a & \beta_b & \beta_c \\ \gamma_a & \gamma_b & \gamma_c \end{bmatrix}$$

Planteando la expresión matricial anterior para las coordenadas del nodo "a" (x_a, y_a), nodo "b" (x_b, y_b) y nodo "c" (x_c, y_c), resulta:

$$\begin{bmatrix} N_a^{(e)}(\underline{x}_a) & N_b^{(e)}(\underline{x}_a) & N_c^{(e)}(\underline{x}_a) \\ N_a^{(e)}(\underline{x}_b) & N_b^{(e)}(\underline{x}_b) & N_c^{(e)}(\underline{x}_b) \\ N_a^{(e)}(\underline{x}_c) & N_b^{(e)}(\underline{x}_c) & N_c^{(e)}(\underline{x}_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_a & \alpha_b & \alpha_c \\ \beta_a & \beta_b & \beta_c \\ \gamma_a & \gamma_b & \gamma_c \end{bmatrix}$$

Luego las dos matrices del miembro derecho son una la inversa de la otra. Invertiendo la matriz de coordenadas de los nodos obtenemos la que contiene los coeficientes de las funciones de forma del elemento:

$$\begin{bmatrix} \alpha_a & \alpha_b & \alpha_c \\ \beta_a & \beta_b & \beta_c \\ \gamma_a & \gamma_b & \gamma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{bmatrix}^{-1}$$

El procedimiento anterior, puede aplicarse para cualquier otro tipo de elemento, bi o tridimensional. No estamos limitados a elementos triangulares, ni de lados rectos (aunque sí debemos asegurar la continuidad de desplazamientos entre elementos). Por ejemplo, puede utilizarse un elemento bidimensional de ocho nodos como el mostrado en la figura 7.16. Habiendo 8 nodos, podremos incluir 8 parámetros en cada función de forma. Como regla general, conviene plantear polinomios completos hasta el grado que sea posible, y no incluir términos de orden superior si no se ha completado el polinomio de orden inferior. En este caso podemos completar un polinomio de segundo grado (que en dos dimensiones tiene 6 términos), y deberemos tomar además 2 de los términos de cuarto grado, por ejemplo los x^2y , xy^2 .

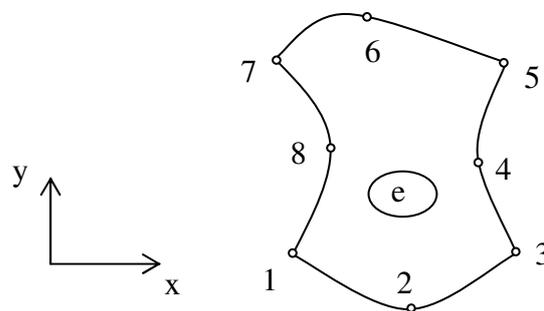


Figura 7.16.- Elemento bidimensional de ocho nodos.

La función de forma de cada nodo i del elemento, tendría una expresión del tipo $a_i + b_i x + c_i y + d_i x^2 + e_i xy + f_i y^2 + g_i x^2 y + h_i xy^2$, y los coeficientes $a_i \dots h_i$ (con $i=1..8$) se podrían encontrar mediante una ecuación matricial similar a la planteada para el elemento triangular. El uso extensivo de este procedimiento tiene algunos inconvenientes. En primer lugar, la

