



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

Difusión de carga en materiales de muy baja conductividad

Autor:

Javier Morán Fraile

Tutores:

Oscar Alejos Ducal, Jose María Muñoz Muñoz

*Dedicado a
mis padres*

Índice general

Agradecimientos	7
Resumen	8
1. Introducción	1
1.1. Métodos convencionales	1
1.1.1. Método del voltaje constante	2
1.1.2. Método de la corriente constante	3
1.1.3. Conclusión	4
1.2. Método propuesto para la medida de altas resistencias	4
1.2.1. Funcionamiento de un Voltímetro Electrostático	5
1.2.2. Necesidad de desarrollar un software específico	6
2. Soluciones al sistema propuesto	9
2.1. Solución Analítica	10
2.1.1. Resolución del sistema	11
2.2. Solucion Unidimensional	13
2.2.1. Método de Crank-Nicolson	13
2.2.2. El algoritmo de Thomas	15
2.2.3. Dificultades en la implementación del código	16
2.3. Solución bidimensional	18
2.3.1. Primer paso temporal	19
2.3.2. Evolución temporal del sistema	20
2.3.3. Dificultades de la implementación del código	21
3. Resultados	25
4. Medida experimental	35
4.1. Montaje experimental	35
4.2. Procedimiento experimental	37
4.3. Comparación entre datos experimentales y simulaciones	39

4.3.1. Modelo bidimensional	39
4.3.2. Modelo unidimensional	40
4.3.3. Precisión	40
4.4. Concordancia entre las simulaciones y los experimentos	41
4.5. Cálculo de la conductividad	42
5. Conclusiones	43
A. Código C	45
B. Código MATLAB®	49
Bibliografía	57

Agradecimientos

Antes de nada quiero dar las gracias a mi familia por darme todo el apoyo que una persona jamás pueda desear. He de agradecer también a mis tutores la paciencia que han mostrado aguantando estoicamente como aparecía día tras día en la puerta de sus despachos con un nuevo surtido de dudas (absurdas en muchas ocasiones). También he de agradecer su paciencia a todas las personas de la facultad que hayan tenido que escuchar mis quejas y blasfemias cuando un programa no compilaba por quinta vez consecutiva.

Pero sobre todo quiero dar las gracias a todas las personas que me han ido formando como persona a lo largo de mi vida hasta convertirme en lo que soy. A todos los profesores, a todos los amigos, a todos los compañeros de equipo, a todos los demás alumnos de la carrera, compañeros que han hecho de estos 4 años una experiencia maravillosa aunque muy breve. A todos los que han compartido conmigo horas de biblioteca en exámenes devanándonos juntos los sesos para entender alguna asignatura. A todos los que han tenido la desgracia de ser mi pareja jugando el mus en la cafetería. A todos los que están y a todos los que se fueron. Sin vosotros hoy no sería quien soy. Por eso. A todos vosotros:

Gracias

Resumen

Este trabajo trata del desarrollo de un nuevo método para la determinación de la resistencia en materiales de muy baja conductividad. Este método está basado en el estudio de la difusión de la carga en el interior del material al ser sometido a una diferencia de potencial.

Para ello se ha diseñado un sistema constituido por dos placas metálicas paralelas conectadas a tierra, en medio de las cuales se ha introducido una lámina del material a medir. Se aplica un potencial elevado en un extremo de la lámina y se analiza la evolución temporal del potencial en el otro extremo. La rapidez de la variación del potencial estará directamente relacionada con la conductividad del material.

En primer lugar se realizará un estudio teórico tratando de aproximar el sistema a una línea de transmisión y hallando una solución analítica a este sistema aproximado.

En segundo lugar se desarrollará un software de simulación escrito en lenguaje C que resolverá el problema de la difusión de la carga en el material mediante un método basado en las diferencias finitas, hallando una solución al problema unidimensional del potencial a lo largo del material.

En tercer lugar se desarrollará otro software de simulación escrito en MATLAB® para resolver el problema en dos dimensiones, hallando la difusión de carga a través del material resolviendo la ecuación de Poisson y la ecuación de continuidad de la corriente eléctrica para cada paso temporal.

Finalmente montaremos el sistema y realizaremos medidas experimentales de la evolución del potencial en un material a fin de medir su conductividad y comprobar que dicha evolución es la predicha por los modelos calculados.

Abstract

This work consists in the development of a new method for measuring the electrical resistance of very low conductivity materials. This method is based on the study of the charge diffusion inside the material when It is exposed to a high voltage.

We have designed a system formed by two parallel metallic grounded plates in between we have placed a sheet of the material we want to measure. We then set a high voltage in an end of the sheet and then we analyze the temporal evolution of the voltage in the other end. The rate of the voltage variation is firmly related with the material conductivity.

First of all we will make a theoretical study trying to approximate the system to a transmission line and reaching an analytical solution to the approximate system.

In second place we will develop a simulation software written in C language that will solve the charge diffusion in the material using the finite difference method. Thus finding a solution for the one-dimensional problem of the voltage throughout the material.

In third place we will develop another simulation software written this time in MATLAB[®] code to solve the problem in two dimensions, finding the charge diffusion by solving Poisson's equation and the continuity equation of electric charge for each time step.

Finally we will take experimental measurements of the voltage inside the material using this method in order to measure its conductivity and to discuss whether or not the theoretical results correctly portray the experimental behavior of the voltage.

Capítulo 1

Introducción

Los materiales de conductividad muy baja, pero al fin y al cabo distinta de cero, tienen multitud de aplicaciones eléctricas y son usados con gran frecuencia. Por tanto caracterizarlos con precisión y rapidez es algo necesario. Lamentablemente la determinación de la resistencia de estos materiales no es tan sencilla como la de otros materiales de una conductividad mayor. Convencionalmente para determinar la resistencia de un material se le aplica una diferencia de potencial, y se mide la corriente que circula por el mismo mediante un galvanómetro. Para el caso de resistencias muy elevadas, la corriente a detectar se vuelve muy pequeña, prácticamente indetectable. Por lo que para realizar la medida se debe aumentar el potencial aplicado al material lo suficiente como para que se pueda apreciar la intensidad que circula por el mismo. Como los instrumentos utilizados típicamente para medir la resistencia (multímetros), solamente son capaces de medir resistencias inferiores a unos $200\text{M}\Omega$, para medir resistencias de mayor magnitud se utilizan electrómetros, ya que son capaces de obtener una precisión mucho mayor.

1.1. Métodos convencionales de medida de altas resistencias

El electrómetro es un instrumento capaz de medir cantidades minúsculas de carga o corriente eléctrica. Los electrómetros mas modernos alcanzan a medir corrientes del orden del femtoamperio. En el fondo los electrómetros actúan como amperímetros de alta sensibilidad.

Para medir resistencias elevadas se utilizan principalmente dos métodos: el método del voltaje constante y el método de la corriente constante.[4]

1.1.1. Método del voltaje constante

Para medir una resistencia elevada usando el método del voltaje constante necesitamos un electrómetro capaz de medir una corriente muy baja y una fuente de voltaje constante. Algunos electrómetros poseen una fuente de voltaje incorporada para poder calcular automáticamente una resistencia. La configuración básica de un montaje para medir una resistencia usando el método del voltaje constante es la siguiente :

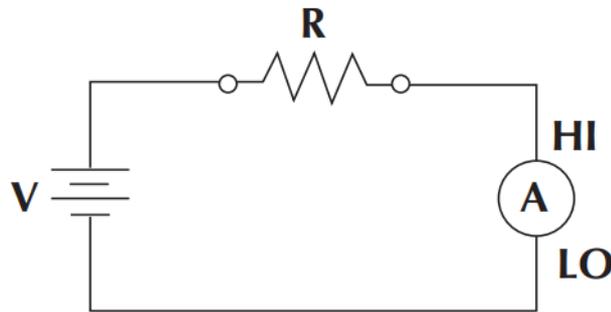


Figura 1.1: Método del voltaje constante

La fuente de voltaje constante (V) se sitúa en serie con el material a medir (R) y el electrómetro (A). Dado que la caída de potencial en el electrómetro es despreciable, la caída de potencial se producirá enteramente en el material a medir, y la resistencia se calculará mediante la ley de Ohm, $R = V/I$.

En ocasiones, plásticos de resistencia muy alta están formados por diminutos elementos conductores unidos por material dieléctrico. La conductividad de estos materiales es función del voltaje aplicado, ya que cuando la diferencia de potencial aplicada es muy alta, se produce ruptura dieléctrica de las conexiones dieléctricas y la resistencia disminuye. Por tanto para medir estas resistencias necesitaríamos emplear un voltaje no muy elevado, haciendo muy difícil la detección de la corriente que circula por el material.

Las fuentes de errores mas comunes usando este método son las interferencias electrostáticas provenientes del exterior del sistema. Otro problema son las pérdidas de corriente, que debido a lo pequeña que es, aunque sean escasas van a ser apreciables. Pero el problema principal de este método es el ruido y la aparición de corrientes parásitas.

1.1.2. Método de la corriente constante

Para medir resistencias utilizando el método de la corriente constante se precisa de un electrómetro configurado como voltímetro de alta impedancia de entrada, y una fuente de corriente constante. Hay algunos electrómetros denominados ohmímetros que incorporan la fuente de corriente, pudiendo medir la resistencia sin necesidad de mayor equipamiento. La configuración básica para medir una resistencia usando este método es la siguiente:

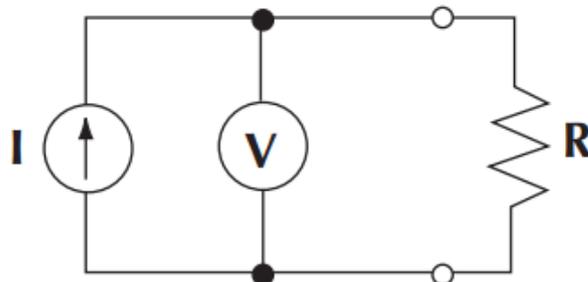


Figura 1.2: Método de la corriente constante

Emitimos una corriente constante (I) desde de la fuente, que fluye a través del material de resistencia (R) y la caída de potencial es medida por el electrómetro (V).

Este método solo es válido para medir resistencias menores de $10^{12}\Omega$. A partir de este valor el método deja de ser útil. Esto se debe a que a la dificultad de construir una fuente de corriente constante, se le suma el hecho de que necesitamos que toda la corriente circule por el material. Al estar el electrómetro situado en paralelo a la resistencia, para poder despreciar la corriente que circula por el electrómetro, necesitamos que tenga una impedancia mucho mayor que el material a medir.

En resumen: para voltajes pequeños existen voltímetros con esas impedancias, pero necesitamos usar voltajes muy elevados ya que la fuente tiene que suministrar una corriente apreciable. Y para altos voltajes no hay un electrómetro que tenga una impedancia tan alta.

Además, este método no puede dar cuenta de las resistencias dependientes del voltaje al no ser capaz de determinar el voltaje aplicado a menos que conozcamos la resistencia.

1.1.3. Conclusión

Estos métodos aunque en apariencia simples, son en realidad lentos y poco prácticos. De hecho el método de la corriente constante no es válido para resistencias tan altas como las que pretendemos medir.

Para emplear el método del voltaje constante, es necesario utilizar el electrómetro para medir intensidades de órdenes menores que los picoamperios. Al medir órdenes tan bajos de intensidad, al nivel de los femtoamperios, aparece una gran cantidad de ruido debido a que la carga que está circulando es al fin y al cabo discreta. Cuando realizamos medidas de tal precisión se aprecia que está circulando un número finito de electrones, por lo que la corriente fluctúa debido a fenómenos como el ruido de Johnson [3].

Para solventar este problema, se mide la carga que circula durante un intervalo de tiempo y se promedia, eliminando así el ruido. Para ello se conecta la resistencia a medir a un condensador que vaya acumulando la carga que circula a través del material, y determinamos la intensidad ya que esta obedecerá la ecuación $I = -\frac{dV}{dt}C$. De este modo eliminamos el ruido, pero tenemos el inconveniente de que esta medida tiene un tiempo de respuesta largo, ya que necesitamos que el condensador se cargue hasta una medida apreciable. Además necesitamos usar un condensador de muy buena calidad para que no haya pérdidas apreciables, lo cual es complicado cuando se trabaja con magnitudes tan pequeñas.

1.2. Método propuesto para la medida de altas resistencias

Para mejorar la poca eficiencia de estos métodos de medida de resistencias hemos desarrollado un nuevo método que solventa la mayoría de los inconvenientes que presentan los utilizados habitualmente.

La base de nuestro método es llevar al extremo el método del voltaje constante. La lentitud de éste radica en que necesitamos de un condensador que se cargue para poder medir la carga que ha circulado por el material. En nuestro método utilizamos unas placas metálicas paralelas al material de modo que el material y las placas conforman un sistema que puede tratarse como si fueran infinitos condensadores de capacidad diferencial, es decir, cada punto del material actuará como un condensador de tamaño infinitesimal y por tanto se reduce al máximo la capacidad del condensador de integración, lo que reduce el tiempo de medida.

