Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Grado en Administración y Dirección de Empresas

Valoración de derivados financieros: las opciones europeas

Presentado por:

Pablo de los Ojos Araúzo

Valladolid, 27 de Junio de 2016

RESUMEN

Desde la publicación de los trabajos de Black-Scholes y de Merton en 1973, la valoración de derivados financieros ha cobrado una importancia capital en el mundo de las inversiones, habiéndose desarrollado desde entonces una extensa literatura sobre el tema. En paralelo, el comercio con derivados financieros ha aumentado exponencialmente en todos los mercados financieros, estando estrechamente relacionado con la reciente crisis financiera. Por tanto, en este trabajo estudiamos qué es un derivado financiero y qué tipos existen. Posteriormente, nos centramos en el estudio de las opciones europeas y obtenemos su valor exacto y su valor aproximado utilizando el modelo de Black-Scholes y el método de Monte Carlo, respectivamente. Finalizamos analizando la precisión del método de Monte Carlo para la valoración de opciones.

Palabras clave: *derivados financieros, opciones europeas, ecuación de Black-Scholes, método de Monte Carlo.*

Clasificación JEL: *G12, G13.*

ABSTRACT

Since the publication of Black-Scholes and Merton's papers in 1973, the valuation of financial derivatives has become a very important subject in the investment world, having been written a vast literature about the topic. At the same time, the derivative trading has increased exponentially in the financial markets, having been closely related with the recent financial crisis. Therefore, in this dissertation we study what a financial derivative is and which types exist. Afterwards, we focus on the study of European options and we obtain its exact and approximated value using the Black-Scholes model and the Monte Carlo method, respectively. Finally, we analyze the Monte Carlo method's precision to price options.

Key words: *financial derivatives, European options, Black-Scholes equation, Monte Carlo method.*

JEL classification: *G12, G13.*

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

1. INTRODUCCIÓN

Año tras año, la importancia de los derivados financieros en los mercados de capitales internacionales aumenta. Su estudio académico, que comenzó en los años 70 con diversos trabajos como los de Merton (1973) y Black y Scholes (1973), ha provocado un incremento exponencial de su uso. Actualmente, los derivados financieros mueven billones de dólares en los mercados (Hunt y Kennedy, 2004). Además han tenido un importante papel en la reciente crisis financiera (United States Government Publishing Office, 2011). Por tanto, los derivados financieros se han convertido en activos que todo profesional de las finanzas debe conocer, manejar y valorar. Al mismo tiempo, las fronteras económicas han ido desapareciendo como consecuencia de la globalización económica, lo que aumenta la volatilidad y sensibilidad de los mercados.

En este nuevo entorno, la entrada de nuevos competidores y agentes de mercado hace más difícil la obtención de beneficios mediante operaciones financieras y surgen nuevos derivados cada vez más complejos de valorar. Esto hace necesario el desarrollo de nuevos métodos de valoración más certeros y sofisticados y un uso apropiado de los mismos por parte de coberturistas, especuladores y arbitrajistas. La dificultad más habitual que existe en la literatura es que no es posible encontrar una solución cerrada para el problema que permita valorar los nuevos derivados financieros que van surgiendo, por tanto es necesario aplicar métodos numéricos para su resolución. En la literatura existen muchos métodos pero el más conocido por los agentes es el método de Monte Carlo, fundamentalmente por su sencillez.

El principal objetivo de este trabajo es doble. En primer lugar, definir qué son los derivados financieros, fundamentalmente las opciones europeas, y analizar las diferentes posibles estrategias de inversión. En segundo lugar, mostrar el método de Black-Scholes para obtener el valor de una opción de forma exacta para posteriormente compararlo con el valor aproximado obtenido con el método de Monte Carlo el cual se utiliza habitualmente por su sencillez tanto en los mercados como en la literatura. Para ello utilizaremos el *software* de MATLAB.

Este trabajo se estructura en los siguientes apartados. En la Sección 2 describimos qué es un derivado, su origen, sus inversores potenciales y principales tipos. En la Sección 3, nos centramos en las opciones europeas y sus estrategias de inversión. En la Sección 4, introducimos los conceptos básicos del cálculo estocástico, necesarios para comprender los modelos de valoración de derivados. En la Sección 5, introducimos el modelo de Black-Scholes y obtenemos el valor exacto de una opción de compra europea. En la Sección 6, comentamos en qué consiste el método de Monte Carlo y cómo se puede aplicar a la obtención del valor aproximado de una opción europea. En la Sección 7, comparamos el valor exacto con el valor aproximado de una opción europea y analizamos el error cometido al utilizar el método de Monte Carlo. Finalmente, en la Sección 8, mostramos las conclusiones.

2. LOS DERIVADOS FINANCIEROS

Un derivado financiero es un activo cuyo precio depende o se deriva del valor de otros activos más básicos, conocidos como activos subyacentes o *underlying assets* (Hull, 2002). Algunos ejemplos de activos subyacentes comunes incluyen acciones, divisas, tipos de interés y los precios de ciertas materias primas. Por otro lado, algunos ejemplos de derivados son las opciones, los futuros y los productos estructurados.

Inicialmente, los derivados financieros nacieron para permitir a los inversores que lo desearan protegerse de la incertidumbre en los mercados de activos. Esto es, del riesgo de mercado, que es aquel aportado por las fluctuaciones o volatilidad del precio de los activos subyacentes.

2.1. TRASFONDO HISTÓRICO

El desarrollo de los derivados ha sido progresivo a lo largo de la historia, creándose cada vez mayor número de derivados diferentes que, junto con el resto de activos, permiten una diversificación de la inversión y el riego más individualizada, teniendo en cuenta las preferencias personales del inversor.

El primer uso de lo que se podría denominar un “activo derivado primitivo” se atribuye a Tales de Mileto, filósofo griego de los siglos VI y VII a.C. Durante un invierno previó, con sus conocimientos de botánica y astronomía, una cosecha de aceitunas excelente, y reunió todo el dinero que pudo para emplearlo como depósito para arrendar todas las prensas de aceite de la zona. De esta forma, consiguió el monopolio en el sector del prensado. Esta historia conllevaría la creación y el uso por primera vez de futuros u opciones, dependiendo de la versión, véase Makropoulou y Markellos (2005).

Posteriormente, en los siglos XVII y XVIII, estos activos se emplearon en el comercio de los bulbos de tulipanes en Holanda[1] (Thompson, 2007) y en el comercio del arroz en Japón[2] (Scheaede, 1989), permitiendo a sus compradores y vendedores conocer con antelación el precio al que comprarían o venderían la cosecha y así reducir el riesgo.

En 1848 nació el primer mercado de derivados organizado moderno, el *Chicago Board of Trade* (Elvira y Puig, 2015), siendo el único mercado de derivados en la actualidad donde se continúan negociando los precios a voz cantada y mediante un lenguaje propio de gestos.

Actualmente, de acuerdo con Hull (2002), la gran mayoría de derivados se negocian tanto en las bolsas de valores como en los mercados secundarios organizados y no organizados (*over the counter*). En estos últimos, el número de transacciones es menor pero el tamaño promedio es mayor, moviéndose cantidades ingentes de capital.

[1] Se emplearon contratos de futuros hasta 1637, año en el que el parlamento holandés decretó el uso obligatorio de contratos de opciones en el comercio de bulbos de tulipanes.

[2] Aproximadamente desde 1710, destacando los contratos de futuros en el Mercado de Arroz de Dōjima.

2.2. TIPOS DE INVERSORES

Según Elvira y Puig (2015), los inversores de derivados se pueden dividir, principalmente, en tres tipos: coberturistas, especuladores y arbitrajistas.

Los coberturistas son aquellos que tratan de minimizar total o parcialmente el riesgo de futuras operaciones. Para ello abren posiciones en el mercado de futuros que les reporten beneficios en caso de que el activo subyacente varié en un sentido tal que provoque pérdidas en la operación inicial. Cabe destacar que, de la misma forma que se minimiza la posibilidad de pérdidas derivadas de la volatilidad del subyacente en la operación inicial, también se minimiza la posibilidad de beneficios. Este uso de los derivados justifica su existencia ante las autoridades financieras y legales.

Por otro lado, el riesgo que los coberturistas buscan evitar recae sobre aquellos inversores dispuestos a asumirlo: los especuladores. Estos inversores tratan de obtener un beneficio con las fluctuaciones del precio del derivado debidas a los cambios de precio del activo subyacente. Dado que no están interesados en comprar o vender el activo subyacente (trigo, por ejemplo), siempre cierran su posición antes de la fecha de vencimiento. Es el tipo de inversión más común y posee un alto riesgo, con posibilidades de pérdidas o ganancias muy elevadas debidas a las variaciones del precio del subyacente.

Finalmente, los arbitrajistas, tratan de obtener un beneficio, al igual que los especuladores. No obstante, lo hacen aprovechando los desajustes entre los precios de los derivados y los de sus subyacentes o entre los diversos mercados de derivados. Sus operaciones provocan el reequilibrio de los precios y están exentas de riesgo. Sin embargo, el gran número de arbitrajistas y el desarrollo de las tecnologías de la comunicación hacen muy difícil localizar y explotar a tiempo un desequilibrio en el mercado, que además, tiene que ser lo suficientemente grande para compensar los costes de las operaciones necesarias para su explotación, así como otros posibles gastos relacionados.

