Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Grado en Finanzas, Banca y Seguros

Estudio de Simulación de Proceso de Surplus con Barrera Reflectante

Presentado por:

Adrián González González

Tutelado por (a cumplimentar voluntariamente):

Luis Moisés Borge González

Valladolid, xx de julio de 2016

ÍNDICE:

Resumen:

En este trabajo vamos a comenzar exponiendo lo que es la teoría básica de la ruina, con el proceso clásico de reserva, sus fundamentos, la ecuación integro-diferencial de la ruina y su posible resolución, así como de las simulaciones que estudiaremos, entre otras cosas. Luego se hablará de la barrera reflectante constante, en la cual la probabilidad de ruina es igual a 1, y se puede simular hasta que haya ruina. Más tarde se tendrá la barrera reflectante lineal con pendiente positiva y se obtendrán los principales resultados, con un estudio especial para la distribución exponencial y los resultados que obtendremos. Finalmente, estudiaremos las simulaciones en los dos casos anteriores con barreras para obtener probabilidades de ruina, tiempos de ruina y dividendos derivados de las barreras: primero en el modelo de dividendos constantes, y más tarde en el modelo de dividendos crecientes, y, para concluir, extraeremos unas conclusiones.

Palabras clave: **reservas**, **barrera**, **dividendos**, **simulaciones**.

Abstract:

In this work we are starting by explaining the basic ruin theory model, with the classic surplus process, its fundaments, the integro differential equation of ruin and its possible solutions, as well as the simulations we will study, among other things. Next, we will talk about constant dividend barrier, in which probability of ruin is equal to 1, and it may be simulated until ruin. Then, we will have the linear dividend barrier with a positive gradient and will obtain the main results, with a special study for exponential distribution and the results we will obtain. Finally, we will study simulations in the previous two cases with barriers to obtain probabilities of ruin, times of ruin and dividends derived from the barriers: first, in the constant dividend model, and next, in the increasing dividend model, and, to finish, we will extract some conclusions.

Key words: **surplus**, **barrier**, **dividends**, **simulations**.

1. EL PROCESO CLÁSICO DE RESERVAS.

La teoría de la ruina es una rama de los procesos estocásticos que estudia las probabilidades de ruina y de supervivencia de entidades aseguradoras, mediante el denominado proceso de reserva o proceso de *surplus*. Así, se tiene que, en este proceso, se fijan unas reservas iniciales y una cuantía de primas por unidad de tiempo, y el componente aleatorio viene dado por la siniestralidad agregada reflejada en la vida de la empresa aseguradora. Esta rama de los procesos estocásticos la comenzó a desarrollar el actuario sueco Filip Lundberg en 1903, y la desarrolló más el estadístico sueco Harald Cramér en la década de 1930 (ver en la Wikipedia en inglés: *Ruin theory*).

1.1. INTRODUCCIÓN DEL MODELO.

Para poder definir este modelo de reservas, se parte previamente del modelo de siniestralidad agregada, que sirve para registrar los siniestros ocurridos y luego sumarlos y se representa como una suma, S, de un número aleatorio, N (variable aleatoria de Poisson de parámetro λ, que representa el número de siniestros que ocurren de media en un período de tiempo determinado, en nuestro caso, el año), de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, X_1, X_2,…, X_N, y también independientes de N, y representan la cuantía de cada uno de los siniestros ocurridos. Por tanto:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, N = 0,1,2, \dots$$

En este modelo, además, se tiene que:

$$E[S] = E[N] * E[X] = \lambda * E[X]$$

$$V[S] = E[N] * V[X] + V[N] * E[X]^2 = \lambda * (V[X] + E[X]^2) = \lambda * E[X^2]$$

A partir de esto, ya se puede definir el proceso estocástico clásico de reservas o de *surplus* en tiempo continuo de una determinada cartera de seguros, $\{U_t,\ t \geq 0\}$. Este modelo comienza con una reserva inicial llamada $u=U_0$, y se van cobrando primas mediante un proceso determinista $\{P_t,\ t \geq 0\}$, puesto que nunca variará la cantidad, y se pagan los siniestros mediante un proceso estocástico $\{S_t,\ t \geq 0\}$, que es un proceso compuesto de

Poisson. Por tanto, se puede definir este proceso estocástico como:

$$U_t = U_0 + P_t - S_t$$

Se define el anterior proceso compuesto de Poisson como:

$$S_t = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$

Donde $N(t)$ es un proceso homogéneo de Poisson (de incrementos independientes e incrementos estacionarios) de tasa λ>0, que, como vimos antes, representa el número medio de siniestros por unidad de tiempo, y cada una de las X_1, X_2,…, $X_{N(t)}$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas e independientes del proceso de Poisson $N(t)$, y son las cantidades aleatorias de los siniestros, que hacen reducir las reservas. Este proceso, al ser de Poisson, es también de incrementos independientes y estacionarios, esto es, por un lado, la ocurrencia de un siniestro no influye en que ocurra el siguiente, y la cuantía de la siniestralidad no depende del momento de tiempo, solamente de la amplitud del intervalo.

Para determinar la cuantía del proceso de primas, se utiliza el criterio del recargo de seguridad, θ>0, que significa cuánto más va a ascender la prima por encima de la media. La tasa anual a la que crecen las primas se denomina c y se determina mediante este criterio:

$$c = (1+\theta) * E[S_1] = (1+\theta) * \lambda * \mu$$

Así, al ser θ>0, se sabe que $c>\lambda*\mu$, y por tanto, habría, de media, más reservas a medida que va pasando el tiempo.

Así, ya se puede definir este modelo como:

$$U_t = u + c * t - S_t$$

Este proceso de reservas, al igual que el compuesto de Poisson, es de incrementos independientes y estacionarios, puesto que tiene una componente determinista (*u*+*c***t*), que representa las reservas iniciales más los ingresos por primas producidos hasta la fecha, y una componente aleatoria (S_t), que es el anterior proceso de siniestralidad (compuesto de Poisson), de incrementos independientes y estacionarios.

En este modelo, se sabe que la esperanza es creciente, esto es, se sabe que:

$$E[U_t] = u + ct - E[S_t] = u + ct - \lambda\mu t = u + (1+\theta)\lambda\mu t - \lambda\mu t = u + \theta\lambda\mu t, t > 0$$

Esto es así porque, cuanto mayor sea el tiempo, mayor será el valor esperado, y la varianza también lo es, porque:

$$V[U_t] = V[S_t] = \lambda t(\mu^2 + \sigma^2), t > 0$$

Esto es, la varianza de las reservas solamente depende de la varianza de la siniestralidad, ya que se considera que las reservas iniciales, y la cuantía de las primas son procesos deterministas, y por tanto tienen de varianza cero y de covarianza con el resto de variables cero, considerando que σ es la desviación típica de cada una de las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas e independientes de N_t.

1.2. DEFINICIÓN DE RUINA Y ESTIMACIÓN DE SU PROBABILIDAD.

1.2.1. Definición de ruina.

En este modelo, se define la ruina como el suceso en el cual el valor de las reservas es cero o negativo, y la supervivencia como el suceso contrario, esto es, si el valor de las mismas es mayor que cero. La ruina se puede abordar en un horizonte de tiempo finito o infinito. Se define la probabilidad de ruina en tiempo infinito como:

$$\psi(u) = P[U_t \leq 0 | U_0 = u], \forall t \geq 0$$

Y la probabilidad de ruina en tiempo finito hasta un $\tau \geq 0$ como:

$$\psi(u,\tau) = P[U_t \leq 0 | U_0 = u], \forall 0 \leq t \leq \tau$$

Se define la probabilidad de supervivencia en tiempo infinito como:

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) = P[U_t > 0 | U_0 = u], \forall t \geq 0$$

1.2.2. Aproximaciones a la probabilidad de ruina.

En el modelo clásico continuo de reservas, se utilizan las aproximaciones del coeficiente de ajuste y de la desigualdad de Lundberg para estimar aproximadamente la probabilidad de ruina. La fórmula del coeficiente de ajuste, que vimos en clase, es:

$$1 + (1+\theta)\mu\kappa = E[e^{\kappa X}]$$

Donde el coeficiente *k* es llamado coeficiente de ajuste.