Para determinar la conductividad de un material, se aplica un potencial elevado en un extremo de la lámina y se analiza la evolución temporal del potencial en el otro extremo. Si tenemos un modelo teórico de cómo debería comportarse

1.2. MÉTODO PROPUESTO PARA LA MEDIDA DE ALTAS RESISTENCIAS⁵

este potencial en función de la conductividad, podremos conocerla midiendo cómo evoluciona en el tiempo el potencial dentro del material.

La gran ventaja de nuestro método, además del menor tiempo de respuesta de las medidas, es que es independiente del voltaje aplicado, ya que lo que vamos a medir es la evolución del potencial. La limitación estará en la sensibilidad del instrumento de medida.

El montaje consistirá en dos placas metálicas paralelas conectadas a tierra, en medio de las cuales colocaremos (de manera que no toque las placas) una lámina del material a medir, cuyo borde superior conectaremos a una fuente de potencial constante. Todo ello situado sobre un plano metálico también conectado a tierra.

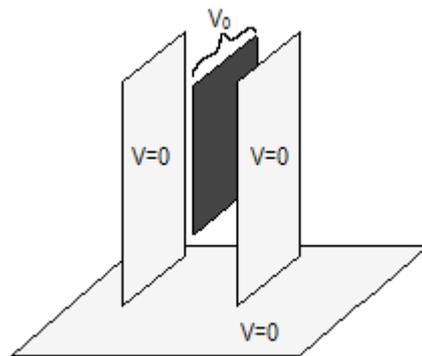


Figura 1.3: Esquema del montaje

Nuestro sistema así definido puede tratarse como una línea de transmisión en la que podemos despreciar la inductancia y la conductancia, permitiéndonos realizar una solución analítica aproximada, además de resolverlo numéricamente.

El inconveniente de este método es que requiere una medida de potencial sin corriente, es decir, un voltímetro de impedancia de entrada infinita. Por ello para medir el potencial en la lámina del material utilizaremos un voltímetro electrostático.

1.2.1. Funcionamiento de un Voltímetro Electrostático

El voltímetro electrostático es un tipo de electrómetro denominado de lámina vibrante. Este dispositivo es capaz de medir el potencial de un punto respecto de tierra sin estar en contacto con dicho punto, por tanto sin perturbar su potencial y sin riesgo de que se produzca una descarga entre la sonda y la superficie. Esto nos permite trabajar con potenciales elevados de ser necesario.



Figura 1.4: Voltímetro electrostático empleado

El dispositivo consta de una sonda que se sitúa próxima al punto cuyo potencial queremos medir. La sonda posee una lámina metálica que oscila de manera que se acerca y aleja de este punto. Como la lámina se halla en medio del campo eléctrico creado por el potencial de este punto, al oscilar creará una corriente eléctrica en el circuito que está acoplado a ella. El voltímetro lo que hace ahora es establecer en la sonda un potencial tal que anule el campo eléctrico entre la sonda y la superficie a medir. Esto sucederá cuando el potencial en el circuito sea el mismo que el del punto situado en frente de la sonda, por lo que efectivamente determina el potencial del punto sin tocarlo[5].

1.2.2. Necesidad de desarrollar un software específico

Para obtener la conductividad a partir de la evolución temporal del potencial necesitamos relacionar ambas magnitudes. Podemos tratar de buscar una solución analítica realizando aproximaciones, pero dada la elevada complejidad de cálculo de una resolución analítica completa, necesitaremos de simulaciones para resolver numéricamente el problema si queremos tener una precisión mayor.

Lamentablemente no existe ningún software comercial de simulación destinado a resolver la evolución temporal de la carga en materiales muy resistivos. Hay una variedad relativamente amplia de software de simulación para todo tipo de problemas electrostáticos, o para simulación de altas frecuencias en líneas de transmisión. Pero nuestro caso no puede ser tratado con estos programas.

- Simuladores electrostáticos: No pueden resolver nuestro sistema ya que se trata de un problema de campos eléctricos lentamente variables, pero no estáticos.

1.2. MÉTODO PROPUESTO PARA LA MEDIDA DE ALTAS RESISTENCIAS⁷

- Simuladores de líneas de transmisión: Aunque estos tratan con campos variables, no pueden resolver nuestro problema ya que lo que estudian es la propagación del campo. En nuestro caso no hay propagación ya que la autoinducción en nuestro material es completamente despreciable. Lo que buscaríamos sería resolver el régimen transitorio de una línea de alta resistividad y ninguna autoinducción, para lo cual estos simuladores no están preparados.

Debido a la ausencia de un software apropiado y a la necesidad de estas simulaciones para la resolución de nuestro problema, hemos tenido que desarrollar un nuevo software de simulación en lugar de utilizar uno previamente existente.

Capítulo 2

Soluciones al sistema propuesto

Hemos hallado tres soluciones al sistema con un grado de precisión creciente:

En primer lugar, el sistema propuesto puede ser tratado como una muy mala línea de transmisión, teniendo de este modo una solución analítica. Hemos hallado dicha solución y determinado así la difusión de la carga en el material y la evolución del potencial en el mismo. Esta solución nos dará en líneas generales el comportamiento del potencial, pero no podemos esperar gran precisión pues es una aproximación demasiado burda.

A fin de tener resultados más precisos hemos resuelto el sistema de forma computacional usando dos enfoques distintos para el sistema:

Primero hemos supuesto el sistema como si fuera unidimensional y hemos resuelto el problema de la difusión de la carga cuando se le aplica un potencial constante en su extremo. Hemos considerado el material como unidimensional, finito, y con una determinada resistencia y capacidad por unidad de longitud.

En segundo lugar hemos tratado el sistema como si fuese bidimensional y hemos resuelto numéricamente la ecuación de Poisson para todos los puntos del sistema, calculando la difusión de carga debida al campo eléctrico que aparece en el interior del material al aplicarle un voltaje constante en su extremo, determinando así la evolución temporal del potencial y la carga en el interior del material.

2.1. Solución Analítica

Vamos a aproximar nuestro montaje a una línea de transmisión uniforme e infinitamente larga. Reducimos así el sistema a uno unidimensional y sin efectos de borde. En las líneas de transmisión, para zonas alejadas de sus terminaciones, podemos considerar secciones infinitesimales de longitud Δz , situadas en la coordenada z de la línea. Esta sección de línea tiene una resistencia total en serie $R\Delta z$, una inductancia en serie $L\Delta z$ y una capacidad y conductancia paralelas $C\Delta z$ y $G\Delta z$ que serán las del material con respecto a cada una de las placas metálicas de nuestro montaje[1]. Lo que nos da lugar al siguiente circuito equivalente para cada sección infinitesimal:

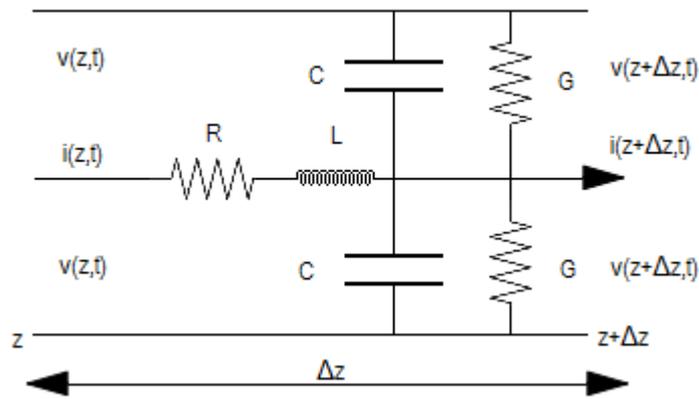


Figura 2.1: Línea de transmisión

L: Inductancia R: Resistencia
C: Capacidad G: Conductancia

Como se puede observar, el voltaje de salida de la sección difiere del voltaje de entrada debido a la caída de voltaje en serie a través de la resistencia y de la inductancia, mientras que la corriente de salida difiere de la corriente de entrada debido a las corrientes en los elementos paralelos. En nuestro caso, la conductancia G va a ser cero, ya que las placas metálicas están separadas de nuestro material por aire, que supondremos dieléctrico perfecto, y no va a haber pérdidas. Además, como la evolución del sistema va a ser muy lenta, el valor de la autoinductancia L va a ser despreciable comparado con la magnitud que van a tener tanto la resistencia R como la capacidad C .

2.1.1. Resolución del sistema

Procederemos a resolver el circuito mediante las leyes de Kirchoff:

$$v(z + \Delta z, t) - v(z, t) = -R\Delta z i(z, t) \quad (2.1.1a)$$

$$i(z + \Delta z, t) - i(z, t) = -2C\Delta z \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (2.1.1b)$$

Dividiendo por Δz y haciendo que tienda a cero, llegamos a las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -R i(z, t) \quad (2.1.2a)$$

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -2C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (2.1.2b)$$

Desacoplando estas dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = 2CR \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (2.1.3a)$$

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} = 2CR \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (2.1.3b)$$

Que son dos ecuaciones de difusión. Vamos a resolver la EDP del potencial usando la transformada de Laplace:

En primer lugar tenemos que por las propiedades de la Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t \{v(z, t)\} &= V(z, s) & \mathcal{L}_t \left\{ \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \right\} &= \frac{\partial}{\partial z} V(z, s) \\ \mathcal{L}_t \left\{ \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, s) & \mathcal{L}_t \left\{ \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \right\} &= sV(z, s) - v(z, 0) \end{aligned}$$

Por lo que sustituyendo en la ecuación (2.1.3a) la ecuación a resolver pasa a ser:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, s) = 2RC(sV(z, s) - v(z, 0)) \quad (2.1.4)$$

La condición inicial es que solo hay potencial en el extremo de la línea, es decir:

$$v(z, 0) = \begin{cases} v_0 & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

La solución será de la forma:

$$V(z, s) = C_1(s) e^{\sqrt{2RC}sz} + C_2(s) e^{-\sqrt{2RC}sz} \quad (2.1.6)$$

Entonces, $C_1(s) = 0$ pues sino la solución será divergente.

La única condición de contorno que tenemos es que el potencial en el extremo de la línea es siempre constante, es decir $v(0, t) = v_0$. La transformada de esta condición es:

$$V(0, s) = \mathcal{L}_t \{v(0, t)\} = \frac{v_0}{s}$$

Aplicando esta condición inicial y $C_1(s) = 0$ a la ecuación (2.1.6) tenemos que:

$$C_2(s) = \frac{v_0}{s} \quad (2.1.7)$$

Entonces, sustituyendo en (2.1.6):

$$V(z, s) = \frac{v_0}{s} e^{-\sqrt{2RC}sz} = \mathcal{L}_t \{v(z, t)\} \quad (2.1.8)$$

Por lo que deshaciendo la transformada de Laplace en (2.1.8) obtenemos la solución final, que será:

$$v(z, t) = \mathcal{L}_t^{-1} \{V(z, s)\} = v_0 \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{RC}{2t}} z \right) \quad (2.1.9)$$

Siendo $\operatorname{erfc}(x)$ la función error complementaria, y siendo C la capacidad del material con respecto a cada una de las placas. Si tomamos C como la capacidad por unidad de longitud del material respecto de ambas placas la solución sería:

$$v(z, t) = v_0 \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{RC}{4t}} z \right) \quad (2.1.10)$$

2.2. Solucion Unidimensional

Para la primera solución numérica del problema vamos a suponer el sistema como una línea unidimensional finita a la cual estamos aplicando un potencial constante en un extremo. Esta línea tendrá una resistencia R por unidad de longitud y una capacidad C por unidad de longitud. El potencial en la línea cumplirá la ecuación (2.1.3a). La resolución de esta ecuación no es posible usando los métodos computacionales habituales como los Runge-Kutta. Debido a que nuestro problema tiene unas condiciones iniciales muy abruptas, haciendo que estos métodos no sean estables. Esto da lugar a unas anomalías que hacen imposible su resolución por estos métodos convencionales. Debido a esta rigidez de la solución necesitamos utilizar un método implícito, es decir, que resuelva para cada paso temporal, una ecuación en la que aparezca el paso temporal siguiente.

Hemos elegido para resolver el problema el método de Crank-Nicolson, por ser implícito y numéricamente estable[2], y lo hemos implementado en un programa escrito en lenguaje C (Apéndice A).

2.2.1. Método de Crank-Nicolson

Está basado en las diferencias finitas en el espacio y en la regla del trapecio en el tiempo. Tiene por tanto convergencia de segundo orden en el tiempo. Es un método incondicionalmente estable para las ecuaciones de difusión lo que le hace perfecto para nuestro propósito. El único inconveniente que tiene es que las soluciones presentan unas oscilaciones espurias decrecientes si la relación entre el paso temporal y el espacial no cumple unas determinadas proporciones que luego se explicarán.

