



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Matemáticas

**Homología Simplicial**

*Autor: Miguel Núñez Polo*

*Tutor: Jesús M. Domínguez Gómez*



# Índice general

<b>Introducción.</b>	<b>5</b>
<b>1. CONCEPTOS PREVIOS</b>	<b>7</b>
1.1. Símplices y complejos simpliciales . . . . .	7
1.2. Subdivisión baricéntrica . . . . .	10
1.3. Topología del poliedro $ K $ . . . . .	12
1.4. Aproximaciones simpliciales . . . . .	12
<b>2. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL</b>	<b>15</b>
2.1. Conceptos básicos de Álgebra Homológica . . . . .	15
2.2. Homología Simplicial Orientada . . . . .	24
2.3. Homología del Complejo Cono . . . . .	32
2.4. Homología Relativa y Sucesión de Mayer-Vietoris . . . . .	35
2.5. Relación entre $H_1(K)$ y $\pi_1( K , a)$ . . . . .	39
<b>3. COMPUTABILIDAD</b>	<b>47</b>
3.1. Grupos Abelianos y Teorema de Estructura . . . . .	47
3.2. Computabilidad de los Grupos de Homología . . . . .	54



# INTRODUCCIÓN.

En este trabajo vamos a desarrollar una introducción a la Teoría de la Homología Simplicial. Siendo más específicos, nos limitaremos a la homología simplicial orientada con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  para, de esa forma, no salirnos del marco de los grupos abelianos.

La motivación para esta memoria ha sido ampliar la materia expuesta en la asignatura “Topología Algebraica” del Grado en Matemáticas. En ella se introdujeron conceptos tales como complejo simplicial, poliedro, aproximación simplicial de aplicaciones continuas, grupo fundamental, etc. La Homología Simplicial es una materia muy extensa con un gran contenido geométrico. Tomando lo anterior como punto de partida, hemos desarrollado detalladamente algunas de sus ideas básicas.

Esta memoria consta de tres capítulos. En el primero hacemos un breve repaso (sin incluir demostraciones) de una parte de la materia vista en la asignatura antes mencionada. Comenzamos con los objetos más sencillos, simples y complejos simpliciales, y lo desarrollamos hasta llegar a los conceptos de subdivisión baricéntrica, poliedro y aproximación simplicial. Nos centramos brevemente en el concepto de poliedro, dando algunos sencillos resultados sobre su topología en  $\mathbb{R}^n$ . Por último, enunciamos el teorema de aproximación simplicial y damos también su versión clásica, expresada en términos de la subdivisión baricéntrica. Los libros que hemos tomado como referencia principal para este capítulo son *Algebraic Topology* de C.R.F. Maunder [Maun] y *Elements of Algebraic Topology* de J.R. Munkres [Munk].

El segundo capítulo, el más extenso del trabajo, gira en torno al concepto de grupo de homología. Incluimos en primer lugar unas nociones elementales

de Álgebra Homológica (limitándonos siempre a trabajar con grupos abelianos) para definir los grupos de homología de los complejos de cadenas, tanto en su versión ordinaria como en la versión reducida. A continuación llevamos este concepto a los complejos simpliciales, es decir, construimos el complejo  $\mathcal{C} = \{C_q(K), \partial_q\}$  de las cadenas simpliciales orientadas y definimos los grupos de homología simplicial orientada  $H_q(K)$ . Tras ver que las aplicaciones simpliciales inducen homomorfismos entre los correspondientes grupos de homología, analizamos la relación entre el grupo de homología cero-dimensional  $H_0(K)$  y el número de componentes simpliciales (o componentes conexas) del poliedro  $|K|$ . A continuación calculamos la homología del complejo simplicial cono y estudiamos el complejo de cadenas relativas (que da lugar a la sucesión exacta larga de homología). Terminamos este capítulo estudiando la relación entre el primer grupo de homología de un complejo simplicial y el grupo fundamental del poliedro subyacente. Para este capítulo, los libros principales que hemos tomado como referencia son *Elementos de la Teoría de Homología Clásica* de R. Ayala, E. Domínguez y A. Quintero [ADQ], *Elements of Algebraic Topology* de J.R. Munkres [Munk] y, para la última sección, *Algebraic Topology, A First Course* de M.J. Greenberg y J.R. Harper [GH].

En el tercer y último capítulo de la memoria tratamos la Teoría de Grupos Abelianos Finitamente Generados, empezando con las definiciones más básicas y llegando hasta la prueba del Teorema de Estructura. A continuación, y para terminar, estudiamos la computabilidad de los grupos de homología simplicial orientada. Cabe destacar que, aunque existen teorías de homología más generales que la simplicial, esta ha cobrado nuevo vigor, precisamente por su computabilidad (o posibilidad de cálculos efectivos). Los dos libros principales que hemos usado como referencia en este capítulo han sido *Introducción al Álgebra Volumen 1* de S. Xambó, F. Delgado y C. Fuertes [XDF] y *Elements of Algebraic Topology* de J.R. Munkres [Munk].

# 1 | CONCEPTOS PREVIOS

En este breve primer capítulo repasaremos algunos conceptos (definiciones, proposiciones, teoremas...) vistos en la asignatura Topología Algebraica del Grado de Matemáticas. Son conceptos relacionados con símlices y poliedros. Introduciremos también algunos nuevos términos que nos serán útiles en los capítulos posteriores.

Se omitirán las demostraciones de los resultados de este tema, puesto que es materia ya vista durante el curso. Los libros de referencia para este capítulo han sido, “Elementos de la Teoría de Homología Clásica” de R. Ayala, E. Domínguez y A. Quintero [ADR] y “Algebraic Topology” de C.R.F. Maunder [Maun].

## 1.1 Símlices y complejos simpliciales

La homología simplicial se define para un tipo determinado de espacios topológicos, los llamados poliedros. Un poliedro se puede entender como un espacio construido a base de puntos, segmentos, triángulos y sus análogos en dimensiones mayores “pegados” correctamente. En esta primera sección definiremos de forma precisa estos conceptos.

Recordemos en primer lugar la definición de puntos afínmente independientes. Se dice que los puntos  $a_0, \dots, a_q$  de  $\mathbb{R}^n$  son *afínmente independientes* si los vectores  $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_q - a_0$  son linealmente independientes.

En  $\mathbb{R}^n$  consideraremos siempre la distancia usual, es decir, la inducida por la norma euclídea.

**| Definición 1.1.** *Dados  $q+1$  puntos afínmente independientes  $a_0, \dots, a_q$  en  $\mathbb{R}^n$ , llamaremos  $q$ -símplice o, equivalentemente, símplice de dimensión  $q$  al conjunto convexo:*

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^q \lambda_i a_i \text{ con } \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i\}$$

Se comprueba sin dificultad que el símplice  $\sigma$  es la envolvente conexas de los puntos  $a_0, \dots, a_q$ , es decir, el menor subconjunto conexo de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a los vértices  $a_0, \dots, a_q$ . Los coeficientes  $\lambda_i$  son las coordenadas baricéntricas de  $x$  con respecto a los puntos  $a_0, \dots, a_q$ . Llamaremos interior geométrico de  $\sigma$  a  $\text{int}^g \sigma = \{x \in \sigma : \lambda_i > 0, \text{ para todo } i\}$ . A los puntos  $a_0, \dots, a_q$  los denominaremos vértices de  $\sigma$  y escribiremos  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_q \rangle$ .

Siguiendo esta definición, un 0-símplice será un conjunto unipuntual, un 1-símplice será un segmento, un 2-símplice será un triángulo, etc. Para simplificar, no estableceremos diferencias entre el 0-símplice  $\langle a_0 \rangle$  y el punto  $a_0$ .

Dos  $n$ -símplices  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_q \rangle$  y  $\tau = \langle b_0, \dots, b_q \rangle$  son siempre afínmente isomorfos, es decir, existe siempre una función  $f : \sigma \rightarrow \tau$  biyectiva tal que

$$f\left(\sum_{i=0}^q \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=0}^q \lambda_i b_i \text{ si } \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i.$$

Si  $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  es un  $q$ -símplice, su interior geométrico no coincide con el interior topológico si  $q \neq n$ , pues este último es vacío.

**Definición 1.2.** Sean  $\sigma$  y  $\tau$  dos símplices en  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que  $\tau$  es una cara de  $\sigma$ , y lo denotaremos por  $\tau \leq \sigma$ , si los vértices de  $\tau$  son vértices a su vez de  $\sigma$ . Si  $\tau \neq \sigma$  y  $\tau \leq \sigma$  diremos que  $\tau$  es una cara propia de  $\sigma$  y lo escribiremos  $\tau < \sigma$ . Si  $\tau \leq \sigma$ , diremos que  $\text{int}^g \tau$  es una cara abierta de  $\sigma$ . A la unión de las caras propias de un  $q$ -símplice  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_q \rangle$  la llamaremos frontera geométrica de  $\sigma$  y la denotaremos por  $\text{Fr}^g \sigma$ . Observemos entonces

que  $\text{Fr}^g \sigma = \left\{ \sum_{i=0}^q \lambda_i a_i : \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i \text{ y } \lambda_j = 0 \text{ para algún } j \right\}$  y, por tanto,  $\text{int}^g \sigma = \sigma - \text{Fr}^g \sigma$ .

Cada símplice  $\sigma$  es la unión disjunta de todas sus caras abiertas.

Dos caras de  $\sigma$ , o son disjuntas, o su intersección es una cara común.

Cada símplice  $\sigma$  determina sus vértices, ya que estos son los únicos puntos de  $\sigma$  que no están en ningún segmento abierto determinado por dos puntos distintos de  $\sigma$ .

**Definición 1.3.** Llamaremos complejo simplicial a una colección finita  $K$  de símplices de  $\mathbb{R}^n$  verificando:

1. Si  $\sigma_1$  y  $\sigma_2 \in K$  entonces  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$  o  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  es una cara común de



$\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

2. Si  $\sigma \in K$  y  $\tau \leq \sigma$ , entonces  $\tau \in K$ .

Un subcomplejo  $L \subseteq K$  es un subconjunto de  $K$  que, a su vez, sea un complejo simplicial. Así pues, un subconjunto  $L$  de  $K$  es un subcomplejo de  $K$  si, y solo si, toda cara de un símplice de  $L$  está también en  $L$ . La dimensión de  $K$  es la mayor dimensión de sus símplices. Se llama  $n$ -esqueleto de  $K$  y se denota por  $K^n$  al subcomplejo:

$$K^n = \{\sigma \in K: \dim(\sigma) \leq n\}$$

Diremos que  $K^0$  es el conjunto de vértices de  $K$  y a los 1-símplices los llamaremos aristas de  $K$ . Denominaremos poliedro subyacente a  $K$  al conjunto formado por los puntos de todos los símplices de  $K$ , y lo denotaremos por  $|K|$ , es decir,

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subseteq \mathbb{R}^n$$

Todo símplice  $\sigma$  determina un complejo simplicial al considerar el propio  $\sigma$  y todas sus caras. En lo que sigue, si  $\sigma$  es un símplice, al complejo simplicial determinado por él mismo lo denotaremos  $K_\sigma$ .

El subcomplejo formado por las caras propias de  $\sigma$  es la *frontera simplicial* de  $\sigma$  y se denota por  $\dot{\sigma}$ . Obsérvese que  $|\dot{\sigma}| = Fr^s \sigma$ .

**Observación 1.1.** Cuando en la definición no se exige que un complejo simplicial  $K$  tenga un número finito de símplices, la topología inducida por  $\mathbb{R}^n$  sobre  $|K|$  puede no coincidir con la topología final para las inclusiones  $\sigma \rightarrow |K|$ ,  $\sigma \in K$ . En esta situación, es preferible dotar a  $|K|$  de esta última topología, aunque  $|K|$  deje de ser un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $x \in |K|$ . Entonces  $x$  está en el interior de un único símplice de  $K$ . Así pues, si  $\sigma, \tau \in K$  con  $\tau \cap \text{int}^s \sigma \neq \emptyset$ , entonces  $\sigma \leq \tau$ .

Vamos ahora a definir una serie de conceptos que surgen al estudiar las aplicaciones con salida y llegada en las estructuras que acabamos de definir, símplices y complejos simpliciales.

**| Definición 1.4.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales. Una aplicación  $f: |K| \rightarrow |L|$  es aplicación simplicial si cumple que:

1.  $f(K^0) \subseteq L^0$ .

2.  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_q \rangle \in K$  implica que  $f(a_0), \dots, f(a_q)$  son vértices de un mismo símplex de  $L$ .
3.  $f|_\sigma$  es una aplicación afín, para todo  $\sigma \in K$ .

Es claro que la composición de aplicaciones simpliciales vuelve a ser una aplicación simplicial y que toda aplicación simplicial es continua.

**Definición 1.5.** Decimos que una aplicación simplicial  $f : |K| \rightarrow |L|$  es un isomorfismo simplicial si existe una aplicación simplicial  $g : |L| \rightarrow |K|$  tal que  $g \circ f = id_{|K|}$  y  $f \circ g = id_{|L|}$ .

Sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación simplicial. Se cumple que  $f$  es isomorfismo simplicial si, y solo si, es homeomorfismo, y además  $f : |K| \rightarrow |L|$  es isomorfismo simplicial si, y solo si, es biyectiva.

Volveremos a tratar con estas nociones de aplicaciones simpliciales e isomorfismos simpliciales próximamente en este capítulo y durante todo el trabajo.

## 1.2 Subdivisión baricéntrica

El avance de la Topología Algebraica llevó a considerar los poliedros en sí mismos como espacios topológicos. Para probar que ciertas propiedades eran verdaderamente topológicas y, por lo tanto, independientes de la estructura simplicial del poliedro, cobró fuerza el concepto de subdivisión y, más concretamente, el de subdivisión baricéntrica. Esta fue introducida por H. Poincaré, que fue la figura clave en los comienzos de la Topología Algebraica.

**Definición 1.6.** Sean  $K$  y  $K'$  dos complejos simpliciales. Diremos que  $K'$  es una subdivisión de  $K$  si se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $|K| = |K'|$
2. Si  $\sigma' \in K'$  entonces existe un  $\sigma \in K$  tal que  $\sigma' \subseteq \sigma$ .

La segunda condición de la definición anterior se puede sustituir por:

- 2'. Todo símplex de  $K$  es unión de símplexes de  $K'$ . En particular los vértices de  $K$  son vértices de  $K'$ .

Como hemos dicho en la introducción de la sección, nos interesa un tipo particular de subdivisión, la llamada subdivisión baricéntrica.

**| Definición 1.7.** Dado un  $q$ -símplice  $\sigma = \langle a_0, \dots, a_q \rangle$ , llamamos baricentro de  $\sigma$  al punto  $b(\sigma) = \sum_{i=0}^q \frac{1}{q+1} a_i$ .

*Observación 1.2.* Dado un complejo simplicial  $K$  y los símlices  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_q \in K$  se puede comprobar fácilmente que los puntos  $b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_q)$  son afinmente independientes y determinan un símlice contenido en  $\sigma_q$ .

**| Definición 1.8.** La subdivisión baricéntrica de  $K$ , a la que denotaremos  $sdK$ , es el complejo simplicial formado por los símlices de la forma

$$\langle b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_q) \rangle,$$

donde  $\sigma_0, \dots, \sigma_q$  son símlices de  $K$  verificando que  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_q$ . Así pues, los vértices de  $sdK$  son los baricentros de los símlices de  $K$ .

Definimos las subdivisiones baricéntricas reiteradas mediante:

$$sd^n K = sd(sd^{n-1} K), \quad n \geq 1$$

**| Definición 1.9.** Recordemos que el diámetro de un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  es el extremo superior de las distancias entre dos puntos cualesquiera del mismo.

Se verifica que el diámetro de un símlice  $\sigma = \langle a_0 \dots a_q \rangle$ , al que denotaremos por  $\delta(\sigma)$ , coincide con la máxima longitud de sus aristas, es decir,

$$\delta(\sigma) = \max\{\|a_i - a_j\| : 0 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

Las coordenadas baricéntricas son funciones continuas. Por lo tanto, los símlices son compactos por ser cerrados y acotados. Los poliedros, al ser unión finita de símlices, son también compactos.

**| Definición 1.10.** Denominaremos medida de un complejo simplicial  $K$ , y lo denotaremos  $m(K)$ , al número  $m(K) = \max\{\delta(\sigma) : \sigma \in K\}$ .

Si  $K$  es un complejo simplicial de dimensión  $N$ , se verifica que  $m(sdK) \leq \frac{N}{N+1} m(K)$  y, por tanto,  $m(sd^n K) \leq \left(\frac{N}{N+1}\right)^n m(K)$ .

Al ser  $m(K)$  una cantidad positiva fija y  $\frac{N}{N+1} < 1$ , de lo anterior se deduce que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(sd^n K) = 0$$

### 1.3 Topología del poliedro $|K|$

Nuestro propósito en esta sección es ver que la topología de un poliedro  $|K|$  queda determinada por la de los símplexes de  $K$ . Sobre el poliedro subyacente  $|K|$  a un complejo simplicial  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  consideraremos la topología inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ .

Dado un complejo simplicial  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  se verifica:

1.  $A$  es abierto (cerrado) de  $|K|$  si, y solo si,  $A \cap \sigma$  es abierto (cerrado) en  $\sigma$  para todo  $\sigma \in K$ .
2.  $f : |K| \rightarrow Y$  es continua si, y solo si, la restricción  $f|_{\sigma}$  a cada símplex  $\sigma \in K$  es continua.

Obsérvese también que si  $L$  es un subcomplejo de  $K$ , entonces  $|L|$  es compacto y, en consecuencia, cerrado en  $|K|$ .

**Definición 1.11.** Diremos que un espacio topológico  $X$  es triangulable si existe un poliedro  $|K|$  y un homeomorfismo  $h : |K| \rightarrow X$ . Al par  $(K, h)$  lo denominaremos triangulación o estructura simplicial de  $X$ .

### 1.4 Aproximaciones simpliciales

En esta sección nos dedicamos a definir la noción de aproximación simplicial y exponer los resultados principales relacionados con este tema. La noción de aproximación simplicial fue introducida por el matemático L.E.J. Brouwer, a quien también debemos la primera prueba del teorema de aproximación simplicial que enunciaremos más adelante.

**Definición 1.12.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $a$  un vértice de  $K$ . La estrella de  $a$  con respecto a  $K$ ,  $st(a, K)$ , es la unión de los interiores geométricos de los símplexes de  $K$  de los que  $a$  es un vértice.

**Definición 1.13.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales y  $f : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua. Una aproximación simplicial de  $f$  es una aplicación

simplicial  $g : |K| \longrightarrow |L|$  tal que  $f(st(a, K)) \subseteq st(g(a), L)$  para cada vértice  $a$  de  $K$ .

Si  $f : |K| \longrightarrow |L|$  es una aplicación simplicial, entonces la propia  $f$  es la única aproximación simplicial de sí misma.

Se cumple que si  $f : |K| \longrightarrow |L|$  es una aplicación continua tal que, para cada vértice  $a$  de  $K$ , existe un vértice  $b$  de  $L$  con  $f(st(a, K)) \subseteq st(b, L)$ , entonces  $f$  admite una aproximación simplicial  $g$  tal que  $g(a) = b$  para cada vértice  $a$  de  $K$ .

Además, si tenemos que  $f : |K| \longrightarrow |L|$  es continua y  $g$  es una aproximación simplicial suya, entonces, para cada  $x \in K$  existe un símlice  $\tau \in L$  tal que  $f(x) \in \text{int}^g \tau$  y  $g(x) \in \tau$ .