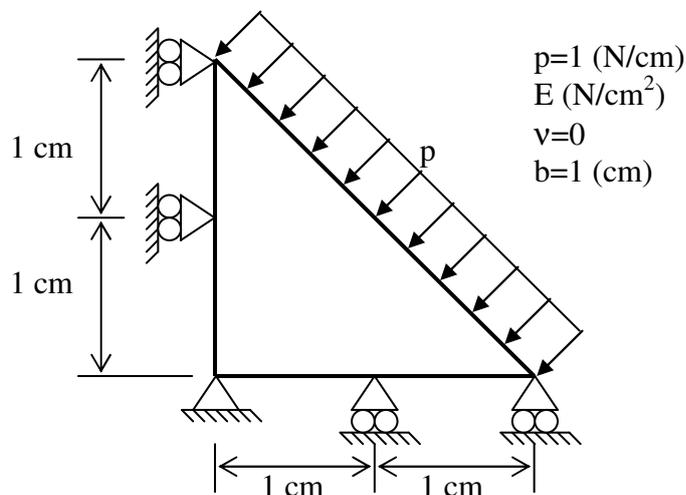
existencia de matriz inversa no está garantizada para todas las geometrías. Por otra parte, la inversión de una matriz para cada elemento llega a suponer un coste computacional apreciable. Además, el definir elementos complicados siguiendo el procedimiento descrito complica la integración numérica. Debido a ello, y aunque algunos de los primeros programas de Elementos Finitos utilizaban este procedimiento, en la actualidad se prefiere plantear estos elementos "complicados" (de lados curvos y orden superior) mediante una transformación de un dominio normalizado de geometría parecida a la que aparece en espacio x,y , pero más sencilla.

En el dominio normalizado las funciones de forma están definidas y son siempre las mismas. Las integraciones numéricas se plantean también en el dominio normalizado, no presentando mayor problema que la inclusión en la integral del Jacobiano correspondiente a la transformación de la geometría normalizada en la real. Simplemente hay que cuidar que la distorsión del elemento real respecto de la geometría normalizada no sea excesiva. Por ejemplo, el elemento de la figura 7.16 en el espacio $x-y$ podría obtenerse mediante transformación de un elemento que en un espacio normalizado $\xi-\eta$ fuese un cuadrado de lados rectos que ocupase $(-1,+1)$ en cada coordenada, y tuviese nodos en las esquinas y en la mitad de los lados. El concepto "tipos de elementos" que un programa comercial de Elementos Finitos tiene implementados" se corresponde con las configuraciones en el dominio normalizado que el programa tenga programadas, y conviene conocer cómo están construidas para no distorsionar el elemento demasiado, lo que podría causar la no biunicidad de la transformación, e inexactitudes en la integración numérica. Los detalles de esta técnica de transformación no son complicados, pero caen fuera de los propósitos de esta breve introducción al MEF. El lector interesado puede consultar por ejemplo el libro de Zienkiewicz recomendado al final del capítulo.

Ejemplo 4.

Con el fin de consolidar las ideas expuestas en los ejemplos anteriores, aplicaremos paso a paso el Método de los Elementos Finitos al problema propuesto en la figura 7.17.

Figura 7.17.- Placa triangular sometida a carga uniforme en su cara oblicua.



Dicha figura, muestra un sólido de sección triangular y espesor unidad ($b=1\text{ cm}$), sometido en su cara oblicua a una carga uniformemente distribuida de valor $p=1\text{ (N/cm)}$, y sustentado según se indica. Las características elásticas del material que compone el sólido a analizar son: Módulo de Young $E\text{ (N/cm}^2\text{)}$, y Coeficiente de Poisson nulo. La discretización empleada es la que se indica en la figura 7.18, y consta de dos elementos triangulares y un elemento cuadrado. La posición geométrica de los nodos se ha elegido coincidente con la de los apoyos, para que las condiciones de contorno en desplazamientos se puedan imponer fácilmente.

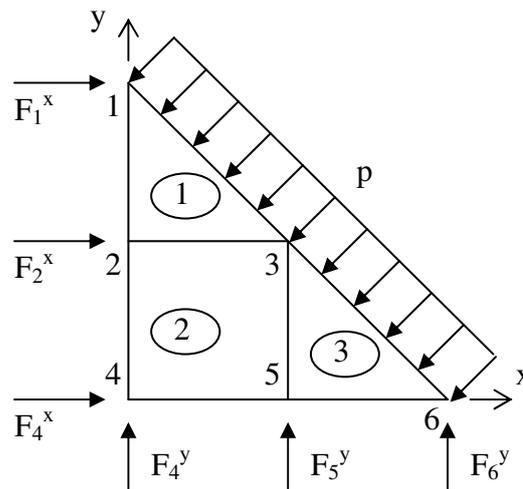


Figura 7.18.- Discretización del dominio empleada.

En primer lugar, determinamos las expresiones analíticas de las funciones de aproximación del campo de desplazamientos $N_i^{(e)}$, para cada nodo i y elemento e .