El método de Crank-Nicolson es una combinación del método de Euler implícito y del de Euler explícito. Si la ecuación en derivadas parciales es:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = f\left(\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial^2 z}\right) \quad (2.2.1)$$

Si tomamos $v(i\Delta x, n\Delta t) = v_i^n$, la ecuación será de la forma:

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[f_i^{n+1} \left(\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial^2 z} \right) + f_i^n \left(\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial^2 z} \right) \right] \quad (2.2.2)$$

La función f debe ser discretizada espacialmente mediante diferencias finitas. La derivada espacial es:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = \frac{v(z + \Delta z, t) - v(z, t)}{\Delta z} \quad (2.2.3)$$

Por tanto la derivada segunda la obtendremos derivando de nuevo ésto:

$$\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = \frac{v(z + \Delta z, t) - 2v(z, t) + v(z - \Delta z, t)}{\Delta z^2} \quad (2.2.4)$$

Es decir:

$$\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta z^2} \quad (2.2.5)$$

En nuestro caso, la ecuación es:

$$\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = 2CR \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (2.2.6)$$

Por tanto aplicando (2.2.5) en (2.2.2) y sabiendo que:

$$f\left(\frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{2CR} \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2}$$

Tenemos que la ecuación queda discretizada como:

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2(2RC)(\Delta z)^2} ((v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}) + (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)) \quad (2.2.7)$$

Agrupando las constantes:

$$r = \frac{\Delta t}{4RC(\Delta z)^2} \quad (2.2.8)$$

El valor de esta constante debe de ser menor que un cierto número para que en el método de Crank-Nicolson no aparezcan oscilaciones. Experimentalmente hemos determinado que ese valor es alrededor de 0,025. Nos queda finalmente que la ecuación a resolver es:

$$-rv_{i+1}^{n+1} + (1 + 2r)v_i^{n+1} - rv_{i-1}^{n+1} = rv_{i+1}^n + (1 - 2r)v_i^n + rv_{i-1}^n \quad (2.2.9)$$

Que es un sistema de ecuaciones con matriz tridiagonal, es decir tendremos un sistema del tipo:

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_0 & & & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & a_2 & b_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

En nuestro caso, habrá que resolver este sistema para cada paso temporal. Las incógnitas serán los valores del potencial en cada punto del espacio para el siguiente paso temporal, menos en el primer punto, cuyo valor es siempre v_0 . Los términos independientes serán los valores del potencial en cada punto del espacio para el paso temporal actual, y los coeficientes serán los que correspondan de la ecuación (2.2.9). Quedando así el sistema de ecuaciones a resolver en cada paso temporal como:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & -r & 1+2r & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -r \\ 0 & & & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^{n+1} \\ v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ \vdots \\ v_{fin}^{n+1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} v_0^n \\ r v_0^n + (1-2r)v_1^n + r v_2^n \\ r v_1^n + (1-2r)v_2^n + r v_3^n \\ \vdots \\ r v_{fin-1}^n + (1-2r)v_{fin}^n + r v_{fin+1}^n \end{bmatrix} \quad (2.2.11)
 \end{aligned}$$

Esto presenta un problema para el potencial en el último punto que trataremos mas adelante. Los sistemas de ecuaciones con matrices tridiagonales pueden ser resueltos fácilmente mediante un algoritmo específico denominado “algoritmo de Thomas”. [6]

2.2.2. El algoritmo de Thomas

Este algoritmo es una forma simplificada de eliminación Gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones de matriz tridiagonal como lo es (2.2.10). Este es un algoritmo por lo general inestable, pero para el caso particular de matrices diagonalmente dominantes si que es estable. Veamos que éste es nuestro caso:

Una matriz es diagonalmente dominante si para cada fila, el elemento diagonal es mayor o igual que la suma de sus elementos no diagonales, es decir:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (2.2.12)$$

En nuestro caso particular los elementos no diagonales tendrán valor r y los diagonales $1 + 2r$ por lo que siempre se va a cumplir que $1 + 2r \geq 2r$ y el algoritmo será estable.

El algoritmo consiste en, primeramente, calcular los siguientes coeficientes:

$$c'_i = \begin{cases} \frac{c_i}{b_i} & \text{si } i = 0 \\ \frac{c_i}{b_i - c'_{i-1}a_i} & \text{si } i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

y

$$d'_i = \begin{cases} \frac{d_i}{b_i} & \text{si } i = 0 \\ \frac{d_i - d'_{i-1}a_i}{b_i - c'_{i-1}a_i} & \text{si } i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Una vez tenemos estos coeficientes obtenemos la solución al sistema sustituyendo hacia atrás de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_n &= d'_n \\ x_i &= d'_i - c'_i x_{i+1} \quad ; \quad i = n-1, n-2, \dots, 1, 0. \end{aligned}$$

Por tanto tomando los valores correspondientes de b , c , d y x en nuestra ecuación (2.2.13), podemos obtener la solución para cada paso temporal utilizando este algoritmo.

2.2.3. Dificultades en la implementación del código

En primer lugar hemos de tener especial cuidado en la relación entre Δt , Δz , R y C , que se engloban en la variable r como se dijo en (2.2.8). Como esta variable debe ser pequeña hemos optado por fijarla en un valor $r = 0,025$.

También hemos fijado Δz tal que se tome siempre un determinado número de puntos que consideremos suficiente, y después para calcular el paso temporal tan solo lo despejamos de la fórmula de r con los valores que hayamos dado a R y C .

Otra cuestión a tener en cuenta es, como habíamos dicho antes, el implementar la condición de contorno de que en el último punto no hay difusión. Hemos optado por una solución consistente en suponer que hay una segunda fuente de potencial idéntica, situada a una distancia de la primera igual a dos veces la longitud del sistema.

Así el potencial en lo que era el último punto del sistema (ahora punto intermedio), es igual al potencial del punto situado inmediatamente después, ya que el

sistema es perfectamente simétrico. De este modo no hay difusión en el que era el último punto, pues el siguiente es equipotencial a él. Nuestro programa solo mostrará en la salida de datos los valores de la primera mitad de la línea, pues es la mitad “real”, la segunda parte de la línea es solo un artificio para resolver las condiciones de contorno. Aunque su evolución será la misma que la de la primera mitad.

Eso no quita que ahora debemos resolver las ecuaciones para los nuevos puntos del sistema. Al añadir una segunda fuente se duplica la longitud de nuestro sistema y por ello la matriz de coeficientes. Pero estas nuevas filas de la matriz van a tener la misma forma que las de la primera parte del sistema. Solo cambiará la última fila de la matriz ya que ahora tenemos definido también el potencial en el último punto que calculamos (la segunda fuente). Quedando el sistema de ecuaciones a resolver de este modo:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & 0 \\ -r & 1+2r & -r & & & \\ & -r & 1+2r & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -r & 1+2r & -r \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^{n+1} \\ v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ \vdots \\ v_{fin-1}^{n+1} \\ v_{fin}^{n+1} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} v_0^n (= v_0) \\ r v_0^n + (1-2r)v_1^n + r v_2^n \\ r v_1^n + (1-2r)v_2^n + r v_3^n \\ \vdots \\ r v_{fin-2}^n + (1-2r)v_{fin-1}^n + r v_{fin}^n \\ v_{fin}^n (= v_0) \end{bmatrix} \quad (2.2.13)
 \end{aligned}$$

2.3. Solución bidimensional

Ahora vamos a tratar de resolver computacionalmente el potencial en nuestro sistema, formado por las placas metálicas conectadas a tierra, mas el material a medir, suponiéndolo un sistema bidimensional.

Suponer que el sistema es bidimensional implica suponer que el sistema no varía en la tercera dimensión, es decir, que tanto las placas metálicas como el material son planos infinitos. Esta aproximación será válida siempre que la distancia entre las placas y el material no sea demasiado grande.

También vamos a suponer que el material tiene un grosor diferencial, lo cual es razonable siempre y cuando el grosor sea mucho menor que la distancia entre placas.

Tendremos las placas metálicas y el fondo del sistema conectados a tierra, luego el potencial en ellos será siempre cero. Aplicaremos en el punto inicial un potencial constante V_0 y supondremos que este potencial decrece linealmente en dirección perpendicular al material, desde V_0 en el punto inicial hasta ser 0 en las placas. Teniendo estos puntos dicha distribución lineal para todos los pasos temporales. Hemos implementado esta solución en un programa escrito en lenguaje Matlab (Apéndice B). Esta aproximación está esquemáticamente representada en la siguiente figura:

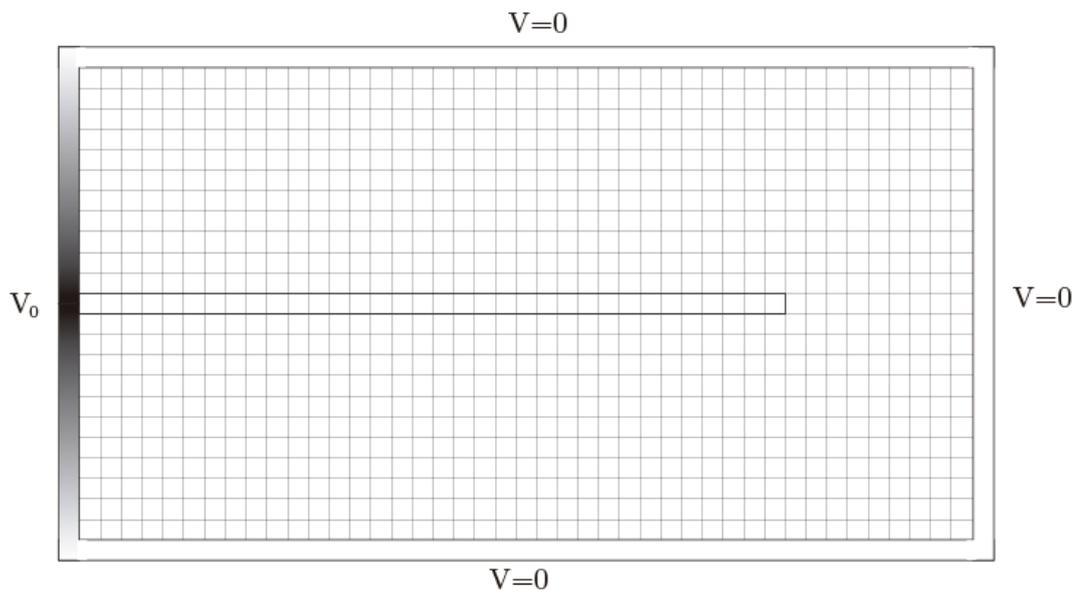


Figura 2.2: Esquema de la simulación

2.3.1. Primer paso temporal

Inicialmente el sistema tiene las condiciones de contorno citadas anteriormente. Es decir, el potencial solo es distinto de cero en el extremo inicial de nuestro material y en las zonas situadas directamente sobre y bajo este punto. En el primer paso temporal vamos a resolver la ecuación de Laplace para el potencial en todos los puntos del espacio, ya que no hay carga eléctrica en ningún punto. La ecuación a resolver en cada punto de nuestro sistema es:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.3.1)$$

Debemos discretizar el operador laplaciano. Para ello utilizaremos el método de las diferencias finitas en dos dimensiones. Damos a cada punto de nuestro sistema unas coordenadas $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$. Por lo que para un valor definido de Δx y Δy la posición de un punto está perfectamente definida por la pareja de valores (i, j) . Por tanto

$$V(x, y) = V_{ij}$$

Vamos a trabajar en coordenadas cartesianas, luego el operador Laplaciano toma la forma de

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (2.3.2)$$

Por tanto debemos discretizar las derivadas segundas en x e y . Usando el método de las diferencias finitas, hemos visto en (2.2.4) que la derivada segunda del potencial en las direcciones x e y serán:

$$\frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}) \quad (2.3.3a)$$

$$\frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2} (V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}) \quad (2.3.3b)$$

Si tomamos el mismo valor para $\Delta x = \Delta y = \Delta$. Solo tenemos que sumar (2.3.3a) y (2.3.3b) para tener:

$$\nabla^2 V_{i,j} = \frac{1}{\Delta^2} (V_{i+1,j} + V_{i,j+1} - 4V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1}) = 0 \quad (2.3.4)$$

Despejando en esta ecuación tenemos que:

$$\frac{V_{i+1,j} + V_{i,j+1} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1}}{4} = V_{i,j} \quad (2.3.5)$$

Es decir, en cada punto del espacio, el potencial será el promedio de los potenciales de los cuatro puntos situados arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda de dicho punto. La resolución de esta ecuación para todos los puntos del sistema nos dará la situación tras el primer paso temporal

2.3.2. Evolución temporal del sistema

Una vez obtenemos la distribución del potencial en el sistema tras el primer paso temporal, tenemos que en el interior del sistema existe una diferencia de potencial entre los puntos del mismo. Lo cual indica la existencia de un campo eléctrico. Dado que nuestro material tiene una conductividad distinta de cero, aunque ésta sea muy pequeña, aparecerá una densidad de corriente de conducción debido al campo eléctrico:

$$J = \sigma E \quad (2.3.6)$$

Siendo J la densidad de corriente, σ la conductividad, y E el campo eléctrico. En los puntos fuera de nuestro material, al tener el aire una conductividad de cero, no circulará corriente, pero en nuestro material las cargas eléctricas se van a desplazar siguiendo el campo creado por la diferencia de potencial. La corriente que se origina en el interior de nuestro material ha de cumplir la ecuación de continuidad:

$$\nabla J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.3.7)$$

Siendo ρ la densidad volúmica de carga. Por tanto, podemos conocer la variación de la carga en cada punto si conocemos el gradiente de la densidad de corriente. Partiendo de (2.3.6):

$$E = -\nabla V$$

$$\nabla J = \nabla(\sigma E) = -\sigma \nabla^2 V = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.3.8a)$$

