Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Grado en Economía

El Dilema del Prisionero en la Teoría de Juegos

Presentado por:

Rodrigo Rayo Trigueros

Valladolid, 30 de Noviembre de 2015

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Presentación

El *dilema del prisionero* es un problema fundamental de la teoría de juegos que demuestra que dos personas pueden no cooperar pese a que si lo hicieran el resultado obtenido sería mejor para las dos partes.

Fue originalmente formulado por los matemáticos Merrill M. Flood (1951; 1952) y Melvin Dresher (1950) a principios de la década de los 50, pero sería Albert W. Tucker (1950) quien terminaría de definir el juego añadiendo las recompensas penitenciarias y poniéndole el nombre con que hoy se le conoce. El enunciado del dilema del prisionero dice así:

> *"La policía acaba de arrestar a dos sospechosos de un crimen. No se han encontrado pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, un oficial de policía los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a cinco años de prisión mientras que el delator será liberado. Por el contrario, si calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y el cómplice será quien salga libre. Pero si ambos confiesan el crimen, cada uno recibirá una condena menor, de sólo cuatro años. Si ninguno confiesa, ante la falta de pruebas, pasarán un año en la cárcel acusados de un cargo menor."*

La conclusión a la que se llega es que el pensamiento lógico tomado por los prisioneros por separado hace que escojan la situación que es mejor para ellos individualmente en lugar de la decisión adecuada para el beneficio común.

Si analizamos la situación desde el punto de vista de uno de los prisioneros, la mejor decisión va a ser confesar, ya que de esta forma se minimiza la condena que recibiríamos independientemente de lo que escoja el otro prisionero.

Respecto al otro prisionero va a ocurrir lo mismo, dado que va a razonar de la misma manera y por tanto se llegará a la solución de que ambos confiesen. De esta forma los dos prisioneros van a pasar 4 años cada uno en la cárcel mientras que si hubieran cooperado hubieran sido condenados sólo a 1 año cada uno.

Representándolo a través de una tabla:

Tabla 1. *Representación del dilema del prisionero*

	Callar(J2)	**Confesar(J2)**
Callar(J1)	-1, -1	-5, 0
Confesar(J1)	0, -5	-4, -4

Fuente: Elaboración propia basada en Pérez, J.; Jimeno, J.L. y Cerdá, E. (2013). *Teoría de juegos,* 2ª Ed., Ibergarceta Publicaciones, S.L: Madrid, 2013.

Por tanto, la situación a la que se llega es un "equilibrio de Nash", aquella en la que individualmente los jugadores no mejoran su situación al modificar su decisión mientras el otro jugador mantenga fija su decisión.

En un equilibrio de Nash los jugadores o los prisioneros, en este caso, maximizan sus pagos dadas las estrategias tomadas por los demás. Cuando se obtiene este resultado se llega al mejor resultado de forma individual pero no de forma conjunta.

1.2 Objetivos

Con este trabajo se pretenden abordar diferentes cuestiones acerca del dilema del prisionero:

- *¿Por qué es un dilema?*

La primera cuestión que cabe plantearse es el porqué de su condición de dilema. Como hemos comentado, la solución de equilibrio de Nash no es la mejor respuesta social, dado que si cooperasen obtendrían una pena menor y sería más beneficioso para ambos. Sin embargo, se llega a esta solución porque confesar es una estrategia estrictamente dominante para los dos jugadores. Si observamos la Tabla 1 y comparamos diferentes decisiones podemos ver que para el prisionero 1 la opción *'callar, callar'* proporciona un pago menor que *'confesar, callar'* (-1<0) y que la opción *'callar, confesar'* proporciona un pago menor que *'confesar, confesar'* (-5<-4), al igual que ocurre con el prisionero 2. Por lo tanto, para cualquier prisionero, la estrategia *'confesar'* domina estrictamente a la estrategia '*callar'*.

Esto ocurre porque las personas somos seres racionales que nos movemos por el interés personal, lo que encierra una contradicción entre lo individual y lo colectivo. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la respuesta al dilema del prisionero depende del contexto particular. Si se modificasen las condiciones, se llegaría a la solución cooperativa o, también, si el juego lo realizasen dos hermanos el resultado predecible seria que cooperasen.

- *Diferentes ámbitos*

Con el paso del tiempo, se ha podido ver reflejado el dilema del prisionero en las ciencias sociales, la economía, las ciencias políticas (Beltran, 2015), la sociología o incluso en las ciencias biológicas. De ahí que pueda apreciarse en gran cantidad de actividades grupales: manifestaciones, revoluciones, guerras o votaciones, entre otras.

Un ejemplo está en la dirección de determinadas empresas. Ante dos empresas con gran capacidad de mercado a las que se les posibilita la opción de ampliar su potencial si cooperan entre sí, el egoísmo les lleva a no fiarse el uno del otro y acabar asumiendo unos gastos mayores que si hubiesen colaborado. También se puede apreciar el dilema del prisionero en un caso tan conocido como la Guerra Fría entre Estados Unidos y la Unión Soviética. A estos países se les presentaron dos opciones: incrementar el gasto militar en armas y ver reducido con ello el gasto en otras áreas (investigación, sanidad o educación), o firmar un acuerdo en el que se comprometiesen a destinar el dinero a esos otros fines. El resultado fue totalmente perjudicial puesto que optaron por la postura egoísta y derrocharon dinero en un armamento innecesario.

Son dos ejemplos que demuestran que el dilema del prisionero puede formar parte de la vida cotidiana, llevando a la solución equivocada desde el punto de vista colectivo.

2. EL DILEMA DEL PRISIONERO EN LA TEORÍA DE JUEGOS

El dilema del prisionero está clasificado dentro de los juegos estáticos, que se caracterizan porque sus jugadores desconocen lo que han hecho los demás y disponen de información completa al conocer las consecuencias de cada jugada. Este tipo de juegos se representan en forma normal, esto es, mostrando un conjunto de jugadores (en este caso dos), un conjunto de estrategias (callar o confesar) y una función de pagos.

En un juego, los jugadores quedan definidos por el conjunto $J = \{1, 2, \ldots, n\}$; las estrategias por el conjunto $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ y los pagos por las utilidades que le ocasionan las diferentes estrategias a cada uno de los jugadores. De esta forma, un juego podría expresarse de la siguiente manera:

$$G = \{J; S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

Dentro de la teoría de juegos, se plantea el enfrentamiento entre “solución” y “concepto de solución”, pues la solución que debiera ser la decisión óptima tiende a no serlo, como ocurre en el dilema del prisionero. Esto se debe a que, en muchas ocasiones, la decisión no solo depende de la que tome cada jugador, aunque este hecho resulta obvio al tratarse de un juego. En realidad, el concepto de solución es aquel en el que puede llegarse a una solución a través de un método concreto y razonado.

La teoría de juegos presenta diferentes conceptos de solución como son los argumentos de dominación, el mecanismo de Clark-Groves o los argumentos de equilibrio con el equilibrio de Nash como noción más relevante. No obstante, nos centraremos en los argumentos de dominación y dejaremos a un lado el mecanismo de Clark-Groves pero no el equilibrio de Nash, que será retomado más adelante.

2.1 Argumentos de dominación

El concepto de dominancia radica en que una estrategia es dominante si proporciona mayores pagos, cualquiera que sean las estrategias del resto. La lógica nos hace pensar que un ser racional siempre va a elegir la estrategia dominante. Partiendo de este concepto, se introducen las estrategias dominantes o débilmente dominantes y las estrategias estrictamente dominantes (Pérez, J.; Jimeno, J.L. y Cerdá, E., 2013: 69).

Suponemos un juego G= {$S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n$}, sean s'_i y s''_i dos estrategias del jugador *i*:

- Se dice que s'_i está dominada por s''_i cuando la desigualdad

  $$u_i(s_1, \ldots s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \leq u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

  se cumple para cualquier estrategia s_{-i} de otros jugadores y alguna de ellas de modo estricto.
- Se dice que s'_i está estrictamente dominada por s''_i cuando la desigualdad

  $$u_i(s_1, \ldots s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

  se cumple para cualquier estrategia s_{-i} de otros jugadores.

2.1.1 Uso de estrategias dominantes

Es uno de los conceptos de solución dentro de los argumentos de dominancia, aunque no siempre es aplicable. Solo se da en aquellos juegos donde los dos jugadores tienen alguna estrategia dominante, como es el caso del dilema del prisionero.

Para cada prisionero, la opción "confesar" es estrategia dominante, por lo que, según este concepto de solución, "confesar, confesar" sería la solución del juego.

2.1.2 Eliminación iterativa estricta

Para este concepto de solución hay que partir de la idea que todos los jugadores son seres racionales, es decir, que van a maximizar sus pagos. Llegado a ese punto, la lógica dice que ningún jugador va a emplear una estrategia estrictamente dominada.