**Teorema 1.1.** (*Teorema de Aproximación Simplicial*) Sea  $f : |K| \longrightarrow |L|$  una aplicación continua y sea  $(K_r)_{r \in \mathbb{N}}$  una sucesión de complejos simpliciales verificando:

1.  $|K_r| = |K|$  para todo  $r$ .
2.  $K^0 \subseteq (K_r)^0$  para todo  $r$ .
3.  $m(K_r) \longrightarrow 0$  cuando  $r \longrightarrow \infty$ .

Entonces existe un  $r$  tal que  $f : |K_r| \longrightarrow |L|$  admite una aproximación simplicial  $g$ . Si suponemos además que  $a_0, \dots, a_q$  son vértices de  $K$  tales que  $f(a_0), \dots, f(a_q)$  son vértices de  $L$ , entonces  $r$  y  $g$  pueden elegirse de forma que  $g(a_i) = f(a_i)$  para todo  $i$ .

Teniendo en cuenta lo que nos dice el teorema, se tiene que si  $f : |K| \longrightarrow |L|$  es una aplicación continua, entonces existe un  $r$  tal que  $f : |sd^r K| \longrightarrow |L|$  admite una aproximación simplicial.



## 2 | HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

En este capítulo vamos a definir el concepto fundamental de este trabajo, el Grupo de Homología Simplicial Orientada. Primero vamos a dar unas nociones elementales de Álgebra Homológica que nos facilitarán la comprensión de las siguientes secciones. A continuación nos centraremos en los grupos de homología, empezando con resultados básicos y llegando hasta la Homología Relativa. Por último, veremos la relación existente entre el grupo fundamental de un poliedro y el primer grupo de homología de su complejo simplicial asociado.

Los libros de referencia para este capítulo han sido, “Elementos de la Teoría de Homología Clásica” de R. Ayala, E. Domínguez y A. Quintero [ADR], “Elements of Algebraic Topology” de J.R. Munkres [Munk] y “Algebraic Topology, A First Course” de M.J. Greenberg y J.R. Harper [GH].

### 2.1 Conceptos básicos de Álgebra Homológica

En esta primera sección del segundo capítulo, vamos a introducir los conceptos de Álgebra Homológica necesarios para entender y desarrollar la teoría de Homología Simplicial. Comenzaremos definiendo lo que es una sucesión exacta y llegaremos hasta la definición de homotopía de complejos, pasando por las definiciones de complejos de cadenas y homología, tratando algunos de los resultados más importantes relacionados con cada uno de los nuevos conceptos. Nos limitaremos a trabajar con grupos abelianos.

**| Definición 2.1.** *Una sucesión exacta es un diagrama de grupos abelianos y homomorfismos de grupos de la forma:*

$$\dots \longrightarrow G_{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} G_q \xrightarrow{f_q} G_{q+1} \longrightarrow \dots$$

donde  $\text{Im}(f_{q-1}) = \text{Ker}(f_q)$  para todo  $q$ .

**Lema 2.1.** *Se verifica:*

1.  $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2$  es exacta si, y solo si,  $f$  es inyectivo.
2.  $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \longrightarrow 0$  es exacta si, y solo si,  $f$  es sobreyectivo.
3.  $0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \longrightarrow 0$  es exacta si, y solo si,  $f$  es inyectivo,  $g$  es sobreyectivo e  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ , en cuyo caso,  $g$  induce un isomorfismo entre el  $\text{Coker}(f)$  y  $G_3$ .

**Demostración.** 1.  $\Rightarrow$ ) Supongamos que la sucesión es exacta y llamemos  $nul$  a la aplicación que va de 0 a  $G_1$ . Se tiene que  $\text{Im}(nul) = \text{Ker}(f)$ , pero, al ser  $nul$  una aplicación que sale de 0, su imagen se restringe al 0, luego  $\text{Ker}(f) = 0$ , por lo que  $f$  es inyectiva.

$\Leftarrow$ ) Supongamos ahora que  $f$  es inyectiva, es decir,  $\text{Ker}(f) = 0$ . Como  $nul$  es una aplicación que sale de 0, su imagen se restringe al 0. Se concluye que  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(nul)$ , por lo que la sucesión es exacta.

2.  $\Rightarrow$ ) Razonemos por reducción al absurdo. Llamemos también  $nul$  a la aplicación que sale de  $G_2$  y llega a 0. Supongamos que  $f$  no es sobreyectiva, es decir, existe  $a \in G_2 \setminus \text{Im}(f)$ . Se tiene que  $nul(a) = 0$ . Por lo que  $a \in \text{Ker}(nul) \setminus \text{Im}(f)$ . Absurdo pues la sucesión es exacta.

$\Leftarrow$ ) Supongamos ahora que  $f$  es sobreyectiva. Se tiene pues que  $\text{Im}(f) = G_2$ . Ahora bien, como  $nul$  llega a 0, para todo  $a \in G_2$ ,  $nul(a) = 0$ , por lo que  $\text{Ker}(nul) = G_2$  y tenemos que  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(nul)$ , así que la sucesión es exacta.

3. Es consecuencia directa del Primer Teorema de Isomorfía. ■

**Definición 2.2.** *A una sucesión exacta del tipo 3 del lema anterior la denominaremos sucesión exacta corta.*

**Definición 2.3.** *Diremos que una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \longrightarrow 0$$

*es escindible cuando exista un homomorfismo  $\rho : G_3 \longrightarrow G_2$  tal que  $g \circ \rho = id$ . Claramente  $\rho$  tiene que ser inyectivo.*

**Proposición 2.1.** *Toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \longrightarrow 0,$$



donde  $G_3$  es libre, es escindible.

*Demostración.* Sea  $\{e_i\}_{i \in I}$  una base de  $G_3$ . Al ser  $g$  sobreyectiva, existen elementos  $x_i \in G_2$  tales que  $g(x_i) = e_i$ . Solamente hay que definir el homomorfismo  $\rho : G_3 \rightarrow G_2$  de manera que  $\rho\left(\sum_{i \in I} a_i e_i\right) = \sum_{i \in I} a_i x_i$ , y se tiene que  $g \circ \rho = id$ . ■

**Proposición 2.2.** Sea  $0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \rightarrow 0$  una sucesión exacta corta. Son equivalentes:

1. La sucesión es escindible.
2.  $G_2 = f_1(G_1) \oplus G$  para cierto subgrupo  $G \subseteq G_2$  isomorfo a  $G_3$ . En particular,  $G_2 \cong G_1 \oplus G_3$ .
3. Existe  $\gamma : G_2 \rightarrow G_1$  tal que  $\gamma \circ f_1 = id_{G_1}$ .

*Demostración.* 1.  $\Rightarrow$  2. Supongamos que la sucesión es escindible. Existe, por tanto, un homomorfismo  $\rho : G_3 \rightarrow G_2$  tal que  $\rho \circ f_2 = id_{G_3}$ . De aquí deducimos que  $G_2 = Im(\rho) \oplus Ker(f_2)$  pues, para todo  $x \in G_2$ , se tiene que  $x = \rho(f_2(x)) + (x - \rho(f_2(x)))$ . Entonces  $G_2 = G \oplus Ker(f_2)$  con  $G = Im(\rho)$  pero, por exactitud, llegamos a que  $G_2 = G \oplus f_1(G_1)$ .

2.  $\Rightarrow$  3. Consideremos la proyección natural  $\pi : G_2 \rightarrow f_1(G_1)$  y la aplicación  $f_1^{-1} : f_1(G_1) \rightarrow G_1$ . Al ser  $f_1$  inyectiva por exactitud, se cumple que  $\gamma \circ f_1 = (f_1^{-1} \circ \pi) \circ f_1 = id_{G_1}$ .

3.  $\Rightarrow$  1. De la misma manera que razonamos antes, de la igualdad  $\gamma \circ f_1$  se obtiene que  $G_2 = f_1(G_1) \oplus Ker(\gamma)$ . Entonces, por el Primer Teorema de Isomorfía y la igualdad  $Ker(f_2) = Im(f_1)$ , tenemos que  $Ker(\gamma) \cong G_2/Ker(f_2)$  y el isomorfismo  $\overline{f_2} : G_2/Ker(f_2) \rightarrow Im(f_2)$  inducido por  $f_2$ , donde  $Im(f_2) = G_3$  pues  $f_2$  es sobreyectiva por exactitud. Tomando  $\rho = (\overline{f_2})^{-1}$  se tiene que  $\rho \circ f_2 = id_{G_3}$ . ■

**Proposición 2.3.** (Lema de los cinco) Sea el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_3 & \xrightarrow{f_3} & F_4 & \xrightarrow{f_4} & F_5 \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\
 G_1 & \xrightarrow{g_1} & G_2 & \xrightarrow{g_2} & G_3 & \xrightarrow{g_3} & G_4 & \xrightarrow{g_4} & G_5
 \end{array}$$

donde las filas son sucesiones exactas,  $h_2$  y  $h_4$  son isomorfismos,  $h_1$  es sobre-

yectiva y  $h_5$  es inyectiva. Entonces  $h_3$  es isomorfismo.

*Demostración.* Vamos a probar primero que  $h_3$  es inyectiva. Para ello comprobemos que su núcleo se reduce al 0. Sea  $x \in F_3$  con  $h_3(x) = 0$ . Como el diagrama es conmutativo, se tiene que  $h_4f_3(x) = g_3h_3(x) = 0$ , y por ser  $h_4$  inyectiva,  $f_3(x) = 0$ . Por exactitud, sabemos que existe  $y \in F_2$  con  $f_2(y) = x$  (pues  $x \in \text{Ker}(f_3)$ ), siendo  $h_2g_2(y) = h_3f_2(y) = f_3(x) = 0$ , por lo que de nuevo, por exactitud, existe  $z \in G_1$  con  $g_1(z) = h_2(y)$ . Como  $h_1$  es sobreyectiva, existe  $w \in F_1$  tal que  $h_1(w) = z$ . Pero  $h_2f_1(w) = g_1h_1(w) = g_1(z) = h_2(y)$ , de donde  $f_1(w) = y$ , por ser  $h_2$  inyectiva. Por último, se tiene que  $x = f_2(y) = f_2f_1(w)$ , pero al ser una sucesión exacta,  $y \in \text{Ker}(f_2)$ , luego  $x = 0$ . Con esto termina la prueba de la inyectividad.

Problemos ahora la sobreyectividad. Dado  $y \in G_3$ , veamos que existe un  $x \in F_3$  con  $h_3(x) = y$ . Como  $h_4$  es sobreyectiva, existe  $p \in F_4$  con  $h_4(p) = g_3(y)$ . Por exactitud se tiene que  $h_5f_4(p) = g_4h_4(p) = g_4g_3(y) = 0$ . Como  $h_5$  es inyectiva,  $f_4(p) = 0$  y existe un  $r \in F_3$  con  $f_3(r) = p$ , otra vez por exactitud. Ahora tenemos  $g_3h_3(r) = h_4f_3(r) = h_4(p) = g_3(y)$ , de donde  $h_3(r) - y \in \text{Ker}(g_3) = \text{Im}(g_2)$ . Entonces existe un  $s \in G_2$  con  $g_2(s) = h_3(r) - y$ . Como  $h_2$  es sobreyectiva, existe un  $t \in F_2$  con  $h_2(t) = s$ . Finalmente, cogiendo  $x = r - f_2(t)$  tenemos que  $h_3(x) = h_3(r - f_2(t)) = h_3(r) - g_2h_2(t) = h_3(r) - g_2(s) = h_3(r) - (h_3(r) - y) = y$ . Con esto concluimos la prueba. ■

*Nota 2.1.* Es importante recalcar que para probar la inyectividad de  $h_3$  solo hemos usado la sobreyectividad de  $h_1$  y la inyectividad de  $h_2$  y  $h_4$ , y para probar la sobreyectividad de  $h_3$  hemos usado únicamente la inyectividad de  $h_5$  y la sobreyectividad de  $h_4$  y  $h_2$ .

Damos con esto por terminada la parte de sucesiones exactas. Pasamos ahora a estudiar los complejos de cadenas y el concepto de homología.

**Definición 2.4.** Un complejo de cadenas  $\mathcal{C}$  es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos:

$$\dots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \dots \quad (q \in \mathbb{Z})$$

donde  $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$  para todo  $q$ . Los homomorfismos  $\partial_q$  se denominan operadores borde.

A los elementos pertenecientes al núcleo de  $\partial_q$ , al que denotaremos  $Z_q(\mathcal{C})$ , los denominaremos  $q$ -ciclos, y llamaremos  $q$ -bordes a los elementos de la imagen de  $\partial_{q+1}$ , a la que denotaremos  $B_q(\mathcal{C})$ . Es claro que  $B_q(\mathcal{C}) \subseteq Z_q(\mathcal{C})$ . Definiremos entonces el  $q$ -ésimo grupo de homología de  $\mathcal{C}$  como el grupo cociente

$H_q(\mathcal{C}) = Z_q(\mathcal{C})/B_q(\mathcal{C})$ . Denotaremos por  $\bar{z}$  a la clase de homología de un ciclo  $z$ , y diremos que dos ciclos son homólogos si sus clases de homología coinciden.

Para simplificar, omitimos con frecuencia el símbolo “o” de composición de aplicaciones.

**| Definición 2.5.** Si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  son dos complejos de cadenas, la suma directa  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}'$  es el complejo de cadenas definido por los operadores borde

$$\partial_q \oplus \partial'_q : C_q^1 \oplus C_q^2 \longrightarrow C_{q-1}^1 \oplus C_{q-1}^2.$$

**| Definición 2.6.** Dados dos complejos de cadenas  $\mathcal{C}^1 = \{C_q^1, \partial_q^1\}$  y  $\mathcal{C}^2 = \{C_q^2, \partial_q^2\}$ , un homomorfismo de complejos de cadenas  $f : \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^2$  es una familia de homomorfismos  $f = \{f_q : C_q^1 \longrightarrow C_q^2\}$  verificando que, para cada  $q$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_q^1 & \xrightarrow{\partial_q^1} & C_{q-1}^1 \\ f_q \downarrow & & \downarrow f_{q-1} \\ C_q^2 & \xrightarrow{\partial_q^2} & C_{q-1}^2 \end{array}$$

es conmutativo. La conmutatividad implica, en particular, que  $f_q(Z_q(\mathcal{C}^1)) \subseteq Z_q(\mathcal{C}^2)$  y  $f_q(B_q(\mathcal{C}^1)) \subseteq B_q(\mathcal{C}^2)$ . Por tanto,  $f$  induce homomorfismos

$$f_* : H_q(\mathcal{C}^1) \longrightarrow H_q(\mathcal{C}^2),$$

donde  $f_*(\bar{z}) = \overline{f_q(z)}$ . A  $f_*$  lo llamaremos homomorfismo inducido por  $f$ .

**Nota 2.2.** Se puede verificar fácilmente, con la simple aplicación de la definición, que  $id_* = id$  y que  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

**| Definición 2.7.** Diremos que una sucesión de complejos

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^1 \xrightarrow{f} \mathcal{C}^2 \xrightarrow{g} \mathcal{C}^3 \longrightarrow 0$$

es exacta cuando la sucesión  $0 \longrightarrow C_q^1 \xrightarrow{f_q} C_q^2 \xrightarrow{g_q} C_q^3 \longrightarrow 0$  sea exacta, para todo  $q$ .

**Proposición 2.4.** Dada una sucesión exacta de complejos como la de la definición anterior, se tiene que la sucesión  $H_q(\mathcal{C}^1) \xrightarrow{f_*} H_q(\mathcal{C}^2) \xrightarrow{g_*} H_q(\mathcal{C}^3)$  es exacta.

*Demostración.* Tenemos que ver que  $Im(f_*) = Ker(g_*)$ . Empecemos comprobando que  $Im(f_*) \subseteq Ker(g_*)$ , pero esto es sencillo, pues  $g \circ f = 0$ , luego  $g_*f_* = (g \circ f)_* = 0_* = 0$  y, por tanto,  $Im(f_*) \subseteq Ker(g_*)$ .

Veamos ahora la otra inclusión. Sea  $\overline{z_2} \in Ker(g_*)$ , es decir,  $g_*(\overline{z_2}) = \overline{g_q(z_2)} = 0$ . Sabemos que existe un  $x_3 \in C_{q+1}^3$  tal que  $\partial_{q+1}^3(x_3) = g_q(z_2)$  por definición de borde. Como la sucesión es exacta, existe  $x_2 \in C_{q+1}$  con  $g_{q+1}(x_2) = x_3$  (pues todo elemento de  $C^3$  pertenece al núcleo de la aplicación que va de  $C^3$  a 0). Entonces,  $g_q(z_2 - \partial_{q+1}^2(x_2)) = g_q(z_2) - \partial_{q+1}^3(x_3) = 0$  y, por exactitud nuevamente, existe un  $z_1 \in C_q^1$  con  $f_q(z_1) = z_2 - \partial_{q+1}^2(x_2)$ . Además, se tiene que  $f_{q-1}\partial_q^1(z_1) = \partial_q^2 f_q(z_1) = \partial_q^2(z_2 - \partial_{q+1}^2(x_2)) = 0$ , y como  $f_{q-1}$  es inyectiva,  $\partial_q^1(z_1) = 0$ . Así,  $z_1 \in Ker(g_*)$  y  $f_*(z_1) = \overline{z_2 - \partial_{q+1}^2(x_2)} = \overline{z_2}$ . Por lo tanto,  $Ker(g_*) \subseteq Im(f_*)$  y la prueba está terminada. ■

**Proposición 2.5.** *Dada una sucesión exacta de complejos*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^1 \xrightarrow{f} \mathcal{C}^2 \xrightarrow{g} \mathcal{C}^3 \longrightarrow 0,$$

existe un homomorfismo  $\partial_* : H_q(\mathcal{C}^3) \longrightarrow H_{q-1}(\mathcal{C}^1)$  tal que la sucesión

$$\dots \longrightarrow H_q(\mathcal{C}^1) \xrightarrow{f_*} H_q(\mathcal{C}^2) \xrightarrow{g_*} H_q(\mathcal{C}^3) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(\mathcal{C}^1) \longrightarrow \dots$$

es exacta.

*Demostración.* Definamos el homomorfismo  $\partial_*$ . Tomamos  $\overline{z_3} \in H_q(\mathcal{C}^3)$ . Entonces, por exactitud, existe un  $x_2 \in C_q^2$  con  $g_q(x_2) = z_3$ . Tenemos que  $g_{q-1}\partial_q^2(x_2) = \partial_q^3 g_q(x_2) = \partial_q^3(z_3) = 0$ , luego existe un único  $y_1 \in C_{q-1}^1$  con  $f_{q-1}(y_1) = \partial_q^2(x_2)$ . Observamos que  $f_{q-2}\partial_{q-1}^1(y_1) = \partial_{q-1}^2 f_{q-1}(y_1) = \partial_{q-1}^2 \partial_q^2(x_2) = 0$ . Además, como  $f_{q-2}$  es inyectiva, ha de ser  $\partial_{q-1}^1(y_1) = 0$ , de donde se deduce que  $y_1$  es un ciclo y se puede considerar  $\overline{y_1} \in H_{q-1}(\mathcal{C}^1)$ .

Comprobemos que la definición del homomorfismo así dada es consistente, veamos que  $\overline{y_1}$  no depende de las elecciones tomadas anteriormente. En efecto, si  $x'_2 \in C_q^2$  verifica que  $g_q(x'_2) = z'_3$  para un cierto  $z'_3$  con  $\overline{z'_3} = \overline{z_3}$ , tenemos que existe un  $w_3 \in C_{q+1}^3$  de manera que  $z'_3 = z_3 + \partial_{q+1}^3(w_3)$ . Entonces, se tiene que  $g_q(x'_2) = z_3 + \partial_{q+1}^3(w_3)$ .

