



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

Método de variación de masa para determinar propiedades modales

Autor:

López-Peteiro Tuñón, Javier Ignacio

Tutor:

**Lorenzana Ibán, Antolín
Departamento de Construcciones
Arquitectónicas, Ingeniería del
Terreno y Mecánica de los Medios
Continuos y Teoría de Estructuras**

Valladolid, octubre de 2016.

Resumen

En la determinación de propiedades modales de las estructuras (frecuencias y modos de vibración) influyen parámetros como su rigidez y masa que en principio se podrían calcular o estimar directamente en la etapa de proyecto. Sin embargo, una vez construida la estructura, se debe recurrir a métodos indirectos para su determinación. Uno de los más usados es el método de la variación de la masa. Consiste en añadir masas conocidas a la estructura y medir su respuesta libre ante determinadas excitaciones, con el fin de determinar (mediante post-procesado basado en FFT) sus frecuencias propias. Con un conjunto suficiente de experimentos de este tipo se puede construir un sistema de ecuaciones del que obtener las rigideces y masas buscadas.

Palabras clave: **frecuencia, modal, rigidez, masa, variación**

Abstract

In the determination of modal properties in structures (frequencies and mode shapes) take part some parameters like stiffness and mass which in principle could be calculated or estimated directly in project stage. However, once the structure is built, one must opt for indirect methods for their determination. One of the most popular is the mass change method. It consists in adding known masses to the structure and measuring its free response to certain excitations, so as to determine (through FFT-based postprocessing) its eigenfrequencies. With a sufficient set of experiments of this type a system of equations can be made from which to obtain the desired stiffnesses and masses.

Keywords: **frequency, modal, stiffness, mass, change**

Índice

Resumen	2
Nomenclatura	5
Figuras	7
Tablas	9
I Introducción	10
II Objetivos	12
III Estado del arte	14
IV Sistemas discretos	16
1. Sistema de 1 gdl: maqueta de edificio de 1 piso	17
1.1. Descripción	17
1.2. Análisis del sistema	17
1.2.1. Obtención de la masa	20
1.3. Método de variación de masa: procedimiento experimental	21
1.3.1. Consideraciones previas	21
1.3.2. Procedimiento de medición	29
1.4. Presentación y análisis de resultados	33
1.4.1. Cálculo de la rigidez	33
1.4.2. Interpretación de resultados	34
2. Sistema de 2 gdl: maqueta de edificio de 2 pisos	35
2.1. Descripción	35
2.2. Análisis del sistema	35
2.2.1. Obtención de las masas	37
2.2.2. Obtención de las rigideces	37
2.3. Método de variación de masa: procedimiento experimental	38
2.4. Presentación y análisis de resultados	41
V Sistemas continuos	43

3. Viga	44
3.1. Descripción	44
3.2. Análisis del sistema	48
3.2.1. Obtención de la masa	50
3.2.2. Obtención de la rigidez: método de la deflexión	51
3.3. Método de variación de masa: procedimiento experimental	51
3.4. Presentación y análisis de resultados	53
VI Conclusiones	58
VII Líneas futuras	60
Referencias	61
Anexo A: Código MATLAB creado para este trabajo	63
A.1 Código para sistema de 1 gdl	64
A.2 Código para sistema de 2 gdl	65
A.3 Código para sistema de 2 gdl (modo 1)	67
A.4 Código para sistema de 2 gdl (modo 2)	68

Nomenclatura

Símbolo	Descripción	Dimensiones	Unidades
$\Delta\rho_L$	aumento de densidad lineal	$[\text{ML}^{-1}]$	$[\text{kg}/\text{m}]$
Δm	aumento de masa	$[\text{M}]$	$[\text{kg}]$
λ_i	parámetro de forma del modo i		
ρ_L	densidad lineal	$[\text{ML}^{-1}]$	$[\text{kg}/\text{m}]$
ω	frecuencia angular	$[\text{T}^{-1}]$	$[\text{rad}/\text{s}]$
A	amplitud	$[\text{L}]$	$[\text{m}]$
c	coeficiente de amortiguamiento	$[\text{MT}^{-1}]$	$[\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}]$
df	resolución de frecuencia	$[\text{T}^{-1}]$	$[\text{Hz}]$
DFT	transformada discreta de Fourier		
\bar{d}	distancia media	$[\text{L}]$	$[\text{m}]$
E	módulo de Young	$[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}]$	$[\text{N}/\text{m}^2]$
F	fuerza	$[\text{MLT}^{-2}]$	$[\text{N}]$
FFT	transformada rápida de Fourier		
f	frecuencia	$[\text{T}^{-1}]$	$[\text{Hz}]$
f_{max}	frecuencia máxima	$[\text{T}^{-1}]$	$[\text{Hz}]$
f_s	frecuencia de muestreo	$[\text{T}^{-1}]$	$[\text{Hz}]$
gdl	grados de libertad		
I_2	matriz identidad 2×2		
I_z	momento de inercia de área alrededor del eje z	$[\text{L}^4]$	$[\text{m}^4]$
k	rigidez	$[\text{MT}^{-2}]$	$[\text{N}/\text{m}]$

L	longitud	[L]	[m]
m	masa	[M]	[kg]
m_c	masa concentrada	[M]	[kg]
m_d	masa distribuida	[M]	[kg]
MVM	método de variación de masa		
N	número de muestras		
t	tiempo	[T]	[s]
T	período	[T]	[s]
V	diferencia de potencial	[ML ² T ⁻² Q]	[V]
x	posición	[L]	[m]
\dot{x}	velocidad	[LT ⁻¹]	[m/s]
\ddot{x}	aceleración	[LT ⁻²]	[m/s ²]

Índice de figuras

1.1.	Modelo de la maqueta de edificio de 1 piso	17
1.2.	Viga biempotrada con masa concentrada en su centro	19
1.3.	Modelado de la estructura con condiciones de contorno resultantes de aplicar las condiciones de simetría al modelo de la Figura 1.2.	20
1.4.	Maqueta del edificio de 1 piso [7]	22
1.5.	Sensor láser de desplazamiento Panasonic HL-G112-A-C5	23
1.6.	Dispositivo de adquisición de datos SIRIUS HD STG-S	23
1.7.	Colocación del sensor láser sobre peana mediante pinza.	24
1.8.	Conexiones del SIRIUS: desde abajo a la derecha, en sentido antihorario: 1: USB, 2: tensión del sensor láser, 3: tensión del SIRIUS, 4: DE-09 del sensor láser, 5: DE-09 acelerómetro.	25
1.9.	Pantalla de configuración de DEWESoft de las conexiones con SIRIUS. En este caso, hay conectado un acelerómetro al canal 1.	26
1.10.	Parámetros de calibración del sensor láser en conexión con SIRIUS dentro de DEWESoft.	27
1.11.	Representación de la distancia [m] frente al tiempo [s]	27
1.12.	Medición de la frecuencia de oscilación con DEWESoft.	30
1.13.	La parte superior muestra la evolución <i>temporal</i> de la amplitud del movimiento oscilatorio del sistema de 1 gdl. En la parte inferior, la FFT muestra el <i>espectro frecuencial</i> de vibración de la maqueta. El pico observado es la frecuencia natural del sistema.	30
1.14.	Medida del peso de cada tuerca a colocar sobre la estructura.	31
1.15.	Disposición del incremento de masa en la estructura de 1 gdl	32
1.16.	Colocación de las distintas masas sobre la estructura.	32
1.17.	Representación de $4\pi^2 f^2$ frente a $1/m$. La rigidez teórica es la pendiente de la recta de regresión por mínimos cuadrados.	34
1.18.	Error relativo [%] en el cálculo de masa y rigidez frente al porcentaje de variación de masa sobre la masa inicial $\Delta m/m$ [%]	34
2.1.	Modelo de la maqueta de edificio de 2 pisos	35
2.2.	Disposición de los incrementos de masa en la estructura de 2 gdl.	38
2.3.	Colocación del sensor láser para la medición del sistema de 2 gdl.	40
2.4.	La parte superior muestra la evolución <i>temporal</i> de la amplitud del movimiento oscilatorio del sistema de 2 gdl. Se aprecia la presencia de los 2 modos de vibración en oposición de fase. En la parte inferior, la FFT muestra el <i>espectro frecuencial</i> de vibración de la maqueta. Los picos observados son las frecuencias correspondientes a los modos 1 y 2 respectivamente. La frecuencia del modo 1 es la menor, y tiene una amplitud mayor (a la izq. en la imagen).	41
3.1.	Viga de aluminio para el estudio de un sistema continuo (a la izq.)	44
3.2.	Modelo de la viga biapoyada. Dimensiones en mm	45
3.3.	Sección de la viga	45

3.4. Sección de la viga. Medidas en mm. Las dimensiones mostradas son el resultado de realizar la media de todas las medidas para cada dimensión. El espesor se supone constante.	46
3.5. Calibre utilizado en las mediciones	47
3.6. Apoyos sobre los que descansa la viga. Se observa que estos no permiten el desplazamiento en ninguno de los ejes, pero sí el giro.	48
3.7. Dinamómetro para obtención de la masa de la viga	50
3.8. Disposición de masas puntuales sobre la viga y posición del sensor láser	52
3.9. Modos 1 (izq.), 2 (centro) y 3 (dcha.) de vibración de una viga biapoyada con distribución de masa continua [4]	52
3.10. Colocación de las masas puntuales en los nodos (izq.)	53
3.11. Error relativo [%] en el cálculo de ρ_L a partir de las frecuencias del modo 1 frente al porcentaje de variación de masa sobre la masa inicial $\Delta m/m$ [%]	55
3.12. Error relativo [%] en el cálculo de EI_z frente al porcentaje de variación de masa sobre la masa inicial $\Delta m/m$ [%]	56
3.13. Error relativo [%] en el cálculo de ρ_L a partir de las frecuencias del modo 2 frente al porcentaje de variación de masa sobre la masa inicial $\Delta m/m$ [%]	56
3.14. Error relativo [%] en el cálculo de EI_z a partir de las frecuencias del modo 2 frente al porcentaje de variación de masa sobre la masa inicial $\Delta m/m$ [%]	57

Índice de tablas

1.1. Frecuencias medidas y masas y rigideces obtenidas a partir de éstas (MVM - <i>Método de variación de masa</i>), frente a las correspondientes medidas y obtenidas teóricamente, para cada uno de los casos de variación de masa.	33
2.1. Frecuencias medidas y valor de m_1 obtenido mediante el MVM con 2 matrices ΔM distintas para 2 modos de vibración, frente al obtenido teóricamente	41
2.2. Frecuencias medidas y valor de m_2 obtenido mediante el MVM con 2 matrices ΔM distintas para 2 modos de vibración, frente al obtenido teóricamente	42
2.3. Frecuencias medidas y valor de k_1 obtenido mediante el MVM con 2 matrices ΔM distintas para 2 modos de vibración, frente al obtenido teóricamente	42
2.4. Frecuencias medidas y valor de k_2 obtenido mediante el MVM con 2 matrices ΔM distintas para 2 modos de vibración, frente al obtenido teóricamente	42
3.1. Frecuencias medidas y valor de ρ_L obtenido mediante el MVM con 5 casos distintos de $\Delta\rho_L$ dispuesta en 11 nodos para el modo 1.	54
3.2. Frecuencias medidas y valor de EI_z obtenido mediante el MVM con 5 casos distintos de $\Delta\rho_L$ dispuesta en 11 nodos para el modo 1.	54
3.3. Frecuencias medidas y valor de ρ_L obtenido mediante el MVM con 5 casos distintos de $\Delta\rho_L$ dispuesta en 11 nodos para el modo 2.	54
3.4. Frecuencias medidas y valor de EI_z obtenido mediante el MVM con 5 casos distintos de $\Delta\rho_L$ dispuesta en 11 nodos para el modo 2.	55

Parte I
Introducción

A la hora de estudiar el comportamiento de una estructura, resulta conveniente disponer de una herramienta que permita determinar sus propiedades a partir de experimentos que se puedan hacer de una forma rápida, económica y relativamente simple de ejecutar, para poder luego, a partir de la determinación de estos parámetros, aplicar otros modelos que modelen su respuesta ante determinados estímulos.