La clave de este concepto de solución es considerar que ambos jugadores saben que el otro jugador es racional. Entonces se inicia el siguiente proceso:

1. De cada jugador, y haciéndolo al mismo tiempo, se eliminan las estrategias que estén estrictamente dominadas para así formar un juego más reducido.

2. De cada jugador, y haciéndolo al mismo tiempo, se eliminan las estrategias que estén estrictamente dominadas del juego reducido, formándose otro juego aún más reducido.

Este proceso continúa hasta que ya no queden estrategias que eliminar para ningún jugador. La solución del juego será aquella que sobreviva a todo el proceso de eliminación. En el dilema del prisionero, si adoptamos este concepto de solución, concluimos que la solución será *'confesar, confesar'*.

2.1.3 Eliminación iterativa débil

Este concepto de solución surge debido a que, en muchas ocasiones, no es posible llevar a cabo la eliminación iterativa estricta. La idea de esta modalidad es la misma que la anterior, solo que en este caso no es necesario que las estrategias a eliminar sean estrictamente dominadas, basta con que lo sean débilmente. El proceso es exactamente igual que el de eliminación iterativa estricta.

En cuanto a la solución del dilema del prisionero, sigue siendo *'confesar, confesar'*, puesto que si el proceso de eliminación era estrictamente también lo será débilmente.

En los tres conceptos de solución vistos el resultado alcanzado es *'confesar, confesar'*, que sigue sin ser la opción más beneficiosa para ambos prisioneros.

3. EQUILIBRIO DE NASH

El equilibrio de Nash es uno de los conceptos más importantes dentro de la teoría de juegos. No obstante, antes de adentrarnos en el concepto en sí mismo, vamos a hablar sobre el creador de dicho equilibrio para después comentar la contribución que supuso para la ciencia en el siglo pasado.

3.1 John Forbes Nash

John F. Nash fue matemático, economista y profesor de la Universidad de Princeton. Nació el 13 de junio de 1928 en Bluefield, Virginia occidental (EE.UU) y, llegado a la edad universitaria, se matriculó en el instituto Caregie de Tecnología, donde su primera idea fue realizar estudios en Ingeniería Química. Sin embargo, esta disciplina no despertó en él la misma motivación que las matemáticas a las que, también aconsejado por uno de sus profesores, terminó dedicándose hasta convertirse en Licenciado en Matemáticas en 1948.

Una vez finalizados estos estudios, decidió continuar su formación realizando un doctorado en la Universidad de Princeton. Durante esta etapa, trabajó en el estudio y resolución de problemas en materias como la topología, la geometría o la teoría de juegos. Fue precisamente en estos años cuando empezó a elaborar el concepto más tarde conocido como “equilibrio de Nash”. En 1950, obtuvo el grado de Doctor con su Tesis sobre los Juegos no Cooperativos y su teorema del equilibrio en las negociaciones. Después de concluir su tesis trabajó para la Corporación Rand, aunque al cabo de unos meses pasó a compaginar este puesto con nuevas tareas en la Universidad de Princeton. Y, en 1952, entró a formar parte del cuerpo docente del Instituto Tecnológico de Massachusetts.

Su trabajo aquí fue brillante. Sin embargo, en 1959, se vio forzado a abandonar esta ocupación al ser diagnosticado de esquizofrenia, pues esta enfermedad le llevó a ser hospitalizado poco después. Durante años, luchó contra esta patología pasando por diferentes instituciones psiquiátricas. Así, pese a la gravedad de su situación, y contra todo pronóstico, consiguió recuperarse y volver a ocupar un puesto en Princeton a comienzos de los noventa.

En 1994, junto con los economistas John C. Harsenyi y R. Selten, le fue concedido el Premio Nobel en Economía en reconocimiento a su labor investigadora sobre la teoría de juegos. Por desgracia, John Nash falleció el pasado 23 de mayo de 2015 en un accidente de tráfico junto a su esposa tras haber recibido el premio Abel[1] de matemáticas.

[1] Equivalente al premio Nobel en matemáticas, ya que aún no se otorga dicho galardón a los matemáticos.

3.2 Contribución a la ciencia en el siglo XX

Podemos decir que el Equilibrio de Nash fue una de las mayores aportaciones del siglo XX a la ciencia, especialmente al área de las matemáticas.

Como ya hemos comentado, John Nash comenzó a desarrollar la idea en sus años de doctorado y así lo refleja su tesis sobre los Juegos no Cooperativos y su teorema del equilibrio en las negociaciones. El concepto le llegó tras el análisis de los procesos de toma de decisión y puede definirse así: “Un Equilibrio de Nash (EN) es un perfil de estrategias según el cual ningún jugador optaría por cambiar su estrategia fijadas las del resto de jugadores.”

En consecuencia, al hablar del Equilibrio de Nash se debe especificar si lo es en estrategias puras o en estrategias mixtas. En el juego $G = \{J; S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, definido anteriormente, se dice que el perfil de estrategias puras $(s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_n)$ es un Equilibrio de Nash si para cada jugador i se cumple la desigualdad:

$$u_i(s^*_1, \ldots, s^*_{i-1}, s^*_i, s^*_{i+1}, \ldots, s^*_n) \geq u_i(s^*_1, \ldots, s^*_{i-1}, s_i, s^*_{i+1}, \ldots, s^*_n)$$

para todo s_i de S_i. Esto, en definitiva, implica que la solución del problema de maximización (max $u_i(s^*_1, \ldots, s^*_{i-1}, s_i, s^*_{i+1}, \ldots, s^*_n)$) sea s^*_i para cada jugador i, siendo s^*_i la variable de decisión que pertenece a S_i. Por tanto, el EN en estrategias puras es el resultante de aplicar los procedimientos de dominancia, tal como hace el dilema del prisionero, donde *‘confesar, confesar’* es el resultado que obedece a la definición dada para el Equilibrio de Nash. Sin embargo, puede ocurrir que, en algún juego, tras aplicar los procedimientos de dominancia no exista ningún EN en estrategias puras. Es entonces cuando surgen las estrategias mixtas, en las que la elección de la estrategia se realiza en función de la asignación de unas probabilidades. Esta explicación podemos verla a través de un ejemplo partiendo del siguiente juego en forma normal:

Tabla 2. *Juego con estrategias mixtas*

	C(J2)	**D(J2)**
A(J1)	2, 1	0, 2
B(J1)	1, 2	3, 0

Fuente: elaboración propia a partir de Arranz, M. R. (2012). Matemáticas III, Grado en Economía, Facultad CCEyE, UVa.

Tras comprobar que no existe equilibrio de Nash en estrategias puras, llamamos *p* a la probabilidad de que el Jugador 1 elija A, siendo 1- *p* la probabilidad de que el jugador 1 elija B. Por otro lado, llamamos *q* a la probabilidad de que el Jugador 2 elija C, siendo 1- *q* la probabilidad de que el Jugador 2 elija D.

Determinamos las utilidades del Jugador 1:

$$\left.\begin{aligned} U_1\,(A/q) &= 2*q+0*(1-q)=2q \\ U_1\,(B/q) &= 1*q+3*(1-q)=-2q+3 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo la ecuación: $2q=-2q+3$; $q=3/4$. En ese valor el Jugador 1 estará indeciso.

Determinamos las utilidades del Jugador 2:

$$\left.\begin{aligned} U_2\,(C/p) &= 1*p+2*(1-p)=-p+2 \\ U_2\,(D/p) &= 2*p+0*(1-p)=2p \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo la ecuación: $-p+2=2p$; $p=2/3$. En ese valor el Jugador 2 estará indeciso

El equilibrio de Nash que obtenemos es: {(2/3A+1/3B, 3/4C+1/4D)}

Hay que decir que el Equilibrio de Nash no tiene por qué ser mejor solución para los jugadores, aunque si será la estrategia óptima dadas las del resto. Puede ocurrir que la solución a un juego presente varios equilibrios de Nash, pero, en cualquier caso, de darse una única solución en estrategias mixtas, siempre será un equilibrio de Nash. Debemos recordar la calificación hecha respecto del equilibrio de Nash como concepto de solución junto con los argumentos de dominación o el mecanismo de Clark-Groves. Pues bien, el equilibrio de Nash está considerado como una mejor solución que los argumentos de dominación, dado que en cualquier juego finito va a existir como mínimo un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, algo que demostró el propio Nash en 1950.