Ahora, como  $g_{q-1}\partial_q^2(x'_2) = \partial_q^3 g_q(x'_2) = \partial_q^3(z_3 + \partial_{q+1}^3(w_3)) = 0$ , existe un único  $y'_1$  con  $f_{q-1}(y'_1) = \partial_q^2(x'_2)$ . Se tiene que  $g_q(x'_2 - x_2) = \partial_{q+1}^3(w_3)$  y para  $w_3$  existe  $y_2 \in C_{q+1}^2$  con  $g_{q+1}(y_2) = w_3$ . Así, tenemos que  $g_q(x'_2 - x_2 - \partial_{q+1}^2(y_2)) = \partial_{q+1}^3(w_3) - \partial_{q+1}^3 g_{q+1}(y_2) = 0$ .

Por exactitud, existe un único elemento  $a_1 \in C_q^1$  con  $f_q(a_1) = x'_2 - x_2 - \partial_{q+1}^2(y_2)$ .

Entonces,  $f_{q-1}(y'_1 - y_1) = \partial_q^2(x'_2 - x_2) = \partial_q^2(f_q(a_1) - \partial_{q+1}^2(y_2)) = \partial_q^2 f_q(a_1) = f_{q-1}(\partial_q^1 a_1)$ . Como  $f_{q-1}$  es inyectiva, ha de ser  $y'_1 - y_1 = \partial_q^1(a_1)$  y, por tanto,  $\overline{y'_1} = \overline{y_1}$ .

Definimos entonces  $\overline{\partial_* z_3} = \overline{y_1}$ . Notemos que  $\partial_*$  es en realidad un homomorfismo, pues dado  $\lambda z_3^1 + \mu z_3^2$  podemos elegir el  $x_2$  asociado a  $\lambda z_3^1 + \mu z_3^2$  como  $\lambda x_2^1 + \mu x_2^2$ , donde  $x_2^i$  está asociado a  $z_3^i$ ,  $i = 1, 2$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ .

Estamos en condiciones de probar la exactitud de la sucesión. Para ello, teniendo en cuenta la proposición 2.4, basta probar las siguientes inclusiones:

1.  $Im(\partial_*) \subseteq Ker(f_*)$ . Dado  $\overline{\partial_* z_3} = \overline{y_1}$ , sabemos que  $f_{q-1}(y_1) = \partial_q^2(x_2)$ . Entonces,  $f_*(\overline{y_1}) = \overline{f_{q-1}(y_1)} = \overline{\partial_q^2(x_2)} = 0$ .
2.  $Ker(f_*) \subseteq Im(\partial_*)$ . Sea  $f_*(\overline{y_1}) = 0$ . Entonces existe  $x_2 \in C_q^2$  con  $f_{q-1}(y_1) = \partial_q^2(x_2)$ . Como  $\partial_q^3 g_q(x_2) = g_{q-1} \partial_q^2(x_2) = g_{q-1} f_{q-1}(y_1) = 0$ , por exactitud tenemos que  $z_3 = g_q(x_2)$  es un ciclo y  $\overline{\partial_*(z_3)} = \overline{y_1}$ .
3.  $Im(g_*) \subseteq Ker(\partial_*)$ . Tenemos que  $\overline{\partial_* g_*(x_2)} = \overline{\partial_* g_q(x_2)} = \overline{y_1} = 0$ , pues  $y_1$  verifica que  $f_{q-1}(y_1) = \partial_q^2(x_2) = 0$  y por ser  $f_{q-1}$  inyectiva se tiene que  $y_1 = 0$ .
4.  $Ker(\partial_*) \subseteq Im(g_*)$ . Sea  $\overline{\partial_*(z_3)} = \overline{y_1} = 0$ . Entonces,  $f_{q-1}(y_1) = \partial_q^2(x_2)$ ,  $g_q(x_2) = z_3$  y existe  $w_1 \in C_n^1$  con  $\partial_q^1(w_1) = y_1$ . Así, se tiene entonces que  $f_{q-1}(y_1) = f_{q-1} \partial_q^1(w_1) = \partial_q^2 f_q(w_1) = \partial_q^2(x_2)$ . Luego  $\overline{\partial_q^2(x_2 - f_q(w_1))} = 0$  y  $x_2 - f_q(w_1)$  es un ciclo. Además,  $\overline{g_*(x_2 - f_q(w_1))} = \overline{g_q(x_2) - g_q f_q(w_1)} = \overline{z_3}$ , pues  $g_q f_q(w_1) = 0$  por exactitud.

■

**| Definición 2.8.** A una sucesión del tipo de la proposición anterior la llamaremos sucesión exacta larga de homología.

**| Definición 2.9.** Sea  $\mathcal{C} = \{C_q, \partial_q\}$  un complejo de cadenas. Para cada entero  $q$ , sea  $C'_q \subseteq C_q$  un subgrupo tal que  $\partial_q(C'_q) \subseteq C'_{q-1}$ . A la familia  $\mathcal{C}' = \{C'_q, \partial_q|_{C'_q}\}$  la denominaremos subcomplejo de  $\mathcal{C}$ .

**| Definición 2.10.** Sea  $\mathcal{C}$  un complejo de cadenas, y  $\mathcal{C}^1$  y  $\mathcal{C}^2$  dos subcomplejos suyos. Consideramos la sucesión exacta  $0 \longrightarrow \mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2 \xrightarrow{i} \mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{C}^2 \xrightarrow{j} \mathcal{C}$ , donde  $i_q(x) = (x, -x)$  y  $j_q(x, y) = x + y$ . Entonces, de la sucesión anterior se obtiene la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2 \xrightarrow{i} \mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{C}^2 \xrightarrow{j} Im(j) \longrightarrow 0$$

donde  $Im(j)$  es el subcomplejo de  $\mathcal{C}$  formado por las imágenes  $Im(j_q)$ . A la sucesión exacta larga de homología asociada a la anterior sucesión exacta corta de complejos la denominaremos sucesión de Mayer-Vietoris del triple  $(\mathcal{C}; \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2)$ :

$$\dots \rightarrow H_q(\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2) \rightarrow H_q(\mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{C}^2) \rightarrow H_q(Im(j)) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2) \rightarrow \dots$$

**Nota 2.3.** Recalquemos que  $Im(j)$  es el siguiente subcomplejo de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}^1 + \mathcal{C}^2 = \{C_q^1 + C_q^2, \partial_q\}$ . Además, se tiene el isomorfismo  $H_q(\mathcal{C}^1) \oplus H_q(\mathcal{C}^2) \cong H_q(\mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{C}^2)$ .

**Definición 2.11.** Diremos que un complejo  $\mathcal{C} = \{C_q, \partial_q\}$  es positivo cuando  $C_q = 0$  para todo entero  $q < 0$ .

**Definición 2.12.** Sea  $\mathcal{C} = \{C_q, \partial_q\}$  un complejo positivo. Denominaremos aumento de  $\mathcal{C}$  a un homomorfismo sobreyectivo  $\epsilon : C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $\epsilon \circ \partial_1 = 0$ . Si  $\partial_q^\# = \partial_q$  para  $q \geq 1$  y  $\partial_0^\# = \epsilon$ , entonces  $\mathcal{C}^\# = \{C_q^\#, \partial_q^\#\}$ , donde  $C_q^\# = C_q$  si  $q \geq 0$ ,  $C_{-1}^\# = \mathbb{Z}$  y  $C_q^\# = 0$  si  $q < -1$ , es un complejo de cadenas al que llamaremos complejo aumentado de  $\mathcal{C}$ .

Fijémonos en que  $H_q(\mathcal{C}) = H_q(\mathcal{C}^\#)$  cuando  $q \geq 1$  y  $H_{-1}(\mathcal{C}^\#) = 0$ . Un homomorfismo entre complejos aumentados es un homomorfismo de complejos de cadenas  $f : \{(C_q^1)^\#, (\partial_q^1)^\#\} \rightarrow \{(C_q^2)^\#, (\partial_q^2)^\#\}$  con  $f_{-1} = id$ .

A la homología  $H_q^\#(\mathcal{C}) = H_q(\mathcal{C}^\#)$  la denominaremos homología reducida de  $\mathcal{C}$ .

**Definición 2.13.** Dada la sucesión exacta corta de complejos de cadenas positivos  $0 \rightarrow \mathcal{C}^1 \xrightarrow{f} \mathcal{C}^2 \xrightarrow{g} \mathcal{C}^3 \rightarrow 0$  y aumentos  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  tales que  $\epsilon_2 \circ f_0 = \epsilon_1$ , construimos la sucesión exacta  $0 \rightarrow (\mathcal{C}^1)^\# \xrightarrow{f^\#} (\mathcal{C}^2)^\# \xrightarrow{g^\#} (\mathcal{C}^3)^\# \rightarrow 0$ . A la sucesión larga asociada

$$\dots \rightarrow H_q^\#(\mathcal{C}^1) \rightarrow H_q^\#(\mathcal{C}^2) \rightarrow H_q^\#(\mathcal{C}^3) \rightarrow H_{q-1}^\#(\mathcal{C}^1) \rightarrow \dots$$

la denominaremos sucesión exacta larga de homología reducida.

**Definición 2.14.** Dados dos subcomplejos  $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2$  del complejo de cadenas positivo  $\mathcal{C}$  y un aumento  $\epsilon : C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $\epsilon|_{C_0^1 \cap C_0^2}$  es un aumento, podemos considerar los complejos aumentados  $\mathcal{C}^\#, (\mathcal{C}^1)^\#, (\mathcal{C}^2)^\#$  y  $(\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2)^\#$ . De la sucesión exacta corta  $0 \rightarrow \mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2 \xrightarrow{i} \mathcal{C}^1 \oplus \mathcal{C}^2 \xrightarrow{j} \mathcal{C}$  se obtiene la sucesión exacta corta  $0 \rightarrow (\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2)^\# \xrightarrow{i^\#} (\mathcal{C}^1)^\# \oplus (\mathcal{C}^2)^\# \xrightarrow{j^\#} Im(j)^\# \rightarrow 0$  que en el lugar  $-1$  es  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$  con los homomorfismos obvios. Se obtiene así la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H_q^\#(\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2) \rightarrow H_q^\#(\mathcal{C}^1) \oplus H_q^\#(\mathcal{C}^2) \rightarrow H_q^\#(Im(j)) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}^\#(\mathcal{C}^1 \cap \mathcal{C}^2) \rightarrow \dots$$

a la que llamaremos sucesión de Mayer-Vietoris reducida del triple  $(\mathcal{C}; \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2)$ .

**| Definición 2.15.** Diremos que dos homomorfismos de complejos de cadenas  $f, g : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^2$  son homótopos cuando exista una familia de homomorfismos  $\{h_q : \mathcal{C}_q^1 \rightarrow \mathcal{C}_{q+1}^2\}$ , a la que llamaremos homotopía, de modo que  $f_q - g_q = \partial_{q+1}^2 h_q + h_{q-1} \partial_q^1$  para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Denotaremos que  $f$  y  $g$  son homótopos mediante  $f \simeq g$ .

**Lema 2.2.** La relación de ser homótopos es una relación de equivalencia.

*Demostración.* Efectivamente, es una relación reflexiva, pues la familia  $\{h_q\}$  con  $h_q = 0$  hace que  $f \simeq f$ . También es una relación simétrica, ya que si  $f \simeq g$  por medio de  $\{h_q\}$ , entonces  $g \simeq f$  por medio de  $\{-h_q\}$ . Por último, la relación es transitiva, puesto que si  $f \simeq g$  por medio de  $\{h_q^1\}$  y  $g \simeq k$  por medio de  $\{h_q^2\}$  entonces  $f \simeq k$  por medio de  $\{h_q^1 + h_q^2\}$ . ■

**Lema 2.3.** Sean  $l : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^2$ ;  $f, g : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}^3$  y  $k : \mathcal{C}^3 \rightarrow \mathcal{C}^4$  morfismos de complejos. Se verifica que si  $f \simeq g$ , entonces  $k \circ f \simeq k \circ g$  y  $f \circ l \simeq g \circ l$ .

*Demostración.* Sea  $\{h_q\}$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Consideremos la familia  $\{k_{q+1} \circ h_q\}$  y veamos que es una homotopía entre  $k \circ f$  y  $k \circ g$ . Efectivamente,  $k_q f_q - k_q g_q = k_q (h_{q-1} \partial_q^2 + \partial_{q+1}^3 h_q) = k_q h_{q-1} \partial_q^2 + \partial_{q+1}^4 k_{q+1} h_q$ , por lo que sí que es una homotopía. Ahora consideremos la familia  $\{h_q \circ l_q\}$  y comprobemos que es una homotopía entre  $f \circ l$  y  $g \circ l$ . Se tiene que  $f_q l_q - g_q l_q = (h_{q-1} \partial_q^2 + \partial_{q+1}^3 h_q) l_q = h_{q-1} l_{q-1} \partial_q^1 + \partial_{q+1}^3 h_q l_q$  por lo que sí que es una homotopía. ■

**Corolario 2.1.** Sean  $f, g : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^2$  y  $k, s : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}^3$  tales que  $f \simeq g$  y  $k \simeq s$ . Entonces  $k \circ f \simeq s \circ g$ .

*Demostración.* Por la proposición anterior,  $k \circ f \simeq k \circ g \simeq s \circ g$  y, como la relación de ser homótopos es transitiva, hemos acabado. ■

**| Definición 2.16.** Diremos que un homomorfismo de complejos de cadenas  $f : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^2$  es una equivalencia homotópica cuando exista  $g : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}^1$  tal que  $f \circ g \simeq id_{\mathcal{C}^2}$  y  $g \circ f \simeq id_{\mathcal{C}^1}$ . En este caso diremos que  $\mathcal{C}^1$  y  $\mathcal{C}^2$  son homotópicamente equivalentes y que  $g$  es una inversa homotópica de  $f$ .

**Proposición 2.6.** Si  $f, g : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^2$  son homótopos, entonces los homomorfismos inducidos en homología coinciden, es decir  $f_* = g_*$  siendo

$$f_*, g_* : H_q(\mathcal{C}^1) \rightarrow H_q(\mathcal{C}^2).$$

*Demostración.* Sea  $\{h_q : \mathcal{C}_q^1 \rightarrow \mathcal{C}_{q+1}^2\}$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Entonces si  $x \in Z_q(\mathcal{C}^1)$ , se tiene que

$$f_q(x) - g_q(x) = \partial_{q+1}^2 h_q(x) + h_{q-1} \partial_q^1(x) = \partial_{q+1}^2 h_q(x) \in B_q(\mathcal{C}^2).$$

Luego  $f_*(\bar{x}) - g_*(\bar{x}) = \overline{f_q(x) - g_q(x)} = \overline{\partial_{q+1}^2 h_q(x)} = \bar{0}$ . Así pues,  $f_* = g_*$ . ■

**Corolario 2.2.** Si  $f : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^2$  es una equivalencia homotópica, entonces  $f_* : H_q(\mathcal{C}^1) \rightarrow H_q(\mathcal{C}^2)$  es un isomorfismo para todo entero  $q$ .

*Demostración.* Sea  $g : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}^1$  una inversa homotópica de  $f$ . Por la proposición anterior,  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (id_{\mathcal{C}^1})_* = id$ , y  $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (id_{\mathcal{C}^2})_* = id$ , siendo entonces  $f_*$  y  $g_*$  isomorfismos. ■

## 2.2 Homología Simplicial Orientada

En esta sección aplicaremos casi todo lo estudiado en la sección anterior para introducirnos en el mundo de la homología simplicial. Definiremos la homología orientada, la homología reducida orientada y la homología relativa orientada y demostraremos algunos de los resultados más importantes relacionados con ellas. Resumiendo, llevaremos el concepto de complejo de cadenas al terreno de los poliedros y empezaremos a desarrollar la teoría principal sobre la que gira este trabajo.

Primeramente vamos a definir el concepto de orientación, básico para lo que queda de capítulo.

Sean  $a_0, a_1, \dots, a_q$  puntos afínmente independientes de  $\mathbb{R}^n$ . Recordemos que

$$\sigma = \langle a_0, a_1, \dots, a_q \rangle$$

es el símplexe geométrico de vértices  $a_0, a_1, \dots, a_q$ , es decir, la envolvente convexa del conjunto  $\{a_0, a_1, \dots, a_q\}$ . Diremos que dos ordenaciones de los vértices de  $\sigma$  son equivalentes si tienen la misma paridad, es decir, si se puede pasar de una ordenación a la otra mediante un número par de trasposiciones. Así pues, la ordenación  $(a_0, a_1, \dots, a_q)$  es equivalente a la ordenación  $(a_{\pi(0)}, a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(q)})$  si  $\pi$  es una permutación par de los índices  $0, 1, \dots, q$ . Tenemos una única clase de equivalencia si  $q = 0$ , en los demás casos tenemos dos clases de equivalencia. Cada una de estas clases es una *orientación* de  $\sigma$ . Un *símplexe orientado* es un símplexe geométrico junto con una orientación del mismo. Así pues, salvo en dimensión cero ( $q = 0$ ), cada símplexe geométrico da lugar a dos símplexes orientados. Denotaremos con  $[a_0, a_1, \dots, a_q]$  el símplexe orientado formado



por el símplice geométrico  $\langle a_0, a_1, \dots, a_q \rangle$  y la clase de equivalencia de la ordenación  $(a_0, a_1, \dots, a_q)$ . Diremos a veces que  $\langle a_0, a_1, \dots, a_q \rangle$  es el soporte geométrico de  $[a_0, a_1, \dots, a_q]$ .

Denotaremos con  $G_q(K)$ ,  $q \geq 0$ , el grupo abeliano libre engendrado por los  $q$ -símplices orientados de  $K$ . Para cada  $q$ -símplice  $\sigma \in K$ ,  $q > 0$ , sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  los dos símplices orientados con soporte  $\sigma$ . Denotaremos con  $N_q(K)$  el subgrupo de  $G_q(K)$  engendrado por los elementos  $\sigma_1 + \sigma_2$ , variando  $\sigma$  en el conjunto de los  $q$ -símplices de  $K$ . Consideraremos el grupo cociente  $C_q(K) = G_q(K)/N_q(K)$ . Diremos que  $C_q(K)$  es el grupo de las  $q$ -cadenas simpliciales orientadas de  $K$ . Si  $c \in G_q(K)$ , denotaremos provisionalmente con  $\tilde{c}$  la clase de equivalencia de  $c$  en  $C_q(K) = G_q(K)/N_q(K)$ .

Si  $\sigma$  es un 0-símplice geométrico, entonces sólo hay un símplice orientado con soporte  $\sigma$ . Así pues,  $C_0(K)$  es el grupo abeliano libre engendrado por los 0-símplices (o vértices) de  $K$ . Para  $q > 0$ ,  $C_q(K)$  también es un grupo abeliano libre. En este caso, una base se obtiene al tomar, para cada  $q$ -símplice  $\sigma \in K$ , la clase en  $C_q(K)$  de uno (y sólo de uno) de los  $q$ -símplices orientados con soporte  $\sigma$ . Obsérvese que  $\tilde{\sigma}_2 = -\tilde{\sigma}_1$ . Como es tradicional en esta materia, omitiremos la tilde en la escritura las  $q$ -cadenas y, en consecuencia, escribiremos  $\sigma_2 = -\sigma_1$ .