Como no siempre son conocidos (o no con demasiada exactitud) las propiedades del sistema que se desea modelar, existen varios métodos cuyo objetivo es la determinación de estos valores. En este trabajo se estudia uno de los más usados y en el que se realizan avances en los últimos tiempos[1] [2], para poder conocer sus ventajas y limitaciones, con el fin de saber en qué condiciones es aplicable el método de variación de masa y cuál es el orden de magnitud de los errores que se van a cometer en la estimación de los parámetros modales de una estructura.

Parte II
Objetivos

Este trabajo trata sobre el estudio del método de variación de masa. Por lo tanto sus objetivos principales son:

- Determinar cuáles son los parámetros y ecuaciones que deben conocerse para trabajar con dicho método.
- Establecer una forma de trabajo que permita obtener dichos parámetros y ecuaciones.
- Medición de los principales valores que conduzcan al planteamiento de las ecuaciones que rigen el sistema en estudio.
- Resolución de dichas ecuaciones, incluyendo la elaboración de código para programas de cálculo (MATLAB) que permita obtener los resultados requeridos.
- Análisis de los resultados obtenidos.
- Discusión de las ventajas y limitaciones del método.

Parte III
Estado del arte

El método de variación de masa es ya un sistema establecido a la hora de estudiar las características de una estructura. Los últimos estudios[1][2][3] al respecto de los métodos de análisis de estructuras se centran en los méritos relativos de las distintas variantes de dichos métodos, a saber:

- En el análisis modal tradicional se conocen las entradas y salidas del sistema, y estas se relacionan a través de las funciones de respuesta en frecuencia (FRF).
- En el análisis modal operacional sólo se conocen las salidas del sistema (parámetros medidos), y por lo tanto no se conocen las FRF y tendrán que modelarse conociendo sus ecuaciones de gobierno.

En los últimos años se ha puesto de relevancia el análisis modal operacional debido a las principales ventajas de:

- Menor tiempo de ensayo, debido a que no hay entradas al sistema por parte del experimento.
- Más económico, debido principalmente a una menor necesidad de equipo.
- Más versátil dado que se puede realizar con la estructura en funcionamiento normal.

Por otra parte, se trata de un método más novedoso, por lo que es un campo de estudio activo todavía, con lo que ello conlleva a la hora de literatura al respecto y disponibilidad de información. Además de esto, sus principales desventajas son:

- Requiere mayor sensibilidad en los equipos.
- Debe hacerse un análisis más exhaustivo de los datos obtenidos.

El presente trabajo se centrará en el método de variación de masa en el análisis modal operacional. Las últimas investigaciones en el campo se basan en su comparación con métodos más probados como el análisis modal tradicional, o en obtener ciertas características u optimizar la identificación de los parámetros a obtener:

- Obtener formas de escalado de los modos de vibración [2]
- Identificación de los parámetros modales [5]

Parte IV
Sistemas discretos

1. Sistema de 1 gdl: maqueta de edificio de 1 piso

1.1. Descripción

El sistema de 1 grado de libertad (gdl) elegido es una maqueta de edificio de 1 piso formado por 2 placas de aluminio que actúan de pilares y 2 placas de metacrilato que actúan de losa de cimentación y de dintel respectivamente. Las dimensiones de la estructura se muestran en la Figura 1.1:

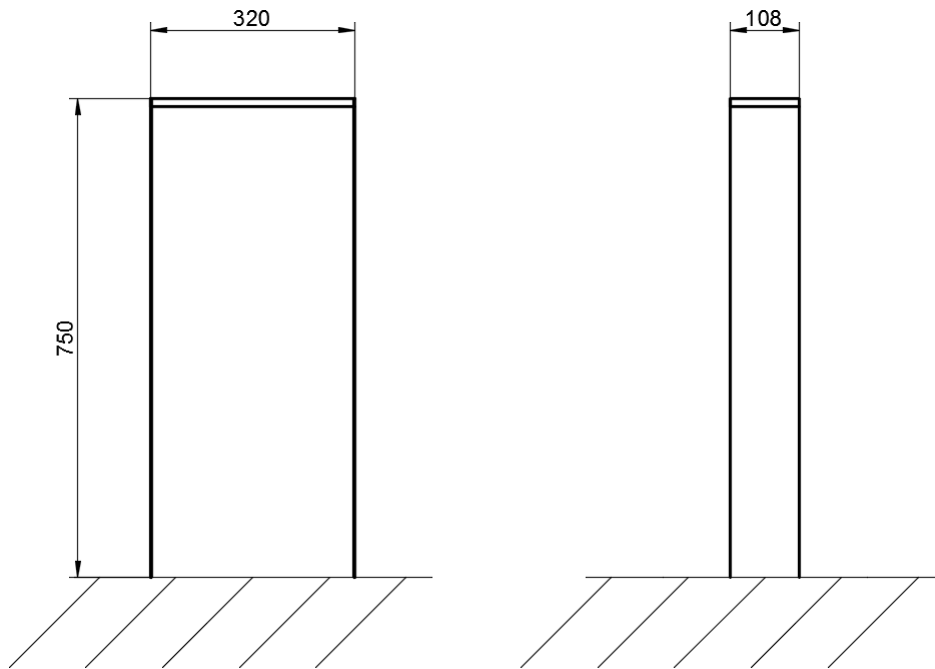


Figura 1.1: Modelo de la maqueta de edificio de 1 piso
Alzado (izq.) y perfil (dcha.). Dimensiones en mm

1.2. Análisis del sistema

Para analizar nuestro sistema desde un punto de vista oscilatorio partiremos de la siguiente ecuación de movimiento para un sistema vibratorio:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (1.1)$$

Donde:

- m es la *masa*.
- c es el *coeficiente de amortiguamiento*.
- k es la *rigidez*.

- x es la *posición*.
- \dot{x} es la *velocidad*.
- \ddot{x} es la *aceleración*.
- F es la *fuerza* que se realiza sobre el sistema.

Puesto que se trata de un sistema de 1 gdl, la frecuencia angular natural del sistema original se obtiene cuando $F = 0$, suponiendo amortiguamiento despreciable $c \sim 0$:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.2)$$

Para obtener la frecuencia se divide entre 2π :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.3)$$

De 1.2 y 1.3 resulta:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.4)$$

La frecuencia del sistema para cada caso de modificación de masa viene dada por:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_i}} \quad (1.5)$$

Donde cada m_i es la masa completa del sistema i -ésimo con modificación de masa definida como:

$$m_i = m + \Delta m_i \quad (1.6)$$

Cada par de ecuaciones 1.5 forma un sistema 2×2 . Si para $i = 1$ tomamos el sistema sin modificar:

$$\Delta m_1 = 0 \quad (1.7)$$

$$m_1 = m \quad (1.8)$$

Escogiendo como ecuaciones de nuestro sistema la del sistema original $i = 1$ y otra de un i arbitrario, podemos obtener m y k conociendo Δm_i y las frecuencias f y f_i del sistema original y modificado, respectivamente:

$$m = \frac{\Delta m_i}{\left(\frac{f}{f_i}\right)^2 - 1}, \quad |f_i| \neq |f| \quad (1.9)$$

$$k = (2\pi f)^2 \frac{\Delta m_i}{\left(\frac{f}{f_i}\right)^2 - 1}, \quad |f_i| \neq |f| \quad (1.10)$$

Para comprobar si los resultados obtenidos se ajustan a la realidad, será necesario obtener primero la masa y rigidez *modales*. A tal efecto discretizaremos nuestra estructura partiendo de la base de una viga biempotrada como se observa en la Figura 1.2:

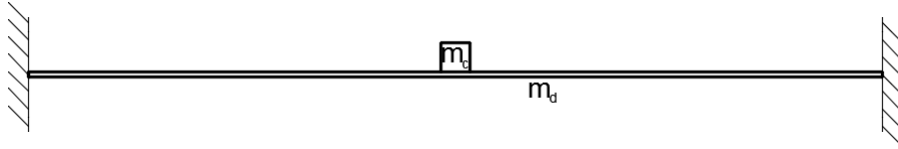


Figura 1.2: Viga biempotrada con masa concentrada en su centro

De acuerdo con [4], la frecuencia de vibración de una viga biempotrada con una masa concentrada en su centro viene dada por:

$$f = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3EI_z}{L^3 (m_c + 0,37m_d)}} \quad (1.11)$$

Donde:

- E es el módulo de Young.
- I_z es el momento de inercia de área alrededor del eje z , siendo éste perpendicular al dibujo.
- L es longitud.
- m_c es la masa concentrada en el centro.
- m_d es la masa distribuida (la viga).

Girando la viga de la Figura 1.2 90° y aprovechando su simetría, podemos trabajar sólo con media estructura con lo que nos quedaría un modelo como el que se observa en la Figura 1.3:

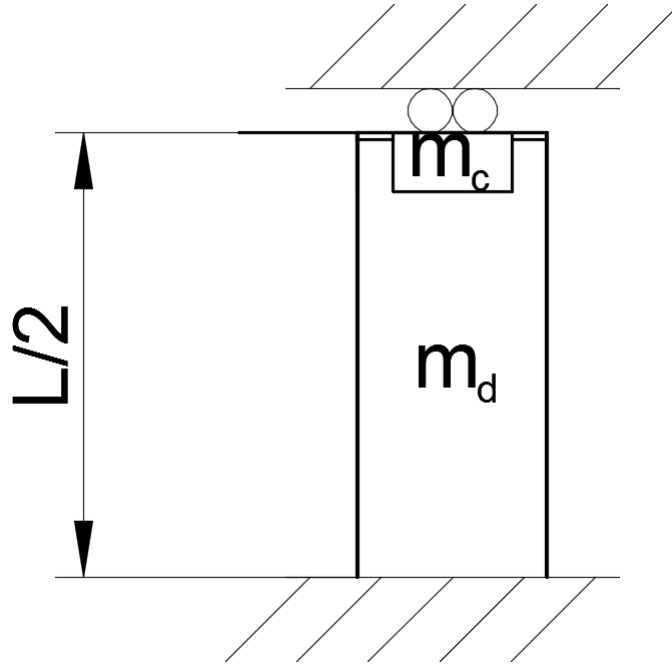


Figura 1.3: Modelado de la estructura con condiciones de contorno resultantes de aplicar las condiciones de simetría al modelo de la Figura 1.2.

Según la ecuación 1.11 la masa modal de nuestro sistema será:

$$m = m_c + 0,37m_d \quad (1.12)$$

En nuestro caso, la masa concentrada m_c es la placa de metacrilato y la masa distribuida m_d son los pilares de aluminio.