La fórmula de la desigualdad de Lundberg es

$$\psi(u) \leq e^{-\kappa u}$$

Esta fórmula relaciona reservas iniciales, coeficiente de ajuste y probabilidad de supervivencia, ya que, cuanto mayor sea la reserva inicial, menor será la ruina (el límite cuando u tienda a infinito de esta probabilidad de ruina es 0, por lo que, teniendo infinitas reservas, nunca habrá riesgo de ruina), y es la cota máxima de probabilidad de ruina.

Otra posible aproximación es la aproximación de Cramér, según la cual la probabilidad aproximada de ruina se determina a través de las reservas iniciales, el coeficiente de ajuste, la cantidad media de los siniestros y el recargo de seguridad, y es:

$$\psi(u) \sim C * e^{-\kappa u} = \frac{\theta\mu}{E[Xe^{\kappa X}] - \mu(1+\theta)} * e^{-\kappa u}$$

1.2.3. Ecuación integro-diferencial de la ruina.

Para delimitar más la probabilidad de ruina, hay una fórmula explícita, que se obtiene mediante la ecuación integro-diferencial de la ruina, que se plantea de esta manera para el caso de la supervivencia:

$$\phi(u) = (1 - \lambda h) * \phi(u + ch) + \lambda h * \int_0^{u+ch} \phi(u + ch - x) * f(x)dx + o(h)$$

Y tiene la siguiente fórmula para ese mismo supuesto:

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c} * \phi(u) - \frac{\lambda}{c} * \int_0^u \phi\,(u - x) * f(x)dx$$

Teniendo en cuenta que *f*(*x*) es la función de densidad de cada una de las variables aleatorias *X*, que expresan la cuantía de cada uno de los siniestros.

Esta ecuación integro-diferencial sí puede ser resuelta, pero en pocas distribuciones, como el caso de que los siniestros sigan ciertas distribuciones, como la exponencial, la gamma o una mixtura de exponenciales. En el caso de una exponencial de media μ, la ecuación integro-diferencial de la ruina se puede resolver y el resultado es:

$$\phi(u) = 1 - \frac{1}{1 + \theta} * e^{\frac{-\theta u}{\mu(1+\theta)}}$$

Para la probabilidad de ruina, esta es la fórmula de la ecuación integro-diferencial de la ruina:

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} * \psi(u) - \frac{\lambda}{c} * \int_0^u \psi\,(u - x) * f(x)dx - \frac{\lambda}{c} * \big(1 - F(u)\big)$$

Si se considera que *X* sigue una distribución exponencial de media μ, esta ecuación puede ser resuelta y la probabilidad de ruina sería la siguiente:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} * e^{\frac{-\theta u}{\mu(1+\theta)}}$$

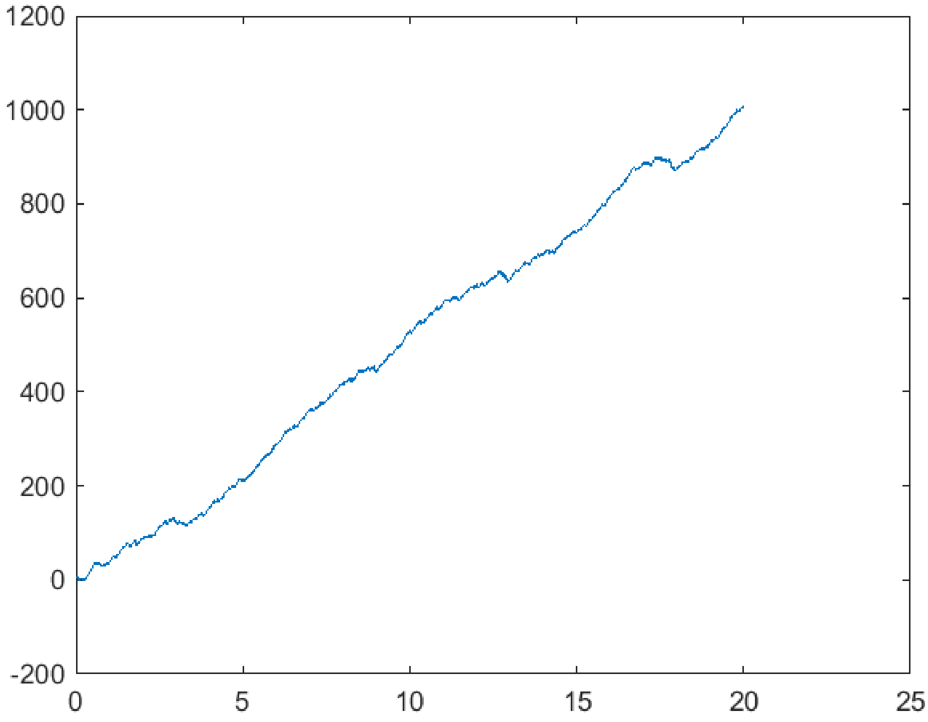
Además, se sabe que, en caso de arruinarse, la cartera lo hace en muy poco tiempo, puesto que, es en los primeros instantes de vida de la cartera cuando tiene la menor cantidad de reservas y tiene más probabilidades de arruinarse, mientras que, según va pasando el tiempo, al ser mayor la cantidad de reservas que tiene, menores son las probabilidades de ruina.

1.2.4. Simulación de un proceso clásico.

En nuestro caso, dando los valores siguientes: u=3, μ=1, λ=120 y θ=0,4, la probabilidad de ruina sería:

$$\psi(3) = \frac{1}{1,4} * e^{\frac{-1.2}{1.4}} = 0,30312346$$

Un ejemplo de gráfico de este modelo (hasta que t=20) es:



(Gráfico 1.2.1)

En este caso, ha ocurrido doce veces la ruina de la aseguradora.

Hemos realizado simulaciones hasta que el tiempo acumulado sea 20, con los tiempos de espera medios hasta la ruina, si es que existe, con los parámetros expuestos arriba, y los resultados han sido estos:
Primer resultado: probabilidad de ruina: 0,3028, tiempo medio de ruina: 0,0641 (realizado con 10000 simulaciones).
Segundo resultado: probabilidad de ruina: 0,3029, tiempo medio de ruina: 0,0676 (realizado con 10000 simulaciones).
Tercer resultado: probabilidad de ruina: 0,3090, tiempo medio de ruina: 0,0657 (realizado con 10000 simulaciones).
Cuarto resultado: probabilidad de ruina: 0,3031, tiempo medio de ruina: 0,0643 (realizado con 10000 simulaciones).
Quinto resultado: probabilidad de ruina: 0,3039, tiempo medio de ruina: 0,0658 (realizado con 20000 simulaciones).
Sexto resultado: probabilidad de ruina: 0,3048, tiempo medio de ruina: 0,0657 (realizado con 20000 simulaciones).
Séptimo resultado: probabilidad de ruina: 0,3015, tiempo medio de ruina: 0,0653 (realizado con 20000 simulaciones).
Octavo resultado: probabilidad de ruina: 0,3019, tiempo medio de ruina: 0,0663 (realizado con 50000 simulaciones).
Noveno y último resultado: probabilidad de ruina: 0,3022, tiempo medio de ruina: 0,0649 (realizado con 50000 simulaciones).