Elemento 1: En nuestro caso, dado lo sencillo de las geometrías elementales, las funciones de forma se pueden encontrar por simple inspección. No obstante aprovecharemos para ilustrar el procedimiento expuesto en el ejemplo anterior. Para un elemento de tres nodos, consideraremos un polinomio completo en x,y , como función de forma. Obtendremos los coeficientes invirtiendo la matriz de coordenadas nodales:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{aligned} N_1^{(1)} &= y - 1 \\ N_2^{(1)} &= 2 - x - y \\ N_3^{(1)} &= x \end{aligned}$$

Elemento 3:

$$\begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_3 & \beta_5 & \beta_6 \\ \gamma_3 & \gamma_5 & \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{aligned} N_3^{(3)} &= y \\ N_5^{(3)} &= 2 - x - y \\ N_6^{(3)} &= x - 1 \end{aligned}$$

Elemento 2: Se trata de un elemento con cuatro nodos, y por lo tanto, como funciones de forma podemos considerar polinomios en x,y , con cuatro parámetros indeterminados. Siguiendo la pauta recomendada, elegimos completar el polinomio de orden uno (tres

términos). Debemos incluir un término más aunque con ello no podamos completar un polinomio de orden dos. Elegimos por ejemplo el término xy :

$$\begin{bmatrix} N_2^{(2)} & N_3^{(2)} & N_4^{(2)} & N_5^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 \end{bmatrix}$$

Planteando esta ecuación para cada uno de los nodos del elemento e invirtiendo la matriz correspondiente, obtenemos los coeficientes de las funciones de forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{cases} N_2^{(2)} = y - xy \\ N_3^{(2)} = xy \\ N_4^{(2)} = 1 - x - xy + xy \\ N_5^{(2)} = x - xy \end{cases}$$

A continuación, calcularemos las aportaciones de cada uno de los elementos a la matriz de rigidez global. La matriz de constantes elásticas es:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Elemento 1. Las funciones de forma del elemento 1 son lineales, por lo tanto, sus derivadas son constantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} &= 0; \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial x} = -1; \frac{\partial N_3^{(1)}}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial y} &= 1; \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial y} = -1; \frac{\partial N_3^{(1)}}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Con esto tenemos:

$$\underline{\underline{K}}_{11}^{(1)} = \int_V E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{12}^{(1)} = \int_V E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13}^{(1)} = \int_V E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^1 = \int_V E \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23}^1 = \int_V E \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(1)} = \int_V E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dV = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Elemento 3. Cada una de sus funciones de forma sólo difiere en una constante de las del nodo homólogo del elemento 1, por lo que sus derivadas son idénticas. Por tanto, no tenemos más que cambiar el nombre de los nodos del elemento 1, y obtenemos las submatrices del elemento 3:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11}^{(1)} = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{55}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^{(1)} = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{35}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12}^{(1)} = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{56}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23}^{(1)} = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{36}^3 = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13}^1 = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{66}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(1)} = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Elemento 2. En este caso, las derivadas de las funciones de aproximación no son constantes al variar x, y , y debido a ello el cálculo explícito de las integrales es más molesto. Simplificaremos dicho cálculo realizando una integración numérica, tal como haría cualquier programa comercial. Aproximaremos el valor de la integral por el resultado de multiplicar el valor del integrando en el punto medio del elemento por el área de éste. En esto consiste la cuadratura de Gauss de un punto (prácticamente todos los programas comerciales usan cuadraturas de Gauss superiores, de cuatro o más puntos). Las derivadas de las funciones de forma y sus valores en el punto medio del elemento, se incluyen en la siguiente tabla

	$N_2^{(2)}$		$N_3^{(2)}$		$N_4^{(2)}$		$N_5^{(2)}$	
$\partial/\partial x$	-y	-1/2	y	1/2	y-1	-1/2	y-1	1/2
$\partial/\partial y$	1-x	1/2	x	1/2	x-1	-1/2	-x	-1/2