1.2.1. Obtención de la masa

Para tener un referente con el que comparar los resultados del método de variación de masa, primero hemos de obtener la masa por otro método. Para hallar m_c y m_d se contará con otro módulo de edificio de las mismas características excepto la altura, que es de 500 mm en lugar de 750 mm, y se formará el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2m_c + mb = m_{750} \quad (1.13)$$

$$2m_c + \frac{500}{750}mb = m_{500} \quad (1.14)$$

Donde m_{750} es la masa del módulo de 750 mm de altura y m_{500} la masa del módulo de 500 mm de altura. Pesando en la báscula ambas maquetas:

$$m_{750} = 1,916 \text{ kg} \quad (1.15)$$

$$m_{500} = 1,650 \text{ kg} \quad (1.16)$$

Con los datos de 1.13, 1.14, 1.15 y 1.16 obtenemos:

$$m_c = 0,559 \text{ kg} \quad (1.17)$$

$$m_b = 0,798 \text{ kg} \quad (1.18)$$

Por lo tanto nuestra masa modal resulta (de ecuación 1.12):

$$m = m_c + 0,37m_d = 0,85426 \text{ kg} \quad (1.19)$$

1.3. Método de variación de masa: procedimiento experimental

1.3.1. Consideraciones previas

Para la obtención de la masa y rigidez de la maqueta del edificio mostrada en la Figura 1.4 es necesario medir las frecuencias de oscilación de éste y los incrementos de masa que se añadirán a la estructura.



Figura 1.4: Maqueta del edificio de 1 piso [7]

El dispositivo utilizado para la obtención de las frecuencias es un sensor láser de desplazamiento como se ve en la Figura 1.5:



Figura 1.5: Sensor láser de desplazamiento Panasonic HL-G112-A-C5

Para la transmisión de la información captada por el sensor se ha utilizado el dispositivo de adquisición de datos mostrado en la Figura 1.6:



Figura 1.6: Dispositivo de adquisición de datos SIRIUS HD STG-S

El software utilizado para la adquisición de datos es el DEWESoft X2 SP5 del mismo fabricante que el hardware. Con este programa podemos obtener

las frecuencias de vibración del sistema cuyos desplazamientos capta nuestro sensor láser, a través de la *transformada rápida de Fourier* (FFT, del inglés *Fast Fourier Transform*), una forma eficiente computacionalmente de hacer un análisis espectral de una señal a través de la *transformada de Fourier*.

Para la colocación del sensor láser se ha utilizado una peana y una pinza que sirva de sujeción a ésta. La *distancia central de medición* y el *rango*, según especificaciones del fabricante, son de:

$$\text{distancia central de medición} = 120 \text{ mm} \quad (1.20)$$

$$\text{rango de medición} = \pm 60 \text{ mm} \quad (1.21)$$

Por lo que se ha colocado el sensor láser como se aprecia en la Figura 1.7:



Figura 1.7: Colocación del sensor láser sobre peana mediante pinza.

El siguiente paso a la hora de obtener las frecuencias es conectar nuestro sensor láser a nuestro dispositivo de adquisición SIRIUS, lo que haremos, tal y como se ve en la Figura 1.8, a través del conector *DE-09* del sensor a cualquiera de los 16 canales de entrada de datos del dispositivo de adquisición (en nuestro caso, el canal 1).

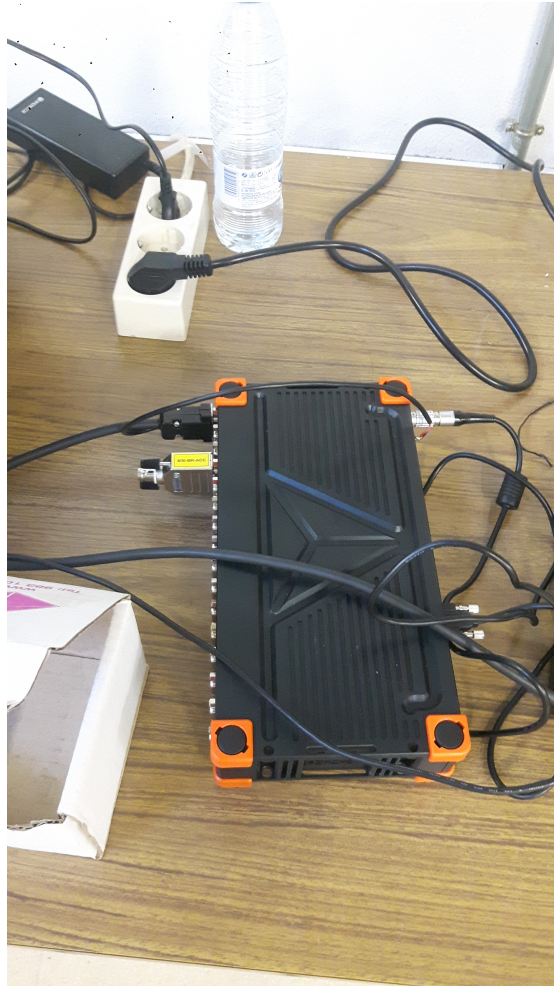


Figura 1.8: Conexiones del SIRIUS: desde abajo a la derecha, en sentido anti-horario: 1: USB, 2: tensión del sensor láser, 3: tensión del SIRIUS, 4: DE-09 del sensor láser, 5: DE-09 acelerómetro.

Posteriormente pasaremos a configurar el sensor láser a través del software DEWESoft. La conexión de un dispositivo de medición a SIRIUS la podemos comprobar en la Figura 1.9:

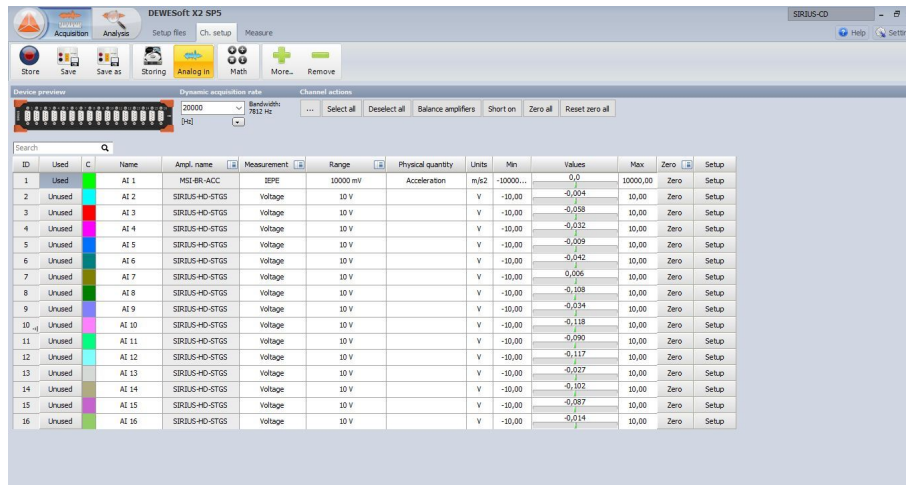


Figura 1.9: Pantalla de configuración de DEWESoft de las conexiones con SIRIUS. En este caso, hay conectado un acelerómetro al canal 1.

Los parámetros de calibración entre *diferencia de potencial y desplazamiento* son:

$$0 \text{ V} = 0,06 \text{ m} \quad (1.22)$$

$$10 \text{ V} = 0,18 \text{ m} \quad (1.23)$$

Para llevar a cabo esta configuración debemos acceder al *Setup* del canal 1 e introducir los anteriores parámetros en la calibración de nuestro sensor, como se aprecia en la Figura 1.10:

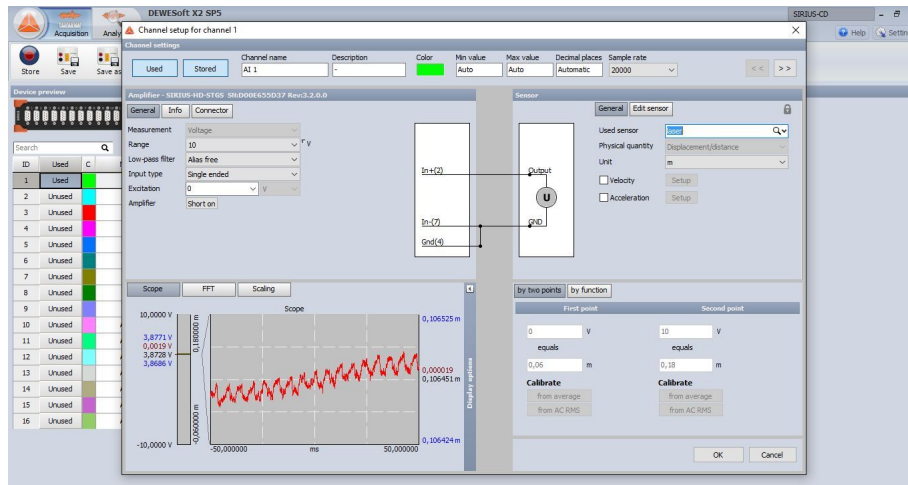


Figura 1.10: Parámetros de calibración del sensor láser en conexión con SIRIUS dentro de DEWESoft.

Ahora que se ha configurado adecuadamente el sensor, se pueden medir correctamente distancias. Como se comprueba en la Figura 1.10, la *distancia media* medida $\bar{d} = 0,106451 \text{ m}$ se corresponde con la disposición vista en la Figura 1.7.

En la presentación por defecto del programa, obtenemos la representación de la *distancia* a nuestro sistema frente al *tiempo*. Según se realiza el montaje del dispositivo, apreciamos una pequeña oscilación en torno a un valor medio de distancia como podemos observar en la Figura 1.11:



Figura 1.11: Representación de la distancia [m] frente al tiempo [s]

Como nos interesa obtener la frecuencia de oscilación, debemos hacer uso de la función de FFT del programa. Para ello, el programa emplea una transformada discreta de Fourier (DFT) de los datos de distancias medidas frente al tiempo, a través de varios algoritmos de cálculo de la FFT.¹

Por último, antes de proceder a la obtención de la frecuencia, habrá que tener en consideración el orden de magnitud de las frecuencias con que se va a trabajar. Para el caso que nos ocupa, ninguna frecuencia estudiada sobrepasa los 20 Hz. Según el *teorema de muestreo de Nyquist-Shannon*[8]:

$$f_{max} < \frac{f_s}{2} \quad (1.24)$$

Donde f_{max} es la frecuencia máxima en nuestro estudio y f_s es la frecuencia de muestreo. Por lo tanto:

$$f_s > 2f_{max} = 2 \cdot 20 \text{ Hz} = 40 \text{ Hz} \quad (1.25)$$

Con lo que con una frecuencia de muestreo superior a 40 Hz podríamos trabajar adecuadamente. Sin embargo, DEWESoft considera un factor de 1.25 como mínimo absoluto de trabajo en algunas regiones de la FFT, por lo que:

$$f_{max} < \frac{f_s}{2 \cdot 1,25} \quad (1.26)$$

Por lo que nuestra nueva frecuencia mínima de muestreo sería:

$$f_s > 2 \cdot 1,25 f_{max} = 2 \cdot 1,25 \cdot 20 \text{ Hz} = 50 \text{ Hz} \quad (1.27)$$

Ahora bien, la resolución de frecuencia que nos proporciona esta frecuencia de muestreo sería:

$$df = \frac{f_s/2}{N} = \frac{50/2}{N} = \frac{25}{N} \quad (1.28)$$

Donde df es la *resolución de frecuencia* y N es el *número de muestras* tomadas. Para esta versión del programa (X2 SP5), el máximo número de muestras que se pueden tomar es de 2^{16} . No obstante, las limitaciones del hardware nos impiden seleccionar un valor superior a 2^{14} , para el cual nos quedaría una resolución de frecuencia de:

$$df = \frac{25}{2^{14}} = 0,001526 \text{ Hz} \quad (1.29)$$

El problema de usar esta frecuencia de muestreo vendría del tiempo que llevaría adquirir los datos y calcular la FFT. El *período* de muestreo para esta df sería de:

¹DEWESoft hace uso de los algoritmos de cálculo H1 (con ruido en la *salida*), H2 (con ruido en la *entrada*) y Hv (con ruido en la *entrada* y la *salida*).

$$T = \frac{1}{df} = \frac{1}{0,001526} = 655,36 \text{ s} \quad (1.30)$$

Lo que ralentiza mucho la toma de datos. Para la adquisición de datos de este trabajo se ha trabajado con una frecuencia de muestreo y un número de muestras de:

$$f_s = 1000 \text{ Hz} \quad (1.31)$$

$$N = 2^{14} \quad (1.32)$$

De donde se obtiene una resolución de frecuencia de:

$$df = \frac{1000/2}{2^{14}} = 0,030518 \text{ Hz} \quad (1.33)$$

Por lo tanto, el máximo error absoluto cometido debido a la resolución es de:

$$error_{abs, max} = \frac{df}{2} = \frac{0,030518}{2} = 0,015259 \text{ Hz} \quad (1.34)$$

Dado que se ha trabajado con frecuencias superiores a 1 Hz, el máximo error relativo cometido debido a la resolución es de:

$$error_{rel, max} = \frac{error_{abs, max}}{f_{min}} = \frac{0,015259}{1} \simeq 1,53 \% \quad (1.35)$$

Que supone un valor aceptable.