2.3. TIPOS DE DERIVADOS FINANCIEROS

Los derivados financieros son un campo en continuo desarrollo, creándose nuevos tipos de activos de forma continua ante la demanda creciente de los inversores. Entre los más importantes se encuentran los contratos de futuros, los contratos de opciones, los *swaps* y los productos estructurados, entre otros. A continuación recogemos los más conocidos.

2.3.1. *Forwards* u operaciones a plazo no estandarizadas

Un contrato *forward* es un acuerdo entre dos partes en el que una de ellas promete comprar un activo a la otra en un momento futuro específico y a un precio concreto (Wilmott, 2006).

Su origen, siguiendo a Elvira y Puig (2015), podemos situarlo a mediados del siglo XIX en Illinois (Estados Unidos). Los productores y los compradores de diversos productos y materias primas (por ejemplo, trigo, soja o maíz) corrían grandes riesgos ante las continuas fluctuaciones de los precios del mercado, por lo que comenzaron a pactar entre ellos: cantidad, fecha de entrega y precio. Estos pactos darían lugar a lo que hoy conocemos como operaciones a plazo.

Estos derivados se negocian habitualmente en mercados *over the counter*.

2.3.2. Contratos de futuros

Estos derivados financieros se crearon como solución a los principales problemas e inconvenientes que presentaban los contratos a plazo y que enumeramos a continuación (Elvira y Puig, 2015):

- Dificultad de encontrar vendedores y compradores afines.
- Incumplimientos. En caso de que una de las partes no cumpliese lo pactado, la otra quedaba totalmente expuesta. Este hecho daba lugar a que el riesgo de los contratos se elevara.

- Negociaciones muy largas y complicadas entre las partes contratantes.

En primer lugar se creó un mercado, una ubicación física, para el intercambio entre compradores y vendedores, solucionando así el primer problema.

A continuación, en ese mercado se creó una *Cleaning House* (Cámara de Compensación) para dar solución al segundo problema. Este organismo asume jurídicamente un compromiso recíproco con el vendedor y con el comprador. El contrato pasa de tener la estructura "*comprador – vendedor"* a *"comprador – Cámara de Compensación – vendedor".*

En caso de incumplimiento, la cámara cumple el compromiso en nombre del incumplidor, reservándose el derecho de emprender acciones legales contra él mismo. Para cumplir con este cometido, la cámara gestiona un sistema de garantías que incluye fianzas y liquidaciones diarias, entre otras medidas.

El tercer problema se solucionó estandarizando los contratos: una misma cantidad, una misma calidad y unos vencimientos limitados (comúnmente mensuales o trimestrales). Esta estandarización tiene ciertos aspectos comunes con la Bolsa de Valores.

El contrato de futuros es uno de los derivados financieros más utilizados en los mercados ya que, dadas sus características, es especialmente útil para los tres tipos de inversiones definidos anteriormente (Elvira y Puig, 2015). Entre los principales activos subyacentes sobre los que se comercian contratos de futuros se encuentran las acciones, las divisas y las materias primas.

Actualmente, los futuros se comercializan de forma masiva junto con otros derivados en diversos mercados organizados y muchas veces, especializados según el activo subyacente, como por ejemplo el NYMEX (*New York Mercantile Exchange*), que está especializado en materias primas. Otros grandes mercados incluyen el Chicago Mercantile Exchange, el Eurex Exchange y el Hong Kong Exchanges and Clearing.

2.3.3. Contratos de opciones

"Una opción financiera es un contrato a plazo que otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender (un activo subyacente) a un precio determinado en ese contrato" (Elvira y Puig, 2015).

Al iniciarse este contrato el comprador paga una cantidad, denominada prima, al vendedor. Esta cantidad es irrecuperable. El vendedor no la devolverá, independientemente de si el comprador ejerce o no su opción en la fecha acordada.

Existen dos tipos principales de opciones: la opción de compra o *call option* y la opción de venta o *put option*, pudiéndose comprar y vender ambas, por lo que existen cuatro posiciones básicas.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, una opción puede hallarse en tres situaciones diferentes:

- *At the money*. El precio de ejercicio de la opción y el precio del subyacente son idénticos. Ejercer la opción es indiferente. El resultado siempre va a ser la pérdida de la prima pagada.
- *In the money.* El precio de ejercicio de la opción de compra es inferior al precio del activo subyacente, o el precio de ejercicio de la opción de venta es superior al precio del activo subyacente. Ejercer la opción genera ganancias.
- *Out of the money.* El precio de ejercicio de la opción de compra es superior al del activo subyacente, o el precio de ejercicio de la opción de venta es inferior al del activo subyacente. Ejercer la opción genera pérdidas.

Al igual que los contratos de futuros, las opciones se negocian en mercados organizados. Sin embargo, dado que el vendedor de la opción es el único que contrae una obligación, es el único que debe aportar ciertas garantías.

Si nos atenemos al momento en el que se puede ejercer una opción podemos distinguir dos tipos principales:

- Opciones europeas: las opciones únicamente pueden ejercerse en la fecha de vencimiento establecida en el contrato.
- Opciones americanas: las opciones pueden ejercerse en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento establecida en el contrato.

Finalmente, podemos distinguir también otro tipo de opciones más complejas que se conocen como exóticas. Estas opciones se comercializan en mercados no organizados y sirven para cubrir las necesidades más específicas de algunos inversores en términos de costes, flexibilidad y complejidad. Se clasifican en:

- Opciones con memoria (*path dependent*). Poseen la característica de que su valor depende de la evolución del subyacente a lo largo del contrato (Knop, 2005), y no únicamente de su valor en la fecha de vencimiento acordada. Algunos ejemplos dentro de este grupo son las opciones asiáticas, barrera, *lookback*, *ladder* y *shout*.
- Opciones con *pay-off* modificado. En ellas el sistema de pagos se modifica, de forma que al finalizar el contrato se paga una cantidad nula o una cantidad fija o variable, dependiendo de su valor. Un ejemplo son las opciones digitales.
- Opciones *time dependent*. En ellas el precio de ejercicio, la fecha de vencimiento y su valor pueden modificarse dependiendo del factor tiempo. Las más conocidas son las opciones bermuda, *forward start* y cliquet.
- Opciones multivariantes. Se caracterizan por tener más de un activo subyacente, como por ejemplo las opciones cesta o *rainbow*.

2.3.4. Productos estructurados

Un producto estructurado es un producto de inversión que resulta de combinar dos o más instrumentos financieros, normalmente uno vinculado a los tipos de interés o los tipos de cambio y un derivado.

Existen diversos tipos, dependiendo principalmente del porcentaje del patrimonio y la rentabilidad que aseguren. Algunos ejemplos son: los fondos garantizados de renta fija, contratos de compraventa de opciones con cupón asegurado, depósitos estructurados…

En la actualidad los bancos los comercializan masivamente entre sus clientes, por lo que su uso se encuentra ampliamente extendido.

2.3.5. Contratos *swap*

Un *swap* es un acuerdo entre dos partes para intercambiar flujos de efectivo en un instante de tiempo. De acuerdo con Knop (2005), los más conocidos son los siguientes:

- Swap sobre divisas. Dos empresas de dos países con diferente divisa intercambian el principal de un préstamo. De esta forma eliminan el riesgo de tipo de cambio. Se incluyen en esta categoría los *currency swap*, los *floating currency swap* y los *cross currency swap*, dependiendo de si para los préstamos emplean intereses variables (por ejemplo dependiendo de la evolución del EURIBOR) o fijos.
- Swap sobre tipos de interés. Ambas partes intercambian una serie de pagos basados en dos tipos de interés. Se incluyen en esta categoría los *interest rate swap* y los *basis swap.* De esta forma se puede cubrir el riesgo de variación del tipo de interés.

Existen otros muchos tipos de *swaps* dependiendo de las necesidades, expectativas o preferencias de los inversores: *forward swap*, *amortising swaps*, *roller coaster swaps* etc, véase Elvira y Puig (2015).

2.3.6. Caps, floors y collars

Estos activos derivados tienen un funcionamiento similar al de las opciones, pero su valor depende de las variaciones de los tipos de interés y permiten a un inversor, por ejemplo, asegurarse un tipo de interés máximo en su préstamo hipotecario. Por ello, tienen un carácter claramente coberturista.

El comprador y el vendedor, mediante un *cap* o un *floor*, adquieren un derecho u obligación a pagar o cobrar un tipo de interés máximo o mínimo, dependiendo de la posición. Un *collar* consiste en comprar un *cap* y vender un *floor* de iguales características simultáneamente, compensándose las primas. Por lo tanto, permite asegurar que el tipo de interés de un préstamo se mantendrá entre dos niveles.

Tanto los mercados de *swaps* como los de *caps*, *floors* y *collars* carecen de una Cámara de Compensación, es decir, se intercambian en mercados no organizados. Por ello, se los conoce como productos OTC (*Over The Counter*).

3. LAS OPCIONES EUROPEAS

En esta sección, nos centramos en uno de los contratos financieros más conocidos que son las opciones europeas y describimos sus principales elementos y características. A continuación, presentamos una importante relación entre los precios de las opciones europeas de compra y venta conocida como la "Paridad *put-call*". Finalmente, describimos diversas estrategias de inversión con opciones europeas muy conocidas en los mercados.

