Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Grado en Física

SUPERGRAVEDAD GALILEANA EN 2+1 DIMENSIONES

Autor:

Diego Gútiez Bravo

Tutor:

Jose Manuel Izquierdo

Índice general

Capítulo 1

Abstract

There is plenty of works which derive Newtonian gravity as the non-relativistic limit of Einstein Gravity, and a wide variety of methods have been developed to derive this relation.

However, up to date, no galilean supergravity model has been obtained. In this project we have used the expansion method proposed by Hatsuda and Sakaguchi [5] to obtain a galilean supergravity in 2+1 dimensions.

This work is meant to be used as a starting point to further development of galilean supergravity model of higher dimensions.

Capítulo 2

Resumen

Se ha discutido mucho en distintas fuentes bibliográficas que la gravedad de Newton se puede obtener como el límite no relativista de la Gravedad de Einstein, y han aparecido diversos métodos para derivar esta relación.

Sin embargo no se ha conseguido construir una supergravedad de tipo Galileana (con un tiempo absoluto) hasta la fecha. En este proyecto hemos empleado el método de la expansión de las álgebras propuesto por Hatsuda y Sakaguchi [5] para obtener una supergravedad galileana en 2+1 dimensiones, con el objetivo de ver si este método proporciona resultados aceptables que puedan ser extrapolados a casos de mayor dimensión.

Capítulo 3

Introducción a las teorías supersimetricas

Las teorías supersimétricas han surgido con el objetivo de unificar las 4 interacciones fundamentales conocidas hasta ahora. El teorema de Coleman-Mandula [6] establece que, dadas las simetrías espacio-temporales que cierran un álgebra $\mathcal{P}$, y las simetrías internas $\mathcal{G}$, si se busca el álgebra más general de la matriz S que contenga a $\mathcal{P}$ y $\mathcal{G}$ como subálgebras, éste es necesariamente la suma directa $\mathcal{P} \oplus \mathcal{G}$. Esto es un serio obstáculo para la unificación de la gravedad, que es una teoría gauge basada en simetrías espacio-temporales, con las otras tres interaciones, electro-débil y fuerte, que son teorías gauge basadas en simetrías internas.

Una posible solución es permitir que haya transformaciones que cambien el espín. Cuando se añaden esas transformaciones, se obtienen álgebras más generales, que contienen anticonmutadores, ademmás de los conmutadores. Estos álgebras reciben el nombre de álgebras de Lie graduadas o superálgebras. Cuando se consideran superálgebras, el teorema de Coleman-Mandula conduce al teorema de Haag-Łopuszanski-Sohnius [7], que establece que el superálgebra de simetrías de la matriz S más general tiene la estructura siguiente: si Q representan los generadores impares del superálgebra (los que cambian el espín), entonces los (anti-)conmutadores son esquemáticamente los siguientes:

$$[\mathcal{P},\mathcal{P}] \subset \mathcal{P} \ , \quad [\mathcal{G},\mathcal{G}] \subset \mathcal{G} \ , \quad [\mathcal{G},\mathcal{Q}] \subset \mathcal{Q} \ , \quad [\mathcal{G},\mathcal{P}] \subset \mathcal{P} \ , \quad \{\mathcal{Q},\mathcal{Q}\} \subset \mathcal{P} + \mathcal{G} \ , \tag{3.1}$$

(véase la siguiente sección) donde el primer término del segundo miembro del último conmutador ha de ser específicamente $(C\gamma^a)_{\alpha\beta}P_a$, siendo γ^a las matrices de Dirac, y α, β los índices de los generadores en $\mathcal{Q}$. De este modo, las simetrías internas y espacio-temporales están incorporadas en un álgebra que no tiene estructura de suma directa. La supersimetría es por definición una simetría entre fermiones y bosones.

De forma general, la física de partículas actual descompone las partículas en quarks y leptones (fermiones) y describe las fuerzas en términos del intercambio de partículas (bosones).

Las teorías supersimétricas unen fermiones y bosones en multipletes y eliminan la distinción entre materia e interacciones. Para que existan particulas de distinto spin en un mismo multiplete, es necesario incluir operaciones de simetría que obedezcan relaciones de anticonmutación.

Las transformaciones supersimétricas se generan por operadores cuánticos Q que transforman bosones en fermiones y viceversa, es decir

$$Q|fermion\rangle = |boson\rangle; \qquad\qquad Q|boson\rangle = |fermion\rangle \tag{3.2}$$

Es posible demostrar que los generadores supersimétricos se transforman bajo rotaciones de 360° como $UQU^{-1} = -Q$. Asimismo, es posible demostrar que estos operadores son invariantes bajo traslaciones espaciales y temporales, lo que implica que conmutan con los operadores de momento y energía.

$$[Q, E] = [Q, P] = 0 \tag{3.3}$$

Los experimentos no han encontrado evidencia de supercompañeros elementales con distinto spin pero masas iguales, lo que implica que la simetría debe romperse espontáneamente. Esto implica que el estado fundamental no es invariante bajo transformaciones supersimétricas, luego la energía del vacío no puede ser cero.

Hay básicamente dos razones por las cuales resulta útil la supersimetría en la física de partículas. la primera es la ya mencionada de la posible unificación de las interacciones fundamentales. La segunda es el problema de las jerarquías: la diferencia en la intensidad de las cuatro interaciones es tan grande que hay que ajustar la dependencia en energía de cualquier parámetro en una parte por 10^{30} (ajuste fino). Esto se debe a los tipos de infinitos que hay que regularizar. La supersimetría en principio resuleve también este problema, porque hace que ciertos infinitos en teoría de campos se cancelen, lo cual mejora el comportamiento de la dependencia en energías, y por lo tanto elimina el problema del ajuste fino. Pero, como hemos dicho ya, la supersimetría debe romperse.

La escala a la cual se rompe la supersimetría es irrelevante por lo que respecta a la unificación de las interacciones fundamentales, pero no puede ser muy alta si queremos que se siga resolviendo el problema de las jerarquías. estimaciones que dependen del modelo dicen que deberíamos estar viendo ya, o se deberían ver pronto, señales de supercompañeros supersimétricos.

Existen versiones superimétricas de las teorías gauge que describen las interacciones fuertes y electrodébiles. Estos modelos presentan supersimetría local, *i.e.* supersimetría que no depende del punto del espacio-tiempo. Cuando se considera supersimetría local, esto es, supersimetría que depende del punto del espacio-tiempo, entonces, debido al anticonmutador básico

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C\gamma^a)_{\alpha\beta} P_a + \dots \ , \tag{3.4}$$

el modelos también ha de presentar invariancia bajo translaciones espaciales que dependen del punto, Pero esta es la invariancia general de coordenadas de la relatividad general. Por lo tanto, la supersimetría local implica la garvitación.

Estos modelos son modelos de supergravedad, que contienen, además del gravitón, una partícula de espiín 3/2 llamada gravitino, además de otros posibles campos, dependiendo de la longitud de los supermultipletes. En el caso de las teorías gauge de las interacciones fuertes y elctrodébiles, el espín máximo de los campos presentes es 1. Eso limita el número de supersimetrías a 4, porque con más supersimetrías todos los supermultipletes contienen espines más altos. En el caso de gravedad, el espín máximo es 2 (no son posibles los modelos de gravedad interactuando con campos de espín mayor que dos). Entonces el número máximo de supersimetrías es 8 o interpretando que esas supersimetrías son el resultado de un proceso de reducción dimensional, la dimensión máxima es 11.

Como ya hemos comentado, la supersimetría tiene la particularidad de cancelar algunos infinitos de la teoría de campos. Inicialmente existía la esperanza de que la supergravedad con un número máximo de supersimetrías sería finita, pero pronto se llegó a la conclusión de que eso no es cierto. La teoríia M es un modelo supuestamente finito cuyo límite de bajas energías es la supergravedad en 11 dimensiones; los infinitos de esta última serían consecuencia de ignorar algunos grados de libertad de la teoría M.

3.1. Generadores de supersimetría y el álgebra

En primer lugar definimos generadores de simetría B que cambia el spin de las partículas en un número entero y F que cambia partículas fermiónicas en bosónicas y viceversa (por lo que cambian el spin en un factor 1/2).

El álgebra supersimétrica más general que podemos construir con éstos generadores y los del grupo de Lorentz es, llamando ahora Q a los generadores F:

$$
\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0 \;\; ; \; [P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho) \\
&[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{mu\rho} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}) \\
&[B_r, B_s] = ic^t_{rs} B_t \; ; \;\; [B_r, P_\mu] = [B_r, M_{\mu\nu}] = 0 \\
&[Q_{\alpha,i} P_\mu] = [\bar{Q}^i_\alpha, P_\mu] = 0 \;\; ; \; [Q_{\alpha,i}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} {(\sigma_{\mu\nu})_\alpha}^\beta Q_{\beta i} \\
&[\bar{Q}^i_\alpha, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2} \bar{Q}^i_\beta {(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^\beta}_\alpha \;\; ; \; [Q_{\alpha i}, B_r] = {(b_r)_i}^j Q_{\alpha j} \\
&[\bar{Q}^i_\alpha, B_r] = -{\bar{Q}^j}_\alpha {(b_r)_j}^i \;\; ; \; \{Q_{\alpha i}, {\bar{Q}^j}_\beta\} = 2\delta^j_i (\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \\
&\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2\epsilon_{\alpha\beta} Z_{ij} \;\; , \; \{{\bar{Q}^i}_\alpha, {\bar{Q}^j}_\beta\} = -2\epsilon_{\alpha\beta} Z^{ij}
\end{aligned}
$$

Donde $Z_{ij} = a^r_{ij} B_r$ y $Z^{ij} = (Z_{ij})^\dagger$ son las denominadas cargas centrales.

Capítulo 4

Álgebra y acción de Poincaré 2+1

En ésta sección vamos a desarrollar los términos relevantes del álgebra y la acción que permiten obtener la teoría relativista para usarlos más adelante en el desarrollo de una teoría galileana.

4.1. Álgebra

Comenzamos por definir las ecuaciones estructurales de Maurer-Cartan que como se explica en el anexo A se obtienen a partir del álgebra de Poincaré. Aquí las expresamos como un álgebra de Gauge. Las ecuaciones de Maurer-Cartan se obtienene haciendo que se anulen las curvaturas R^{AB}, T^{A}.

$$\begin{cases} R^{AB} = d\omega^{AB} + \omega^{A}_{\ C}\omega^{CB} \\ T^{A} = de^{A} + \omega^{A}_{\ B}e^{B} \end{cases} \tag{4.1}$$

4.2. Acción

La forma de obtener los campos a partir de H se basa en el siguiente resultado ver [4]: Consideremos una forma diferencial $H(A^a, F^a)$ que sea un elemento del álgebra generada por los campos gauge A^a y las curvaturas de un álgebra de Lie F^a. Si H es cerrado, será además una diferencial exacta. Esto implica que existe una forma $B(A^a, F^a)$ tal que $H = dB$ Si definimos la acción como una integral en el espacio tiempo como $I = \int_M B$, las ecuaciones de los campos vienen dadas por:

$$i_{F^a}H = 0 \tag{4.2}$$

Centramos por lo tanto nuestra atención en determinar un H adecuado para la descripción de la gravedad. La construcción de este término ha sido discutida ampliamente en la bibliografía y se sabe que toma la forma:

$$H = \epsilon_{ABC} R^{AB} \wedge T^{C} \tag{4.3}$$

Debido a que más adelante serán útiles, vamos a realizar en este apartado los cálculos necesarios para demostrar que dH=0. Comenzamos diferenciando la expresión de H:

$$dH = \epsilon_{ABC} dR^{AB} \wedge T^{C} + \epsilon_{ABC} R^{AB} \wedge dT^{C} \tag{4.4}$$

A continuación sustituimos las expresiones dR^{AB} y dT^{C} por sus correspondientes expresiones que se obtienen de las ecuaciones de Maurer-Cartan.

$$dR^{AB} = d\omega^{A}_{\ C}\omega^{CB} - \omega^{A}_{\ C} d\omega^{CB} \tag{4.5}$$

$$dT^{C} = d\omega^{C}_{\ D} e^{D} - \omega^{C}_{\ D} de^{D} \tag{4.6}$$

Si de nuevo empleamos las ecuaciones de estructura para sustituir los valores de $d\omega^{A}_{\ C}$ y de^{D}, podemos desarrollar finalmente la acción como:

$$\begin{aligned} dH =&\epsilon_{ABC}\left(R^{A}_{\ E} - \omega^{A}_{\ D}\omega^{D}_{\ E}\right)\omega^{EB}T^{C} - \epsilon_{ABC}\omega^{A}_{\ D}\left(R^{DB} - \omega^{D}_{\ E}\omega^{EB}\right)T^{C} \\ &+ \epsilon_{ABC}R^{AB}\left(R^{C}_{\ E} - \omega^{C}_{\ D}\omega^{D}_{\ E}\right)e^{E} - \epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}_{\ D}\left(T^{D} - \omega^{D}_{\ E}e^{E}\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

- En primer lugar hay términos que se eliminan de forma trivial

$$\epsilon_{ABC}\omega^{A}_{\ D}\omega^{D}_{\ E}\omega^{EB}T^{C} - \epsilon_{ABC}\omega^{A}_{\ D}\omega^{D}_{\ E}\omega^{EB}T^{C} = 0 \tag{4.8}$$

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}_{\ E}\omega^{E}_{\ D}e^{D} - \epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}_{\ E}\omega^{E}_{\ D}e^{D} = 0 \tag{4.9}$$

- El término

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}R^{C}_{\ D}e^{D} \tag{4.10}$$

se anula empleando la identidad de Schouten. Esta identidad indica que una antisimetrización de D+1 índices en D variables aplicada a una expresión con el símbolo de Levy-Civita, es idénticamente nula.