1.3.2. Procedimiento de medición

Una vez hallamos fijado los parámetros del programa, estaremos en disposición de obtener la frecuencia de oscilación de nuestro sistema, tal y como se observa en la Figura 1.12:

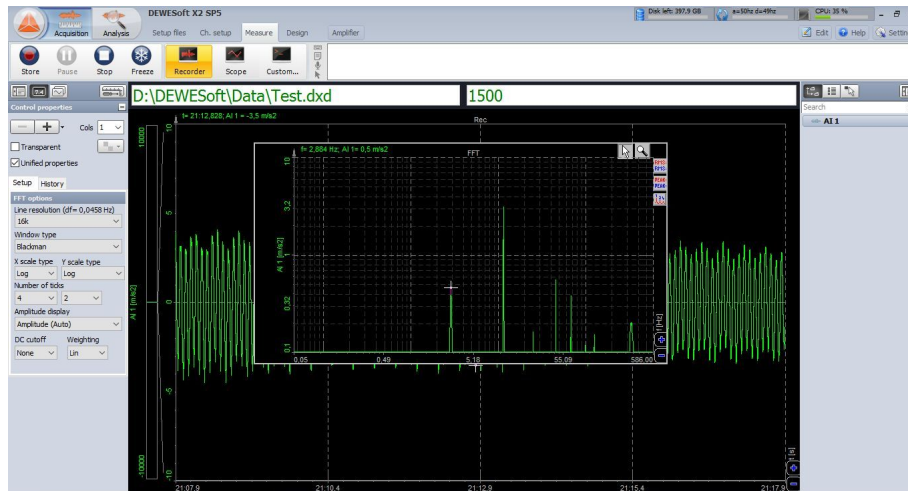


Figura 1.12: Medición de la frecuencia de oscilación con DEWESoft.

A continuación procederemos a detallar el método de medición. Lo primero que debemos hacer será medir la frecuencia de nuestro sistema sin ninguna masa adicional, con lo que obtendremos su frecuencia natural. En la Figura 1.13 se observan los desplazamientos y la frecuencia natural del sistema:

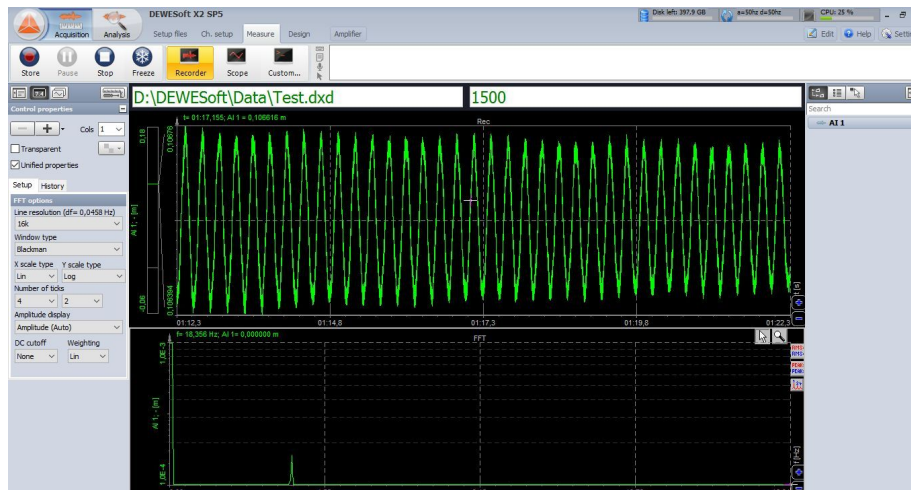


Figura 1.13: La parte superior muestra la evolución *temporal* de la amplitud del movimiento oscilatorio del sistema de 1 gdl. En la parte inferior, la FFT muestra el *espectro frecuencial* de vibración de la maqueta. El pico observado es la frecuencia natural del sistema.

Posteriormente procederemos a la adición de masa. Para ello disponemos en el laboratorio de tuercas de diferentes pesos. Lo primero que haremos será medir

los pesos de las distintas tuercas con que se trabajará, como se puede apreciar en la Figura 1.14:



Figura 1.14: Medida del peso de cada tuerca a colocar sobre la estructura.

Para la colocación de éstas trataremos de que el peso esté concentrado en un punto, dado que se trata de un sistema de 1 gdl. La situación del incremento de masa es la que se muestra en la Figura 1.15:

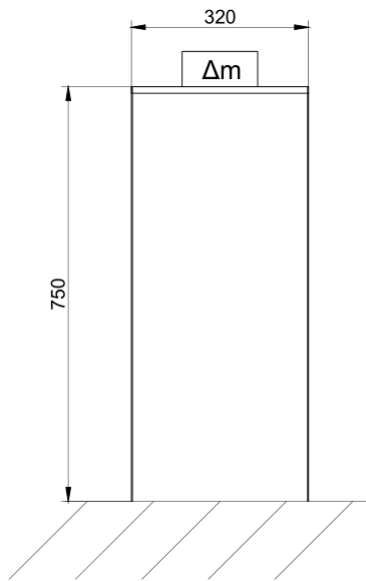


Figura 1.15: Disposición del incremento de masa en la estructura de 1 gdl

La disposición de las tuercas se realizará de la forma que se observa en la Figura 1.16:

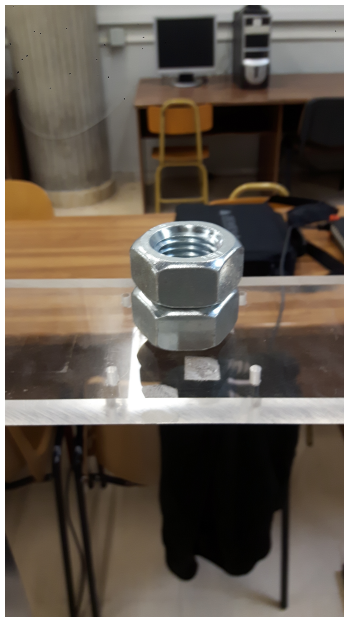


Figura 1.16: Colocación de las distintas masas sobre la estructura.

Por último se repite la medición como se hizo en el caso 1 (Figura 1.13) para cada uno de los casos de variación de masa.

1.4. Presentación y análisis de resultados

Los resultados de la medición de las frecuencias y las masas y rigideces obtenidas² a partir de las ecuaciones 1.9 y 1.10 se exponen a continuación en la Tabla 1.1:

caso	f [Hz]	Δm [kg]	m_i [kg]	m				k				
				teórica	m MVM	error abs	error rel	teórica	k MVM	error abs	error rel	
				[kg]	[kg]	[kg]	[%]	[N/m]	[N/m]	[N/m]	[%]	
1	2,734	0	0,85426	0,00%	0,85426			251,88				
2	2,454	0,1912	0,85426	22,38%	0,85426	0,792646	-0,06161	-7,21%	251,88	233,903	-17,977	-7,14%
3	2,283	0,3817	0,85426	44,68%	0,85426	0,879252	0,024992	2,93%	251,88	259,4598	7,579811	3,01%
4	2,124	0,5733	0,85426	67,11%	0,85426	0,872778	0,018518	2,17%	251,88	257,5493	5,669303	2,25%

Tabla 1.1: Frecuencias medidas y masas y rigideces obtenidas a partir de éstas (MVM - *Método de variación de masa*), frente a las correspondientes medidas y obtenidas teóricamente, para cada uno de los casos de variación de masa.

En la Tabla 1.1 podemos observar los 4 casos del experimento para 1 gdl. Para el caso 1 se ha medido en vacío la estructura y se ha registrado el valor de frecuencia. Para cada uno de los siguientes casos (2, 3 y 4) se han registrado las frecuencias de oscilación, para posteriormente formar un sistema entre cada uno de dichos casos y el caso 1 y obtener el valor de la masa y la rigidez por el *método de variación de masa* (MVM en la tabla 1.1) y compararlo con los valores teóricos de masa (obtenida de ecuación 1.19) y rigidez, cuyo cálculo se detalla a continuación.

1.4.1. Cálculo de la rigidez

Para tener un valor teórico de rigidez con el que comparar el obtenido mediante MVM se ha partido de la ecuación 1.5, en la que despejando k :

$$k = 4\pi^2 f_i^2 m_i \quad (1.36)$$

Sustituyendo en f_i las frecuencias medidas para cada caso (Tabla 1.1) se obtiene el gráfico de la Figura 1.17:

²En el Anexo A se recoge el código MATLAB creado para obtener las masas y rigideces de un sistema de 1 gdl por el método de variación de masa.

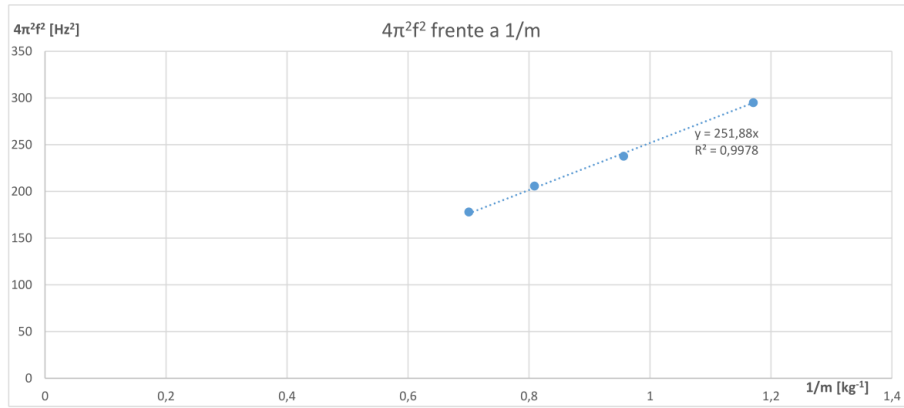


Figura 1.17: Representación de $4\pi^2 f^2$ frente a $1/m$. La rigidez teórica es la pendiente de la recta de regresión por mínimos cuadrados.