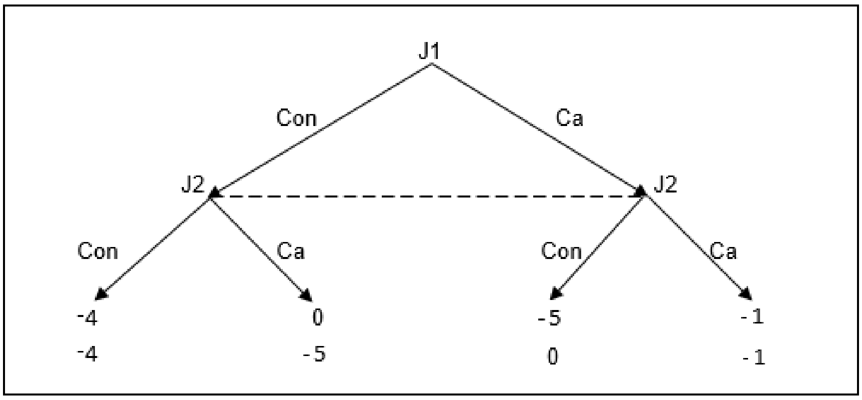
4. JUEGOS REPETIDOS

Estos juegos forman parte de los juegos dinámicos con información completa, por lo que vamos a realizar una pequeña introducción a estos para así entender mejor después los juegos repetidos.

Los juegos dinámicos con información completa se caracterizan porque los jugadores pueden tomar decisiones en diferentes momentos. Además, conocen con exactitud los pagos del resto de jugadores y su representación es en forma extensiva, siendo la más habitual de este tipo la conocida como “forma de árbol”: una recopilación finita de nodos, conectados por ramas, que forman una figura sin curvas cerradas y está determinada por un conjunto de jugadores.

Vamos a tomar como ejemplo el propio dilema del prisionero, que quedaría representado de la siguiente manera:

Gráfico 1. *Representación del dilema del prisionero en forma extensiva*



Fuente: Elaboración propia basada en Pérez, J.; Jimeno, J.L. y Cerdá, E. (2013) *Teoría de juegos,* 2ª Ed., Ibergarceta Publicaciones, S.L.: Madrid, 2013.

Cualquier camino que se escoja y nos lleve desde el nodo inicial hasta un nodo terminal (final del juego) se considera un posible *desarrollo* del juego. De hecho, los juegos dinámicos con información completa son algo más complejos que los juegos estáticos con información completa por la influencia de factores como el de información perfecta o imperfecta, y la aparición de subjuegos. El primer elemento tiene mucha importancia, dado que, según la información, los juegos tienen características diferentes, tendiendo a ser los más sencillos los que presentan una información perfecta. Se entiende por este tipo de juegos aquellos en que los jugadores conocen las jugadas de los demás rivales, como ejemplifican el ajedrez o las damas. Al contrario, se consideran de información imperfecta los juegos en que se desconocen las jugadas de los rivales, como ocurre en dilema del prisionero repetido *n* veces.

Por otro lado, respecto del segundo factor, los subjuegos suponen una subdivisión del juego original creada inconscientemente por los jugadores cuando reciben información de lo ocurrido desde el inicio de la "partida" hasta un determinado momento. En consecuencia, puesto que en un punto del desarrollo del juego pasan a conocer todo sobre este, pueden considerar que se trata de un juego nuevo (cuentan con más datos que los iniciales) que, al formar parte de uno mayor, pasa a denominarse *subjuego*. Una vez introducido este término, surge el de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS), donde los jugadores tienen en cuenta que sus decisiones pueden afectar a los pagos posteriores (propios y ajenos) y, también, que las posibles decisiones futuras influyen sobre las presentes. Lo que diferencia al ENPS del equilibrio de Nash simple es que el primero valora la *credibilidad* de esas posibles decisiones futuras en el momento de decidir sobre las presentes. Por tanto, este nuevo equilibrio intenta dar una solución más completa, puesto que, al regirse por la credibilidad, deja de lado los equilibrios de Nash que se apoyan en situaciones no creíbles de acuerdo al desarrollo del juego. Cabe mencionar que los equilibrios de Nash de los juegos estáticos coinciden con los ENPS y que, además, en un juego dinámico finito siempre va a existir un ENPS.

Otro aspecto a destacar de los juegos dinámicos es el algoritmo de *Inducción hacia atrás generalizada*. Vamos a aplicar este concepto en los juegos con información completa pero imperfecta, siendo el procedimiento habitual:

1. Se determinan los subjuegos que se dan en último lugar y se calculan los equilibrios de Nash en caso de que existan.
2. Se eliminan dichos subjuegos, a excepción del nodo en que se inician, y se les aplica los pagos del equilibrio de Nash resultante. Así, se habrán "podado" las últimas ramas del juego global inicial.
3. Se repite con el árbol reducido que ha quedado hasta que se llegue al nodo inicial del juego.

Una vez acabado el proceso, vamos a tener el nodo inicial con unos pagos que provienen de señalar ciertas ramas que, en caso de ser recorridas, llevarían al único resultado perfecto en subjuegos[2].

De esta forma, una vez que hemos abordado los juegos dinámicos, podemos centrarnos en los juegos repetidos. Estos juegos se caracterizan por tener una serie de etapas en las que intervienen los mismos jugadores jugando siempre el mismo juego. Antes de comenzar cada etapa, los jugadores conocen el desarrollo hasta dicho momento.

Al introducir el horizonte temporal en los juegos, surgen una serie de cuestiones que debemos plantearnos. Primeramente, no es lo mismo recibir un pago hoy que mañana ni tampoco nos proporciona la misma utilidad. Por este motivo, establecemos que un pago hoy nos genera más confianza y más posibilidades que en el futuro. Asociando la primera razón a una probabilidad β y la segunda a un tipo de interés α (en tanto por uno):

$$0 \leq \beta \leq 1 \text{ y } 0 \leq \alpha$$

suponiendo dos cantidades, una a recibir en un momento presente (C') y otra en el momento futuro (C) siendo C'<C se va a cumplir que $C = C'(1 + \alpha)$. Es lo que conocemos por *preferencia de liquidez* e *incertidumbre sobre el futuro*. Determinando δ al cociente $\beta/(1 + \alpha)$ vamos a llamar *factor de descuento* en un periodo al número real positivo (δ), de forma que al individuo le resulte indiferente cobrar δC en el momento t o C en el momento $t + 1$.

Finalmente, es muy importante diferenciar los juegos repetidos finitos de los juegos repetidos infinitos, por lo que pasamos a analizar ahora sus diferencias.

4.1 Juegos repetidos finitos

La principal característica de los juegos repetidos finitos es que el juego se va a repetir un número determinado de veces decidido previamente. En este tipo de juego se puede observar cómo la repetición del juego va a hacer que los

[2] Aquel tipo de juego en el que los jugadores eligen el equilibrio de Nash en cada etapa. No debe confundirse con el ENPS; el resultado perfecto en subjuegos es un desarrollo en particular del juego, mientras que el ENPS es un perfil de estrategias.

resultados puedan variar. Esto es posible porque los jugadores llegan a lograr algún grado de cooperación, incluso en el dilema del prisionero con su solución no cooperativa.

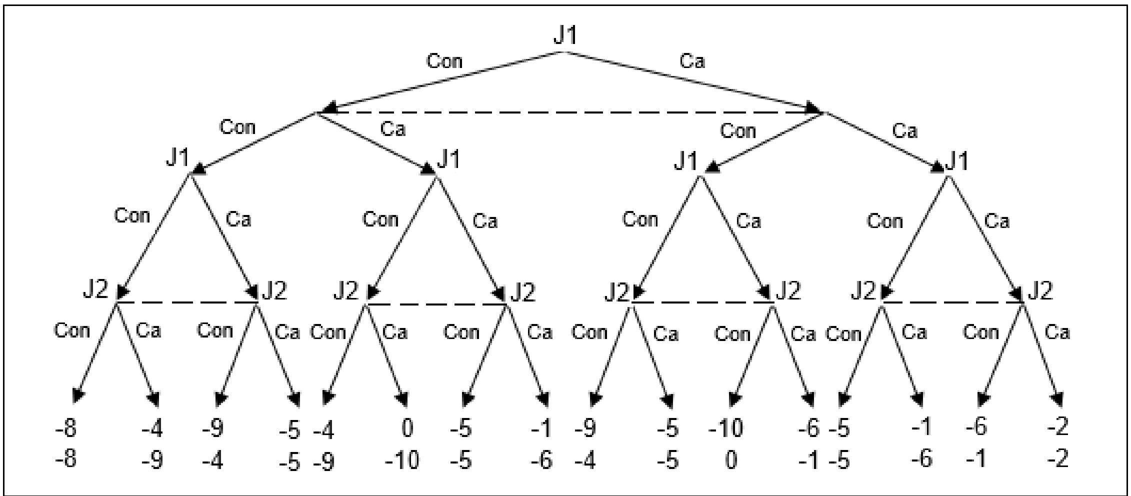
Hay que distinguir el juego de etapa (*G*, el cual será un juego cualquiera) del juego repetido (G^T, que tiene en cuenta el factor de descuento). Además, para que un juego repetido se considere finito tienen que darse una serie de situaciones:

- Que antes de iniciar el juego sea conocido públicamente:
  + Que el factor de descuento de cada jugador *i* es δ_i.
  + Que el juego *G* se juegue *T* veces.
  + Que los pagos de $G^T(\delta)$ son el valor presente de la secuencia finita de los pagos de etapa de cada jugador.
- Que antes de iniciar cada etapa sean conocidas públicamente todas las jugadas realizadas hasta entonces.