En nuestro caso ésto se traduce en que podemos reescribir la expresión anterior como:

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}R^{C}_{\ D}e^{D} = -\epsilon_{DBC}R^{AB}R^{C}_{\ A}e^{D} - \epsilon_{ADC}R^{AB}R^{C}_{\ B}e^{D} - \epsilon_{ABD}R^{AB}R^{D}_{\ D}e^{D} \tag{4.11}$$

Donde el último término se anula directamente debido a que R es antisimétrica y la contribución de los otros dos términos es la misma. Para verlo basta con permutar los índices A y B en R^{AB} en el segundo término, de forma que llegamos a

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}R^{C}_{\ D}e^{D} = -\epsilon_{DBC}R^{AB}R^{C}_{\ A}e^{D} + \epsilon_{ADC}R^{BA}R^{C}_{\ B}e^{D} \tag{4.12}$$

Si ahora permutamos A y D en el símbolo de Levy-Civita, obtenemos que

$$\begin{aligned}\epsilon_{ABC}R^{AB}R^{C}_{\ D}e^{D} &= -\epsilon_{DBC}R^{AB}R^{C}_{\ A}e^{D} - \epsilon_{DAC}R^{BA}R^{C}_{\ B}e^{D} \\ &= -2\epsilon_{DBC}R^{AB}R^{C}_{\ A}e^{D}\end{aligned} \tag{4.13}$$

Queda por demostrar entonces que este término es nulo. Para demostrarlo recordemos que las 2-formas conmutan entre sí, y que por lo tanto podemos escribir la expresión como

$$\epsilon_{DBC}R^{AB}R^{C}_{\ A}e^{D} = \epsilon_{DBC}R^{C}_{\ A}R^{AB}e^{D} \tag{4.14}$$

Si ahora conmutamos los índices en ambas R, cada una de éstas operaciones aporta un signo negativo luego el global permanece invariante y podemos escribirlo como:

$$\epsilon_{DBC}R^{AB}R^{C}_{\ A}e^{D} = \epsilon_{DBC}R^{AC}R^{B}_{\ A}e^{D} \tag{4.15}$$

Puesto que la expresión es simétrica en C y B y está contraída con el tensor totalmente antisimétrico, podemos concluir que es idénticamente nula.

- El siguiente término que vamos a anular es

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}_{\ D}T^{D} \tag{4.16}$$

En primer lugar empleamos la identidad de Schouten a $\epsilon_{ADC}\omega^{A}_{\ B}R^{DB}T^{C}$

$$\epsilon_{ADC}\omega^{A}_{\ B}R^{DB}T^{C} + \epsilon_{BDC}\omega^{A}_{\ A}R^{DB}T^{C} + \epsilon_{ABC}\omega^{A}_{\ D}R^{DB}T^{C} + \epsilon_{ADB}\omega^{A}_{\ C}R^{DB}T^{C} = 0 \tag{4.17}$$

El término $\epsilon_{BDC}\omega^{A}_{\ A}R^{DB}T^{C}$ se anula por la antisimetría de ω. Veamos como los dos primeros sumandos se anulan entre sí. En primer lugar permutamos los índices de R en el primer sumando, la igualdad resultante es:

$$\epsilon_{ADC}\omega^{A}_{\ B}R^{DB}T^{C} - \epsilon_{ABC}\omega^{A}_{\ D}R^{BD}T^{C} + \epsilon_{ADB}\omega^{A}_{\ C}R^{DB}T^{C} = 0 \tag{4.18}$$

Y es evidente que los dos primeros términos son iguales pero con signo contrario. De aquí obtenemos la importante conclusión de que

$$\epsilon_{ADB}\omega^{A}_{C}R^{DB}T^{C} = 0 \tag{4.19}$$

Permutando R y ω y renombrando los índices es posible concluir que

$$\epsilon_{ADB}\omega^{A}_{C}R^{DB}T^{C} = \epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}_{D}T^{D} = 0 \tag{4.20}$$

- Tras todas estas simplificaciones la expresión final queda reducida a :

$$dH = \epsilon_{ABC}R^{A}{}_{D}\omega^{DB}T^{C} - \epsilon_{ABC}\omega^{A}{}_{D}R^{DB}T^{C} \tag{4.21}$$

Conmutamos en el segundo sumando ω y R, cambiamos el orden de los índices en ambos términos y obtenemos que

$$dH = 2\epsilon_{ABC}R^{A}{}_{D}\omega^{DB}T^{C} \tag{4.22}$$

Para ver que este término se anula podemos aplicar la identidad de Schouten a $\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}_{D}T^{D}$.

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}_{D}T^{D} + \epsilon_{DBC}R^{AB}\omega^{C}_{A}T^{D} + \epsilon_{ADC}R^{AB}\omega^{C}_{B}T^{D} + \epsilon_{ABD}R^{AB}\omega^{C}_{C}T^{D} = 0 \tag{4.23}$$

Ya hemos demostrado previamente que $\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}_{D}T^{D} = 0$ y además debido a que ω es antisimétrico también podemos afirmar que

$$\epsilon_{ABD}R^{AB}\omega^{C}_{C}T^{D} = 0 \tag{4.24}$$

La expresión resultante es entonces

$$\epsilon_{DBC}R^{AB}\omega^{C}_{A}T^{D} + \epsilon_{ADC}R^{AB}\omega^{C}_{B}T^{D} = 0 \tag{4.25}$$

El primer término se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\epsilon_{DBC}R^{AB}\omega^{C}_{A}T^{D} &= \epsilon_{DBC}R^{B}_{A}\omega^{AC}T^{D} \\ &= -\epsilon_{DBC}R^{BA}\omega^{C}_{A}T^{D} \\ &= \epsilon_{BDC}R^{BA}\omega^{C}_{A}T^{D} \\ &= \epsilon_{ADC}R^{AB}\omega^{C}_{B}T^{D}\end{aligned} \tag{4.26}$$

Por lo tanto

$$0 = 2\epsilon_{ADC}R^{AB}\omega^{C}_{B}T^{D} = 2\epsilon_{ACD}R^{A}_{B}\omega^{BC}T^{D} \tag{4.27}$$

Y concluimos que $dH = 0$.

Capítulo 5

Álgebra y acción de super-Poincaré 2+1

La construcción de una teoría de la gravedad supersimétrica se basa en establecer un álgebra y una acción asociada a ella tal que conserve la interacción bosónica pero que incluya la interacción con partners supersimétricos fermiónicos. La signatura que tomamos para realizar los cálculos es (-++) con las matrices gamma definidas de la siguiente forma:

$$\gamma^0 = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

5.1. Álgebra

El álgebra que empleamos en este desarrollo es el siguiente:

$$\begin{cases} R^{AB} = d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C\omega^C{}_B \\ T^A = de^A + \omega^A{}_B e^B - i\bar{\psi}\gamma^A\psi \\ \rho = d\psi + \frac{1}{4}\omega^{AB}\gamma_{AB}\psi \end{cases} \tag{5.2}$$

5.2. Acción

A continuación es necesario establecer una acción conveniente en D=3. Trabajaremos sobre el funcional H=dB descrito en 4.3. Para construirlo vamos a partir del encontrado para el caso no supersimétrico y vamos a añadir una dependencia con la curvatura de los campos spinorales de la forma $\bar{\rho} \wedge \rho$. Por lo tanto buscamos una expresión del tipo

$$\epsilon_{ABC}R^{AB} \wedge T^C + \lambda\bar{\rho} \wedge \rho \tag{5.3}$$

Es necesario entonces determinar el valor de λ. Para ello basta con imponer la condición de que $dH = 0$. La invariancia gauge es, entonces automática al depender H solo de las curvaturas. De hecho, eso quiere decir que la supergravedad en D=2+1 es un modelo de Chern-Simons.

$$dH = \epsilon_{ABC} dR^{AB} \wedge T^C + \epsilon_{ABC} R^{AB} \wedge dT^C + \lambda d\bar{\rho} \wedge \rho + \lambda \bar{\rho} \wedge d\rho \tag{5.4}$$

Los valores de las diferenciales de las curvaturas se obtienen a partir de las expresiones del álgebra como en 4.5. En este caso concreto, las expresiones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
dR^{AB} &= R^A_C \omega^{CB} - \omega^A_C R^{CB} \\
dT^A &= R^A_B e^B - \omega^A_B \left(T^B - \omega^B{}_C e^C - i\bar{\psi}\gamma^A\psi \right) \\
&\quad + i \left[\left(\bar{\rho} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\omega^{BC}\gamma_{BC} \right) \gamma^A \psi - \bar{\psi}\gamma^A \left(\rho - \frac{1}{4}\omega^{BC}\gamma_{BC}\psi \right) \right] \\
d\rho &= \lambda \frac{1}{4} \left[\left(\bar{\rho} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\omega^{CD}\gamma_{CD} \right) \omega^{AB}\gamma_{AB} - \bar{\psi} \left(R^{AB} - \omega^A_C \omega^{CB} \right) \gamma_{AB} \right] \wedge \rho
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Sustituyendo estas expresiones en el desarrollo de H llegamos a la expresión:

$$\begin{aligned}
dH =& \epsilon_{ABC} \left[\left(R^A_D - \omega^A_E \omega^E_D \right) \omega^{DB} - \omega^A_D \left(R^{DB} - \omega^D_E \omega^{EB} \right) \right] \wedge T^C \\
&+ \epsilon_{ABC} R^{AB} \left[\left(R^C_D - \omega^C{}_D \omega^E{}_D \right) e^D - \omega^C{}_D \left(T^D - \omega^D{}_E e^E - i\bar{\psi}\gamma^D\psi \right) \right] \\
&+ \epsilon_{ABC} R^{AB} \wedge i \left(\bar{\rho} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\omega^{DE}\gamma_{DE} \right) \gamma^C \psi - \epsilon_{ABC} R^{AB} \wedge i\bar{\psi}\gamma^C \left(\rho - \frac{1}{4}\omega^{DE}\gamma_{DE}\psi \right) \\
&+ \lambda \frac{1}{4} \left(\bar{\rho} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\omega^{AB}\gamma_{AB} \right) \omega^{CD}\gamma_{CD} \wedge \rho - \lambda \frac{1}{4}\bar{\psi} \left(R^{AB} - \omega^A_C \omega^{CB} \right) \gamma_{AB}\rho \\
&- \lambda \frac{1}{4}\bar{\rho} \wedge \omega^{AB}\gamma_{AB} \left(\rho - \frac{1}{4}\omega^{CD}\gamma_{CD}\psi \right) + \lambda \frac{1}{4}\bar{\rho} \wedge \left(R^{AB} - \omega^A_C \omega^{CB} \right) \gamma_{AB}\psi
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Siguiendo el razonamiento de 4.2 es posible eliminar los términos que aparecen aquí y que son iguales a la acción clásica. Tras estas simplificaciones, la acción resultante es:

$$\begin{aligned}
dH =& \epsilon_{ABC} R^{AB} \omega^C{}_D i\bar{\psi}\gamma^D\psi \\
&+ \epsilon_{ABC} R^{AB} \wedge i \left(\bar{\rho} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\omega^{DE}\gamma_{DE} \right) \gamma^C \psi - \epsilon_{ABC} R^{AB} \wedge i\bar{\psi}\gamma^C \left(\rho - \frac{1}{4}\omega^{DE}\gamma_{DE}\psi \right) \\
&+ \lambda \frac{1}{4} \left(\bar{\rho} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\omega^{AB}\gamma_{AB} \right) \omega^{CD}\gamma_{CD} \wedge \rho - \lambda \frac{1}{4}\bar{\psi} \left(R^{AB} - \omega^A_C \omega^{CB} \right) \gamma_{AB}\rho \\
&- \lambda \frac{1}{4}\bar{\rho} \wedge \omega^{AB}\gamma_{AB} \left(\rho - \frac{1}{4}\omega^{CD}\gamma_{CD}\psi \right) + \lambda \frac{1}{4}\bar{\rho} \wedge \left(R^{AB} - \omega^A_C \omega^{CB} \right) \gamma_{AB}\psi
\end{aligned} \tag{5.7}$$

En esta expresión hay muchos términos que se cancelan independientemente del valor de λ.