Por lo tanto el valor teórico de rigidez que se obtiene es de:

$$k = 251,88 \text{ N/m} \quad (1.37)$$

1.4.2. Interpretación de resultados

Según se aprecia en la Tabla 1.1, los errores van decreciendo a medida que aumenta Δm_i , por lo que será necesario utilizar valores altos de variación de masa para acercarnos al valor real de masa y rigidez. En la Figura 1.18 se muestra una gráfica que recoge esta conclusión:

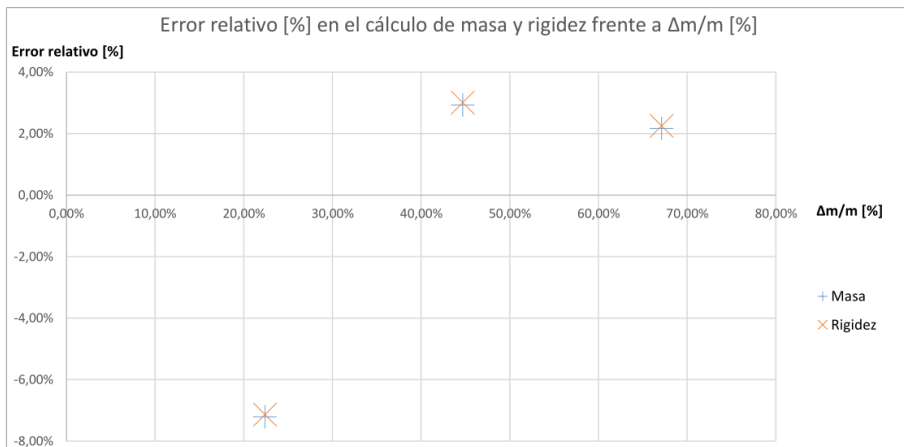


Figura 1.18: Error relativo [%] en el cálculo de masa y rigidez frente al porcentaje de variación de masa sobre la masa inicial $\Delta m/m$ [%]

2. Sistema de 2 gdl: maqueta de edificio de 2 pisos

2.1. Descripción

En el caso de un sistema de 2 gdl se ha escogido la maqueta de edificio de 2 pisos mostrada en la Figura 2.1

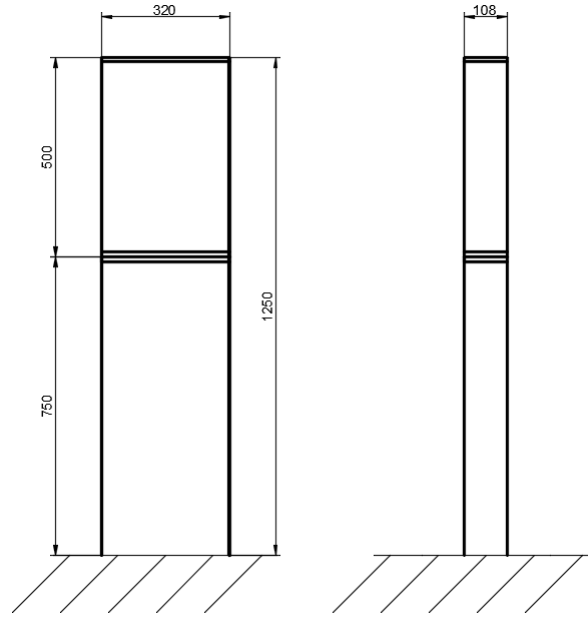


Figura 2.1: Modelo de la maqueta de edificio de 2 pisos
Alzado (izq.) y perfil (dcha.). Dimensiones en mm

El piso inferior es la maqueta de edificio utilizada en el apartado anterior de 1 gdl (de *altura* = 750 mm), unido al otro módulo de *altura* = 500 mm mediante las placas de metacrilato que actúan como forjados.

2.2. Análisis del sistema

Al tratarse de un sistema de 2 gdl, las ecuaciones que rigen nuestro sistema son las mismas que en el caso de 1 gdl, pero expresadas en forma matricial:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \quad (2.1)$$

Donde:

- M es la matriz de masa.
- C es la matriz de amortiguamiento.

- K es la matriz de rigidez.
- x es el vector de posición.
- \dot{x} es el vector de velocidad.
- \ddot{x} es el vector de aceleración.
- F es el vector de fuerza.

La matriz de masa está definida como:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Por su parte, la matriz de amortiguamiento está definida como:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Y la matriz de rigidez se define:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Por otro lado, el vector de posición:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

El de velocidad:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Y el de aceleración:

$$\ddot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Así como el de fuerza:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Con lo que la ecuación 2.1 resulta:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Donde cada subíndice 1 y 2 hace referencia a cada uno de los grados de libertad de la estructura: piso inferior y superior, respectivamente. Como para

el caso de 1 gdl, cuando $F = 0$ y para un amortiguamiento despreciable $c \sim 0$ resulta:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (2.10)$$

Las soluciones no triviales de la ecuación adoptan la forma:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (2.11)$$

La ecuación 2.11 constituye un *problema de autovalores generalizado de segunda especie* [9], donde ω^2 constituyen los autovalores de cada *modo de vibración*. En este caso de un sistema de 2 gdl habrá 2 modos de vibración y 2 autovalores ω_1^2 y ω_2^2 , que son los cuadrados de las frecuencias angulares del *modo 1* y *modo 2* de vibración, respectivamente.

Las masas y rigideces buscadas serán aquellas que satisfagan el problema de autovalores inverso para cada par de frecuencias f_1 y f_2 medidas sobre la estructura.

2.2.1. Obtención de las masas

Para tener un valor teórico con el que comparar los resultados del método de variación de masa, se procederá al cálculo de éstas. Según la ecuación 2.12 [4]:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI_z}{L^3(m_c + 0,2357m_d)}} \quad (2.12)$$

De donde se obtiene la expresión para la masa modal como:

$$m = m_c + 0,2357m_d \quad (2.13)$$

Las masas modales teóricas resultantes son:

$$m_1 = 1,4372 \text{ kg} \quad (2.14)$$

$$m_2 = 0,68668 \text{ kg} \quad (2.15)$$

2.2.2. Obtención de las rigideces

Para este apartado se han tomado los valores de rigideces obtenidos en [7] mediante la fórmula:

$$F = k \cdot x \quad (2.16)$$

Dichas rigideces son:

$$k_1 = 264,875 \text{ N/m} \quad (2.17)$$

$$k_2 = 1006,53 \text{ N/m} \quad (2.18)$$

2.3. Método de variación de masa: procedimiento experimental

A la hora de disponer los incrementos de masa sobre la estructura, estos se colocarán sobre cada una de las placas de metacrilato de forma concentrada. De esta forma la matriz de cambio de masa ΔM resulta diagonal y queda definida como:

$$\Delta M = \begin{bmatrix} \Delta m_1 & 0 \\ 0 & \Delta m_2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Esto se traduce en la disposición de incrementos de masa mostrada en la Figura 2.2:

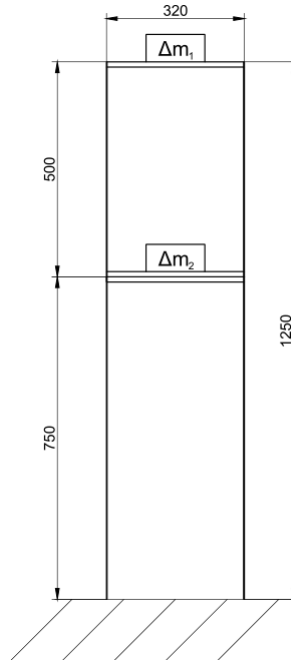


Figura 2.2: Disposición de los incrementos de masa en la estructura de 2 gdl.

De tal forma que la matriz de masa total del sistema queda definida como:

$$M_i = M + \Delta M_i = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta m_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta m_{2,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + \Delta m_{1,i} & 0 \\ 0 & m_2 + \Delta m_{2,i} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Para cada caso i de variación de masa. Dado que tenemos 2 gdl y 2 frecuencias propias, resulta un sistema 4×4 en el que las incógnitas son siempre los parámetros modales:

- m_1
- m_2
- k_1
- k_2

Y nuestras ecuaciones podrán obtenerse de realizar sistemas formados por combinaciones de diferentes casos de ΔM con distintos modos de vibración, por ejemplo:

- 4 matrices ΔM distintas para 1 modo de vibración.
- 2 matrices ΔM distintas para 2 modos de vibración.
- 2 matrices ΔM distintas para 1 modo de vibración y otras 2 ΔM distintas para el otro modo.
- 3 matrices ΔM distintas para 1 modo, y una de esas 3 ΔM para el otro modo.
- etc

A su vez, estas matrices ΔM podrán ser del tipo:

$$\Delta M = \Delta m \cdot I_2 \quad (2.21)$$

Donde I_2 es la matriz identidad 2×2 , cuando se cumpla:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m \quad (2.22)$$

Aunque por lo general no serán de esta forma.

Una vez definidas las posiciones de las variaciones de masa, incógnitas y posibles ecuaciones para resolver, procederemos a detallar el método de medición. Lo primero que se hará será medir la estructura en vacío, por lo tanto en el caso 1:

$$\Delta M_1 = 0 \quad (2.23)$$

Esta situación se muestra en la Figura 2.3:



Figura 2.3: Colocación del sensor láser para la medición del sistema de 2 gdl.

En la Figura 2.4 se observan las características del movimiento de la estructura de 2 gdl:



Figura 2.4: La parte superior muestra la evolución *temporal* de la amplitud del movimiento oscilatorio del sistema de 2 gdl. Se aprecia la presencia de los 2 modos de vibración en oposición de fase. En la parte inferior, la FFT muestra el *espectro frecuencial* de vibración de la maqueta. Los picos observados son las frecuencias correspondientes a los modos 1 y 2 respectivamente. La frecuencia del modo 1 es la menor, y tiene una amplitud mayor (a la izq. en la imagen).

Análogamente al caso de 1 gdl, a continuación se colocarán las masas sobre los forjados como se ha indicado en la Figura 2.2 y se medirán las frecuencias de cada caso.

2.4. Presentación y análisis de resultados

Los resultados obtenidos para el valor de m_1 mediante el método de variación de masa, para el caso de 2 matrices ΔM distintas para 2 modos de vibración en la estructura de 2 gdl se muestran en la Tabla 2.1:

caso						m_1 teórica		m_1 MVM	
	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	Δm_1 [kg]	Δm_2 [kg]	$\Delta m/m$ [%]	[kg]	[kg]	error abs [kg]	error rel [%]
1	1,617	7,629	0	0	0,00%	1,4372	1,9182	0,481	33,47%
2	1,556	7,05	0	0,190722	8,24%				

Tabla 2.1: Frecuencias medidas y valor de m_1 obtenido mediante el MVM con 2 matrices ΔM distintas para 2 modos de vibración, frente al obtenido teóricamente

A continuación se exponen los obtenidos para m_2 que se reflejan en la siguiente Tabla 2.2:

caso	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	Δm_1 [kg]	Δm_2 [kg]	$\Delta m/m$ [%]	m_2 teórica [kg]	m_2 MVM [kg]	error abs [kg]	error rel [%]
1	1,617	7,629	0	0	0,00%	0,68668	0,7208	0,03412	4,97%
2	1,556	7,05	0	0,19072222	8,24%				

Tabla 2.2: Frecuencias medidas y valor de m_2 obtenido mediante el MVM con 2 matrices ΔM distintas para 2 modos de vibración, frente al obtenido teóricamente

De igual forma los valores obtenidos para k_1 (Tabla 2.3):

caso	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	Δm_1 [kg]	Δm_2 [kg]	$\Delta m/m$ [%]	k_1 teórica [N/m]	k_1 MVM [N/m]	error abs [N/m]	error rel [%]
1	1,617	7,629	0	0	0,00%	264,875	277,3973	12,5223	4,73%
2	1,556	7,05	0	0,19072222	8,24%				

Tabla 2.3: Frecuencias medidas y valor de k_1 obtenido mediante el MVM con 2 matrices ΔM distintas para 2 modos de vibración, frente al obtenido teóricamente

Y por último con la k_1 en la Tabla 2.4:

caso	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	Δm_1 [kg]	Δm_2 [kg]	$\Delta m/m$ [%]	k_2 teórica [N/m]	k_2 MVM [N/m]	error abs [N/m]	error rel [%]
1	1,617	7,629	0	0	0,00%	1006,53	1182,09	175,56	17,44%
2	1,556	7,05	0	0,19072222	8,24%				

Tabla 2.4: Frecuencias medidas y valor de k_2 obtenido mediante el MVM con 2 matrices ΔM distintas para 2 modos de vibración, frente al obtenido teóricamente

Los resultados muestran que el mayor error cometido se produce para m_1 , esto puede ser debido a un error a la hora de considerar las contribuciones que la masa concentrada y distribuida hacen para la masa modal del gdl 1.