Por tanto, podemos concluir que la probabilidad de ruina empírica oscila en torno al valor teórico, y es tanto más precisa cuantas más simulaciones se realicen, el tiempo medio de ruina es aproximadamente de 0,065, y este suele oscilar menos cuantas más simulaciones se realicen, porque tiende hacia el valor de la media, aunque no siempre ocurre eso (esto es, la aseguradora se arruina muy pronto, y el tiempo máximo de ruina no suele sobrepasar el año y medio).

Programa utilizado en MATLAB:

```
% Ahora vamos a simular un proceso de surplus que sigue una distribución
```

```
% compuesta Poisson-exponencial, sabiendo que hay que añadir la tasa de
% ocurrencia del parámetro landa, la media de X (mu), el recargo de
% seguridad (theta) y el surplus inicial (u0), así como el momento de
% simulación, y el número de simulaciones que se realizarán.

la=120;
mex=1;
theta=.4;
u0=3;

% Se halla la cuantía de las primas.

c=(1+theta)*la*mex;

% Se halla la probabilidad de ruina teórica.

prt=(1/(1+theta))*exp(-(theta*u0)/(mex*(1+theta)));

disp('La probabilidad de ruina teórica es'  )
prt

% Ahora se introducen el tiempo hasta el cual se simula y el número de
% simulaciones.

tt=20;
nt=input('¿Cuántas simulaciones quieres realizar?'  );

% Se simula el proceso.

nr=0; % Número de ruinas del proceso estocástico.
tr=0; % Tiempo en que se arruina la aseguradora.
TR=0; % Vector con los tiempos de ruina.

for j1=1:nt;
   TA=0; % Vector con los tiempos de espera.
```

```
    ta=0; % Tiempos acumulados hasta un siniestro.
    UT=u0; % Vector con los valores del surplus en cada momento.
    ut=u0; % Valores de ese surplus.
    while ta<=tt;
        t=exprnd(1/la);
        ta=ta+t;
        TA=[TA;ta];
        ut=ut+c*t;
        ut=ut-exprnd(mex);
        UT=[UT;ut];
    end
    if min(UT)<=0;
        nr=nr+1;
    end
    ur=min(find(UT<=0));
    tr=TA(ur);
    TR=[TR;tr];
    TR=sort(TR);
end

% Hallamos la probabilidad de ruina empírica.

pre=nr/nt;

disp('La probabilidad de ruina empírica ha sido de' )
pre

disp('El tiempo máximo de ruina ha sido de' )
TR(size(TR,1),1)

disp('El tiempo medio de ruina ha sido de' )
mean(TR)
```

1.2.5. Resultados generales utilizando la probabilidad de ruina.

En el caso general, si se integra la derivada del primer término, se puede obtener la ecuación de la probabilidad de supervivencia *Φ* (*u*) a través de *Φ* (0). Así, se sabe que:

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} * \int_0^u \phi\,(u - x) * [1 - F(x)]dx$$

Siendo *F*(*x*) es la función de distribución de esas variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Tras ello, se demuestra, cuando *u* tiende a ∞, que la probabilidad de supervivencia es menor o igual que la media de *X*, pues se sabe que

$$\phi(u) - \phi(0) \leq \frac{\lambda}{c}\int_0^u 1 - F(x)dx$$

$$\lim_{u\to\infty}[\phi(u) - \phi(0)] \leq \frac{\lambda}{c}\lim_{u\to\infty}\int_0^u [1 - F(x)]dx$$

$$1 - \phi(0) \leq \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty 1 - F(x)dx = \frac{\lambda\mu}{c}$$

En consecuencia, se sabe que

$$\phi(0) \geq 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Lundberg, da como resultado que

$$\phi(u) - \phi(0) \geq \frac{\lambda}{c}\int_0^u \left[1 - e^{-\kappa(u-x)}\right][1 - F(x)]dx$$

Y cuando *u* tiende a ∞, se tiene que

$$1-\phi(0) \geq \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} 1-F(x)dx = \frac{\lambda\mu}{c}$$

$$\phi(0) \leq 1-\frac{\lambda\mu}{c}$$

Por lo que el resultado final es que

$$\phi(0) = 1-\frac{\lambda\mu}{c} = 1-\frac{\lambda\mu}{(1+\theta)\lambda\mu} = 1-\frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta}$$

Por consiguiente

$$\psi(0) = 1-\phi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

2. LA BARRERA DE DIVIDENDOS CONSTANTE.

Supongamos una barrera constante, $b(t)=b$, con $b \geq u \geq 0$. En este supuesto, las reservas, U_t, pueden llegar como máximo al valor de la barrera constante de b, y, al ser barrera constante, no crecen más, y ahí están hasta la ocurrencia de un siniestro, que puede producir o no la ruina de la aseguradora. Va a haber ruina de la aseguradora por limitarse la cuantía máxima de las reservas hasta donde se puede llegar, que es como máximo de u y porque la varianza del proceso clásico a medida que aumenta el tiempo es superior, con lo cual la probabilidad de supervivencia, $\Phi(u,b)$, que depende de la cuantía inicial de las reservas, u, y del nivel de la barrera constante, b, será de 0, y, por tanto, es seguro arruinarse, con lo que la probabilidad de ruina será 1 (ver Bühlmann, 1970, p. 165), por lo que no se recomienda usarlo, ya que, como hemos dicho antes, confirma la quiebra de la aseguradora. Solo tiene utilidad para calcular los posibles dividendos, y por eso se recomienda más usar una barrera con pendiente positiva, inferior a la cuantía de las primas, *c*.

Intuitivamente, se sabe que $\psi(u,b)=1$, puesto que, al limitarse la cantidad máxima de reserva, y al tener cada vez mayor varianza el modelo, será cada vez más probable que el valor de las reservas atraviese el eje de abscisas al menos una vez, por lo que la empresa se arruinará tarde o temprano. Además, se puede comprender fácilmente que:

$$\psi(b,b) \leq \psi(u,b) \leq 1, 0 \leq u \leq b$$

La fórmula exacta de la probabilidad de ruina, la cual es uno (ver Dos Reis, 2001, pp. 14-15), es:

$$\psi(b,b) = (1-\lambda dt)\psi(b,b) + \lambda dt * \int_0^b \psi\,(b-x,b)f(x)dx + \lambda dt[1-F(x)] + o(dt)$$

Esta ecuación significa que la probabilidad de ruina partiendo del nivel constante de la barrera *b*, con una barrera constante de *b*, es la probabilidad de que no ocurra ningún siniestro, la de que ocurra un solo siniestro de cuantía menor que *b*, la variación del siniestro por la probabilidad de que el siniestro valga más que el valor de *X* de la función y una cantidad muy pequeña que tiende a cero.

El resultado final es que:

$$\psi(b,b)[1-F(x)] \geq 1-F(x) \Leftrightarrow \psi(b,b) \geq 1 \Leftrightarrow \psi(u,b) = 1$$

Esto quiere decir que la probabilidad de ruina cuando se parte del nivel de *b* con una barrera constante de *b* es al menos de uno, y como una probabilidad tiene que estar entre cero y uno, esta tiene que ser de uno, y, en consecuencia, la probabilidad primigenia que se nos pedía, al ser todavía mayor o igual que la que hay al partir de *b*, tiene que ser de 1.