- En primer lugar vamos a ver que el término

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}{}_{D}i\bar{\psi}\gamma^{D}\psi - i\epsilon_{ABC}R^{AB}\frac{1}{4}\left(\bar{\psi}\omega^{DE}\gamma_{DE}\gamma^{C}\psi - \bar{\psi}\gamma^{C}\omega^{DE}\gamma_{DE}\psi\right) \tag{5.8}$$

se anula. Para ello actuamos sobre las matrices γ_{CD}. Esta expresión se puede reescribir con el conmutador de matrices gamma de la forma:

$$\gamma_{AB} = -\epsilon_{ABC}\gamma^{C} \tag{5.9}$$

$$\gamma^{AB} = \epsilon^{ABC}\gamma_{C} \tag{5.10}$$

Donde el signo - aparece debido a la signatura que hemos tomado. Es necesario señalar que en ambos casos $\epsilon^{012} = \epsilon_{012} = 1$. Es decir que el signo del tensor Levy-Civita no varía al subir y bajar el índice 0 como sucede con el resto de tensores con la signatura elegida. Teniendo esta expresión en cuenta, la fórmula anterior queda como:

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}{}_{D}i\bar{\psi}\gamma^{D}\psi + i\epsilon_{ABC}R^{AB}\frac{1}{4}\left(\bar{\psi}\omega^{DE}\epsilon_{DEF}\gamma^{F}\gamma^{C}\psi - \bar{\psi}\omega^{DE}\epsilon_{DEF}\gamma^{C}\gamma^{F}\psi\right) \tag{5.11}$$

De esta forma podemos escribir la ecuación en función de la matriz γ^{CE} de la siguiente forma:

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}{}_{D}i\bar{\psi}\gamma^{D}\psi - i\epsilon_{ABC}R^{AB}\frac{1}{2}\bar{\psi}\omega^{DE}\epsilon_{DEF}\gamma^{CF}\psi \tag{5.12}$$

Y aplicando la misma relación que antes podemos escribirlo como:

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}{}_{D}i\bar{\psi}\gamma^{D}\psi - i\epsilon_{ABC}R^{AB}\frac{1}{2}\bar{\psi}\omega^{DE}\epsilon_{DEF}\epsilon^{CFG}\gamma_{G}\psi \tag{5.13}$$

Permutando de forma cíclica los índices de los tensores de Levi-Civita y aplicando la identidad:

$$\epsilon_{FDE}\epsilon^{FGC} = \left(\delta^{G}_{D}\delta^{C}_{E} - \delta^{C}_{D}\delta^{G}_{E}\right) \tag{5.14}$$

Llegamos a que la expresión obtenida es

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}{}_{D}i\bar{\psi}\gamma^{D}\psi - i\epsilon_{ABC}R^{AB}\frac{1}{2}\bar{\psi}\left(\omega^{GC} - \omega^{CG}\right)\gamma_{G}\psi \tag{5.15}$$

Debido a que ω es antisimétrico, $\omega^{GC} - \omega^{CG} = 2\omega^{GC}$. Y por lo tanto la expresión alcanza finalmente la forma de

$$\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{C}{}_{D}i\bar{\psi}\gamma^{D}\psi - i\epsilon_{ABC}R^{AB}\omega^{CG}\bar{\psi}\gamma_{G}\psi = 0 \tag{5.16}$$

Aparece un signo negativo debido al intercambio de índices antismétricos en ω y otro al conmutar dos 1-formas $\bar{\psi}$ y ω. El signo total permanece por lo tanto invariante y los dos términos se anulan.

- El siguiente término que vamos a anular es

$$\lambda\frac{1}{4}\bar{\psi}\omega^{A}_{\ C}\omega^{CB}\gamma_{AB}\rho - \lambda\frac{1}{4}\bar{\psi}\frac{1}{4}\omega^{AB}\gamma_{AB}\omega^{CD}\gamma_{CD}\rho \tag{5.17}$$

Para la demostración no es necesario arrastrar los términos que son factor común, y es más fácil realizar los cálculos si expresamos los términos relevantes de la forma:

$$\omega^{A}_{\ C}\omega^{CB}\gamma_{AB} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\gamma_{AB}\omega^{CD}\gamma_{CD} \tag{5.18}$$

Al igual que en el cálculo anterior, sustituimos $\gamma_{AB} = -\epsilon_{ABC}\gamma^{C}$. De forma que la expresión resultante que se obtiene es la siguiente:

$$\omega^{A}_{\ C}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{E}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{F} \tag{5.19}$$

Podemos entonces sustituir las matrices gamma de la siguiente forma:

$$\gamma^{E}\gamma^{F} = \left[\gamma^{E}, \gamma^{F}\right] + \gamma^{F}\gamma^{E} \tag{5.20}$$

Con este cambio se llega a la expresión:

$$\omega^{A}_{\ C}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{F}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{E} - \frac{1}{2}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{EF}\omega^{CD}\epsilon_{CDF} \tag{5.21}$$

Los argumentos que se emplean a continuación son muy similares a los del apartado anterior así que procederemos directamente con el desarrollo sin profundizar en explicaciones:

$$\begin{aligned}
&\omega^{A}_{\ C}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{F}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{E} - \frac{1}{2}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{EF}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\\
=&\omega^{A}_{\ C}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} - \frac{1}{2}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\epsilon^{EFG}\gamma^{G}\omega^{CD}\epsilon_{CDF} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{F}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{E}\\
=&\omega^{A}_{\ C}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} - \frac{1}{2}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma_{G}\omega^{CD}\left(\delta^{G}_{C}\delta^{E}_{D} - \delta^{E}_{C}\delta^{G}_{D}\right) - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{F}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{E}\\
=&\omega^{A}_{\ C}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} - \omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{G}\omega^{\ E}_{G} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{F}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{E}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

A continuación empleamos la identidad de Schouten sobre el segundo término:

$$\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{G}\omega_{G}^{\ E} = -\omega^{AB}\epsilon_{GBE}\gamma^{G}\omega_{A}^{\ E} - \omega^{AB}\epsilon_{AGE}\gamma^{G}\omega_{B}^{\ E} - \omega^{AB}\epsilon_{ABG}\gamma^{G}\omega_{E}^{\ E} \tag{5.23}$$

Evidentemente, el último término se anula debido a la antisimetría de ω Los otros dos términos son iguales, ésto se puede demostrar con las sigientes manipulaciones:

$$\begin{aligned}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{G}\omega_{G}^{\ E} &= -\omega^{AB}\epsilon_{GBE}\gamma^{G}\omega_{A}^{\ E} - \omega^{AB}\epsilon_{AGE}\gamma^{G}\omega_{B}^{\ E} \\ &= -\omega^{AB}\epsilon_{BEG}\gamma^{G}\omega_{A}^{\ E} - \omega^{BA}\epsilon_{EAG}\gamma^{G}\omega_{B}^{\ E} \\ &= -2\omega^{AB}\epsilon_{BEG}\omega_{A}^{\ E}\gamma^{G}\end{aligned} \tag{5.24}$$

Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene

$$\omega_{C}^{A}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} + 2\omega^{AB}\epsilon_{BEG}\omega_{A}^{\ E}\gamma^{G} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{F}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{E} \tag{5.25}$$

Puesto que $\omega_{A}^{\ E} = -\omega^{E}_{\ A}$. Los términos se restan y llegamos a que:

$$\begin{aligned}\omega_{C}^{A}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{E}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{F} &= -\omega_{C}^{A}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{F}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{E} \\ &= -\omega_{C}^{A}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} + \frac{1}{4}\omega^{CD}\epsilon_{ABE}\gamma^{F}\omega^{AB}\epsilon_{CDF}\gamma^{E}\end{aligned} \tag{5.26}$$

El signo negativo surge al cambiar de orden las 1-formas ω^{CD} y ω^{AB}. Renombrando los índices mudos $A \to C$, $B \to D$,$E \to F$ en le término $\frac{1}{4}\omega^{CD}\epsilon_{ABE}\gamma^{F}\omega^{AB}\epsilon_{CDF}\gamma^{E}$ llegamos a la conclusión de que

$$\omega_{C}^{A}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{E}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{F} = -\left(\omega_{C}^{A}\omega^{CB}\epsilon_{ABD}\gamma^{D} - \frac{1}{4}\omega^{AB}\epsilon_{ABE}\gamma^{E}\omega^{CD}\epsilon_{CDF}\gamma^{F}\right) \tag{5.27}$$

El mismo argumento es empleado para eliminar el término

$$\lambda\frac{1}{4}\bar{\rho}\omega_{C}^{A}\omega^{CB}\gamma_{AB}\psi - \lambda\frac{1}{4}\bar{\rho}\frac{1}{4}\omega^{AB}\gamma_{AB}\omega^{CD}\gamma_{CD}\psi$$

- La última simplificación que hay que tener en cuenta es la producida entre los términos

$$\lambda\frac{1}{4}\bar{\rho}\omega^{CD}\gamma_{CD}\rho \tag{5.28}$$

Puesto que en la expresión ambos términos son iguales y con signos opuestos la simplificación es inmediata.

Tras todas estas simplificaciones la expresión de dH adquiere un aspecto mucho más reducido:

$$\begin{aligned} dH = & \, i\epsilon_{ABC}R^{AB}\bar{\rho}\gamma^{C}\psi - i\epsilon_{ABC}R^{AB}\bar{\psi}\gamma^{C}\rho \\ & -\lambda\frac{1}{4}\bar{\psi}R^{AB}\gamma_{AB}\rho + \lambda\frac{1}{4}\bar{\rho}R^{AB}\gamma_{AB}\psi \end{aligned} \tag{5.29}$$

Igualando esta expresión a 0 podemos obtener el valor de λ. El cálculo específico requiere sustituir la expresión:

$$\gamma_{AB} = -\epsilon_{ABC}\gamma^{C} \tag{5.30}$$

que ya ha sido empleada anteriormente.

$$0 = i\epsilon_{ABC}R^{AB}\bar{\rho}\gamma^{C}\psi - i\epsilon_{ABC}R^{AB}\bar{\psi}\gamma^{C}\rho + \lambda\frac{1}{4}\bar{\psi}R^{AB}\gamma^{C}\epsilon_{ABC}\rho - \lambda\frac{1}{4}\bar{\rho}R^{AB}\epsilon_{ABC}\gamma^{C}\psi \tag{5.31}$$

Como R^{AB} es una 2-forma y ψ una 1-forma conmutan, y por lo tanto se puede escribir la expresión como:

$$0 = \epsilon_{ABC}R^{AB}(i - \lambda/4)\left(\bar{\rho}\gamma^{C}\psi - \bar{\psi}\gamma^{C}\rho\right) \tag{5.32}$$

Y por lo tanto concluimos que

$$\lambda = 4i \tag{5.33}$$

De esta forma tenemos ya la expresión de la acción supersimétrica que vamos a expandir:

$$H = \epsilon_{ABC}R^{AB}\wedge T^{C} + 4i\bar{\rho}\wedge\rho \tag{5.34}$$

Capítulo 6

Introducción al método de expansión de un álgebra

Una de las diferencias fundamentales entre la gravedad relativista y la galileana es que en el segundo caso, el tiempo pasa a ser una variable totalmente separada de las espaciales, y la métrica se divide en una espacial y otra temporal que son independientes.