Los errores de m_2 y k_1 son razonables para lo esperado del método y parece que han sido bien estimados en la modelización.

El error observado en k_2 puede deberse a la falta de precisión en la estimación de la rigidez del módulo superior de la maqueta.

Por otra parte, el problema de autovalores resuelto a través del comando *fsolve* de MATLAB³ no converge para todos los iterantes iniciales que se han probado. Esto puede plantear problemas cuando la estimación inicial de los parámetros modales de la estructura esté muy alejada de los valores reales.

³En el Anexo A se recoge el código utilizado

Parte V
Sistemas continuos

3. Viga

3.1. Descripción

Para el estudio del sistema continuo se ha trabajado con una viga de aluminio (mostrada en la Figura 3.1):



Figura 3.1: Viga de aluminio para el estudio de un sistema continuo (a la izq.)

La longitud y condiciones de contorno de dicha viga se detallan a continuación en la Figura 3.1

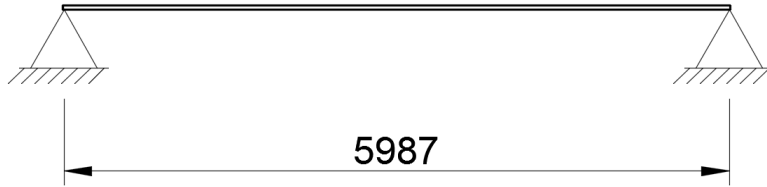


Figura 3.2: Modelo de la viga biapoyada. Dimensiones en mm

La sección de la viga es como se muestra en la Figura 3.3:



Figura 3.3: Sección de la viga

Las dimensiones medias medidas de la sección se recogen en la Figura 3.4:

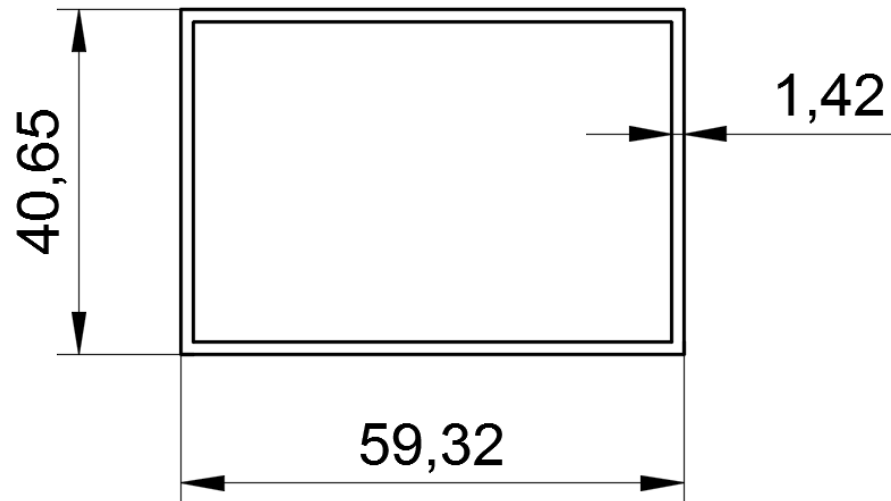


Figura 3.4: Sección de la viga. Medidas en mm. Las dimensiones mostradas son el resultado de realizar la media de todas las medidas para cada dimensión. El espesor se supone constante.

Las medidas de la Figura 3.4 han sido tomadas con el calibre de la Figura 3.5. Se ha tomado el valor medio de las mediciones realizadas.



Figura 3.5: Calibre utilizado en las mediciones

La Figura 3.6 muestra la disposición real de los apoyos en la estructura:



Figura 3.6: Apoyos sobre los que descansa la viga. Se observa que estos no permiten el desplazamiento en ninguno de los ejes, pero sí el giro.

3.2. Análisis del sistema

Al tratarse de un sistema continuo, a la hora de estudiar su movimiento vibratorio, se puede considerar que su número de gdl tiende a infinito, así como su número de modos de vibración y número de frecuencias. Para cada modo la frecuencia viene dada por [4]:

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho L}}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Donde:

- f_i es la frecuencia del modo i .
- λ_i es el parámetro de forma del modo i y depende de las condiciones de contorno. Para una viga biapoyada viene dada por la expresión 3.2[4]:

$$\lambda_i = i\pi, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

- ρ_L es la *densidad lineal* de la viga, definida como:

$$\rho_L = \frac{m}{L} \quad (3.3)$$

Para cada caso j de variación de masa estudiado, la densidad lineal de la viga vendrá dada por:

$$\rho_{L,j} = \rho_L + \Delta\rho_{L,j} \quad (3.4)$$

Y la *forma de modo*, que también depende de las condiciones de contorno, en nuestro caso de una viga biapoyada está determinada por[4]:

$$\text{sen} \frac{i\pi x}{L}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

En el caso que nos ocupa sólo estudiaremos el movimiento en los modos de vibración dominantes, esto es, los modos 1 y 2. Para cada uno de ellos podremos realizar un sistema 2×2 en el que nuestras incógnitas serán los parámetros modales de masa y rigidez para un sistema continuo:

- La densidad lineal ρ_L .
- La rigidez, que para un sistema continuo vendrá dada por el producto del módulo de Young y el momento de inercia de área alrededor del eje perpendicular al plano de oscilación: EI_z .

Las ecuaciones que forman el sistema a resolver resultan de sustituir la Ecuación 3.4 en la expresión de 3.1 para 1 modo de vibración y dos casos de variación de densidad lineal $\Delta\rho_{L,j}$ distintos. Dado un modo concreto de vibración i , para cada caso de variación de densidad lineal j , sustituyendo 3.4 en 3.1:

$$f_{i,j} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho_L + \Delta\rho_{L,j}}}, \quad (3.6)$$

De esta última Ecuación 3.6 y de la Ecuación 3.1 para la estructura sin cargas, despejando nuestras incógnitas:

$$\rho_L = \Delta\rho_{L,j} \left(\frac{f_{i,j}^2}{f_i^2 - f_{i,j}^2} \right) \quad (3.7)$$

$$EI_z = \Delta\rho_{L,j} \left(\frac{2\pi L^2}{\lambda_i^2} \right)^2 \left(\frac{1}{f_{i,j}^2} - \frac{1}{f_i^2} \right)^{-1} \quad (3.8)$$

3.2.1. Obtención de la masa

El valor teórico de masa con el que comparar los valores obtenidos mediante el método de variación de masa se ha obtenido midiendo directamente la viga por sus dos extremos colocando sendos dinamómetros como el que se muestra en la Figura 3.7:



Figura 3.7: Dinamómetro para obtención de la masa de la viga

La masa teórica obtenida para la estructura es:

$$m = 4,11 \text{ kg} \quad (3.9)$$

Al tratarse de un sistema continuo, nuestro parámetro modal será la densidad lineal. Por lo tanto necesitaremos la longitud de la viga (obtenida mediante

flexómetro):

$$L = 5,987 \text{ m} \quad (3.10)$$

Por lo tanto resulta:

$$\Delta\rho_L = \frac{m}{L} = 0,6842 \text{ kg/m} \quad (3.11)$$

3.2.2. Obtención de la rigidez: método de la deflexión

En un sistema continuo, la rigidez de nuestra estructura vendrá dada por el producto EI_z . Para la obtención del valor teórico de rigidez de la viga se ha empleado el *método de deflexión*, consistente en colocar masas en la sección central de la viga y medir (a través del sensor láser) las flechas que éstas producen. Representando las flechas frente a la masa empleada para cada caso, se obtiene una recta cuya pendiente es la rigidez buscada.

El valor resultante de este método es:

$$EI_z = 4411,09 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \quad (3.12)$$

3.3. Método de variación de masa: procedimiento experimental

La disposición de las masas puntuales colocadas sobre la estructura, así como la colocación del sensor láser, se muestran a continuación en la Figura 3.8:



Figura 3.8: Disposición de masas puntuales sobre la viga y posición del sensor láser

La posición del sensor láser debe ser tal que no coincida con ninguno de los nodos (puntos sin oscilación) de la viga. Para ello analizaremos primero la forma de los modos de vibración, dada por la Ecuación 3.5:

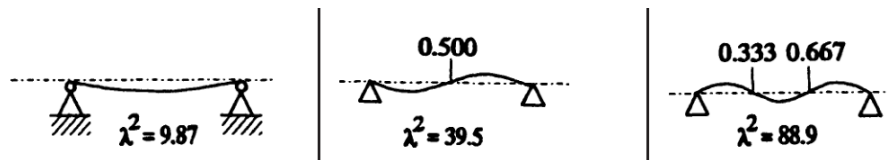


Figura 3.9: Modos 1 (izq.), 2 (centro) y 3 (dcha.) de vibración de una viga biapoyada con distribución de masa continua [4]

Como se observa en la Figura 3.9, para nuestro caso de estudio (modos 1 y 2) los únicos nodos están en la mitad de la viga y en los extremos, luego la

posición del sensor será un punto intermedio entre estos. Si quisiéramos estudiar el modo 3, deberíamos alejarnos de las posiciones a $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de la longitud total de la viga.

Para la colocación de las masas puntuales se procederá a situarlas en n nodos que dividen a la estructura en $n + 1$ tramos (Figura 3.10):

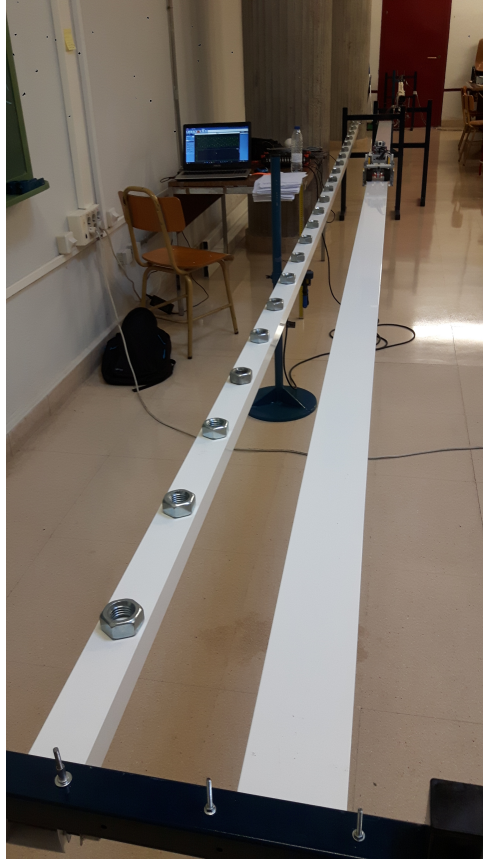


Figura 3.10: Colocación de las masas puntuales en los nodos (izq.)