Como ya definimos en la Subsección 2.3.3, las opciones europeas son aquellas que únicamente se pueden ejercer en su fecha de vencimiento, acordada previamente en el momento de su emisión. A lo largo de este trabajo suponemos que las acciones que forman el subyacente no generan dividendos.

Existen cinco factores fundamentales que afectan al precio de una opción sobre una acción, véase Hull (2002):

- El precio de la acción subyacente, S. Cuanto mayor sea el precio de la acción, mayor será el valor de la opción de compra y menor el de la opción de venta sobre ella.
- El precio de ejercicio, k. Marca el punto en el que la opción comienza a tener valor. Si el precio de la acción se encuentra por encima (debajo), entonces una opción de compra (venta) tendrá

valor. Además, a mayor precio de ejercicio, menor (mayor) valor de la opción de compra (venta).

- El momento de vencimiento, *T*. En general, cuanto más lejano sea, mayor valor posee la opción, ya que el subyacente tiene más tiempo para variar a favor del inversor.
- La volatilidad del precio de la acción, σ. El poseedor de una opción disfruta de los mismos beneficios que el poseedor de la acción subyacente, pero sus posibles pérdidas están limitadas. Por tanto, a mayor volatilidad mayor valor de la opción.
- Tipo de interés libre de riesgo, r. Este factor afecta al precio de la opción de forma poco clara. Cuanto mayor sea el tipo de interés libre de riesgo, mayor será el rendimiento que se requiere a las inversiones con riesgo, pero menor será el valor actual de los posibles beneficios de una opción. Estos dos efectos combinados provocan, en general, un aumento del valor de las opciones de compra y una disminución del de las opciones de venta.

Es importante destacar que estos resultados se suponen ciertos siempre que solo cambie uno de los factores y el resto permanezcan constantes (*ceteris paribus*).

3.1. PARIDAD *PUT-CALL*

La paridad *put-call* es la relación fundamental que existe entre el precio de una opción de compra y el de una opción de venta, ambas europeas y con iguales características: misma fecha de vencimiento (T), precio de ejercicio (k) y activo subyacente (S), véase Hull (2002). Para obtener esta relación partimos de dos carteras diferentes:

- La primera cartera Φ_1 está formada por la compra de una *call* europea (C_t) y una cantidad en efectivo igual al valor actual del precio de ejercicio de la opción que se pagaría al vencimiento: $ke^{-r(T-t)}$.
- La segunda cartera Φ_2 está formada por la compra de una acción (S_t) y una *put* europea (P_t).

En todo momento y hasta la fecha de vencimiento ambas carteras tienen el mismo valor, por lo que deducimos la paridad *put-call*, también conocida como ecuación fundamental de las opciones europeas:

$$C_t + ke^{-r(T-t)} = S_t + P_t.$$

Esta relación es fundamental para el cálculo de los valores de las opciones y de las estrategias de inversión que las incluyen.

3.2. ESTRATEGIAS ESPECULATIVAS CON OPCIONES

Uno de los principales atractivos de las opciones es que se pueden combinar entre sí, junto con el subyacente, para construir estrategias de inversión. Estas estrategias permiten al inversor ajustar el riesgo de su inversión, siempre a partir de sus expectativas sobre la variación de los precios del subyacente. Esto posibilita realizar inversiones más eficientes, pero también contribuye a aumentar la volatilidad en el mercado (Elvira y Puig, 2015).

En esta subsección describimos algunas de las estrategias más conocidas de opciones europeas sobre acciones: estrategias integrando una sola opción y acción, estrategias de diferenciales de precios y combinaciones.

3.2.1. Estrategias integrando una sola opción y acción

Estas estrategias permiten al inversor ajustar las pérdidas o los beneficios a un determinado nivel, es decir, le permiten reducir el riesgo y que el resultado de la inversión sea menos extremo (Hull, 2002).

En primer lugar, consideramos una estrategia que consiste en la compra de una acción como cobertura de las posibles pérdidas de la venta de una *call*. En la *Figura 3.1.A*)*,* observamos como la compra de la acción protege al inversor ante una posible subida brusca de su precio.

Por otro lado, también es posible una estrategia de cobertura comprando una *call* y vendiendo la acción subyacente. En la *Figura 3.1.B*)*,* observamos que a medida que aumenta el precio de la acción, el aumento de valor de la *call* limita las pérdidas originadas por la venta de la propia acción.

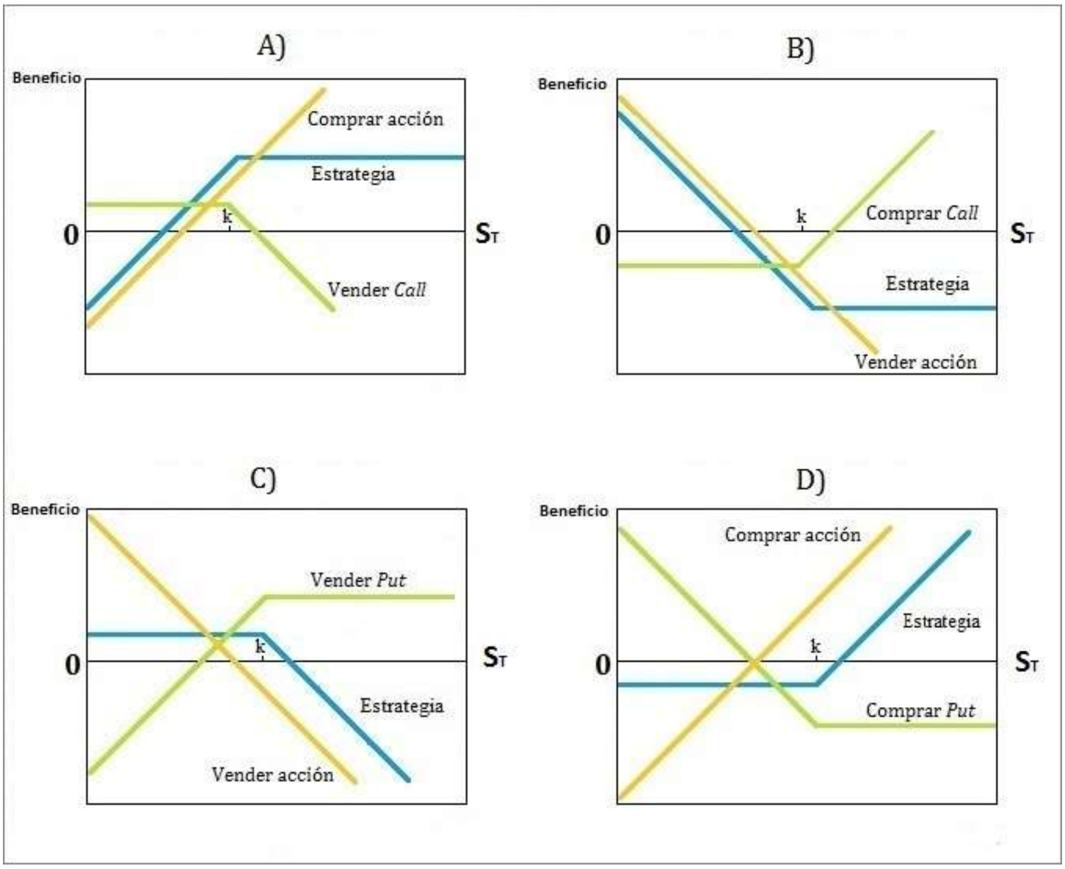

Figura 3.1. Beneficio de diferentes estrategias de inversión con carteras formadas por una acción y una opción. Fuente: Hull (2002).

Otra estrategia de cobertura consiste en vender la acción subyacente y una *put*. En la *Figura 3.1.C*), mostramos que cuando el precio de la acción es lo suficientemente bajo para que la venta de la *put* ocasione pérdidas, el beneficio por la acción permite limitar esas pérdidas.

Finalmente, otra posible estrategia, opuesta a la anterior, consiste en comprar la acción subyacente y una *put*. En la *Figura 3.1.D*), observamos que esta estrategia limita las posibles pérdidas ocasionadas por la caída de la cotización de la acción, ya que simultáneamente el valor de la *put* aumenta.

Las cuatro estrategias de inversión *A*, *B*, *C* y *D* representadas en la *Figura 3.3* poseen un patrón de beneficios equivalente a la venta de una *put*, la compra de una *put*, la venta de una *call* y la compra de una *call*, respectivamente. Esto se explica mediante la paridad *put-call*. Por ejemplo, en el caso de la cartera de la *Figura 3.1.A*), por la paridad *put-call* se observa que la compra de una acción y la venta de una *call* sobre dicha acción son equivalentes a poseer una cantidad de efectivo equivalente al valor actual del precio de ejercicio, junto con la venta de una *put:*

$$S_t - C_t = Ke^{-r(T-t)} - P_t.$$

Para el resto de estrategias se obtienen equivalencias similares, véase Hull (2002).