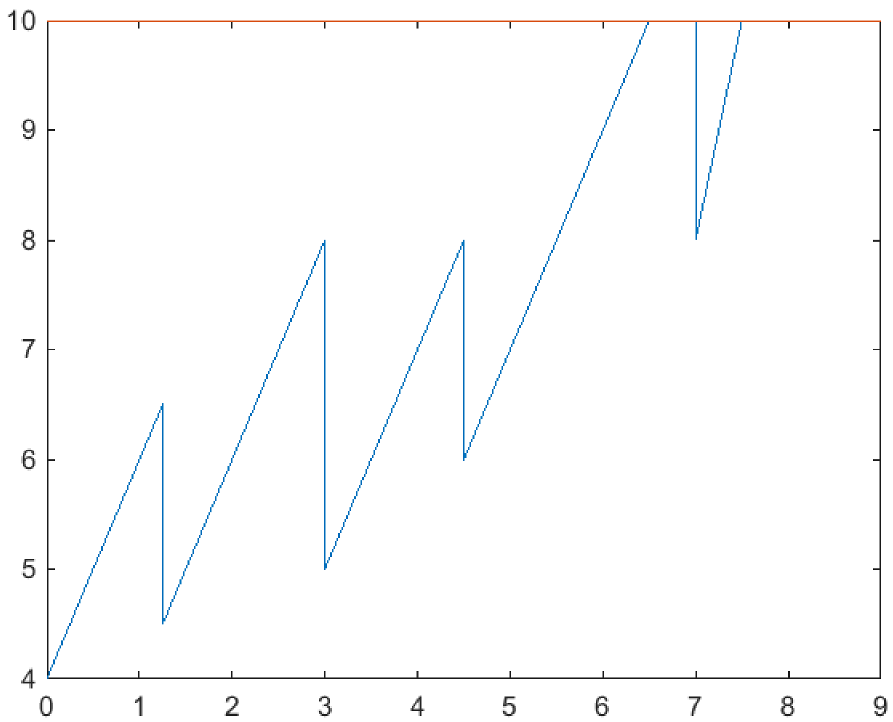
En la siguiente tabla se pueden observar diferentes valores que puede tomar el surplus.

Tiempo acaecido hasta el siniestro x	Número del siniestro	Valor de las reservas en ese instante	Valor efectivo de las reservas
0		4	4
1,25		6,5	6,5

1,25	1	4,5	4,5
3		8	8
3	2	5	5
4,5		8	8
4,5	3	6	6
6,5		10	10
7		11	10
7	4		8
7,5			10
9			10

(Tabla 2.1)

En este gráfico podemos ver la representación gráfica exacta de los valores de la tabla, y es que las reservas se limitan por haber una barrera constante.



(Gráfico 2.1)

Ejemplo de barrera constante en el proceso de reservas, que hace limitar la acumulación de reservas hasta el nivel de la barrera, y, en consecuencia, hace que la compañía se arruine sí o sí (probabilidad de ruina 1).

3. LA BARRERA DE DIVIDENDOS LINEAL.

Considérese una barrera lineal, $b(t)=b+at$, con $0<a<c$. En este caso, la probabilidad de supervivencia, $\Phi(u, b)$ dependerá de dos variables: la cuantía primigenia de las reservas, u, y el nivel desde donde parte la barrera, b, verificándose que $0\leq u\leq b$.

En este supuesto, se tiene que las reservas en el tiempo evolucionarán de esta forma:

$$dU_t = cdt - dS_t \quad U_t < b(t)$$

$$dU_t = adt - dS_t \quad U_t = b(t)$$

Lo que significa que, hasta alcanzar el nivel de $b(t)$, las reservas subirán a una velocidad de c, y lo harán a una velocidad de a si ha superado ese nivel anterior, con $a<c$, para disminuir la acumulación de las reservas, y así obtener dividendos. Si denominamos a la probabilidad de ruina en tiempo infinito en este modelo $\psi(u,b)$, en el triángulo infinito $0\leq u\leq b<\infty$, se tiene que:

$$\psi(u,b) \leq e^{-\kappa u} * \left[1 + \frac{\kappa}{S} e^{\left(-(\kappa+S)(b-u)\right)}\right]$$

Esto es, la probabilidad de ruina partiendo de u y con barrera creciente que parte de b es menor o igual a la del caso sin barrera por una constante que depende del coeficiente de ajuste, de la constante $S>0$, del valor inicial de la barrera y del valor inicial de las reservas, y el valor es superior al caso en que no había barreras.

Además, se tiene que:

$$\psi(u,b)\sim C * e^{(-\kappa u)} * \left[1+\frac{\kappa}{S}e^{\left(-(\kappa+S)(b-u)\right)}\right], \forall u,b \to \infty, S > 0$$

Esta probabilidad de ruina es aproximadamente igual a lo anterior multiplicado por la constante *C* que se vio en el caso de la aproximación mediante Cramér:

$$C = \frac{\theta\mu}{E[Xe^{\kappa X}] - \mu(1+\theta)}$$

Usándose un planteamiento diferencial (ecuación integro-diferencial de la ruina con barrera lineal), se llega a esta expresión:

$$c\frac{\partial\phi(u,b)}{\partial u} + a\frac{\partial\phi(u,b)}{\partial b} - \lambda\phi(u,b) + \lambda\int_0^u \phi\,(u-x,b)dF(x) = 0$$

Esto quiere decir que la tasa de primas por la variación de la probabilidad de supervivencia con respecto a las reservas iniciales más la pendiente de la barrera por la variación de la probabilidad de supervivencia con respecto al nivel inicial de la barrera es igual a la tasa del proceso de siniestralidad multiplicada por la diferencia entre la probabilidad de supervivencia de la barrera y la cuantía de un siniestro que no supera las reservas iniciales.

Esta ecuación es imposible de resolver aunque *X* sea una exponencial de media *μ*, pues habría varios argumentos y su resolución solo se puede hacer recursivamente, mediante ciertos valores, por lo que solo se pueden hallar las probabilidades de ruina de forma empírica, en nuestro caso estimando por simulación.

Para la probabilidad de supervivencia en el caso de existir barrera lineal, se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\phi(u,b) = \int_0^{t_1} \lambda * e^{-\lambda t} * \int_0^{u+ct} \phi\,(u+ct-x, b+at) dF(x) dt + \int_{t_1}^{\infty} \lambda * e^{-\lambda t} * \int_0^{b+at} \phi\,(b+at-x, b+at) dF(x) dt$$

Con t_1 el punto de corte entre $u+ct$ y $b+at$, por lo que:

$$t_1 = \frac{b-u}{c-a}$$

La primera de las dos integrales corresponde al caso en que el primer siniestro acaezca antes de cortarse las reservas y la barrera (reservas $u+ct-x$), y la segunda de ellas al supuesto en que la primera indemnización (primer siniestro) ocurra si las reservas han sobrepasado la barrera (cantidad de reserva $b+at-x$).

Luego se realiza un cambio de variable $u+ct=y$, se deriva con respecto a u, se vuelve a realizar otro cambio de variable $b+at=y$, se deriva con respecto a b, y agrupando ambas derivadas, tenemos que:

$$\frac{a}{\lambda}\frac{\partial\phi(u,b)}{\partial b} + \frac{c}{\lambda}\frac{\partial\phi(u,b)}{\partial u} = \phi(u,b) - \int_0^u \phi\,(u-x,b) dF(x)$$

Esta expresión equivale a la ecuación integro-diferencial en caso de barrera lineal (ver Alegre, Claramunt y Mármol, 2000). Si la función de distribución $F(x)$ sigue una exponencial normalizada (que tiene de media 1), se extrae esta ecuación en derivadas parciales de segundo grado:

$$c\frac{\partial^2\phi(u,b)}{\partial u^2} + a\frac{\partial^2\phi(u,b)}{\partial b\partial u} + (c-\lambda)\frac{\partial\phi(u,b)}{\partial u} + a\frac{\partial\phi(u,b)}{\partial b} = 0$$

Con las restricciones de que

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = 0$$

Si *u*=*b*, esto es, la probabilidad de supervivencia, si varía la cantidad de reservas y si coincide con la cantidad inicial de la barrera, será constante.