Como solo puede circular corriente por el interior de nuestro material, los gradientes son en realidad derivadas en la dirección longitudinal, y el Laplaciano es una derivada segunda en esa dirección. Por lo tanto, usando de nuevo el método de las diferencias finitas igual que en (2.3.3a) tenemos que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\Delta^2} (2V_{i,j} - V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) \sigma \quad (2.3.9)$$

Debemos discretizar también esta derivada temporal:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \quad (2.3.10)$$

Por tanto, el incremento de la carga en cada punto para cada paso temporal es:

$$\Delta \rho = \frac{1}{\Delta^2} (2V_{i,j} - V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) \sigma \Delta t \quad (2.3.11)$$

En el ultimo punto del material, la conductividad del siguiente punto pasa a valer 0 al ser aire, por lo que la variación en la densidad de carga será:

$$\Delta\rho = \frac{1}{\Delta^2}(V_{i,j} - V_{i-1,j}) \sigma \Delta t \quad (2.3.12)$$

Conociendo así la variación de la densidad de carga en cada punto del material. Por tanto la densidad de carga en cada instante temporal será:

$$\rho(t + \Delta t) = \rho(t) + \Delta\rho$$

Ahora que tenemos carga dentro del material, para calcular el potencial en los puntos de nuestro sistema debemos resolver la ecuación de Poisson en los puntos del espacio donde se encuentra nuestro material, y la de Laplace en el resto de puntos. Es decir, ahora tenemos que resolver:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{fuera del material} \quad (2.3.13a)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{dentro del material} \quad (2.3.13b)$$

Que discretizando como en (2.3.4) resulta:

$$\frac{1}{\Delta^2}(V_{i+1,j} + V_{i,j+1} - 4V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1}) = 0 \quad \text{fuera} \quad (2.3.14a)$$

$$\frac{1}{\Delta^2}(V_{i+1,j} + V_{i,j+1} - 4V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{dentro} \quad (2.3.14b)$$

Resolviendo estas ecuaciones tendremos la nueva distribución del potencial en ese instante temporal. Implementaremos esto en un bucle para hallar el potencial cada paso temporal.

2.3.3. Dificultades de la implementación del código

Si nuestro sistema tiene un largo= $dimX$ y una distancia entre placas= $dimY$ Las ecuaciones a resolver (2.3.14a) y (2.3.14b) constituyen un sistema de ($dimX \times dimY$) ecuaciones con ($dimX \times dimY$) incógnitas. Al tomar las condiciones de contorno de que el potencial sea cero en los bordes del sistema y una distribución lineal en los puntos con $x = 0$ reducimos este número de incógnitas, al tener predeterminado el valor que tomará el potencial en estos puntos.

Si colocamos cada punto del sistema en un solo vector fila o columna, un punto de coordenadas (i,j), con $i = 0, 1, 2, \dots, dimX-1$ y $j = 1, 2, \dots, dimY$, ocupará una posición ($i \times dimY + j$) en dicho vector. Por tanto, si las ecuaciones a resolver son:

Fuera del material:

$$\frac{1}{\Delta^2}(V_{i+1,j} + V_{i,j+1} - 4V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1}) = 0 \quad (2.3.15a)$$

Dentro del material:

$$\frac{1}{\Delta^2}(V_{i+1,j} + V_{i,j+1} - 4V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.3.15b)$$

Para los puntos de potencial definido, es decir, el contorno:

$$V_{i,j} = V_{i,j}^0 \quad (2.3.15c)$$

La matriz va a tener 5 términos por fila en los puntos del interior del material, y el resto de los términos tendrán valor cero, y un solo término por fila en los puntos del contorno, con el resto de los términos de la fila valiendo cero. Debido a la gran cantidad de términos de valor cero, es necesario a fin de ahorrar espacio de memoria y de agilizar el cálculo, tratar la matriz como una matriz *sparse*.

Las matrices *sparse* o matrices dispersas, son matrices en las que la mayor parte de sus elementos son ceros. Este tipo de matrices pueden ser tratadas con algoritmos específicos que aprovechan esta estructura dispersa para comprimir la información de la matriz y así agilizar los cálculos y ocupar menos espacio. Matlab tiene implementados unos algoritmos propios para operar con este tipo de matrices de forma sencilla:

```
S = spalloc(m,n,nz); % Asigna espacio en el disco para una matriz
                    % tipo sparse de dimensiones n x m y un número nz de elementos
                    % distintos de cero

V = sparse(A); % Comprime la matriz A usando los algoritmos de
               % Matlab para tratarla como una matriz dispersa
```

A pesar de esto debemos tener en consideración que la matriz del sistema de ecuaciones va a tener una dimensión de $(dimX \cdot dimY) \times (dimX \cdot dimY)$ por lo que hay que tomar un valor del paso espacial tal que el número de puntos en X e Y no sea demasiado elevado, pues el tamaño de esta matriz crece con el cuadrado de las dimensiones del sistema, y nos podemos quedar sin espacio en la memoria con gran facilidad.

Otra dificultad añadida es determinar el valor del paso temporal apropiado para este sistema. Si tomamos un paso temporal demasiado pequeño, el programa evolucionará muy despacio, y si tomamos un paso temporal demasiado grande el programa no resolverá correctamente las ecuaciones diferenciales.

También hemos de adimensionalizar correctamente el problema. Para ello vamos a comenzar teniendo en cuenta que ρ es la densidad de carga por unidad de

volumen. El incremento de carga será $\Delta q = \Delta \rho \times \Delta^3$. Si incluimos esto en las ecuaciones (2.3.11) y (2.3.14b), y dividimos entre el potencial inicial V_0 , podemos reformularlas de la siguiente forma:

$$(2v_{i,j} - v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) = \frac{\Delta q}{V_0 \sigma \Delta t \Delta} \quad (2.3.16a)$$

$$(v_{i+1,j} + v_{i,j+1} - 4v_{i,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j-1}) = -\frac{q}{V_0 \epsilon_0 \Delta} \quad (2.3.16b)$$

Siendo $v_{i,j} = \frac{V_{i,j}}{V_0}$ el potencial normalizado. Podemos englobar las constantes en una única, y además vamos a meter un factor $\frac{d}{\Delta}$, es decir la relación entre la distancia del material a las placas y el paso espacial:

$$\tau = \frac{\epsilon_0 \Delta}{\sigma d} \quad (2.3.17)$$

Definimos dos nuevas variable s y r tales que

$$s = \frac{t}{\tau} \quad \rightarrow \quad \Delta t = \tau \Delta s \quad (2.3.18a)$$

$$r = \frac{q d}{\epsilon_0 V_0 \Delta^2} \quad (2.3.18b)$$

De este modo las ecuaciones (2.3.16a) y (2.3.16b) nos quedan como

$$(2v_{i,j} - v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) = \frac{\Delta r}{\Delta s} \quad (2.3.19a)$$

$$(v_{i+1,j} + v_{i,j+1} - 4v_{i,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j-1}) = -r \quad (2.3.19b)$$

Por lo tanto, ahora tenemos las ecuaciones adimensionalizadas que son las que habrá que resolver. Hemos comprobado que el programa alcanza una solución en un tiempo razonable para un valor de $\Delta s = 0,1$.

Para obtener un valor dimensional del potencial y el tiempo solo tenemos que multiplicar el potencial adimensional, por el potencial inicial, y el tiempo adimensional (s) por τ como dice la fórmula (2.3.18a).

Capítulo 3

Resultados

El potencial en el material presenta una evolución de características similares para las tres soluciones. A fin de no poner gráficas redundantes mostraremos la evolución de la solución analítica en unas unidades de potencial, espacio y tiempo arbitrarias (u.a.), que es la siguiente:

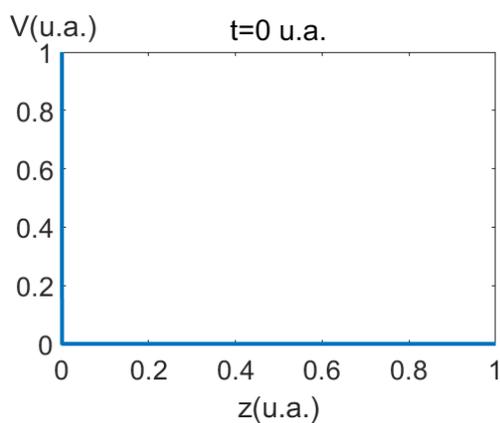


Figura 3.1: $v(z)$ para $t = 0$

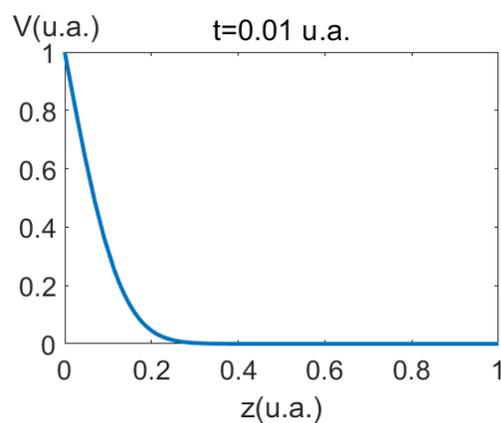
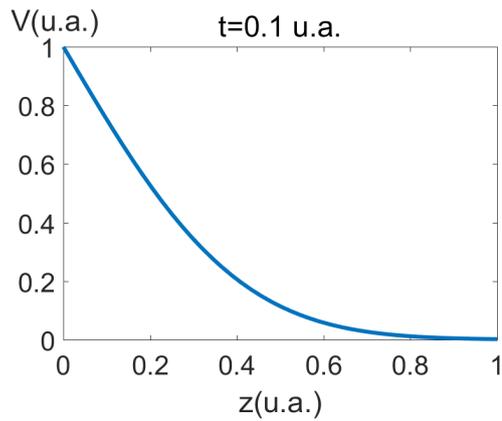
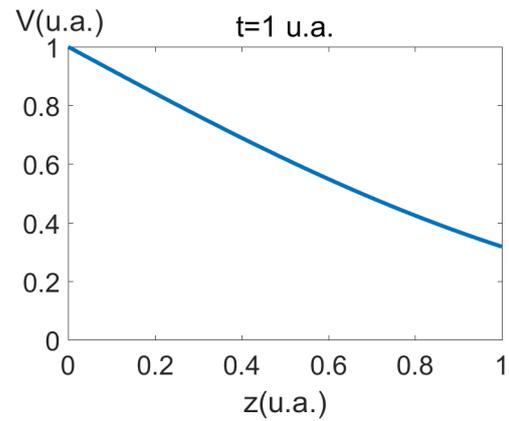
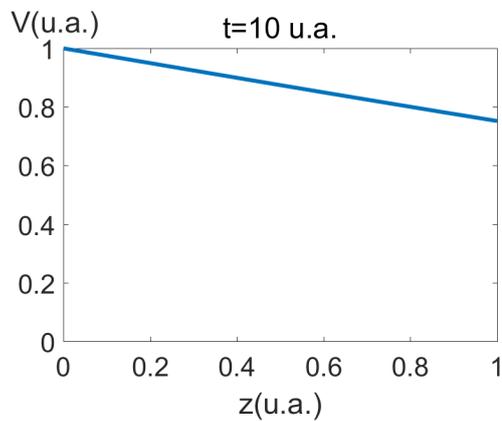
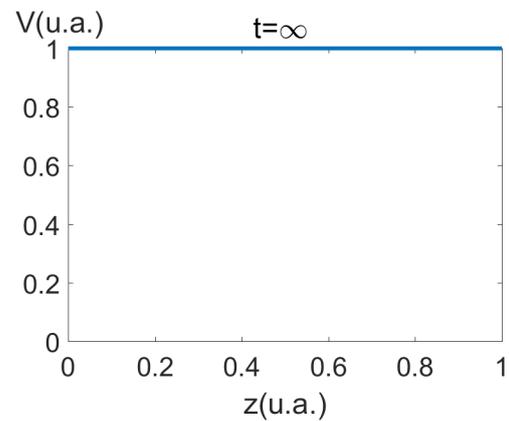


Figura 3.2: $v(z)$ para $t = 0,01u.a.$

Figura 3.3: $v(z)$ para $t = 0,1u.a.$ Figura 3.4: $v(z)$ para $t = 1u.a.$ Figura 3.5: $v(z)$ para $t = 10u.a.$ Figura 3.6: $v(z)$ para $t = \infty$

Como vemos el potencial va aumentando a lo largo de la línea según pasa el tiempo, y para un tiempo infinito toda la línea estará al mismo potencial que el punto inicial. Esta evolución es perfectamente esperable, pues al estar en contacto con una fuente de tensión constante, por muy mal conductor que sea el material, la carga se irá difundiendo por el material hasta alcanzar el estado de equilibrio con la fuente. Esto sucederá cuando todos los puntos del material sean equipotenciales a ella.

