Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Control óptimo de problemas elípticos lineal-cuadráticos

Autor: Ignacio Miguel Cantero

Tutor: Javier de Frutos Baraja

Control óptimo de problemas elípticos lineal-cuadráticos

Índice general

Introducción **1**

1. Nociones previas **3**
1.1. Espacios Normados, operadores y espacio dual 3
1.2. Espacios de Sobolev 9
1.3. Convergencia débil 15

2. Control óptimo de ecuaciones en derivadas parciales elípticas **19**
2.1. Soluciones débiles de ecuaciones elípticas 19
2.2. Existencia de controles óptimos 30
2.2.1. Control distribuido 30
2.2.2. Condiciones de frontera de tipo Robin 35

3. Condiciones de primer orden. **37**
3.1. Diferenciabilidad en espacios de Banach 37
3.2. Operador adjunto 42
3.3. Optimización cuadrática en espacios de Hilbert 45
3.4. Fuente de calor estacionaria óptima 47
3.4.1. Estado adjunto y principio del máximo 49
3.4.2. Condiciones puntuales de optimalidad 50
3.4.3. Formulación de Karush-Kuhn-Tucker 55
3.4.4. El gradiente del funcional coste reducido 58
3.5. Condiciones de frontera Robin 59
3.5.1. Variante del funcional coste 62

Bibliografía **65**

Introducción

El objetivo de este Trabajo Fin de Grado es la introducción y análisis del control óptimo de problemas elípticos lineal-cuadráticos, donde nos centraremos en el caso de controles distribuidos. En particular, identificaremos dichos problemas con la búsqueda de fuentes de calor estacionarias óptimas.

En el primer capítulo, recordamos alguno de los conceptos esenciales para abordar el tratamiento de los controles. La mayoría de los resultados se han visto en asignaturas de cuarto curso del grado en Matemáticas. En particular, se enmarcan en asignaturas como Análisis Funcional, y Ecuaciones en Derivadas Parciales.

En el segundo capítulo, se abordará la existencia de soluciones débiles de problemas de valores frontera elípticos, tanto con condiciones frontera Dirichlet homogéneas, como con condiciones frontera de tipo Robin. Para ello será necesario realizar la formulación variacional del problema, a fin de poder aplicar el teorema de Lax-Milgram. Posteriormente, nos centramos en la existencia de controles óptimos, donde introduciremos el operador control-estado. Este hecho, nos permitirá tratar cómodamente el problema de minimización del funcional reducido.

Por último, en el tercer capítulo, comenzamos introduciendo los conceptos de diferenciabilidad en espacios de Banach, mostrando las similitudes con el caso de funciones reales de varias variables. A continuación, introducimos el concepto de operador adjunto, lo que nos servirá para derivar las condiciones necesarias de primer orden. Concluimos, analizando las condiciones necesarias de primer orden sobre los problemas que vimos en el capítulo anterior. Será necesario, introducir el estado adjunto asociado al control, lo que permitirá llevar nuestro problema de control a la solución de un sistema optimal. Incluiremos el planteamiento de dicho sistema optimal como un Sistema de Karush-Kuhn-Tucker.

Como aplicaciones se han seguido los artículos [But], [Luo], [Mau], y [Olg].

Me gustaría concluir esta introducción agradeciendo a mi tutor, el profesor Javier de Frutos el haber aceptado dirigir este trabajo.

Capítulo 1

Nociones previas

La pretensión del capítulo es el de resumir algunos de los conceptos básicos junto con los resultados más relevantes acerca de espacios normados, aplicaciones entre espacios normados, espacio dual, espacios de Sobolev, y convergencia débil.

Debido a que el contenido de este capítulo se ha desarrollado en asignaturas de cuarto del grado, especialmente en Análisis Funcional y en Ecuaciones en Derivadas Parciales, no se incluirá la demostración de la mayoría de resultados.

Las referencias para este capítulo son [Cas], [Gal], [Sal], [Trö] y [Ver].

1.1. Espacios Normados, operadores y espacio dual

En este trabajo nos centraremos en el caso real. Las definiciones se escribirán refiriéndonos al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ cuando haya ambigüedad.

Definición 1.1.1. Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una aplicación de X en $\mathbb{R}$,que denotaremos por $\| \ \|$, es una norma sobre X si se verifican las cuatro propiedades siguientes:

1) $\|x\| \geq 0$ para cada $x \in X$.

2) $\|x\| = 0$ si,y solo si, $x = 0$.

3) $\|\lambda x\|$=$|\lambda|\|x\|$ para cada $x \in X$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cada x, $y \in X$.

Un *espacio normado (real)* es un par $(X, \| \ \|)$ donde X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\| \ \|$ es una norma sobre X.

Observación 1.1.2. Por definición, el espacio vectorial X junto a la norma asociada forman un espacio normado. Si consideramos el mismo espacio vectorial y cambiamos la norma asociada obtendremos un espacio normado distinto. Sin embargo, en la mayoría de situaciones la norma que consideramos está clara y por tanto la omitimos diciendo que X es un espacio normado.

Ejemplo 1.1.3. El espacio $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado si consideramos por ejemplo la norma euclídea. El espacio de las funciones reales $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas, que denotamos por $C[a,b]$, es un espacio normado, con la norma del máximo,$\|f\|_{C[a,b]} = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$.

A continuación presentaremos la definición de sucesión de Cauchy, lo que nos permitirá hablar de espacios de Banach.

Definición 1.1.4. Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado, y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión cualquiera de X. Diremos que la sucesión es convergente si existe algún $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Llamamos límite de la sucesión a x.

Definición 1.1.5. Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado, y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión cualquiera de X. Diremos que la sucesión es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe algún $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ para cualesquiera $n, m > n_0(\epsilon)$.

Es bien conocido el resultado siguiente: Toda sucesión convergente en un espacio normado, es una sucesión de Cauchy. El recíproco en general es falso.

El hecho de que el recíproco sea en general falso motiva el concepto de espacio de Banach que presentamos en la siguiente definición:

Definición 1.1.6. Decimos que un espacio normado $(X, \| \ \|)$ es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente, esto es, tiene límite en X. Un espacio normado que es completo, se denomina espacio de Banach.

Ejemplo 1.1.7. El espacio $C[a,b]$ dotado de la norma del máximo $\| \cdot \|_{C[a,b]}$ es un espacio de Banach.

A continuación introduciremos una clase de espacios que juega un papel fundamental en este trabajo, los espacios L^p.

En lo que sigue, E denotará un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$, no vacío, acotado y medible Lebesgue, con medida N-dimensional de Lebesgue $|E| \neq 0$.

Definición 1.1.8. Denotamos por $L^p(E)$, para $1 \leq p < \infty$, el espacio lineal de todas las (*clases de equivalencia de*) funciones medibles Lebesgue, f, que cumplen que

$$\int_E |f(x)|^p dx < \infty.$$

En este contexto se identificarán funciones que difieran en conjuntos de medida cero. Dotando a este espacio de la norma

$$\|f\|_{L^p(E)} := \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

tenemos que $L^p(E)$, con $1 \leq p < \infty$, es un espacio de Banach.

Definición 1.1.9. Una función f real medible en X está esencialmente acotada en X si existe un número real $\alpha \geq 0$ tal que

$$|\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}| = 0.$$

En estas condiciones se dice que la constante α es una cota esencial de f.

Definición 1.1.10. Denotamos por *ess sup* el supremo esencial de una función, es decir, la menor de las cotas esenciales de dicha función.

Ejemplo 1.1.11. Si tomamos la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, que toma el valor 0 en $(0,1]$, y vale 1 para $x = 0$. Tenemos que $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 1$, sin embargo, $ess \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$, puesto que la función es igual a cero c.s.

Definición 1.1.12. Denotamos por $L^\infty(E)$ al espacio de Banach formado por todas las (*clases de equivalencia de*) funciones medibles Lebesgue y acotadas esencialmente, f, dotado de la norma

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = ess \sup_{x\in E} |f(x)| := \inf_{|F|=0} (\sup_{x\in E\setminus F} |f(x)|).$$

Se introduce a continuación el concepto de producto interno.

Definición 1.1.13. Sea H un espacio vectorial real. Un producto interno sobre H es una aplicación de $H\times H$ en $\mathbb{R}$, que denotamos por $(\cdot,\cdot) : H\times H \longrightarrow \mathbb{R}$, y que cumple para todos $x, y, z \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ las siguientes propiedades:

1) $(x, x) \geq 0$, y $(x, x) = 0$ si, y solo si, $x = 0$.

2) $(x, y) = (y, x)$.

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

4) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

Si $(\cdot,\cdot)$ es un producto interno sobre H, entonces decimos que $\big(H, (\cdot,\cdot)\big)$ es un espacio con producto interno.

Observación 1.1.14. De nuevo,hablaremos de H como espacio con producto interno, en vez de $\big(H,(\cdot,\cdot)\big)$, si es claro que producto interno estamos considerando sobre H.

Ejemplo 1.1.15. $L^2[a,b]$ con respecto al producto escalar

$$(u,v) := \int_a^b u(t)v(t)dt,$$

es un espacio con producto interno, y la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ se define a partir del producto interno.

Todo espacio con producto interno $\big(H,(\cdot,\cdot)\big)$ es un espacio normado con respecto a la norma

$$\|u\| := \sqrt{(u,u)}.$$

Proposición 1.1.16 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)**.** Sea H un espacio con producto interno. Si $u, v \in H$ entonces $|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$.

Proposición 1.1.17 (Desigualdad de Bessel)**.** Sea H un espacio con producto interno, y A un subconjunto ortonormal de H. Entonces para todo $x \in H$, y $u_1, u_2, \ldots, u_n \in A$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} |(x,u_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Definición 1.1.18. Decimos que un espacio con producto interno $\big(H,(\cdot,\cdot)\big)$ es un espacio de Hilbert, si es completo con respecto a la norma asociada a $(\cdot,\cdot)$.

Ejemplo 1.1.19. El espacio $(L^2[a,b], \|\cdot\|_{L^2})$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto escalar estándar.

A continuación trataremos las aplicaciones entre espacios normados, comenzando con las definiciones elementales. En lo que sigue, asumiremos que $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son espacios normados sobre $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.20. Diremos que una aplicación $\phi : X \longrightarrow Y$ es lineal, o que es un operador lineal, si $\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\phi(x) + \mu\phi(y)$ para todo $x, y \in X$, y para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Una aplicación lineal de X en $\mathbb{R}$, esto es, $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, se denomina funcional lineal.

Definición 1.1.21. Diremos que una aplicación $\phi : X \longrightarrow Y$ es continua en X, si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|\phi(x_n) - \phi(x)\|_Y = 0$.

Definición 1.1.22. Un operador lineal $\phi : X \longrightarrow Y$ se dice que es acotado, si existe una constante $K > 0$, donde la K depende del operador ϕ, de modo que

$$\|\phi(x)\|_Y \leq K\|x\|_X \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema 1.1.23. En las condiciones anteriores, si $\phi : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal. Son equivalentes:

1) ϕ es continua en X.

2) ϕ es continua en $0 \in X$.

3) Existe un $K > 0$ tal que $\|\phi(x)\|_Y \leq K$ para cada $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$.

4) ϕ transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

5) ϕ es acotada, es decir, existe un $K > 0$ tal que $\|\phi(x)\|_Y \leq K\|x\|_X$ para cada $x \in X$.

6) ϕ es uniformemente continua en X.

Definición 1.1.24. Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ el espacio de todos los operadores lineales de X en Y con las operaciones usuales. Si ocurre que $Y = X$, entonces escribiremos $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

Definición 1.1.25. Si $\phi : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal y continua, llamamos norma del operador ϕ, al valor

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \min\{K > 0 \, : \, \|\phi(x)\|_Y \leq K\|x\|_X\}.$$

Definición 1.1.26. Si dotamos al espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ de la norma $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, este adquiere estructura de espacio normado.

Proposición 1.1.27. Dado un operador $\phi : X \longrightarrow Y$ lineal y continuo. Se verifica

$$\|\phi\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\phi(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|\phi(x)\|.$$

Proposición 1.1.28. Si Y es completo, entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ es de Banach. El recíproco es cierto siempre que X sea un espacio no trivial, esto es, si $X \neq \{0\}$ y $\mathcal{L}(X, Y)$ es de Banach, entonces Y es de Banach.

A continuación introducimos el concepto de espacio dual, que resultará de vital importancia a lo largo del trabajo.

Observación 1.1.29. Dado un espacio normado X, si $F \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, representaremos frecuentemente la acción de F sobre un elemento x por $< F, x >:= F(x)$, para cada $x \in X$.

Definición 1.1.30. Llamamos espacio dual de X, y lo denotamos por X^*, al espacio de todos los funcionales lineales y continuos en $(X, \|\cdot\|_X)$. Es decir, $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Con la norma:

$$\|F\|_{X^*} := \sup_{\|x\|_X = 1} | < F, x > |.$$

Observación 1.1.31. Como $\mathbb{R}$ es un espacio completo, entonces en virtud de la proposición previa, tenemos que el espacio dual X^* siempre es un espacio de Banach.

Buscamos la representación de los funcionales lineales y continuos, con vistas a caracterizar el espacio X^*. En espacios de Hilbert, se dispone del teorema de representación de Riesz, que enunciaremos a continuación.

Teorema 1.1.32 (Teorema de representación de Riesz)**.** Sea H un espacio de Hilbert y F un funcional lineal sobre H. Si F es continuo en H, entonces existe un único $y \in H$ con $\|y\|_H = \|F\|_{H^*}$, tal que

$$< F, x >= (y, x)_H \quad \text{para todo } x \in H.$$

Observación 1.1.33. En virtud del resultado anterior podemos identificar H^* con H, escribiendo simplemente $H = H^*$.

Ejemplo 1.1.34. Consideremos en $L^2(E)$ el funcional lineal dado por $< T_g, f >:= \int_E f(x)g(x)dx$, donde $g \in L^2(E)$ está fijo. Entonces, dicho funcional es continuo, y de hecho, se tiene que $\|T\| = \|g\|$.

A continuación, trataremos la reflexividad de espacios de Banach.

Definición 1.1.35. Llamamos espacio bidual de X, al espacio X^{**}, esto es, $X^{**} := (X^*)^*$.