Partiendo del juego de etapa *G* y del juego repetido $G^T(\delta)$, el conjunto de situaciones que hayan tenido lugar hasta ese momento, o dicho de otra forma, las decisiones de los jugadores hasta ese instante son denominadas como *historias del juego hasta el momento t*.

Vamos a analizar el dilema del prisionero repetido 2 veces, con factor de descuento igual a 1, quedando así su representación en forma extensiva:

Gráfico 2. *Representación del dilema del prisionero repetido 2 veces*



Fuente: Elaboración propia basada en Pérez, J.; Jimeno, J.L. y Cerdá, E. (2013). *Teoría de juegos,* 2ª Ed., Ibergarceta Publicaciones, S.L.: Madrid, 2013.

De acuerdo al proceso de inducción hacia atrás generalizada, en la segunda etapa siempre se va a elegir *'confesar'* dado que para el Jugador 2 los pagos siempre van a ser mayores que los de '*callar*'. Con esto, se llegaría a la primera etapa con los siguientes pagos:

Tabla 3. *Primera etapa del dilema del prisionero repetido 2 veces*

	Callar(J2)	**Confesar(J2)**
Callar(J1)	-5, -5	-9, -4
Confesar(J1)	-4, -9	-8, -8

Fuente: Elaboración propia basada en Pérez, J.; Jimeno, J.L. y Cerdá, E. (2013) *Teoría de juegos,* 2ª Ed., Ibergarceta Publicaciones, S.L., Madrid: 2013.

Si nos fijamos, este juego es equivalente al dilema del prisionero original salvo porque los pagos han sufrido un cambio de escala. Por lo tanto, como ya sabemos, la solución será *'confesar, confesar'* y en consecuencia, el único ENPS será {(confesar siempre), (confesar siempre)}. Ambos jugadores van a escoger esa opción siempre, independientemente del resultado que se dé en la etapa anterior. Además, coincide con el único resultado perfecto en subjuegos. Si hacemos caso a esa solución, el vector de pagos será (-8,-8), que sigue sin ser la mejor solución posible.

Podemos concluir que en los juegos repetidos finitos siempre se juegan las opciones que sean equilibrios del juego repetido, al margen del número de veces que se repita el juego y del factor de descuento. Por tanto, en el dilema del prisionero repetido finitamente nunca va a salir la solución cooperativa que, como ya hemos comentado en varias ocasiones, sería la mejor solución de conjunto.

4.2 Juegos repetidos infinitos

En estos juegos, la principal característica es que el juego se va a repetir indefinidamente y, es que, los jugadores no saben cuándo se va a acabar el juego, algo que resulta clave en la solución de este. En la vida real, este concepto no existe pero lo que quiere expresar es que se juega a algo para lo que hay probabilidad de jugar en la siguiente etapa.

Para que un juego repetido se considere infinito tienen que darse una serie de situaciones:

- Que antes de iniciar el juego sea conocido públicamente:
  + Que el factor de descuento de cada jugador *i* es δ_i.
  + Que al terminar cada etapa, el juego puede continuar en la siguiente.
  + Que los pagos de $G^{\infty}(\delta)$ son el valor presente de la secuencia infinita de los pagos de etapa de cada jugador.
- Que antes de iniciar cada etapa sean conocidas públicamente todas las jugadas realizadas hasta entonces.

Al igual que en los juegos repetidos finitos, las historias del juego hasta el momento *t* vienen definidas de la misma forma, es decir, son las decisiones de los jugadores hasta ese instante. Al existir diferentes secuencias de pagos se forman una serie de flujos de pagos que, gracias al factor de descuento, podemos comparar. Para poder entender estas comparaciones utilizamos el *valor presente*, cuya definición se inspira en la de Pérez, Jimeno y Cerdá (2013:409). De esta manera, considerando $\{q_t\}_{t=1,2,...}$ una secuencia o flujo de pagos infinita, se estima que:

A partir de un factor de descuento δ, el valor presente descontado de la secuencia de pagos $\{q_t\}_{t=1,2,...}$ se expresa VP[$\{q_t\}_{t=1,2,...}$, δ], para definirse finalmente como:

$$\mathrm{VP}[\,\{q_t\}_{t=1,2,\ldots},\ \delta] = q_1 + \delta q_2 + \delta^2 q_3 + \ldots + \delta^{t-1} q_t + \ldots = \textstyle\sum_t q_t\, \delta^{t-1}$$

4.2.1 Perfil de estrategias en el dilema del prisionero

Al dilema del prisionero repetido infinitas veces se le conoce como $DP^{\infty}(\delta)$ y dispone de varios perfiles de estrategias que, lógicamente, no siempre van a ser EN. En esta ocasión, vamos a dejar de lado los perfiles de estrategias que no sean equilibrios de Nash[3] y nos centraremos en aquellos que sí lo sean.

- *Perfil de estrategias 'Ojo por Ojo'*

Esta estrategia también es conocida como '*Tit for Tat*' o '*Toma y Daca*'. Consiste en comenzar el juego eligiendo la opción "callar" y, de ahí en adelante, escoger

[3] Para ejemplos de perfiles de estrategias que no son EN, véase: Pérez, J.; Jimeno, J.L. y Cerdá, E., (2013: 426).

la opción por la que el otro jugador haya escogido en la etapa anterior. Es decir, la elección será *'callar'* o '*confesar'* si el oponente así lo ha hecho en la etapa anterior. De esta forma, la estrategia a seguir por los dos jugadores puede ser la solución cooperativa, consiguiendo los mejores pagos posibles y llegando, por tanto, a la mejor solución común. En consecuencia, la estrategia *'callar, callar'* es un EN dado que, si los jugadores continúan eligiendo esa opción, van a obtener el mayor pago posible, pero, si se alejan de esa opción, van a lograr menores beneficios. Y, precisamente, la estrategia tomada coincide con la definición de equilibrio de Nash, que no obstante, se cumplirá siempre y cuando se den factores de descuento (δ) suficientemente altos. Para comprobarlo, hacemos que el jugador 1 se aleje de la opción *'callar'*. Esto le supondrá un castigo por el cual el rival no volverá a elegir la opción *'callar'* hasta que él lo haga de nuevo. Suponemos que esta situación dura 2 etapas, lo que le genera unos pagos de 0 (si traiciona al rival) y de -5 (cuando se arrepiente y le perdonan). De esta forma, su valor presente en ese tramo será:

$$VP' = 0 + \delta*(-5) = -5\,\delta$$

Si no se hubiese alejado de la opción *'callar'*, su valor presente sería:

$$VP = -1 + \delta*(-1)$$

Esto nos dice que VP es mejor que VP´ siempre que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$-1 + \delta*(-1) \geq -5\,\delta$$

Dicha condición se cumple invariablemente cuando $\delta \geq 1/4$, puesto que, aun repitiendo el proceso con cualquier tipo de duración de etapas, el resultado va a seguir siendo que VP es mejor que VP´ cuando $\delta \geq 1/4$. En definitiva, el perfil de estrategias Ojo por Ojo es un EN siempre y cuando $\delta \geq 1/4$.

Sin embargo, el perfil Ojo por Ojo no va a ser un ENPS. Ocurre que, ante un subjuego donde en su etapa anterior se jugó *'callar, confesar'*, al jugador 1 le interesa cambiar su elección si el jugador 2 va a seguir con esa opción. Si el jugador 1 mantuviera la estrategia Ojo por Ojo, al igual que el jugador 2, se produciría una cadena de elecciones contrarias a las anteriores: << (confesar, callar), (callar, confesar), (confesar, callar), …>>, y sus pagos serían menores que si eligiese durante el resto del juego la opción *'callar'*, generando una cadena infinita: << (callar, callar), (callar, callar), (callar, callar), …>>, cuyos pagos son los máximos posibles. Por lo tanto, gracias al perfil Ojo por Ojo, hemos conseguido, por primera vez en este trabajo, obtener la opción cooperativa como mejor resultado para todas las partes.

- *Perfil de estrategias incrédulas*

Este perfil se caracteriza porque los jugadores no creen en el buen hacer del contrario y queda definido por la estrategia *'confesar siempre, confesar siempre'*. Esta opción es la que venimos manejando durante todo el trabajo, siendo un EN y también un ENPS porque el perfil se repite en cada etapa siendo EN en cualquier subjuego.