Si representamos la evolución temporal del potencial en un punto cualquiera distinto de la fuente:

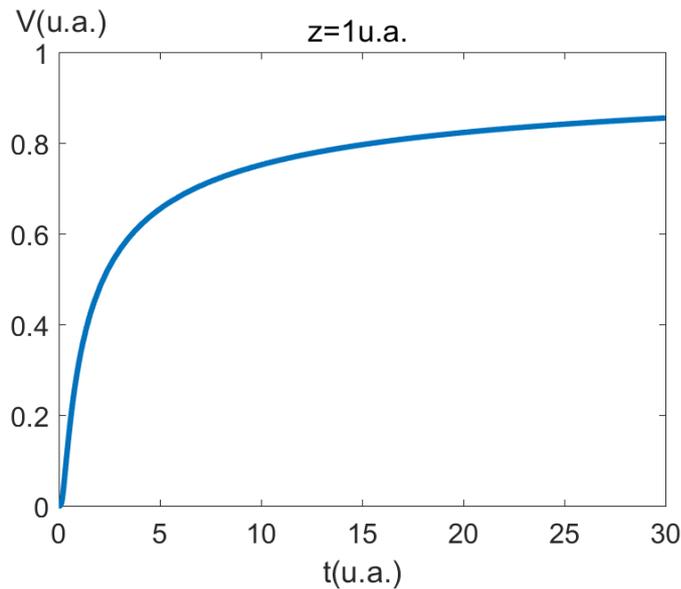


Figura 3.7: $v(t)$ para $z = 1u.a.$

Vemos como el potencial en el punto parte de cero (situación inicial) y va aumentando hasta alcanzar de forma asintótica el potencial de la fuente.

Aunque la evolución temporal del potencial en las tres soluciones es de la misma forma, esta presenta grandes diferencias.

Vamos a comparar en primer lugar la solución analítica y la unidimensional. Ambas dependen de los parámetros:

R = Resistencia por unidad de longitud.

C = Capacidad por unidad de longitud.

V_0 = Voltaje en el punto inicial.

Pero presentan una gran diferencia. La solución analítica supone una línea de longitud infinita, por lo que la difusión siempre continuará.

En cambio la solución unidimensional tiene una longitud finita. Por tanto en el último punto de la simulación no habrá difusión, pues el punto anterior tiene un potencial mayor, y no hay un punto siguiente al que difundir.

Esta diferencia provocará que el potencial crezca bastante más rápido para la solución unidimensional, ya que el potencial “se acumula” en el extremo, en

vez de ser este punto uno cualquiera que continua la difusión. Si comparamos la evolución del potencial en el material que dictan las dos soluciones para unos mismos parámetros, con una longitud unitaria:

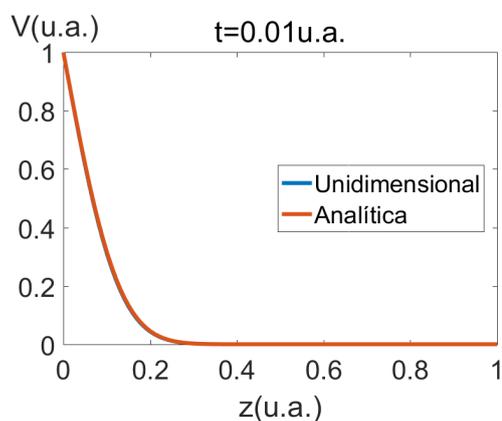


Figura 3.8: $v(z)$ para $t = 0,01u.a.$

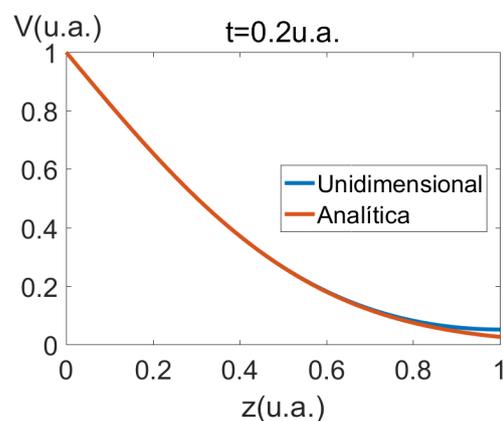


Figura 3.9: $v(z)$ para $t = 0,2u.a.$

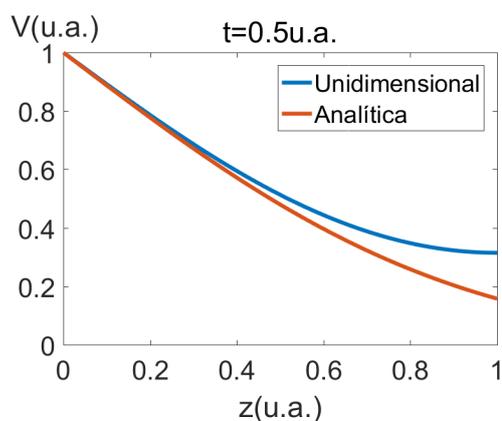


Figura 3.10: $v(z)$ para $t = 0,5u.a.$

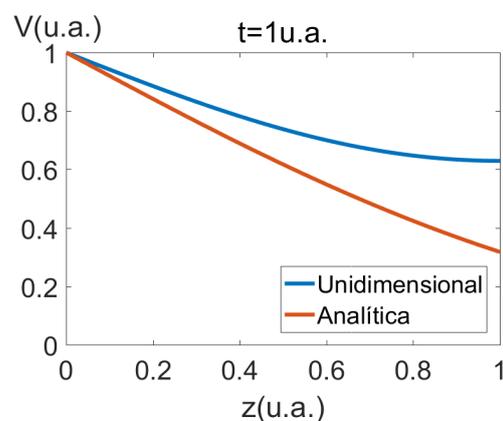
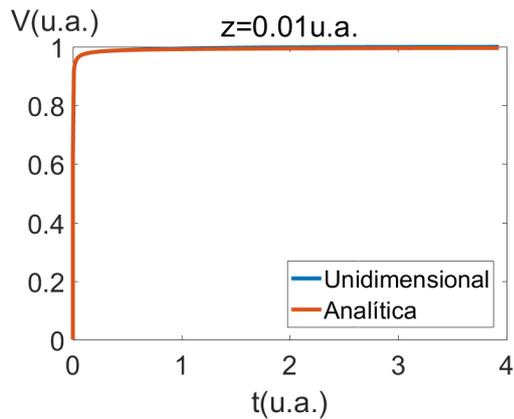
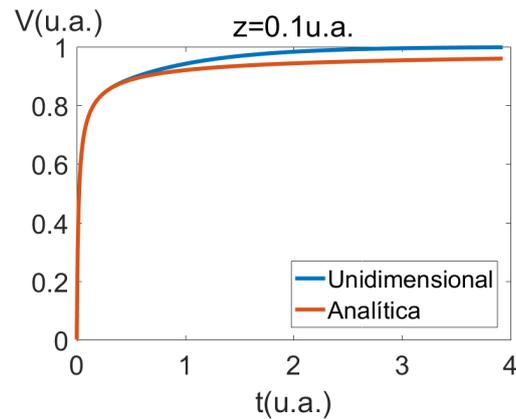
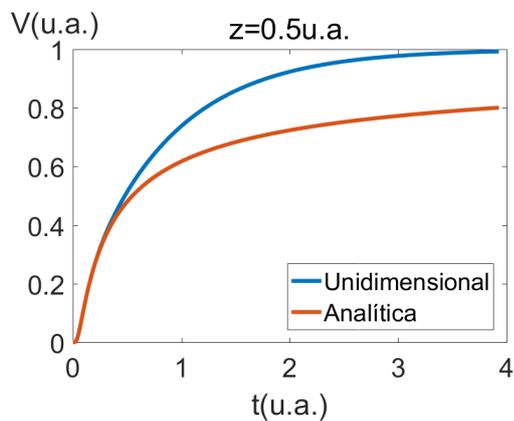
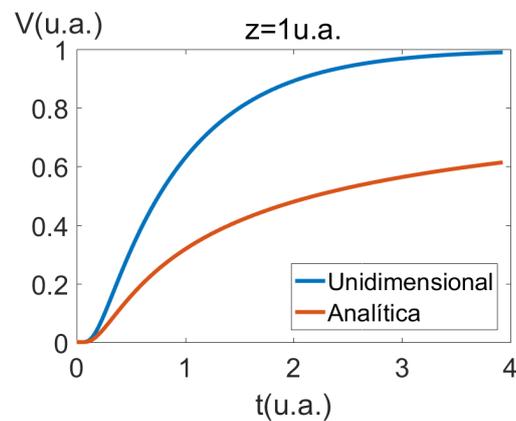


Figura 3.11: $v(z)$ para $t = 1u.a.$

Como vemos, las soluciones son equivalentes para tiempos cortos, tales que el potencial en el extremo del material sigue siendo 0. Una vez el potencial del final empieza a crecer, la unidimensional evoluciona a mayor velocidad que la analítica, lo cual se aproximará más al comportamiento real.

Si vemos el potencial de un punto como función del tiempo:

Figura 3.12: $v(t)$ para $z = 0,01u.a.$ Figura 3.13: $v(t)$ para $z = 0,1u.a.$ Figura 3.14: $v(t)$ para $z = 0,5u.a.$ Figura 3.15: $v(t)$ para $z = 1u.a.$

Cuanto mas lejos del extremo final del material nos encontremos, mejor coincidencia habrá entre las dos soluciones.

Para comprar ahora la solución unidimensional con la bidimensional hay que tener en cuenta que dependen de distintos parámetros. La unidimensional ya hemos visto que solo depende de R y C , mientras que la bidimensional depende de:

d = Distancia del material a las placas

σ = Conductividad

V_0 = Voltaje en el punto inicial

Δ = Grosor del material

Distancia desde el extremo del material hasta el plano final de $V=0$

Vamos a despreciar la dependencia con la distancia desde el extremo del material hasta el plano de tierra que hay al final ya que esta distancia solo afectará a la simulación si es verdaderamente pequeña, lo cual vamos a evitar en la mayoría de los casos.

Podemos relacionar los demás parámetros con los de la solución analítica y la unidimensional:

$$C = \frac{\epsilon_0 h}{d}$$

$$R = \frac{1}{\sigma \Delta h}$$

Siendo h la anchura del material.

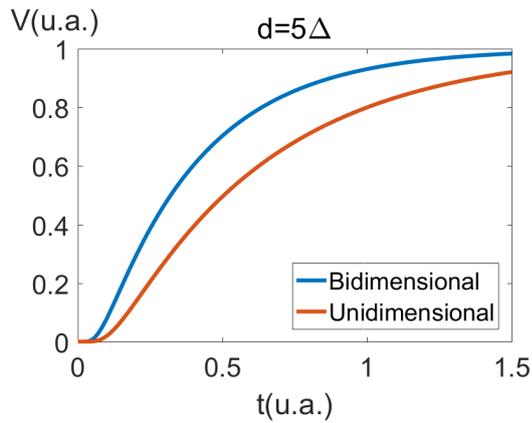
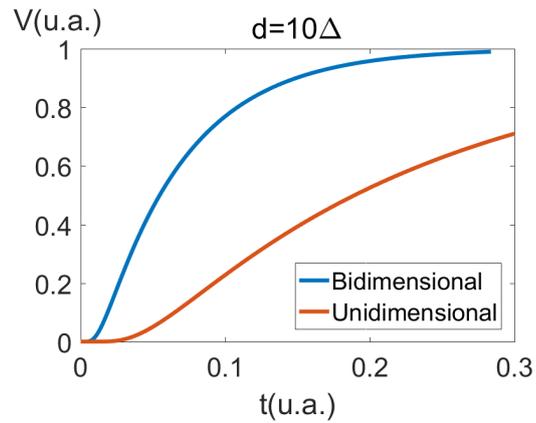
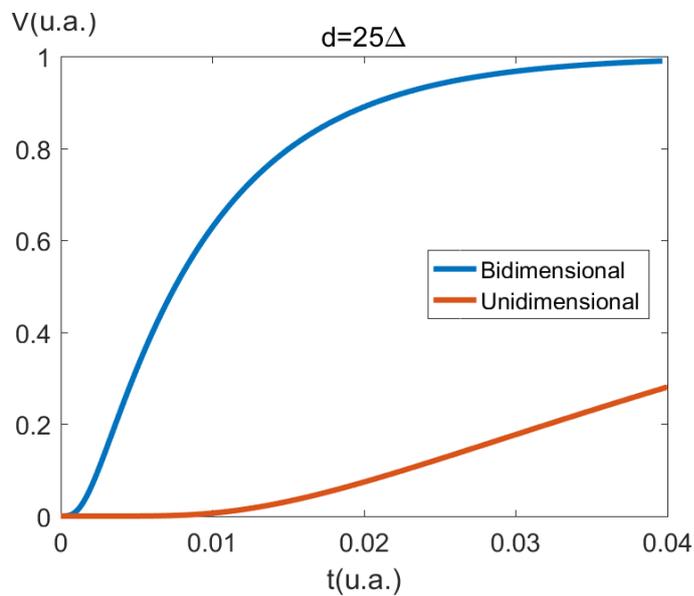
Esta capacidad por unidad de longitud es la del material con respecto a cada una de las placas. Por tanto la capacidad total del material será el doble. Tanto la solución analítica como la unidimensional dependen ambas dos del producto de R por C :

$$RC = \frac{\epsilon_0}{d \sigma \Delta} \tag{3.0.1}$$

Siendo este producto el valor con respecto a cada una de las placas.