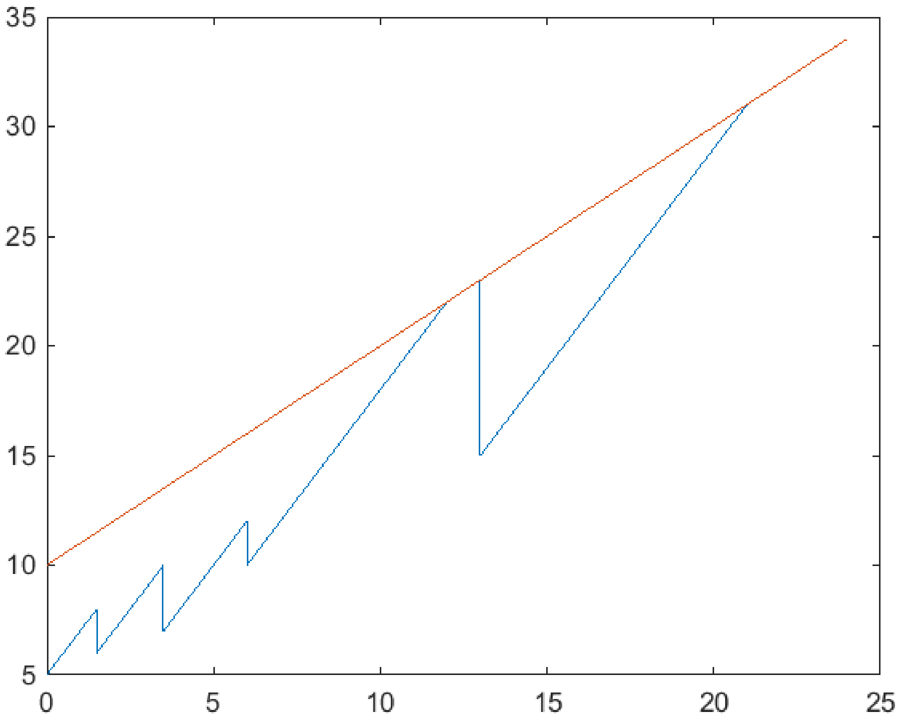
$$\lim_{u \to \infty} \phi\,(u,b) = 1 (b \to \infty)$$

Cuanto mayor sea *u* (y por lo tanto *b*), la probabilidad de supervivencia será tanto mayor, tal es así que irá tendiendo a 1.

$$\lim_{b \to \infty} \phi(u,b) = \phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} e^{\frac{-(c-\lambda)}{c}u}$$

Esto es, cuanto mayor sea la ordenada en el origen de la barrera, tanta menor importancia tendrá, hacia su desaparición, tendiendo la probabilidad de supervivencia existiendo una barrera a otra sin existencia de la misma, y esta expresión se usa en caso de cuantía exponencial de los siniestros (ver Panjer, 1992, p. 374).

Aquí podemos ver un gráfico en el caso de una barrera lineal creciente a una tasa menor que *c*, la cuantía de las primas.



(Gráfico 3.1)

Ejemplo de gráfico del caso en que la barrera crece linealmente.

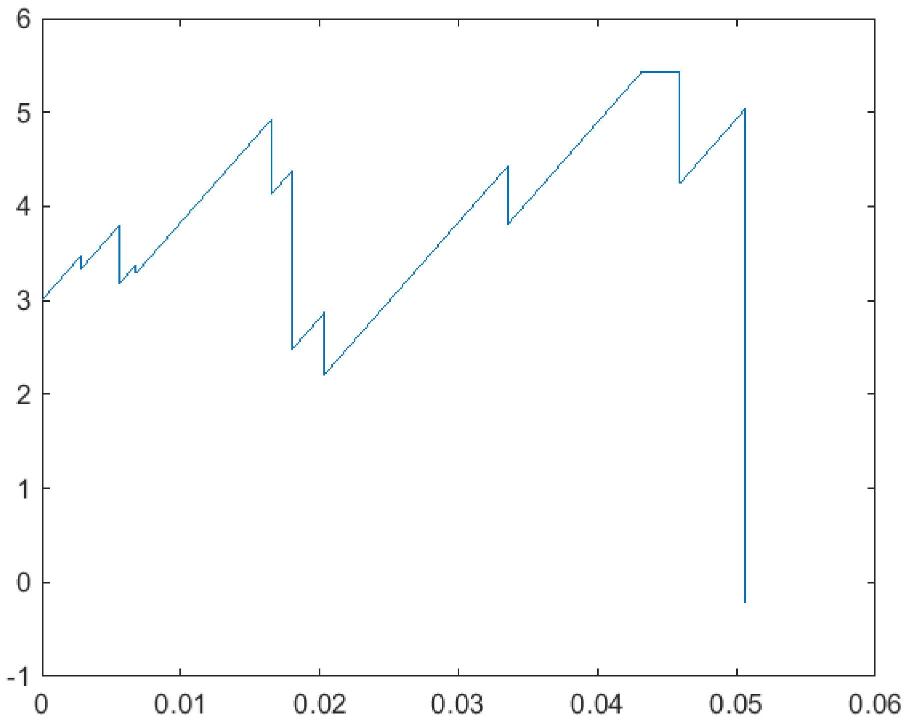
4. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES.

Vamos a simular los dos tipos de proceso de reservas o de *surplus* para los dos casos con barreras de dividendos vistos anteriormente: un proceso con una barrera de dividendos constante y un proceso con una barrera de dividendos creciente a una tasa menor que la de las primas *c*.

4.1. SIMULACIÓN DE UN PROCESO CON BARRERA REFLECTANTE CONSTANTE.

Ahora, vamos a hacer lo mismo, pero en el caso de una barrera reflectante constante, esto es, un caso en el cual la probabilidad de ruina es 1, fijando la tasa λ de siniestros en 120, la media de la exponencial en 1, el recargo de seguridad θ en 0,4, y la reserva inicial en 3.

En este caso, un buen ejemplo de gráfico podría ser (hasta que ocurra la ruina):



(Gráfico 4.1.1)

Se simula hasta que haya ruina, la cual, en este modelo, está garantizada, por las propiedades que vimos en el apartado 2.

Si simulamos hasta la ruina, podemos obtener los siguientes resultados:

Primer resultado: tabla con diferentes valores para el caso en que las probabilidades de ruina se reduzcan a ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 y 1/10, respectivamente (para 20000 simulaciones):

Fracción de la probabilidad de ruina	Valor de la barrera reflectante	Tiempo medio de ruina	Beneficio medio obtenido
½=0,5	5,4260	0,2538	16,2018
1/3=0,333333…	6,8451	0,4178	24,0443
¼=0,25	7,8520	0,5883	32,2501
1/5=0,2	8,6330	0,7612	40,6309
1/6=0,166666…	9,2712	0,9340	48,9944
1/7=0,142857...	9,8107	1,0899	56,2542
1/8=0,125	10,2780	1,2623	64,6820

1/9=0,111111...	10,6903	1,4248	72,2852
1/10=0,1	11,0590	1,5760	79,5399

Segundo resultado: la misma tabla con otros valores (también con 20000 simulaciones):

Fracción de la probabilidad de ruina	Valor de la barrera reflectante	Tiempo medio de ruina	Beneficio medio obtenido
½=0,5	5,4260	0,2546	16,2634
1/3=0,333333…	6,8451	0,4212	24,2705
¼=0,25	7,8520	0,5900	32,3422
1/5=0,2	8,6330	0,7550	40,2221
1/6=0,166666…	9,2712	0,9151	47,9584
1/7=0,142857...	9,8107	1,0772	55,6657
1/8=0,125	10,2780	1,2427	63,5450
1/9=0,111111...	10,6903	1,4394	73,1376
1/10=0,1	11,0590	1,5841	79,8680

Tercer resultado: misma tabla con otros valores diferentes (también 20000 simulaciones).