3.2.2. Estrategias de diferenciales de precios

Las estrategias de diferenciales de precios o *spreads* consisten en emplear dos o más opciones del mismo tipo (*call* o *put*) simultáneamente, véase por ejemplo Knop (2005). Existen diversos tipos dependiendo, especialmente, de las expectativas del inversor. De este modo, algunos se conocen con nombres como diferenciales alcistas o diferenciales bajistas, los cuales se describen a continuación.

Un diferencial bajista o *bear*[3] *spread* es una estrategia en la que se emplean dos *calls* o dos *puts* con diferentes precios de ejercicio. Más concretamente, se vende la opción con menor precio de ejercicio, mientras que se adquiere la otra. De esta forma se obtiene un beneficio en el caso de que el precio del subyacente disminuya.

En la *Figura 3.2.A*) mostramos el beneficio de este tipo de estrategias cuando se utilizan *puts*. La compra de la *put* de mayor precio de ejercicio compensa, al ejercerse con un precio de la acción no muy alto, las pérdidas de la venta de la *put* con menor precio de ejercicio. Si el precio del subyacente es elevado la segunda opción no se ejercerá por el comprador, limitando así las pérdidas de la primera.

[3] El uso de los términos *bull* (toro) y *bear* (oso) en el mundo financiero comenzó en las bolsas anglosajonas y se ha extendido ampliamente. Se conoce como *bulls* a los inversores con expectativas alcistas, que se sienten con fuerza. Al mismo tiempo, se conoce como *bears* a aquellos inversores con expectativas bajistas y que tratan generalmente de obtener un beneficio con posiciones en corto, es decir *vendiendo la piel del oso antes de cazarlo* (Kostolany, 2011).

En la *Figura 3.2.B*) mostramos el beneficio de esta estrategia cuando se utilizan *calls.* Si el precio del subyacente es bajo, la *call* vendida con menor precio de ejercicio no será ejercida por su comprador. Esto proporcionará beneficios que compensen las pérdidas de la *call* que se posee y no se ejerce. Si el precio del subyacente aumenta, el comprador de la primera opción la ejercerá. De esta forma, se podrán limitar esas pérdidas ejerciendo la *call* que se posee.

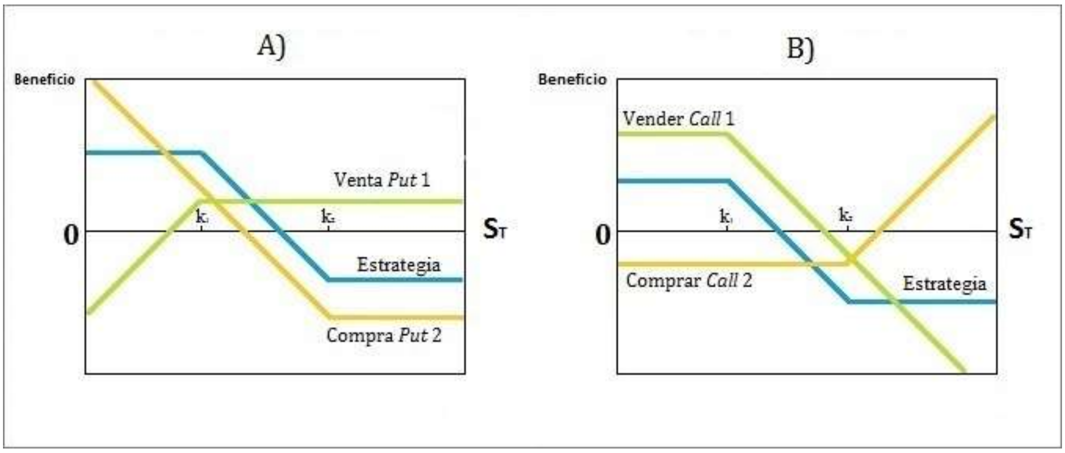

Figura 3.2. Beneficio obtenido con estrategias de diferenciales bajistas o *bear spreads*. Fuente: Hull (2002).

Este tipo de diferenciales es empleado por inversores con expectativas bajistas en el mercado del subyacente. Asimismo, reducen el riesgo limitando las pérdidas, pero también los beneficios.

En un diferencial alcista o *bull spread* se emplean también dos opciones del mismo tipo con diferente precio de ejercicio. En este caso, el inversor comprará la opción con menor precio de ejercicio, mientras que venderá la otra. Es empleada por inversores con expectativas alcistas en el mercado del subyacente, ya que en caso de subida del precio del subyacente se obtienen beneficios. Estos son nuevamente limitados, al igual que las posibles pérdidas en caso de caída.

La *Figura 3.3.* recoge el beneficio de estas estrategias cuando se utilizan dos *calls* y dos *puts*. En la *Figura 3.3.A*) mostramos que si el precio del subyacente es bajo, la venta de la *call* con mayor precio de ejercicio no es ejercida por su comprador. Esto permite limitar las pérdidas de la *call* que se posee y que tampoco se ejerce. Si el precio del subyacente aumenta, la opción vendida será ejercida por su comprador. Esto genera unas pérdidas que son compensadas por los beneficios de la *call* con menor precio de ejercicio que se posee y que, obviamente, se ejercerá.

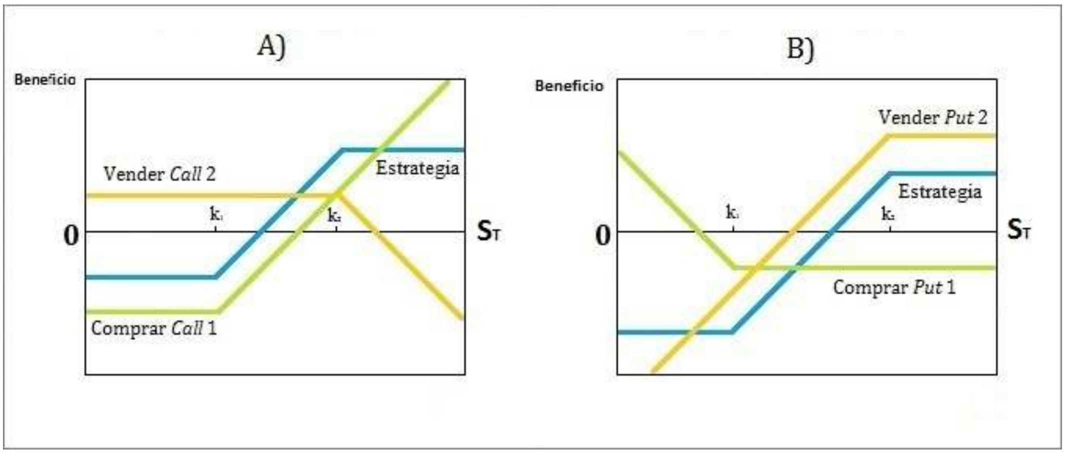

Figura 3.3. Beneficio de estrategias de diferenciales alcistas o *bull spreads*. Fuente: Hull (2002).

La *Figura 3.3.B*) recoge la estrategia con *puts* y que funciona de forma análoga. Si el precio del subyacente es bajo, ambas opciones se ejercerán. La opción con menor precio de ejercicio limitará las pérdidas producidas por la opción vendida. Por otro lado, si el precio del subyacente es elevado la *put* vendida no será ejercida por el comprador. Así se generarán unos beneficios que cubrirán holgadamente las pérdidas derivadas de la opción comprada, y que tampoco se ejercerá, obteniendo beneficios.

Otro tipo de diferencial posible son los diferenciales de conjunto o *box spreads* (Hull, 2002). Estos consisten en combinar un diferencial bajista y un diferencial alcista formados por parejas de opciones con las mismas fechas de vencimiento. Esta estrategia permite aprovechar la oportunidad de arbitraje existente en caso de que se dé una valoración incorrecta del mismo diferencial de conjunto hasta la fecha de vencimiento.

El diferencial mariposa o *butterfly spread* implica el uso de tres opciones con diferentes precios de ejercicio.

Otras estrategias, como el margen de calendario o *calendar spread* o las combinaciones de opciones en diagonal o *diagonal spreads* incluyen opciones con diferente fecha de vencimiento y satisfacen las expectativas de inversores más específicos, véase por ejemplo Hull (2002) y Elvira y Puig (2015).

3.2.3. Combinaciones

Las combinaciones son estrategias en las que, al contrario que en los diferenciales de precios, se emplean *calls* y *puts* simultáneamente. Por ejemplo las más conocidas son: los conos o *straddles*, los bandos o *strips*, las correas *straps* y las cunas o *strangle*s, véase Hull (2002).

La combinación cono o *straddle* es una de las más conocidas y consiste en la compra de una *call* y una *put* con el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento. La *Figura 3.4.A*) muestra el patrón de beneficios de este tipo de estrategia, que está ideada para inversores que esperan un movimiento fuerte de la acción, pero no saben en qué sentido. Por ello, implican una fuerte pérdida en el caso de que el precio de la acción subyacente permanezca similar al precio de ejercicio de las opciones, mientras que posibilitan beneficios crecientes a medida que el precio se aleja de dicho valor.

La *Figura 3.4.B*) muestra el patrón de beneficios de un *strip,* formado por la compra de dos *puts* y una *call* con el mismo precio de ejercicio y vencimiento. Esta estrategia genera grandes beneficios al inversor ante una caída del precio de la acción subyacente. Sin embargo, en caso de una subida equivalente en el precio del subyacente los beneficios son más reducidos.