Definición 1.1.36. Decimos que un espacio de Banach X es reflexivo, cuando podemos identificar X con su bidual, esto es, cuando existe una aplicación biyectiva entre X y X^{**}

Observación 1.1.37. En el caso de espacios reflexivos, tomando el espacio bidual, volvemos al espacio original. En particular, los espacios de Hilbert son siempre reflexivos.
Los espacios $L^p(E)$ que introdujimos anteriormente son espacios reflexivos para $1 < p < \infty$. De hecho, si q denota el exponente conjugado de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces podemos identificar el espacio dual de $L^p(E)$, esto es, $L^p(E)^*$ con $L^q(E)$. En cambio, los espacios $L^1(E)$ y $L^\infty(E)$ no son reflexivos. De hecho, mientras que $L^1(E)^*$ se puede identificar con $L^\infty(E)$, el espacio dual de $L^\infty(E)$ no se puede identificar con $L^1(E)$.

Concluiremos la sección introduciendo el concepto de separabilidad.

Definición 1.1.38. Un espacio de Banach X es separable, si existe un subconjunto $D \subset X$ numerable y denso en X.

Ejemplo 1.1.39. Los espacios $L^p(E)$ son separables para $1 \leq p < \infty$.

1.2. Espacios de Sobolev

En esta sección, introducimos la noción de derivada débil que resulta indispensable para llegar a los espacios de Sobolev, que serán nuestro marco principal de trabajo.

En lo que sigue, Ω denotará un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, que es un dominio, esto es, un conjunto abierto y conexo, cuya frontera se denota generalmente por Γ. Además, tomaremos $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en Ω, y escribiremos la adherencia del conjunto E como $\overline{E}$.

Definición 1.2.1.

1) Sea $k \in \mathbb{N}$. Denotamos por $C^k(\Omega)$ el espacio lineal de todas las funciones reales en Ω que, junto con sus derivadas parciales hasta orden k, son continuas en Ω. Llamamos función de clase k, a una de tales funciones.

2) Dado una función g continua, el conjunto $sop\, g = \overline{\{x \in \Omega : g(x) \neq 0\}}$ se llama soporte de g. Es el menor cerrado fuera del cuál la función g es idénticamente nula.

3) Denotamos por $C_0^k(\Omega)$, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, el conjunto de funciones de clase k, es decir, de funciones k veces diferenciables con continuidad, con soporte compacto en Ω.

Observación 1.2.2. Será de vital importancia para nosotros el caso $k = \infty$, es decir el conjunto $C_0^\infty(\Omega)$, cuyos elementos se llaman funciones test. Las funciones test se anulan en la frontera Γ. Además son funciones diferenciables de cualquier orden. Estas dos propiedades serán de utilidad para definir los espacios de Sobolev.

Definición 1.2.3. Diremos que α es un multi-índice, si es un vector $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ cuyas componentes son enteros no negativos. El número $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ se llama longitud del multi-índice.

Para nosotros las componentes α_i del multi-índice, indicarán el número de veces que derivamos la función f respecto de la variable x_i.

Observación 1.2.4. El uso de los multi-índices, permite utilizar la siguiente notación

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{para cada } f \in C^{|\alpha|}.$$

El valor $|\alpha|$ representa el orden total de derivación. Adoptamos por convenio que $D^{(0)} f := f$.

Definición 1.2.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Denotamos por $C^k(\overline{\Omega})$, para $k \in \mathbb{N}$, al espacio de todos los elementos de $C^k(\Omega)$ que junto con sus derivadas parciales hasta el orden k, se extienden de forma continua hasta $\overline{\Omega}$. En el caso $k = 0$, escribiremos simplemente $C(\overline{\Omega})$ en vez de $C^0(\overline{\Omega})$.

Observación 1.2.6. El espacio $C^k(\overline{\Omega})$ es de Banach con respecto a la siguiente norma:

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|.$$

A continuación daremos la definición de dominio regular [Trö, pag 26], puesto que la teoría de ecuaciones en derivadas parciales necesita que los dominios Ω tengan una frontera suficientemente "suave".

Definición 1.2.7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, un dominio acotado con frontera Γ. Diremos que Ω, o Γ son de clase $C^{k,1}$, con $k \in \mathbb{N}$, si existen un número finito de sistemas de coordenadas $S_1, \ldots, S_m$, funciones $h_1, \ldots, h_m$, y números $a > 0$ y $b > 0$ que cumplen las siguientes propiedades:

1) Las funciones h_i, para $1 \leq i \leq m$, son k veces diferenciables en el cubo cerrado de dimensión $n - 1$

$$\bar{Q}_{n-1} = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \,:\, |y_i| \leq a,\, i = 1, \ldots, n-1\}$$

y las derivadas parciales de orden k de cada h_i son funciones Lipschitz continuas en $\bar{Q}_{n-1}$.

2) Para cualquier $P \in \Gamma$ existe algún $i \in \{1, \ldots, m\}$, tal que en el sistema de coordenadas S_i, existe un $y \in Q_{n-1}$ cumpliendo que $P = (y, h_i(y))$.

3) En el sistema local de coordenadas S_i tenemos que

$$(y, y_n) \in \Omega \iff y \in \bar{Q}_{n-1},\ h_i(y) < y_n < h_i(y) + b;$$

$$(y, y_n) \notin \Omega \iff y \in \bar{Q}_{n-1},\ h_i(y) - b < y_n < h_i(y).$$

Mantendremos a lo largo del trabajo la notación $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$.

Observación 1.2.8. El significado geométrico de la condición 3) es que el dominio se apoya localmente a un lado de la frontera.

Definición 1.2.9. Los dominios, y fronteras de dominios, de clase $C^{0,1}$, se llaman dominios Lipschitz (o dominios regulares), y fronteras Lipschitz, respectivamente.

El paso previo para llegar a los espacios de Sobolev, es el concepto de derivada débil, o derivada en el sentido de las distribuciones.

Definición 1.2.10. Denotamos por $L^1_{loc}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones medibles, que son localmente integrables en Ω, esto es, que son integrables en el sentido de Lebesgue en cada compacto contenido en Ω.

Definición 1.2.11. Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α un multi-índice dado. Si una función $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ cumple que

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega w(x) v(x) dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

donde

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Entonces decimos que w es la derivada débil de f (asociado a α).

En otras palabras, w es la derivada débil de f si cumple la fórmula de la integración por partes de la misma manera que lo haría la derivada (fuerte) $D^\alpha f$, si f perteneciera a $C^k(\bar{\Omega})$. Debido a esto y al hecho de que f tenga una única derivada débil, justifica que denotemos la derivada débil de la misma forma que la fuerte, esto es, $w = D^\alpha f$.

Las derivadas débiles no tienen por qué existir. Sin embargo, si estas existen pueden encontrarse en espacios "mejores" que los espacios $L^1_{loc}(\Omega)$, como por ejemplo en el espacio $L^p(\Omega)$. Esta idea motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.12. Sea $1 \leq p < \infty$ y $k \in \mathbb{N}$. Denotamos por $W^{k,p}(\Omega)$ el espacio lineal de todas las funciones $f \in L^p(\Omega)$ que tienen derivada débil $D^\alpha f$ en $L^p(\Omega)$ para todo multi-índice α de longitud $|\alpha| \leq k$, dotado con la norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Análogamente, para $p = \infty$, $W^{k,\infty}(\Omega)$ está bien definido, dotándolo además de la norma

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Los espacios $W^{k,p}(\Omega)$ son espacios de Banach. Nos referimos a ellos como espacios de Sobolev. Para el caso particular en el que $p = 2$, escribiremos

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega).$$

Trabajaremos a menudo con $H^1(\Omega)$, esto es,

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \, : \, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ i = 1, \ldots, n\},$$

y la norma viene dada por

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (f^2 + |\nabla f|^2) dx \right)^{1/2},$$

donde

$$|\nabla f|^2 = (\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 + \cdots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2,$$

es decir, es la norma euclídea al cuadrado del vector ∇f. Con el producto escalar

$$(f, g)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega fg \, dx \, + \int_\Omega \nabla f^T \cdot \nabla g \, dx,$$

donde

$$\nabla f^T \cdot \nabla g = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i},$$

$H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Observación 1.2.13. Los problemas dentro de este espacio surgen cuando uno quiere asignar cierto valor a un punto de la frontera. Por ejemplo, podríamos plantearnos que significa que una función $f \in W^{k,p}(\Omega)$ se anule en $\Gamma = \partial\Omega$. Recordemos que Γ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, que tiene medida cero, y por tanto no está bien definido el valor de $f \in L^p(\Omega)$ en Γ. De hecho, funciones que difieren solo en conjuntos de medida nula, son iguales en el sentido de $L^p(\Omega)$.

Los siguientes resultados van encaminados a dar un sentido al hecho de "anularse en la frontera del dominio".

Definición 1.2.14. La adherencia de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, se denota por $W_0^{k,p}(\Omega)$. Y siguiendo una notación similar a la introducida previamente para el caso $p = 2$, denotamos por $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$.

Observación 1.2.15. Si dotamos a $W_0^{k,p}(\Omega)$ de la norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, obtenemos un espacio normado, y como es un subespacio cerrado de $W^{k,p}(\Omega)$, entonces es también un espacio de Banach. En particular, $H_0^1(\Omega)$ es un espacio completo, dotándolo de la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Los elementos de $W_0^{k,p}(\Omega)$ pueden interpretarse como funciones cuyas derivadas hasta orden $k-1$ se anulan en la frontera. Esto es consecuencia del teorema de la traza que veremos a continuación que nos dice en que sentido las funciones de $W^{k,p}(\Omega)$ tienen valores en la frontera.

Teorema 1.2.16 (Teorema de la traza)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un dominio Lipschitz, y sea $1 \leq p \leq \infty$. Existe una aplicación lineal y continua $\tau : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Gamma)$ tal que para toda $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, se tiene que $(\tau f)(x) = f(x)$ para todo $x \in \Gamma$.

Observación 1.2.17. En el caso particular en el que $p = 2$, se sigue que $\tau : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$. Para funciones continuas, tenemos que τf coincide con la restricción $f|_\Gamma$ de f a Γ.

Una definición concisa de $L^2(\Gamma)$ puede encontrarse en [Sal, pag 411-412].

Definición 1.2.18. El elemento τf se llama la traza de f a Γ, y la aplicación τ se llama operador traza.

La siguiente fórmula de integración por partes para funciones de $H^1(\Omega)$ es consecuencia del teorema de traza con $p = 2$.

Corolario 1.2.19. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un dominio Lipschitz. Y sean $u \in H^1(\Omega)$ y $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^n$. Entonces

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \mathbf{v}\, dx = -\int_\Omega u\, \nabla \cdot \mathbf{v}\, dx + \int_\Gamma (\tau u)(\tau \mathbf{v}) \cdot n_e\, d\sigma,$$

donde n_e es el vector normal exterior unitario a Γ, y $\tau \mathbf{v} = (\tau v_1, \ldots, \tau v_n)^T$.

Observación 1.2.20. En lo que sigue, por simplificar, usaremos la notación $f|_\Gamma$, en vez de τf. En esta línea, $f|_{\Gamma_0}$ define la restricción de τf a Γ_0, con $\Gamma_0 \subset \Gamma$ medible.

El operador traza $\tau : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ no es sobreyectivo. De hecho la imagen de τ está estrictamente contenido en $L^2(\Gamma)$, dicho de otra manera, hay funciones en $L^2(\Gamma)$ que no son "trazas" de funciones de $H^1(\Omega)$. Se tiene la siguiente definición.

Definición 1.2.21. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un dominio Lipschitz acotado. Denotamos por $H^{1/2}(\Gamma)$, al espacio definido como $H^{1/2}(\Gamma) = \{u_{|\Gamma} : u \in H^1(\Omega)\}$, dotándolo de la norma

$$\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \operatorname{ínf}\left\{\|u\|_{H^1(\Omega)} : u \in H^1(\Omega),\, u_{|\Gamma} = g\right\}.$$

Como el operador traza es continuo,y por tanto, acotado, existe una constante $c_\tau = c_\tau(\Omega, p)$ tal que

$$\|f|_\Gamma\|_{L^p(\Gamma)} \leq c_\Gamma \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{para todo } f \in W^{1,p}(\Omega).$$

Además para dominios Lipschitz Ω se tiene que

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \,:\, f|_\Gamma = 0\}.$$

Por otra parte, si $g \in L^2(\Gamma)$ se tiene que

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_\Gamma \|u\|_{H^1} \quad \forall u \,:\, u_{|\Gamma} = g.$$

Por lo que,

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_\Gamma \min_{u_{|\Gamma}=g} \|u\|_{H^1} = c_\Gamma \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Proposición 1.2.22 (Desigualdad de Poincaré)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un dominio acotado. Existe una constante positiva C_P que solo depende del dominio Ω y de n, de modo que

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} = C_P \|f\|_{H_0^1(\Omega)} \ \text{para cada } f \in H_0^1(\Omega).$$

Por último, tengamos en cuenta que podemos definir una norma en $H_0^1(\Omega)$ como sigue

$$\|f\|^2_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega |\nabla f|^2 dx.$$

Observación 1.2.23. En virtud de la desigualdad de Poincaré, $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ es una norma sobre $H_0^1(\Omega)$, equivalente a $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

1.3. Convergencia débil

Los contenidos que desarrollaremos a continuación son fundamentales para probar la existencia de controles óptimos. Supondremos en esta sección que los espacios que aparecen son espacios de Banach, aunque alguno de los resultados que se enuncian no necesitan que el espacio sea completo.

La convergencia débil se caracteriza por la convergencia a través de los funcionales lineales y continuos asociados al espacio de partida, en concreto

Definición 1.3.1. Sea X un espacio de Banach real. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X, converge débilmente a un $x \in X$, si

$$\lim_{n\to\infty} < f, x_n > = < f, x > \quad \text{para todo } f \in X^*.$$

Denotaremos la convergencia débil mediante $\rightharpoonup$, esto es, escribiremos $x_n \rightharpoonup x$ cuando $n \to \infty$. El límite queda unicamente determinado, y se llama el límite débil de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Observación 1.3.2. En efecto, si $x_n \rightharpoonup x$, entonces x es único. Si ocurriera que $x_n \rightharpoonup x$, y $x_n \rightharpoonup y$, entonces $f(x_n) \to f(x)$ y $f(x_n) \to f(y)$ para todo $f \in X^*$. Por tanto, $f(x) = f(y)$, luego $f(x - y) = 0$. Como lo anterior es cierto para todo $f \in X^*$ entonces $x = y$.
Si no fuera así, esto es, si $x \neq y$, entonces existiría un funcional $g \in X^*$ tal que $\|g\| = 1$, y $g(x - y) = \|x - y\|$. Como $f(x - y) = 0$ para todo $f \in X^*$, debería ocurrir que $g(x - y) = \|x - y\| = 0$, y por tanto $x = y$, lo que es absurdo.