Si queremos encontrar una forma de relacionar ambas teorías, es necesario buscar una forma de modificar el álgebra de Poincaré, de forma que la componente temporal se separe de las espaciales.

La herramienta matemática que vamos a emplear es el método de las expansión de un álgebra, cuyos fundamentos y resultados principales resumiremos en este apartado.

6.1. Reescalado de los parámetros del grupo

Sea G un grupo de Lie de coordenadas locales $g^i, i = 1, ..., r$. Sea $\mathcal{G}$ su álgebra de Lie con base X_i. Sea $\mathcal{G}^*$ el coálgebra y sea $\{\omega^i(g)\}$ la base determinada por las 1-formas de Maurer-Cartan en G. Entonces si $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$ son las ecuaciones del álgebra, las ecuaciones de Maurer-Cartan vienen dadas por:

$$d\omega^k(g) = -\frac{1}{2} c_{ij}^k \omega^i(g) \wedge \omega^j(g) \tag{6.1}$$

Es posible obtener nuevas álgebras a partir de estas redefiniendo algunos de los parámetros del grupo como $g^l = \lambda g^l$ y observando la expansión en serie sobre λ de las 1-formas $\omega^i(g, \lambda)$.

En primer lugar es necesario señalar que las 1-formas $\omega^i(g)$ pueden ser expresadas en función de los parámetros g como :

$$\omega^i(g) = \left[\delta^i_j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} c^{h_1}_{jk_1} c^{h_2}_{h_1 k_2} ... c^{h_{n-1}}_{h_{n-1}k_{n-1}} c^{i}_{h_{n-1}k_n} g^{k_1} ... g^{k_n}\right] dg^j \tag{6.2}$$

Viendo esta expresión es evidente que una redefinición de

$$g^l \to \lambda g^l \tag{6.3}$$

Producirá una expansión de las 1-formas de Maurer-Cartan como 1-formas $\omega^i_{(\alpha)}$ multiplicadas por las correspondientes λ^α.

6.2. Álgebras relevantes

Lo único que queda hacer por lo tanto es sustituir directamente en el álgebra de Maurer-Cartán las epresiones desarrolladas de ω^i e igualar los términos con la misma potencia de λ. Esas relaciones dan el nuevo álgebra. En esta sección vamos a tratar los casos más relevantes para el desarrollo que haremos

Álgebras $\mathcal{G}(N)$ generadas por $\mathcal{G} = V_0 \oplus V_1$

Si dividimos $\mathcal{G}^*$ en dos subespacios vectoriales arbitrarios generados por las 1-formas $\omega^{i_0}(g)$ y $\omega^{i_1}(g)$, de forma que

$$g^{i_0} \to g^{i_0} \qquad\qquad g^{i_1} \to g^{i_1} \tag{6.4}$$

y denotamos el nuevo álgebra como:

$$d\omega^{k_s}_{(\alpha)} = -\frac{1}{2} C^{k_s,\alpha}_{i_p,\beta\; j_q,\gamma} \omega^{i_p}_{(\beta)} \wedge \omega^{j_q}_{(\gamma)} \tag{6.5}$$

Los coeficientes del álgebra toman la forma

$$C^{k_s,\alpha}_{i_p,\beta\; j_q,\gamma} = \begin{cases} 0, & si\ \beta+\gamma \neq \alpha \\ c^{k_s}_{i_p j_q}, & si \beta+\gamma = \alpha \end{cases} \tag{6.6}$$

Desarrollo cuando V_1 es un conjunto cociente simétrico

La condición de coset simétrico se traduce en que se cumple que

$$[V_0, V_0] \subset V_0, \qquad [V_0, V_1] \subset V_1 \qquad [V_1, V_1] \subset V_0 \tag{6.7}$$

En este caso la serie de potencias en λ es con potencias pares(impares para las formas de Maurer-Cartán $\omega^{i_0}(g, \lambda)(\omega^{i_1}(g, \lambda)$. Es decir que se pueden escribir como:

$$\omega^{i_0}(g, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} \omega^{i_0}_{(2n)} \tag{6.8}$$

$$\omega^{i_1}(g, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n+1} \omega^{i_1}_{(2n+1)} \tag{6.9}$$

Capítulo 7

Expansión del álgebra de Poincaré

7.1. El algebra de Galileo

El grupo de Galileo es el grupo de transformaciones que son simetrías de la física Newtoniana. Su álgebra de Lie, el álgebra de Galileo, contiene los boosts Galileanos G_a, las traslaciones temporales H, las translaciones espaciales P_a y las rotaciones. Ignorando estas últimas, los conmutadores no nulos del álgebra son

$$[G_a, H] = P_a \ . \tag{7.1}$$

Este álgebra se puede obtener por un proceso de paso al límite (contracción de álgebras de Lie) a partir del álgebra de Poincaré.

Cuando se estudia la realización del álgebra de Galileo sobre la función de onda en mecánica cuántica, se observa que, realmente, la función de onda realiza el álgebra de Bargmann, con un generador adicional, M, y un nuevo conmutador no nulo

$$[G_a, P_b] = \delta_{ab} M \ . \tag{7.2}$$

Este generador adicional también resulta a partir del álgebra de Poincaré por un proceso de contracción, en el que el punto de partida es la suma directa del álgebra de Poincaré y $u(1)$. El mismo resultado se puede obtener, como veremos, por un proceso de expansión, que será más conveniente a la hora de incluir nuevos generadores que extienden el álgebra de Bargmann.

El método de las expansiones del álgebra da buenos resultados al intentar obtener una gravedad galileana partiendo del álgebra y acción de Poincaré.

Partimos de las ecuaciones de Maurer-Cartan introducidas en la sección 4:

$$\begin{cases} R^{AB} = \omega^{AB} + \omega^{A}_{C}\omega^{CB} \\ T^{A} = de^{A} + \omega^{A}_{B}e^{B} \end{cases} \tag{7.3}$$

El álgebra viene dado por las ecuaciones al anular las curvaturas:

$$\begin{cases} 0 = d\omega^{AB} + \omega^{A}_{C}\omega^{CB} \\ 0 = de^{A} + \omega^{A}_{B}e^{B} \end{cases} \tag{7.4}$$

En primer lugar llevamos a cabo el siguiente splitting:

$$e^{A} \rightarrow (e^{a}, e^{0} = \phi), \tag{7.5}$$

$$\omega^{AB} \rightarrow (\omega^{ab}, {\omega^{a}}_{0} = g^{a}) \tag{7.6}$$

Este splitting cumple las condiciones de 4.2.2. En este caso V_0^* estaría dado por ϕ,ω^{ab} y V_f^* por g^a y e^a. Por lo tanto podemos escribir la expansión como:

$$e^{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n+1}\widetilde{e}^{a}_{(2n+1)} \qquad \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n}\widetilde{\phi}_{(2n)} \tag{7.7}$$

$$\omega^{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n}\widetilde{\omega}^{ab}_{(2n)} \qquad g^{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n}\widetilde{g}^{a}_{(2n)} \tag{7.8}$$

Si hacemos el siguiente splitting de las curvaturas, y les asociamos el siguiente desarrollo de potencias. Denotaremos las expresiones del desarrollo con una tilde $\widetilde{A}$

$$T^{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n+1}\widetilde{T}^{a}_{(2n+1)} \qquad \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n}\widetilde{\Omega}_{(2n)} \tag{7.9}$$

$$R^{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n}\widetilde{R}^{ab}_{(2n)} \qquad G^{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n}\widetilde{G}^{a}_{(2n)} \tag{7.10}$$

como en el apartado anterior, obtenemos que las ecuaciones de las curvaturas se escriben

como:

$$\begin{aligned}
\lambda\widetilde{G}^a_{(1)} + ... =& \lambda d\widetilde{g}^a_{(1)} + \lambda\widetilde{\omega}^a_{(0)b}\widetilde{g}^b_{(1)} + ... \\
\widetilde{R}^{ab}_{(0)} + \lambda^2\widetilde{R}^{ab}_{(2)} + ... =& d\widetilde{\omega}^{ab}_{(0)} + \lambda^2 d\widetilde{\omega}^{ab}_{(2)} \\
&+ \left(\widetilde{\omega}^a_{(0)c}\widetilde{\omega}^{cb}_{(0)} + \lambda^2\widetilde{\omega}^a_{(2)c}\widetilde{\omega}^{cb}_{(0)} + \lambda^2\widetilde{\omega}^a_{(0)c}\widetilde{\omega}^{cb}_{(2)} + \lambda^2\widetilde{g}^a_{(1)}\widetilde{g}^b_{(1)}\right) + ... \\
\lambda\widetilde{T}^a_{(1)} + ... =& \lambda d\widetilde{e}^a_{(1)} + \lambda\widetilde{\omega}^a_{(0)b}\widetilde{e}^b_{(1)} + \lambda\widetilde{g}^a_{(1)}\widetilde{\phi}_{(0)} + ... \\
\widetilde{\Omega}_{(0)} + \lambda^2\widetilde{\Omega}_{(2)} + ... =& d\widetilde{\phi}_{(0)} + \lambda^2 d\widetilde{\phi}_{(2)} + \lambda^2\widetilde{g}_{(1)a}\widetilde{e}^a_{(1)} + ...
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Si tomamos los términos del desarrollo hasta λ^2 es posible obtener las ecuaciones de una gravedad galileana, con una variable temporal absoluta sobre la que se pliega el espacio tiempo. Bajo ésta consideración, podemos obtener el siguiente álgebra

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}^a_{(1)} =& d\widetilde{g}^a_{(1)} + \widetilde{\omega}^a_{(0)b}\widetilde{g}^b_{(1)} \\
\widetilde{R}^{ab}_{(0)} =& d\widetilde{\omega}^{ab}_{(0)} + \widetilde{\omega}^a_{(0)c}\widetilde{\omega}^{cb}_{(0)} \\
\widetilde{R}^{ab}_{(2)} =& d\widetilde{\omega}^{ab}_{(2)} + \left(\widetilde{\omega}^a_{(0)c}\widetilde{\omega}^{cb}_{(0)} + \widetilde{\omega}^a_{(2)c}\widetilde{\omega}^{cb}_{(0)} + \widetilde{\omega}^a_{(0)c}\widetilde{\omega}^{cb}_{(2)} + \widetilde{g}^a_{(1)}\widetilde{g}^b_{(1)}\right) \\
\widetilde{T}^a_{(1)} =& d\widetilde{e}^a_{(1)} + \widetilde{\omega}^a_{(0)b}\widetilde{e}^b_{(1)} + \widetilde{g}^a_{(1)}\widetilde{\phi}_{(0)} \\
\widetilde{\Omega}_{(0)} =& d\widetilde{\phi}_{(0)} \\
\widetilde{\Omega}_{(2)} =& d\widetilde{\phi}_{(2)} + \widetilde{g}_{(1)a}\widetilde{e}^a_{(1)}
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Para ello vamos a ver como la acción se transforma al llevar a cabo la expansión. Tomamos la forma diferencial H definida en el apartado 4.2

$$H = \epsilon_{ABC}R^{AB} \wedge T^C \tag{7.13}$$

Si denotamos por $\epsilon_{0ab} = \epsilon ab$, la acción se escribe en términos de las curvaturas del splitting como:

$$H = \epsilon_{0ab}G^a \wedge T^b - \epsilon_{a0b}G^a \wedge T^b + \epsilon_{ab0}R^{ab} \wedge \Omega = 2\epsilon_{ab}G^a \wedge T^b + \epsilon_{ab}R^{ab} \wedge \Omega \tag{7.14}$$