En la *Figura 3.4.C*) presentamos el patrón de beneficios de una estrategia *strap*, formada por la compra de una *put* y dos *calls* con el mismo precio de ejercicio y vencimiento. Mediante esta combinación se generan mayores ganancias cuando se produce una subida del precio de la acción subyacente. En el caso de una caída en su precio, se continúan obteniendo beneficios, pero más escasos.

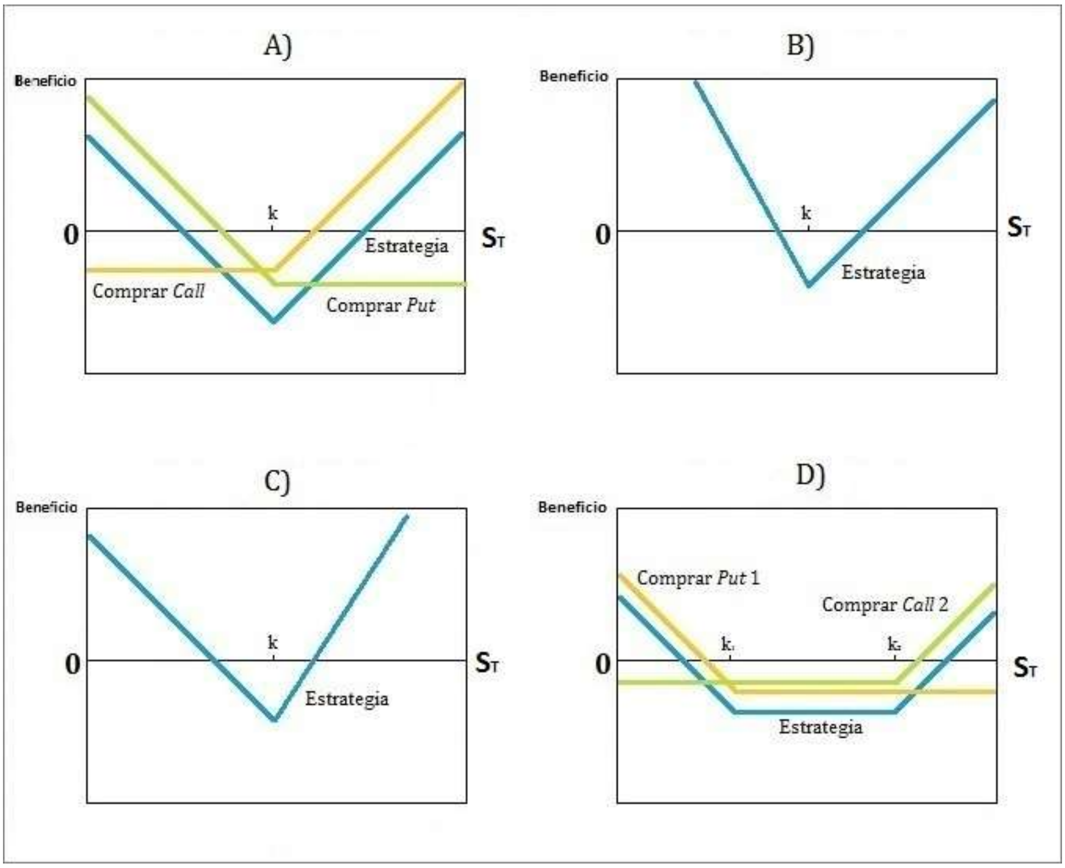

Figura 3.4. Patrones de beneficio de un *straddle* (A), un *strip* (B), un *strap* (C) y un *strangle* (D). Fuente: Hull (2002).

El inversor que prevé un cambio en el precio de la acción también puede emplear una cuna o *strangle*. Está estrategia está formada por una *put* y una *call* con la misma fecha de vencimiento pero diferente precio de ejercicio. En la *Figura 3.4.D)* se muestra que si el precio de la acción subyacente se mantiene entre los precios de ejercicio de la *put* y de la *call*, no se ejercen. Sin embargo, las pérdidas son menores que con el resto de estrategias. Por el contrario, para obtener beneficios es necesaria una variación mayor en el mismo, ya sea mediante una subida del precio (se ejerce la *call*), o una bajada (se ejerce la *put*).

4. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Debido a la naturaleza aleatoria de los mercados financieros, los procesos estocásticos y el cálculo estocástico son uno de los pilares básicos de los modelos de valoración de derivados financieros.

En esta sección, exponemos brevemente diversos conceptos básicos sobre los procesos estocásticos y el cálculo estocástico, que son cruciales para poder comprender los modelos matemáticos para la valoración de derivados financieros. Así explicamos el Lema de Itô, el cual se puede considerar como una extensión de las reglas de diferenciación del cálculo ordinario al cálculo estocástico, Kwok (2008).

Bossu y Henrotte (2006) definen un proceso estocástico como una secuencia $(X_t)_{t\geq 0}$ de variables aleatorias dependientes del tiempo $t \in (0, \infty)$ definidas en en el espacio (Ω, F, P)

Así para cada $\omega \in \Omega$ la función $t \to X_t(\omega)$ se considera que sigue un camino aleatorio o *random walk*.

Los valores que tomen las variables aleatorias X_t pueden ser discretos o continuos, dando lugar a procesos estocásticos discretos y continuos, respectivamente.

El movimiento del precio de un activo financiero se considera que es un proceso estocástico ya que su valor cambia a lo largo del tiempo de manera incierta. Realmente, estos precios solo pueden cambiar de forma discreta y solo durante los períodos en los que los mercados están abiertos. Sin embargo, por sencillez, se supone que los precios de los activos son procesos continuos, Kwok (2008).

Entre los procesos estocásticos existentes es importante destacar el movimiento Browniano estándar o proceso de Wiener. De acuerdo con Bossu y Henrotte (2006), el movimiento Browniano estándar es un proceso estocástico continuo $(Z_t)_{t\geq 0}$ que verifica:

- $Z_0 = 0.$
- Tiene incrementos estacionarios e independientes, es decir,

$$\mathrm{Z}_{t_1} - \mathrm{Z}_{t_0},\ \ \mathrm{Z}_{t_2} - \mathrm{Z}_{t_1}, \ldots,\ \ \mathrm{Z}_{t_m} - \mathrm{Z}_{t_{m-1}},$$

para $0 = \mathrm{t}_0 < \mathrm{t}_1 < \cdots < \mathrm{t}_\mathrm{m}$, son independientes y sólo dependen del incremento del tiempo.

- Los incrementos $Z_{t+\Delta_t} - Z_t$ siguen una distribución normal con media 0 y desviación estándar $\sqrt{\Delta t}$.
- Las trayectorias de Z_t son continuas de *t*.

Uno de los procesos estocásticos más importantes que existen en la literatura es el proceso de difusión de Itô[4] $(X_t)_{t\geq 0}$, el cual es un proceso estocástico aún más general, definido como:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dZ_t, \tag{4.1}$$

donde μ y σ^2 son la tendencia y la varianza, respectivamente y Z_t es el proceso estándar de Wiener.

Dependiendo de la forma de la tendencia y de la varianza del proceso de Itô podemos distinguir diferentes tipos de procesos, como por ejemplo el proceso de Ornstein-Uhlendeck, el movimiento Browniano geométrico etc., véase Bossu y Henrotte (2006).

Un movimiento Browniano geométrico $(X_t)_{t\geq 0}$ se define como un proceso estocástico que verifica la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dZ_t,$$

donde a y b son constantes y Z_t es el movimiento Browniano estándar.

El movimiento Browniano geométrico se caracteriza porque sigue una distribución normal con media y varianza conocidas, ver Kwok (2008). Este proceso se usa habitualmente en finanzas para explicar el comportamiento de las acciones.

El Lema de Itô es un resultado muy importante dentro del cálculo estocástico y que tiene una gran aplicación en finanzas, como veremos en la sección siguiente. Este lema se enuncia de la siguiente manera, véase Kwok (2008):

[4] Llamado así por Kiyosi Itô, matemático japonés del siglo XX.

Sea $V(t, X_t)$ una función continua y no aleatoria con derivadas parciales y X_t un proceso de Itô definido por (4.1).

Entonces, el proceso estocástico $Y(t) = V(t, X_t)$ tiene la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dY_t = dV(t, X_t) = \left(\frac{\partial V(t, X_t)}{\partial t} + \mu(t, X_t)\frac{\partial V(t, X_t)}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t)\frac{\partial^2 V(t, X_t)}{\partial X^2}\right)dt + \frac{\partial V(t, X_t)}{\partial X}\sigma(t, X_t)dZ_t. \quad (4.2)$$

5. EL MODELO DE BLACK – SCHOLES

La publicación de los trabajos de Black y Scholes (1973) y Merton (1973) supusieron uno de los avances más significativos en la valoración de opciones. Tanto que Scholes y Merton recibieron el Premio Nobel de Economía en 1997 por su trabajo. Black, desafortunadamente, falleció con anterioridad.

De hecho, el modelo recogido en Black y Scholes (1973) se ha convertido en un punto de referencia para el desarrollo de la ingeniería financiera (Duana Ávila y Millán Díaz, 2008). Este modelo permite obtener el valor de una opción europea replicándolo, mediante una cartera formada por las acciones que constituyen el activo subyacente y un bono libre de riesgo (Knop, 2005).