Teorema 1.3.3 (Banach-Steinhaus)**.** Sean X e Y dos espacios de Banach, y sea $(T_i)_{i\in I}$ una familia (no necesariamente numerable), de operadores lineales y continuos de X en Y. Supongamos que

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty \ \ \forall x \in X.$$

Entonces,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

En otras palabras, existe una constante c, tal que

$$\|T_i x\| < c\,\|x\| \ \ \forall x \in X, \ \ \forall i \in I.$$

Observación 1.3.4. Deducimos del teorema de Banach-Steinhaus, que la sucesión de números reales $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, para cualquier sucesión débilmente convergente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X.

Proposición 1.3.5. Si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X converge fuertemente (es decir, converge con respecto de la norma de X), hacia un elemento $x \in X$. Entonces converge débilmente hacia el mismo x.

Utilizando el teorema de representación de Riesz, tenemos que

Proposición 1.3.6. Sea H espacio de Hilbert, y $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de H. Entonces $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a $u \in H$ si, y solo si,

$$\lim_{n\to\infty} (v, u_n) \to (v, u) \text{ para todo } v \in H$$

Además, si $u_n \rightharpoonup u$ y $v_n \to v$ (convergencia fuerte), entonces $(v_n, u_n) \to (v, u)$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo 1.3.7. Veamos que de hecho la convergencia débil no implica convergencia fuerte. Sea H un espacio de Hilbert, y consideremos una sucesión ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de H. Tomemos $v \in H$. En virtud de la desigualdad de Bessel (1.1.17), deducimos que $\sum_{n=1}^{\infty} |(u_n, v)|^2 \leq \|v\|^2$, luego la serie de la izquierda converge, y por tanto el termino general $(u_n, v) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Es decir, $u_n \rightharpoonup 0$. Sin embargo, como $\|u_n - u_m\|^2 = 2$ si $n \neq m$ la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge fuertemente.

Definición 1.3.8. Sean X e Y espacios de Banach reales. Decimos que una aplicación $T : X \longrightarrow Y$ es débilmente secuencialmente continua, si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X, verificando que $x_n \rightharpoonup x$, se tiene que la sucesión formada por sus imágenes, $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, converge débilmente en Y hacia $T(x)$.

Proposición 1.3.9. Todo operador lineal y continuo entre dos espacios de Banach, $T : X \longrightarrow Y$ es débilmente secuencialmente continuo.

Definición 1.3.10. Sea X un espacio de Banach real, y sea M un subconjunto de X.

1) Diremos que M es débilmente secuencialmente cerrado, si el límite de toda sucesión débilmente convergente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de M, pertenece a M.

2) Diremos que M es débilmente secuencialmente relativamente compacto, si toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de M, admite una subsucesión débilmente convergente.

3) Por último, diremos que M es débilmente secuencialmente compacto si es débilmente secuencialmente relativamente compacto, y débilmente secuencialmente cerrado, es decir,si se cumple que toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de M, admite una subsucesión débilmente convergente hacia un elemento x de M.

El siguiente teorema pone de manifiesto la importancia de los conceptos vistos hasta ahora, caracterizando ciertos conjuntos en términos de sucesiones débilmente convergentes.

Teorema 1.3.11. Todo subconjunto acotado M de un espacio de Banach reflexivo es débilmente secuencialmente relativamente compacto, esto es, toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de M, admite una subsucesión débilmente convergente.

A continuación daremos la definición de conjunto convexo.

Definición 1.3.12. Sea X un espacio de Banach real. Decimos que un subconjunto C de X es convexo, si para cualquier par de elementos $x, y \in C$, y para todo $\lambda \in [0,1]$, se cumple que la combinación convexa $\lambda x + (1-\lambda)y$ está en C.

Definición 1.3.13. Decimos que un funcional $F : C \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexo, si para cualquier par de elementos $x, y \in C$, y para todo $\lambda \in [0,1]$, se tiene que

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y).$$

Además, decimos que un funcional $F : C \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexo, si la desigualdad anterior se cumple estrictamente, siempre que $x \neq y$, y $\lambda \in (0,1)$.

Teorema 1.3.14. Todo subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach es débilmente secuencialmente cerrado.
Además, si el espacio es reflexivo, y el conjunto es acotado, entonces es débilmente secuencialmente compacto.

Teorema 1.3.15. Todo funcional continuo y convexo $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, en un espacio de Banach X es débilmente semicontinua inferiormente, esto es, para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X, tal que $x_n \rightharpoonup x$ cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Capítulo 2

Control óptimo de ecuaciones en derivadas parciales elípticas

En este capítulo expondremos en primer lugar los resultados que permiten obtener las soluciones débiles asociadas a problemas elípticos con condiciones frontera de tipo Dirichlet y Robin. Para tal fin, será necesario probar el teorema de Lax-Milgram, fundamental para concluir la existencia y unicidad de soluciones a los problemas anteriormente citados.

A continuación daremos los resultados más relevantes acerca de la existencia de controles óptimos asociados a problemas de control distribuido lineales cuadráticos elípticos.

Las referencias básicas utilizadas serán los libros [Bre], [Cas], [Sal], [Sch] y [Trö].

2.1. Soluciones débiles de ecuaciones elípticas

Daremos una breve introducción a la solución débil de algunas ecuaciones elípticas, sobre las que más tarde desarrollaremos los problemas de control óptimo. A lo largo de esta sección tomaremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, un dominio Lipschitz acotado con frontera Γ.

Tratemos primero con la ecuación de Poisson, para ello nos centramos en el problema de valores frontera con condiciones Dirichlet homogéneas

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y & = & f & \text{en} \quad \Omega, \\ y & = & 0 & \text{en} \quad \Gamma, \end{array} \tag{2.1}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ es un dato del problema.
La ecuación de Poisson $-\Delta y = f$ no tiene en general una solución clásica,

esto es, una solución que cumpla que $y \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ cualquiera que sea f. En su lugar, buscaremos una solución débil en el espacio $H_0^1(\Omega)$, es decir una solución de la ecuación variacional asociada a (2.1).

Supondremos por el momento que f es suficientemente suave y que $y \in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ es una solución clásica de (2.1). Buscamos la expresión variacional de (2.1). Para ello, multiplicando la ecuación de Poisson por una función test $v \in C_0^\infty(\Omega)$, e integrando sobre Ω, obtenemos que

$$-\int_\Omega v\,\Delta y dx = \int_\Omega f\,v\,dx.$$

Integrando por partes en el lado izquierdo de la igualdad, llegamos a que

$$-\int_\Omega v\,\Delta y dx = -\int_\Gamma v\,\partial_{n_e} y ds\; + \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f\,v\,dx.$$

Donde se ha utilizado la notación $\partial_{n_e} y$, para la derivada normal de y, es decir, la derivada direccional de y en el sentido de la normal exterior unitaria, n_e, a Γ. Es decir, $\partial_{n_e} y = \nabla y \cdot n_e$.

Como v es una función test, y se anula en Γ, tenemos que

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f\,v\,dx.$$

Observación 2.1.1. Notemos que esta ecuación se cumple para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Además, por un lado, recordemos que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, y por otro lado que para y fijo, toda la ecuación depende continuamente de $v \in H_0^1(\Omega)$, con lo que concluimos que la ecuación es válida para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Recíprocamente, se cumple que si $y \in H_0^1(\Omega)$, es suficientemente regular y cumple la ecuación anterior para cada $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces, y es de hecho una solución fuerte de la ecuación de Poisson $-\Delta y = f$ con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas.

Este comentario, justifica la definición siguiente.

Definición 2.1.2. Decimos que $y \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil del problema (2.1), si esta cumple la ecuación variacional asociada al problema

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Para el tratamiento de ecuaciones más generales que la ecuación de Poisson, introduciremos el concepto de forma bilineal y el teorema de Lax-Milgram.

Comenzamos escribiendo (2.2) en forma abstracta como sigue. Definamos la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$a(y,v) := \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v \, dx. \tag{2.3}$$

Y definamos el funcional lineal y continuo $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, como

$$< F, v >:= (f,v)_{L^2(\Omega)}.$$

Denotemos por $H^{-1}(\Omega)$ el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$. Entonces, (2.2) se reescribe como

$$a(y,v) =< F, v > \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.4}$$

donde F es un funcional lineal y continuo de $H_0^1(\Omega)$, esto es, $F \in H^{-1}(\Omega)$.

Definición 2.1.3. Sea H un espacio de Hilbert. Dada una forma bilineal real, esto es, una aplicación $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que es coerciva, si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \text{para todo } v \in H.$$

Y, decimos que la forma bilineal es continua, si existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq \beta \|u\|_H \|v\|_H \quad \text{para todo } u, v \in H.$$

A continuación, enunciaremos y demostraremos el teorema de Lax-Milgram, que es de vital importancia para la teoría de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones elípticas lineales. Se utiliza para probar la existencia y unicidad de soluciones débiles del problema (2.1), así como de otros problemas elípticos que trataremos más tarde.
Utilizaremos el teorema del punto fijo de Banach que enunciaremos y demostraremos a continuación.

Teorema 2.1.4 (Teorema del punto fijo de Banach)**.** Sea X un espacio métrico, no vacío, y completo, y sea $S : X \longrightarrow X$ una aplicación estrictamente contractiva, es decir, tal que

$$d(S(v_1), S(v_2)) \leq k \, d(v_1, v_2) \;\; \text{para todo } v_1, v_2 \in X, \text{ con } k < 1.$$

Entonces, S tiene un único punto fijo, $u = S(u)$.

Demostración. Comencemos probando la unicidad, razonando por reducción al absurdo. Supongamos pues, que existen $u, v \in X$, tales que $u = S(u)$, y $v = S(v)$. Entonces, $d(u, v) = d(S(u), S(v)) \leq K\, d(u, v)$, y por tanto $(1 - K)\, d(u, v) \leq 0$. Como $K < 1$, deducimos que $d(u, v) = 0$, por lo que $u = v$.
Probemos a continuación la existencia. Sea $x_0 \in X$ arbitrario, y consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de X definida como

$$x_1 = S(x_0)\,, \quad x_2 = S(x_1)\,, \cdots\,, \quad x_n = S(x_{n-1}), \cdots$$

Veamos que dicha sucesión es de Cauchy, para ello tengamos presente las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &\leq K\, d(x_1, x_0), \\ d(x_3, x_2) &\leq K\, d(x_2, x_1) \leq K^2\, d(x_1, x_0), \\ &\cdots \\ d(x_{n+1}, x_n) &\leq K^n\, d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Por tanto, en virtud de la desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq K^{n+p-1}\, d(x_1, x_0) + K^{n+p-2}\, d(x_1, x_0) + \cdots + K^n\, d(x_1, x_0) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{q=n}^{\infty} K^q \\ &= \frac{K^n}{1 - K}\, d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Deducimos que $d(x_{n+p}, x_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo p, por lo que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy, y como X es completo, la sucesión converge hacia un elemento $u \in X$. Tenemos por un lado que, $x_n \to u$ cuando $n \to \infty$, y por otro lado, se deduce de la continuidad de S que $S(x_n) \to S(u)$, por tanto como $x_{n+1} = S(x_n)$, es $u = S(u)$, es decir, u es un punto fijo de S.

□

Teorema 2.1.5 (Teorema de Lax-Milgram)**.** Sea H un espacio Hilbert real, y sea $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coerciva. Entonces, para cualquier $F \in H^*$, existe un único elemento $y \in H$ tal que

$$a(y, v) = < F, v > \quad \forall v \in H.$$

Además, existe una constante $c_a > 0$, que no depende de F, tal que

$$\|y\|_H \leq c_a \|F\|_{H^*}.$$

Finalmente, si a es simétrica, entonces $y \in H$ se caracteriza por la propiedad siguiente

$$\frac{1}{2}a(y,y) - < F, y >= \min_{v \in H}\{\frac{1}{2}a(v,v) - < F, v >\}.$$

Demostración. Dado F funcional lineal y continuo en H, por el teorema de representación de Riesz, existe $f \in H$, de modo que

$$< F, v >= (f, v)_H \quad \text{para todo } v \in H \quad \text{y} \quad \|f\|_H = \|F\|_{H^*}.$$

Por un lado, fijado $y \in H$, la aplicación que actúa como sigue $v \mapsto a(y,v)$, define un funcional lineal y continuo en H.
Por otro lado, utilizando de nuevo el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento en H, ya que $a(y,\cdot)$ es un funcional lineal y continuo, que denotamos por Ay, de modo que

$$a(y,v) = (Ay, v) \quad \text{para todo } v \in H.$$

Consideremos el operador lineal $A : H \longrightarrow H$, definido por $y \mapsto A(y) := Ay$. Entonces, para todo $y \in H$, utilizando la continuidad de a, se tiene que

$$\|Ay\| = \sup_{v \neq 0}\left\{\frac{|(Ay,v)|}{\|v\|}\right\} = \sup_{v \neq 0}\left\{\frac{|a(y,v)|}{\|v\|}\right\} \leq \sup_{v \neq 0}\left\{\frac{\beta\|y\|\|v\|}{\|v\|}\right\} = \beta\|y\|.$$

Utilizando ahora la coercividad de a, se tiene que

$$(Ay, y) = a(y,y) \geq \alpha\|y\|^2 \quad \forall y \in H.$$

Nuestro primer objetivo es encontrar $y \in H$ de modo que $a(y,v) = < F, v >$, equivalentemente, debemos buscar $y \in H$ cumpliendo que

$$(Ay, v) = (f, v) \quad \forall v \in H,$$

es decir, tal que

$$(f - Ay, v) = 0 \quad \forall v \in H. \tag{2.5}$$

Sea $p > 0$ una constante que determinaremos posteriormente, penalizando la ecuación anterior, estudiaremos equivalentemente el problema

$$\big(p(f - Ay) + y - y, v\big) = 0 \quad \forall v \in H.$$

Definamos el operador $S : H \longrightarrow H$ como sigue $S(v) := p(f - Av) + v$. El problema (2.5) es equivalente a encontrar un punto fijo de S. Veamos que el operador S cumple las condiciones del teorema del punto fijo de Banach, para un p adecuadamente elegido. Tenemos que para cada $x, z \in H$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|S(x) - S(z)\|^2 &= \|p(f - Ax) + x - p(f - Az) - z\|^2 \\
&= \|(x - z) - p(Ax - Az)\|^2 \\
&= ((x - z) - p(Ax - Az), (x - z) - p(Ax - Az)) \\
&= \|x - z\|^2 + p^2\|A(x - z)\|^2 - 2p(A(x - z), x - z) \\
&\leq \|x - z\|^2 + p^2\beta^2\|x - z\|^2 - 2p\alpha\|x - z\|^2 \\
&= \|x - z\|^2(1 - 2p\alpha + p^2\beta^2)
\end{aligned}$$

Es decir, si se toma $p > 0$, tal que $K^2 = 1 - 2p\alpha + p^2\beta^2 < 1$, es decir, $0 < p < 2\alpha/\beta^2$, se tiene que $\|S(x) - S(z)\| \leq K\|x - z\|$, con $K < 1$, y por tanto el operador S es contractivo, lo que, en virtud del teorema del punto fijo de Banach, garantiza que existe $y \in H$ tal que $y = S(y)$, y además dicho y es único.