Para definir un homomorfismo de grupos  $\bar{f} : C_q(K) \rightarrow G$ , lo habitual será definir un homomorfismo de grupos  $f : G_q(K) \rightarrow G$  y obtener  $\bar{f}$  por paso al cociente de  $f$ , una vez comprobado que  $f$  se anula sobre los generadores  $\sigma_1 + \sigma_2$  de  $N_q$ , es decir, que  $f(\sigma_2) = -f(\sigma_1)$ , para todo  $q$ -símplice  $\sigma \in K$ . Para definir el homomorfismo  $f : G_q(K) \rightarrow G$ , es frecuente definirlo primero sobre los elementos de la base formada por los  $q$ -símplices orientados, y extenderlo después por linealidad. Ahora bien, si  $\sigma$  es un  $q$ -símplice orientado de  $K$ , lo habitual para definir  $f(\sigma)$  será tomar una orientación concreta  $(a_0, a_1, \dots, a_q)$  de los vértices de  $\sigma$  y ver que la definición de  $f(\sigma)$  no varía si efectuamos una permutación par de los índices. Así pues, siguiendo este esquema, una vez definido  $f([a_0, a_1, \dots, a_q])$  utilizando la ordenación  $(a_0, a_1, \dots, a_q)$ , para definir correctamente  $\bar{f}$  tenemos que comprobar las dos siguientes condiciones:

1.  $f([a_0, a_1, \dots, a_q])$  no varía si efectuamos una permutación par de los índices. Garantizamos así que el representante elegido de la orientación del  $q$ -símplice no influye en el valor que toma  $f$  sobre el  $q$ -símplice orientado en cuestión.
2.  $f([a_0, a_1, \dots, a_q])$  cambia de signo si efectuamos una permutación impar de los índices. Garantizamos así que el homomorfismo  $f$  pasa el cociente.

Puesto que el grupo simétrico  $S_q$  está engendrado por las trasposiciones de índices consecutivos, las anteriores condiciones (1) y (2) quedarán satisfechas si comprobamos que  $f([a_0, a_1, \dots, a_q])$  cambia de signo cuando trasponemos dos índices consecutivos. Así lo haremos habitualmente.

**Definición 2.17.** Denotaremos por  $\partial_q$  al homomorfismo:

$$\partial_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K)$$

definido por la extensión lineal de:

$$\partial_q([a_0, \dots, a_q]) = \sum_{i=0}^q (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_q]$$

donde  $[a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_q]$  indica el  $(q-1)$ -símplice orientado obtenido al eliminar el vértice que ocupa el lugar  $i$ .

**Lema 2.4.** La definición de  $\partial_q$  no depende de la permutación que define  $[a_0, \dots, a_q]$ . De hecho, si  $\sigma_1^q$  y  $\sigma_2^q$  son las dos posibles orientaciones de  $\sigma^q$ , se tiene que que  $\partial_q(\sigma_1^q + \sigma_2^q) = 0$ .

*Demostración.* Como toda permutación se puede expresar como producto de trasposiciones, nos basta con probar que si  $\sigma_1 = [a_0, a_1, \dots, a_q]$  y  $\sigma_2 = [a_1, a_0, \dots, a_q]$ , se tiene que  $\partial_q(\sigma_1) + \partial_q(\sigma_2) = 0$ . Para ello observemos que:

$$\partial_q(\sigma_1) = [a_1, a_2, \dots, a_q] - [a_0, a_2, \dots, a_q] + \sum_{i=0}^q (-1)^i [a_0, a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_q]$$

y

$$\partial_q(\sigma_2) = [a_0, a_2, \dots, a_q] - [a_1, a_2, \dots, a_q] + \sum_{i=0}^q (-1)^i [a_0, a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_q]$$

Por definición de  $C_{q-1}(K)$ , se tiene que  $\partial_q(\sigma_1 + \sigma_2) = 0$ . ■

**Lema 2.5.** Se cumple que  $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ .

*Demostración.* Vamos a probar que  $\partial_q \partial_{q+1}$  se anula en los generadores y, por tanto, es el homomorfismo nulo. Se tiene que

$$\partial_q \partial_{q+1} [a_0, \dots, a_{q+1}] = \partial_q \left( \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_{q+1}] \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \left( \sum_{j>i}^{q+1} (-1)^{j-1} [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_{q+1}] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^{j<i} (-1)^j [a_0, \dots, \widehat{a}_j, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_{q+1}] \right)
\end{aligned}$$

Entonces el s3mplice  $[a_0, \dots, \widehat{a}_k, \dots, \widehat{a}_t, \dots, a_{q+1}]$  aparece dos veces en la expresi3n que hemos calculado con signos opuestos, una vez cuando desaparece  $a_k$  y otra cuando desaparece  $a_t$ . Supongamos, sin p3rdida de generalidad, que  $k < t$ . En el primer caso,  $i = k < j = t$  y el coeficiente es  $(-1)^k(-1)^{t-1}$ , en el segundo caso,  $i = t > j = k$  y el coeficiente es  $(-1)^t(-1)^k$ . Por tanto, todo s3mplice aparece con coeficiente nulo, y hemos terminado. ■

**| Defini3n 2.18.** *El complejo de cadenas  $\mathcal{C}_*(K) = \{C_q(K), \partial_q\}$  positivo es el complejo de cadenas simpliciales orientadas de  $K$ . A los grupos de homolog3a de este complejo los denotaremos por  $H_q(K)$ . Diremos que  $H_q(K)$  es el  $q$ -3simo grupo de homolog3a simplicial orientada de  $K$ .*

**Ejemplo 2.1.** Sean  $a_0, a_1$  y  $a_2$  tres puntos no alineados de  $\mathbb{R}^2$  y  $\sigma = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ . Sea  $K$  el 1-esqueleto de  $K_\sigma$  (este es el complejo simplicial formado por  $\sigma$  y todas sus caras). Calculemos sus grupos de homolog3a simplicial orientada. Consideremos el complejo de cadenas:

$$0 \longrightarrow C_1(K) \longrightarrow C_0(K) \longrightarrow 0.$$

En  $C_1(K)$  consideramos la base  $[a_0, a_1], [a_1, a_2], [a_0, a_2]$  y en  $C_0(K)$  la base  $[a_0], [a_1], [a_2]$ . As3i pues,

$$\begin{aligned}
C_1(K) &= \mathbb{Z}[a_0, a_1] \oplus \mathbb{Z}[a_1, a_2] \oplus \mathbb{Z}[a_0, a_2]. \\
C_0(K) &= \mathbb{Z}[a_0] \oplus \mathbb{Z}[a_1] \oplus \mathbb{Z}[a_2].
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\partial([a_0, a_1]) &= [a_1] - [a_0], \\
\partial([a_1, a_2]) &= [a_2] - [a_1], \\
\partial([a_0, a_2]) &= [a_2] - [a_0],
\end{aligned}$$

vemos que la matriz de  $\partial$  con respecto a las bases anteriores es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos:

1.  $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = C_0(K)/B_0(K) = Ab\{[a_0], [a_1], [a_2]: [a_1] = [a_0], [a_2] = [a_1], [a_2] = [a_0]\} = Ab\{[a_0]\} \cong \mathbb{Z}$ .
2.  $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = Z_1(K)/\{0\} \cong Z_1(K)$ .

Para calcular  $Z_1(K)$  resolvemos la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que equivale a resolver el sistema:

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

que es equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

Así pues, si  $z = x_1[a_0, a_1] + x_2[a_1, a_2] + x_3[a_0, a_2]$  es un ciclo, entonces  $z = x_2([a_0, a_1] + [a_1, a_2] - [a_0, a_2]) = x_2\partial([a_0, a_1, a_2])$ , es decir,  $Z_1(K)$  es el grupo abeliano libre engendrado por  $\partial([a_0, a_1, a_2])$ . De donde,  $H_1(K) \cong Z_1(K) \cong \mathbb{Z}$ . Más adelante (homología del complejo simplicial cono), generalizaremos lo anterior. Veremos allí que si  $\sigma = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n+1} \rangle$  es un  $(n+1)$ -símplice y  $K$  es el  $n$ -esqueleto de  $K_\sigma$  (luego  $K$  es una triangulación de la esfera  $S^n$ ), entonces  $H_q(K) \cong \mathbb{Z}$  si  $q = 0$  o  $n$  y  $H_q(K) = 0$  en los restantes casos. De hecho veremos que  $H_n(K)$  es el grupo abeliano libre engendrado por la clase de homología de  $\partial([a_0, a_1, \dots, a_{n+1}])$ . (Obsérvese que  $\sigma \notin K$ , pero  $\partial([a_0, a_1, \dots, a_{n+1}]) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_{n+1}]$  pertenece ciertamente a  $Z_n(K)$ ).

**Proposición 2.7.** *Si  $K \neq \emptyset$ , el complejo de cadenas positivo  $\{C_q(K), \partial_q\}$  admite aumento.*

*Demostración.* Sea  $\epsilon : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$  el homomorfismo extensión lineal de  $\epsilon(a) = 1$  para todo vértice  $a \in K$ . La composición  $C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$  es nula, si tomamos  $[a_0, a_1] \in C_1(K)$  se tiene que  $\epsilon \circ \partial_1([a_0, a_1]) = \epsilon(a_1 - a_0) = 1 - 1 = 0$ . ■

**Notación 2.1.** A los grupos de homología simplicial orientada reducida de  $K$  los denotaremos por  $H_q^{\#}$ . Mientras no haya lugar a confusión, a partir de este momento, llamaremos simplemente grupos de homología a los grupos de homología simplicial orientada (tanto en el caso de la homología ordinaria como en el de la reducida).

**Proposición 2.8.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales y  $\varphi : K \rightarrow L$  una aplicación simplicial. Entonces  $\varphi$  induce un homomorfismo de complejos de cadenas  $C(\varphi)$  definido por la extensión lineal de  $C(\varphi)([a_0, \dots, a_q]) = [\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_q)]$  si no aparecen vértices repetidos y  $C(\varphi)([a_0, \dots, a_q]) = 0$  en caso contrario. En particular, si  $\varphi = id$ , entonces  $C(\varphi) = id$  y si  $\phi : L \rightarrow M$  es otra aplicación simplicial, se tiene que  $C(\phi \circ \varphi) = C(\phi) \circ C(\varphi)$ .

**Demostración.** Es inmediato que la definición de  $C(\varphi)$  no depende de la permutación que define la orientación. Comprobemos la igualdad  $\partial_q \circ C(\varphi) = C(\varphi) \circ \partial_q$ . Si  $\varphi$  no repite ningún vértice tenemos

$$\begin{aligned} C(\varphi) \circ \partial_q([a_0, \dots, a_q]) &= C(\varphi) \left( \sum_{i=0}^q (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_q] \right) = \\ &= \sum_{i=0}^q ([\varphi(a_0), \dots, \widehat{\varphi(a_i)}, \dots, \varphi(a_q)]) = \partial_q \circ C(\varphi)([a_0, \dots, a_q]) \end{aligned}$$

Si  $\varphi$  repite algún vértice, digamos  $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$ , se tiene que

$$\partial_q \circ C(\varphi)([a_0, \dots, a_q]) = 0.$$

Por otro lado

$$\sum_{i=0}^q (-1)^i C(\varphi)([a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_q]) = 0$$

pues si  $k \neq i, j$ , entonces  $C(\varphi)([a_0, \dots, \widehat{a_k}, \dots, a_q]) = 0$  y, suponiendo que  $i < j$ , se tiene entonces

$$\begin{aligned} &(-1)^i [\varphi(a_0), \dots, \widehat{\varphi(a_i)}, \dots, \varphi(a_j), \dots, \varphi(a_q)] + \\ &+ (-1)^j [\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_i), \dots, \widehat{\varphi(a_j)}, \dots, \varphi(a_q)] = 0 \end{aligned}$$

ya que, en caso de no haber más vértices repetidos, como  $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$ , el número de trasposiciones para pasar del primer símplex ordenado al segundo es  $j - i - 1$ . Obsérvese que  $\varphi(a_j)$  ocupa el lugar  $j - 1$  en el primer símplex. La fórmula  $C(\phi \circ \varphi) = C(\phi) \circ C(\varphi)$  se comprueba fácilmente por la propia

definición de  $C(\varphi)$ . ■

**Corolario 2.3.** *Toda aplicación simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$  induce un homomorfismo*

$$\varphi_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$$

tal que  $(\phi \circ \varphi)_* = \phi_* \circ \varphi_*$  e  $id_* = id$ .

*Demostración.* Esto ya se vio en la Definición 2.4. ■

Vamos a estudiar ahora la homología cero-dimensional, es decir,  $H_0(K)$ , y vamos a dar una interpretación geométrica de este grupo.

**Definición 2.19.** *Sea  $K$  un complejo simplicial. Diremos que dos vértices  $v$  y  $w$  de  $K$  están conectados,  $v \sim w$ , si existe una sucesión de vértices de  $K$ ,  $a_0, \dots, a_q$ , tales que  $v = a_0$ ,  $w = a_q$  y  $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$  es un 1-símplice de  $K$  para cada  $i$ . Se comprueba sin dificultad que este concepto de conexión es una relación de equivalencia.*

Dado un vértice  $v$  de  $K$ , llamaremos componente de simplicial de  $K$  al conjunto

$$C_v = \bigcup_{w \sim v} st(w, K)$$

**Proposición 2.9.** *Las componentes simpliciales de un complejo simplicial  $K$  coinciden con las componentes conexas del poliedro  $|K|$ .*

*Demostración.* Se tiene que toda componente simplicial  $C_v$  es abierta pues es unión de conjuntos abiertos. Además  $C_v = C_{v'}$  si  $v = v'$ .

Veamos ahora que las componentes simpliciales son conjuntos conexas, de hecho, conexas por caminos. Sea  $v$  un vértice de  $K$  y  $w$  otro vértice tal que  $w \sim v$  con  $x \in st(w, K)$ . Sea  $a_0, \dots, a_q$  la sucesión de vértices que conecta  $v$  con  $w$ . Veamos que el camino con vértices sucesivos  $a_0, \dots, a_q, x$  está en  $C_v$ . Se tiene que  $a_i \sim v$  por definición, por lo tanto,  $st(a_i, K) \subset C_v$  y, en particular, la arista  $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$  está contenida en  $C_v$ . De forma similar se prueba que la arista  $\langle a_q, x \rangle$  está contenida en  $st(a_q, K)$ , que a su vez está contenida en  $C_v$ . Luego  $C_v$  es conexo por caminos.

Por último, veamos que dos componentes simpliciales distintas,  $C_v$  y  $C_{v'}$ , son disjuntas. Supongamos que  $x \in C_v \cap C_{v'}$ . Entonces  $x \in st(w, K)$  para algún  $w$  tal que  $w \sim v$ . De la misma manera,  $x \in st(w', K)$  para algún  $w'$  tal que  $w' \sim v'$ . Como  $x$  tiene coordenadas baricéntricas positivas con respecto a ambos,  $w$  y  $w'$ , algún símplice de  $K$  tiene a  $w$  y  $w'$  como vértices. Entonces  $\langle w, w' \rangle$  es un 1-símplice de  $K$ , por lo que  $w \sim w'$ . Esto implica que  $v \sim v'$ , luego  $C_v = C_{v'}$ .

Al ser abiertos, conexos y disjuntos, los conjuntos  $C_v$  coinciden, necesariamente, con las componentes conexas de  $|K|$ . ■

**Teorema 2.1.** *Sea  $K$  un complejo simplicial con  $r$  componentes simpliciales. Entonces  $H_0(K)$  es un grupo abeliano libre que es isomorfo a la suma directa de  $r$  copias de  $\mathbb{Z}$ . De hecho, si  $v_i$  es un vértice perteneciente a la componente simplicial  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , entonces las clases de homología de las 0-cadenas  $v_i$  forman una base de  $H_0(K)$ .*

*Demostración.* Dado un vértice  $w$  de  $K$ , este pertenece a alguna componente conexa de  $|K|$ , llamémosla  $C_j$ . Por hipótesis,  $w \sim v_j$ , luego existe una sucesión  $a_0, \dots, a_q$  de vértices de  $K$  que conecta  $v_j$  con  $w$ . Consideremos la 1-cadena  $c = [a_0, a_1] + \dots + [a_{q-1}, a_q]$ . Se verifica que  $\partial_1(c) = a_q - a_0 = w - v_j$ , luego la 0-cadena  $w$  está en la misma clase de homología que la 0-cadena  $v_j$ . Se deduce entonces que cualquier 0-cadena de  $K$  es combinación lineal de las 0-cadenas  $v_i$  con  $i = 1, \dots, r$ .

Veamos ahora que una 0-cadena de la forma  $c = \sum_{i=1}^r h_i v_i$ , con  $h_i \in \mathbb{Z}$ , se anula únicamente si  $h_i = 0$  para todo  $i$ . Sea  $c = \partial_1(d)$  para alguna 1-cadena  $d$ . Como cada 1-símplice de  $K$  corta únicamente a una componente conexa de  $|K|$ , podemos escribir  $d = \sum_{i=1}^r d_i$ , donde  $d_i$  está formado por todos los términos

de  $d$  que cortan a  $C_i$ . Como  $\partial_1(d) = \sum_{i=1}^r \partial_1(d_i)$  y  $\partial_1(d_i)$  “está” en  $C_i$ , se concluye que  $\partial_1(d_i) = h_i v_i$ . Se tiene, por tanto, que para que  $c$  sea nula, debe darse que  $h_i = 0$  para todo  $i$ . Esto nos dice que  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r\}$  es una base de  $H_0(K)$  y que cada clase de homología  $\bar{c}_0$  con  $c_0 \in Z_0(K)$ , admite una única representación de la forma  $\sum_{i=1}^r h_i \bar{v}_i$ . La función  $\sum_{i=1}^r h_i \bar{v}_i \rightarrow (h_1, \dots, h_r)$  es el isomorfismo buscado entre  $H_0(K)$  y la suma directa de  $r$  copias de  $\mathbb{Z}$ . ■

Veamos ahora cuál es la relación entre la homología ordinaria y la homología reducida que hemos definido anteriormente.

**Teorema 2.2.** *El grupo  $H_0^\#(K)$  es un grupo abeliano libre y además se verifica que  $H_0^\#(K) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(K)$ . De hecho, si  $K$  tiene  $r$  componentes simpliciales y consideramos una sucesión de vértices  $\{v_i\}$ , con  $i = 1, \dots, r$ , donde cada uno de ellos está en una componente simplicial, entonces, fijando un índice  $j$ , las clases de homología de las 0-cadenas  $v_i - v_j$ , para  $i \neq j$ , forman una base de  $H_0^\#(K)$ .*

*Demostración.* Dada una 0-cadena  $c$ , ya vimos que está en la misma clase de homología que una cadena de la forma  $c' = \sum_{i=1}^r h_i v_i$  y que esta era nula únicamente si  $h_i = 0$  para todo  $i$ . Ahora, si  $c \in \text{Ker}(\epsilon)$ , entonces  $\epsilon(c) = \epsilon\left(\sum_{i=1}^r h_i v_i\right) = \sum_{i=1}^r h_i = 0$ . Si  $|K|$  tiene una única componente, esto implica que  $c' = 0$ . Si  $|K|$  tiene más de una componente, entonces  $c'$  tiene que ser combinación lineal de las 0-cadenas  $v_i - v_j$ . ■

## 2.3 Homología del Complejo Cono

Nos disponemos ahora a estudiar la homología de un complejo simplicial muy particular, el complejo cono. Esta será la herramienta principal para determinar los grupos de homología de algunos espacios de mayor relevancia, como por ejemplo el de la esfera (en realidad, una triangulación de la esfera).

**Definición 2.20.** Sea  $K$  un complejo simplicial de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $v$  un punto de  $\mathbb{R}^n$  tal que cada rayo que parte de  $v$  interseca a  $|K|$ , como mucho, en un punto. Definimos el cono de base  $K$  y vértice  $v$  como la colección de símlices de la forma  $\langle v, a_0, \dots, a_q \rangle$  donde  $\langle a_0, \dots, a_q \rangle$  es un símlice de  $K$ , junto a todas las caras de dichos símlices. Veremos a continuación que el conjunto anterior es un complejo simplicial, que denotaremos por  $v * K$ , y cuando no haya confusión lo llamaremos únicamente complejo cono.