5.1. LA ECUACIÓN DE BLACK-SCHOLES-MERTON

La ecuación resultante del modelo de Black-Scholes permite valorar una opción europea sobre una acción. Los supuestos más importantes de este modelo son los siguientes, véase Kwok (2008):

- El intercambio de activos es continuo en el tiempo.
- El tipo de interés libre de riesgo *r* es conocido y constante durante la vida de la opción.
- La volatilidad σ es constante durante la vida la opción.
- El precio del activo sigue un proceso Browniano geométrico:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ, \quad (5.1)$$

donde μ es la parte determinista y representa el tanto de rendimiento esperado y σ es la volatilidad. Z es el proceso estándar de Wiener.

- No hay costes de transacción por comprar o vender el subyacente o la opción y tampoco hay impuestos.
- El subyacente no paga dividendos durante el periodo de vida de la opción.
- El arbitraje no es posible, es decir, todas las carteras sin riesgo tienen el mismo rendimiento: el tipo de interés libre de riesgo.
- La compra y venta del activo subyacente se puede realizar en cualquier momento y en cualquier cantidad. Es decir, el activo es divisible.
- Pueden tomarse posiciones a corto.

Sea $C(t, S; T)$ el valor de una *call* europea en un instante t, que vence en $T, t \leq T$, sobre una acción cuyo precio es S_t.

Siguiendo a Kwok (2008), construimos una cartera Π que estará formada por la compra de Δ unidades de la acción subyacente S y la venta de una *call* europea $C(t, S; T)$ sobre la acción anterior. El valor de esta cartera, realizando un abuso de notación que mantenemos en esta sección, es:

$$\Pi = \Delta S - C. \tag{5.2}$$

El objetivo perseguido por Black y Scholes (1973) era obtener una cartera con riesgo nulo. Para ello, siguiendo a Kwok (2008), estudiamos la variación de la cartera Π, que es una variable aleatoria:

$$d\Pi = \Delta dS - dC. \tag{5.3}$$

El valor de la opción $C(t, S; T)$ es una función del tiempo y del valor de la acción. Cómo S_t es una variable aleatoria podemos aplicar el Lema de Itô (4.2) para obtener su ecuación diferencial estocástica:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dZ\right). \tag{5.4}$$

La variación estocástica de la cartera se obtiene, entonces, sustituyendo (5.1) y (5.4) en (5.3):

$$d\Pi = \Delta S\mu dt + \Delta S\sigma dZ - \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt - \left(\sigma S\frac{\partial C}{\partial S}dZ\right)dt.$$

Si agrupamos los términos, observamos que la anterior expresión presenta una parte determinista y otra estocástica, representada esta última por el movimiento browniano:

$$d\Pi = \left(\Delta\mu S - \frac{\partial C}{\partial t} - \mu S\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt + \left(\Delta S\sigma - \sigma S\frac{\partial C}{\partial S}\right)dZ. \quad (5.5)$$

Para que esta cartera Π no tenga riesgo, el término que multiplica a dZ tiene que ser cero. Esto se cumple si:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}. \quad (5.6)$$

Por tanto, si sustituimos (5.6) en (5.5), el rendimiento de la cartera Π será:

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt. \quad (5.7)$$

Dado que Π es ahora una cartera sin riesgo su rendimiento debe ser igual al de un bono libre de riesgo, es decir, el tipo de interés libre de riesgo *r.*

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = rdt$$

o bien,

$$d\Pi = \Pi r dt. \quad (5.8)$$

Si igualamos (5.7) y (5.8) obtenemos:

$$-\left(\frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt = \Pi r dt. \quad (5.9)$$

El valor de la cartera viene dado por (5.2), por tanto si sustituimos esta expresión, y la (5.6) en (5.9), resulta:

$$-\left(\frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) = \left(\frac{\partial C}{\partial S}rS - rC\right).$$

Finalmente, agrupando todos los términos a la derecha, obtenemos la conocida ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \qquad (5.10)$$

Para completar la formulación del modelo de valoración de opciones *call* europeas, es necesario añadir una condición final. Esta condición recoge que el valor de una *call* europea en el momento de su vencimiento verifica que:

$$C(t, S;\ T) = máx(S - k, 0), \qquad (5.11)$$

A partir de la ecuación de Black-Scholes (5.10) y la condición final (5.11), observamos que el precio de las opciones no depende del tanto de rendimiento esperado de la acción, μ. Por tanto, las preferencias de riesgo de los inversores no afectan al precio de la opción. Este resultado se conoce como el principio de neutralidad al riesgo y es un argumento fundamental en el modelo de valoración de opciones de Black-Scholes, véase Willmot (2006) y Kwok (2008) entre otros para más información.

5.2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BLACK-SCHOLES

Si deseamos valorar una opción de compra europea $C(t, S; T)$ en *t*, que vence en *T,* sobre una acción *S*, con precio de ejercicio *k*, debemos resolver la ecuación de Black-Scholes (5.10) obtenida en la subsección anterior sujeta a la condición final (5.11). Por tanto, tenemos que resolver un problema compuesto por una ecuación en derivadas parciales sujeta a una condición final. Para ello es necesario, además, añadir las siguientes condiciones frontera adicionales, véase Kwok (2008):

- Cuando el precio de la acción es 0, el de la opción también lo es:

$$S_t = 0 \Rightarrow \quad C(t, 0; T) = 0.$$

- Cuando S es lo suficientemente grande, es casi seguro que la opción se va a ejercer, por tanto su valor será el de la acción menos el valor actual del precio de ejercicio:

$$C(t, S; T) \sim S - ke^{-r(T-t)}, \qquad \text{si } S \to \infty.$$

Con todo ello, el problema a resolver sería el siguiente:

$$C(t,S;T)\begin{cases}\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC=0,\ S\in(0,\infty),t\in[0,T],\\ C(t,S;T)=máx\{S-K,0\},\ S\in(0,\infty)\ ,\\ C(t,0;T)=0,\ t\in[0,T],\\ C(t,S;T)\sim S-ke^{-r(T-t)},\ t\in[0,T],\ S\to\infty.\end{cases}$$

Para resolver este problema, en primer lugar realizamos las transformaciones $y=lnS$ y $\tau=T-t$. Así transformamos la ecuación de Black-Scholes (5.10) en una ecuación en derivadas parciales parabólica con coeficientes constantes:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial C}{\partial y}-rC,\quad \tau>0,-\infty<y<\infty \tag{5.12}$$

Posteriormente, realizando más cambios de variables, véase Kwok (2008), la ecuación (5.12) se transforma en la conocida ecuación del calor; ampliamente estudiada en Física:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Por otro lado, para resolver esta última ecuación es necesario al menos una condición frontera. En nuestro caso, utilizamos la (5.11). Además, tomando esta condición, tenemos garantizado que las otras dos se satisfarán automáticamente, véase Wilmott (2006).

Después de un cálculo tedioso, véase por ejemplo Kwok (2008), obtenemos el valor de una *call* europea:

$$C(t,S;T)=SN(d_1)-ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{5.13}$$

donde,

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t},$$

y $N(d_n)$ es la función de probabilidad de la distribución Normal estándar:

$$N(d_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_n}e^{-\frac{1}{2}s^2ds}.$$

Este resultado se conoce como fórmula de Black-Scholes y permite obtener el valor exacto de una *call* europea sobre una acción que no reparte dividendos, siempre que se conozca la volatilidad σ y el tipo de interés libre de riesgo r.

Si deseamos obtener el valor de una *put* europea homónima, podemos utilizar el valor exacto de la *call* europea obtenida en (5.13) y la paridad *put-call*, comentada en la Subsección 3.1, véase por ejemplo Wilmott (2006).

6. EL MÉTODO DE MONTE CARLO

En la literatura financiera (véase por ejemplo Willmott, 2006; Kwok, 2008; entre otros), nos encontramos que muchos problemas de valoración de derivados financieros se basan en resolver una ecuación en derivadas parciales similar a la de Black-Scholes (5.10) sujeta a una condición final. En la mayoría de los casos, no es posible obtener una solución exacta para este tipo de problemas y por tanto, es necesario aplicar métodos numéricos para obtener una solución aproximada. En la literatura existe una gran variedad de métodos numéricos, pero uno de los más sencillos es el método de Monte Carlo.

El método de Monte Carlo es, básicamente, un procedimiento numérico para estimar el valor esperado de una variable aleatoria. En general, este método consiste en generar variables aleatorias con una densidad de probabilidad determinada y tomar la media de estas como una estimación del valor esperado de dicha variable aleatoria, véase Kwok (2008).

De forma general, la implementación del método de Monte Carlo se basa en los siguientes pasos:

- Se realiza un número *M* de simulaciones aleatorias de las variables del modelo, siguiendo una distribución determinada.
- Se realizan los cálculos deterministas necesarios en cada caso, sobre los resultados de cada simulación.
- Se obtiene el valor esperado de la variable a partir de todas las simulaciones realizadas.