Utilizamos esta integración aproximada para calcular las aportaciones del elemento 2:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22}^{(2)} &= \int_V \mathbf{E} \begin{pmatrix} -y & 0 & (1-x) \\ 0 & (1-x) & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y & 0 \\ 0 & (1-x) \\ (1-x) & -y \end{pmatrix} dV \approx \\
&\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23}^{(2)} &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/8 & 1/8 \\ -1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{24}^{(2)} &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 \\ 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{25}^{(2)} &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} -3/8 & 1/8 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33}^{(2)} &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 \\ 1/8 & 3/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{34}^2 &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} -3/8 & -1/8 \\ -1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{35}^2 &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 \\ -1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \\
\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{44}^2 &\approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 \\ 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{45}^{(2)} \approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} -1/8 & -1/8 \\ 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{55}^{(2)} \approx \mathbf{E} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \mathbf{E} \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Calcularemos a continuación el término de cargas (de fuerzas nodales equivalentes). No tenemos carga de volumen, por tanto:

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}} = \int_s \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dS$$

Y las aportaciones elementales a cada submatriz de $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ son:

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)} = \int_e \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i^{(e)} \right)^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot dS = \int_e \begin{pmatrix} \mathbf{N}_i^{(e)} \bar{\mathbf{X}}_x \\ \mathbf{N}_i^{(e)} \bar{\mathbf{X}}_y \end{pmatrix} \cdot dS$$

No vamos a considerar aquí las cargas puntuales aplicadas en los nodos, que simplemente añadiremos a la submatriz correspondiente de $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ en la etapa final del ensamblado. Las submatrices que vamos a calcular ahora, tipo $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_i^{(e)}$, incluyen sólo las aportaciones de la carga distribuida. En otro orden de cosas, es de interés resaltar el hecho de que dS debe ser (es inherentemente) una cantidad positiva. Si se integrase por ejemplo en el contorno entre los nodos 5 y 6, puede seguirse el sentido 5-6 o el 6-5; en el primer caso deberíamos escribir $dS=dx_1$, y en el segundo caso $dS=-dx_1$.

Elemento 1.

Sus aportaciones son:

$$\text{para } \underline{\underline{\mathbf{f}}}_1^{(1)} : \int_{y=1}^2 \begin{pmatrix} (y-1) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\ (y-1) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} \sqrt{2} dy = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}; \quad \text{para } \underline{\underline{\mathbf{f}}}_2^{(1)} : 0$$

Ya que, en la cara vertical del elemento 1, no hay carga distribuida de contorno (dijimos que de las concentradas nos ocuparíamos más tarde), mientras que en la cara oblicua es nula la función de forma $\mathbf{N}^{(1)}_2$.

$$\text{para } \underline{\underline{\mathbf{f}}}_3^{(1)} : \int_{x=0}^1 \begin{pmatrix} x \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\ x \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} \sqrt{2} dx = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Elemento 2.

Este elemento sólo tiene un punto en el contorno con carga distribuida (el nodo 3). Con el dominio de integración reducido a un punto, y no haciéndose infinito el integrando, la integral vale cero. Por tanto no hay aportación del elemento 2 debido a la carga distribuida.

Elemento 3:

Sus aportaciones son:

$$\text{para } \underline{f}_3^{(3)} : \int_{y=0}^1 \begin{pmatrix} y \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\ y \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} \sqrt{2} dy = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}; \quad \text{para } \underline{f}_5^{(3)} : 0$$

$$\text{para } \underline{f}_6^{(3)} : \int_{x=1}^2 \begin{pmatrix} (x-1) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\ (x-1) \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \end{pmatrix} \sqrt{2} dx = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Seguidamente formaremos el sistema de ecuaciones, "ensamblando" las aportaciones de cada elemento en la posición adecuada de la matriz global \mathbf{K} del término de cargas \mathbf{f} . Ahora es el momento de incluir las fuerzas concentradas:

$$\begin{pmatrix}
 \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{3}{4} + \frac{3}{8} & \frac{1}{4} - \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{3}{4} + \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} & 0 + \frac{1}{8} + 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{3}{8} + \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{3}{8} + \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{1}{4} & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 a_1^x \\
 a_1^y \\
 a_2^x \\
 a_2^y \\
 a_3^x \\
 a_3^y \\
 a_4^x \\
 a_4^y \\
 a_5^x \\
 a_5^y \\
 a_6^x \\
 a_6^y
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 -\frac{1}{2} + F_1^x \\
 -\frac{1}{2} \\
 F_2^x \\
 0 \\
 -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
 -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
 F_4^x \\
 F_4^y \\
 0 \\
 F_5^y \\
 -\frac{1}{2} \\
 -\frac{1}{2} + F_6^y
 \end{pmatrix}$$