Si ahora desarrollamos la acción en potencias, obtenemos:

$$\widetilde{H}_{(0)} + \lambda^2\widetilde{H}_{(2)} = \epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(0)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(0)} + \lambda^2[\epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(2)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(0)} + \epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(0)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(2)} + 2\epsilon_{ab}\widetilde{G}^a_{(1)}\widetilde{T}^b_{(1)}] \tag{7.15}$$

El término de la acción en λ^2 da lugar a una acción de tipo Chern-Simmons

$$\widetilde{H}_{(2)} = \epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(2)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(0)} + \epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(0)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(2)} + 2\epsilon_{ab}\widetilde{G}^a_{(1)}\widetilde{T}^b_{(1)} \tag{7.16}$$

Las ecuaciones del movimiento se obtienen con el producto interno descrito en $i_{F^A}H = 0$. Por lo tanto las ecuaciones se obtienen anulando las curvaturas.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{R}^{ab}_{(0)} = 0 & \widetilde{R}^{ab}_{(2)} = 0 & \widetilde{G}^{a}_{(1)} = 0 \\ \widetilde{\Omega}_{(0)} = 0 & \widetilde{\Omega}_{(2)} = 0 & \widetilde{T}^{a}_{(1)} = 0 \end{array}$$

El parámetro que podemos tomar como tiempo absoluto se puede obtener por la condición $\widetilde{\Omega}_{(0)} = 0$. Sustituyendo en las ecuaciones del álgebra ésto implica que $d\widetilde{\phi}_{(0)} = 0$, y de aquí deducimos que podemos escribir $\widetilde{\phi}_{(0)} = dt$ que pasa a ser la variable temporal que tomamos como tiempo absoluto. Nótese que el término que nos interesa es $\widetilde{H}_{(2)}$ porque de él se obtienen las ecuaciones $\widetilde{T}^a = 0$ y $\widetilde{\Omega} = 0$ que son las que nos permiten establecer un tiempo absoluto. De aquí que hayamos cortado la expansión en el orden λ^2

7.2. Dimensiones físicas de las formas y de λ

Para que las 1-formas que aparecen en el álgebra tengan las dimensines físicas que cabe esperar, es necesario que λ tenga dimensiones físicas. Supongamos que comenzamos con el álgebra 4.1, y elegimos dimensiones para todos los e^A, $[e^A] = T$, mientras que las ω^{AB} han de ser forzosamente sin dimensiones. La métrica $g_{\mu\nu}$ se obtiene, a partir de e^A, por la fórmula

$$g_{\mu\nu} = e^A_\mu e_{A\nu} \ , \tag{7.17}$$

donde $e^A = e^A_\mu dx^\mu$ (e^A_μ son las coordenadas de e^A en la base dx^μ de $T*(M)$). Esto significa, si tomamos $[x^0] = T$, $[x^a] = L$, que g_{00} no tiene dimensiones, y $[g_{ij}] = T^2L^{-2}$. En el caso de la métrica de Minkowski, esto es compatible con la expresión

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix} . \tag{7.18}$$

Con este punto de partida, si suponemos que $[\lambda] = L^{-1}T$, entonces de 7.7 se deduce que $[g^a_{(1)}] = LT^{-1}$, como corresponde a la 1-forma dual de las aceleraciones galileanas. También, $[e^a_{(1)}] = T \cdot LT^{-1} = L$, como corresponde a las translaciones espaciales. Las demás 1-formas tienen las dimensiones que les corresponden por las ecuaciones del álgebra.

Capítulo 8

Expansión del álgebra de Super-Poincaré

Las ecuaciones del álgebra de Super-Poincaré en 2+1 dimensiones son

$$\begin{cases} d\omega^A{}_B = -\omega^A{}_C\omega^C{}_B \\ de^A = -\omega^A{}_B e^B - i\bar{\psi}\gamma^A\psi \\ d\psi = -\frac{1}{4}\omega^{AB}\gamma_{AB}\psi \end{cases} \tag{8.1}$$

donde γ^{AB} es el producto antisimétrico de matrices gamma, es decir:

$$\gamma^{AB} = \frac{1}{2}\left(\gamma^A\gamma^B - \gamma^B\gamma^A\right)$$

Durante todos los desarrollos, es necesario conocer la expresión del término conjugado del campo spinorial. El desarrollo es el que sigue. En primer lugar tomamos la ecuación adjunta hermítica de la curvatura spinorial, teniendo en cuenta que hay que cambiar el orden a dos 1-formas y que por lo tanto aparece un signo -.

$$0 = d\psi^\dagger - \frac{1}{4}\psi^\dagger\omega^{AB}\gamma^\dagger_{AB}$$

Para obtener el ajunto de Dirac multiplicamos a la derecha por la matriz γ^0.

$$0 = d\bar{\psi} - \frac{1}{4}\psi^\dagger\omega^{AB}\gamma^\dagger_{AB}\gamma^0$$

En la signatura que tenemos, $\left(\gamma^0\right)^2 = -Id$. Por lo tanto podemos escribir la ecuación anterior

como:

$$0 = d\bar{\psi} - \frac{1}{4}\psi^{\dagger}\gamma^{0}\omega^{AB}\frac{\gamma^{0}\gamma_{B}^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{0}\gamma_{A}^{\dagger}\gamma^{0} - \gamma^{0}\gamma_{A}^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{0}\gamma_{B}^{\dagger}\gamma^{0}}{2}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de las matrices gamma

$$\gamma^{0}\gamma^{B}\gamma^{0} = -(\gamma^{B})^{\dagger} \tag{8.2}$$

Llegamos a que la expresión correspondiente es:

$$0 = d\bar{\psi} + \frac{1}{4}\bar{\psi}\omega^{AB}\gamma_{AB} \tag{8.3}$$

Donde A,B=0,1,2.

8.1. Expansión de supergravedad con N=1

En primer lugar vamos a demostrar que el método de la expansión del álgebra no permite establecer una supergravedad galileana con N=1.

Puesto que estamos trabajando en N=1, debemos tomar spinores reales, es decir, que vienen dados por:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{1} \\ \psi^{2} \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

Y su adjunto viene dado por:

$$\bar{\psi} = (\psi^{1}, \psi^{2})\gamma^{0} \tag{8.5}$$

. Vamos a ver que bajo estas condiciones, la única expansión obtenible con este modo es la trivial.

El término cuya expansión vamos a analizar es de^{A}. Puesto que el campo fermiónico tiene dos grados de libertad vamos a expandirlos de la forma más genérica posible:

$$\psi^{1} = \widetilde{\psi}^{1}_{(0)} + \lambda\widetilde{\psi}^{1}_{(1)} + \lambda^{2}\widetilde{\psi}^{1}_{(2)} + ... \tag{8.6}$$
$$\psi^{2} = \widetilde{\psi}^{2}_{(0)} + \lambda\widetilde{\psi}^{2}_{(1)} + \lambda^{2}\widetilde{\psi}^{2}_{(2)} + ... \tag{8.7}$$

Al igual que en el apartado anterior, se toman los términos del desarrollo hasta λ^{2}.

A continuación vamos a ver que condiciones es necesario imponer a los términos de la expansión para que tengan consistencia con la expansión del álgebra.

Planteamos entonces la expansión del álgebra con

$$\begin{aligned}\lambda d\widetilde{e}^1_{(1)} &= -\lambda\widetilde{g}^1_{(1)}\widetilde{\phi}_{(0)} - \lambda\widetilde{\omega}^1_{(0)b}\widetilde{e}^b_{(1)} + i[(\widetilde{\psi}i^1_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(0)} + 2\lambda(\widetilde{\psi}^1_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(1)} - \widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^2_{(1)}) \\ &\quad +\lambda^2(2\widetilde{\psi}^1_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(2)} + \widetilde{\psi}^1_{(1)}\widetilde{\psi}^1_{(1)} - 2\widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^2_{(2)} - \widetilde{\psi}^2_{(1)}\widetilde{\psi}^2_{(1)})]\end{aligned} \tag{8.8}$$

$$\begin{aligned}\lambda d\widetilde{e}^2_{(1)} &= -\lambda\widetilde{g}^2_{(1)}\widetilde{\phi}_{(0)} - \lambda\widetilde{\omega}^2_{(0)b}\widetilde{e}^b_{(1)} + i[\widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(0)} + \lambda(\widetilde{\psi}^2_{(1)}\widetilde{\psi}^1_{(0)} + \widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(1)}) + \\ &\quad \lambda^2(\widetilde{\psi}^1_{(2)}\widetilde{\psi}^2_{(0)} + \widetilde{\psi}^2_{(2)}\widetilde{\psi}^1_{(0)} + 2\widetilde{\psi}^1_{(1)}\widetilde{\psi}^2_{(1)})]\end{aligned} \tag{8.9}$$

Para que ambas ecuaciones sean consistentes es necesario imponer que los términos de orden 0 y 2 en lambda se anulen.

$$\begin{aligned}d\widetilde{\phi}_{(0)} + \lambda^2 d\widetilde{\phi}_{(2)} &= -\lambda^2\widetilde{g}_{(1)a}\widetilde{e}^a_{(1)} \\ &\quad i[(\widetilde{\psi}^1_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(0)} + \widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^2_{(0)}) + 2\lambda(\widetilde{\psi}^1_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(1)} + \widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^2_{(1)}) \\ &\quad \lambda^2(2\widetilde{\psi}^1_{(0)}\widetilde{\psi}^2_{(0)} + \widetilde{\psi}^1_{(1)}\widetilde{\psi}^1_{(1)} + 2\widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^2_{(2)} + \widetilde{\psi}^1_{(1)}\widetilde{\psi}^2_{(1)})]\end{aligned} \tag{8.10}$$

En esta condición hay que imponer que los términos lineales en λ se anulen. Las ligaduras dan lugar a el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \widetilde{\psi}^1_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(0)} - \widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^2_{(0)} = 0 \\ 2\widetilde{\psi}^1_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(2)} + \widetilde{\psi}^1_{(1)}\widetilde{\psi}^1_{(1)} - 2\widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^2_{(2)} - \widetilde{\psi}^2_{(1)}\widetilde{\psi}^2_{(1)} = 0 \\ \widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(0)} = 0 \\ 2\widetilde{\psi}^1_{(1)}\widetilde{\psi}^2_{(1)} + 2\widetilde{\psi}^1_{(2)}\psi^2_{(0)} + 2\widetilde{\psi}^1_{(0)}\widetilde{\psi}^2_{(2)} = 0 \\ \widetilde{\psi}^1_{(0)}\widetilde{\psi}1^1 + \widetilde{\psi}^2_{(0)}\widetilde{\psi}^1_{(2)} = 0 \end{cases} \tag{8.11}$$

La única solución a este sistema es la trivial, de forma que concluimos que no es posible emplear este tratamiento.

El motivo de ésta imposibilidad es que hay que imponer la condición de Majorana sobre los spinores. Al realizar la expansión hay que dividir los spinores de dos componentes reales en spinores de una componente real. Ésto correspondería a spinores de Weyl-Majorana (pués también cumplen la condición de quiralidad). Pero éstos spinores no existen en D=2 con la signatura (++). Ésta restricción sin embargo no se aplicaría si el splitting se llevase a cabo en una coordenada espacial dado que en D=2 con singatura (-+) si hay spinores Majorana-Weyl. Sin embargo el significado físico de ésta manipulación no está claro y por lo tanto no entraremos a discutirlo.

8.2. Expansión de supergravedad en N=2

En N=2 no hay que imponer la condición de realidad, y eso nos permite llevar a cabo la expansión del álgebra.

Álgebra

El splitting de los spinores se llevará a cabo de ésta forma.

$$\psi = P_+\xi_+ + P_-\xi_- \tag{8.12}$$

Donde $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_0)$. El resultado de ésta expansión es transformar un spinor complejo en la suma de dos spinores reales.