**Proposición 2.10.** El complejo cono antes definido es realmente un complejo simplicial y contiene al complejo simplicial  $K$ .

*Demostración.* Sea  $\langle a_0, \dots, a_q \rangle$  un símlice de  $K$ . Veamos primero que los puntos  $v, a_0, \dots, a_q$  son afinmente independientes razonando por reducción al absurdo. Si  $v$  estuviese en el plano  $P$  determinado por  $a_0, \dots, a_q$ , podríamos considerar el segmento que une  $v$  con un punto interior  $x$  de  $\sigma = \langle a_0 \dots a_q \rangle$ . El conjunto  $\text{int}^s \sigma$ , abierto en  $P$ , contendría un intervalo de puntos de este segmento, pero esto contradice el hecho de que el rayo que sale de  $v$  interseca a  $|K|$  en un punto como mucho.

Veamos ahora que  $v * K$  cumple la definición de complejo simplicial. Los símlices de  $v * K$  son de tres tipos: símlices contenidos en  $K$ , símlices de la forma  $\langle v, a_0, \dots, a_n \rangle$  y el 0-símlice  $v$ . Un par de símlices del primer tipo tienen



interiores disjuntos porque  $K$  es un complejo simplicial. Ahora, si denotamos  $\sigma = \langle v, a_0, \dots, a_q \rangle$  y  $\tau = \langle a_0, \dots, a_q \rangle$ , el símplice abierto  $\text{int}^g \sigma$  es la unión de todos los segmentos abiertos que unen  $v$  con puntos de  $\text{int}^g \tau$ , luego dos símplices abiertos de este tipo no se pueden intersectar, porque ningún rayo con punto base  $v$  contiene más de un punto de  $|K|$ . Por la misma razón un símplice del primer tipo y otro del segundo también tienen interiores disjuntos. ■

**Ejemplo 2.2.** Si  $K_\sigma$  es el complejo simplicial que consiste en el símplice  $\sigma = \langle a_0 \dots a_q \rangle$  y todas sus caras, entonces  $K_\sigma = a_0 * K_\tau$ , donde  $\tau$  es la cara de  $\sigma$  opuesta a  $a_0$ . Por tanto, todo símplice de dimensión positiva es el poliedro de un complejo cono.

**Nota 2.4.** Dado un complejo simplicial  $K$ , es claro que dos complejos conos cualesquiera  $v * K$  y  $w * K$  tienen poliedros isomorfos. Basta considerar la aplicación que lleva  $v$  en  $w$  y deja fijos los vértices  $K$ . Esta aplicación induce una aplicación simplicial de  $|v * K|$  en  $|w * K|$ , que es el isomorfismo deseado.

Vamos ahora a estudiar los grupos de homología de un complejo cono. Para ello necesitamos antes introducir la “operación corchete”.

**Definición 2.21.** Sea  $v * K$  un complejo cono. Si  $\sigma = [a_0, \dots, a_q]$  es un símplice orientado de  $K$ , denotaremos por  $[v, \sigma]$  al símplice orientado  $[v, a_0, \dots, a_q]$  de  $v * K$ . La operación está bien definida, pues intercambiar dos vértices en  $[a_0, \dots, a_q]$  da como resultado intercambiar dos vértices en  $[v, a_0, \dots, a_q]$ . De forma más general, si  $c_q = \sum_{i \in I} g_i \sigma_i$  es una  $q$ -cadena de  $K$ , definimos  $[v, c_q] = \sum_{i \in I} g_i [v, \sigma_i]$ .

**Nota 2.5.** 1. Se comprueba fácilmente que la operación corchete es un homomorfismo de  $C_q(K)$  en  $C_{q+1}(v * K)$ .  
2. Damos aquí el resultado de algunos cálculos que utilizaremos de forma recurrente con la operación corchete:

$$\partial([v, \sigma]) = \begin{cases} \sigma - v & \text{si } \dim(\sigma) = 0 \\ \sigma - [v, \partial(\sigma)] & \text{si } \dim(\sigma) > 0 \end{cases}$$

De forma más general tenemos las fórmulas:

$$\begin{aligned} \partial([v, c_0]) &= c_0 - \epsilon(c_0)v \\ \partial([v, c_q]) &= c_q - [v, \partial(c_q)] \text{ si } q > 0 \end{aligned}$$

**Teorema 2.3.** Sea  $v * K$  un complejo cono. Se verifica que  $H_q^\sharp(v * K) = 0$  para todo  $q$ .

*Demostración.* El grupo de homología reducida  $H_0^\sharp(v * K)$  es el trivial porque, claramente,  $|v * K|$  es conexo. Para el caso en que  $q > 0$ , sea  $z_q$  un  $q$ -ciclo de  $v * K$ . Escribimos  $z_q$  de una forma más conveniente:

$$z_q = c_q + [v, d_{q-1}]$$

donde  $c_q$  consiste en los términos de  $z_q$  “contenidos” en  $K$  y  $d_{q-1}$  es una cadena de  $K$ . Veamos que  $z_p - \partial([v, c_q]) = 0$ .

Teniendo en cuenta la nota 2.5, se ve que  $z_q - \partial([v, c_q]) = c_q + [v, d_{q-1}] - c_q + [v, \partial(c_q)] = [v, e_{q-1}]$ , donde  $e_{q-1} = d_{q-1} + \partial(c_q)$  es una cadena en  $K$ . Ahora, como  $z_q$  es un ciclo, se tiene que

$$0 = \begin{cases} e_{q-1} - \epsilon(e_{q-1})v & \text{si } q = 1 \\ e_{q-1} - [v, \partial(e_{q-1})] & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

Se tiene entonces que la parte de esta cadena contenida en  $K$  es  $e_{q-1}$ , por lo tanto  $e_{q-1} = 0$ . Se concluye que  $z_q - \partial([v, c_q]) = [v, e_{q-1}] = 0$  y se tiene el resultado buscado. ■

**| Definición 2.22.** Diremos que un complejo simplicial es acíclico si todos sus grupos de homología reducida son triviales.

**Teorema 2.4.** Sea  $\sigma$  un  $q$ -símplice,  $q > 0$ . El complejo simplicial  $K_\sigma$  formado por  $\sigma$  y todas sus caras es acíclico. Sea  $L$  la frontera simplicial de  $\sigma$ . Una vez orientado  $\sigma$ , se verifica que  $H_{q-1}^\sharp(L)$  es el grupo cíclico infinito generado por la cadena  $\partial(\sigma)$ . Además  $H_i^\sharp(L) = 0$  para todo  $i \neq q - 1$ .

*Demostración.* Como  $K_\sigma$  es un complejo cono, es acíclico. Comparemos ahora los complejos de cadenas:

$$C_q(K_\sigma) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K_\sigma) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K_\sigma) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

$$0 \longrightarrow C_{q-1}(L) \xrightarrow{\partial'_{q-1}} \dots \xrightarrow{\partial'_1} C_0(L) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

Es claro que los grupos de homología de ambos complejos coinciden hasta dimensión  $q - 2$ . Estudiamos ahora qué pasa en el caso  $q - 1$  si  $q > 1$ ,

$$H_{q-1}(L) = Z_{q-1}(L) = \text{Ker}(\partial_{q-1}) = \text{Im}(\partial_q)$$

La primera igualdad se da porque no hay  $(q - 1)$ -bordes, y la última porque  $H_{q-1}(K_\sigma) = 0$ . El grupo  $C_q(K_\sigma)$  es un grupo cíclico e infinito generado por  $\sigma$ . Por lo tanto,  $\text{Im}(\partial_q)$  es cíclico, está generado por  $\partial_q(\sigma)$  y es infinito porque

$C_{q-1}(K_\sigma)$  no tiene torsión. El argumento para el caso  $q = 1$  es similar pero reemplazando  $\partial_{q-1}$  por  $\epsilon$ . ■

## 2.4 Homología Relativa y Sucesión de Mayer-Vietoris

Supongamos que  $K$  es un complejo simplicial y  $L$  es un subcomplejo de este. A veces sucede que conocemos los grupos de homología de uno de ellos pero necesitamos conocer también los del otro. En esta sección vamos a intentar dar una solución a ese problema. Para ello usaremos el grupo de homología relativa. La idea intuitiva es suprimir todas las cadenas de  $L$  usando grupos cocientes. Casi todos los conceptos que se usan en las demostraciones de esta sección están ya explicados en la sección previa de Álgebra Homológica.

**Definición 2.23.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y  $L \subseteq K$  un subcomplejo. El complejo de cadenas  $\{C_q(L), \partial'_q\}$  donde  $\partial'_q = \partial_q|_{C_q(L)}$  es un subcomplejo de  $\{C_q(K), \partial_q\}$ , y llamaremos homología (simplicial orientada) relativa del par  $(K, L)$  a la homología del complejo de cadenas relativas:*

$$C_*(K, L) = \{C_q(K, L), \bar{\partial}_q\} = \{C_q(K)/C_q(L), \bar{\partial}_q\}$$

donde  $\bar{\partial}_q$  es el paso al cociente del operador borde  $\partial_q$

**Proposición 2.11.** *Si  $L$  es un subcomplejo de  $K$ , se tiene la sucesión exacta larga de homología (simplicial orientada) del par  $(K, L)$*

$$\dots \longrightarrow H_q(L) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(L) \longrightarrow \dots$$

*Demostración.* Nos basta con considerar la sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow C_*(L) \xrightarrow{i} C_*(K) \xrightarrow{j} C_*(K, L) \longrightarrow 0$$

donde  $i$  es la aplicación inclusión y  $j$  es la aplicación de paso al cociente. Aplicando la proposición 2.5. se tiene el resultado buscado. ■

**Nota 2.6.** Si reemplazamos  $C_q(K)$  y  $C_q(L)$  por los complejos aumentados  $C_q^\#(K)$  y  $C_q^\#(L)$  obtenemos que el complejo relativo con aumento coincide con el propio complejo y tenemos así la sucesión exacta larga de homología relativa reducida

$$\dots \longrightarrow H_q^\sharp(L) \longrightarrow H_q^\sharp(K) \longrightarrow H_q(K, L) \longrightarrow H_{q-1}^\sharp(L) \longrightarrow \dots$$

**Ejemplo 2.3.** Sea  $\sigma$  un  $q$ -símplice. Sea  $K_\sigma$  el complejo simplicial formado por  $\sigma$  y todas sus caras. Sea  $L$  el  $(q-1)$ -esqueleto de  $K_\sigma$ ,  $q \geq 2$ . Vamos a calcular  $H_p(K, L)$ .

Como  $q \geq 2$ , se verifica que  $K_\sigma$  y  $L$  tienen las mismas 0-cadenas y las mismas 1-cadenas, luego  $H_0(K, L) = H_1(K, L) = 0$ . Para  $q > 1$ , consideramos la sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow H_q(K) \longrightarrow H_q(K, L) \longrightarrow H_{q-1}(L) \longrightarrow H_{q-1}(K) \longrightarrow \dots$$

Como  $H_{q-1}(K) = H_q(K) = 0$ , se comprueba fácilmente que  $H_q(K, L) \cong H_{q-1}(L)$ . Hemos visto en el Teorema 2.4 que  $H_{q-1}(L) \cong \mathbb{Z}$ . Luego  $H_q(K, L) \cong H_{q-1}(L) \cong \mathbb{Z}$  y  $H_p(K, L) = 0$  para todo  $p \neq q$ .

**Proposición 2.12.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $K_1$  y  $K_2$  dos subcomplejos de  $K$ . Entonces existe una sucesión exacta de Mayer-Vietoris

$$\dots \rightarrow H_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\varphi} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{\psi} H_q(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(K_1 \cap K_2) \rightarrow \dots$$

donde  $\varphi(x) = (i_{1*}(x), i_{2*}(x))$  y  $\psi(x) = j_{1*}(x) + j_{2*}(x)$ , siendo  $j_t : K_t \rightarrow K_1 \cup K_2$  e  $i_t : K_1 \cap K_2 \rightarrow K_t$ ,  $t = 1, 2$ , las correspondientes inclusiones.

**Demostración.** Tal y como dijimos en la definición 2.14, tenemos la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H_q(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) \xrightarrow{\varphi} H_q(\mathcal{C}_1) \oplus H_q(\mathcal{C}_2) \xrightarrow{\psi} H_q(\text{Im}(j)) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) \rightarrow \dots$$

donde  $\mathcal{C}_i = \{C_q(K_i), \partial_q\}$ ,  $i = 1, 2$ . Ahora, se cumple que  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = C_*(K_1 \cap K_2)$ . Además,  $\text{Im}(j) = C_*(K_1 \cup K_2)$ . En efecto, que  $\text{Im}(j) \subseteq C_q(K_1 \cup K_2)$  se obtiene de forma trivial. Para ver la implicación contraria, si  $\sigma \in K_1 \cup K_2$  es un símplice orientado, entonces  $\sigma \in K_1$  o  $\sigma \in K_2$ . Si, por ejemplo,  $\sigma \in K_1$ , entonces  $j(\sigma, 0) = \sigma$ , con lo que  $\sigma \in \text{Im}(j)$ . De manera similar se hace para  $K_2$ . De esta manera se tiene que todos los generadores de  $C_q(K_1 \cup K_2)$  están en  $\text{Im}(j)$ , con lo que se ve la igualdad. ■

**Nota 2.7.** 1. La sucesión exacta de Mayer-Vietoris que acabamos de construir también es válida para la homología reducida.

2. Por el segundo teorema de isomorfía tenemos para todo  $q$  el isomorfismo

$$\begin{aligned} i_q : C_q(K_2)/(C_q(K_1) \cap C_q(K_2)) &\longrightarrow (C_q(K_1) + C_q(K_2))/C_q(K_1) = \\ &= C_q(K_1 \cup K_2)/C_q(K_1). \end{aligned}$$

que induce isomorfismos

$$i_* : H_q(K_2, K_1 \cap K_2) \longrightarrow H_q(K_1 \cup K_2, K_1).$$

Más aún, de acuerdo con la proposición 2.5, se tiene que  $\Delta$  es la composición

$$H_q(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{j_*} H_q(K_1 \cup K_2, K_1) \xrightarrow{i_*} H_q(K_2, K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(K_1 \cap K_2)$$

donde  $\partial_*$  es el operador borde de la sucesión del par  $(K_1, K_1 \cap K_2)$ .

Ahora vamos a dar un resultado que puede ser útil en el cálculo de algunos grupos de homología, pero antes necesitamos dar algunas definiciones sobre símlices y complejos.

**| Definición 2.24.** *Sea  $K$  un complejo simplicial. Un símlice principal (o maximal) de  $K$  es un símlice que no es cara propia de ningún símlice de  $K$ .*

**| Definición 2.25.** *Sea  $K$  un complejo simplicial. Si  $\tau < \sigma$  es una cara propia de  $\sigma$  que no es cara propia de ningún otro símlice de  $K$ , diremos que  $\tau$  es una cara libre de  $\sigma$ . Es claro que tiene que ocurrir que  $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$ .*

**| Definición 2.26.** *Sea  $K$  un complejo simplicial que tiene un símlice (principal)  $\sigma$  con cara libre  $\tau$ . Llamaremos colapso elemental de  $K$  a través de  $\tau$  al subcomplejo  $L = K - \{\sigma, \tau\}$ , y lo escribiremos  $K \searrow L$ .*

*Un colapso de  $K$  sobre  $L$ ,  $K \searrow \searrow L$ , es una sucesión de colapsos elementales*

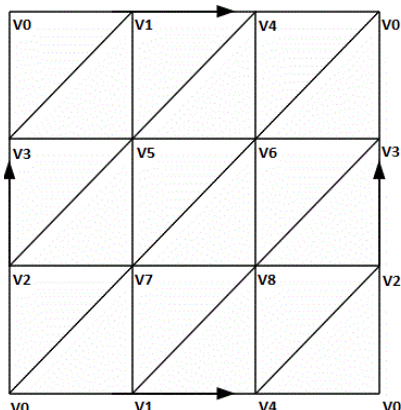
$$K = K_0 \searrow K_1 \searrow \dots \searrow K_n = L.$$

*También diremos que  $K$  colapsa sobre  $L$ .*

**Proposición 2.13.** *Sea  $L \subseteq K$  un subcomplejo sobre el que colapsa  $K$ . Entonces  $K$  y  $L$  tienen los mismos grupos de homología (reducida).*

*Demostración.* Es suficiente probarlo para un colapso elemental  $K \searrow L = K - \{\sigma, \tau\}$  a través de la cara libre  $\tau < \sigma$ . En tal caso aplicamos la sucesión de Mayer-Vietoris de la proposición 2.12 a  $K$ ,  $K_1 = L$  y  $K_2 = \sigma$ . Entonces  $K_1 \cap K_2$  es el complejo cono sobre la frontera simplicial de  $\sigma$ , por lo que los grupos de homología de  $K_2$  y  $K_1 \cap K_2$  son triviales. De aquí se sigue inmediatamente un isomorfismo entre  $H_q(K)$  y  $H_q(L)$  para todo  $q$ . ■

**Ejemplo 2.4.** Calculemos los grupos de homología de la siguiente “triangulación” del toro.



Llamemos  $K$  al complejo simplicial asociado al esquema de vértices de la figura anterior. Sea  $K_1$  el subcomplejo generado por el simplejo geométrico  $\sigma = \langle v_5, v_6, v_7 \rangle$ , es decir,  $K_1 = K_\sigma$ . Sea  $K_2 = K - \{\sigma\}$ .

Sea  $C_1$  el subcomplejo de  $K$  cuyos simplejos principales son  $\langle v_0, v_1 \rangle$ ,  $\langle v_1, v_4 \rangle$  y  $\langle v_0, v_4 \rangle$ . Por el Teorema 2.4, sabemos que  $H_1(C_1)$  está generado por la clase de homología del ciclo  $z_1 = [v_0, v_1] + [v_1, v_4] - [v_0, v_4]$ , y que  $H_q^\sharp(C_1) = 0$  si  $q \neq 1$ . Análogamente, sea  $C_2$  el subcomplejo de  $K$  cuyos simplejos principales son  $\langle v_0, v_3 \rangle$ ,  $\langle v_3, v_2 \rangle$  y  $\langle v_0, v_2 \rangle$ . En este caso,  $H_1(C_2)$  está generado por la clase de homología del ciclo  $z_2 = [v_0, v_3] - [v_2, v_3] - [v_0, v_2]$ , y  $H_q^\sharp(C_2) = 0$  si  $q \neq 1$ . Obsérvese que tanto  $|C_1|$  como  $|C_2|$  son copias de  $S^1$  y que  $|C_1 \cup C_2|$  es la suma punteada de dos copias de  $S^1$  (es decir, una copia de la “figura ocho”), pues  $C_1 \cap C_2$  se reduce al vértice  $v_0$ .

Se comprueba sin dificultad que  $K_2$  colapsa sobre  $C_1 \cup C_2$ . Así que, de acuerdo con la proposición 2.13,  $H_q^\sharp(K_2) \cong H_q^\sharp(C_1 \cup C_2)$ .

De la exactitud de la sucesión de Mayer-Vietoris

$$0 = H_1(C_1 \cap C_2) \rightarrow H_1(C_1) \oplus H_1(C_2) \rightarrow H_1(C_1 \cup C_2) \rightarrow H_0^\sharp(C_1 \cap C_2) = 0$$

deducimos que

$$H_1(C_1 \cup C_2) \cong H_1(C_1) \oplus H_1(C_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Para  $q \neq 1$  deduciríamos análogamente que  $H_q^\sharp(C_1 \cup C_2) = 0$ .