Procedemos a calcular las incógnitas de desplazamiento. Como sabemos, debemos imponer antes las condiciones de contorno en desplazamientos en para obtener un conjunto de

ecuaciones resoluble. En nuestro caso, los apoyos existentes implican que: $a_1^x = a_2^x = a_4^x = a_4^y = a_5^y = a_6^y = 0$. Llevando lo anterior al sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{array}{c}
 \text{E} \\
 \left(\begin{array}{cccc|cccc|cc|cc}
 \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 & & \frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 & & & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 \\
 \hline
 & & & & \frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\
 & & & & & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & 0 & 0 \\
 \hline
 & & & & & & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\
 \hline
 & & & & & & & & \frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\
 & & & & & & & & & \frac{9}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \\
 \hline
 & & & & & & & & & & \frac{1}{2} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{1}{4}
 \end{array} \right) \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} 0 \\ a_1^y \\ 0 \\ a_2^y \\ a_3^x \\ a_3^y \\ 0 \\ a_5^x \\ 0 \\ a_6^x \\ 0 \end{array} \right) = \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} + F_1^x \\ -\frac{1}{2} \\ F_2^x \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ F_4^x \\ F_4^y \\ 0 \\ F_5^y \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + F_6^y \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

Prescindimos de las ecuaciones que tienen incógnita en el término de carga. Con las restantes podemos calcular las incógnitas de desplazamiento:

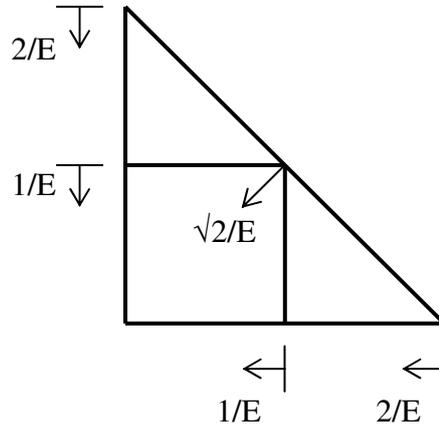
$$\begin{array}{c}
 \text{E} \\
 \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{9}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 & & & & & \frac{1}{2} & 0 & 0
 \end{array} \right) \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} a_1^y \\ a_2^y \\ a_3^x \\ a_3^y \\ a_5^x \\ a_6^x \end{array} \right) = \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la siguiente solución, que se ilustra gráficamente en la figura 7.19::

$$a_1^y = -2/E \quad a_2^y = -1/E \quad a_3^x = -1/E \quad a_3^y = -1/E \quad a_5^x = -1/E \quad a_6^x = -2/E$$

Figura 7.19.- Desplazamientos de los nodos de la discretización.

Una vez conocidos los desplazamientos de los nodos, las ecuaciones que en su momento no



utilizamos nos permiten determinar el valor de las reacciones en los apoyos. Esta operación no requiere más que simple sustitución de valores, no la resolución de ningún sistema de ecuaciones. El resultado es:

$$F_1^x = \frac{1}{2}; \quad F_2^x = 1; \quad F_4^x = \frac{1}{2}; \quad F_4^y = \frac{1}{2}; \quad F_5^y = 1; \quad F_6^y = \frac{1}{2}$$

Finalmente vamos a ver que en este problema es posible, excepcionalmente, saber la solución exacta por simple inspección, y vamos a comparar dicha solución exacta con la obtenida mediante la aproximación.