Fracción de la probabilidad de ruina	Valor de la barrera reflectante	Tiempo medio de ruina	Beneficio medio obtenido
½=0,5	5,4260	0,2573	16,4298
1/3=0,333333…	6,8451	0,4196	24,1420
¼=0,25	7,8520	0,5821	31,8814
1/5=0,2	8,6330	0,7551	40,2418
1/6=0,166666…	9,2712	0,9274	48,4321
1/7=0,142857...	9,8107	1,0822	55,9553
1/8=0,125	10,2780	1,2698	64,9372
1/9=0,111111...	10,6903	1,4422	73,4773
1/10=0,1	11,0590	1,5838	79,9593

Cuarto resultado: la misma tabla (esta vez son 60000 simulaciones).

Fracción de la probabilidad de ruina	Valor de la barrera reflectante	Tiempo medio de ruina	Beneficio medio obtenido
½=0,5	5,4260	0,2529	16,1158
1/3=0,333333…	6,8451	0,4160	23,9071
¼=0,25	7,8520	0,5820	31,8217
1/5=0,2	8,6330	0,7531	40,0299
1/6=0,166666…	9,2712	0,9263	48,4525
1/7=0,142857...	9,8107	1,0861	56,1962
1/8=0,125	10,2780	1,2622	64,6923
1/9=0,111111...	10,6903	1,4128	71,7259
1/10=0,1	11,0590	1,5939	80,5398

Quinto resultado: misma tabla (60000 simulaciones).

Fracción de la probabilidad de ruina	Valor de la barrera reflectante	Tiempo medio de ruina	Beneficio medio obtenido
½=0,5	5,4260	0,2514	16,0727
1/3=0,333333…	6,8451	0,4194	24,1525
¼=0,25	7,8520	0,5814	31,8376
1/5=0,2	8,6330	0,7469	39,8301
1/6=0,166666…	9,2712	0,9268	48,4836
1/7=0,142857...	9,8107	1,0964	56,6532
1/8=0,125	10,2780	1,2579	64,4599
1/9=0,111111...	10,6903	1,4283	72,5126
1/10=0,1	11,0590	1,5995	80,7676

Sexto y último resultado: ídem (200000 simulaciones).

Fracción de la probabilidad de ruina	Valor de la barrera reflectante	Tiempo medio de ruina	Beneficio medio obtenido

½=0,5	5,4260	0,2521	16,1089
1/3=0,333333…	6,8451	0,4205	24,2153
¼=0,25	7,8520	0,5834	31,9454
1/5=0,2	8,6330	0,7530	40,1062
1/6=0,166666…	9,2712	0,9229	48,3190
1/7=0,142857...	9,8107	1,0900	56,3705
1/8=0,125	10,2780	1,2562	64,2756
1/9=0,111111...	10,6903	1,4312	72,7423
1/10=0,1	11,0590	1,5903	80,3055

Por tanto, se puede observar, que, a menor probabilidad de ruina que se ponga, mayor será la cuantía de la barrera reflectante, y además, en consecuencia, tardará más en arruinarse, tanto de media como el máximo de ruina, el beneficio va subiendo en progresión aritmética tanto a como se reduzca la probabilidad de ruina. En lo referente al número de simulaciones, estas no hacen variar demasiado los valores, solo que, a mayor número de simulaciones, los valores medios tienen menor dispersión (varianza), oscilando menos.

Programa utilizado en MATLAB:

```
% Ahora vamos a realizar simulaciones de un proceso de surplus con barrera
% reflectante constante. Para ello, fijaremos el surplus inicial, la
% cantidad de barreras, la tasa de ocurrencia de siniestros, la cuantía
% media de los mismos y el recargo de seguridad, pues, al ser la ruina
% segura, simularemos hasta que la haya. Finalmente, fijaremos el número de
% simulaciones, para hallar el tiempo máximo de la ruina y el tiempo medio
% de la misma, así como la existencia de beneficios (dividendos), ya que
% ruina habrá en todas las simulaciones realizadas.

% Fijamos los valores básicos.

la=120;
```

```
mex=1;
theta=.4;

% Se calcula la tasa de primas con los datos anteriores.

c=(1+theta)*la*mex;

% Se determina el surplus inicial.

u0=3;

% Hallamos la probabilidad teórica de ruina en caso de no existir barrera

pr=(1/(1+theta))*exp(-(theta*u0)/(mex*(1+theta)));

% Se introducen los vectores con los tiempos medios y máximos de la ruina,
% y con los valores del beneficio obtenido.

BR=[]; % Vector con los valores de las barreras.
TMR=[]; % Vector con los tiempos medios de ruina.
VTR=[]; % Vector con los tiempos máximos de ruina.
MeB=[]; % Vector con los beneficios totales medios obtenidos.
MaB=[]; % Vector con los beneficios totales máximos obtenidos.

% A través de ello, se calcula el valor de la barrera reflectante,
% suponiendo que es el valor en el cual la probabilidad de ruina, sin
% barreras, disminuye a una fracción no superior a la mitad.

for fr=2:10;
    br=-(1+theta)*log(mex*(pr/fr)*(1+theta))/theta;

    % Se introduce el número de simulaciones que se quieren realizar.

    tsi=input('¿Cuántas simulaciones quieres realizar?' );
```

```
% Se simula el proceso.

tru=zeros(tsi,1); % Tiempo de ruina alcanzado tras cada simulación.
benef=zeros(tsi,1); % Vector con los beneficios totales existentes.

for j1=1:tsi;
    ta=0; % Tiempo acumulado hasta un cierto siniestro.
    TA=0; % Vector con esos tiempos acumulados.
    ut=u0; % Valor del surplus en cierto instante.
    UT=u0; % Vector con los valores de ese surplus.
    B=0; % Vector con los beneficios obtenidos por la barrera reflectante.
    TD=[]; % Vector que reúne los momentos de comienzo y final del tiempo con beneficios.
    k1=1; % Variable auxiliar, que representa el número de siniestros hasta la ruina.
    while UT>0; % Se simula mientras el proceso de surplus es positivo.
        k1=k1+1;
        t=exprnd(1/la);
        ta=ta+t;
        ut=ut+c*t;
        if ut>br;
            t1=(br-UT(k1-1))/c;
            TD=[TD; TA(k1-1)+t1 ta];
            b=ut-br;
            B=[B;b];
            ut=br-exprnd(mex);
        else
            ut=ut-exprnd(mex);
        end
        TA=[TA;ta];
        UT=[UT;ut];
    end
    tru(j1)=ta;
    benef(j1)=sum(B);
end
BR=[BR;br];
```

```
    TMR=[TMR;mean(tru)];
    VTR=[VTR;max(tru)];
    MeB=[MeB;mean(benef)];
    MaB=[MaB;max(benef)];
end

disp('El vector con los valores de las barreras es'  )
BR
disp('El vector con los tiempos medios de ruina es'  )
TMR
disp('El vector con los tiempos máximos de ruina es'  )
VTR
disp('El vector con los beneficios medios obtenidos es'  )
MeB
disp('El vector con los beneficios máximos obtenidos es'  )
MaB
```

4.2. SIMULACIÓN DE UN PROCESO CON BARRERA REFLECTANTE CRECIENTE.

En el caso de barrera creciente a una tasa $a<c$, siendo c la cuantía de las primas, no podemos calcular con seguridad cuánta es la probabilidad de ruina, pero sí podremos estimarla mediante las simulaciones y el número de ruinas que hay en las mismas, pudiendo hallar la probabilidad de ruina empírica.