A continuación, de la coercividad, y la continuidad de la forma bilineal $a(u, v)$, se deduce que

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) = (Au, u) \leq \beta\|Au\|\|u\|,$$

de donde

$$\|u\| \leq \frac{\beta}{\alpha}\|Au\| \ \ \forall u \in H.$$

En particular, escogiendo y solución del problema $Ay = f$, tenemos que

$$\|y\| \leq \frac{\beta}{\alpha}\|Ay\| = \frac{\beta}{\alpha}\|f\| = \frac{\beta}{\alpha}\|F\|_{H^*},$$

que es la desigualdad que buscábamos.

Por último, supongamos que a es simétrica, queremos probar que

$$\frac{1}{2}a(y, y) - < F, y > = \min_{v \in H}\{\frac{1}{2}a(v, v) - < F, v >\}.$$

Sea y solución (que existe y es única) de $a(y, v) = < F, v >$ para todo $v \in H$. Probaremos equivalentemente que

$$\frac{1}{2}a(y, y) - < F, y > \leq \frac{1}{2}a(v, v) - < F, v > \quad \text{para todo } v \in H.$$

Sea $v \in H$ cualquiera

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}a(v,v)- < F,v > &= \frac{1}{2}a(v-y+y,v-y+y)- < F,v-y+y > \\
&= \frac{1}{2}a(v-y,v-y)+\frac{1}{2}a(y,y)+a(y,v-y) \\
&- < F,v-y > - < F,y > \\
&= \frac{1}{2}a(v-y,v-y)+\frac{1}{2}a(y,y)- < F,y > \\
&\geq \frac{1}{2}a(y,y)- < F,y >,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $a(y,v-y) =< F,v-y >$.

□

Observación 2.1.6. El teorema de Lax-Milgram admite una formulación más general, conocido como teorema de Stampacchia, en el que se sustituye H por un subconjunto convexo, cerrado y no vacío $K \subset H$. Entonces, para cualquier $F \in H^*$, existe un único elemento $y \in K$, tal que

$$a(y,v-y) \geq < F,v-y > \quad \forall v \in K.$$

Para poder aplicar el teorema de Lax-Milgram al caso de condiciones frontera Dirichlet homogéneas, $y|_\Gamma = 0$, resulta necesario la desigualdad de Poincaré que enunciamos en el capítulo previo.

Teorema 2.1.7. Si Ω es un dominio Lipschitz acotado, entonces para toda función $f \in L^2(\Omega)$, el problema (2.1) tiene una única solución débil $y \in H_0^1(\Omega)$. Además, existe una constante $c > 0$ que no depende de f, tal que

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.6}$$

Demostración. Aplicaremos el teorema de Lax-Milgram tomando $H = H_0^1(\Omega)$. Para ello, tenemos que verificar que la forma bilineal dada por (2.3) es continua y coerciva. Consideramos $H_0^1(\Omega)$ con la norma de H^1. Comprobemos primero la continuidad de la forma bilineal a, para ello, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwartz (1.1.16), tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v \, dx \right| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla y|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega (|y|^2 + |\nabla y|^2) \, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega (|v|^2 + |\nabla v|^2) \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq \|y\|_{H^1(\Omega)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, verifiquemos la coercividad de a, para la que haremos uso de la desiguadad de Poincaré (1.2.22), esto es,

$$\begin{aligned} a(y,y) = \int_\Omega |\nabla y|^2\,dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2\,dx + \frac{1}{2C_p}\int_\Omega |y|^2\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\,\text{mín}\{1, C_p^{-1}\}\,\|y\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Resta ver la continuidad del funcional F, que de nuevo es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz (1.1.16). De hecho, se tiene que

$$|F(v)| = |(f,v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Por tanto, $\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$.
En virtud del teorema de Lax-Milgram, existe un único $y \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema (2.1). Además, dicho teorema nos dice que

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|F\|_{H^{-1}} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

lo que prueba (2.6).

□

Observación 2.1.8. El teorema anterior sigue siendo cierto, tomando $F \in H^{-1}$, que no esté generado por un $f \in L^2(\Omega)$. En dicha situación, el problema (2.1) tiene una única solución débil $y \in H_0^1(\Omega)$. Además, existe una constante $c > 0$ que no depende de F, tal que

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|F\|_{H^{-1}}.$$

A continuación hablaremos de problemas que tienen condiciones frontera de tipo Robin, es decir, problemas con la siguiente estructura

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y + c_0 y &=& f & \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_{n_e} y + \alpha y &=& g & \text{en} \quad \Gamma. \end{array} \tag{2.7}$$

Aquí,vienen dadas con el problema las funciones $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$, así como, los coeficientes $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, y $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$, que además son no negativas. Es decir, $c_0(x) \geq 0$ c.s y $\alpha(x) \geq 0$ c.s .
De nuevo, ∂_{n_e} denota la derivada normal exterior, es decir, la derivada direccional, en la dirección del vector normal unitario exterior n_e a Γ.

Razonemos de forma similar a como lo hicimos con el problema (2.1). Multiplicaremos la ecuación en derivadas parciales por una función arbitraria

$v \in C^1(\bar{\Omega})$. Con las mismas hipótesis que en el problema anterior, e integrando por partes, se debe cumplir que

$$-\int_\Gamma v\,\partial_{n_e} y\,ds + \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v\,dx + \int_\Omega c_0\,y\,v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx.$$

Sustituyendo las condiciones frontera $\partial_{n_e} y = g - \alpha y$ en la primera integral, se tiene, para todo $v \in C^1(\bar{\Omega})$, que

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v\,dx + \int_\Omega c_0\,y\,v\,dx + \int_\Gamma \alpha\,v\,y\,ds = \int_\Omega f\,v\,dx + \int_\Gamma g\,v\,ds. \tag{2.8}$$

Suponiendo por un lado que Ω es un dominio Lipschitz, y por tanto $C^1(\bar{\Omega})$ es un subconjunto denso en $H^1(\Omega)$, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1.9. Una función $y \in H^1(\Omega)$ de dice que es una solución débil del problema de valores en la frontera (2.7), si satisface la ecuación variacional (2.8) para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Buscamos aplicar el teorema de Lax-Milgram, para ello tomaremos como espacio de Hilbert $H := H^1(\Omega)$, y definimos la forma bilineal a y el funcional F, respectivamente como

$$\begin{aligned} F(v) &:= \int_\Omega f\,v\,dx + \int_\Gamma g\,v\,ds, \qquad (2.9)\\ a(y,v) &:= \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v\,dx + \int_\Omega c_0\,y\,v\,dx + \int_\Gamma \alpha\,v\,y\,ds. \end{aligned}$$

De nuevo, la formulación variacional dada en (2.8), esta escrita en la forma

$$a(y,v) = F(v) \text{ para todo } v \in H^1(\Omega)$$

Por último, con vistas a garantizar la coercividad de la forma bilineal a será necesaria una generalización de la desigualdad de Poincaré. La prueba puede encontrarse en [Cas, pag 215-217].

Lema 2.1.10. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio Lipschitz acotado, y sea $\Gamma_1 \subset \Gamma$ un conjunto medible tal que $|\Gamma_1| > 0$. Entonces existe una constante $c(\Gamma_1) > 0$, que solo depende de Γ_1, tal que

$$\|y\|^2_{H^1(\Omega)} \le c(\Gamma_1)\left(\int_\Omega |\nabla y|^2\,dx + \left(\int_{\Gamma_1} y\,ds\right)^2\right) \;\forall y \in H^1(\Omega). \tag{2.10}$$

Observación 2.1.11. La desigualdad de Poincaré (1.2.22) se obtiene como un caso particular tomando $\Gamma_1 = \Gamma$, e $y \in H^1_0(\Omega)$.

Para subconjuntos de Ω tenemos una desigualdad análoga.

Lema 2.1.12. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio Lipschitz acotado, y sea $E \subset \Omega$ un conjunto medible tal que $|E| > 0$. Entonces existe una constante $c(E) > 0$, que solo depende de E, tal que

$$\|y\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c(E)\left(\int_\Omega |\nabla y|^2 \, dx + \left(\int_E y \, dx \right)^2 \right) \quad \forall y \in H^1(\Omega). \tag{2.11}$$

Veamos bajo que condiciones tenemos garantizado la existencia de soluciones débiles.

Teorema 2.1.13. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio Lipschitz, y supongamos que, las funciones no negativas en casi todo punto $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, y $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ verifican que

$$\int_\Omega (c_0(x))^2 \, dx + \int_\Gamma (\alpha(x))^2 \, ds(x) > 0.$$

Entonces, para cada par $f \in L^2(\Omega)$, y $g \in L^2(\Gamma)$, el problema de valores frontera (2.7) tiene una única solución débil $y \in H^1(\Omega)$. Además, existe una constante $c > 0$, que no depende ni de f, ni de g, de modo que

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}). \tag{2.12}$$

Demostración. Aplicaremos el teorema de Lax-Milgram tomando $H = H^1(\Omega)$. Para ello, tenemos que verificar que la forma bilineal dada por (2.9) es continua y coerciva. Sea $c > 0$ una constante genérica que solo depende de los datos del problema. Veamos primero que la forma bilineal a es continua, para ello tengamos presente las siguientes acotaciones

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega c_0 \, y \, v \, dx \right| &\leq \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} \, \|y\|_{L^2(\Omega)} \, \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} \, \|y\|_{H^1(\Omega)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

y utilizando el teorema de la traza (1.2.16),

$$\begin{aligned} \left| \int_\Gamma \alpha \, y \, v \, ds \right| &\leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} \, \|y\|_{L^2(\Gamma)} \, \|v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} \, c \, \|y\|_{H^1(\Omega)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Deducimos pues, que la forma bilineal es continua, ya que

$$|a(y,v)| = \left| \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c_0 \, y \, v \, dx + \int_\Gamma \alpha \, y \, v \, ds \right| \leq \beta \, \|y\|_{H^1(\Omega)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

A continuación, probaremos la coercividad de la forma bilineal a. Por hipótesis, tenemos que $c_0 \neq 0$ en $L^\infty(\Omega)$, o que $\alpha \neq 0$ en $L^\infty(\Gamma)$.
Si $c_0 \neq 0$, entonces existe un conjunto medible $E \subset \Omega$ con $|E| > 0$, y un $\varepsilon > 0$, tal que $c_0(x) \geq \varepsilon$ para todo $x \in E$. Así que, teniendo en cuenta la desigualdad $\big(\int_E y\, dx\big)^2 \leq |E| \int_E y^2\, dx$, deducimos que

$$
\begin{aligned}
a(y,y) &= \int_\Omega \big(|\nabla y|^2 \,+\, c_0\,|y|^2\big)\, dx \,+\, \int_\Gamma \alpha\,|y|^2\, ds \\
&\geq \int_\Omega |\nabla y|^2\, dx + \varepsilon \int_E |y|^2\, dx \\
&\geq \min\{1,\varepsilon\}\bigg(\int_\Omega |\nabla y|^2\, dx + \int_E |y|^2\, dx\bigg) \\
&\geq \frac{\min\{1,\varepsilon\}}{c(E)\,\max\{1,|E|\}}\|y\|^2_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

donde se ha utilizado la desigualdad (2.11).
Si $\alpha \neq 0$, entonces existe un conjunto medible $\Gamma_1 \subset \Gamma$ con $|\Gamma_1| > 0$, y un $\varepsilon > 0$, tal que $\alpha(x) \geq \varepsilon$ para todo $x \in \Gamma_1$. Teniendo presente ahora la desigualdad $\big(\int_{\Gamma_1} y\, dx\big)^2 \leq |\Gamma_1| \int_{\Gamma_1} y^2\, dx$, deducimos que

$$
\begin{aligned}
a(y,y) &= \int_\Omega \big(|\nabla y|^2 \,+\, c_0\,|y|^2\big)\, dx \,+\, \int_\Gamma \alpha\,|y|^2\, ds \\
&\geq \int_\Omega |\nabla y|^2\, dx + \varepsilon \int_{\Gamma_1} |y|^2\, dx \\
&\geq \min\{1,\varepsilon\}\bigg(\int_\Omega |\nabla y|^2\, dx + \int_{\Gamma_1} |y|^2\, dx\bigg) \\
&\geq \frac{\min\{1,\varepsilon\}}{c(\Gamma_1)\,\max\{1,|\Gamma_1|\}}\|y\|^2_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

donde se ha utilizado la desigualdad (2.10).
Resta ver la continuidad del funcional F, definido en (2.9), que es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz (1.1.16) y del teorema de traza (1.2.16). De hecho, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|F(v)| &\leq \int_\Omega |f\,v|\, dx \,+\, \int_\Gamma |g\,v|\, ds \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \,+\, \|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \,+\, c\,\|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \bar{c}\,(\|f\|_{L^2(\Omega)} \,+\, \|g\|_{L^2(\Gamma)})\,\|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, $\|F\|_{(H^1(\Omega))^*} \leq \bar{c}\,(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)})$.
En virtud del teorema de Lax-Milgram, existe un único $y \in H^1(\Omega)$ solución del problema (2.7). Además, dicho teorema nos dice que

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}),$$

lo que prueba (2.12).