Si comparamos la evolución del potencial en un punto para la solución unidimensional y bidimensional, con un mismo valor de V_0 y RC , para un valor fijo de Δ , vemos que los resultados difieren en función de la distancia entre el material y las placas metálicas. Esto es debido a que la solución unidimensional no tiene en cuenta que para diferentes separaciones entre placas los campos eléctricos transversales al material van a ser distintos, haciendo que la evolución sea mas o menos rápida.

Para distancias entre las placas mucho mas pequeñas que la anchura de la lámina, las soluciones van a ser similares, pero según vaya aumentando la distancia entre placas las soluciones van a diferir profundamente:

Figura 3.16: $v(t)$ Figura 3.17: $v(t)$ Figura 3.18: $v(t)$

Según aumenta la distancia entre placas la solución bidimensional va evolucionando más rápido. Esto es debido a que al estar más lejos de las placas de potencial cero el campo eléctrico tiene una componente transversal de menor magnitud, facilitando que se produzca la difusión de la carga. Para distancias entre placas mayores, las soluciones serán muy distintas, siendo más fiel a la realidad la solución bidimensional ya que es la que tiene en cuenta este cambio en el campo eléctrico.

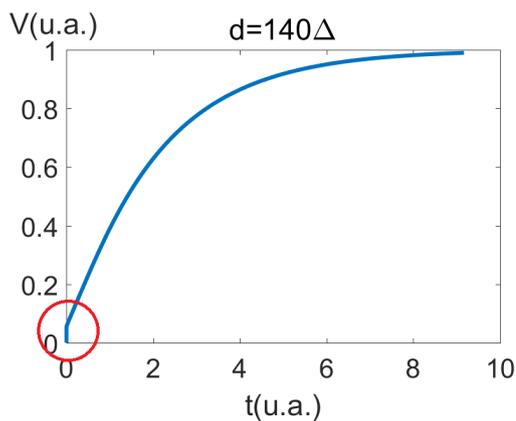
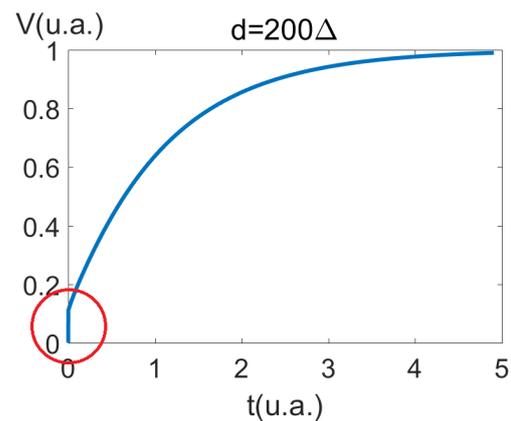
Por tanto para distancias entre las placas muy pequeñas, la solución unidimen-

sional nos dará un resultado de una precisión bastante buena a un coste computacional mucho menor que la solución bidimensional. Además hay que tener en cuenta que la solución bidimensional supone que el grosor del material es mucho menor que la distancia entre placas, por lo que es de esperar que para distancias entre placas comparables al espesor del material este modelo falle.

El coste computacional de la solución bidimensional es además muy grande si tomamos una longitud del material mucho mayor que el espesor, pues al ser el paso espacial igual al grosor del material, hay que simular un número muy elevado de puntos, y en función del ordenador es posible que no pueda realizarse la simulación.

Esto podría resolverse mejorando el programa de simulación para tomar un mallado anisótropo, es decir, en vez de tener un paso espacial en la coordenada x igual al de la coordenada y , tenerlos diferentes de modo que haya que simular menos puntos. De este modo se disminuiría el coste computacional de resolver el sistema para estas configuraciones. Pero la versión actual del programa mantiene esta limitación. Una posible mejora del programa podría ser incluir, además del mallado anisótropo, una simulación completa del problema en tres dimensiones. Esto dispararía el coste computacional, pero con la correcta optimización permitiría obtener resultados aún más precisos.

Para distancias entre placas muy grandes, en la solución bidimensional se aprecia un salto en el potencial para la primera interacción. Este salto es debido a que en el momento en que aplicamos el potencial inicial, instantáneamente en todos los puntos del material el potencial deja de ser cero. Esto sucede para todas las distancias entre placas, pero el salto crecerá conforme lo hace la separación debido a que disminuye el campo eléctrico normal al material. El salto llega a hacerse muy visible como podemos observar en las siguientes gráficas:

Figura 3.19: $v(t)$ Figura 3.20: $v(t)$

Por tanto, para distancias entre placas del orden del grosor del material, la solución unidimensional nos dará un resultado bastante preciso a un coste computacional mucho menor que la bidimensional.

La solución analítica sólo nos dará resultados coherentes si tomamos el potencial en puntos del material más próximos al extremo de la fuente que al otro extremo, con la distancia entre las placas y el material siendo muy pequeña y tomando tiempos muy cortos. Puede ser aplicable a materiales muy resistivos de una longitud grande, tales que el potencial en el extremo del material aún sea cero durante la medida.

Para el resto de situaciones, la solución bidimensional será la recomendable pues es la que tiene mas factores en consideración, y si el coste computacional es asumible, tendrá resultados mas correctos para cualquier circunstancia.

Capítulo 4

Medida experimental

4.1. Montaje experimental

Tras modelizar la evolución teórica del sistema hemos realizado el montaje para comprobar experimentalmente si nuestras simulaciones se ciñen a la realidad. El montaje, esquemáticamente se reduce a lo siguiente:

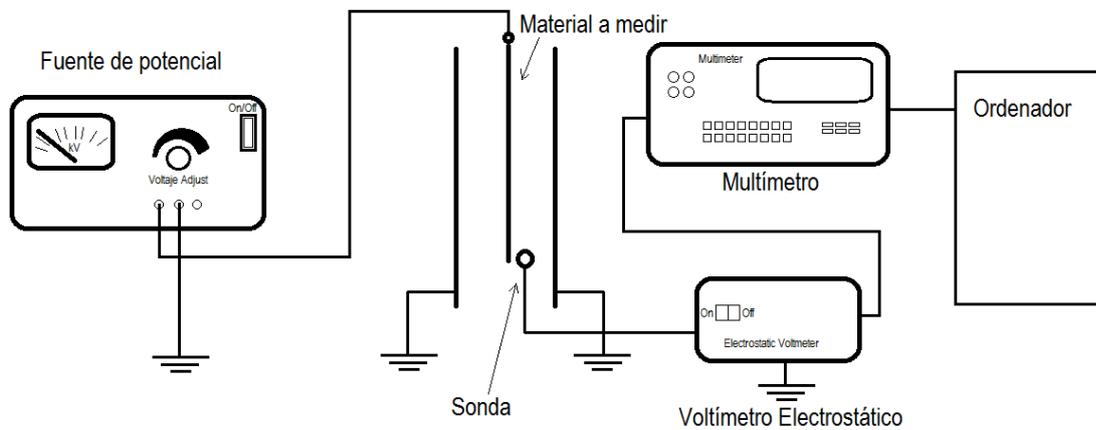


Figura 4.1: Esquema montaje experimental

Hemos utilizado como fuente de tensión constante una Frederiksen 3660.50. El voltímetro electrostático es un Xerox 600T1620, y el multímetro es un Fluke 8840A. Como material a medir hemos utilizado una pieza de PVC dopado con material conductor.



Figura 4.2: Fuente de tensión



Figura 4.3: Voltímetro electrostático



Figura 4.4: Multímetro



Figura 4.5: Material a medir

Hemos situado toda la estructura sobre una base metálica conectada a tierra. Hemos conectado unas placas paralelas de una longitud de 160mm también a tierra.

Se ha ideado un sistema para sujetar el material en la posición intermedia de las placas a la vez que se le aplica el potencial a todo el extremo inicial del material.



Figura 4.6: Foto del soporte del material a medir

Hemos ubicado el voltímetro electrostático entre las placas metálicas de manera que mida el potencial en el extremo del material aislante.

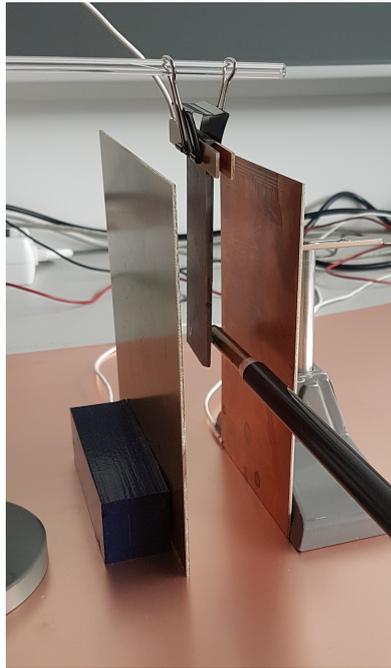


Figura 4.7: Foto del montaje

Y finalmente hemos conectado el soporte del material a la fuente de voltaje.

Para realizar las medidas, exportamos el valor del potencial que nos da el voltímetro electrostático desde el multímetro a un ordenador y así podemos ver la evolución temporal del potencial en el extremo del material.

Se ha ideado un interruptor que permite o no el paso de la corriente al material, lo cual nos permite aplicar el voltaje de golpe al material como han simulado nuestros modelos.

4.2. Procedimiento experimental

Tras realizar el montaje experimental, hemos establecido en la fuente un voltaje de -500 voltios. Se ha empleado un potencial negativo ya que el funcionamiento del voltímetro es más estable que con potenciales positivos, por causas achacables al propio diseño del voltímetro. A continuación hemos comenzado a registrar los datos del voltímetro con el software del ordenador, y hemos permitido el paso de la corriente al material con el interruptor. Cuando se ha alcanzado el equilibrio de potencial con la fuente, hemos accionado de nuevo el interruptor para cortar el paso de la corriente. Cuando el material se ha descargado completamente hemos dejado de medir.

Hemos tomado 500 voltios como voltaje debido a que para valores superiores

a 1kV hemos observado fenómenos de ionización del aire que nos impedían tomar medidas. Afortunadamente como este método es independiente del potencial, tan solo hemos tenido que tomar un potencial menor para solucionarlo.

Como el tiempo de evolución del potencial depende de la distancia entre las placas, y la limitación en las medidas experimentales será la resolución temporal del voltímetro, podremos aumentar o disminuir esta distancia para una medida óptima en función de la resistencia del material.

Para un determinado material aislante de longitud 102mm, y anchura 31.5mm hemos tomado medidas con diferentes distancias entre placas a fin de ver si nuestras simulaciones son fieles a la realidad para todas ellas. Las distancias entre placas seleccionadas han sido 15mm, 33mm, 54mm y 100mm.

Vemos que la evolución del potencial en el extremo es la siguiente:

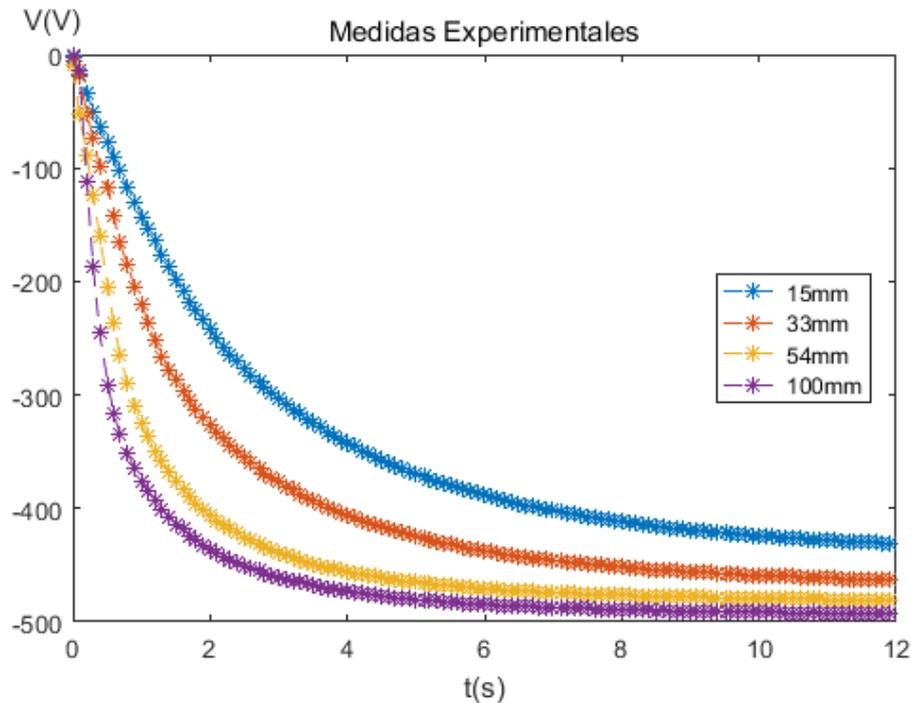


Figura 4.8: $v(t)$ experimental para distintas distancias entre placas

Las gráficas están invertidas respecto a las que habíamos presentado en la sección de resultados ya que hemos utilizado un potencial negativo. Igual que predecía nuestro modelo teórico, el potencial evolucionará más rápido para distancias mayores entre las placas, debido a que el sistema almacena menos energía electrostática.

4.3. Comparación entre datos experimentales y simulaciones

Una vez tenemos los datos experimentales hemos de poder compararlos con el modelo teórico.