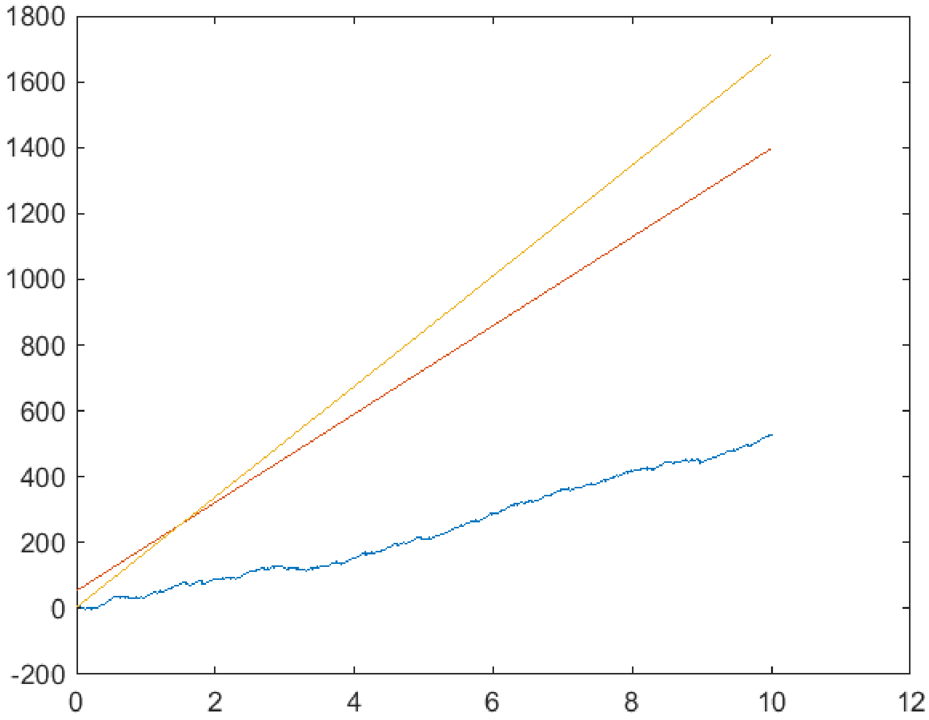
En el caso de una sola simulación, podemos ver que es conveniente determinar la cuantía de la ordenada en el origen y de la pendiente en función de cuándo queramos que se crucen ambos procesos. Así, si por ejemplo, si λ=120, μ=1, θ=0,4, y u=3, por lo que las primas son de c=120*1*1,4=168, y queremos que se crucen en dos diferentes puntos:

Si las reservas, en caso de no haber siniestro, se cruzan en t=1,5 con la barrera reflectante, cuya pendiente está al 80% de la tasa de primas, esto es, 134,4, el valor inicial de la misma habría de ser de:

$$3+168*1{,}5=b+168*0{,}8*1{,}5\rightarrow 3+252=b+201{,}6\rightarrow 255=b+201{,}6\rightarrow b = 255-201{,}6=53{,}4$$

O sea, el valor inicial sería de b=53,4, y se cruzarían en u=255.

Ejemplo de gráfico (hasta que *t*=10):



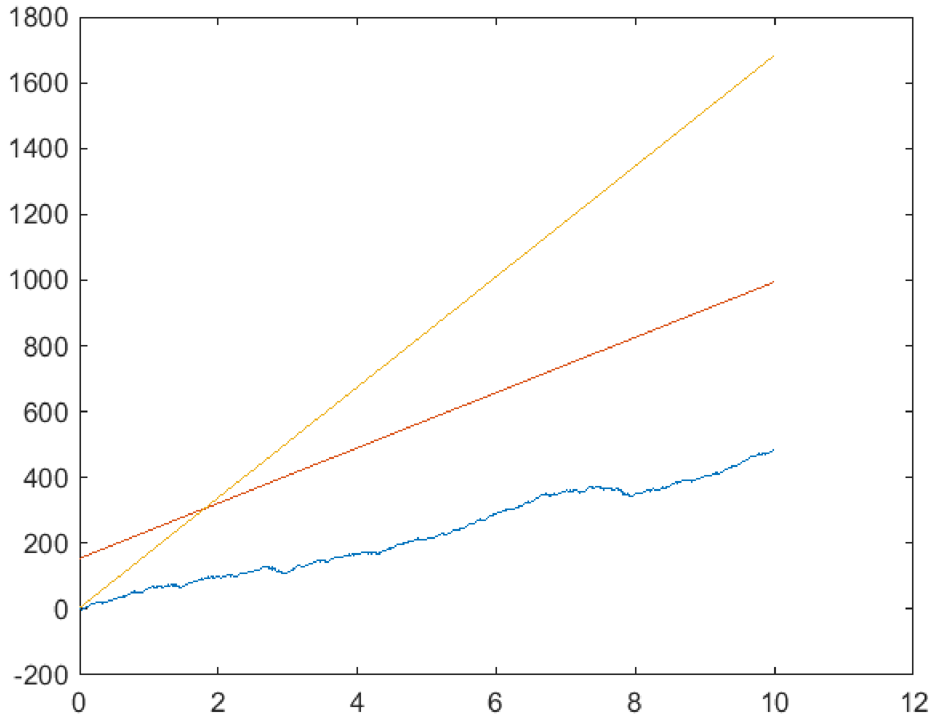
Como se puede observar, en ningún momento las reservas (representadas en color azul) alcanzan el valor de la barrera reflectante (representada en color rojo).

Si dichas reservas, en caso de no haber siniestro, se cruzan en *t*=1,8 con una barrera reflectante cuya pendiente está al 50% de la tasa de primas, esto es, 84, el valor inicial de esta tendría que ser de

$$3 + 168 * 1{,}8 = b + 168 * 0{,}5 * 1{,}8 \rightarrow 3 + 302{,}4 = b + 151{,}2 \rightarrow 305{,}4 = b + 151{,}2 \rightarrow b = 305{,}4 - 151{,}2 = 154{,}2$$

Por lo tanto, el valor inicial sería de *b*=154,2, y se cruzarían en *u*=305,4.

Ejemplo de gráfico (hasta que *t*=10):



Como se puede observar, y al igual que en el otro gráfico, las reservas (en color azul) no llegan nunca al valor de la barrera reflectante (en color rojo).

Vamos a realizar simulaciones de un proceso estocástico con barrera creciente, con λ=120, μ=1, θ=0,4, la barrera constante está a la mitad de la probabilidad de ruina, y la pendiente de la misma es de $\theta\ \lambda\ \mu$=0,4*120*1=48.

No obstante, también vamos a simular cambiando la probabilidad de ruina y la pendiente de la barrera, y vamos a comprobar los resultados.

Primera tabla (resultados con 100000 simulaciones y una pendiente de θ*λ*μ=0,4*120*1=48, la probabilidad de ruina va variando):

Fracción de la probabilidad de ruina	Ordenada en el origen de la barrera	Pendiente de la barrera	Probabilidad de ruina	Beneficio medio obtenido
1/2=0,5	5,4260	48	0,3424	36,1988
1/3=0,333333...	6,8451	48	0,3176	34,8525
1/4=0,25	7,8520	48	0,3100	33,9171

1/5=0,2	8,6330	48	0,3067	33,2
1/6=0,166666...	9,2712	48	0,3050	32,5557
1/7=0,142857...	9,8107	48	0,3041	32,1451
1/8=0,125	10,2780	48	0,3037	31,6609
1/9=0,111111...	10,6903	48	0,3057	31,4944
1/10=0,1	11,0590	48	0,3015	31,0551

Segunda tabla (resultados con 100000 simulaciones y una pendiente de 0,75*θ*λ*μ=0,75*0,4*120*1=36, la probabilidad de ruina va variando):

Fracción de la probabilidad de ruina	Ordenada en el origen de la barrera	Pendiente de la barrera	Probabilidad de ruina	Beneficio medio obtenido
½=0,5	5,4260	36	0,38127	127,63
1/3=0,333333…	6,8451	36	0,3417	126,17
¼=0,25	7,8520	36	0,32418	125,46
1/5=0,2	8,6330	36	0,31343	124,46
1/6=0,166666…	9,2712	36	0,3115	123,8992
1/7=0,142857…	9,8107	36	0,3090	123,3522
1/8=0,125	10,2780	36	0,3074	122,8854
1/9=0,111111…	10,6903	36	0,3062	122,3068
1/10=0,1	11,0590	36	0,3082	122,2538