□

2.2. Existencia de controles óptimos

A lo largo de esta sección, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denotará un dominio acotado Lipschitz con frontera Γ. Además, tendremos en cuenta las siguientes hipótesis.

Hipótesis 2.2.1. En lo que sigue, supondremos que $\lambda \geq 0$, $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $\beta \in L^\infty(\Omega)$, y $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ con $\alpha(x) \geq 0$ para casi todo $x \in \Gamma$, y supondremos también que $u_a, u_b \in L^2(\Omega)$ cumplen que $u_a(x) \leq u_b(x)$ para casi todo $x \in \Omega$.

En este contexto, y_Ω representa la función objetivo que queremos aproximar, α y β son funciones coeficientes, las funciones u_a, u_b definen el conjunto de controles admisibles que actúan sobre Ω, y u denotará la función de control.

2.2.1. Control distribuido

Como primer objeto de estudio, analizaremos el problema con condiciones frontera Dirichlet homogéneas. Más concretamente planteamos el problema

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.13}$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y &=& \beta u & \text{en } \Omega, \\ y &=& 0 & \text{en } \Gamma. \end{array} \tag{2.14}$$

y

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \ \text{ para casi todo } x \in \Omega. \tag{2.15}$$

Interpretaremos este problema como una fuente de calor estacionaria óptima, siendo J el funcional coste. Un primer paso, debe ser elegir en que espacio tomamos el control u, parece razonable escoger el control u como un elemento del espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$. En esta situación, definamos el conjunto de controles admisibles como

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ para casi todo } x \in \Omega\}.$$

El conjunto U_{ad}, es un subconjunto no vacío, cerrado, y convexo de $L^2(\Omega)$.

Sabemos, en virtud del teorema (2.1.7), que para cada $u \in U_{ad} \subset L^2(\Omega)$, existe una única solución débil, $y \in H_0^1(\Omega)$ del problema (2.14), dicha solución se llama *estado asociado a* u. El espacio de estados se denotará por

$$Y := H_0^1(\Omega).$$

Además, para recalcar la dependencia de y con u, escribiremos $y = y(u)$, teniendo en cuenta que el contexto en el que se encuentre, nos servirá para evitar confusiones con respecto al valor $y(x)$ de y cuando $x \in \overline{\Omega}$.
La siguiente definición deja claro a que nos referimos cuando hablamos de un control óptimo, que de ahora en adelante se denotará por $\bar{u}$.

Definición 2.2.2. Decimos que un control $\bar{u} \in U_{ad}$ es óptimo, con estado óptimo asociado $\bar{y} = y(\bar{u})$, si

$$J(\bar{y}, \bar{u}) \leq J(y(u), u) \text{ para todo } u \in U_{ad}.$$

Como tenemos interés en dar respuesta a la existencia de controles óptimos, nos va a interesar reescribir nuestro problema de control óptimo en términos del control u.

Definición 2.2.3. Llamamos aplicación control-estado, a la aplicación $G : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$, que transforma $u \in L^2(\Omega)$ en $y(u) \in H_0^1(\Omega)$, solución de (2.14).

Observación 2.2.4. La aplicación G es un operador lineal, y en virtud de la cota (2.6), tomando $f = \beta u$, deducimos que de hecho el operador G es continuo.

Denotaremos por E_Y el operador de inclusión de $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$. El operador E_Y es lineal y continuo. Con un ligero abuso de notación, utilizaremos también E_Y para denotar la inclusión continua de $H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$.

Definición 2.2.5. $S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ denotará el operador

$$S := E_Y G.$$

Con esta notación,el problema de control $(2.13)-(2.15)$, se reduce al siguiente problema de optimización cuadrática sobre el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$:

$$\min_{u\in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2}\|Su - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.16}$$

Definición 2.2.6. El funcional f definido en (2.16), se llama funcional reducido.

Lema 2.2.7. Sean U un subconjunto convexo no vacío de un espacio de Hilbert H, e $\big(Y, \|\cdot\|_Y\big)$ un espacio de Hilbert real. Consideremos $S : U \longrightarrow Y$ un operador lineal, $y_d \in Y$, y $\lambda \geq 0$. Entonces, el funcional reducido

$$f(u) := \frac{1}{2}\|Su - y_d\|^2_Y + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_U$$

es convexo. Además, f es estrictamente convexa, si $\lambda > 0$, o S es inyectiva.

Demostración. Sean $u, v \in U$, y sea $\alpha \in [0{,}1]$. Veamos que $f(\alpha u+(1-\alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v)$, equivalentemente, veamos que

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) - \alpha f(u) - (1-\alpha)f(v) \leq 0.$$

Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} f(\alpha u + (1-\alpha)v) = \frac{1}{2}\Big[&\alpha^2(S(u), S(u)) + 2\alpha(1-\alpha)(S(u), S(v)) - 2\alpha(S(u), y_d) \\ &- 2(1-\alpha)(S(v), y_d) + (1-\alpha)^2(S(v), S(v)) + (y_d, y_d)\Big] \\ &+ \frac{\lambda}{2}\Big[\alpha^2(u,u) + 2\alpha(1-\alpha)(u,v) + (1-\alpha)^2(v,v)\Big]. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} -\alpha f(u) - (1-\alpha)f(v) = \frac{1}{2}\Big[&-\alpha(S(u), S(u)) + 2\alpha(S(u), y_d) - \alpha(y_d, y_d) \\ &- (1-\alpha)(S(v), S(v)) + 2(1-\alpha)(S(v), y_d) \\ &- (1-\alpha)(y_d, y_d)\Big] \\ &+ \frac{\lambda}{2}\Big[-\alpha(u,u) - (1-\alpha)(v,v)\Big]. \end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones y simplificando los términos iguales llegamos a

$$\begin{aligned} f(\alpha u+(1-\alpha)v)-\alpha f(u)-(1-\alpha)f(v) = \\ &-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\|S(u)-S(v)\|^2 \\ &-\frac{\lambda}{2}\alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Además, si $\alpha \in (0,1)$ y $u \neq v$ (por tanto, $\|u-v\| \neq 0$), la expresión anterior es estrictamente negativa siempre que $\lambda > 0$, con lo que el funcional f sería estrictamente convexo.
Si suponemos que $\lambda = 0$, y tomamos $\alpha \in (0,1)$ y $u \neq v$ entonces de la expresión anterior deducimos que

$$f(\alpha u+(1-\alpha)v)-\alpha f(u)-(1-\alpha)f(v) = -\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\|S(u)-S(v)\|^2,$$

que será estrictamente negativa, siempre que $\|S(u)-S(v)\| \neq 0$, es decir, $S(u) \neq S(v)$, condición que tenemos siempre que S sea inyectiva. Por tanto, cuando $\lambda = 0$ y S es inyectiva, también ocurre que el funcional f es estrictamente convexo.

□

A continuación probaremos un resultado de existencia para el problema (2.16).

Teorema 2.2.8. Sean $\big(U, \|\cdot\|_U\big)$, y $\big(H, \|\cdot\|_H\big)$ espacios de Hilbert reales. Tomemos un subconjunto $U_{ad} \subset U$, no vacío, cerrado, acotado y convexo. Fijemos $y_d \in H$, y $\lambda \geq 0$. Además, sea $S : U \longrightarrow H$ un operador lineal y continuo. Entonces, el problema cuadrático de optimización

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2}\|Su - y_d\|_H^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_U^2. \tag{2.17}$$

admite una solución óptima $\bar{u}$. Si $\lambda > 0$, o S es inyectiva, entonces la solución es única.

Demostración. Notemos en primer lugar que el funcional f es positivo, es decir, $f(u) \geq 0$ para todo $u \in U_{ad}$. Por tanto, existe el ínfimo

$$j := \inf_{u \in U_{ad}} f(u).$$

Consideremos una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de U_{ad}, tal que $\|f(u_n) - j\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como H es reflexivo, en virtud del teorema (1.3.14), el conjunto U_{ad} es débilmente secuencialmente compacto. Por tanto, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge débilmente a $\bar{u} \in U_{ad}$, esto es,

$$u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u} \text{ cuando } k \to \infty.$$

Como S es continuo, f también lo es. Además, por el lema previo, sabemos que f es convexa. Por tanto, en virtud del teorema (1.3.15), deducimos que f es débilmente semicontinua inferiormente. Por tanto,

$$j = \liminf_{k\to\infty} f(u_{n_k}) \geq f(\bar{u}).$$

Como $\bar{u} \in U_{ad}$, $f(\bar{u}) = j$, y $\bar{u}$ es un control óptimo. La unicidad se deduce del hecho de que f es estrictamente convexa si $\lambda > 0$, o si $\lambda = 0$ y S es inyectiva. □

Como consecuencia del teorema que acabamos de probar, deducimos la existencia y unicidad del problema de control elíptico $(2.13) - (2.15)$.

Teorema 2.2.9. Supongamos que se cumplen las condiciones de (2.2.1). Entonces el problema $(2.13) - (2.15)$ admite un control óptimo $\bar{u}$. Si además, $\lambda > 0$, o $\beta \neq 0$ en casi todo punto de Ω, entonces el control óptimo es de hecho único.

Demostración. Apliquemos el teorema previo, tomando $U = H = L^2(\Omega)$, $y_d = y_\Omega$, y $S = E_Y G$. Notemos que el conjunto $U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ para casi todo } x \in \Omega\}$, es acotado, cerrado, y convexo. Entonces, por el teorema anterior deducimos que el correspondiente problema (2.17) admite al menos una solución $\bar{u}$.
Si suponemos que $\lambda > 0$, el control óptimo será único. Por otra parte, si $\beta \neq 0$ en casi todo punto de Ω, S es inyectiva, hecho que se deduce de la unicidad de soluciones del problema elíptico, y por tanto el control óptimo también será único.

□

Observación 2.2.10. En la prueba del teorema (2.2.8), hemos obtenido el control óptimo $\bar{u}$ como el límite de una sucesión débilmente convergente $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Como el operador control-estado, $G : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ es lineal y continuo, entonces es débilmente secuencialmente continuo. Esto implica que la sucesión de estados $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge débilmente en $H_0^1(\Omega)$ a $\bar{y} = G\bar{u}$.

A continuación trataremos una situación particular, en la que eliminamos una o varias de las restricciones de U_{ad}, esto es, pongamos que $u_a = -\infty$ y/o $u_b = +\infty$. En esta situación U_{ad} no es acotado, y la prueba del teorema

anteriro no puede utilizarse.
Sin embargo, probaremos que también es posible garantizar la existencia y unicidad del control óptimo, en el caso en el que $\lambda > 0$ y $S : U \longrightarrow H$ sea lineal y continuo.

Teorema 2.2.11. Supongamos que U_{ad} es no vacío, cerrado y convexo. Si $\lambda > 0$, el problema (2.17) admite una única solución óptima.

Demostración. Por hipótesis, como U_{ad} es no vacío, existirá $u_0 \in U_{ad}$. Observemos que si tomamos $u \in U$, de modo que $\|u\|_U^2 > 2\lambda^{-1} f(u_0)$, entonces

$$f(u) := \frac{1}{2}\|Su - y_d\|_H^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_U^2 \geq \frac{\lambda}{2}\|u\|_U^2 > f(u_0).$$

Así que podemos restringir la búsqueda del óptimo al conjunto $U_{ad} \cap \{u \in U : \|u\|_U^2 \leq 2\lambda^{-1} f(u_0)\}$, que es cerrado, convexo y acotado. Para concluir, basta razonar como en el teorema (2.2.8).

□

Como consecuencia inmediata obtenemos un teorema análogo a (2.2.9).

Teorema 2.2.12. Supongamos que se cumplen las condiciones de (2.2.1). Además, supongamos que $u_a = -\infty$ y/o $u_b = +\infty$. Entonces, si $\lambda > 0$, el problema $(2.13) - (2.15)$ admite un control óptimo $\bar{u}$, que de hecho es único.

2.2.2. Condiciones de frontera de tipo Robin

A continuación trataremos una variante del problema anterior, concretamente, buscamos una fuente de calor óptima con condiciones frontera de tipo Robin, en vez de ser homogéneas de tipo Dirichlet, como en la situación previa. En este caso la ecuación de estado viene dada por

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y & = & \beta u & \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_{n_e} y & = & \alpha(y_a - y) & \text{en} \quad \Gamma, \end{array} \tag{2.18}$$

donde, se supone que la temperatura externa y_a es una función de $L^2(\Gamma)$, y $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$, con $\int_\Gamma (\alpha(x))^2 \, ds > 0$.

Podemos tratar este problema de forma similar a como lo hicimos con el de condiciones frontera Dirichlet homogéneas. Sin embargo, por un lado, ahora nuestro espacio de estados será $Y := H^1(\Omega)$. Por otro lado, podemos asegurar en virtud del teorema (2.1.13), que para cada par de funciones $u \in L^2(\Omega)$, e $y_a \in L^2(\Gamma)$, existe una única solución débil $y \in H^1(\Omega)$ asociada al problema (2.18).

Por el principio de superposición, podemos descomponer y como sigue

$$y = y(u) + y_0,$$

donde $y(u) \in H^1(\Omega)$ es la solución al problema de valores en la frontera asociado a la ecuación de Poisson, con condiciones frontera homogéneas, es decir, el problema asociado al par $(u, y_a = 0)$,

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y & = & \beta u & \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_{n_e} y + \alpha y & = & 0 & \text{en} \quad \Gamma. \end{array}$$

Mientras que $y_0 \in H^1(\Omega)$ es la solución al problema de valores en la frontera asociado a la ecuación de Laplace, con condiciones frontera no homogéneas, es decir, asociado al par $(u = 0, y_a)$,

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y & = & 0 & \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_{n_e} y & = & \alpha(y_a - y) & \text{en} \quad \Gamma. \end{array}$$

El operador control-estado $G : L^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ que actúa como $u \mapsto y(u)$, es lineal y continuo en virtud de la desigualdad dada en (2.12), tomando $f = \beta u$, y $g = y_a = 0$. De nuevo, interpretaremos G como un operador con rango en $L^2(\Omega)$. Para ello, tomamos $S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, esto es, $S = E_Y G$, y escribimos

$$y = Su + y_0.$$

Si y_Ω es la temperatura objetivo deseada, el problema toma pues, la forma

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|Su - (y_\Omega - y_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En virtud de los teoremas (2.2.8) y (2.2.11), observamos que los resultados de existencia obtenidos en los teoremas (2.2.9) y (2.2.12), respectivamente, siguen siendo ciertos bajo las hipótesis anteriores. En particular, la unicidad del control óptimo está garantizado siempre que $\lambda > 0$.
Si $\lambda = 0$, tendremos asegurada la existencia, siempre que el conjunto de funciones admisibles U_{ad} sea acotado; y en este caso tendremos unicidad si $\beta \neq 0$ en casi todo Ω.