Para verlo realizamos el siguietne cálculo:

$$Re(\psi) + iIm(\psi) = (1 + i\gamma_0)\,\xi_+ + (1 - i\gamma_0)\,\xi_- \tag{8.13}$$

Igualamos la parte real y la parte imaginaria de las ecuaciones para llegar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \gamma_0\xi_+ - \gamma_0\xi_- = Im(\psi) \\ \xi_+ + \xi_- = Re(\psi) \end{cases} \tag{8.14}$$

Si multiplicamos por γ^0 la ecuación superior y resolvemos el sistema obtenemos:

$$\xi_\pm = Re(\psi) \mp \gamma^0 Im(\psi) \tag{8.15}$$

El splitting de las curvatura se realiza de esta forma:

$$\begin{aligned} T^A \to& (T^a, T^0 = \Omega), \\ R^{AB} \to& (R^{ab}, R^a_0 = G^a) \\ \rho =& P_+\Xi_+ + P_-Xi_- \end{aligned} \tag{8.16}$$

Bajo este splitting, las ecuaciones estructurales de Maurier-Cartan se pueden escribir

como:

$$\begin{aligned}
.T^a &= de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b + g^a \wedge \phi + i\overline{\xi}_+ \gamma^a \wedge \xi_- \\
\Omega &= d\phi + g_a \wedge e^a + \frac{i}{2}\xi_+^t \wedge \xi_+ + \frac{i}{2}\xi_-^t \wedge \xi_- \\
R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} + g^a \wedge g^b \\
G^a &= dg^a + \omega^a{}_b \wedge g^b \\
\Xi_\pm &= d\xi_\pm + \frac{1}{4}\omega_{ab}\gamma^{ab} \wedge \xi_\pm + \frac{1}{2}\gamma^a g_a \gamma^0 \wedge \xi_\mp \ .
\end{aligned} \tag{8.17}$$

La expansión de los campos spinoriales es

$$\begin{aligned}
\xi_+ &= \widetilde{\xi}_{(0)+} + \lambda^2 \widetilde{\xi}_{(2)+} \\
\xi_- &= \lambda \widetilde{\xi}_{(1)-}
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Al igual que en 7, llevamos el desarrollo hasta el segundo orden en λ.

Análogamente la expansión de las curvaturas spinoriales es:

$$\begin{aligned}
\Xi_+ &= \widetilde{\Xi}_{(0)+} + \lambda^2 \widetilde{\Xi}_{(2)+} \\
\Xi_- &= \lambda \widetilde{\Xi}_{(1)-}
\end{aligned} \tag{8.19}$$

La expansión del resto de los términos es la misma que en el apartado 7.

Realizamos ahora la expansión de cada término del álgebra, seleccionando los términos que llegan como máximo al grado 2:

$$\begin{aligned}
\lambda \widetilde{G}^a_{(1)} &= \lambda d\widetilde{g}^a_{(1)} + \lambda \widetilde{\omega}^a_{(0)b} \widetilde{g}^b_{(1)} \\
\widetilde{R}^{ab}_{(0)} + \lambda^2 \widetilde{R}^{ab}_{(2)} &= d\widetilde{\omega}^{ab}_{(0)} + \lambda^2 d\widetilde{\omega}^{ab}_{(2)} + \left(\widetilde{\omega}^a_{(0)c} \widetilde{\omega}^{cb}_{(0)} + \lambda^2 \widetilde{\omega}^a_{(2)c} \widetilde{\omega}^{cb}_{(0)} + \lambda^2 \widetilde{\omega}^a_{(0)c} \widetilde{\omega}^{cb}_{(2)} + \lambda^2 \widetilde{g}^a_{(1)} \widetilde{g}^b_{(1)} \right) \\
\lambda \widetilde{T}^a_{(1)} &= \lambda d\widetilde{e}^a_{(1)} + \lambda \widetilde{\omega}^a_{(0)b} \widetilde{e}^b_{(1)} + \lambda \widetilde{g}^a_{(1)} \widetilde{\phi}_{(0)} + \lambda i \overline{\widetilde{\xi}}_{(0)+} \gamma^a \xi_{(1)-} \\
\widetilde{\Omega}_{(0)} + \lambda^2 \widetilde{\Omega}_{(2)} &= d\widetilde{\phi}_{(0)} + \lambda^2 d\widetilde{\phi}_{(2)} + \frac{i}{2} \overline{\widetilde{\xi}}_{(0)+} \gamma^0 \widetilde{\xi}_{(0)+} + \lambda^2 \widetilde{g}_{(1)a} \widetilde{e}^a_{(1)} \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{2} \left[\overline{\widetilde{\xi}}_{(0)+} \gamma^0 \widetilde{\xi}_{(2)+} + \overline{\widetilde{\xi}}_{(2)+} \gamma^0 \widetilde{\xi}_{(0)+} + \overline{\widetilde{\xi}}_{(1)-} \gamma^0 \widetilde{\xi}_{(1)-} \right] \\
\widetilde{\Xi}_{(0)+} + \lambda^2 \widetilde{\Xi}_{(2)+} &= d\widetilde{\xi}_{(0)+} + \lambda^2 d\widetilde{\xi}_{(2)+} + \frac{1}{4} \gamma^{ab} \widetilde{\omega}_{(0)ab} \widetilde{\xi}_{(0)+} \\
&\quad + \lambda^2 \left(\frac{1}{4} \gamma^{ab} \widetilde{\omega}_{(2)ab} \widetilde{\xi}_{(0)+} + \frac{1}{4} \gamma^{ab} \widetilde{\omega}_{(0)ab} \widetilde{\xi}_{(2)+} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \gamma^{a0} \widetilde{g}_{(1)a} \widetilde{\xi}_{(1)-} \\
\lambda \widetilde{\Xi}_{(1)-} &= \lambda d\widetilde{\xi}_{(1)-} + \lambda \frac{1}{4} \gamma^{ab} \widetilde{\omega}_{(0)ab} \widetilde{\xi}_{(1)-} + \lambda \frac{1}{2} \gamma^{a0} \widetilde{g}_{(1)a} \widetilde{\xi}_{(0)+}
\end{aligned} \tag{8.20}$$

El álgebra expandida adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}^a_{(1)} &= d\widetilde{g}^a_{(1)} + \widetilde{\omega}^a_{(0)b} g^b_{(1)} \\
\widetilde{R}^{ab}_{(0)} &= d\widetilde{\omega}^{ab}_{(0)} + \widetilde{\omega}^a_{(0)c}\widetilde{\omega}^{cb}_{(0)} \\
\widetilde{R}^{ab}_{(2)} &= d\widetilde{\omega}^{ab}_{(2)} + \widetilde{g}^a_{(1)}\widetilde{g}^b_{(1)} \\
\widetilde{\Omega}_{(0)} &= d\widetilde{\phi}_{(0)} + \frac{i}{2}\bar{\widetilde{\xi}}_{(0)+}\gamma^0\widetilde{\xi}_{(0)+} \\
\widetilde{\Omega}_{(2)} &= d\widetilde{\phi}_{(2)} - \widetilde{g}_{(1)a}\widetilde{e}^a_{(1)} + i\left[\bar{\widetilde{\xi}}_{(0)+}\gamma^0\widetilde{\xi}_{(2)+} + \frac{1}{2}\bar{\widetilde{\xi}}_{(1)-}\gamma^0\widetilde{\xi}_{(1)-}\right] \\
\widetilde{T}^a_{(1)} &= d\widetilde{e}^a_{(1)} + \widetilde{\omega}^a_{(0)b}\widetilde{e}^b_{(1)} + g^a_{(1)}\phi_{(0)} + i(\bar{\widetilde{\xi}}_{(0)+}\gamma^a\xi_{(1)-}) \\
\widetilde{\Xi}_{(0)+} &= d\widetilde{\xi}_{(0)+} + \frac{1}{4}\gamma^{ab}\widetilde{\omega}_{(0)ab}\widetilde{\xi}_{(0)+} \\
\widetilde{\Xi}_{(2)+} &= d\widetilde{\xi}_{(2)+} + \frac{1}{4}\left(\gamma^{ab}\widetilde{\omega}_{(2)ab}\widetilde{\xi}_{(0)+} + \gamma^{ab}\widetilde{\omega}_{(0)ab}\widetilde{\xi}_{(2)+}\right) + \frac{1}{2}\gamma^a\gamma^0\widetilde{g}_{(1)a}\widetilde{\xi}_{(1)-} \\
\widetilde{\Xi}_{(1)-} &= d\widetilde{\xi}_{(1)-} + \frac{1}{4}\gamma^{ab}\widetilde{\omega}_{(0)ab}\widetilde{\xi}_{(1)-} + \frac{1}{2}\gamma^a\gamma^0\widetilde{g}_{(1)a}\widetilde{\xi}_{(0)+}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Versión dual del álgebra expandida

Puesto que en este apartado no hay riesgo de confusión entre las álgebras antes y después del desarrollo, vamos a dejar de emplear $\widetilde{A}$ para denotar las expresiones desarrolladas. Vamos a encontrar los (anti)conmutadores de los generadores duales del álgebra expandido dado por 8.21. Para obtener las ecuaciones de Maurer-Cartan, hemos de anular las curvaturas. Además, dedo que $a = 1, 2$, podemos escribir $\omega_{ab} = \epsilon_{ab}\omega$, $q_{ab} = \epsilon_{ab}q$. De este modo, las ecuaciones de Maurer-Cartan son

$$\begin{aligned}
de^a_{(1)} &= -\epsilon^a{}_b\omega_{(0)} \wedge e^b_{(1)} - g^a_{(1)} \wedge \phi_{(0)} - i\xi^t_{(1)-}\gamma^a \wedge \xi_{(0)} \\
d\phi_{(0)} &= -\frac{i}{2}\xi^t_{(0)+}\gamma^0 \wedge \xi_{(0)+} \\
d\phi_{(2)} &= -g_{(1)a} \wedge e^a_{(1)} + i\xi^t_{(0)+}\gamma^0 \wedge \xi_{(2)+} + \frac{i}{2}\xi^t_{(1)-}\gamma^0 \wedge \xi_{(1)-} \\
d\omega &= 0 \\
d\omega_{(2)} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ab}g^a_{(1)} \wedge g^b_{(1)} \\
dg^a_{(1)} &= -\epsilon^a{}_b\omega_{(0)} \wedge g^b_{(1)} \\
d\xi_{(0)+} &= -\frac{1}{2}\omega_{(0)}\gamma^0 \wedge \xi_{(0)} \\
d\xi_{(2)+} &= -\frac{1}{2}\omega_{(0)}\gamma^0 \wedge \xi_{(2)+} - \frac{1}{2}q_{(2)}\gamma^0 \wedge \xi_{(0)+} - \frac{1}{2}\gamma^a g_{(1)a}\gamma^0 \wedge \xi_{(1)-} \\
d\xi_{(1)-} &= \frac{1}{2}\omega_{(0)}\gamma^0 \wedge \xi_{(1)-} + \frac{1}{2}\gamma^a g_{(1)a}\gamma^0 \wedge \psi_{(0)+} \ .
\end{aligned} \tag{8.22}$$

Ahora vamos a nombrar los generadores como en el artículo de Bergshoeff [2]: Los generadores duales a $e^a_{(1)}$, $\phi_{(0)}$, $\phi_{(2)}$, $\omega_{(0)}$, $\omega_{(2)}$, $g^a_{(1)}$, $\xi_{(0)+}$, $\xi_{(2)+}$ y $\xi_{(1)-}$ serán P_a, H, M, J, S, G^a, Q^+, R y Q^- respectivamente. Un método sencillo para encontrar los conmutadores se basa en el uso de la uno-forma canónica

$$\Theta = e^a_{(1)} P_a + \phi_{(0)} H + \phi_{(0)} M + \omega_{(0)} J + \omega_{(2)} S + g^a_{(1)} G_a + \xi^\alpha_{(0)+} Q^+_\alpha + \xi^\alpha_{(2)+} R_\alpha + \xi^\alpha_{(1)-} Q^-_\alpha \ . \quad (8.23)$$

Si se impone que $d\theta = -\theta \wedge \theta$, y se supone que los generadores conmutan con las 1-formas, entonces es fácil extraer de esa igualdad los conmutadores. En efecto, consideremos un álgebra de Lie con 1-formas ω^i, y generadores X_i. Si las ecuaciones de Maurer-cartan son