Para ello vamos a tomar un tiempo característico: el tiempo que tarda el potencial en el extremo del material en alcanzar un valor igual la mitad del potencial aplicado, llamaremos a este tiempo $t_{1/2}$. Esto será una primera aproximación a fin de verificar los órdenes de magnitud.

4.3.1. Modelo bidimensional

Para comparar los datos con los del modelo bidimensional (a priori la más correcta de las simulaciones), tenemos que realizar una simulación con las dimensiones que tenga el montaje para la medida, tomando siempre como paso espacial (Δ) el espesor del material a medir. Una vez tenemos los datos de la simulación, vemos cual es el tiempo característico.

Si realizamos una simulación adimensional, el tiempo dimensional (t), estará relacionado con el adimensional (s) por la ecuación (2.3.18a). Despejando de ella la conductividad obtenemos:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \Delta}{d} \frac{s}{t} \quad (4.3.1)$$

Siendo ϵ_0 la permitividad dieléctrica del vacío, Δ el grosor del material y d la distancia del material a las placas. Por tanto si sustituimos en s el $s_{1/2}$ de la simulación, y en t el $t_{1/2}$ experimental, obtendremos el valor de la conductividad para el cual los tiempos característicos coinciden.

Si en la simulación hemos introducido una conductividad de referencia y tenemos por tanto un tiempo dimensional, podemos relacionar el tiempo característico en la simulación y el tiempo característico experimental del siguiente modo:

$$\frac{t_{1/2}^{exp}}{\tau_{exp}} = \frac{t_{1/2}^{sim}}{\tau_{sim}} \quad (4.3.2)$$

Siendo $\tau_{exp} = \frac{\epsilon_0 \Delta}{\sigma_{exp} d}$

Como en la simulación hemos seleccionado los parámetros d y Δ para que sean los mismos que los experimentales, sustituyendo el valor de τ y despejando σ_{exp} , tenemos que la conductividad experimental se relaciona con la simulada del siguiente modo:

$$\sigma_{exp} = \sigma_{sim} \frac{t_{1/2}^{sim}}{t_{1/2}^{exp}} \quad (4.3.3)$$

4.3.2. Modelo unidimensional

Si quisiéramos relacionar las medidas experimentales con el modelo unidimensional, tomaríamos de nuevo como tiempo característico el tiempo que tarda el potencial en el último punto a alcanzar un potencial igual a la mitad del potencial aplicado ($t_{1/2}$). En el modelo unidimensional no influye la geometría para las simulaciones, esta totalmente adimensionalizado, dependiendo de (2.2.8):

$$r = \frac{t}{2(2RC)(z)^2} \quad (4.3.4)$$

Por tanto, podemos relacionar los tiempos característicos del experimento y la simulación para obtener el producto RC en el experimento en función de los parámetros que hayamos introducido en la simulación:

$$r_{exp} = r_{sim} \rightarrow RC_{exp} = RC_{sim} \frac{t_{\frac{1}{2}exp}}{t_{\frac{1}{2}sim}} \left(\frac{z_{sim}}{z_{exp}} \right)^2 \quad (4.3.5)$$

Hay que tener en cuenta que en el modelo unidimensional, RC se refiere a la resistencia y capacidad respecto a cada una de las placas, por lo que el sistema tendrá 2RC. Como vimos en (3.0.1) podemos relacionar RC con la conductividad despejando:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0}{d \Delta 2RC} \quad (4.3.6)$$

Siendo d la distancia entre placas y Δ el grosor del material.

4.3.3. Precisión

Hay que tener en cuenta que lo que hemos hecho hasta ahora es tan solo encontrar los valores de la conductividad tales que los tiempos característicos de nuestras simulaciones coincidan con los experimentales. Pero esto no nos garantiza que para otros tiempos los datos del voltaje coincidan. Si queremos obtener una buena precisión vamos a tener que realizar varias correcciones a los datos simulados.

En primer lugar hemos de tener en cuenta que el voltaje que llega al material no es exactamente el que marca la fuente, será menor. Esto podemos corregirlo ya sea introduciendo un potencial menor en la simulación, o bien multiplicando los datos del voltaje por un factor de escala.

En segundo lugar y mas importante, tenemos una incertidumbre en el tiempo inicial de medida. Las lecturas del electrómetro, con el montaje que tenemos, no marcan cero antes de que pulsemos el interruptor. Marcan un valor algo por encima de cero. Y por el carácter discreto de las medidas, sabemos cuando el potencial está aumentando, pero no el momento exacto en que empieza a crecer. Además, el

voltímetro introduce un cierto retardo. Por tanto tendremos un desfase temporal en los datos experimentales. Este desfase lo corregiremos desplazando los datos sobre el eje temporal, ya sean los datos experimentales o los simulados.

Una vez hemos corregido el desfase temporal y el voltaje, podremos recalcular la conductividad. Si queremos lograr una precisión aun mayor, realizaremos a los datos un ajuste como el que se explica en la siguiente sección.

4.4. Concordancia entre las simulaciones y los experimentos

A continuación vamos a comparar como se ajustan nuestras simulaciones a la realidad.

Para ello debemos recordar que en nuestros modelos teóricos, con todos los demás parámetros constantes, el producto del tiempo de evolución por la conductividad (o la inversa de la resistencia) es constante (2.1.9) (2.2.8) (2.3.17). De modo que aumentar n veces la conductividad equivale a reducir n veces la escala temporal.

Utilizando esto, vamos a tomar los datos de la simulación bidimensional, por ser la mas precisa, y a corregir la escala temporal para comprobar si efectivamente se ajusta a la curva experimental. De ser así, la conductividad será la que hubiéramos simulado, multiplicada por el factor de corrección.

Tras realizar esta corrección, vemos que el modelo bidimensional coincide muy bien con las medidas experimentales para distancias entre placas no muy grandes (Figura 4.9).

Pero para distancias entre placas mayores que la anchura del material a medir, el modelo bidimensional comenzará a fallar. Esto se debe a que supusimos que tanto las placas metálicas como el material a medir tenían anchura infinita. Y cuando experimentalmente tenemos que la separación entre ellos es mayor que la anchura del sistema, el problema dejará de poder ser considerado bidimensional y pasará a ser tridimensional.

Cuando esto sucede, como podemos ver a continuación, el modelo bidimensional deja de coincidir con tanta precisión:

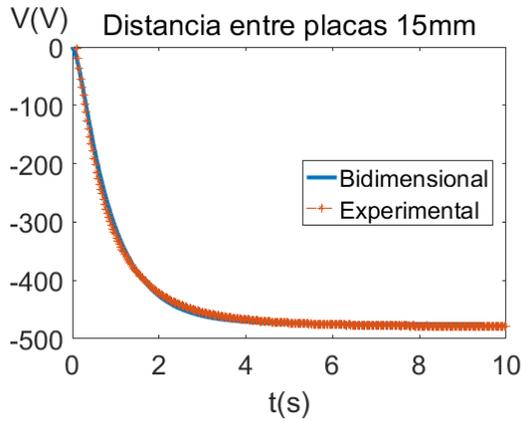


Figura 4.9

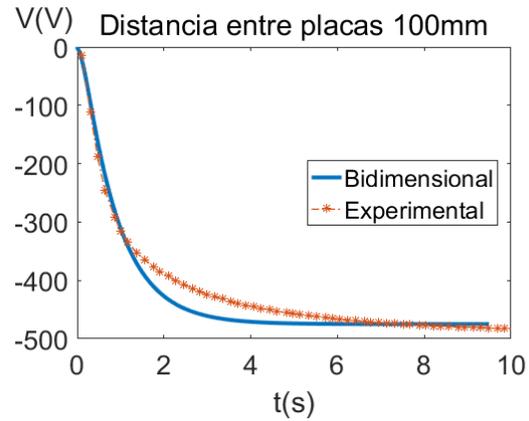


Figura 4.10

En estas gráficas se han adecuado las escalas temporales para tener en cuenta la geometría del problema real y la de la simulación.

4.5. Cálculo de la conductividad

Vamos a obtener la conductividad del material que hemos medido a partir de los datos de la medida con menor distancia entre placas, ya que será en la que los modelos se ceñirán más a la realidad y por tanto la más correcta.

Realizando una primera aproximación utilizando el tiempo característico y corrigiendo el desfase temporal y el voltaje, obtenemos una conductividad de

$$\sigma = 3,45 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\Omega m}$$

Para que los datos simulados ajusten aún más a los experimentales, vamos a hallar el factor de escala temporal que hay que aplicar a los datos de esta simulación para que se ceñan aún más a los experimentales. El factor que hemos determinado es de 1,25. Por tanto la conductividad real será 1,25 veces menor que la que habíamos obtenido en la simulación, es decir:

$$\sigma = \frac{3,45 \cdot 10^{-11}}{1,25} \frac{1}{\Omega m} = 2,76 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\Omega m}$$

Dada la considerable cantidad de datos de los que disponemos podría mejorarse la calidad de la medida usando promedios para una separación dada o bien realizando experimentos con diferentes separaciones de las placas.

Capítulo 5

Conclusiones

Este trabajo se puede resumir en que hemos desarrollado un método novedoso que permite la medición de conductividades muy bajas de forma rápida y eficaz. Para ello:

- Se he hallado una solución analítica aproximada para el sistema de medida.
- Se ha desarrollado un software de simulación en lenguaje C para obtener una solución aproximada del sistema.
- Se ha desarrollado un software de simulación en lenguaje MATLAB para obtener una solución muy precisa del sistema
- Se ha comprobado experimentalmente que nuestras soluciones se corresponden con la realidad y son por tanto un buen método de medida de la conductividad de un material.

Además, a nivel personal

- Durante la elaboración de este trabajo se ha empleado de manera constante el lenguaje de programación C y Matlab, por lo que he desarrollado un alto grado de comprensión y manejo de los mismos.
- Del mismo modo he aprendido a utilizar el lenguaje LaTeX, utilizado en multitud de publicaciones y artículos científicos.

Además este trabajo da pie a los siguientes futuros desarrollos:

- Paralelización del cálculo.
- Implementación de un mallado anisótropo.
- Implementación del software en tres dimensiones.

- Integración de los modelos bidimensionales con el software de medida para permitir una medida directa.

Apéndice A

Código C

```
1 #include <stdlib.h>
2 #include <stdio.h>
3 #include "tri.h"
4
5
6 int main()
7 {
8     double z, t, deltat, deltaz, zfin;
9     double V0, R, C, r;
10    long int dimz;
11    long int n, i;
12    double *u;
13
14    //Damos valores iniciales//
15
16    V0=1;                //Potencial Inicial
17    R=1;                 //Resistencia por u de longitud
18    C=1;                 //Capacidad por u de longitud
19    zfin=1;             //Longitud del sistema
20    dimz=100;           //Numero de pasos espaciales
21
22    //Pasos temporales y espaciales//
23
24    deltaz=zfin/dimz;   //Definimos delta de z tal que tome un numero
                        //de puntos que nos interese o damos un valor justo
25    deltat=0.025*R*C*4*deltaz*deltaz; //Definimos el paso temporal
                        //en función del espacial a fin de que se cumpla la condición r
                        //<0.025 para que Crank-Nicolson funcione correctamente
26
27    r=deltat/(R*C*4*deltaz*deltaz); //Aglomeración de todas las
                        //constantes (Adimensionalizacion)
28
```

```

29 dimz=2*zfin/deltaz; //Al haber dos fuentes la distancia a simular
    es el doble que la real
30
31
32 //Creamos las salidas de datos//
33
34 FILE* datos=stdout;
35 FILE* gnu;
36
37 //Resolución de la ecuación//
38
39 u = (double *)malloc ((dimz+1)*sizeof(double)); //Asignación de
    memoria
40
41 double b[dimz+1], c[dimz+1], d[dimz+1];
42
43 if (u == NULL) //Comprobación de que la memoria ha sido
    correctamente asignada
44 {
45     printf("NO hay suficiente espacio en memoria\n");
46     return -1;
47 }
48
49 u[0]=V0; //Asignamos a las dos fuentes el voltaje inicial
50 u[dimz]=V0;
51
52 n=0;
53
54
55 while(fabs(u[dimz/2])<0.99*fabs(V0)) //Bucle principal en el
    tiempo con la condición de fin (Vfin=0.99*V0)
56 {
57     t=n*deltat; //Calculamos el tiempo dimensional cada
    iteracion para exportarlo al fichero
58
59     for(i=0; i<=dimz/2; i++) //SALIDA DE DATOS
60     {
61         z=i*deltaz;
62         if(n%10==0) //Guardamos los datos cada 10 pasos
    temporales
63         {
64             fprintf(datos, "%.20f,%f,%f\n", u[i], z, t);
65         }
66         if(i==0)
67         {
68             if(n==0)
69             {
70                 gnu = popen("gnuplot", "w");