- *Perfil de estrategias del disparador*

A esta estrategia también se la conoce como '*Trigger strategy'* o '*Estrategia del gatillo'*. Radica en que se elija la opción *'callar'* en la primera etapa y así sucesivamente hasta que el oponente escoja *'confesar'*. En ese caso, jugará *'confesar'* durante el resto del juego sin posibilidad de volver a la opción '*callar'*. Por tanto, mientras se mantenga la estrategia *'callar, callar'* se estará optando por la solución cooperativa que, como hemos visto en el perfil Ojo por Ojo, es un EN. También en este caso, se demuestra que será EN mientras se den factores de descuento (δ) suficientemente altos:

- Primero, actualizamos los pagos de la opción *'callar, callar'*, que, como sabemos, son los máximos posibles:

$$VP = -1 + (-1)*\delta + (-1)*\delta^2 + (-1)*\delta^3 + \ldots = (-1)/(1 - \delta)$$

- En cambio, si alguno de los dos jugadores decide traicionar al rival, los pagos actualizados desde ese momento serían:

$$VP' = 0 + (-4)*\delta + (-4)*\delta^2 + (-4)*\delta^3 + \ldots = (-4)*\delta/(1 - \delta)$$

A partir de estas dos ecuaciones, podemos saber que VP es mejor que VP´ de acuerdo a la siguiente desigualdad:

$$(-1)/(1 - \delta) \geq (-4)*\delta/(1 - \delta)$$

La solución es aquella donde $\delta \geq 1/4$, siendo la estrategia EN en dichos valores. Además, al contrario que en el perfil Ojo por Ojo, aquí también es ENPS. Para demostrarlo, partimos de la base de que en la estrategia del disparador los subjuegos pueden verse de dos formas:

- Subjuegos donde la historia hasta ese momento ha sido siempre la opción *'callar, callar'*. Entonces, estos subjuegos tienen la estructura $DP^{\infty}(\delta)$ y la estrategia del disparador origina un EN siempre que $\delta \geq 1/4$, como ya hemos visto.
- Subjuegos donde en algún punto de la historia se ha optado por la opción *'confesar'*, por lo que a partir de ese momento se ha jugado *'confesar, confesar'*, pasando a ser el mismo caso que el perfil de estrategias incrédulas, el cual es ENPS.

Por lo tanto, el perfil del disparador es ENPS siempre que $\delta \geq 1/4$.

4.2.2 El problema de fijación de los precios

En relación con los juegos repetidos infinitos surgen situaciones que se dan en la vida real, como por ejemplo, las empresas oligopolistas que forman parte de un pequeño mercado en el que cada una de ellas debe estar pendiente de las decisiones que toman sus rivales puesto que les afectan directamente. De ahí surge el problema a la hora de fijar los precios en este tipo de mercados. Suponemos el siguiente juego de guerra de precios:

Tabla 4. *Guerra de precios entre dos empresas*

	Precio bajo(E2)	**Precio alto(E2)**
Precio bajo(E1)	25, 25	150, -75
Precio alto(E1)	-75, 150	80, 80

Fuente: Elaboración propia.

Ante estos pagos, si el juego no se repitiese, la solución sería la elección de un precio bajo por ambas empresas, que además sería EN, al igual que ocurría en el dilema del prisionero con la opción *'confesar, confesar'*. En cambio, si el juego se repitiese infinitamente y se tomase el perfil de estrategias Ojo por Ojo, saldría la solución cooperativa: optar por un precio alto en ambas empresas logrando el máximo beneficio para ambas. Sin embargo, si se produce una colusión implícita a la hora de fijar unos precios altos, los consumidores seríamos los mayores perjudicados, dado que siempre que se pongan de acuerdo, las empresas fijarán el precio más alto. Por esta razón nacieron las *leyes antitrust*, cuya función es asegurar el correcto funcionamiento del mercado en beneficio de los consumidores. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con el precio de la gasolina.

5. DUOPOLIO DE COURNOT, BERTRAND Y STACKELBERG

Tal como se ha comentado, el dilema del prisionero puede encontrarse en situaciones que se dan en la vida real. Partiendo de un oligopolio, vamos a suponer que está formado por dos empresas rivales, es decir, un duopolio. Un modelo de competencia para el que existen diferentes tipos como son: el de Cournot, el de Bertrand y el de Stackelberg.

5.1 Duopolio de Cournot

En este caso, ambas empresas (E1 y E2) producen un *'output'* homogéneo, son competidoras y sus cantidades producidas son q_1 y q_2, respectivamente. Las dos empresas deciden su nivel de *'output'* simultáneamente teniendo en cuenta el nivel de producción que va a realizar la empresa rival. Establecemos la siguiente demanda inversa de mercado:

$$P\ (Q) = a - b^*(q_1 + q_2);\ a>0,\ b>0$$

Además, los costes marginales (c) son constantes para ambas empresas y siempre menores que *'a'*. De esta forma, los beneficios obtenidos por cada empresa serán:

$$\Pi_1\ (q_1, q_2) = q_1*(a - b*q_1 – b*q_2) – c*q_1 = q_1*(a - b*q_1 – b*q_2 – c)$$

$$\Pi_2\ (q_1, q_2) = q_2*(a - b*q_1 – b*q_2) – c*q_2 = q_2*(a - b*q_1 – b*q_2 – c)$$

Para alcanzar el equilibrio de Nash es necesario empezar resolviendo el siguiente problema de maximización:

$$\text{Max } u_1\ (q_1, q_2) = q_1*(a - b*q_1 – b*q_2 – c)$$

$$\text{s.a: } 0 \leq q_1 + q_2 \leq a/b$$

La condición necesaria de primer orden es:

$$\partial u_1/\partial q_1 = q_1*(-b) + (a – b*q_1 –b*q_2 – c) = 0;\ q_1 = (a – c – b*q_2)/2b$$

Si calculamos la segunda derivada, veremos que es negativa y que, por tanto, cumple la condición suficiente. Habremos llegado entonces a la *curva de reacción*, que nos proporciona información de la producción que maximiza los beneficios como una función decreciente de lo que piensa que va a producir la empresa rival. De la misma forma, se calcula la curva de reacción de la segunda empresa. Tenemos por tanto las siguientes curvas de reacción:

$$\text{CR1: } q_1 = (a – c – b*q_2)/2b, \qquad \text{CR2: } q_2 = (a – c – b*q_1)/2b$$

Para que el punto (q_1, q_2) sea equilibrio de Nash q_1 debe ser respuesta óptima a q_2, y q_2 lo será de q_1. Así, sustituyendo el valor de q_1 en la curva de reacción de la empresa 2 y análogamente, se obtiene:

$$q_2^* = (a – c)/3b, \qquad q_1^* = (a – c)/3b$$

La cantidad que se produce en el equilibrio es $Q^* = 2*(a – c)/3b$ y el precio en equilibrio es $P^* = a - bQ^* = (a – 2c)/3$. Vamos a ver todo este proceso a través de un ejemplo:

Sean dos empresas idénticas con una curva de demanda lineal con la siguiente demanda de mercado: $P = 30 – Q$, donde $Q = q_1 + q_2$. Sus costes marginales son igual a cero.

- En primer lugar:

$$\max u_1\ (q_1, q_2) = q_1*(30 - q_1 – q_2) = 30q_1 - q_1^2 - q_1q_2$$

$$\text{s.a: } 0 \leq q_1 + q_2 \leq 30$$

- Ahora calculamos la condición de primer orden:

$\partial u_1/\partial q_1 = 30 - 2q_1 - q_2$, e igualando a 0, CR1: $q_1 = 15 - q_2/2$

Al tener el mismo coste marginal, CR2 va a ser igual que CR1:

CR2: $q_2 = 15 - q_1/2$.

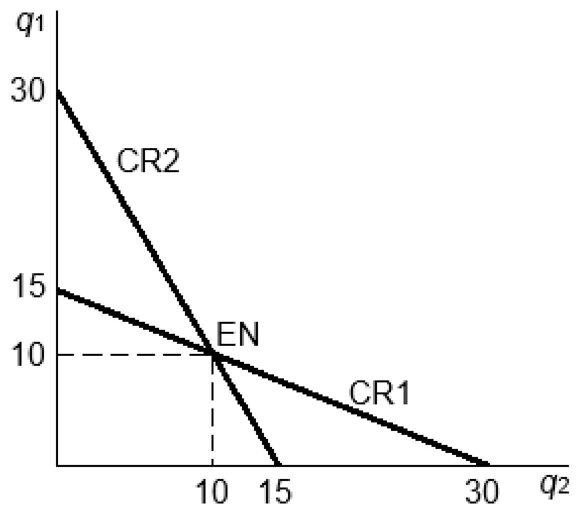
- Por último calculamos el equilibrio de Nash:

$q_1 = 15 – ((15 - q_1)/2)/2$

y despejando $q_1^* = q_2^* = 10$ siendo $Q^* = 20$ *y* $P^* = 10$

En su representación gráfica, este tipo de duopolio quedaría así:

Gráfico 1. *Representación del EN en duopolio de Cournot*



Fuente: Elaboración propia.