De acuerdo con Bossu y Henrotte (2006), el Teorema Central del Límite indica que para un número infinito de simulaciones el método de Monte Carlo converge a la solución exacta. Por ello, su única desventaja radica en el gran número de simulaciones *M* necesarias para alcanzar un resultado concluyente, ya que el error es del orden de $\frac{1}{\sqrt{M}}$. Este hecho lo hace menos eficiente computacionalmente que otros métodos. Sin embargo, los avances de los últimos años en la velocidad de los microprocesadores lo han convertido en un problema menor.

Además, siguiendo a Wilmott (2006), este método tiene importantes ventajas, como por ejemplo: requiere cálculos muy sencillos, las correlaciones son simples, para lograr más precisión tan solo es necesario realizar más simulaciones, es un método muy maleable y hay mucho *software* disponible para su aplicación.

La versatilidad de este método ha extendido su uso en multitud de campos, como por ejemplo las finanzas, la ingeniería, la meteorología, la inteligencia artificial o la biología computacional.

6.1. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MONTECARLO AL VALOR DE UNA OPCIÓN DE COMPRA EUROPEA

Para poder aplicar el método de Monte Carlo a la valoración de derivados financieros, es necesario poder expresar el precio del derivado que deseamos valorar en forma de una esperanza matemática.

En el caso de las *call* europeas, utilizando un razonamiento de neutralidad al riesgo y el Teorema de Feynman-Kac, véase Tavella (2002), la solución al problema (5.10) - (5.11) se puede expresar como:

$$C(t,S;T) = E_t^Q\left[e^{-r(T-t)}max(S_T - k, 0)\right],$$

donde

$$dS_t = r_t dt + \sigma dZ_t, \tag{6.1}$$

es el proceso estocástico del precio de la acción bajo la medida neutral al riesgo, véase Figlewski (1990), Wilmott (2006) y Kwok (2008).

Este tipo de expresiones son también muy comunes cuando se valoran otros derivados financieros diferentes a las opciones.

Para valorar las *call* europeas no sería necesario aplicar el método de Monte Carlo, ya que la solución exacta del problema (5.10)-(5.11) se conoce, tal y como mostramos en la Subsección 5.2. Sin embargo, nosotros en este trabajo lo aplicamos a la valoración de una *call* europea para ilustrar el comportamiento de este método.

El algoritmo detallado para el cálculo del precio de la *call* europea utilizando el método de Monte Carlo lo resumimos en la Tabla 6.1. y consiste en los siguientes pasos.

Para $i = 1, \ldots, M$
generar $Z_i \rightarrow N(0,1)$
obtener $S_i(t+\Delta t) = S_i(t)\, exp\left(\left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]\Delta_t + \sigma\sqrt{\Delta_t}Z_i\right)$
obtener $C_i = e^{-r(T-t)} max(S_i(T) - k, 0)$
obtener $\hat{C}_M = \frac{C_1 + \cdots + C_M}{M}$

Tabla 6.1. Cálculo del precio de la *call* europea. Fuente*:* Glasserman (2004).

En primer lugar, simulamos un conjunto de números aleatorios con una distribución normal de media 0 y desviación típica 1*.*

A continuación, necesitamos obtener el valor del precio de la acción subyacente en T a partir del precio de la acción en el momento presente.

El modelo de Black-Scholes supone que el precio de la acción subyacente bajo la medida neutral al riesgo sigue el proceso Browniano geométrico en (6.1). La solución de esta ecuación diferencial estocástica, véase Kwok (2008), es:

$$S_{t+\Delta_t} = S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta_t + \sigma Z\sqrt{\Delta_t}}, \qquad (6.2)$$

donde *Z* es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 0 y varianza 1. Por tanto, el logaritmo del precio de la acción sigue una distribución normal y el propio precio de la acción una distribución lognormal. Como la expresión (6.2) es exacta y simple es el mejor algoritmo a utilizar para cada paso en tiempo, hasta obtener el valor de S_T.

En el siguiente paso, sustituimos el valor de S_T, obtenido después de aplicar (6.2) repetidamente para cada paso en tiempo, en la condición final (5.11) y lo actualizamos para obtener el valor de la opción:

$$C_i = e^{-r(T-t)} máx(S_T - k, 0). \tag{6.3}$$

Este proceso se repite un número *M de veces* y finalmente, calculamos el precio estimado de la *call* europea como la media aritmética de los valores de las *call* resultantes de cada una de las simulaciones, *véase* (6.3),

$$C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} C_i.$$

El método de Monte Carlo se puede adaptar para calcular el valor aproximado de un gran número de derivados financieros, y es especialmente importante cuando no se conocen modelos analíticos específicos para dichos derivados.

7. APLICACIÓN PRÁCTICA

Como vimos en la Sección 5, el modelo de Black-Scholes proporciona el valor exacto de una *call* europea. Por otro lado, el método de Monte Carlo, comentado en la Sección 6, proporciona un valor aproximado de dicha *call*. Por tanto, en esta sección valoramos una *call* europea empleando ambos métodos y comparamos el error cometido cuando se usa el método de Monte Carlo para obtener un valor aproximado. Para ello empleamos el software matemático MATLAB.

Para obtener la solución exacta con el modelo de Black-Scholes, utilizamos una función predeterminada que contiene MATLAB y que se denomina *blsprice*, véase The Mathworks Inc. (2006) para más detalle.

Por otro lado, para obtener una solución aproximada con el método de Monte Carlo, empleamos la función *optionvanilla* propuesta por un usuario del programa, Reyes-Kattar (2010). Para obtener ambos precios suponemos que el precio es $S = 150$, el precio de ejercicio $k = 155$€, duración en años $T = 3$ y volatilidad $\sigma = 0.2$, siendo el tipo libre de riesgo $r = 5\%$. Es decir, valoramos una opción *out of the money*.

Empleando el modelo de Black-Scholes obtenemos que el valor de esta opción es $C = 28.8733$€

Por otro lado, en la *Tabla 7.1*. mostramos los resultados empleando el método de Monte Carlo con distinto número de simulaciones y pasos en tiempo. Más concretamente suponemos un paso diario $\Delta_t = \frac{1}{250}$, dos pasos al día $\Delta_t = \frac{1}{500}$, cuatro pasos al día $\Delta_t = \frac{1}{1000}$ y diez pasos al día $\Delta_t = \frac{1}{2500}$. En esta tabla observamos que, en general, cuando aumentamos el número de pasos en tiempo y fundamentalmente el número de simulaciones, obtenemos valores de la opción más próximos al valor exacto $C = 28.8733$€

	Simulaciones							
Pasos en 1 año	500	1000	2500	5000	7500	10000	12500	15000
250	29,7099	29,9803	28,7347	27,6358	28,0774	28,1807	28,2949	28,6351
500	31,4257	28,8369	27,2943	27,8697	28,7861	28,8283	28,9109	28,8056
1000	28,6164	27,4117	27,9683	28,9009	28,8095	29,1333	29,2008	29,1266
2500	26,3053	28,1300	29,3820	29,4718	29,1407	28,8444	28,8627	28,7520

Tabla 7.1. Valor de una opción *call* europea empleando el método de Monte Carlo. Fuente: elaboración propia.

Asimismo, en la *Tabla 7.2.* y la *Tabla 7.3.* mostramos el error en valor absoluto y el error en términos relativos, respectivamente, que presenta el precio obtenido con el método de Monte Carlo frente al obtenido con el modelo de Black-Scholes:

$$E_{abs} = |P_{BS} - P_M|,$$

$$E_{rel} = \left|\frac{P_{BS} - P_M}{P_{BS}}\right|,$$

donde P_{BS} es el precio obtenido con el modelo de Black-Scholes y P_M es el precio obtenido con el método de Monte Carlo. Ambas tablas incluyen la media de error de los resultados agrupados por número de simulaciones en la última fila.

En las tablas *7.2.* y *7.3.*, observamos que, para reducir el error, es más efectivo aumentar el número de simulaciones que aumentar el número de pasos en tiempo.

	Simulaciones							
Pasos en 1 año	500	1000	2500	5000	7500	10000	12500	15000
250	0,8366	1,1070	0,1386	1,2375	0,7959	0,6926	0,5784	0,2382
500	2,5524	0,0364	1,5790	1,0036	0,0872	0,0450	0,0376	0,0677
1000	0,2569	1,4616	0,9050	0,0276	0,0638	0,2600	0,3275	0,2533
2500	2,5680	0,7433	0,5087	0,5985	0,2674	0,0289	0,0106	0,1213
Media	1,5535	0,8371	0,7828	0,7168	0,3036	0,2566	0,2385	0,1701

Tabla 7.2. Error en valor absoluto empleando el método de Monte Carlo. Fuente: elaboración propia.

	Simulaciones							
Pasos en 1 año	500	1000	2500	5000	7500	10000	12500	15000
250	0,0290	0,0383	0,0048	0,0429	0,0276	0,0240	0,0200	0,0082
500	0,0884	0,0013	0,0547	0,0348	0,0030	0,0016	0,0013	0,0023
1000	0,0089	0,0506	0,0313	0,0010	0,0022	0,0090	0,0113	0,0088
2500	0,0889	0,0257	0,0176	0,0207	0,0093	0,0010	0,0004	0,0042
Media	0,0538	0,0290	0,0271	0,0248	0,0105	0,0089	0,0083	0,0059

Tabla 7.3. Error en términos relativos empleando el método de Monte Carlo (%). Fuente: elaboración propia.