Vamos a considerar ahora la sucesión de Mayer-Vietoris correspondiente a los subcomplejos  $K_1$  y  $K_2$ :

$$\begin{aligned} H_2(K_1) \oplus H_2(K_2) &\rightarrow H_2(K_1 \cup K_2) \rightarrow H_1(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) \rightarrow \\ &\rightarrow H_1(K_1 \cup K_2) \rightarrow H_0^\sharp(K_1 \cap K_2). \end{aligned}$$

Así pues, la sucesión de Mayer-Vietoris anterior consiste en

$$0 \longrightarrow H_2(K) \xrightarrow{\Delta} H_1(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} H_1(K_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j_*} H_1(K) \longrightarrow 0$$

por lo que solo queda estudiar el homomorfismo  $i_*$  inducido por la inclusión obvia. Además,  $K_1 \cap K_2$  es la frontera simplicial de  $\sigma$  y, por el Teorema 2.4, sabemos que  $H_1(K_1 \cap K_2)$  está generado por la clase de homología del ciclo  $z = [v_5, v_6] + [v_6, v_7] - [v_5, v_7]$ .

Finalmente, si orientamos todos los 2-símplices en el sentido de las agujas del reloj, y  $c$  denota la cadena formada por la suma de todos ellos menos  $\sigma$ , se tiene que  $\partial(c) = -z$ . Por tanto, la clase de homología  $z$  en  $H_1(K_2)$  es nula e  $i_*$  es el homomorfismo nulo. De aquí se deduce que tanto  $\Delta$  como  $j_*$  son isomorfismos. De todo esto se sigue que

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}, H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, H_2(K) \cong \mathbb{Z} \text{ y } H_q(K) = 0 \text{ si } q > 2.$$

## 2.5 Relación entre $H_1(K)$ y $\pi_1(|K|, a)$

Para terminar este capítulo vamos a dar la relación existente entre el primer grupo de homología de un complejo simplicial  $K$  y el grupo fundamental de su poliedro asociado  $|K|$ . En realidad trabajaremos con el grupo de lazos de aristas  $\pi(K, a)$ , que es isomorfo al grupo fundamental  $\pi_1(|K|, a)$ . Antes de llegar al resultado principal, daremos dos conceptos necesarios para la comprensión de su demostración.

**Teorema 2.5.** *Sea  $K$  un complejo simplicial. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1.  $|K|$  es conexo.
2.  $|K|$  es conexo por caminos.
3.  $K$  es conexo por caminos de aristas, es decir, para cada par de vértices de  $K$ , existe un camino de aristas en  $K$  que va de uno al otro vértice. (También se dice que  $K$  es combinatoria o simplicialmente conexo.)

*Demostración.* 1.  $\Rightarrow$  2. El poliedro  $|K|$  es localmente conexo por caminos, ya que las estrellas de los vértices de  $K$  son conjuntos abiertos y conexos por caminos (que recubren  $|K|$ ). Luego las componentes conexas por caminos de  $|K|$  son conjuntos abiertos y disjuntos dos a dos, así que también son cerrados.

Como, por hipótesis,  $|K|$  es conexo, concluimos que hay una única componente conexa por caminos.

2.  $\Rightarrow$  3. Sean  $a$  y  $b$  dos vértices de  $K$ . Existe, por hipótesis, un camino topológico  $\alpha : [0, 1] \rightarrow |K|$  que va del vértice  $a$  al vértice  $b$ . Aplicando el teorema de aproximación simplicial, se obtiene el camino de aristas que va del vértice  $a$  al vértice  $b$ .

3.  $\Rightarrow$  1. Fijamos un vértice  $a$  de  $K$ . Veremos que, para cada  $x \in |K|$ , existe un subconjunto conexo  $A_x$  de  $|K|$  que contiene al vértice  $a$  y al punto  $x$ . Concluiremos así que  $|K|$  es conexo por ser unión de subconjuntos conexos con un punto en común. Probemos ahora la existencia de los conjuntos conexos  $A_x$ . Si  $x = a$ , basta tomar  $A_x = \{a\}$ . Sea  $x \neq a$ . El punto  $x$  pertenece al interior geométrico de un (único) símlice  $\sigma \in K$ . Existe un vértice  $a_n$  de  $\sigma$  que es diferente de  $a$  (pues  $\sigma \neq \langle a \rangle$ ). Existe, por hipótesis, un camino de aristas  $aa_1 \cdots a_n$  que va del vértice  $a$  al vértice  $a_n$ . Podemos suponer que en ese camino de aristas no hay vértices repetidos, y tomar

$$A_x = \langle a, a_1 \rangle \cup \cdots \cup \langle a_{n-1}, a_n \rangle \cup \sigma.$$

lo que acaba la demostración. ■

**Definición 2.27.** Sea  $G$  un grupo, y sean  $a, b \in G$ . Observemos que  $ab = ba$  si, y solo si,  $aba^{-1}b^{-1} = 1$ . Decimos que el elemento  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  es un conmutador de  $G$ . Llamaremos subgrupo conmutador al subgrupo de  $G$  engendrado por los conmutadores, y lo denotaremos por  $[G, G]$ . El subgrupo conmutador es un subgrupo normal de  $G$ , y el grupo cociente  $G/[G, G]$  es obviamente abeliano (la abelianización de  $G$ ).

Vamos ahora con el resultado principal, el que nos muestra la relación entre el primer grupo de homología de un complejo simplicial y el grupo fundamental de su poliedro asociado.

**Teorema 2.6.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $a$  un vértice de  $K$ . Si  $|K|$  es conexo, entonces  $H_1(K)$  es el abelianizado de  $\pi_1(|K|, a)$ .

*Demostración.* En este caso, como indicamos en la introducción de esta sección, no vamos a trabajar directamente con el grupo fundamental  $\pi_1(|K|, a)$ , sino con el grupo de lazos de aristas  $\pi(K, a)$ , que es isomorfo al grupo fundamental.

Recordemos que un lazo de aristas en  $K$  con punto base el vértice  $a$  es una sucesión finita,  $\alpha$ , de vértices de  $K$



$$\alpha = aa_1 \dots a_n a$$

que comienza y termina con  $a$ , y en la que cada par de vértices consecutivos son vértices de un mismo símplice de  $K$ .

Para construir  $\pi(K, a)$  definiremos una relación de equivalencia entre los lazos de aristas con punto base  $a$ .

Decimos que dos lazos de aristas  $\alpha$  y  $\beta$  son equivalentes si uno puede obtenerse a partir del otro mediante una sucesión finita de operaciones elementales, es decir, operaciones de uno de los siguientes tipos:

- (a) Si  $a_{r-1} = a_r$ , reemplazar  $\dots a_{r-1} a_r \dots$  por  $\dots a_r \dots$  o, recíprocamente, reemplazar  $\dots a_r \dots$  por  $\dots a_{r-1} a_r \dots$ .
- (b) Si  $a_{r-1}, a_r, a_{r+1}$  son vértices del mismo símplice de  $K$ , reemplazar

$$\dots a_{r-1} a_r a_{r+1} \dots$$

por  $\dots a_{r-1} a_{r+1} \dots$  o lo recíproco.

Denotaremos por  $[\alpha]$  la clase de equivalencia del lazo  $[\alpha]$ .

Definiremos un morfismo sobreyectivo  $\phi : \pi(K, a) \longrightarrow H_1(K)$  cuyo núcleo será el subgrupo conmutador de  $\pi(K, a)$ .

### 1. Definición de $\phi$

Para definir  $\phi$  vamos a asociar un 1-ciclo a cada lazo de aristas con punto base  $a$ . Nos conviene empezar asociando una 1-cadena  $c(\alpha) \in C_1(K)$  a cada camino de aristas  $\alpha$  en  $K$ . Si  $\alpha = a_0 a_1 \dots a_n$ , definimos  $c(\alpha) = [a_0, a_1] + [a_1, a_2] + \dots + [a_{n-1}, a_n]$ , conviniendo en omitir  $[a_{i-1}, a_i]$  si  $a_{i-1} = a_i$  (pues en ese caso no se trataría de una verdadera arista de  $K$ ). Observamos lo siguiente:

- Si  $\alpha$  es un caminos de aristas, entonces  $c(\alpha^{-1}) = -c(\alpha)$ .
- Si  $\alpha$  y  $\beta$  son caminos de aristas que puede empalmarse, entonces  $c(\alpha\beta) = c(\alpha) + c(\beta)$ .
- Si  $\alpha$  es una lazo de aristas, entonces  $c(\alpha)$  es un ciclo.

Definimos:

$$\phi([\alpha]) = \overline{c(\alpha)} \quad (\text{la "barra" indica clase de homología}).$$

### 2. La aplicación $\phi$ está bien definida

Para demostrar que  $\phi$  está bien definida basta probar que, si el lazo  $\beta$  se obtiene a partir del lazo  $\alpha$  mediante una sola operación elemental (del

tipo (a) o del tipo (b)), entonces  $c(\alpha)$  y  $c(\beta)$  son homólogos. Veamos esto. Si  $\beta$  se obtiene a partir de  $\alpha$  mediante una operación de tipo (a), entonces  $c(\alpha) = c(\beta)$ , ya que hemos convenido en omitir  $[a_{i-1}, a_i]$  si  $a_{i-1} = a_i$ . Supongamos ahora que  $\beta$  se obtiene a partir de  $\alpha$  mediante una operación de tipo (b) en la que, o bien reemplazamos  $\cdots a_{i-1}a_i a_{i+1} \cdots$  por  $\cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots$ , o bien lo recíproco. Si  $a_{i-1}$ ,  $a_i$  y  $a_{i+1}$  son los vértices de un 2-símplice  $\sigma = [a_{i-1}, a_i, a_{i+1}]$  de  $K$ , entonces, o bien

$$c(\alpha) - c(\beta) = [a_{i-1}, a_i] + [a_i, a_{i+1}] - [a_{i-1}, a_{i+1}] = \partial\sigma,$$

o bien  $c(\alpha) - c(\beta) = -\partial\sigma$ . Si los vértices  $a_{i-1}$ ,  $a_i$  y  $a_{i+1}$  son vértices del mismo símplex, pero dos de ellos (o los tres) coinciden, entonces  $c(\alpha) = c(\beta)$ . Vemos que, en todos los casos,  $c(\alpha)$  y  $c(\beta)$  son homólogos.

3.  $\phi$  es homomorfismo de grupos:

Basta tener en cuenta que  $c(\alpha\beta) = c(\alpha) + c(\beta)$ .

4.  $\phi$  es sobreyectivo:

Consideremos un 1-ciclo  $z = \sum_{i=1}^n n_i l_i$ , donde los  $n_i$  son números enteros y

los  $l_i = [a_{i0}, a_{i1}]$  son 1-símplices orientados.

Para cada  $i$ , sea  $\eta_{i0}$  un camino de aristas en  $K$  que va desde el vértice  $a$  hasta  $a_{i0}$ , y sea  $\eta_{i1}$  un camino de aristas que va desde el vértice  $a$  hasta  $a_{i1}$  (téngase en cuenta que  $K$  es conexo por caminos de aristas). Los caminos  $\eta_{ij}$  se eligen de forma que sólo dependen de los vértices  $a_{ij}$ , no de los índices.

Consideremos ahora, para cada  $i$ , el lazo de aristas  $\gamma_i = \eta_{i0}(a_{i0}a_{i1})\eta_{i1}^{-1}$ . Observemos que  $c(\gamma_i) = c(\eta_{i0}) + l_i - c(\eta_{i1})$ . Veremos a continuación que

$z = \sum_{i=1}^n n_i c(\gamma_i)$ . Tenemos:

$$\sum_{i=1}^n n_i c(\gamma_i) = \sum_{i=1}^n n_i (c(\eta_{i0}) + l_i - c(\eta_{i1})) = \sum_{i=1}^n n_i l_i + \sum_{i=1}^n n_i (c(\eta_{i0}) - c(\eta_{i1})).$$

En la expresión anterior, el primer sumatorio coincide con  $z$ . Veamos que el segundo es nulo. Puesto que  $z$  es un ciclo, se verifica que

$$0 = \partial(z) = \sum_i n_i (a_{i1} - a_{i0}).$$

Así pues, tras agrupar términos en la expresión anterior, todos los coeficientes son nulos. Esa misma agrupación de coeficientes podemos realizarla en la expresión  $\sum_{i=1}^n n_i (c(\eta_{i0}) - c(\eta_{i1}))$ , ya que, cuando los puntos

$a_{ij}$  coinciden, también coinciden las cadenas  $c(\eta_{ij})$ . Así pues, tras esa agrupación de términos, los coeficientes son nulos y, en consecuencia, es nulo el sumatorio.

Observemos finalmente que

$$\phi\left(\prod_i [\gamma_i]^{m_i}\right) = \sum_{i=1}^n n_i \phi(\gamma_i) = \sum_{i=1}^n n_i \overline{c(\gamma_i)} = \bar{z}.$$

5. El subgrupo conmutador de  $\pi(K, a)$  está contenido en el núcleo de  $\phi$ :  
Basta tener en cuenta que, al ser  $H_1(K)$  abeliano, los conmutadores pertenecen al núcleo de  $\phi$ .
6. El núcleo de  $\phi$  está contenido en el subgrupo conmutador de  $\pi(K, a)$ :  
Esta es la parte más difícil. Primeramente vamos a probar un lema que nos será de gran ayuda.

**Lema 2.6.** *Sea  $\gamma$  un lazo de aristas en  $K$ , con punto base el vértice  $a$ , tal que  $\gamma = \prod_i \alpha_i^{\varepsilon_i}$ , donde los  $\alpha_i$  son caminos de aristas (no necesariamente distintos) y  $\varepsilon_i = \pm 1$ . Sea  $\exp(\alpha_i) = \sum_j \{\varepsilon_j : \alpha_j = \alpha_i\}$ . Si  $\exp(\alpha_i) = 0$ , para cada uno de los distintos factores  $\alpha_i$  de  $\gamma$ , entonces  $[\gamma]$  pertenece al subgrupo conmutador de  $\pi(K, a)$ .*

*Demostración.* Para cada  $i$ , elegimos caminos  $\eta_{i0}$  y  $\eta_{i1}$  que van desde el vértice  $a$  hasta el punto inicial y final, respectivamente, del camino  $\alpha_i$ . Ahora bien, como antes, estos caminos se eligen de forma que dependen sólo de los puntos iniciales y finales, no de los índices. Además, si el punto inicial de algún camino  $\alpha_i$  coincide con el vértice  $a$ , entonces se elige como camino  $\eta_{i0}$  el camino formado únicamente por el vértice  $a$ , y análogamente si el punto final de algún  $\alpha_i$  coincide con el vértice  $a$ .

De esa forma, si  $\beta_i = \eta_{i0} \alpha_i \eta_{i1}^{-1}$ , entonces:

$$[\gamma] = \left[ \prod_i \alpha_i^{\varepsilon_i} \right] = \left[ \prod_i \beta_i^{\varepsilon_i} \right].$$

Sea ahora  $\pi'$  el cociente de  $\pi(K, a)$  por el subgrupo conmutador, y sea  $\bar{\gamma} \in \pi'$  la clase lateral de  $[\gamma]$ . Veamos que se verifica:

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \bar{\beta}_i = \sum_i \exp(\alpha_i) \bar{\beta}_i = 0,$$

pudiendo así concluir que  $[\gamma]$  está en el subgrupo conmutador. Para justificar la primera igualdad, basta tener en cuenta que el grupo  $\pi'$  es

abeliano. Para probar la segunda igualdad, observamos que si  $\alpha_j = \alpha_i$  entonces  $\beta_j = \beta_i$  y, en consecuencia, también  $\overline{\beta_j} = \overline{\beta_i}$ . Observamos también que en la última suma sólo se tienen en cuenta los caminos que sean distintos entre sí. ■

Abordaremos ahora la última parte de la demostración del teorema. Sea  $\alpha$  un lazo de aristas en  $K$ , con punto base el vértice  $a$ , tal que  $c(\alpha)$  es un borde. Queremos ver que  $[\alpha]$  pertenece al subgrupo conmutador de  $\pi(K, a)$ .

Sea  $c(\alpha) = \partial(\sum_{i=1}^n n_i \sigma_i)$ , donde los  $n_i$  son números enteros y los  $\sigma_i =$

$[a_i, b_i, c_i]$  son 2-símplices orientados de  $K$ . Para cada  $i$ , elegimos un camino de aristas en  $K$  que va desde el vértice  $a$  hasta el vértice  $a_i$ . Obsérvese que, haciendo operaciones elementales, podemos transformar el lazo  $\gamma_i(a_i b_i c_i a_i) \gamma_i^{-1}$  en el lazo formado únicamente por el vértice  $a$ . Así pues,  $[\gamma_i(a_i b_i c_i a_i) \gamma_i^{-1}] = 1$ . Luego, si  $\beta = \prod_i (\gamma_i(a_i b_i c_i a_i) \gamma_i^{-1})^{n_i}$ , entonces  $[\beta] = 1$

y, en consecuencia,  $[\alpha \beta^{-1}] = [\alpha]$ . Probaremos a continuación que  $[\alpha \beta^{-1}]$  está en el subgrupo conmutador de  $\pi(K, a)$ . Podremos así concluir.

Observemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} c(\beta) &= \sum_{i=1}^n n_i c(\gamma_i(a_i b_i c_i a_i) \gamma_i^{-1}) = \sum_{i=1}^n n_i c(a_i b_i c_i a_i) = \sum_{i=1}^n n_i \partial \sigma_i = \\ &= \partial(\sum_{i=1}^n n_i \sigma_i) = c(\alpha). \end{aligned}$$

Luego,  $c(\alpha \beta^{-1}) = 0$ .

En el lazo  $\alpha \beta^{-1}$  podemos suprimir, mediante operaciones elementales, los vértices repetidos que sean consecutivos, así que podemos suponer que

$$\alpha \beta^{-1} = a a_1 a_2 \cdots a_n a,$$

siendo  $[a, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_n, a]$  aristas orientadas de  $K$ .

Consideremos ahora los caminos  $\alpha_1 = a a_1, \alpha_2 = a_1 a_2, \dots, \alpha_{n+1} = a_n a$ . Es obvio que

$$\alpha \beta^{-1} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}.$$

Para poder aplicar el lema anterior, convenimos en que, si entre los caminos anteriores, se da la circunstancia de que  $\alpha_i = uv$  y  $\alpha_j = vu$ , entonces

escribimos  $\alpha_j = (vu)^{-1}$ . Puesto que  $c(\alpha\beta^{-1}) = 0$ , la factorización anterior de  $\alpha\beta^{-1}$  satisface el lema y, en consecuencia,  $\alpha\beta^{-1}$  está en el subgrupo conmutador de  $\pi(K, a)$ .





## 3 | COMPUTABILIDAD

En este último capítulo vamos a recordar algunas nociones de la Teoría de Grupos abelianos y vamos a usar esto para probar el Teorema de Estructura de los Grupos Abelianos Finitamente Generados. A continuación, utilizando este resultado, daremos un algoritmo que nos permita calcular los grupos de homología de cualquier complejo simplicial.

Los libros de referencia para este capítulo han sido, “Introducción al Álgebra, Volumen 1” de S. Xambó, F. Delgado y C. Fuertes [XDF] y “Elements of Algebraic Topology” de J.R. Munkres [Munk]. Hemos utilizado también los “Apuntes de Teoría de Estructuras Algebraicas” del Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla correspondientes al curso 2013-2014.

### 3.1 Grupos Abelianos y Teorema de Estructura

En esta sección vamos a revisar algunos resultados sobre grupos abelianos que nos serán útiles en este capítulo. Como es costumbre, utilizaremos notación aditiva al tratar con grupos abelianos y  $0$  denotará el elemento neutro. Nuestro objetivo es probar el Teorema de Estructura de los Grupos Abelianos Finitamente Generados.