5.2 Duopolio de Bertrand

Años después de publicarse el modelo de Cournot, se creó el modelo de Bertrand. Ambos comparten supuestos pero se diferencian en aquello por lo que compiten. Ahora, las dos empresas (E1 y E2) van a fijar simultáneamente el precio en lugar de la cantidad. Al igual que en el modelo de Cournot, producen un *'output'* homogéneo y sus costes marginales (*c*) son constantes e iguales. Además, los consumidores comprarán el producto que tenga un precio más bajo o a partes iguales en caso de que los precios coincidan. Una vez que cada empresa elige su precio, se determina la cantidad que cada empresa debe producir y se hace en función de si el precio es mayor, menor o igual que el de la empresa rival:

$$q_i\,(p_i, p_j) = \begin{cases} q(p_i) & \text{si } p_i < p_j \\ q(p_i)/2 & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

Desde aquí, pueden determinarse los beneficios que se darían en cada caso:

$$\Pi_i\,(p_i, p_j) = \begin{cases} (p_i - c)^*q(p_i) & \text{si } p_i < p_j \\ ((p_i - c)^*q(p_i))/2 & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

Llegados a este punto, vamos a tratar de explicar que el único equilibrio de Nash es aquel en el que ambas empresas fijan un precio idéntico al coste marginal. Establecemos las cuatro situaciones que podrían darse teniendo en cuenta que no se dan precios que generen beneficios negativos:

- Una de las empresas fija un precio igual al coste marginal y la otra lo establece por encima ($p_j^* > p_i^* = c$).
- Ambas empresas fijan un precio superior al coste marginal y son diferentes ($p_j^* > p_i^* > c$).
- Ambas empresas fijan un precio superior al coste marginal y, además, son iguales ($p_j^* = p_i^* > c$).
- Ambas empresas fijan un precio igual al coste marginal ($p_j^* = p_i^* = c$).

A partir de la definición de equilibrio de Nash que hemos visto durante todo el trabajo, vamos a comprobar cuál de esas situaciones la cumple:

- En el primer caso ($p_j^* > p_i^* = c$), para los beneficios que habíamos determinado si se da esa situación de precios se genera unos beneficios iguales a cero ($\Pi_i\,(p_i^*, p_j^*) = (p_i^* - c)^*q(p_i^*) = (c - c)^*q(c) = 0$), por lo que, si la empresa E_i optase por un precio mayor que c y menor que p_j^* obtendría beneficios positivos, lo que le incita desviarse del precio inicial, incumpliendo así la definición de EN. La primera situación no es EN.

- En el segundo caso ($p_j^* > p_i^* > c$), la empresa E_i generaría unos beneficios positivos ($(p_i - c)*q(p_i)$) pero la empresa E_j tendría unos beneficios nulos. En cambio, si la empresa E_j baja su precio por debajo de p_i^* obtendría beneficios positivos, incumpliendo de nuevo la definición de EN. Esta situación tampoco es un EN.
- En el tercer caso ($p_j^* = p_i^* > c$), las dos empresas se reparten el mercado obteniendo los mismos beneficios. Sin embargo, cualquiera de ellas podría reducir su precio y mantenerlo por encima de *c*, consiguiendo así unos beneficios mayores que en la situación de partida y nuevamente se incumple la definición de EN. Esta tercera situación no es EN.
- En el último caso ($p_j^* = p_i^* = c$), las empresas también se repartirían el mercado pero los beneficios serían nulos ya que son iguales al coste marginal. Cualquier cambio en los precios por parte de cualquier empresa no va a mejorar su situación por lo que $p_j^* = p_i^* = c$ es el único EN.

Podemos demostrarlo a partir de un pequeño ejemplo:

Partimos de un mercado con dos empresas donde la demanda es la siguiente: $Q = 150 - P$, *donde* $C_1 = 6q_1$ y $C_2 = 6q_2$. *Suponemos que la Empresa 2 ha fijado un* $P_2 = 6$.

Vamos a analizar las tres posibilidades que tiene la Empresa 1 teniendo en cuenta que el precio de la Empresa 2 es inferior al precio de monopolio:

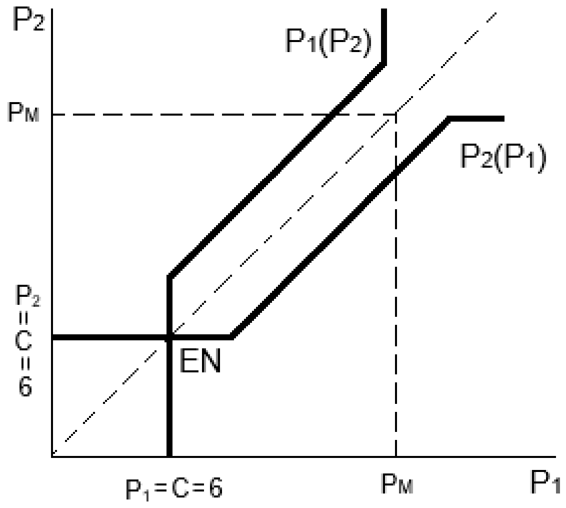
- Fijar un precio superior a P_2: $P_1 = 7 > P_2$, implica que $q_1 = 0$ con $\Pi_1 = 0$.

- Fijar un precio inferior a P_2: $P_1 = 5 < P_2$, implica que $q_1 = 145$ con $\Pi_1 < 0$.

- Fijar un precio igual a P_2: $P_1 = P_2 = 6$, implica que $q_1 = 77$ con $\Pi_1 = 0$.

Al ser los precios iguales al coste marginal los beneficios van a ser nulos, consiguiendo de esta manera eliminar el poder de mercado. El razonamiento tomado por la Empresa 2 sería análogo.

Gráfico 2. *Representación del EN en duopolio de Bertrand*



Fuente: Elaboración propia.

5.3 Duopolio de Stackelberg

El último modelo de duopolio analizado, el de Stackbelberg, es muy similar al de Cournot. Comparten todos los supuestos, salvo por la gran diferencia de que no deciden sus niveles de producción al mismo tiempo. Habrá una empresa *'líder'* y otra empresa que será considerada como *'seguidora'*. Tenemos, por tanto, dos empresas (E1 y E2) que producen un determinado *'output'* homogéneo cuyas cantidades son q_1 y q_2, respectivamente. La demanda de mercado inversa queda determinada por:

$$P\ (Q) = a - (q_1 + q_2);\ a>0$$

Al igual que en el modelo de Cournot, los costes marginales (c) son constantes para ambas empresas y siempre menores que *'a'* obteniendo los siguientes beneficios:

$$\Pi_1\ (q_1, q_2) = q_1{*}(a - q_1 - q_2) - c{*}q_1 = q_1{*}(a - q_1 - q_2 - c)$$

$$\Pi_2\ (q_1, q_2) = q_2{*}(a - q_1 - q_2) - c{*}q_2 = q_2{*}(a - q_1 - q_2 - c)$$

Introducimos ahora el principal cambio: decidir sus niveles de producción en diferentes momentos de tiempo. La empresa E_1 determina q_1 (positiva o igual a cero) y la empresa E_2 se fija en q_1 y decide q_2 (positiva o igual a cero).

Al darse una situación en la que hay dos etapas, vamos a tratar de resolver el problema por inducción hacia atrás. De esta forma, comenzamos resolviendo el problema de maximización de la segunda empresa:

$$\max u_2\ (q_1, q_2) = q_2 * (a - q_1 - q_2 - c)$$
$$\text{s.a: } 0 \leq q_1 + q_2 \leq a$$

La condición necesaria de primer orden es:

$$\partial u_2/\partial q_2 = a - q_1 - 2q_2 - c = 0;\ q_2 = (a - q_1 - c)/2$$

Al calcular la segunda derivada, vemos que es negativa y cumple la condición suficiente consiguiendo así la CR2 ($q_2 = (a - q_1 - c)/2$). Pasamos ahora a analizar la decisión de la empresa 1 sabiendo que la empresa 2 va a determinar su cantidad a partir de la CR2 para cualquier decisión que tome la empresa 1. La empresa 1 posee cierta ventaja, puesto que puede anticiparse a la respuesta de la empresa 2 al resolver su problema de maximización sustituyendo CR2 por q_2:

$$\max u_1\ (q_1, \text{CR2}) = q_1 * (a - q_1 - c - \text{CR2})$$
$$\text{s.a: } 0 \leq q_1 + q_2 \leq a$$

La condición necesaria de primer orden es:

$$\partial u_1/\partial q_1 = (a - 2q_1 - c)/2 = 0;\ q_1 = (a - c)/2$$

Se cumple la condición suficiente y la anticipación de la empresa 1 viene dada por $q_1 = (a - c)/2$. Por tanto, la solución de inducción hacia atrás es:

$$q_1^* = (a - c)/2, \qquad \text{CR2: } q_2^* = (a - q_1^* - c)/2 = (a - c)/4$$

En definitiva, la empresa 1 va a producir $q_1^* = (a - c)/2$ y la empresa 2 producirá una cantidad que está condicionada a lo que produzca la empresa 1 sea cual sea la cantidad ($q_2^* = (a - q_1^* - c)/2$). Estas estrategias tomadas por las empresas son consideras un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Para reflejarlo, vamos a partir del mismo ejemplo utilizado en el duopolio de Cournot:

Sean dos empresas (E_1 líder y E_2 seguidora) con una curva de demanda lineal con la siguiente demanda de mercado: $P = 30 - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$. Sus costes marginales son igual a cero.