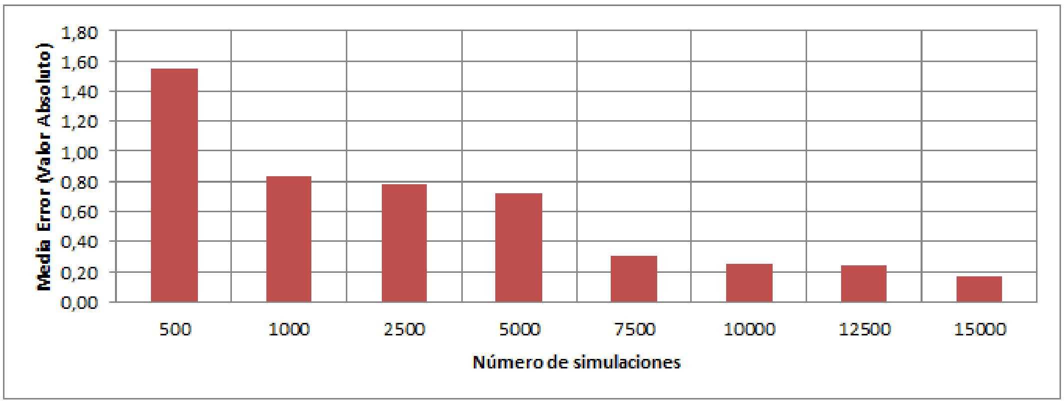

Figura 7.1. Media de los errores en valor absoluto aplicando el método de Monte Carlo. Fuente: elaboración propia.

La *Figura 7.1.* muestra el error en valor absoluto medio obtenido empleando el método de Monte Carlo en función del número de simulaciones realizadas y la *Figura 7.2.*, de forma similar, muestra el error relativo según el número de simulaciones realizadas. Estas figuras muestran claramente la reducción progresiva del error al aumentar el número de simulaciones que se observaba en las tablas *7.2* y *7.3*. Así por ejemplo, al utilizar 15000 simulaciones el error es de 0,1701 o porcentualmente del 0,59%.

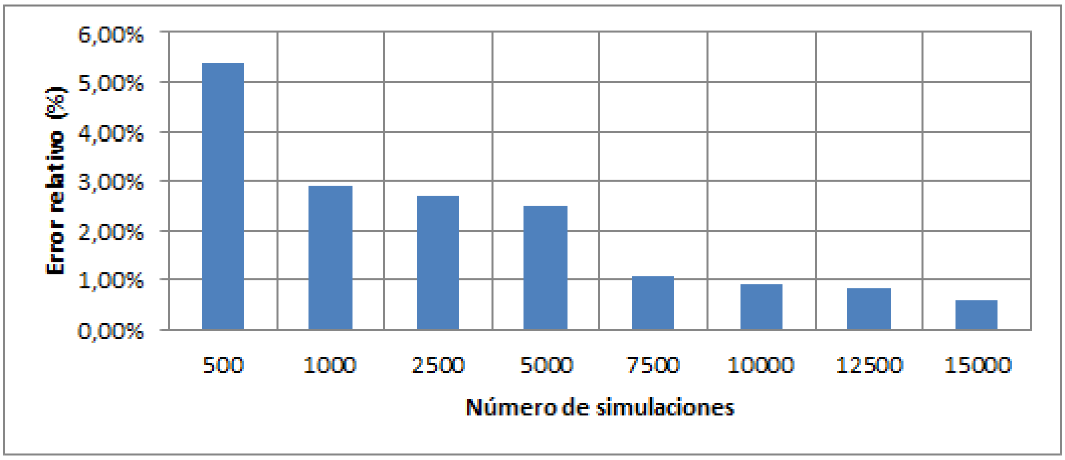

Figura 7.2. Media de los errores en términos relativos aplicando el método de Monte Carlo. Fuente: elaboración propia.

Por todo ello se puede afirmar que la precisión del método de Monte Carlo es muy elevada a pesar de emplear cálculos muy sencillos siempre y cuando se realicen un gran número de simulaciones.

En esta aplicación hemos mostrado el comportamiento del método de Monte Carlo para valorar una opción *out of the money*. Sin embargo, este mismo análisis los hemos realizado también para una opción *in the money* y *at the money* y las conclusiones que se obtienen son análogas.

8. CONCLUSIONES

La idea subyacente tras el concepto de derivado financiero ha existido durante mucho tiempo. Sin embargo, ha sido desde el siglo pasado cuando estos productos financieros han adquirido la importancia que poseen actualmente. Año tras año, su volumen de mercado y sus tipos han aumentado. De esta forma, el inversor posee un amplio margen de activos entre los que elegir, dependiendo de sus necesidades y preferencias.

Entre los derivados más conocidos destacan los futuros, las opciones y los swaps, los cuales describimos detalladamente en este trabajo, así como las posibles estrategias de inversión que se pueden llevar a cabo con ellos. Dentro de las opciones, destacamos las de tipo europeo, las cuales constituyen uno de los derivados más estudiados y empleados y que son la base para la valoración de derivados más complejos. Por ello, en este trabajo detallamos su valoración exacta mediante el modelo de Black-Scholes.

La valoración de derivados financieros implica el uso de complejos modelos matemáticos, que a menudo dan lugar a problemas cuya solución no se conoce. Por ello, es común utilizar métodos numéricos para obtener un resultado aproximado, como por ejemplo el método de Monte Carlo. Este método es ampliamente utilizado tanto en la literatura como por los participantes en los mercados, fundamentalmente por su sencillez, véase por ejemplo Wilmott, 2006.

Por tanto, en este trabajo ilustramos el comportamiento de este método numérico para valorar opciones call europeas. Cómo hemos mostrado a lo largo de este trabajo, el valor exacto de estas opciones es conocido a través del modelo de Black-Scholes, por tanto podemos comparar su valor exacto con el obtenido con el método de Monte Carlo para evaluar la precisión de este último. De esta forma, observamos que el Método de Monte Carlo nos permite obtener valores bastante precisos siempre que consideremos un elevado número de pasos en tiempo y, especialmente, un número importante de simulaciones. Este hecho hace que el uso del método de Monte Carlo sea costoso computacionalmente, pero el desarrollo actual de los microprocesadores hace que este hecho no suponga ningún problema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Black, F. y Scholes, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporative Liabilities". *The Journal of Political Economy,* Vol. 81, Nº3, pp. 637 - 654.
- Bossu, S. y Henrotte, P. (2006): *Finance and Derivatives: Theory and Practice.* John Wiley & Sons, Chichester.
- Duana Ávila, D. y Millán Díaz, C. G. (2008): "*Modelo Black-Scholes-Merton, para la toma de decisiones financieras"*, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- Elvira, O. y Puig, X. (2015): *Comprender los productos derivados. Futuros, opciones, productos estructurados, CAPs, Floors, Collars, CFDs...* Profit, Barcelona.
- Figlewski, S. (1990): "Theorical Valuation Models", en *Financial Options. From Theory To Practice,* McGraw-Hill, New York.
- Glasserman, P. (2004): *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer Science, New York.
- Hull, J. (2002): *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones.* Pearson Eduación, Madrid.
- Hunt, P. y Kennedy, J. (2004): *Financial Derivatives in Theory and Practice.* Jonh Wiley & Sons, New York.
- Knop, R. (2005): *Manual de Instrumentos Derivados: Tres décadas de Black-Scholes.* Ediciones Empresa Global, Madrid.
- Kostolany, A. (2011): *El fabuloso mundo del dinero y de la bolsa.* Gargola, Vilagarcía de Arousa, Pontevedra.
- Kwok, Y. (2008): *Mathematical Models of Financial Derivatives.* Springer Berlin Heidelberg, Berlin.

- Makropoulou, V. y Markellos, R. N. (2005): *What is the fair rent Thales should have paid?*, Department of Management Science and Technology, Athens University of Economics and Business.

- Merton, R. (1973): "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, Nº1, pp. 141 - 183.

- Reyes-Kattar, M. (2010). *Mathworks.* Recuperado el 7 de Julio de 2016, de http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/14508-pricing-derivatives-securities-using-matlab/content/optionvanilla.m

- Scheaede, U. (1989): "Forwards and futures in tokugawa-period Japan: A new perspective on the Dōjima rice market", *Journal of Banking & Finance,* Vol. 13, Nº4-5, pp. 487 - 513.

- Tavella, D. A. (2002): *Quantitative Methods in Derivative Pricing. An Introduction to Computational Finance.* Wiley Finance, New Jersey.

- The Mathworks, Inc. (2006). *Black-Scholes put and call option pricing*. Recuperado el 13 de Junio de 2016, de http://es.mathworks.com/help/finance/blsprice.html

- Thompson, E. (2007): "The tulipmania: Fact or antifact?", *Public Choice,* pp. 99 - 114.

- United States Government Publishing Office. (2011): *Final Report of the National Commission on the Causes of the Financial and Economic Crisis in the United States.* Recuperado el 25 de Junio de 2016, de https://www.gpo.gov/fdsys/pkg/GPO-FCIC/pdf/GPO-FCIC.pdf

- Wilmott, P. (2006): *Paul Wilmott on Quantitative Finance.* John Wiley & Sons, Chichester.