Capítulo 3

Condiciones de primer orden.

Comenzamos el capítulo dando unas nociones acerca de diferenciabilidad en espacios de Banach. Introduciremos el concepto de operador adjunto y además expondremos varios ejemplos que serán de gran utilidad.
Mientras que en el capítulo previo, probamos la existencia y unicidad de los controles optimales asociados a ciertos problemas elípticos de control óptimo. A lo largo de este capítulo trataremos propiamente las condiciones de optimalidad de primer orden. Para ello, calcularemos la primera derivada del funcional coste, lo que nos permitirá deducir ciertos requisitos que deben cumplir las soluciones óptimas.
Estas condiciones necesarias permiten llegar a conclusiones acerca de la forma que tienen los controles óptimos, y a la comprobación numérica de que dichos controles son realmente óptimos. Para realizar dicho estudio nos apoyaremos en los problemas tratados en el Capítulo 2.

La referencia básica para este capítulo es el libro [Trö]. Utilizaremos también otras referencias como [Car], [Gal] y [Phi].

3.1. Diferenciabilidad en espacios de Banach

En esta sección recordamos la noción de derivada de Gâteaux, y derivada de Fréchet, esto es, generalizaciones del concepto de derivada a espacios normados. Estos conceptos son necesarios para derivar las condiciones óptimas asociadas a problemas con restricciones dadas por ecuaciones en derivadas parciales. A lo largo de este capítulo, $(U, \|\cdot\|_U)$, y $(V, \|\cdot\|_V)$ denotarán espacios de Banach reales. Por otra parte, $\mathcal{U} \subset U$ denotará un subconjunto abierto, no vacío, y $F : \mathcal{U} \subset U \longrightarrow V$ será una aplicación dada.

Definición 3.1.1. Dados $u \in \mathcal{U}$ y $h \in U$. Si el límite

$$\delta F(u,h) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(F(u+th) - F(u))$$

existe en V, entonces se llama la derivada direccional de F en u, en la dirección de h. Si este límite existe para todo $h \in U$, entonces se denomina primera variación de F en u, a la aplicación $h \mapsto \delta F(u,h)$.

Observación 3.1.2. El hecho de que $\mathcal{U}$ sea abierto, garantiza que para $t > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que $u + th \in \mathcal{U}$, y por tanto $F(u+th)$ está bien definido.

Definición 3.1.3. Supongamos que la primera variación de F, $\delta F(u,h)$ en $u \in \mathcal{U}$ existe. Además, supongamos que existe un operador lineal y continuo $A : U \longrightarrow V$ tal que

$$\delta F(u,h) = A(h) \qquad \forall h \in U.$$

Entonces F se dice que es Gâteaux diferenciable en u, y diremos que A es la derivada de Gâteaux de F en u. En lo sucesivo, lo denotaremos por $A = F'(u)$.

Observación 3.1.4. Por un lado, notemos que de la propia definición, podemos calcular la derivada de Gâteaux, como una derivada direccional.
Por otro lado, si tenemos que $V = \mathbb{R}$, esto es, si F es un funcional, $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ que es Gâteaux diferenciable en un punto $u \in \mathcal{U}$, entonces $F'(u)$ es un elemento del espacio dual U^*.

Proposición 3.1.5. Sea H un espacio de Hilbert real, con producto interno $(\cdot,\cdot)$. Entonces, la derivada de Gâteaux del funcional $F : H = \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, definido como

$$F(u) = \|u\|^2,$$

es $2(u,h)$.

Demostración. Queremos determinar la derivada de Gâteaux del funcional F. Tenemos pues que

$$\begin{aligned}
\delta F(u,h) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(F(u+th) - F(u)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\|u+th\|^2 - \|u\|^2) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(u,u) + 2(u,th) + (th,th) - (u,u)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{2t(u,h) + t^2\|h\|^2}{t} = \lim_{t \to 0} 2(u,h) + t\|h\|^2 = 2(u,h),
\end{aligned}$$

y por tanto

$$F'(u)h = 2(u, h).$$

$\square$

Observación 3.1.6. Si identificamos, H con su espacio dual H^*, entonces podemos representar la derivada de Gâteaux de F por

$$\nabla F(u) = 2u.$$

La expresión que resulta de identificar $F'(u)$ con un elemento de H, se llama *gradiente* de F.

Como continuación de la observación, un caso particular, sobre el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$. Queremos calcular la derivada de Gâteaux del funcional

$$F(u) = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2\, dx.$$

En virtud de la proposición anterior, la derivada de Gâteaux viene dada por

$$F'(u)h = \int_\Omega 2u(x)h(x)\, dx \quad \forall h \in L^2(\Omega).$$

Si identificamos $L^2(\Omega)^*$ con $L^2(\Omega)$, a través del teorema de representación de Riesz, entonces el gradiente de F se escribe como $(\nabla F(u))(x) = 2u(x)$, para casi todo $x \in \Omega$.

Veremos que de hecho el funcional dado por la norma al cuadrado, tiene mejores propiedades de diferenciabilidad, puesto que no solo es Gâteaux diferenciable, sino que es Fréchet diferenciable.
Notemos que la derivada de Gâteaux ofrece una generalización del concepto de derivabilidad, extendiendo el concepto de derivada direccional, al caso de los operadores entre espacios de Banach.
En esta línea, el concepto de derivada de Fréchet, ofrecerá una generalización de la noción de diferenciabilidad a operadores entre espacios de Banach.

Definición 3.1.7. Una aplicación $F : \mathcal{U} \subset U \longrightarrow V$ se dice que es Fréchet diferenciable en $u \in \mathcal{U}$, si existe un operador $A \in \mathcal{L}(U, V)$, y una aplicación $r(u, \cdot) : U \longrightarrow V$, con la siguiente propiedad: para todo $h \in U$ cumpliendo que $u + h \in \mathcal{U}$, $\|r(u, h)\| = o(\|h\|)$, y se tiene que

$$F(u + h) = F(u) + Ah + r(u, h).$$

El operador A se llama derivada de Fréchet de F en u, y se denota por $A = F'(u)$.

Observación 3.1.8. Por un lado, como $\mathcal{U}$ es abierto, tenemos $u+h$ pertenece a $\mathcal{U}$, para todo $h \in U$ de norma suficientemente pequeña. Por tanto, la relación que debe satisfacer el residuo $r(u,h)$ será significativo para todo $h \in U$ que esté en una bola centrada en el origen de radio suficientemente pequeño.
Por otro lado, la condición $\|r(u,h)\| = o(\|h\|)$, es equivalente a decir que la aplicación r verifica la siguiente condición

$$\frac{\|r(u,h)\|_V}{\|h\|_U} \to 0 \quad \text{cuando } \|h\|_U \to 0.$$

Si una aplicación es diferenciable en el sentido de Fréchet en un punto, entonces, existen las derivadas direccionales en ese punto en cualquier dirección, y en particular, dicha aplicación es derivable en el punto. Concretamente, tendremos que

Teorema 3.1.9. Si una aplicación $F : \mathcal{U} \subset U \longrightarrow V$ es Fréchet diferenciable, entonces es Gâteaux diferenciable, y ambas derivadas coinciden.

Demostración. Supongamos que F es diferenciable en el sentido de Fréchet en un punto $u \in \mathcal{U}$. Entonces, existirá un operador $A : U \longrightarrow V$ tal que para $h \in U$ cumpliendo que $u+h \in \mathcal{U}$, se tiene que

$$\frac{\|F(u+h) - F(u) - Ah\|_V}{\|h\|_U} \to 0 \quad \text{cuando } \|h\|_U \to 0. \tag{3.1}$$

Para ese h, haciendo $t \downarrow 0$, se tiene que $\|th\|_U \to 0$, de modo que (3.1) implica que

$$0 = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\|F(u+h) - F(u) - A(th)\|_V}{\|th\|_U} = \lim_{t\downarrow 0} \left\| \frac{F(u+h) - F(u)}{t} - A(h) \right\|_V .$$

Por tanto, si identificamos Ah con $\delta F(u,h)$ tenemos la igualdad entre ambas derivadas. □

Observación 3.1.10. A lo largo de la memoria utilizaremos operadores F que son diferenciables en el sentido de Gâteaux, y en el de Fréchet. Esto hace que utilicemos una única notación para denotar a la derivada F'.

Proposición 3.1.11. Sea H un espacio de Hilbert real, con producto interno $(\cdot,\cdot)$. Entonces, el funcional $F : H = \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, definido como

$$F(u) = \|u\|^2,$$

es Fréchet diferenciable, y su derivada es $2(u,h)$.

Proposición 3.1.12. Todo operador L lineal y continuo es Fréchet diferenciable.

Demostración. En efecto, puesto que para todo $u \in \mathcal{U}$ y $h \in U$, la expresión $L(u+h) = L(u)+L(h)+r(u,h)$ se cumple cuando $r(u,h) = 0$. En consecuencia, podemos decir que la derivada de un operador lineal y continuo, es el propio operador. □

Teorema 3.1.13. Sean U, V y Z espacios de Banach, y sean $\mathcal{U} \subset U$ y $\mathcal{V} \subset V$ conjuntos abiertos. Supongamos que $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ y $G : \mathcal{V} \longrightarrow Z$ son Fréchet diferenciables en $u \in \mathcal{U}$ y en $F(u) \in \mathcal{V}$, respectivamente. Entonces la composición $E = G \circ F : \mathcal{U} \longrightarrow Z$, definido por $E(u) = G(F(u))$, es Fréchet diferenciable en u y

$$E'(u) = G'(F(u))F'(u).$$

Demostración. Sean $h \in U$, y $\bar{h} \in V$, de modo que $u+h \in \mathcal{U}$, y $F(u)+\bar{h} \in \mathcal{V}$. Por hipótesis, tenemos que

$$F(u+h) = F(u) + F'(u)h + r(u,h), \tag{3.2}$$

donde $\|r(u,h)\| = o(\|h\|)$. Del mismo modo, tenemos que

$$G(F(u)+\bar{h}) = G(F(u)) + G'(F(u))\bar{h} + s(F(u),\bar{h}), \tag{3.3}$$

donde $\|s(F(u),\bar{h})\| = o(\|\bar{h}\|)$. Para h suficientemente pequeño, tenemos que $F(u) + F'(u)h + r(u,h) \in \mathcal{V}$, además de que $u + h \in \mathcal{U}$. Para la aplicación E, se tiene que $E(u+h) - E(u) = G(F(u+h)) - G(F(u))$. Utilizando la ecuación (3.3), deducimos que

$$E(u+h) - E(u) = G'(F(u))(F(u+h) - F(u)) + s(F(u), F(u+h) - F(u)).$$

Sustituyendo en la ecuación, $F(u+h) - F(u)$ por su correspondiente valor obtenido de (3.2), y teniendo en cuenta que la aplicación $G'(F(u)) : Y \longrightarrow Z$ es lineal, se tiene que

$$\begin{aligned} E(u+h) - E(u) &= (G'(F(u))F'(u))h \\ &\qquad + G'(F(u))r(u,h) + s(F(u), F(u+h) - F(u)). \end{aligned}$$

Para concluir que E es diferenciable en u, y tiene por derivada a $E'(u) = G'(F(u))F'(u)$, es suficiente probar que

$$\|G'(F(u))r(u,h)\| = o(\|h\|), \tag{3.4}$$

$$\|s(F(u), F(u+h) - F(u))\| = o(\|h\|). \tag{3.5}$$

Por un lado, debido a la continuidad de la aplicación $G'(F(u)) : V \longrightarrow Z$, se tiene que

$$\|G'(F(u))r(u,h)\|_Z \leq \|G'(F(u))\| \, \|r(u,h)\|_V.$$

Como $\|r(u,h)\| = o(\|h\|)$, se deduce (3.4).
Por otro lado, debido la continuidad de la aplicación $F'(u) : U \longrightarrow V$, y a que $\|r(u,h)\| = o(\|h\|)$, deducimos que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|F(u+h) - F(u)\| = \|F'(u)h + r(u,h)\| \leq M\|h\|.$$

Teniendo en cuenta que $\|s(F(u), F(u+h) - F(u))\| = o(\|F(u+h) - F(u)\|)$, para probar (3.5) basta ver que

$$\frac{\|s(F(u), F(u+h) - F(u))\|}{\|h\|} \leq \frac{M\|s(F(u), F(u+h) - F(u))\|}{\|F(u+h) - F(u)\|} \to 0.$$

Lo que concluye la prueba. □

Ejemplo 3.1.14. Tomemos dos espacios de Hilbert $\big(U, (\cdot,\cdot)_U\big)$ y $\big(H, (\cdot,\cdot)_H\big)$, y sea $z \in H$ fijo. Dado un operador $S \in \mathcal{L}(U,H)$, consideremos el funcional $E : U \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$E(u) = \|Su - z\|_H^2.$$

Podemos expresar el funcional E como composición de dos aplicaciones, concretamente $E(u) = G(F(u))$, donde $G(v) = \|v\|_H^2$ y $F(u) = Su - z$. Teniendo presente las dos proposiciones previas, afirmamos que

$$G'(v)h = (2v, h)_H \quad \text{y} \quad F'(u)h = Sh.$$

Aplicando la regla de la cadena, esto es, el teorema anterior, deducimos que

$$E'(u)h = G'(F(u))F'(u)h = (2F(u), F'(u)h)_H = 2(Su - z, Sh)_H.$$

3.2. Operador adjunto

Introducimos en esta sección la noción de operador adjunto, que será de vital importancia a la hora de tratar las condiciones necesarias de primer orden.