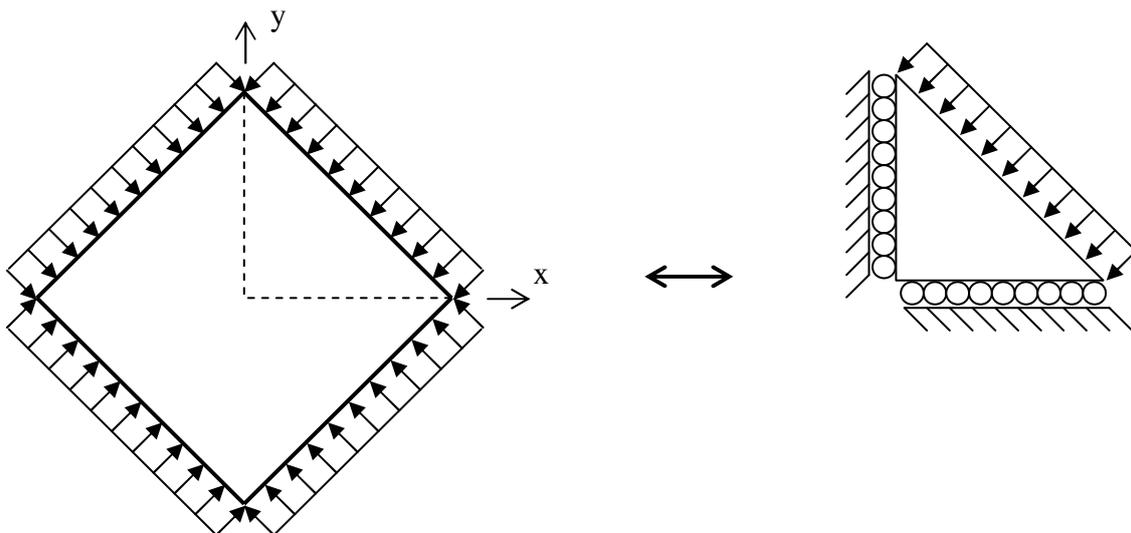


Figura 7.20.- Problema equivalente.

En efecto, apréciase que la configuración analizada sería la que resultaría de aplicar al problema de la figura 7.20 las condiciones de simetría respecto de ambos ejes coordenados. Es fácil apreciar que en dicho problema ocurre un estado uniforme de compresión hidrostática

de valor p , por lo que cualquier dirección presenta la misma deformación (el círculo de Mohr en cualquier punto del sólido, se reduce a un punto). Así, para la dirección x , al igual que para cualquier otra dirección, la deformación longitudinal es constante, y el campo de desplazamientos lineal:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \quad ; \quad \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{p}{E}$$

Las condiciones de sustentación de nuestro problema original implican que el origen no se mueve ni gira, por lo que el movimiento de cualquier punto será proporcional a la distancia al origen (con factor de proporcionalidad p/E), y estará dirigido precisamente hacia el origen. Se comprueba inmediatamente que nuestra aproximación por Elementos Finitos ha alcanzado esa solución "exacta". Esto ha sido así en este caso porque las funciones de forma empleadas son capaces de representar el estado de deformación que constituye la solución exacta del problema (desplazamiento lineal, deformación constante).

Si se desea calcular el desplazamiento de un punto no nodal, recordemos que sólo hay que acudir a la expresión inicial $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a}$. Sólo habrá que considerar las funciones de forma que no se anulen en el punto en el que se desea calcular el desplazamiento, es decir, aquellas del elemento en que se encuentra el punto. Así por ejemplo, si está dentro del elemento 1 tendremos:

$$\underline{\mathbf{u}}(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1^{(1)}a_1^x + N_2^{(1)}a_2^x + N_3^{(1)}a_3^x \\ N_1^{(1)}a_1^y + N_2^{(1)}a_2^y + N_3^{(1)}a_3^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/E \\ -y/E \end{pmatrix}$$

El campo de deformaciones dentro de cada elemento se obtiene fácilmente por derivación del campo de movimientos mediante la fórmula $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}\underline{\mathbf{u}}$, y el campo de tensiones a partir del de deformaciones mediante la ley de comportamiento, $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$.

Bibliografía:

ZIENKIEWICZ, O.C., "El método de los Elementos Finitos", Ed. Reverté
 RAO, S.S. "The Finite Element Method in Engineering", Ed. Pergamon Press
 HINTON & OWEN, "Finite Element Programming", Academic Press
 PARIS, F., "Teoría de la Elasticidad", ETSII-Univ. Sevilla