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} C^k{}_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \ , \quad (8.24)$$

entonces los conmutadores de los generadores han de ser

$$[X_i, X_j] = \frac{1}{2} C^k{}_{ij} X_k \ . \quad (8.25)$$

Pero si definimos la 1-forma canónica $\Theta = \omega^i X_i$, e imponemos que $d\theta = -\theta \wedge \theta$, tendremos, debido a la antisimetría en i, j de $\omega^i \wedge \omega^j$,

$$d\omega^k X_k = -\omega^i X_i \wedge \omega^j X_j = \frac{1}{2} \omega^i \wedge \omega^j [X_i, X_j] \ . \quad (8.26)$$

Por otra parte, usando (8.24) en el miembro de la izquierda, se llega a

$$-\frac{1}{2} C^k{}_{ij} \omega^i \wedge \omega^j X_k = -\omega^i X_i \wedge \omega^j X_j = \frac{1}{2} \omega^i \wedge \omega^j [X_i, X_j] \ . \quad (8.27)$$

Indentificando los coeficientes de $\omega^i \wedge \omega^j$, se recupera (8.25). El razonamiento anterior nos indica cómo proceder para encontrar los conmutadores en nuestro caso. La ecuación (8.27) nos dice que

$$
\begin{aligned}
&(-\epsilon^a{}_b\omega_{(0)}\wedge e^b_{(1)} - g^a_{(1)}\wedge\phi_{(0)} - i\xi^\alpha_{(0)+}(\gamma^0\gamma^a)_{\alpha\beta}\wedge\xi^\beta_{(1)-})P_a \\
&-\frac{i}{2}\xi^\alpha_{(0)+}\wedge\xi_{(0)+\alpha}H - \frac{1}{2}\epsilon_{ab}g^a_{(1)}\wedge g^b_{(1)}S \\
&+(-g_{(1)a}\wedge e^a_{(1)} + i\xi^\alpha_{(0)+}\wedge\xi_{(2)+\alpha} + \frac{i}{2}\xi^\alpha_{(1)-}\wedge\xi_{(1)-\alpha})M \\
&-\epsilon^a{}_b\omega_{(0)}\wedge g^b_{(1)}G_a - \frac{1}{2}\omega_{(0)}(\gamma^0)^\alpha{}_\beta\wedge\xi^\beta_{(0)+}Q^+_\alpha \\
&+(-\frac{1}{2}\omega_{(0)}(\gamma^0)^\alpha{}_\beta\wedge\xi^\beta_{(2)+} - \frac{1}{2}q_{(2)}(\gamma^0)^\alpha{}_\beta\wedge\xi^\beta_{(0)+} - \frac{1}{2}(\gamma^a\gamma^0)^\alpha{}_\beta g_{(1)a}\wedge\xi^\beta_{(1)-})R_\alpha \\
&+(-\frac{1}{2}\omega_{(0)}(\gamma^0)^\alpha{}_\beta\wedge\xi^\beta_{(1)-} - \frac{1}{2}(\gamma^a\gamma^0)^\alpha{}_\beta g_{(1)a}\wedge\xi^\beta_{(0)+})Q^-_\alpha
\end{aligned}
\tag{8.28}
$$

debe ser igual a (de un total de 81 sólo escribimos los conmutadores que no serán nulos)

$$
\begin{aligned}
&-\ \omega_{(0)}\wedge e^a_{(1)}[J,P_a] - g^a_{(1)}\wedge\phi_{(0)}[G_a,H] - \xi^\alpha_{(0)+}\wedge\xi^\beta_{(1)-}\left\{Q^+_\alpha,Q^-_\beta\right\} \\
&-\ \frac{1}{2}\xi^\alpha_{(0)+}\wedge\xi^\beta_{(0)+}\left\{Q^+_\alpha,Q^+_\beta\right\} - \frac{1}{2}g^a_{(1)}\wedge g^b_{(1)}[G_a,G_b] \\
&-\ g^a_{(1)}\wedge e^b_{(1)}[G_a,P_b] - \xi^\alpha_{(0)+}\wedge\xi^\beta_{(2)+}\left\{Q^+_\alpha,R_\beta\right\} - \frac{1}{2}\xi^\alpha_{(1)-}\wedge\xi^\beta_{(1)-}\{Q^-_\alpha,Q^-_\beta\} \\
&-\ \omega_{(0)}\wedge g^a_{(1)}[J,G_a] - \omega_{(0)}\wedge\xi^\alpha_{(0)+}\left[J,Q^+_\alpha\right] \\
&-\ \omega_{(0)}\wedge\xi^\alpha_{(2)+}[J,R_\alpha] - \omega_{(2)}\wedge\xi^\alpha_{(0)+}\left[S,Q^+_\alpha\right] - g^a_{(1)}\wedge\xi^\alpha_{(1)-}\left[G_a,Q^-_\alpha\right] \\
&-\ \omega_{(0)}\wedge\xi^\alpha_{(1)-}\left[J,Q^-_\alpha\right] - g^a_{(1)}\wedge\xi^\alpha_{(0)-}\left[G_a,Q^+_\alpha\right]\ ,
\end{aligned}
\tag{8.29}
$$

donde los anticonmutadores resultan del signo adicional que aparece al intercambiar dos formas fermiónicas. Identificando (8.28) y (8.29), llegamos a los siguientes (anti)conmutadores no nulos:

$$
\begin{aligned}
&[J,P_a] = -\epsilon_{ab}P^b\ ,\quad [G_a,H] = P_a\ ,\quad \left\{Q^+_\alpha,Q^-_\beta\right\} = -i(\gamma^0\gamma^a)_{\alpha\beta}P_a\ , \\
&\left\{Q^+_\alpha,Q^+_\beta\right\} = i\delta_{\alpha\beta}H\ ,\quad [G_a,G_b] = \epsilon_{ab}S\ , \\
&[G_a,P_b] = \delta_{ab}M\ ,\quad \left\{Q^+_\alpha,R_\beta\right\} = -i\delta_{\alpha\beta}M\ ,\quad \{Q^-_\alpha,Q^-_\beta\} = -i\delta_{\alpha\beta}M\ , \\
&[J,G_a] = -\epsilon_{ab}G^b\ ,\quad \left[J,Q^+_\alpha\right] = \frac{1}{2}(\gamma^0)^\beta{}_\alpha Q^+_\beta\ , \\
&[J,R_\alpha] = \frac{1}{2}(\gamma^0)^\beta{}_\alpha R_\beta\ ,\quad \left[S,Q^+_\alpha\right] = \frac{1}{2}(\gamma^0)^\beta{}_\alpha R_\beta\ ,\quad \left[G_a,Q^-_\alpha\right] = \frac{1}{2}(\gamma^0\gamma^a)^\beta{}_\alpha R_\beta\ , \\
&\left[J,Q^-_\alpha\right] = \frac{1}{2}(\gamma^0)^\beta{}_\alpha Q^-_\beta\ ,\quad \left[G_a,Q^+_\alpha\right] = \frac{1}{2}(\gamma^0\gamma^a)^\beta{}_\alpha Q^-_\beta\ .
\end{aligned}
\tag{8.30}
$$

Estos conmutadores, aparte de algunas redefiniciones sencillas, coinciden con los dados por Bergshoeff et al. [2]

Expansión de la acción

En este apartado describiremos como la acción pasa a dividirse. Para ello escribimos primero H en función del splitting, para ello tomamos la notación de que $\epsilon_{0ab} = \epsilon_{ab}$:

$$\begin{aligned} H &= \epsilon_{ABC} R^{AB} \wedge T^{C} + 4ie\bar{\rho} \wedge \rho \\ &= \epsilon_{0ab} \widetilde{G}^{a} \wedge \widetilde{T}^{b} - \epsilon_{a0b} \widetilde{G}^{a} \wedge \widetilde{T}^{b} + \epsilon_{ab0} \widetilde{R}^{ab} \wedge \widetilde{\Omega} + 2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{+} \wedge \widetilde{\Xi}_{+} + 2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{-} \wedge \widetilde{\Xi}_{-} \end{aligned} \tag{8.31}$$

Los dos últimos términos requiere realizar las siguientes operaciones que se explican a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \wedge \rho &= \rho^{\dagger} \gamma_0 \wedge \rho \\ &= \left[\Xi_{+}^{\dagger} \frac{1}{2} \left(1 - i(\gamma_0)^{\dagger}\right) + \Xi_{-}^{\dagger} \frac{1}{2} \left(1 + i(\gamma_0)^{\dagger}\right) \right] \gamma_0 \wedge \left[\frac{1}{2} \left(1 - i\gamma_0\right) \Xi_{-} + \frac{1}{2} \left(1 + i\gamma_0\right) \Xi_{+} \right] \end{aligned} \tag{8.32}$$

Recordando que $(\gamma^0)^{\dagger} = -\gamma^0$ y que $\gamma^0 \gamma_0 = -Id$, analizaremos el término cruzado en $wXi_{+}^{\dagger}$ y $\widetilde{\Xi}_{-}$ y veremos que se anula.

$$\begin{aligned} \left(1 - i(\gamma_0)^{\dagger}\right) \gamma^0 \left(1 - i\gamma_0\right) &= \left(\gamma^0 - i\right) \left(1 - i\gamma_0\right) \\ &= \gamma^0 - i - \gamma^0 + i = 0 \end{aligned} \tag{8.33}$$

El otro término cruzado se anula de la misma forma. Sólo queda analizar la contribución de los términos cuadráticos,comenzando por

$$\begin{aligned} \Xi_{+}^{\dagger} \frac{1}{2} \left(1 - i(\gamma_0)^{\dagger}\right) \gamma^0 \frac{1}{2} \left(1 + i\gamma_0\right) \Xi_{+} &= \Xi_{+}^{\dagger} \frac{1}{4} \left(\gamma^0 - i\right) \left(1 + i\gamma_0\right) \Xi_{+} \\ &= \Xi_{+}^{\dagger} \frac{1}{4} \left(\gamma^0 - i - i + \gamma^0\right) \Xi_{+} \\ &= \Xi_{+}^{\dagger} \frac{1}{2} \left(\gamma^0 - i\right) \Xi_{+} \end{aligned}$$

La contribución de $\Xi_{+}^{\dagger} \frac{i}{2} \Xi$ se anula. Esto sucede debido a que el spinor es real. Para verlo buscamos la expresión de $\Xi_{+}^{\dagger}$, que por ser un espinor real es Ξ_{+}^{t}. Vamos a calcular el valor de $(\Xi_{+}^{t} \Xi)^{t}$, que por ser un número real es:

$$(\Xi_{+}^{t} \Xi)^{t} = \Xi_{+}^{t} \Xi \tag{8.34}$$

Por otro lado, podemos calcularlo con las reglas de conmutación de spinores. Puesto que conmutamos 2- formas no aparece ningún signo. Pero como también son elementos impares de un álgebra de Grassman tenemos un signo - de forma que:

$$(\Xi_+^t \Xi)^t = -\Xi_+^t \Xi = \Xi_+^t \Xi = 0 \tag{8.35}$$

El otro término se obtiene de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\Xi_-^\dagger \frac{1}{2}\left(1 + i(\gamma_0)^\dagger\right)\gamma^0 \frac{1}{2}\left(1 - i\gamma_0\right)\Xi_- &= \Xi_-^\dagger \frac{1}{4}\left(\gamma^0 + i\right)\left(1 - i\gamma_0\right)\Xi_- \\
&= \Xi_-^\dagger \frac{1}{4}\left(\gamma^0 + i + i + \gamma^0\right)\Xi_+ \\
&= \Xi_+^\dagger \frac{1}{2}\left(\gamma^0 + i\right)\Xi_+
\end{aligned}$$

Y debido al mismo argumento que en el apartado anterior, obtenemos la expresión de las curvaturas.