Tercera tabla (resultados con 100000 simulaciones y una pendiente de 0,5*θ*λ*μ=0,5*0,4*120*1=24, la probabilidad de ruina va variando):

Fracción de la probabilidad de ruina	Ordenada en el origen de la barrera	Pendiente de la barrera	Probabilidad de ruina	Beneficio medio obtenido
½=0,5	5,4260	24	0,45631	243,05
1/3=0,333333…	6,8451	24	0,38503	241,34
¼=0,25	7,8520	24	0,35378	240,70
1/5=0,2	8,6330	24	0,3401	239,59
1/6=0,166666…	9,2712	24	0,33325	239,16
1/7=0,142857…	9,8107	24	0,32445	238,54

1/8=0,125	10,2780	24	0,31912	238,23
1/9=0,111111…	10,6903	24	0,31715	237,63
1/10=0,1	11,0590	24	0,31307	237,37

Por tanto, podríamos decir que, a mayor pendiente de la barrera, menor probabilidad de ruina (muchas veces menor que la teórica sin barreras), y un beneficio medio mucho menor (varía mucho más que la probabilidad de ruina). En cuanto a la ordenada en el origen, a mayor importe de la misma, baja ligeramente la probabilidad de ruina y descienden un poco los beneficios medios (algo que suele subir en el caso de la barrera constante, porque se simula hasta la ruina, y es una bajada muchísimo inferior a la que acontece si se aumenta la pendiente).

Programa de MATLAB:

```
% Ahora vamos a simular varias veces un proceso de surplus con barrera
% creciente, para lo cual tendremos que fijar la tasa landa de ocurrencia
% de siniestros, la cuantía media de la exponencial o mu, el recargo de
% seguridad o theta, y luego el valor del surplus. Después de hallar el
% importe de las primas, estableceremos el importe de la ordenada en el
% origen de la barrera, y de la pendiente de la misma, y tras ello
% simularemos.

la=120;
mex=1;
theta=.4;
u0=3;

% Calculamos el importe de las primas.

c=(1+theta)*la*mex;

% Ahora hallamos la probabilidad de ruina en el modelo sin barreras.

pr=(1/(1+theta))*exp(-(u0*theta)/(mex*(1+theta)));
```

```
% Introducimos la cantidad inicial de barreras, en función de la
% probabilidad de ruina, y la pendiente, en función de la media del proceso
% estocástico.

u1=-(1+theta)*log(mex*(pr/2)*(1+theta))/theta;
pb=theta*la*mex;

% Ahora introducimos hasta cuándo queremos simular el proceso, puesto que
% la ruina no es segura y también el número de simulaciones que emplearemos.

TT=input('¿Hasta cuándo quieres simular el proceso?' );
tsi=input('¿Cuántas simulaciones quieres realizar?' );

% Ahora sí, simularemos el proceso estocástico.

nr=0; % Número de ruinas acaecidas en el proceso.
tru=0; % Tiempo hasta que acontece la ruina.
TRU=zeros(tsi,1); % Vector con los tiempos de ruina acaecidos.
benef=zeros(tsi,1); % Vector con los beneficios totales obtenidos.

for j1=1:tsi;
   ta=0; % Tiempo acumulado de espera hasta un siniestro.
   TA=0; % Vector con los tiempos acumulados de espera hasta un siniestro.
   ut=u0; % Valor del surplus en cada momento temporal.
   UT=u0; % Vector con los valores del surplus en esos momentos de tiempo.
   k1=1; % Variable auxiliar, que aumenta en 1 cada vez que hay siniestro.
   B=0; % Vector con los valores de los beneficios producidos por estar la barrera.
   TD=[]; % Vector con los momentos principio y final en que hay beneficios derivados de la existencia de la barrera.
   while ta<=TT;
      k1=k1+1;
      t=exprnd(1/la);
      ta=ta+t;
      ut=ut+c*t;
      if ut>u1+pb*ta;
```

```
            t1=(u1-UT(k1-1)+pb*TA(k1-1))/(c-pb);
            TD=[TD; TA(k1-1)+t1 ta];
            b=ut-(u1+pb*ta);
            B=[B;b];
            ut=(u1+pb*ta)-exprnd(mex);
        else
            ut=ut-exprnd(mex);
        end
        TA=[TA;ta];
        UT=[UT;ut];
    end
    if min(UT)<=0;
        nr=nr+1;
    end
    ur=min(find(UT<=0));
    tru=TA(ur);
    TRU=[TRU;tru];
    benef(j1)=sum(B);
end

% Se calcula la probabilidad de ruina empírica del modelo.

pre=nr/tsi;
disp('La probabilidad de ruina del modelo es'  )
pre

disp('El tiempo medio de ruina ha sido de'  )
mean(TRU)

disp('El tiempo máximo de ruina ha sido de'  )
max(TRU)

disp('El beneficio medio obtenido ha sido de'  )
mean(benef)
```

```
disp('El beneficio máximo obtenido ha sido de'  )
max(benef)
```

5. CONCLUSIONES.

Las conclusiones a las que podemos llegar con este modelo son:

En el modelo clásico, la probabilidad de ruina se puede calcular mediante la ecuación integro-diferencial de la ruina, y en el caso de una distribución exponencial, se puede hallar exactamente de cuánto es dicha probabilidad, así como la de supervivencia.

En el modelo con barrera constante, la probabilidad de ruina es igual a 1, porque se limita la cuantía máxima de las reservas, pudiendo llegar solo al valor de la barrera constante.

En el modelo con barrera creciente, la probabilidad de ruina tiene una fórmula muy compleja, por la cual no se puede hallar exactamente de cuánto es, ni en el caso de la exponencial, caso en el cual se ha de resolver mediante coeficientes recursivos. Generalmente, se halla por estimación, y no es segura (no es igual a 1).

La probabilidad de ruina es tanto menor cuanto mayor es el valor de la ordenada en el origen, y todavía menor cuanto mayor es la pendiente.

Por su parte, el tiempo de ruina es relevante en barrera constante y en el modelo clásico, siendo en el primero mayor que en el segundo, porque en el segundo acontece muy deprisa y no siempre.

Finalmente, los beneficios obtenidos varían diferentemente en barrera constante y en barrera creciente, pues, en el primer caso, suben cuanto mayor es la ordenada en el origen, ya que se simula hasta que haya ruina, y en el segundo, bajan muy ligeramente porque se limita algo el dividendo obtenido. Esta bajada es muchísimo mayor en el caso de que en la barrera creciente suba la pendiente, pues hace que los dividendos sean mucho menores, y con una pendiente muy elevada, apenas hay dividendos o directamente ni los hay.

6. BIBLIOGRAFÍA.

Alegre, A.; Claramunt, M.M., y Mármol, M. (2000): *Política de dividendos y probabilidad de ruina*, Barcelona.

Bühlmann, H. (1970): *Mathematical Methods in Risk Theory*, ed. Springer, New York.

Egídio dos Reis, A.D. (2001): *Teoria da Ruína*, Lisboa.

Gerber, H.U. (1981): *On the Probability of Ruin in the Presence of a Linear Dividend Barrier*, Scandinavian Actuarial Journal, 105-115.

Klugman, S.A.; Panjer, H.H. and Willmot, G.E. (1998): *Loss Models: From Data to Decisions*, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Sarabia Alegría, J.M.; Gómez Déniz, E. y Vázquez Polo, F.J. (2007): *Estadística Actuarial. Teoría y Aplicaciones*, Pearson Prentice Hall, Madrid.

Wikipedia en inglés (n.d.): “Ruin theory”. Disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/Ruin_theory. (Consultado: 14 de julio de 2016).