3.4. Presentación y análisis de resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos en la medición de las frecuencias para el modo 1 así como el cálculo de ρ_L obtenido de dichos valores para masas dispuestas sobre la estructura en 11 nodos (Tabla 3.1):

caso	$\Delta m/m$ [%]	$\Delta \rho_L$ [kg/m]	f_1 [Hz]	ρ_L teórico [kg/m]	ρ_L MVM [kg/m]	error abs [kg/m]	error rel [%]
1	2,58%	0,0180903	3,51		0,344419623	-0,339782142	-49,66%
2	5,02%	0,0361806	3,479		0,506980774	-0,177220991	-25,90%
3	7,35%	0,05427089	3,418	0,684201765	0,493610926	-0,190590839	-27,86%
4	9,56%	0,07236119	3,387		0,555097715	-0,129104049	-18,87%
5	11,68%	0,09045149	3,357		0,600404807	-0,083796957	-12,25%

Tabla 3.1: Frecuencias medidas y valor de ρ_L obtenido mediante el MVM con 5 casos distintos de $\Delta\rho_L$ dispuesta en 11 nodos para el modo 1.

En la Tabla 3.2 se recogen los resultados para el modo 1 de valores de EI_z .

caso	$\Delta m/m$ [%]	$\Delta \rho_L$ [kg/m]	f_1 [Hz]	EI_z teórico [N · m ²]	EI_z MVM [N · m ²]	error abs [N · m ²]	error rel [%]
1	2,58%	0,0180903	3,51		2325,581	-2085,509335	-47,28%
2	5,02%	0,0361806	3,479		3423,222	-987,8684227	-22,40%
3	7,35%	0,05427089	3,418	4411,09	3332,946	-1078,143937	-24,44%
4	9,56%	0,07236119	3,387		3748,115	-662,9745372	-15,03%
5	11,68%	0,09045149	3,357		4054,037	-357,0532411	-8,09%

Tabla 3.2: Frecuencias medidas y valor de EI_z obtenido mediante el MVM con 5 casos distintos de $\Delta\rho_L$ dispuesta en 11 nodos para el modo 1.

Análogamente para el modo 2, la densidad lineal resulta:

caso	$\Delta m/m$ [%]	$\Delta \rho_L$ [kg/m]	f_2 [Hz]	ρ_L teórico [kg/m]	ρ_L MVM [kg/m]	error abs [kg/m]	error rel [%]
1	2,58%	0,0180903	13,855		0,581122087	-0,103079677	-15,07%
2	5,02%	0,0361806	13,672		0,614083178	-0,070118586	-10,25%
3	7,35%	0,05427089	13,489	0,684201765	0,617804119	-0,066397645	-9,70%
4	9,56%	0,07236119	13,306		0,613369376	-0,070832389	-10,35%
5	11,68%	0,09045149	13,123		0,605549568	-0,078652196	-11,50%

Tabla 3.3: Frecuencias medidas y valor de ρ_L obtenido mediante el MVM con 5 casos distintos de $\Delta\rho_L$ dispuesta en 11 nodos para el modo 2.

Y la rigidez de la viga:

caso	$\Delta m/m$ [%]	$\Delta \rho_L$ [kg/m]	f_2 [Hz]	El, teórico	El, MVM	error abs [N · m ²]	error rel [%]
				[N · m ²]	[N · m ²]		
1	2,58%	0,0180903	13,855		3743,442	-667,6477508	-15,14%
2	5,02%	0,0361806	13,672		3955,769	-455,3206969	-10,32%
3	7,35%	0,05427089	13,489	4411,09	3979,739	-431,3513327	-9,78%
4	9,56%	0,07236119	13,306		3951,171	-459,9188349	-10,43%
5	11,68%	0,09045149	13,123		3900,798	-510,292065	-11,57%

Tabla 3.4: Frecuencias medidas y valor de EI_z obtenido mediante el MVM con 5 casos distintos de $\Delta \rho_L$ dispuesta en 11 nodos para el modo 2.

Con respecto al número de nodos, se han hecho diversas pruebas y se han obtenido mejores resultados para $n = 11$ nodos (12 tramos). Sin embargo, el factor determinante a la hora de minimizar los errores es el porcentaje de masa añadida sobre la propia de la estructura $\Delta m/m$: en términos generales, al igual que ocurría en sistemas discretos, la estimación dada por el método mejora al aumentar el porcentaje de masa añadido. Sin embargo, se aprecia una diferencia entre ambos modos: así como en el modo 1 se observa el comportamiento esperado, en el modo 2 se aprecia un leve empeoramiento de los resultados al rebasar cierto nivel de masa. Estas observaciones se plasman en las Figuras a continuación:

Con respecto a la densidad lineal para el modo 1:

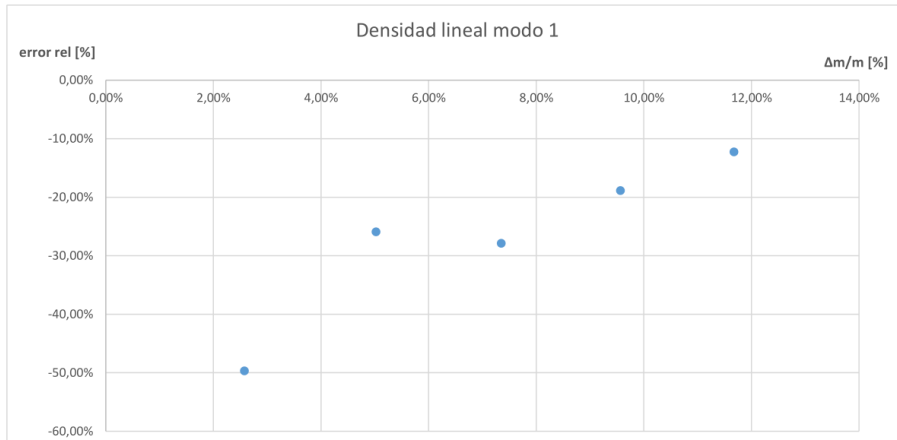


Figura 3.11: Error relativo [%] en el cálculo de ρ_L a partir de las frecuencias del modo 1 frente al porcentaje de variación de masa sobre la masa inicial $\Delta m/m$ [%]

Para el caso de la rigidez calculada con las frecuencias del modo 1 (Figura 3.12):

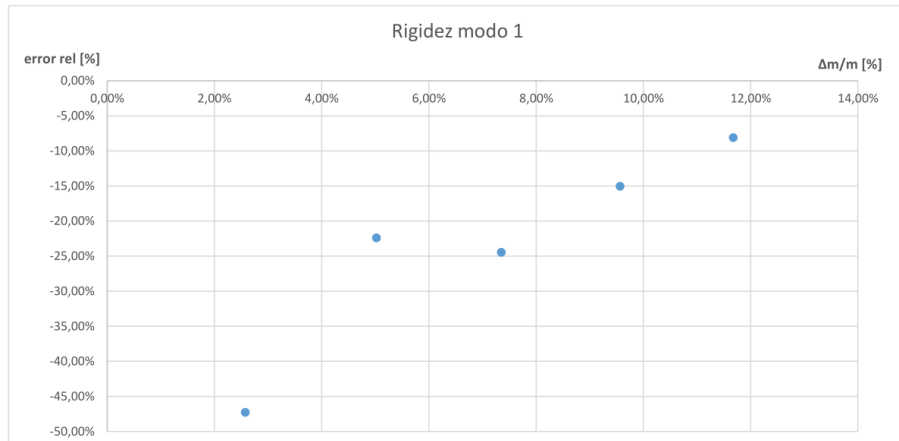


Figura 3.12: Error relativo [%] en el cálculo de EI_z frente al porcentaje de variación de masa sobre la masa inicial $\Delta m/m$ [%]

Se observa que los errores en el modo 1 decrecen con el aumento del porcentaje de masa añadido (el comportamiento esperado).

Para el modo 2, en lo referente a la densidad lineal (Figura 3.13):

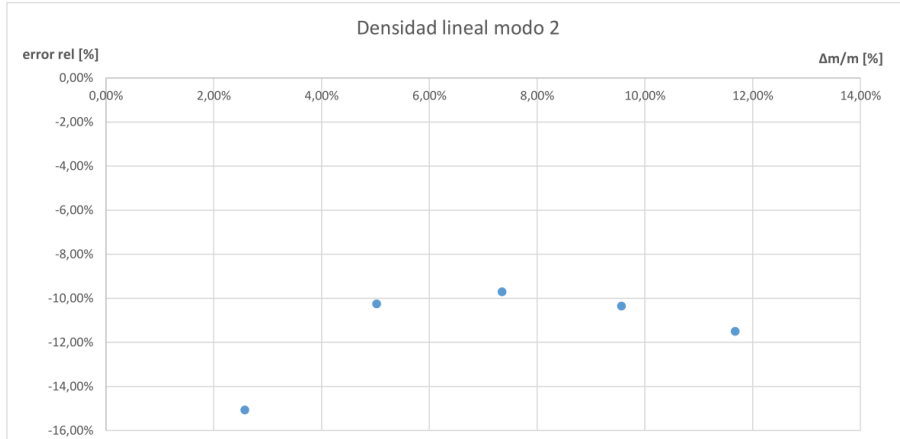


Figura 3.13: Error relativo [%] en el cálculo de ρ_L a partir de las frecuencias del modo 2 frente al porcentaje de variación de masa sobre la masa inicial $\Delta m/m$ [%]

Y la rigidez para el modo 2:

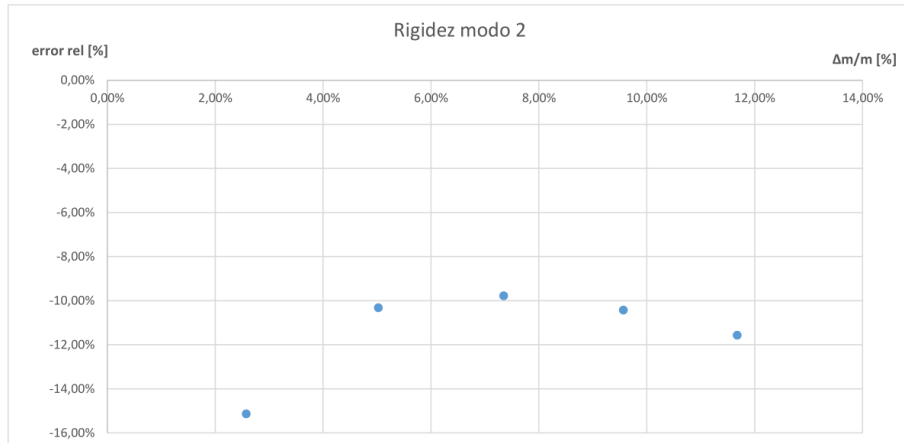


Figura 3.14: Error relativo [%] en el cálculo de EI_z a partir de las frecuencias del modo 2 frente al porcentaje de variación de masa sobre la masa inicial $\Delta m/m$ [%]

Se aprecia que, para el modo 2, se produce un mínimo en los errores cometidos en la estimación de la densidad lineal y la rigidez en torno a un valor de $\Delta m/m \approx 7,5\%$.

Esto no es el comportamiento esperado (los errores deberían minimizarse con el aumento del cambio de masa). Es posible que la colocación de las masas influya en la forma de vibración del modo 2, introduciendo errores adicionales.