**| Definición 3.1.** *Un grupo abeliano  $G$  es libre si tiene una base, es decir, si hay una familia  $\{g_i\}_{i \in I}$  de elementos de  $G$  tal que cada  $g \in G$  se puede escribir de forma única como una suma finita de la forma  $g = \sum_{i \in I} n_i g_i$  con  $n_i \in \mathbb{Z}$  para cada  $i$ .*

*La unicidad implica que cada elemento  $g_i$  tiene orden infinito y, por lo tanto, cada uno de ellos genera un subgrupo cíclico infinito de  $G$ .*

De forma más general, si cada  $g \in G$  se puede expresar como una suma finita

de la forma  $g = \sum_{i \in I} n_i g_i$  con  $n_i \in \mathbb{Z}$  para cada  $i$ , pero no necesariamente de forma única, entonces decimos que  $G$  está generado por la familia  $\{g_i\}$ . Si esta familia es finita, decimos que  $G$  está finitamente generado.

Un conjunto generador de  $G$ , si además es independiente, es una base de  $G$ .

Sea  $G$  un grupo abeliano. El conjunto de todos los elementos de orden finito de  $G$  es un subgrupo de  $G$  llamado el *subgrupo de torsión*,  $T(G)$ . Si el subgrupo de torsión es el trivial, decimos que  $G$  es un grupo *libre de torsión*. Un grupo abeliano libre es necesariamente un grupo libre de torsión, pero la implicación contraria no es verdadera.

**| Definición 3.2.** Sea  $G$  un grupo abeliano y supongamos que  $\{G_i\}_{i \in I}$  es una colección de subgrupos de  $G$ . Si cada elemento  $g \in G$  se puede expresar, de forma única, como  $g = \sum_{i \in I} g_i$  donde  $g_i \in G_i$  para cada  $i$ , decimos que  $G$  es suma directa interna de los subgrupos  $G_i$  y lo denotamos por  $G = \oplus_{i \in I} G_i$ .

Si cada  $g \in G$  se puede expresar como  $g = \sum_{i \in I} g_i$  con  $g_i \in G_i$  para cada  $i$ , pero no necesariamente de forma única, entonces decimos que  $G$  es suma de los grupos  $\{G_i\}$  y lo denotamos por  $G = \sum_{i \in I} G_i$ . También diremos, de forma equivalente, que los subgrupos  $\{G_i\}$  generan  $G$ .

**| Definición 3.3.** Sea  $\{G_i\}_{i \in I}$  una familia de grupos abelianos. Llamaremos *producto directo* de esa familia al grupo cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano de los conjuntos  $G_i$  y cuya operación asociada sea la suma componente a componente. Llamaremos *suma directa externa* de la familia anterior al subgrupo del producto directo formado por todas las tuplas  $(g_i)_{i \in I}$  tales que  $g_i = 0$  para todo  $i$  excepto para un número finito de ellos.

Veamos cuál es la relación existente la suma directa interna y la suma directa externa de un grupo. Supongamos que  $G$  es la suma directa externa de la familia de grupos  $\{G_i\}_{i \in I}$ . Definimos  $\pi_k : G \rightarrow G_k$  como la proyección sobre el  $k$ -ésimo factor, para cada  $k$ . Definimos también  $j_k : G_k \rightarrow G$  mediante

$j_k(g) = (0, \dots, 0, \overbrace{g}^k, 0, \dots, 0)$ . Se tiene entonces que  $\pi_k \circ j_k = \text{id}$  para todo  $k$  y  $\pi_i \circ j_k = 0$  para  $i \neq k$ . Por lo que  $G$  es la suma directa interna de los grupos  $G'_i = j_i(G_i)$ , donde  $G'_i$  es isomorfo a  $G_i$  para todo  $i$ .

Vemos que los dos conceptos están fuertemente relacionados y por ello usaremos la misma notación para ambos, indicando de forma precisa a cuál nos



referimos en los casos en que pueda haber confusión.

Vamos a ver ahora uno de los principales teoremas sobre grupos abelianos libres. Esto nos facilitará la comprensión de los resultados que demos cuando tratemos la computabilidad de los grupos de homología simplicial. Previamente trataremos algunos conceptos que nos facilitarán la demostración del teorema.

**Notación 3.1.** Cuando queramos hacer referencia al orden de un grupo  $G$ , lo denotaremos por  $|G|$ , y cuando nos refiramos al orden de un elemento  $x$  de un grupo lo denotaremos por  $ord(x)$ .

Cuando queramos hacer referencia al subgrupo generado por una serie de elementos  $a_1, \dots, a_n$  lo haremos usando la siguiente notación,  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .

Se comprueba fácilmente, que un grupo abeliano es libre si, y solo si, es suma directa de grupos cíclicos infinitos, es decir, si es isomorfo a un grupo del tipo  $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_i$  con  $I$  un conjunto de índices y  $\mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}$  para todo  $i$ .

**Lema 3.1.** *Sea  $e_1, \dots, e_r$  una base de un grupo libre  $L$ . Entonces*

$$\epsilon e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_r e_r, e_2, \dots, e_r$$

*es también una base de  $G$ , cualesquiera que sean los enteros  $k_2, \dots, k_r$  y  $\epsilon = \pm 1$ .*

**Demostración.** Llamemos  $X$  al conjunto  $\{e_1, \dots, e_r\}$  e  $Y$  al conjunto  $\{\epsilon e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_r e_r, e_2, \dots, e_r\}$ . Veamos que  $Y$  es un generador de  $G$  y que es independiente. Para facilitar la notación, supondremos que  $\epsilon = 1$ , el otro caso se haría de forma análoga.

Sea  $y = e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_r e_r$ , tenemos que  $e_1 = y - k_2 e_2 - \dots - k_r e_r$ . Por tanto  $Y$  sí que es un generador de  $G$ , ya que  $X$  es una base.

Por otra parte, si tenemos que

$$0 = \alpha y + \sum_{i=2}^r \lambda_i e_i = \alpha e_1 + (\alpha k_2 + \lambda_2) e_2 + \dots + (\alpha k_r + \lambda_r) e_r,$$

al ser  $X$  una base, se cumple que  $\alpha = 0$  y  $\lambda_i = 0$  para todo  $i = 2, \dots, r$ . En conclusión,  $Y$  es una base de  $G$ . ■

**Lema 3.2.** *Sea  $e_1, \dots, e_r$  una base de un grupo abeliano libre  $G$  y  $d_1, \dots, d_r$  enteros positivos. Se cumple que el grupo cociente  $G/\langle d_1 e_1, \dots, d_r e_r \rangle$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}/(d_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(d_r)$ .*

**Demostración.** Consideremos el homomorfismo de grupos

$$\phi : G \longrightarrow G/(d_1) \oplus \dots \oplus G/(d_r)$$

dado por  $\phi(n_1e_1 + \dots + n_re_r) = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_r)$ .

1.  $\phi$  está bien definido, ya que al ser  $e_1, \dots, e_r$  base de  $G$ , la escritura de un elemento de  $G$  en la forma  $\sum_{i=1}^r n_i e_i$  es única.

2.  $\phi$  es morfismo de grupos, obvio.

3.  $\phi$  es sobreyectivo, obvio.

4.  $\text{Ker}(\phi) \subseteq \langle d_1e_1, \dots, d_re_r \rangle$ :

Basta ver que  $d_i e_i \in \text{Ker}(\phi)$ , lo que es obvio, ya que

$$\phi(d_i e_i) = (\bar{0}, \dots, \bar{d}_i, \dots, \bar{0}) = (\bar{0}, \dots, \bar{0}, \dots, \bar{0}).$$

5.  $\text{Ker}(\phi) \subseteq \langle d_1e_1, \dots, d_re_r \rangle$ :

Sea  $x \in G$ ,  $x = \sum_{i=1}^r n_i e_i$ . Si  $x \in \text{Ker}(\phi)$ , entonces  $(\bar{0}, \dots, \bar{0}) = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_r)$ , luego  $\bar{n}_i = \bar{0}$  en  $G/(d_i)$ , para todo  $i$ . Así que  $n_i = k_i d_i$  siendo  $k_i \in \mathbb{Z}$ . De donde  $x = \sum_{i=1}^r k_i (d_i e_i) \in \langle d_1e_1, \dots, d_re_r \rangle$ .

■

**Lema 3.3.** *Si un grupo abeliano  $G$  admite una base con  $r$  elementos, entonces todas las bases de  $G$  tienen  $r$  elementos.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grupo libre y sea  $2G$  el subgrupo formado por los elementos de la forma  $2x$ ,  $x \in G$ . Si  $\{e_i\}_{i \in I}$  es una base de  $G$ , se comprueba fácilmente que  $\{2e_i\}_{i \in I}$  es una base de  $2G$ . Si el cardinal de la base es  $r$ , entonces  $G/2G$  es un grupo finito de orden  $2^r$ , ya que es isomorfo a  $(\mathbb{Z}/(2))^r$ . Como  $G/2G$  no depende de la base, concluimos que  $r$  tampoco. Por otro lado, si el cardinal de  $I$  es infinito, entonces el grupo  $G/2G$  es infinito también y se cumple lo que buscábamos.

■

**Definición 3.4.** *Si un grupo abeliano admite una base finita, al cardinal de esta lo denominaremos rango del grupo libre. Si el grupo admite base infinita, diremos que tiene rango infinito.*

**Lema 3.4.** *Si un conjunto de generadores  $e_1, \dots, e_r$  de un grupo abeliano satisface una relación no trivial, entonces existen otro conjunto de generadores  $e'_1, \dots, e'_r$ , un entero no nulo  $q$  y un  $i$  tales que  $qe'_i = 0$ .*

*Demostración.* Sean  $e_1, \dots, e_r$  generadores de un grupo abeliano  $G$  y sea  $n_1e_1 + \dots + n_re_r = 0$  una relación entre los  $e_i$  con  $n_i \neq 0$  para algún  $i$ . Si

únicamente un  $n_i$  es distinto de cero, el resultado es trivial. Supongamos pues que al menos dos  $n_i$  son no nulos. Cambiando los índices si fuera necesario, podemos afirmar que  $|n_1| \geq |n_2| > 0$ . Puesto que

$$n_1e_1 + n_2e_2 = (n_1 - n_2)e_1 + n_2(e_1 + e_2) = (n_1 + n_2)e_1 + n_2(e_2 - e_1)$$

y que uno de los número  $|n_1 - n_2|$  o  $|n_1 + n_2|$  es inferior a  $|n_1|$ , vemos que existe una relación no trivial en el conjunto de generadores  $e_1, e_2 + e_1, \dots, e_r$  (y también en  $e_1, e_2 - e_1, \dots, e_r$ ) para la cual la suma de los valores absolutos de los coeficientes es inferior a  $m = |n_1| + \dots + |n_r|$ . El lema se demuestra de forma sencilla por inducción sobre  $m$ . ■

**Lema 3.5.** *Sea  $G$  un grupo abeliano finitamente generado y libre de torsión. Entonces  $G$  es un grupo abeliano libre.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grupo abeliano finitamente generado y libre de torsión. Sea  $e_1, \dots, e_r$  un conjunto de generadores con  $r$  mínimo. Teniendo en cuenta el lema anterior, será suficiente probar que  $e_1, \dots, e_r$  son linealmente independientes.

Sean  $n_1, \dots, n_r$  enteros tales que

$$n_1e_1 + \dots + n_re_r = 0.$$

Queremos ver que  $n_i = 0$  para todo  $i$ . Razonemos por reducción al absurdo. Si existiese algún  $n_i$  distinto de cero, el lema anterior nos dice que existen un conjunto de generadores  $e'_1, \dots, e'_r$ , un entero  $i$  y un entero no nulo  $q$  tales que  $qe_i = 0$ . Como  $G$  no tiene elementos de torsión no nulos, será  $e'_i = 0$ . Pero esto significa que  $G$  se puede generar por  $r - 1$  elementos, lo cual contradice el hecho de que  $r$  sea mínimo. ■

**Proposición 3.1.** *Sea  $G$  un grupo abeliano finitamente generado y sea  $T(G)$  su grupo de torsión. Entonces  $L = G/T(G)$  es libre de torsión y finitamente generado (por tanto, libre). Sean  $e_1, \dots, e_r$  elementos de  $G$  tales que sus clases  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$  en  $L$  formen una base de  $L$ . Si llamamos  $L'$  al grupo  $\langle e_1, \dots, e_r \rangle$ , entonces  $L'$  es isomorfo a  $L$  y  $G = L' \oplus T(G)$ .*

*Demostración.* Si  $x_1, \dots, x_r$  son generadores del grupo  $G$ , entonces sus clases  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$  en  $L$  son generadores de  $L$ . Luego  $L$  es un grupo finitamente generado.

Veamos que  $L$  es libre de torsión, es decir,  $\bar{0}$  es el único elemento de orden finito de  $L$ . Sea  $x \in G$  tal que  $\bar{x} \in L = G/T(G)$  es un elemento de orden finito. Existe entonces un entero positivo  $m$  tal que  $m\bar{x} = \bar{0}$  o, lo que es lo

mismo,  $mx \in T(G)$ . Luego existe un entero positivo  $k$  tal que  $k(mx) = 0$ . Puesto que  $(km)x = 0$  y  $km$  es un entero positivo, concluimos que  $x \in T(G)$ , es decir,  $\bar{x} = \bar{0}$  en  $L = G/T(G)$ . Para concluir que  $L'$  es isomorfo a  $L$  basta probar que los elementos  $e_1, \dots, e_r$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{Z}$ , lo que es inmediato. Para ver que  $G \cong L' \oplus T(G)$ , veamos en primer lugar que  $L' + F = G$ . Sea  $x \in G$ . Sabemos que en  $G/T(G)$  se verifica que  $\bar{x} = \sum_{i=1}^r n_i \bar{e}_i$

para ciertos  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Luego  $x - \sum_{i=1}^r n_i \bar{e}_i \in T(G)$ . Basta ahora observar que

$x = \left(\sum_{i=1}^r n_i \bar{e}_i\right) + \left(x - \sum_{i=1}^r n_i \bar{e}_i\right) \in L' \oplus T(G)$ . Por último, basta tener en cuenta que  $L'$  es libre y, en particular, sin torsión. Ello implica que  $L' \cap T(G) = \{0\}$ . ■

**Definición 3.5.** Diremos que un grupo abeliano finitamente generado  $G$  tiene rango  $r$  si  $L = G/T(G)$  tiene rango  $r$ . ( $T(G)$  es isomorfo a  $G/L'$ , luego es finitamente generado y, en consecuencia, finito).

**Teorema 3.1.** Sea  $G$  un grupo abeliano libre de rango finito  $r$  y  $G'$  un subgrupo de  $G$ . Entonces existe una base  $e_1, \dots, e_r$  de  $G$ , un número natural  $s \leq r$  y enteros positivos  $d_1, \dots, d_s$  tales que  $d_1 e_1, \dots, d_s e_s$  es una base de  $G'$  y  $d_i | d_{i+1}$  para todo  $1 \leq i < s$ .

*Demostración.* Lo probaremos por inducción con respecto a  $r$ .

En el caso  $r = 1$  trabajamos con  $\mathbb{Z}$ . El grupo  $\mathbb{Z}$  es libre y una base suya es  $e_1 = 1$ . Todo subgrupo no nulo de  $\mathbb{Z}$  es de la forma  $\langle d \rangle$ , siendo  $d$  un entero positivo. Esto significa que la aplicación  $f : \mathbb{Z} \rightarrow L$  dada por  $f(k) = kd$  es un isomorfismo. Vemos pues que  $L$  es libre con base  $de_1$ .

En el caso  $r \geq 2$ , si existe una base  $v_1, \dots, v_r$  de  $G$  tal que  $G' \subseteq \langle v_2, \dots, v_r \rangle$ , entonces el enunciado es cierto por la hipótesis de inducción. Podemos suponer entonces que, para toda base  $v = (v_1, \dots, v_r)$  de  $G$ , se verifica que  $G'$  no está contenido en  $\langle v_2, \dots, v_r \rangle$ . Dada  $v$ , sea el homomorfismo

$$p_v : G \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ dado por } p_v(x) = n_1$$

siendo  $x = n_1 v_1 + \dots + n_r v_r$ . El subgrupo  $p_v(G')$  de  $\mathbb{Z}$  es no nulo para toda base  $v$ , ya que  $p_v(G') = 0$  equivale a  $G' \subseteq \langle v_2, \dots, v_r \rangle$ . Así, para cada base  $v$  de  $G$ , existe un entero positivo  $d_v$  tal que  $p_v(G') = \langle d_v \rangle$ .

Escojamos ahora un  $v$  de tal manera que  $d_v$  sea mínimo y pongamos  $d_1 = d_v$ . Veamos que si  $x' \in G'$  es de la forma  $x' = d_1 v_1 + n'_2 v_2 + \dots + n'_r v_r$  (tales elementos existen por definición de  $d_1$ ), entonces  $d_1 | n'_j$  para  $j = 2, \dots, r$ , de modo que,

en particular, existe un  $x \in G$  tal que  $x' = d_1 x$ . En efecto, si  $n_j = c_j d_1 + k_j$ ,  $0 \leq d_j < d_1$ ,  $j = 2, \dots, r$ , entonces  $x' = d_1(v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_r v_r)$ , y como  $v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_r v_r, v_2, \dots, v_r$  es una base de  $G$ , la definición de  $d_1$  implica que  $k_2 = \dots = k_r = 0$ , pues cualquier reordenación de una base es, claramente, una base.

Sea  $e'_1 \in G'$  cualquier elemento tal que  $p_v(e'_1) = d_1$  y sea  $e_1 \in G$  tal que  $e'_1 = d_1 e_1$ . Entonces es claro que  $p_v(e_1) = 1$ , de modo que  $e_1, v_2, \dots, v_r$  es una base de  $G$ . Veamos que

$$G' = (G' \cap \langle v_2, \dots, v_r \rangle) \oplus \langle d_1 e_1 \rangle \quad (*)$$

Dado que la intersección de los dos sumandos es claramente  $\{0\}$ , basta ver que

$$G' = (G' \cap \langle v_2, \dots, v_r \rangle) + \langle d_1 e_1 \rangle.$$

Sea  $x' \in G'$ . Por definición de  $d_1$ , existe un entero  $k$  tal que  $p_v(x') = kd_1$ . Por tanto,  $kd_1 e_1 \in \langle d_1 e_1 \rangle$  y  $x' - kd_1 e_1 \in G' \cap \langle v_2, \dots, v_r \rangle$ , pues  $x' - kd_1 e_1 \in G'$  y  $p_v(x' - kd_1 e_1) = 0$ . Tengamos en cuenta que  $x' = (x' - kd_1 e_1) + kd_1 e_1$ .

Por inducción, existe una base  $e_2, \dots, e_r$  de  $\langle v_2, \dots, v_r \rangle$  (lo cual implica que  $e_1, e_2, \dots, e_r$  es una base de  $G$ ), un número natural  $s \leq r$  y enteros positivos  $d_2, \dots, d_s$  tales que  $d_2 e_2, \dots, d_s e_s$  es una base de  $G' \cap \langle v_2, \dots, v_r \rangle$  y de modo que  $d_i | d_{i+1}$  para  $i = 2, \dots, s-1$ . La propiedad (\*) muestra entonces que  $d_1 e_1, d_2 e_2, \dots, d_s e_s$  es una base de  $G'$ .