- En primer lugar obtenemos la CR2 que tenemos resuelta en el ejemplo de Cournot: CR2: $q_2 = 15 - q_1/2$.
- Ahora obtendremos la decisión de E_1 sabiendo que E_2 va a determinar su cantidad a partir de CR2:

$$\max u_1 (q_1, \text{CR2}) = q_1{*}(a - q_1 - c - \text{CR2})$$

y calculando la condición de primer orden:

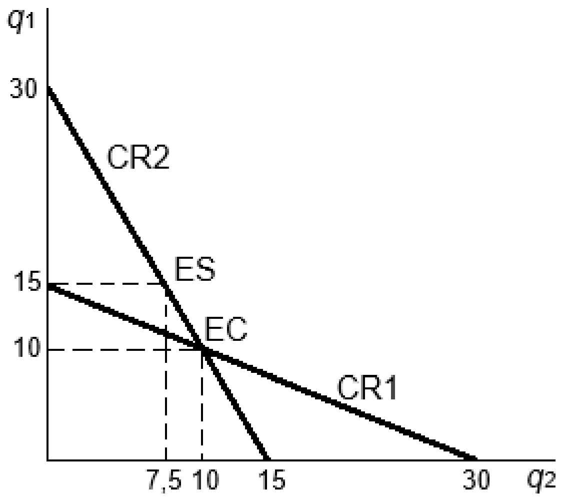
$$\partial u_1/\partial q_1 = 30 - 2q_1 - 15 + q_1 = 15 - q_1$$

e igualando a 0, CR1: $q_1 = 15$. Si sustituimos q_1 en CR2 tenemos

$$q_2\text{: } q_2 = 15 - 15/2 = 7{,}5$$

Si lo representamos gráficamente junto con la solución de Cournot, obtenemos el siguiente gráfico:

Gráfico 3. *Representación duopolio de Stackelberg*



Fuente: Elaboración propia.

6. APLICACIONES DE LA TEORÍA DE JUEGOS

En este apartado vamos a acercar la teoría de juegos a la vida real, mostrando que se pueden aplicar los conceptos de esta ciencia en múltiples escenarios. Concretamente, vamos a centrarnos en el dilema del prisionero como herramienta de actuación y lo vamos a reflejar a partir de varios ejemplos reales que se han dado en la sociedad.

- *El problema de la contaminación*

La situación medioambiental del planeta es uno de los problemas que más debate genera. Los seres humanos iniciamos la contaminación (acumulación de CO_2 en la atmosfera) con la Revolución Industrial en la segunda mitad del siglo XVIII y, desde entonces, ha aumentado en un 30% sus niveles (Banco Mundial, 2015). No vamos a entrar a comentar detalladamente la actual situación medioambiental, pero ya desde la segunda mitad del siglo pasado las grandes instituciones se dieron cuenta del grave deterioro del entorno. Precisamente, en 1972 se celebró en Estocolmo la Conferencia de Naciones Unidas sobre el Medio Humano en la que se puso de manifiesto la importancia del medio ambiente y se establecieron una serie de recomendaciones. En la misma línea, años más tarde, aparecieron el Protocolo de Kyoto (2005) y la cumbre mundial sobre el cambio climático que tuvo lugar en Copenhague en 2009. Y recientemente, del 30 de noviembre al 11 de diciembre, se ha celebrado la Conferencia Mundial del Clima en París. La solución a estos problemas pasa por conseguir un acuerdo voluntario por parte de los países firmantes del Protocolo de Kyoto donde se comprometan a reducir sus emisiones. Sin embargo, el principal problema es que no existe un órgano supranacional que sancione a aquellos países que no cumplan.

Vamos a plantear la situación como un juego donde cada país tiene dos opciones: reducir o no reducir sus emisiones. Si optan por reducir sus emisiones, ello les supondrá un coste que tendrán que asumir llevando a cabo una serie de medidas restrictivas que pueden tener cierto impacto económico. Se supone que si hacen ese esfuerzo obtendrán unos beneficios, pero eso no tiene por qué ser así ya que depende de lo que hagan entre sí el resto de países. Lo vemos a partir de la siguiente tabla, donde aparecen los beneficios en función de las opciones que se tomen:

Tabla 5. *Pacto sobre emisiones*

	Pocos reducen(Resto de países)	**Muchos reducen(Resto de países)**
Reduce(País 1)	-15, 25	15, 15
No reduce(País 1)	0, 0	25, -15

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos ver, es un ejemplo más del dilema del prisionero. Si el país 1 decide reducir sus emisiones y son pocos los países que le acompañan, obtendría unos beneficios negativos y la reducción no se apreciaría prácticamente a nivel global. Si optase por no reducir sus emisiones y la mayoría de países tampoco lo hicieran, tendría unos beneficios nulos. En cambio, si el país 1 y el resto de países reducen sus emisiones, los beneficios para el país 1 serían de 15. Incluso, habría otra opción en la que obtendría más beneficios conocida: el *'free rider'*, que consiste en dejar que los demás países reduzcan sus emisiones y el país 1 no lo haga, ahorrándose los costes de tener que hacerlo y consiguiendo unos beneficios aún mayores. Sin embargo, como venimos viendo durante todo el trabajo, cada país elegirá desde el punto de vista individual y egoísta y decidirá no reducir sus emisiones; una solución no cooperativa que es equilibrio de Nash (no reducir, no reducir). Esta decisión hace que el más perjudicado sea el planeta ya que no se ha conseguido que los países colaboren en la reducción de sus emisiones.

No obstante, podría existir una solución que pasa por que todos los países estén obligados a cumplir esas reducciones de emisiones y establecer una multa a aquellos que no lo hagan. Si partimos de la *tabla 5,* las multas por no reducir las emisiones deben suponer una pérdida mayor que la producida por reducir cuando el resto de países no lo hacen para que, de esta forma, al país en cuestión le interese reducir sus emisiones independientemente de lo que hagan el resto de países. Ya no estaríamos, por tanto, ante un dilema del prisionero. Lo vemos a continuación:

Tabla 5. *Pacto sobre emisiones con multas*

	Pocos reducen(Resto de países)	**Muchos reducen(Resto de países)**
Reduce(País 1)	-15, -15	15, 15
No reduce(País 1)	-25, -25	-15, -15

Fuente: Elaboración propia.

Ahora obtenemos la solución cooperativa (*reducir, reducir*), puesto que al ser racionales, nadie va a preferir perder 25 a perder 15. Por eso eligen la opción *'reducir'* ya que, al menos, se están asegurando una opción que no es la peor.

Se puede conseguir, como acabamos de ver, una solución que termine o ayude con la contaminación del planeta en la que todos los países participen. Solo falta que los grandes mandatarios de los diferentes países tomen conciencia y se cree un organismo que sea el encargado de sancionar a los países que no colaboren.

- *Política comercial internacional*

El comercio internacional es un ejemplo más para la aplicación del dilema del prisionero. Durante mucho tiempo, diferentes países se han encontrado en una situación en la que se les presentan dos caminos diferenciados: el proteccionismo y el librecambismo.

Un país puede optar por proteger su mercado interno, favoreciendo a sus empresas nacionales al no haber apertura al mercado exterior o, por el contrario, promover el librecambio y no establecer barreras al comercio exterior. Si analizamos las actitudes que toman dos países diferentes podemos ver cómo, dependiendo de su combinación, les benefician o les perjudican:

- Si un país decide aplicar el proteccionismo y el otro no toma ninguna medida, es decir, opta por el librecambio, el primer país obtiene una ventaja ya que puede operar en su mercado nacional y en el mercado extranjero, mientras que el segundo solo lo podrá hacer en su mercado nacional.

- Si ambos países establecen el proteccionismo, ninguno de los dos puede ampliar su mercado, por lo que sus beneficios serán menores.
- En cambio, si ambos deciden basar sus políticas en el librecambio, los dos países van a verse favorecidos.