Si tomamos una matriz A de dimensiones $m \times n$, y denotamos por A^T su traspuesta, entonces es bien conocido que

$$(Au, v)_{\mathbb{R}^m} = (u, A^T v)_{\mathbb{R}^n} \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}^n \text{ y } v \in \mathbb{R}^m.$$

De forma similar, podemos generalizar esta situación a espacios de Banach. Concretamente, sean U y V dos espacios de Banach reales, T un operador lineal y continuo de U en V, y $f \in V^*$ un funcional dado.
Podemos considerar el funcional $g = f \circ T : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$g(u) = f(Tu).$$

La aplicación g es lineal. Veamos que también es continua, para ello fijémonos en que

$$|g(u)| = |f(Tu)| \leq \|f\|_{V^*} \|Tu\|_V \leq \|f\|_{V^*} \|T\|_{\mathcal{L}(U,V)} \|u\|_U.$$

Así que, la aplicación g es un funcional lineal y continuo de U, o sea, $g \in U^*$. Además se cumple la siguiente cota

$$\|g\|_{U^*} \leq \|f\|_{V^*} \|T\|_{\mathcal{L}(U,V)}.$$

Definición 3.2.1. En las condiciones anteriores, llamamos operador adjunto de T al operador $T^* : V^* \longrightarrow U^*$, definido como sigue $f \mapsto g = f \circ T$.

Observación 3.2.2. Se sigue del comentario previo que

$$\begin{aligned} &(T^* f)(u) = (f \circ T)(u) = f(Tu) && \forall u \in U, \\ &\|T^* f\|_{V^*} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(U,V)} \|f\|_{V^*} && \forall f \in V^*. \end{aligned}$$

En virtud de esta última desigualdad, deducimos que T^* es un operador continuo, por tanto, $T^* \in \mathcal{L}(V^*, U^*)$. De hecho, se tiene que $\|T^*\|_{\mathcal{L}(V^*,U^*)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(U,V)}$

De ahora en adelante, adoptaremos la siguiente notación por comodidad.

Observación 3.2.3. Si un funcional $f \in V^*$ se evalua en un punto $v \in V$, entonces, escribimos

$$f(v) =< f, v >_{V^*,V} .$$

Esta notación permite que la definición del operador adjunto T^* sea más transparente, puesto que

$$f(Tu) =< f, Tu >_{V^*,V} =< T^* f, u >_{U^*,U} =:< u, T^* f >_{U,U^*} \quad \forall f \in V^*, \forall u \in U.$$

Nos centraremos a lo largo del trabajo en el caso de espacios de Hilbert. Presentamos pues, la definición de operador adjunto en dicha clase de espacios.

Definición 3.2.4. Sean $\big(U, (\cdot,\cdot)_U\big)$ y $\big(V, (\cdot,\cdot)_V\big)$ espacios de Hilbert reales, y $T \in \mathcal{L}(U, V)$ un operador dado. Decimos que $T^* : V \longrightarrow U$ es el operador adjunto de T si

$$(v, Tu)_V = (T^* v, u)_U \qquad \forall u \in U, \quad \forall v \in V.$$

Observación 3.2.5. Las dos definiciones de operador adjunto "coinciden" para espacios de Hilbert, en el sentido que explicaremos a continuación. Esta coincidencia se deduce del teorema de representación de Riesz. En efecto, consideremos $\big(U, (\cdot,\cdot)_U\big)$ y $\big(V, (\cdot,\cdot)_V\big)$ espacios de Hilbert reales. Sean $I_U : U \longrightarrow U^*$ e $I_V : V \longrightarrow V^*$ los isomorfismos obtenidos al aplicar el teorema de representación de Riesz (1.1.32). Para evitar confusión denotemos por T^* al operador adjunto obtenido por la definición (3.2.1), y por $T^{*,H}$ al operador adjunto obtenido por la definición (3.2.4). Consideremos un operador $T : U \longrightarrow V$ lineal y continuo.
Consideremos la aplicación $S := I_U^{-1} \circ T^* \circ I_V : V \longrightarrow U$. Fijemos $v \in V$, y denotemos por $u_0 := Sv$. Entonces, en virtud del teorema de representación de Riesz, para cada $u \in U$, se tiene que

$$< I_U(u_0), u >= (u, u_0)_U. \tag{3.6}$$

Por otro lado, ocurre que

$$I_U(u_0) = I_U(Sv) = (T^* \circ I_V)(v) = T^*(I_V(v)) = (I_V(v)) \circ T,$$

por tanto, en virtud del teorema de representación de Riesz, para cada $u \in U$, se tiene que

$$< I_U(u_0), u >=< I_V(v), Tu >= (v, Tu)_V. \tag{3.7}$$

Combinando las expresiones (3.6), y (3.7), llegamos a la expresión vista en (3.2.4), esto es

$$(v, Tu)_V =< I_U(u_0), u >= (u, u_0)_U = (u_0, u)_U = (Sv, u)_U.$$

Escribiremos pues, $T^{*,H} = S$.
Recíprocamente, sea $S := I_U \circ T^{*,H} \circ I_V^{-1} : V^* \longrightarrow U^*$, donde $T^{*,H}$ es un operador que cumple (3.2.4). Veamos que S así definido verifica la definición (3.2.1), es decir que para cada $f \in V^*$ se tiene que $S(f) = f \circ T$. Fijemos ahora $f \in V^*$, y apliquemos el teorema de representación de Riesz, entonces para cada $u \in U$ se tiene que

$$< S(f), u >= (I_U^{-1}(S(f)), u)_U = (T^{*,H}(I_V^{-1}(f)), u)_U. \tag{3.8}$$

Por hipótesis, se tiene que

$$(T^{*,H}y, x)_U = (y, Tx)_V \quad \text{para cada } x \in U, y \in V.$$

Aplicando esto a la igualdad (3.8), se tiene que

$$< S(f), u >= (I_U^{-1}(S(f)), u)_U = (T^{*,H}(I_V^{-1}(f)), u)_U = (I_V^{-1}(f), Tu)_V. \tag{3.9}$$

A continuación, aplicando el teorema de representación de Riesz, obtenemos

$$(I_V^{-1}(f), Tu)_V =< f, Tu > .$$

Sustituyendo la igualdad anterior en (3.9), concluimos lo deseado

$$< S(f), u >= (T^{*,H}(I_V^{-1}(f)), u)_U = (I_V^{-1}(f), Tu)_V =< f, Tu >= (f \circ T)(u).$$

Ejemplo 3.2.6. Consideremos en el espacio de Hilbert $L^2(0,1)$, el operador lineal y continuo, dado por

$$(Tu)(t) = \int_0^t e^{(t-s)} u(s)\, ds.$$

Su operador adjunto T^* se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
(v, Tu)_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 v(t) \left(\int_0^t e^{(t-s)}\, u(s)\, ds \right) dt \\
&= \int_0^1 \int_0^t v(t)\, e^{(t-s)}\, u(s)\, ds\, dt \\
&= \int_0^1 \int_s^1 v(t)\, e^{(t-s)}\, u(s)\, dt\, ds \qquad \text{(Teorema de Fubini)} \\
&= \int_0^1 u(s) \left(\int_s^1 e^{(t-s)}\, v(t)\, dt \right) ds \\
&= \int_0^1 \left(\int_t^1 e^{(s-t)}\, v(s)\, ds \right) u(t)\, dt \qquad \text{(Cambio de variable)} \\
&= (T^* v, u)_{L^2(0,1)},
\end{aligned}$$

donde el operador adjunto tiene la representación

$$(T^* v)(t) = \int_t^1 v(s)\, e^{(s-t)}\, ds.$$

3.3. Optimización cuadrática en espacios de Hilbert

Recordemos que en el capítulo previo, para probar la existencia de controles óptimos, transformamos el problema de control óptimo en un problema de minimización de un funcional cuadrático (funcional reducido) en términos de u, es decir,

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_H^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2. \tag{3.10}$$

El siguiente resultado es la clave para derivar las condiciones óptimas de primer orden con restricciones en el control. Aplicaremos el resultado al problema de minimización (3.10).

Teorema 3.3.1. Sea C un subconjunto no vacío y convexo de un espacio de Banach real U. Consideremos una aplicación a valores reales f, que sea Gâteaux diferenciable en un abierto de U que contiene a C. Si $\bar{u} \in C$ es tal que

$$f(\bar{u}) = \min_{u \in C} f(u),$$

entonces es solución de la desigualdad variacional

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0 \qquad \forall u \in C. \tag{3.11}$$

Recíprocamente, si $\bar{u} \in C$ es solución de la desigualdad variacional (3.11), y f es convexa, entonces $\bar{u} \in \text{argmin}_{u \in C} f(u)$.

Demostración. Probemos primero que si $\bar{u}$ es un minimizante, entonces es solución de (3.11). Para ello, sea $u \in C$. Como C es convexo, la combinación lineal convexa $\bar{u} + t(u - \bar{u}) \in C$ para todo $t \in (0, 1]$. Por otro lado, como $\bar{u}$ es óptimo, se tiene que $f(\bar{u} + t(u - \bar{u})) \geq f(\bar{u})$, lo que implica que,

$$\frac{1}{t}(f(\bar{u} + t(u - \bar{u})) - f(\bar{u})) \geq 0 \;\; \forall t \in (0, 1].$$

Como f es Gâteaux diferenciable, tomando el límite $t \to 0$, llegamos a que $f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0$ probando (3.11). Recíprocamente, supongamos que $\bar{u}$ es solución de la desigualdad variacional (3.11). Como por hipótesis, f es convexa, se sigue que

$$f(u) - f(\bar{u}) \geq f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \;\; \forall u \in C.$$

En virtud de la desigualdad (3.11), deducimos que el lado derecho es positivo. Concluimos pues, que $f(u) \geq f(\bar{u})$, como queríamos probar. □

El teorema anterior proporciona una condición necesaria óptima de primer orden, y en el caso de que la aplicación f sea convexa, dicha condición de hecho es suficiente.
Buscamos pues aplicar el teorema anterior al problema de optimización cuadrático (3.10).

Teorema 3.3.2. Sean $\big(U, (\cdot, \cdot)_U\big)$, $\big(V, (\cdot, \cdot)_V\big)$ espacios de Hilbert reales, $U_{ad} \subset U$ un subconjunto no vacío y convexo, un elemento $y_d \in H$, y una constante $\lambda > 0$. Además, sea $S : U \longrightarrow H$ un operador lineal y continuo. Entonces, $\bar{u} \in U_{ad}$ minimiza (3.10) si y solo si $\bar{u}$ satisface la desigualdad variacional

$$(S^*(S\bar{u} - y_d) + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_U \geq 0 \;\; \forall u \in U_{ad}. \tag{3.12}$$

Demostración. Tengamos presente, en virtud del lema (2.2.7), que el funcional f definido como en (3.10) es convexo. Por otro lado, teniendo en cuenta el ejemplo (3.1.14) deducimos que el gradiente del funcional f es de la forma

$$f'(\bar{u}) = S^*(S\bar{u} - y_d) + \lambda \bar{u}. \tag{3.13}$$

Para concluir, basta aplicar el teorema previo. En efecto, $\bar{u} \in C$ es una solución del problema (3.10) si, y solo si, satisface la desigualdad variacional

$$(S^*(S\bar{u} - y_d) + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_U \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

□

Observación 3.3.3. En múltiples situaciones, resulta conveniente escribir la desigualdad variacional (3.12) evitando el operador adjunto S^*, esto es,

$$(S\bar{u} - y_d, Su - S\bar{u})_H + \lambda(\bar{u}, u - \bar{u})_U \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

En las siguientes secciones aplicaremos la desigualdad variacional que acabamos de obtener a los problemas tratados en el Capítulo 2.

3.4. Fuente de calor estacionaria óptima

Recordemos el primer problema que planteamos en (2.13) – (2.15).

$$\text{mín } J(y, u) := \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.14}$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} -\Delta y &= \beta u \quad \text{en} \quad \Omega, \\ y &= 0 \quad \text{en} \quad \Gamma, \end{aligned} \tag{3.15}$$

y

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \ \text{ para casi todo } x \in \Omega. \tag{3.16}$$

Como antes, denotemos por $S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ al operador solución del correspondiente problema (3.15). En virtud de (3.12), cualquier control óptimo $\bar{u}$ satisface la desigualdad variacional

$$(S^*(S\bar{u} - y_\Omega) + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}, \tag{3.17}$$

donde aun tenemos que determinar el operador S^*. Los siguientes resultados van encaminados en esta dirección.

Lema 3.4.1. Consideremos las funciones $z, u \in L^2(\Omega)$ y $c_0, \beta \in L^\infty(\Omega)$ con $c_0 \geq 0$ casi siempre en Ω. Denotemos por y y p, respectivamente, las soluciones débiles a los problemas frontera elípticos

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y + c_0\, y &=& \beta u & \text{en} \quad \Omega, \\ y &=& 0 & \text{en} \quad \Gamma. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} -\Delta p + c_0\, p &=& z & \text{en} \quad \Omega, \\ p &=& 0 & \text{en} \quad \Gamma. \end{array}$$

Entonces

$$\int_\Omega z\, y\, dx = \int_\Omega \beta\, u\, p\, dx. \tag{3.18}$$

Demostración. Para mostrar el resultado tomaremos la formulación variacional asociada a cada problema, (2.2). Recordemos, que en virtud del teorema (2.1.7), siempre que los datos asociados a los problemas elípticos estén en $L^2(\Omega)$, tendremos que las soluciones débiles están en $H_0^1(\Omega)$. Teniendo en cuenta esto, para el primer problema, tomando como función test la solución débil $p \in H_0^1(\Omega)$ del segundo problema, debe cumplirse que

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla p + c_0\, y\, p\, dx = \int_\Omega \beta\, u\, p\, dx.$$

Tomando ahora, para el segundo problema, como función test la solución débil $y \in H_0^1(\Omega)$ del primer problema, debe cumplirse que

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla y + c_0\, p\, y\, dx = \int_\Omega z\, y\, dx.$$

Como los lados izquierdos de ambas ecuaciones son iguales, se deduce que

$$\int_\Omega z\, y\, dx = \int_\Omega \beta\, u\, p\, dx.$$

□

Lema 3.4.2. El operador adjunto $S^* : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, asociado al problema (2.14), viene dado por

$$S^* z := \beta\, p,$$

donde $p \in H_0^1(\Omega)$ es la solución débil asociada al problema de valores frontera

$$\begin{array}{rcll} -\Delta p &=& z & \text{en} \quad \Omega, \\ p &=& 0 & \text{en} \quad \Gamma. \end{array}$$

Demostración. Por definición, el operador adjunto, S^*, viene dado por la expresión

$$(z, Su)_{L^2(\Omega)} = (S^* z, u)_{L^2(\Omega)} \quad \forall z \in L^2(\Omega), \ \forall u \in L^2(\Omega).$$

Por otro lado, en virtud del lema previo, tomando $c_0 = 0$, e $y = Su$, deducimos que

$$(z, Su)_{L^2(\Omega)} = (z, y)_{L^2(\Omega)} = (\beta p, u)_{L^2(\Omega)}.$$

El operador, de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$, definido como sigue $z \mapsto \beta\, p$, está bien definido, es lineal, y en virtud de la desigualdad (2.6), es continuo. Como z y u son arbitrarios, y el operador S^* está unicamente determinado, concluimos que $S^* z := \beta\, p$. □

3.4.1. Estado adjunto y principio del máximo

En esta sección caracterizaremos el operador de estado adjunto para dar una expresión más simple de (3.17).