Parte VI
Conclusiones

Las conclusiones obtenidas a lo largo de la realización este trabajo se pueden resumir en:

- La aplicación del método de variación de masa es factible para sistemas de los cuales se conocen ecuaciones de gobierno.
- Por término general, los errores cometidos decrecen con el aumento de las modificaciones de masa realizadas sobre la estructura.
- Los resultados obtenidos son muy sensibles a los algoritmos utilizados y a los parámetros medidos.
- Hay diversos factores que influyen en el resultado final de los experimentos como:
 - En sistemas discretos: el gdl donde se realice la modificación de masa.
 - En sistemas continuos: el número de nodos donde se coloquen las masas puntuales.
 - En sistemas de varios gdl: los resultados no son necesariamente los mismos para los distintos modos de vibración.

Teniendo en cuenta lo anterior, el método de variación de masa se muestra muy prometedor a la hora de analizar los parámetros modales de una estructura, si bien todavía queda camino por delante a la hora de poder aplicarlo a todo tipo de estructuras y modos de vibración.

Parte VII
Líneas futuras

Las posibles innovaciones a realizar en el campo del método de variación de masa, y más ampliamente, en el del análisis modal operacional, estarían encaminadas a la estandarización del método para distintos tipos de estructuras y situaciones, así como a la aplicación del método en los siguientes casos:

- Situaciones en las que no se conocen ecuaciones que rijan el comportamiento de la estructura (o éstas sean imprecisas).
- Estructuras de difícil modelado a la hora de estudiar sus modos de vibración

Por otra parte, las investigaciones están centradas en las siguientes líneas:

- Convergencia de resultados obtenidos por el método con otros más probados como los de FRF.
- Escalado de modos de vibración y estimación de los factores de escala.
- Coincidencia de los valores que proporciona el método con simulaciones numéricas (elementos finitos).

Referencias

- [1] Villa García, L. M. *Comparación entre la estimación de parámetros modales de estructuras a partir de análisis modal clásico y operacional con modificaciones de masa*. Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería. (2016) Universitat Politècnica de Catalunya.
- [2] Brincker, Rune. *A way of getting scaled mode shapes in output only modal testing*. Aalborg University, Denmark.
- [3] Parloo, E. *Sensitivity-based operational mode shape normalization*. Mechanical systems and signal processing (2002).
- [4] Pilkey, Walter. *Formulas for stress, strain and structural matrices*. Second edition (2002). University of Virginia.
- [5] Ewins, D. *Modal testing: theory and practice*. (1991) Research studies press.
- [6] Mendes-Maia, N. *Theoretical and experimental modal analysis*. (1997) Research studies press.
- [7] Rodríguez, Jesús. *Incorporación de dispositivos TMD en una maqueta de edificio de 2 plantas. Diseño, construcción y sintonizado*. TFG (2016) Universidad de Valladolid.
- [8] Shannon, Claude. *Communication in the presence of noise*. (1949). Proceedings of the Institute of Radio Engineers.
- [9] Bai, Z. *Generalized Hermitian eigenvalue problems*. (2000) Philadelphia SIAM.

Anexo A: Código MATLAB creado para este trabajo

A.1 Código para sistema de 1 gdl

```
1 function [m, k] = mk_lgdl(f, delta_m)    %cálculo de masa y rigidez a
2 %partir de las frecuencias y el aumento de masa para un sistema de 1 grado
3 %de libertad
4 %entradas:
5     %f es un vector columna en que cada fila es la frecuencia de cada caso
6     %del experimento
7     %delta_m es un vector columna en que cada fila es el aumento de masa de
8     %cada caso del experimento
9 %salidas:
10    %m es un vector columna en el que cada fila es la masa calculada con el
11    %sistema formado por ese caso y el caso original (sin aumento de masa)
12    %k es un vector columna en el que cada fila es la rigidez calculada con
13    %el sistema formado por ese caso y el caso original (sin aumento de
14    %masa)
15 gdl = 1;    %1 grado de libertad
16 casos = 4;    %casos del experimento (mín 2 para un sistema 2x2)
17 m = NaN(casos, gdl);    %preasignación del vector de masas originales
18 k = NaN(casos, gdl);    %preasignación del vector de rigideces
19 syms m_sim k_sim;    %masa y rigidez simbólicas para la resolución de las
20 %ecuaciones
21 for i = 1:casos %bucle de definición de las ecuaciones
22     ec(i) = f(i) == sqrt(k_sim / (m_sim + delta_m(i))) / (2*pi);
23     %ecuación de frecuencia del sistema
24     disp(ec(i))
25 end
26 for i = 2:casos %bucle de resolución de los sistemas
27     [m(i), k(i)] = vpasolve([ec(1), ec(i)], [m_sim, k_sim]) %resuelve el
28     %sistema 2x2 de la ecuación de frecuencia del sistema
29     %original y la ec de f con el cambio de masa i-ésimo
30 end
31 end
```

A.2 Código para sistema de 2 gdl

```
1 function [f, V, M] = frecuencias_2gdl (m, k, n, delta_m) %cálculo de
2 %frecuencias desde masas y rigideces
3 %entradas:
4     %m y k son vectores fila con las masas y rigideces del piso
5     %inferior y superior respectivamente
6     %n es el número de casos del experimento (mín 4 para un sistema 4x4)
7     %delta_m es una matriz de masas adicionales en la que las filas son los
8     %casos y las columnas las posiciones
9 %salidas:
10    %f devuelve una matriz de frecuencias en la que las filas son los casos
11    %y las columnas los modos
12    %V devuelve un cell array columna en el que cada fila es la matriz de
13    %modos de vibración de cada caso
14    %M devuelve un cell array columna en el que cada fila es la matriz de
15    %masas de cada caso
16    M_0 = diag(m); %def matriz de masa inicial
17    K = [k(1) + k(2), -k(2); -k(2), k(2)]; %def matriz de rigidez
18    delta_M = cell(n,1); %preasignación de cell array de matrices delta_M
19    M = cell(n,1); %preasignación de cell array de matrices de masa
20    V = cell(n,1); %preasignación de cell array de modos de vibración
21    D = cell(n,1); %preasignación de cell array de autovalores
22    f = zeros(n,2); %preasignación de la matriz de frecuencias
23    for i = 1:n %para cada caso del experimento
24        delta_M{i} = zeros(2,2); %preasignación de matrices delta_M
25        delta_M{i} = diag(delta_m(i,:)); %def matrices delta_M
26        M{i} = zeros(2,2); %preasignación de matrices de masa
27        M{i} = M_0 + delta_M{i}; %def matrices de masa
28        V{i} = zeros(2,2); %preasignación de matrices de modos de vibración
29        D{i} = zeros(2,2); %preasignación de matrices de autovalores
30        [V{i}, D{i}] = eig(K, M{i}); %cálculo matrices de modos y
31        %autovalores
32        for j = 1:2 %para cada modo de vibración
33            f(i,j) = sqrt(D{i}(j,j)) / (2*pi); %cálculo frecuencias
34        end
35    end
36 end
```

```

1 function [alfapos, psi] = factor_escala(V, n)    %cálculo factor escala
2 %desde modos vibración
3 %entradas:
4     %V es un cell array columna en el que cada fila es la matriz de
5     %modos de vibración de cada caso del experimento
6     %n es el número de casos del experimento
7 %salidas:
8     %alfapos devuelve una matriz con los factores de escala positivos, en
9     %la que las filas son los casos del experimento y las columnas los
10    %modos
11    %psi devuelve un cell array con los modos de vibración escalados a la
12    %unidad, en el
13    %que las filas son los casos y las columnas el número de modo
14 fi = cell(n,2); %preasignación de cell array de modos de vibración sin
15 %escalar
16 alfa = cell(n,2); %preasignación de cell array de factores de escala
17 alfapos = zeros(n,2); %preasignación de cell array de factores de escala
18 %no negativos
19 psi = cell(n,2); %preasignación de cell array de modos de vibración
20 %escalados
21 syms alfa_sim; %factor de escala simbólico para la resolución de las
22 %ecuaciones de ortonormalización
23 for i = 1:n %para cada caso del experimento
24     for j = 1:2 %para cada modo de vibración
25         fi{i,j} = zeros(2,1); %preasignación de vectores de modos sin
26         %escalar
27         fi{i,j} = V{i}(:,j); %def de modos
28         alfa{i,j} = zeros(2,1); %preasignación de vectores de factores de
29         %escala
30         ec = (alfa_sim * fi{i,j}).' * (alfa_sim * fi{i,j}) - 1 == 0;
31         %%def de ecuaciones de ortonormalización
32         %a la unidad
33         alfa{i,j} = vpasolve(ec, alfa_sim); %devuelve los valores de alfa
34         %para cada caso y modo
35         alfa{i,j} = double(alfa{i,j}); %convierte alfa a doble precisión
36         alfapos(i,j) = alfa{i,j}(alfa{i,j} > 0); %devuelve los valores
37         %de alfa positivos
38         psi{i,j} = zeros(2,1); %preasignación de vectores de modos
39         %escalados
40         psi{i,j} = alfapos(i,j) * fi{i,j}; %def modos escalados
41     end
42 end
43 end

```

A.3 Código para sistema de 2 gdl (modo 1)

```
1 function F = mk(x, f, delta_m, n) %cálculo de m y k a partir de f
2 m = zeros(1,2); %preasignación del vector de masa
3 k = zeros(1,2); %preasignación del vector de rigidez
4 for i = 1:2 %para cada grado de libertad
5     m(i) = x(i);
6     k(i) = x(i+2);
7 end
8 M_0 = diag(m); %def matriz de masa inicial
9 K = [k(1) + k(2), -k(2); -k(2), k(2)]; %def matriz de rigidez
10 delta_M = cell(n,1); %preasignación de cell array de matrices delta_M
11 M = cell(n,1); %preasignación de cell array de matrices de masa
12 %a = zeros(2,1); %preasignación del vector de autovalores
13 F = zeros(n,1); %preasignación del vector de funciones a resolver
14 for i = 1:4 %para cada caso del experimento
15     delta_M{i} = zeros(2,2); %preasignación de matrices delta_M
16     delta_M{i} = diag(delta_m(i,:)); %def matrices delta_M
17     M{i} = zeros(2,2); %preasignación de matrices de masa
18     M{i} = M_0 + delta_M{i}; %def matrices de masa
19     a = eigs(K, M{i}, 1, 'sm'); %cálculo del menor autovalor
20     F(i) = f(i,1) - sqrt(a) / (2*pi); %cálculo de masas y rigideces a
21     %partir de las frecuencias del modo 1
22 end
23
24 end
```

A.4 Código para sistema de 2 gdl (modo 2)

```
1 function F = mk(x, f, delta_m, n) %cálculo de m y k a partir de f
2 m = zeros(1,2); %preasignación del vector de masa
3 k = zeros(1,2); %preasignación del vector de rigidez
4 for i = 1:2 %para cada grado de libertad
5     m(i) = x(i);
6     k(i) = x(i+2);
7 end
8 M_0 = diag(m); %def matriz de masa inicial
9 K = [k(1) + k(2), -k(2); -k(2), k(2)]; %def matriz de rigidez
10 delta_M = cell(n,1); %preasignación de cell array de matrices delta_M
11 M = cell(n,1); %preasignación de cell array de matrices de masa
12 F = zeros(n,1); %preasignación del vector de funciones a resolver
13 for i = 1:4 %para cada caso del experimento
14     delta_M{i} = zeros(2,2); %preasignación de matrices delta_M
15     delta_M{i} = diag(delta_m(i,:)); %def matrices delta_M
16     M{i} = zeros(2,2); %preasignación de matrices de masa
17     M{i} = M_0 + delta_M{i}; %def matrices de masa
18     a = eigs(K, M{i}, 1); %cálculo del mayor autovalor
19     F(i) = f(i,2) - sqrt(a) / (2*pi); %cálculo de masas y rigideces a
20     %partir de las frecuencias del modo 2
21 end
22 end
```