Surge aquí el dilema sobre si establecer el proteccionismo puesto que, si dicho país lo aplica y el otro sigue con el librecambio, sería la situación más ventajosa. Vamos a reflejar sus beneficios con una matriz de pagos:

Tabla 6. *Proteccionismo y librecambio*

	Librecambio(País2)	**Proteccionismo(País2)**
Librecambio(País1)	600, 600	50, 900
Proteccionismo(País1)	900, 50	200, 200

Fuente: Elaboración propia

La solución que va a salir es *'proteccionismo, proteccionismo'*, la cual es EN y solución no cooperativa. Este es un ejemplo más de lo que venimos analizando. Y es que se sigue sin cooperar, incluso en este tipo de casos donde está en juego el beneficio de todo un país. De todas formas, este ejemplo esta llevado un tanto al extremo, porque la política comercial exterior no depende exclusivamente de dos países ni las políticas de los gobiernos se reducen a optar por el proteccionismo o el librecambio. Aunque tampoco es descabellado pensar que se haya podido dar en algún momento a lo largo de la historia.

- *Guerra de trincheras*

En el trascurso de la Primera Guerra Mundial se produjo una situación a la que estamos muy poco acostumbrados en el dilema del prisionero. Se dio la cooperación entre los soldados enemigos bajo el sistema *'vivir y dejar vivir'* (Axelrod, 1996). Este sistema tuvo lugar en el nivel más bajo de la guerra, en las trincheras, donde se vive el día a día de la guerra. La principal razón por la que se llegó a la cooperación fue que los soldados se dieron cuenta de que se iban a enfrentar a sus enemigos durante un tiempo prolongado, estando sus vidas en juego. Por eso, decidieron fijar una política de no agresión no escrita en la que no dispararían a menos que el rival lo hiciese. Sin embargo, las represalias no eran como las del Ojo por Ojo, sino que responderían con un *'dos por uno'* o *'tres por uno'* a las acciones que vulnerasen ese acuerdo no escrito. Con todo, surgieron problemas a esta estrategia tomada por los soldados, como la rotación de los soldados en las trincheras o que la artillería pesada actuase sobre las trincheras rivales y que, en consecuencia, dichas trincheras se vengasen contra las trincheras rivales sin que ellos hubieran tenido algo que ver. Pero, sin duda, el gran problema de esta estrategia y, que terminó por acabar con ella, fue la *incursión por sorpresa* o *raid*, las cuales eran dirigidas por los altos mandos participando entre 100 y 200 soldados que debían matar y hacer prisioneros. Esta táctica no entraba dentro del control de los propios soldados y desencadenó represalias constantes y ataques más preparados al enemigo acabando con la cooperación entre los soldados de a pie. Sin embargo, la estrategia '*vivir y dejar vivir*' nos muestra que, ante situaciones extremas como una guerra, es posible llegar a la cooperación para conseguir el bien común.

7. CONCLUSIONES

Para terminar con este Trabajo de Fin de Grado vamos a dedicar un último apartado a extraer una serie de conclusiones del estudio que hemos realizado del tema en cuestión.

Como ya hemos mencionado, el dilema del prisionero es un problema muy conocido dentro de la teoría de juegos. Dicho dilema se presenta en escenarios de todo tipo: ciencias sociales, economía, ciencias políticas, sociología o, incluso, en las ciencias bilógicas. También puede manifestarse en situaciones más próximas a la vida real, tal como reflejan los ejemplos utilizados a lo largo del trabajo: la Guerra Fría entre Estados Unidos y la Unión Soviética, el problema de la contaminación, la política comercial internacional y la guerra de trincheras.

La principal conclusión que aportan esos casos es que el resultado del juego es la solución no cooperativa, y lo es porque los seres humanos somos seres racionales que nos dejamos llevar por el interés individual, algo que, por decirlo de alguna manera, “nos ciega” y no nos deja elegir desde el punto de vista grupal que se daría con la solución cooperativa. Matemáticamente, este comportamiento no deseable se explica mediante el equilibrio de Nash, que nos habla de aquella estrategia en la que los jugadores individualmente no mejoran su situación al modificar su decisión mientras el resto mantengan fijas las suyas.

Sin embargo, el dilema del prisionero puede ver alterado su resultado más habitual (el no cooperativo) dependiendo del contexto particular en que se encuentre el dilema o de las circunstancias que se den. Por ejemplo, pueden darse estrategias como ‘ojo por ojo’ o ‘disparador’ que, como se explicó, pueden propiciar la solución cooperativa. Además de esa particularidad, quedó demostrado en el apartado anterior que puede obtenerse la solución cooperativa; lo vimos a partir del caso de ‘guerra de trincheras’, donde “los jugadores” llegan a “la solución” cooperativa principalmente porque están sus vidas en juego, es decir, aparcan el interés individual y optan por el interés colectivo. Otra situación en la que el dilema del prisionero difiere de su solución más popular se da con la imposición de multas, que podría llevar a tener como EN la solución cooperativa, como veíamos con ‘el problema de la contaminación’. Existe alguna otra situación, como el propio dilema del prisionero protagonizado por dos hermanos, de forma que el vínculo afectivo les haría escoger la opción que resultase en la solución cooperativa.

Para concluir, el dilema del prisionero no sería tal si fuéramos capaces de guiarnos por el interés común, hecho que conduciría siempre a la solución cooperativa. Esto podría expresarse mediante la siguiente frase: “*cuando todos buscamos el interés del grupo, obtenemos más beneficios que cuando se busca el mejor resultado individualmente”* (Ormeño, R.J., 2011). También se sostiene que no ser envidiosos ni demasiado inteligentes aumentaría las posibilidades de llegar a la solución cooperativa (Axelrod, 1996).

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTUNEZ, C.H. (2010). “Modelos de oligopolio en la economía”, disponible en: <http://bit.ly/1QG0vLp> [Consulta: 19/11/2015].

ARRANZ, M. R. (2012). Matemáticas III, Grado en Economía, Facultad CCEyE, Universidad de Valladolid, 2012.

AXELROD, R. (1996). “La evolución de la cooperación: el dilema del prisionero y la teoría de juegos”, 1ª Ed., Alianza: Madrid, 1996.

BANCO MUNDIAL (2015). *Indicadores del Desarrollo Mundial*, [en línea] <http://datos.bancomundial.org/indicador> [Consulta: 21/11/2015].

BELTRAN, A. (2015). “El pacto del progreso o el dilema del prisionero”, *El País*, 10/6/2015, [en línea] <http://bit.ly/1MEEbNn> [Consulta: 14/10/2015].

BIOGRAFIAS Y VIDAS (2015). “John F. Nash”, [en línea] <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/n/nash_john_f.htm> [Consulta: 20/10/2015].

BLASCO, B (2015). “Dilema del prisionero”, *Expansión*, [en línea] <http://bit.ly/1NkHKgf> [Consulta: 19/10/2015].

DRESHER, M. (1950). “Methods of solution in game theory”, *Econometrica*, Vol.18, pp.179-181.

EL PAÍS (2015). “Hacia la cumbre de París”, *El País,* 25 de Octubre de 2015, [en línea] <http://elpais.com/elpais/2015/10/24/opinion/1445706078_728606.html> [Consulta: 12/11/2015].

FERNÁNDEZ, J. (2002). *Teoría de juegos: su aplicación en economía*, 1ª Ed., Colegio de México, A.C.: México D.F., 2002.

FERNÁNDEZ, Y. (2011). “El fracaso de Copenhague desde la teoría de juegos”, [en línea] <http://bit.ly/1NkEama> [Consulta: 6/11/2015].

FLOOD, M. M. (1951). “A preference experiment”, *The Rand Corporation Memory*, Santa Mónica. November, 1951, p.256.

IE FOCUS (2015). “El Dilema del Prisionero: Desde la Teoría de los Juegos hasta la Estrategia Corporativa” [En línea] <http://bit.ly/1I4nzAN> [Consulta: 16/10/2015].

ORMEÑO, R.J. (2011). "Economía ambiental y ecología *free rider* y el dilema del prisionero", [en línea] <http://reynaldo-ormeno.blogspot.com.es/2011_05_01_archive.html> [Consulta: 21/11/2015].

PÉREZ, J., JIMENO, J.L. Y CERDÁ, E. (2013). *Teoría de juegos*, 2ª Ed., Ibergarceta Publicaciones, S.L.: Madrid, 2013.

TUCKER, A.W. (1950) "A Two-Person Dilemma", *Mimeo*, Stanford University, 1950.

UNIVERSIDAD CARLOS III MADRID (2015). "Juegos repetidos un número finito de veces", Juegos repetidos". Disponible en: <http://www.eco.uc3m.es/docencia/new_juegos/doc/3.1%20Repetidos%20finitos.pdf> [Consulta: 25/10/2015].

ZOFÍO, J.L. (2015). "El Oligopolio y la Teoría de Juegos", *Organización Industrial II*, Universidad Autónoma de Madrid. Disponible en: <https://www.uam.es/personal_pdi/economicas/jlzofiop/eco/MicroOI2-ECO-T5.pdf> [Consulta: 31/10/2015].