Una vez realizado el splitting de la acción podemos proceder a la expansión. Sustituyendo directamente los términos llegamos a:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_{(0)} + \lambda^2 \widetilde{H}_{(2)} =& \epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(0)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(0)} - 4i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(0)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(0)+} \\
&+ \lambda^2[\epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(2)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(0)} + \epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(0)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(2)} - 2\epsilon_{ab}G^a_{(1)}T^b_{(1)} + \\
&2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(2)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(0)+} + 2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(0)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(2)+} + 2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(1)-} \wedge \widetilde{\Xi}_{(1)-}]
\end{aligned} \tag{8.36}$$

Los términos $2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(2)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(0)+} + 2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(0)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(2)+}$ se pueden agrupar.

$$2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(0)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(2)+} = 2i\widetilde{\Xi}^t_{(0)+}\gamma^0 \wedge \widetilde{\Xi}_{(2)+} = -(2i\widetilde{\Xi}^t_{(2)+}(\gamma^0)^t \wedge \widetilde{\Xi}_{(0)+})t \tag{8.37}$$

El signo - surge por conmutar 2 2-formas spinoriales, pero se compensa con el signo - que aparece en $(\gamma^0)^t = -\gamma^0$ y resulta finalmente:

$$2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(0)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(2)+} = 2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(0)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(2)+} \tag{8.38}$$

De forma que la acción toma finalmente la forma:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_{(0)} + \lambda^2 \widetilde{H}_{(2)} =& \epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(0)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(0)} - 4i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(0)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(0)+} \\
&+ \lambda^2[\epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(2)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(0)} + \epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(0)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(2)} + 2\epsilon_{ab}G^a_{(1)}T^b_{(1)} + \\
&4i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(2)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(0)+} + 2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(1)-} \wedge \widetilde{\Xi}_{(1)-}]
\end{aligned} \tag{8.39}$$

Al igual que en el apartado 7, solo nos interesa el término del desarrollo con λ^2, y por lo tanto la acción puede expresarse como:

$$\widetilde{H}_{(2)} = \epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(2)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(0)} + \epsilon_{ab}\widetilde{R}^{ab}_{(0)} \wedge \widetilde{\Omega}_{(2)} + 2\epsilon_{ab}G^{a}_{(1)}T^{b}_{(1)} + 4i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(2)+} \wedge \widetilde{\Xi}_{(0)+} + 2i\bar{\widetilde{\Xi}}_{(1)-} \wedge \widetilde{\Xi}_{(1)-} \quad (8.40)$$

Las ecuaciones de la acción vienen dadas anulando todas las curvaturas debido a que este cálculo se ha realizado sin incluir ninguna densidad lagrangiana de materia.

Capítulo 9

Conclusiones

En este trabajo se ha reproducido fácilmente el álgebra de supergalileo propuesto en la referencia [2] para la supergravedad Galileana en 3 dimensiones. Además hemos visto que, cuando se expande la acción y se selecciona el término físicamente relevante, ello selecciona donde se corta la expansión del álgebra de partida, que en principio es infinita.

Como hemos dicho en la introducción, el procedimiento a usar en el caso $D = 4$ es claro. Simplemente hay que partir de una acción de la supergravedad en $D = 4$ apropiada, introducir el desarrollo del álgebra de superPoincaré en la diferencial de la forma Lagrangiana y seleccionar el término adecuado.

Un hecho que hemos probado de dos maneras independientes, es que el álgebra de partida ha de ser superPoincaré con $N = 2$, dado que de otro modo no se puede obtener el caso Galileano deseado. Esto seguirá siendo cierto en $D = 4$, lo que nos obligará a partir de la supergravedad en $D = 4$, con $N = 2$, que es más difícil de manejar, por contener campos adicionales que modifican le álgebra de partida, y también por contener funciones auxiliares que, en principio, no están relacionadas con formas diferenciales de ningún álgebra.

En cualquier caso cálculos preliminares, en el caso de la gravedad (sin gravitinos) indican que para $D > 3$, basta con hacer la expansión hasta la siguiente potencia en λ.

Otra posibilidad interesante, mencionada en el texto, es hacer la expansión separando una coordenada espacial y no la temporal antes de llevar a cabo la expansión. E incluso se podría partir de una supergravedad con dos coordenadas temporales y separa sólo una de ellas, cosa no tan descabellada como parece en un principio, dado que se ha propuesto en el contexto de la Teoría M.

Apéndice A

Anexo: Introducción al lenguaje de formas diferenciales

La reformulación de la gravedad por parte de Einstein requiere tratar el espacio como una variedad diferencial. En este apartado resumiremos algunos de los conceptos más básicos del cálculo infinitesimal de variedades, y definiremos las herramientas matemáticas que serán usadas durante los desarrollos.

Partiremos de que el espacio-tiempo puede ser descrito por una variedad diferenciable.

A.1. Formas diferenciales y producto exterior

Una p-forma es un campo tensorial de orden p covariante y totalmente antisimétrico. Sobre una p-forma α y una q-forma β se puede definir un producto exterior que denotaremos por $\alpha \wedge \beta$ definido como:

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, ...v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi} (sign\pi)\pi[\alpha(v_1, ...v_p)\beta(v_{p+1}, ...v_{p+q}) \tag{A.1}$$

Donde π son las permutaciones de (1,2,...,p+q) y v_i pertenece al espacio tangente a la variedad que denotamos por T(X). Este producto es asociativo y bilineal, y en general no es conmutativo, siendo

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \tag{A.2}$$

Es posible expresar una p-forma en una base formada por el producto exterior de p 1-formas que forman base de $T^*(X^n)$, donde $T^*(X^n)$ es el espacio dual a $T(X)$Si la base es

$(\theta^i; i = 1, ..., n)$, la 1 forma se puede expresar como

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{k_1,...k_n}\theta^{k_1} \wedge ...\theta^{k_1} \tag{A.3}$$

$$= \alpha_{K_1,...K_n}\theta^{K_1} \wedge ...\theta^{K_1} \tag{A.4}$$

La diferencia entre ambas expresiones es que en la segunda se cumple que $K_s < K_{s+1}$, es decir que las 1-formas están ordenadas. El álgebra resultante de todas las formas con todos los grados junto con el producto exterior da lugar al álgebra de Grassman.

A.2. Diferencial exterior

El operador de diferencial exterior d transforma una p-forma α de clase C^k en una p+1 forma $d\alpha$ de claseC^{k+1} de la siguiente forma:

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_{I_1...I_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{I_1} \wedge ... \wedge dx^{I_p} \tag{A.5}$$

dx^i es la base del espacio dual inducida por las coordenadas utilizadas.

A.3. Producto interior

Dada una forma ω y un vector v se define un operador i_v transforma una p-forma en una p-1 forma y que toma la siguiente forma en la base canónica de las coordenadas de la variedad:

$$i_v\omega = \frac{1}{(p-1)!} v^i \omega_{j,i_2,...i_p} dx^{i_2} \wedge .... \wedge dx^{i_p} \tag{A.6}$$

A.4. Conexiones en una variedad

La teoría de la relatividad de Einstein se basa en la construcción de un espacio-tiempo con una métrica distinta a la de Minkowsky (plana), esta métrica da lugar a una conexión y a unas curvaturas que permiten describir la geometría del espacio-tiempo.

No obstante es posible definir y dar sentido físico a una conexión sin que esta tenga que ser obtenida a partir de una métrica. Éste es el origen de las teorías de Yang-Mills, que permiten describir con éxito los demás campos de la naturaleza. Puesto que vamos a tratar el caso de la supergravedad y van a aparecer términos que no tienen una relación directa con la métrica clásica, haremos una introducción a este formalismo.

Fibra sobre un espacio topológico

En primer lugar es necesario definir el concepto de haz.

Un haz es un triplete (E,B,π) que consiste en dos espacios topológicos E y B y una aplicación continua subyectiva $\pi : E \to B$.

Llamamos un fibrado a un espacio F homomorfo a

$$\pi^{-1}(x) \qquad \forall\, x \in B \tag{A.7}$$

Una haz e fibras (E,B,π,G) es un haz y un grupo topológico G de homomorfismos del espacio imagen F en si mismo. También tiene una cobertura de B mediante una familia de conjuntos abiertos $\{U_j\}$ y cumple las siguientes propiedades:

- Localmente la fibra es trivial. Es decir, que es homomorfa al producto topológico $U_i \times F$. El homomorfismo
$$\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times F \tag{A.8}$$
tiene la forma :
$$\varphi_j(p) = (\pi(p), \widehat{\varphi}_j(p)) \tag{A.9}$$
Los pares $\{U_i, \varphi\}$ se denominan trivializaciones locales.

- Hay una relacción entre los subhaces triviales definidos en los conjuntos de la covertura U_j. Si tomamos $x \in U_j \cap U_k$ el homomorfismo $\widehat{\varphi}_{k,x} \circ \widehat{\varphi}_{j,x}^{-1} : F \to F$ es un elemento del grupo estructural.

Si el grupo estructural G y F son isomorfos y G actúa en F como acción izquierda, la fibra se llama fibra principal.

Conexiones y campos

Definimos una conexión en una fibra principal (P, X, π, G) como una 1-forma ω en P que toma valoes en el espacio vectorial $\mathcal{G}$ tal que $\omega_p(u) = \hat{u}$ donde $u \in V_p$ y $\hat{u} \in \mathcal{G}$. La relación entre $\hat{u}$ y v viene dada por

$$\hat{v}(g) = L'_g(e)v(e) \tag{A.10}$$

Se definen los espacios horizontales como:

$$H_p = \{v \in T_p(P); \omega(v) = 0\} \tag{A.11}$$

Se puede demostrar que dada una trivialización $\{U_i, \phi_i\}$ y una conexión ω, hay una única familia de conexiones en la variedad base$\bar{\omega}_i$.
En las teorías de Yang-Mills $\bar{\omega}_i$ se denomina potencial y la trivialización es llamada gauge local.

Derivada exterior covariante, curvatura, torsión y ecuaciones de Maurer-Cartan

Si h es una aplicación tal que $h : T_p(P) \to H_p \; v \to \hat{v}$. Definimos la derivada exterior covariante sobre una r-forma como:

$$D\phi(v_1, ...v_{r+1}) = d\phi(hv_1, ..., hv_{r+1}) \tag{A.12}$$

La curvatura se define como $\Omega = D\omega$. La ecuación estructural se define como:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}c^k_{ij}\omega^i \wedge \omega^j \tag{A.13}$$

Donde c^k_{ij} son los coeficientes del álgebra de Lie $\mathcal{G}$ generada por el grupo G de la fibra.
Por otro lado, si definimos una aplicación $\Phi_p u = (\theta^i(u))$ donde θ es la base dual de e^i.

La 1- forma en F(X) con valores en $\Re^n$definida como

$$\theta_p(v) = \Phi_p \pi' v \tag{A.14}$$

Se llama forma canónica. La torsion se define como $\Theta = D\theta$. La ecuación estructural de Cartán se escribe como

$$\Theta = d\theta + [\omega, \theta] \tag{A.15}$$

Bibliografía

[1] *Analysis, Manifolds and Physics. Part I Basics.*
Yvonne Choquet-Bruhat, Cécile DeWitt-Morette Margaret Dillard-Bleick

[2] *Three-Dimensional Bargmann Supergravity*
Eric Bergshoeff and Jan Rosseel
ArXiv:1604.08042 [hep-th]

[3] *Generating Lie and gauge free differential (super)algebras by expanding Maurer-Cartan forms and Chern-Simons supergravity*
J.A. de Azcárraga, J.M. Izquierdo, M.Picón and O. Varela
arXiv:hep-th/0212347

[4] *Minimal D=4 supergravity from the superMaxwell algebra*
J.A de Azcárraga, J.M. Izquierdo
Nucl. Phys. B 885, 34-45 (2014); arXiv:1403.4128 [hep-th]

[5] *Wess-Zumino term for the AdS superstring and generalized Inonu-Wigner contraction*
M.Hatsuda, M. Sakaguchi
Prog.Theor.Phys. 109 (2003) 853-867 arXiv:hep-th/0106114

[6] *All possible supersymmetries of the S Matrix*
S. Coleman, J. Mandula
Physical Review 195(5) 1967,pp.1251-1256

[7] *All possible generators of supersymmetries of the S-Matrix*
R. Haag, M. Sohnius J.T.Łopuszański
Nuclear Physics B88 (1975) 257-274

[8] *Introducing Supersymmetry*
Martin F.Sohnius
PHYSICS REPORTS (Review Section of Physics Letters) 128, Nos. 2 & 3 (1985) 39—204.
North-Holland, Amsterdam

[9] *Newton-Cartan (super)gravity as a non-relativistic limit*
Eric Bergshoeff, Jan Rosseel and Thomas Zojer
Class.Quant.Grav. 32 (2015) 205003 arXiv: 1505.02095