```

```

71         fprintf(gnu,"set xrange [0:%lf]\n",
zfin);
72         fprintf(gnu,"set yrange [0:%lf]\n",V0
);
73     }
74     }
75     if(n%1000==0) //Graficamos los datos cada 1000
pasos temporales
76     {
77         fputs("plot '-' w l\n",gnu);
78         fprintf(gnu,"%lf %lf\n",z,u[i]);
79         if(i==dimz/2)
80         {
81             fputs("e\n",gnu);
82         }
83     }
84     } //Fin bucle de salida de datos
85
86 //Asignamos valores a las variables que introduciremos en el
algoritmo de Thomas
87
88 //La primera y la ultima ecuacion son distintas por las condiciones
de contorno
89     b[0]=1;
90     c[0]=0;
91     d[0]=u[0];
92     d[dimz]=u[dimz];
93     b[dimz]=1;
94     c[dimz]=0;
95
96     for(i=1; i<dimz; i++)
97     {
98         b[i]=1+2*r;
99         c[i]=-r;
100        d[i]=r*u[i+1]+(1-2*r)*u[i]+r*u[i-1];
101    }
102
103    tri(dimz,c,b,c,d,u); //Resolvemos la matriz
trilineal usando el algoritmo de Thomas implementado en un script
104
105    n++;
106
107 } //Fin del bucle temporal
108
109 return 0;
110 }

```

```
1 //tri.h//
2
3
4 #include <stdio.h>
5 #include <stdlib.h>
6 #include <math.h>
7 //Algoritmo de Thomas
8
9 void tri( int dim, double a[dim+1], double b[dim+1], double c[dim+1],
10          double d[dim+1], double x[dim+1])
11 {
12     int i, n;
13     double c1[dim+1], d1[dim+1];
14     c1[0]=c[0]/b[0];
15     d1[0]=d[0]/b[0];
16     for(i=1; i<=dim; i++)
17     {
18         c1[i]=c[i]/(b[i]-a[i]*c1[i-1]);
19         d1[i]=(d[i]-a[i]*d1[i-1])/(b[i]-a[i]*c1[i-1]);
20     }
21     x[dim]=d1[dim];
22     for(n=dim-1; n>=1; n--)
23     {
24         x[n]=d1[n]-c1[n]*x[n+1]; //x[n] es la solucion
25     }
```

Apéndice B

Código MATLAB®

```
1 bidimensional.m
2
3 % Cada script usado está detallado después
4
5
6
7
8 primera;          % Script que nos da la primera iteracion , la
   distribución inicial del potencial y crea la matriz de los
   coeficientes del sistema de ecuaciones
9
10
11
12 % Vamos a crear una matriz (Vt) en la que acumular los valores del
   potencial en los puntos de coordenadas j=p, para todos los pasos
   temporales , la primera coordenada sera la posición en x, y la
   segunda sera el numero del paso temporal guardado
13
14
15 Vt=zeros(dx, tfin);
16
17 % Este script nos coloca , por comodidad a la hora de guardad los
   datos , la distribución actual de potencial en vez de en un vector
   , en una matriz (Vf) de forma que el potencial en un punto de
   coordenadas i ,j tiene esas coordenadas en la matriz .
18
19 expand;
20
21 % Damos a la matriz Vt los valores del potencial que le corresponden
22
23 Vt(:,1)=Vf(p,:);
24
```

```

25 % Como esta matriz puede alcanzar dimensiones muy grandes , no
    conviene tenerla siempre en memoria, por lo que lo guardaremos en
    el disco utilizando el formato .mat lo que nos permite escribir
    sobre él sin tenerlo cargado en la memoria
26
27 save Vt.mat Vt -v7.3;
28 clear Vt
29 Vt=matfile('Vt.mat','Writable',true);
30
31
32 % Para ir viendo la evolución temporal del potencial mientras lo
    calcula podemos iniciar un gráfico con el siguiente comando
33
34 hLine = plot(Vt.Vt(:,1));
35
36
37 % Vamos a utilizar un bucle para resolver iterativamente el problema
    de la difusión de la carga. El numero de iteraciones puede ser muy
    grande si el valor del paso temporal es pequeño, y puede no
    interesarnos guardar los datos cada paso temporal, por lo que
    creamos la posibilidad de no guardar los datos en todos los pasos
38
39 % Inicializamos las variables del bucle
40
41 s=0;           % Numero del paso temporal
42 u=1;           % u serán las interacciones de guardado
43 t=tau*s*deltaS; % Tiempo dimensional
44 tic           % Iniciamos un contador temporal para saber el
    tiempo de ejecución del bucle
45
46 Vdim=zeros(dx,3,1); % Creamos un array tridimensional para guardar la
    posición, el voltaje y el tiempo cada iteracion con sus
    dimensiones.
47
48
49 .% Se guardaran los datos como tres vectores columna (posición,
    voltaje y tiempo), y la tercera dimensión sera el numero de
    iteracion. Por ejemplo, el voltaje del tercer punto en la cuarta
    interacción temporal seria Vdim(3,2,4). El primer numero indica la
    posición del punto, el segundo sera (1 para la posición con
    coordenadas, 2 para el voltaje y 3 para el tiempo), y el tercer
    numero indica el paso temporal.
50
51 % Si vamos a operar con muchos pasos temporales conviene eliminar
    esta matriz y calcular los valores dimensionales a partir de los
    de la matriz adimensional Vt, ya que la matriz dimensional
    ralentiza la ejecución del programa cuando alcanza un tamaño
    demasiado grande.
52

```

```

53 Vdim(:,3,u)=t; % Guardamos el valor del tiempo dimensional en la
    iteracion
54 Vdim(:,1,u)=linspace(0,dx*delta,dx); % Guardamos la posición
    dimensional de cada punto
55 Vdim(:,2,u)=Vin*Vf(p,:)' ; % Guardamos el valor del
    potencial en cada punto
56
57 % Seleccionamos la condición de fin del bucle, en este caso hemos
    decidido pararlo cuando el potencial en el ultimo punto del
    material alcance el 99% del potencial inicial
58 while Vt.Vt(d,u)<0.99
59
60 s=s+1;
61 % Resolvemos el sistema de ecuaciones de Laplace y Poisson
62 resolver;
63 % Calculamos la difusión de la carga con el nuevo potencial
64 carga;
65 t=tau*s*deltaS;
66
67 expand;
68
69 if mod(s,1)==0 % Con este comando decidimos cada cuantas
    iteraciones guardamos los datos (todas)
70 u=u+1;
71 Vt.Vt(:,u)=Vf(p,:)' ; % Guardamos los datos del potencial en la
    linea al fichero
72
73 Vdim(:,3,u)=t; % Guardamos el valor real del tiempo dimensional en
    la iteracion
74 Vdim(:,1,u)=linspace(0,dx*delta,dx); % Guardamos la posición
    dimensional de cada punto
75 Vdim(:,2,u)=Vin*Vf(p,:)' ; % Guardamos el valor
    del potencial en cada punto
76 end
77
78 if mod(s,1)==0 % Cada cuantas iteraciones actualizamos los
    datos de la gráfica (todas)
79
80
81 set(hLine, 'YData',Vdim(:,2,u));
82 % set(hLine, 'YData',squeeze(Vdim(d,2,1:u))); % Si queremos ver la
    evolución en el ultimo punto descomentaremos este comando y
    comentaremos el anterior
83
84 drawnow
85
86
87 end

```

```

88 if mod(u, tfin)==0 % En el caso de que hayamos
    alcanzado el valor máximo de iteraciones de guardado que habíamos
    dado al inicio
89 Vt.Vt=[Vt.Vt zeros(dx, tfin)]; % Con este comando aumentamos el
    tamaño de la matriz para poder seguir guardando si se ha alcanzado
    un numero de iteraciones mayor que la dimensión de la matriz
90 end
91 end
92
93 tiempot=toc % Mostramos en pantalla la duración del bucle
94 clear t Vf
95
96
97
98
99
100 //////////////////////////////////////
101 //////////////////////////////////Scripts usados////////////////////////////////
102 //////////////////////////////////////
103
104
105
106 primera.m
107
108 %-----%
109 %-----Definimos la geometría del sistema-----%
110 %-----%
111
112 dx=120; % Longitud del sistema
113 dy=51; % Distancia entre las placas
114 d=100; % Longitud del material a medir
115 p=26; % Posición en el eje "y" del material (
    equidistante)
116
117
118
119
120
121
122
123 %-----%
124 %-----Definimos los parámetro de la simulación-----%
125 %-----%
126
127 Vin=1; % Valor del potencial aplicado
128 deltaS=0.1; % Paso temporal reducido (s=t/tau)
129 delta=0.001; % Paso espacial (x e y)
130 tfin=2000000; % Máximo de pasos temporales
131 sigma=(8.854e-12); % Conductividad

```

```

132 tau=8.854e-12/(p*sigma);
133
134
135
136 %-----%
137 %---Hacemos que el potencial decaiga linealmente desde---%
138 %---Vin hasta cero para los puntos situados en x=0---%
139 %-----%
140
141 V0b=linspace(0,1,p);           % Vamos a llamar temporalmente "Va" a
    la región de X=0
142 V0a=linspace(1,0,dy-p);       % Por encima del material, y "Vb" a
    la de abajo
143 V0=[V0b(:); V0a(:)];          % Juntamos la parte de arriba y la de
    abajo en un vector columna
144 clear V0b;
145 clear V0a;
146
147 %-----%
148 %---Creamos ahora la matriz que contenga los valores---%
149 %---del potencial en cada punto del espacio---%
150 %-----%
151
152 V0=[V0 ; zeros(dx*dy-dy,1)];   % En el estado inicial solo hay
    potencial en x=0
153 V0=sparse(V0);                 % Transformamos la matriz en una
    matriz sparse
154 CC=spalloc(dx*dy,1,(dy+d));    % Preasignamos el numero de puntos
    que van a tener un termino independiente distinto de cero (los
    bordes y la linea).
155 CC=V0;                          % Damos el valor del potencial
    inicial
156 V=full(V0);                      % Definimos una matriz V que ira
    acumulando el valor del potencial en todos los puntos del espacio
157 clear V0
158
159 %-----%
160 %---Creamos la matriz del sistema de ecuaciones---%
161 %-----%
162
163
164 eqn=spalloc(dx*dy,dx*dy,5*dx*dy-4*(2*dx+2*dy-2)); % Preasignamos el
    numero de elementos distintos de cero
165 for i=0:dx-1
166     for j=1:dy
167         if i~=0 && i~=dx-1 && j~=1 && j~=dy           % Damos a cada
            coeficiente el valor que le corresponde
168             eqn(i*dy+j,i*dy+j+1)=1/4;
169             eqn(i*dy+j,i*dy+j-1)=1/4;

```

```

170 eqn(i*dy+j,(i+1)*dy+j)=1/4;
171 eqn(i*dy+j,(i-1)*dy+j)=1/4;
172 eqn(i*dy+j,i*dy+j)=-1;
173 end
174 if i==0 || i==dx-1 || j==1 || j==dy
175 eqn(i*dy+j,i*dy+j)=1;
176 end
177 end
178 end
179 clear i;
180 clear j;
181
182
183
184
185 expand.m
186
187
188 clear Vf
189 Vx=full(V);
190 Vf=zeros(dy,dx);
191 Vf(:,1)=Vx(1:dy);
192 for i=1:dx-1
193 Vf(:,i+1)=Vx(i*dy+1:i*dy+dy);
194 end
195 clear Vx
196 Vf;
197
198
199
200 resolver.m
201
202
203 %-----%
204 %-----Resuelve el sistema de ecuaciones-----%
205 %-----%
206
207 V=mldivide(eqn,CC); % La nueva distribución de potenciales sera la
    solucion del sistema de ecuaciones
208
209
210
211 carga.m
212
213 %-----%
214 %-----Calculamos como se difunde la carga con-----%
215 %-----la distribución actual de potenciales-----%
216 %-----%
217

```

```
218 | deltacharge=zeros(1,d);           % Creamos el vector incremento de
    |     carga
219 |
220 | for i=1:d-1
221 |     deltacharge(i)=(2*V((i)*dy+p)-V((i-1)*dy+p)-V((i+1)*dy+p))*deltaS;
222 |     CC(i*dy+p)=CC(i*dy+p)+deltacharge(i); % Añadimos al termino indep.
    |     del sist. de ecuaciones el aumento de la carga.
223 | end
224 |
225 | % En el ultimo punto del material la formula cambia pues el siguiente
    |     punto es aire y no circulara corriente hacia el.
226 |
227 | i=d;
228 |     deltacharge(i)=(V((i)*dy+p)-V((i-1)*dy+p))*deltaS;
229 |     CC(i*dy+p)=CC(i*dy+p)+deltacharge(i);
230 | clear i;
```


Bibliografía

- [1] CHIPMAN, R. *Lineas de Transmisión, Teoria y problemas resueltos*, 1 ed. McGraw-Hill, 1971.
- [2] CRANK, J., AND NICOLSON, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Advances in Computational Mathematics*.
- [3] JOHNSON, J. B. Thermal agitation of electricity in conductors. *Phys. Rev.* 32 (Jul 1928), 97–109.
- [4] KEITHLEY. *Low Level Measurements Handbook*, 7 ed. Tektronix, 2014.
- [5] MACGORMAN, D. R., AND RUST, W. D. *The electrical nature of storms*. New York : Oxford University Press, 1998. Includes bibliographical references (p. 369-403) and index.
- [6] THOMAS, L. H. Elliptic problems in linear differential equations over a network.