Para terminar la demostración basta ver que, si  $s > 1$ , entonces  $d_1 | d_2$ . Pero esto es claro, dado que en tal caso,  $x' = d_1 e_1 + d_2 e_2 \in G'$  y  $p_e(x') = d_1$  y hemos visto antes que  $d_1$  divide necesariamente a los coeficientes de las restantes componentes de  $x'$ . ■

**Proposición 3.2.** *Sea  $G'$  un subgrupo de un grupo abeliano finitamente generado  $G$ . Entonces  $G'$  es finitamente generado.*

*Demostración.* Sean  $e_1, \dots, e_r$  un sistema de generadores de  $G$ . Consideremos el homomorfismo sobreyectivo de grupos

$$\phi_e : \mathbb{Z}^r \longrightarrow G$$

dado por  $\phi_e(n_1, \dots, n_r) = \sum_{i=1}^r n_i e_i$ . Sabemos que  $L' = \phi_e^{-1}(G')$  es un subgrupo de  $\mathbb{Z}^r$ . En virtud del teorema 3.1,  $L'$  es un grupo libre de rango  $s \leq r$ , luego es finitamente generado. Así que  $G' = \phi_e(L')$  también es finitamente generado. ■

Vamos ahora a dar el teorema principal de esta sección y un corolario inmediato de este. Este resultado será de vital importancia para la sección venidera y su demostración se basa, en gran parte, en el teorema que acabamos de probar.

**Teorema 3.2.** *(Teorema de Estructura de los Grupos Abelianos Finitamente Generados) Si  $G$  es un grupo abeliano finitamente generado de rango  $r$ , existen un número natural  $s$  y enteros positivos  $d_1, \dots, d_s$  tales que  $d_j$  divide a  $d_{j+1}$  si  $j < s$ , y de modo que  $G$  es suma directa de subgrupos cíclicos  $F_j$  de orden  $d_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ) y de  $r$  subgrupos cíclicos infinitos.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grupo abeliano finitamente generado. Entonces existe un morfismo sobreyectivo  $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow G$  para un cierto entero positivo  $n$ . El teorema anterior nos asegura que existe una base  $e_1, \dots, e_n$  de  $\mathbb{Z}^n$ , un número natural  $s \leq n$  y enteros positivos  $d_1, \dots, d_s$  tales que  $d_1 e_1, \dots, d_s e_s$  forman una base de  $\text{Ker}(\varphi)$  y de modo que  $d_j | d_{j+1}$  para  $i = 1, \dots, s-1$ . Puesto que  $\varphi$  induce un isomorfismo entre  $\mathbb{Z}^n / \text{ker}(\varphi)$  y  $G$  (por el Primer Teorema de Isomorfía), y que  $\mathbb{Z}^n / \text{Ker}(\varphi)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}/(d_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(d_s) \oplus \mathbb{Z}^{n-s}$ , hemos completado la demostración. ■

**Corolario 3.1.** *Si  $G$  es un grupo abeliano finito, existen un número natural  $s$  y enteros  $d_1, \dots, d_s$  tales que  $d_j$  divide a  $d_{j+1}$  si  $j < s$  y de modo que  $G$  es suma directa de subgrupos cíclicos  $G_j$  de orden  $d_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ). En particular, el orden de  $G$  es igual al producto  $d_1 \cdots d_s$ .*

## 3.2 Computabilidad de los Grupos de Homología

En esta sección, vamos a dar un algoritmo que nos permitirá analizar la computabilidad de los grupos de homología. Para ello serán indispensables algunos de los resultados vistos en la sección anterior, así como nuevos teoremas que desarrollaremos de aquí en adelante.

**Definición 3.6.** *Sean  $G$  y  $G'$  dos grupos abelianos libres con bases  $e_1, \dots, e_n$  y  $e'_1, \dots, e'_m$  respectivamente. Si  $f : G \rightarrow G'$  es un homomorfismo, entonces*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} e'_i$$

con los  $\lambda_{ij}$  únicos cumpliendo esta propiedad. La matriz  $(\lambda_{ij})$  es la matriz de  $f$  relativa a las bases dadas de  $G$  y  $G'$ .

**Teorema 3.3.** Sean  $G$  y  $G'$  dos grupos abelianos libres de rangos  $n$  y  $m$  respectivamente. Sea  $f : G \rightarrow G'$  un homomorfismo. Entonces hay bases de  $G$  y de  $G'$  tales que, la matriz de  $f$  relativa a esas bases tiene la forma

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} b_1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & \ddots \\ 0 & & b_l & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & \ddots \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

donde  $b_i \geq 1$  y  $b_i | b_{i+1}$  para  $1 \leq i < l$ .

Esta matriz está únicamente determinada por  $f$  (aunque las bases involucradas no lo estén). Esta es la forma normal (de Smith) de la matriz de  $f$ .

*Demostración.* Escojamos una base de  $G$  y una base de  $G'$ . Sea  $A$  la matriz de  $f$  relativa a esas bases. Daremos un procedimiento para modificar esas bases de tal manera que la matriz de partida se transforme en la matriz en forma normal que buscamos. Este proceso es llamado “Algoritmo de Reducción”.

Antes de nada, consideremos las siguientes “operaciones elementales por filas” en una matriz de enteros  $A$ :

- (1) Intercambiar la fila  $i$  y la fila  $k$ .
- (2) Multiplicar la fila  $i$  por  $-1$ .
- (3) Reemplazar la fila  $i$  por (fila  $i$ ) +  $q$ (fila  $k$ ) siendo  $q$  un entero y siendo  $k \neq i$ .

Cada una de estas operaciones se corresponde a hacer un cambio en la base de  $G'$ . La primera equivale a intercambiar  $e'_i$  y  $e'_k$ . La segunda equivale a reemplazar  $e'_i$  por  $-e'_i$ . Y la tercera equivale a reemplazar  $e'_k$  por  $e'_k - qe'_i$ .

Las mismas operaciones elementales hechas por columnas cambian de forma similar la base de  $G$ .

Antes de empezar con el algoritmo, recalamos que si  $c$  es un entero que divide a cada elemento de una matriz  $A$ , y  $B$  es una matriz que se obtiene de  $A$  aplicando cualquiera de estas operaciones elementales, entonces  $c$  también divide a todos los elementos de  $B$ .

**Algoritmo de Reducción** Vamos a suponer que  $A$  no es la matriz  $(0)$ , pues en ese caso el resultado es trivial. Dada una matriz  $A = (a_{ij})$ , denotamos por

$\alpha(A)$  al número  $|a_{ij}|$  más pequeño distinto de cero. Diremos que  $a_{ij}$  es una entrada mínima de  $A$  si  $|a_{ij}| = \alpha(A)$ .

El proceso de reducción consiste en dos etapas. La primera lleva la matriz  $A$  a una forma donde  $\alpha(A)$  es lo más pequeño posible. La segunda reduce las dimensiones de las matrices involucradas.

*Paso 1.* Queremos modificar la matriz mediante operaciones elementales para disminuir el valor de la función  $\alpha$ . Para ello veamos que si el número  $\alpha(A)$  no divide a algún elemento de  $A$ , entonces es posible disminuir el valor de  $\alpha$  aplicando operaciones elementales a  $A$  y viceversa.

Pues bien, si el número  $\alpha(A)$  divide a todos los elementos de  $A$ , entonces dividirá a todos los elementos de cualquier matriz  $B$  que se haya obtenido a partir de  $A$ , aplicando operaciones elementales. En esta situación, no es posible reducir el valor de  $\alpha$  mediante operaciones elementales.

Para la otra implicación, sea  $a_{ij}$  un elemento mínimo de  $A$  que no divide a algún otro elemento de  $A$ . Si el elemento  $a_{ij}$  no divide a algún elemento  $a_{kj}$  de su misma columna, entonces llevamos a cabo una división, escribiendo

$$\frac{a_{kj}}{a_{ij}} = q + \frac{r}{a_{ij}}$$

con  $0 < |r| < |a_{ij}|$ . El signo no importa aquí,  $q$  y  $r$  pueden ser positivos o negativos. Ahora reemplazamos la fila  $k$  por (fila  $k$ ) $-q$ (fila  $i$ ). El resultado es cambiar la entrada  $a_{kj}$  de la  $k$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de  $A$  por el número  $a_{kj} - qa_{ij} = r$ , el cual es menor que  $\alpha(A)$ .

Un argumento completamente análogo se aplica si  $a_{ij}$  no divide a algún elemento de su misma fila, pero aplicando operaciones elementales por columnas. Finalmente, supongamos que  $a_{ij}$  divide a cada elemento de su fila y de su columna, pero no divide a un elemento  $a_{st}$ , donde  $s \neq i$  y  $t \neq j$ . Consideremos los siguientes cuatro elementos de  $A$ :

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \cdots & a_{it} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{sj} & \cdots & a_{st} \end{array}$$

Como  $a_{ij}$  divide a  $a_{sj}$ , podemos, mediante operaciones elementales, llevar la matriz a la forma en que los elementos en esas cuatro posiciones son:



$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \cdots & a_{it} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{st} + la_{it} \end{array}$$

Si ahora reemplazamos la fila  $i$  de esta matriz por (fila  $i$ )+(fila  $s$ ), volveremos a la situación anterior, donde  $a_{ij}$  no divide a algún elemento de su misma fila.

*Paso 2.* Al comienzo de este paso, tenemos una matriz  $A$  cuyo elemento mínimo divide a todos los elementos de  $A$ .

Aplicando operaciones elementales llevamos un elemento mínimo de  $A$  a la esquina superior izquierda de esta y hacemos que sea positivo. Como divide a todos los elementos de su fila y su columna, mediante operaciones elementales, podemos hacer cero todos esos elementos de la matriz. Fijémonos en que, al final de este proceso, el elemento de la esquina superior izquierda de  $A$  divide a todos los elementos de la matriz.

Ahora repetimos el paso 1 de nuevo, aplicádoselo a la submatriz obtenida al ignorar la primera fila y la primera columna de  $A$ .

*Paso 3.* El algoritmo termina si la matriz más pequeña es la matriz (0) o si desaparece. En este punto, nuestra matriz ya está en la forma normal. Nos falta comprobar que cada elemento de la diagonal de entradas  $b_1, \dots, b_l$  divide al siguiente. No obstante, al final de la primera aplicación del paso 2, el elemento  $b_1$  dividía a todos los elementos de la matriz. Este hecho sigue siendo cierto tras aplicar operaciones elementales. En particular,  $b_1$  debe dividir a todos los  $b_i$  con  $i = 2, \dots, l$ .

Un razonamiento completamente análogo muestra que  $b_2$  divide a todos los  $b_i$  con  $i = 3, \dots, l$ , y así hasta llegar a que  $b_{l-1}$  divide a  $b_l$ .

Veamos la unicidad de la forma normal. En primer lugar,  $l$  es el rango de la matriz original, que es invariante por transformaciones elementales. Así que escojamos las bases que escojamos, siempre va a ser el mismo.

Por último, veamos que, para todo  $i = 1, \dots, l$ , se tiene

$$\Delta_i(A) = \text{mcd}(\{\text{menores de orden } i \text{ de } A\}) = b_1 \cdots b_i$$

En efecto, como las transformaciones elementales preservan el *mcd* de los menores de orden  $i$ , se cumple que  $\Delta_i(A) = \Delta_i(B)$ . Como  $\Delta_i(B) = b_1 \cdots b_i$ , vemos que la forma normal de la matriz es única. ■

Ahora vamos a aplicar este algoritmo al caso particular de los complejos de cadenas simpliciales y a los grupos de homología.

**Teorema 3.4.** Sea  $\{\mathcal{C}_q, \partial_q\}$  un complejo de cadenas con  $C_q$  libre y de rango finito para cada  $q$ . Entonces existen subgrupos  $U_q, V_q, W_q$  de  $C_q$  tales que

$$C_q = U_q \oplus V_q \oplus W_q$$

donde  $\partial_q(U_q) \subseteq W_{q-1}$ ,  $\partial_q(V_q) = 0$  y  $\partial_q(W_q) = 0$ . Además, hay bases de  $U_q$  y  $W_{q-1}$  para las cuales  $\partial_q : U_q \rightarrow W_{q-1}$  tiene una matriz de la forma:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_l \end{bmatrix}$$

donde  $b_i \geq 1$  y  $b_i | b_{i+1}$  para todo  $1 \leq i < l$ .

*Demostración.* Paso 1. Sean

$$Z_q = \text{Ker}(\partial_q) \text{ y } B_q = \text{Im}(\partial_{q+1})$$

Sea  $W_q$  el conjunto de elementos  $c_q$  de  $C_q$  tales que algún múltiplo no nulo de  $c_q$  pertenece a  $B_q$ . Este es un subgrupo de  $C_q$  y lo llamaremos el grupo de bordes débiles. Claramente

$$B_q \subseteq W_q \subseteq Z_q \subseteq C_q.$$

Para la segunda inclusión, hay que tener en cuenta que  $C_q$  es libre de torsión, así que la ecuación  $mc_q = \partial_{q+1}(d_{q+1})$  implica que  $\partial_q(c_q) = 0$ .

Veamos que  $W_q$  es un sumando directo de  $Z_q$ . Consideremos la proyección

$$Z_q \longrightarrow H_q(\mathcal{C}) \longrightarrow H_q(\mathcal{C})/T_q(\mathcal{C})$$

donde  $T_q(\mathcal{C})$  es el subgrupo de torsión de  $H_q(\mathcal{C})$ . El núcleo de esta proyección es  $W_q$ , por lo tanto,  $Z_q/W_q \cong H_q/T_q$ . Este último grupo es finitamente generado y libre de torsión. Si  $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k$  es una base de  $Z_q/W_q$ , y  $d_1, \dots, d_l$  es una base de  $W_q$ , se tiene que  $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l$  es una base de  $Z_q$ . Luego  $Z_q = V_q \oplus W_q$ , donde  $V_q$  es el grupo con base  $c_1, \dots, c_k$ .

*Paso 2.* Supongamos que hemos escogido una base  $e_1, \dots, e_n$  de  $C_q$  y una base  $e'_1, \dots, e'_m$  de  $C_{q-1}$  para las cuales, la matriz de  $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$  está en la forma normal

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} b_1 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & & \ddots \\ 0 & & b_l & 0 & & 0 \\ - & - & - & | & - & - \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & & \ddots \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{array} \right]$$

donde  $b_i \geq 1$  y  $b_i | b_{i+1}$  para todo  $1 \leq i < l$ . Entonces se cumple que:

- (1)  $e_{l+1}, \dots, e_n$  es una base de  $Z_q$ .
- (2)  $e'_1, \dots, e'_l$  es una base de  $W_{q-1}$ .
- (3)  $b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l$  es una base de  $B_{q-1}$ .

Probemos estos tres hechos. Sea  $c_q$  una  $p$ -cadena. Calculemos su borde. Si

$$c_q = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \text{ entonces } \partial_q(c_q) = \sum_{i=1}^l a_i b_i e'_i.$$

Para probar (1), fijémonos en que, como  $b_i \neq 0$ ,  $c_q$  es un ciclo si, y solo si,  $a_i = 0$  para  $i = 1, \dots, l$ .

Para probar (3), fijémonos en que ningún  $(p-1)$ -borde  $\partial_q(c_q)$  está en el grupo generado por  $b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l$ . Ya que  $b_i \neq 0$ , estos elementos son independientes. Finalmente, para probar (2), fijémonos primero en que cada  $e'_1, \dots, e'_l$  pertenece a  $W_{q-1}$ , puesto que  $b_i e'_i = \partial(e_i)$ . Ahora, sea

$$c_{q-1} = \sum_{i=1}^m d_i e'_i$$

una  $(p-1)$ -cadena y supongamos que  $c_{q-1} \in W_{q-1}$ . Entonces  $c_{q-1}$  satisface la ecuación

$$\lambda c_{q-1} = \partial_q(c_q) = \sum_{i=1}^l a_i b_i e'_i$$

para algún  $\lambda \neq 0$ . Comparando coeficientes, vemos que  $\lambda d_i = 0$  para  $i > l$ , luego  $d_i = 0$  para  $i > l$ . Por lo tanto,  $e'_1, \dots, e'_l$  es una base de  $W_{q-1}$ .

*Paso 3.* Escogemos las mismas bases de  $C_q$  y de  $C_{q-1}$  que en el paso anterior. Definimos  $U_q$  como el grupo generado por  $e_1, \dots, e_l$ , entonces

$$C_q = U_q \oplus Z_q.$$

Usando el paso 1, escogemos  $V_q$  de tal manera que  $Z_q = V_q \oplus W_q$ . Tenemos, por tanto, una descomposición de  $C_q$  tal que  $\partial_q(V_q) = \partial_q(W_q) = 0$ . La existencia de las bases de  $U_q$  y  $W_{q-1}$  deseadas la garantiza el paso 2. ■

**Nota 3.1.** Démonos cuenta de que  $W_q$  y  $Z_q = V_q \oplus W_q$  son subgrupos unívocamente determinados de  $C_q$  mientras que los subgrupos  $U_q$  y  $V_q$  no están unívocamente determinados.

**Teorema 3.5.** *Los grupos de homología de un complejo simplicial  $K$  son computables.*

*Demostración.* Por el teorema anterior, hay una descomposición

$$C_q(K) = U_q \oplus V_q \oplus W_q$$

donde  $Z_q = V_q \oplus W_q$  y  $W_q$  es el grupo de los  $p$ -bordes débiles. Ahora

$$H_q(K) = Z_q/B_q \cong V_q \oplus (W_q/B_q) \cong (Z_q/W_q) \oplus (W_q/B_q).$$

El grupo  $Z_q/W_q$  es libre y el grupo  $W_q/B_q$  es un grupo de torsión. Computar  $H_q$  se reduce a computar estos dos grupos.

Elijamos bases en  $C_q(K)$  y  $C_{q-1}(K)$  fijando orientaciones en los símlices de  $K$  tal y como se indico al comienzo de la sección 2.2, y consideremos la matriz del homomorfismo  $\partial_q : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$  respecto a dichas bases. Los elementos de esta matriz van a ser valores del conjunto  $\{-1, 0, 1\}$ . Usando el algoritmo de reducción, pasamos esta matriz a su forma normal. Del paso 2 de la prueba del teorema anterior, concluimos que:

- (1) El rango de  $Z_p$  es el mismo que el número de columnas nulas.
- (2) El rango de  $W_{q-1}$  es el mismo que el número de filas no nulas.
- (3) Hay un isomorfismo

$$W_{q-1}/B_{q-1} \cong \mathbb{Z}/(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(b_l).$$

La forma normal de la matriz de  $\partial_q : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$  nos da los coeficientes de torsión de  $K$  en dimensión  $p - 1$ , son los elementos de la matriz que sean mayores que 1. La forma normal de la matriz también nos proporciona el rango de  $Z_q$ . Por otro lado, la forma normal de la matriz de  $\partial_{q+1} : C_{q+1}(K) \rightarrow C_q(K)$  nos da el rango de  $W_q$ . La diferencia de esos rangos nos da el rango de  $Z_q/W_q$ , y ya hemos terminado. ■

# Bibliografía

- [ADQ] R. Ayala, E. Domínguez y A. Quintero, *Elementos de la Teoría de Homología Clásica*, Universidad de Sevilla, 2002.
- [Croo] F.H. Croom, *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1978.
- [GH] M.J. Greenberg and J.R. Harper, *Algebraic Topology, A First Course*, Perseus Books Publishing Company, 1981.
- [Maun] C.R.F. Maunder, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980.
- [Munk] J.R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Adisson-Wesley Publishing Company, Inc, 1984.
- [XDF] S. Xambó, F. Delgado y C. Fuertes, *Introducción al Álgebra, Volumen 1*, Editorial Complutense, 1993.
- [Sevi] Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla, *Estructuras Algebraicas. Apuntes de Teoría*, Curso 2013-2014.