Definición 3.4.3. Llamamos ecuación adjunta, al problema

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \bar{y} - y_\Omega \quad \text{en} \quad \Omega, \\ p &= 0 \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $\bar{y}$ es el estado asociado a un control $\bar{u}$.

Observación 3.4.4. El lado derecho de la ecuación adjunta pertenece a $L^2(\Omega)$, ya que $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ por hipótesis, e $\bar{y} \in Y = H_0^1(\Omega)$, y como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, entonces $\bar{y} \in L^2(\Omega)$. En virtud del teorema (2.1.7), deducimos que (3.19) admite una única solución $p \in H_0^1(\Omega)$.

Definición 3.4.5. Llamamos estado adjunto asociado a $\bar{y}$, a la solución débil $p \in H_0^1(\Omega)$ del problema adjunto (3.19).

Deducimos de la desigualdad variacional (3.11), que se cumple el siguiente resultado.

Teorema 3.4.6. Supongamos que $\bar{u}$ es un control óptimo para el problema de la fuente de calor estacionaria óptima (3.14) − (3.16), y sea $\bar{y}$ el estado asociado. Entonces la ecuación adjunta (3.19) admite una única solución débil p que satisface la desigualdad variacional

$$\int_\Omega \big(\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big)\, dx \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \tag{3.20}$$

Recíprocamente, cualquier control $\bar{u} \in U_{ad}$, que junto con su estado asociado $\bar{y} = y(\bar{u})$ y la solución p a la ecuación adjunta (3.19), satisface la desigualdad variacional (3.20), es óptimo.

Demostración. En virtud de (3.12), un control $\bar{u}$ será óptimo si, y solo si, satisface la desigualdad variacional

$$(S^*(S\bar{u} - y_\Omega) + \lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}. \tag{3.21}$$

Teniendo en cuenta la observación previa, el teorema (2.1.7) garantiza que el problema adjunto (3.19) admite una única solución $p \in H_0^1(\Omega)$, y por tanto está bien definido el estado adjunto. Por otro lado, escribiendo $z = \bar{y} - y_\Omega$ y aplicando el lema (3.4.2) tenemos que

$$S^*(S\bar{u} - y_\Omega) = S^*(\bar{y} - y_\Omega) = S^*z = \beta p.$$

Sustituyendo lo anterior en (3.21), se tiene que

$$(\beta p + \lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

Lo que equivale a

$$\int_\Omega \big(\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big)\, dx \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Como queríamos probar. $\square$

Así que un control u, junto con el estado óptimo y, y el estado adjunto p, es óptimo para el problema $(3.14) - (3.16)$ si, y solo si, la terna (u, y, p) satisface el siguiente *sistema optimal*

$$\begin{aligned} -\Delta y &= \beta u && \text{en } \Omega, \\ y &= 0 && \text{en } \Gamma. \\[1em] -\Delta p &= y - y_\Omega && \text{en } \Omega, \\ p &= 0 && \text{en } \Gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} u \in U_{ad}, \\ (\beta\, p + \lambda\, u, v - u)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}. \end{gathered} \tag{3.22}$$

3.4.2. Condiciones puntuales de optimalidad

A lo largo de esta subsección, haremos un análisis detallado de la desigualdad variacional (3.20). Comenzamos reescribiendo la desigualdad de la siguiente manera

$$\int_\Omega \big(\beta\, p + \lambda\, \bar{u}\big)\, \bar{u}\, dx \leq \int_\Omega \big(\beta\, p + \lambda\, \bar{u}\big) u\, dx \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega \big(\beta\, p + \lambda\, \bar{u}\big)\, \bar{u}\, dx = \min_{u \in U_{ad}} \int_\Omega \big(\beta\, p + \lambda\, \bar{u}\big) u\, dx. \tag{3.23}$$

En consecuencia, si $\beta\, p + \lambda\, \bar{u}$ fuese conocida, podríamos obtener $\bar{u}$ como solución de un problema de optimización lineal en un espacio funcional.

Por otro lado, podríamos haber planteado la forma que adopta el control óptimo para cada punto de Ω. Los lemas que veremos a continuación van en esta línea.

Lema 3.4.7. Son equivalentes:

1) Para todo $u \in U_{ad}$, se cumple la desigualdad (3.20) (es decir, es óptimo).

2) Para casi todo $x \in \Omega$, el control óptimo $\bar{u}$ adopta la forma

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) = u_a(x) \quad & \text{si} \quad \beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) > 0. \\ \bar{u}(x) \in [u_a(x), u_b(x)] \quad & \text{si} \quad \beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) = 0. \\ \bar{u}(x) = u_b(x) \quad & \text{si} \quad \beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) < 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

3) Para casi todo $x \in \Omega$, se cumple la siguiente desigualdad variacional en $\mathbb{R}$,

$$\big(\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x)\big)\big(v - \bar{u}(x)\big) \geq 0 \quad \forall v \in [u_a(x), u_b(x)]. \tag{3.25}$$

Demostración. Plantearemos una demostración circular. Para ello, primero probaremos 1) implica 2). Tomemos $\bar{u}, u_a$ y u_b, representantes de sus clases de equivalencia en el sentido de L^∞, arbitrarios , pero fijos. Consideremos los siguientes conjuntos medibles

$$\begin{aligned} A_+(\bar{u}) &= \{x \in \Omega \,:\, \beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) > 0\}. \\ A_-(\bar{u}) &= \{x \in \Omega \,:\, \beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) < 0\}. \end{aligned}$$

Razonemos por reducción al absurdo, supongamos que 2) fuera falso. Existirá un conjunto $B_+ \subset A_+(\bar{u})$ de medida positiva, tal que para todo $x \in B_+$ se tiene que $\bar{u}(x) > u_a(x)$, o bien existe un conjunto $B_- \subset A_-(\bar{u})$ de medida positiva, tal que para todo $x \in B_-$ se tiene que $\bar{u}(x) < u_b(x)$.
En el primer caso, definamos la función $u \in U_{ad}$ como sigue,

$$u(x) = \begin{cases} u_a(x) & \text{si} \;\; x \in B_+. \\ \bar{u}(x) & \text{si} \;\; x \in \Omega \setminus B_+. \end{cases}$$

Como

$$\int_{\Omega \setminus B_+} \big(\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big)\, dx = 0,$$

se tiene que,

$$\int_\Omega \big(\beta(x)\,p(x) + \lambda\,\bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big)\,dx$$
$$= \int_{B_+} \big(\beta(x)\,p(x) + \lambda\,\bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big)\,dx < 0,$$

puesto que, mientras el primer factor es positivo en B_+, el segundo es negativo. Este hecho contradice (3.20).
En el segundo caso, definamos la función $u \in U_{ad}$ como sigue,

$$u(x) = \begin{cases} u_b(x) & \text{si } x \in B_-. \\ \bar{u}(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus B_-. \end{cases}$$

Como

$$\int_{\Omega \setminus B_-} \big(\beta(x)\,p(x) + \lambda\,\bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big)\,dx = 0,$$

se tiene que,

$$\int_\Omega \big(\beta(x)\,p(x) + \lambda\,\bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big)\,dx$$
$$= \int_{B_-} \big(\beta(x)\,p(x) + \lambda\,\bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big)\,dx < 0,$$

ya que ahora, el primer factor es negativo en B_-, y el segundo es positivo. Nuevamente, esto contradice (3.20).
A continuación, probemos 2) implica 3). Razonemos distinguiendo dos casos, según tomemos elementos en $A_+(\bar{u})$, o en $A_-(\bar{u})$, puesto que si $\beta(x)\,p(x) + \lambda\,\bar{u}(x) = 0$, la desigualdad (3.25) se cumple para casi todo $x \in \Omega$.
Por un lado, para casi todo $x \in A_+(\bar{u})$ se tiene que $\bar{u}(x) = u_a(x)$, por tanto $v - \bar{u}(x) \geq 0$ para todo $v \in [u_a(x), u_b(x)]$. Así que, por definición de $A_+(\bar{u})$, se tiene que,

$$\big(\beta(x)\,p(x) + \lambda\,\bar{u}(x)\big)\big(v - \bar{u}(x)\big) \geq 0 \quad \text{para casi todo } x \in A_+(\bar{u}).$$

Por otro lado, para casi todo $x \in A_-(\bar{u})$ se tiene que $\bar{u}(x) = u_b(x)$, por tanto $v - \bar{u}(x) \leq 0$ para todo $v \in [u_a(x), u_b(x)]$. Luego, por definición de $A_-(\bar{u})$, como ambos factores son negativos, se tiene que,

$$\big(\beta(x)\,p(x) + \lambda\,\bar{u}(x)\big)\big(v - \bar{u}(x)\big) \geq 0 \quad \text{para casi todo } x \in A_-(\bar{u}).$$

Por último, probemos 3) implica 1). Tomemos $u \in U_{ad}$ arbitrario pero fijo. Como $\bar{u}(x) \in [u_a(x), u_b(x)]$ para casi todo $x \in \Omega$, elijamos $v := u(x)$, y aplicando (3.25) obtenemos que

$$\big(\beta(x)\,p(x) + \lambda\,\bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big) \geq 0 \quad \text{para casi todo } x \in \Omega.$$

Para concluir, basta integrar en Ω, obteniendo la desigualdad (3.20). □

Observación 3.4.8. Notemos que si reordenamos los términos en la desigualdad (3.25), podemos reescribir esta como sigue

$$\big(\beta(x)\,p(x)+\lambda\,\bar{u}(x)\big)\bar{u}(x) \leq \big(\beta(x)\,p(x)+\lambda\,\bar{u}(x)\big)v \quad \forall v\in[u_a(x),u_b(x)], \tag{3.26}$$

válido para casi todo $x\in\Omega$. Tanto aquí, como en (3.25), v es un número real y no una función.

La observación previa motiva el siguiente teorema.

Teorema 3.4.9. Un control $\bar{u}\in U_{ad}$ es óptimo para el problema (3.14) − (3.16) si, y solo si, satisface junto con el estado adjunto p, el principio del mínimo débil, esto es, si para casi todo $x\in\Omega$, se tiene que

$$\min_{v\in[u_a(x),u_b(x)]}\big\{\big(\beta(x)\,p(x)+\lambda\,\bar{u}(x)\big)v\big\} = \big(\beta(x)\,p(x)+\lambda\,\bar{u}(x)\big)\bar{u}(x).$$

Demostración. Para justificar la equivalencia del enunciado, nos apoyamos en el teorema (3.4.6), donde podemos, en virtud del lema (3.4.7), pedir que se cumpla (3.25), en vez de (3.20), o lo que es lo mismo, que se cumpla (3.26). En consecuencia, el principio del mínimo débil no es más que reformular (3.26).

□

Teorema 3.4.10. Un control $\bar{u}\in U_{ad}$ es óptimo para el problema (3.14) − (3.16) si, y solo si, satisface junto con el estado adjunto p, el principio del mínimo fuerte, esto es, si para casi todo $x\in\Omega$, se tiene que

$$\min_{v\in[u_a(x),u_b(x)]}\big\{\beta(x)\,p(x)\,v+\frac{\lambda}{2}\,v^2\big\} = \beta(x)\,p(x)\,\bar{u}(x)+\frac{\lambda}{2}\,\bar{u}(x)^2.$$

Demostración. Probaremos que de hecho, se da la equivalencia entre el principio del mínimo débil, y el principio fuerte. Para ello, veamos que se da la equivalencia entre (3.26) y el principio del mínimo fuerte. En efecto, definamos la función $g(v):=\beta(x)\,p(x)\,v+\frac{\lambda}{2}\,v^2$, para cada $v\in[u_a(x),u_b(x)]$. En virtud del teorema (3.3.1), un número real $\bar{v}$ minimiza, para x fijo el problema (convexo) de optimización cuadrático en $\mathbb{R}$,

$$\min_{v\in[u_a(x),u_b(x)]} g(v) = \min_{v\in[u_a(x),u_b(x)]} \beta(x)\,p(x)\,v+\frac{\lambda}{2}\,v^2,$$

si, y solo si, satisface la desigualdad variacional

$$g'(\bar{v})(v-\bar{v})\geq 0 \qquad \forall v\in[u_a(x),u_b(x)],$$

lo que equivale a que,

$$\big(\beta(x)\,p(x)+\lambda\,\bar{v}\big)(v-\bar{v})\geq 0 \;\; \forall v\in[u_a(x),u_b(x)].$$

La condición de mínimo se concluye tomando $\bar{v}=\bar{u}(x)$. □

A continuación, analicemos las condiciones puntuales que acabamos de obtener, variando el parámetro λ.

1. Si $\lambda = 0$: En esta situación, se sigue de (3.24) que

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_a(x) & \text{si} \quad \beta(x)\, p(x) > 0 \\ u_b(x) & \text{si} \quad \beta(x)\, p(x) < 0. \end{cases}$$

   Los puntos $x \in \Omega$ donde $\beta(x)\, p(x) = 0$, no ofrecen ninguna información acerca de $\bar{u}(x)$. Mientras que si para casi todo $x \in \Omega$, se tiene que $\beta(x)\, p(x) \neq 0$, decimos que el control es *bang-bang*, esto es, $\bar{u}$ toma casi siempre en Ω los valores extremales $u_a(x)$, o $u_b(x)$.

2. Si $\lambda > 0$: Observemos que (3.24) equivale a que $\bar{u}(x) = -\lambda^{-1}\, \beta(x)\, p(x)$. Este comentario motiva el siguiente teorema.

   Definición 3.4.11. Sean a, b números reales, tales que $a \leq b$. Denotamos por $\mathbb{P}_{[a,b]}$ a la proyección de $\mathbb{R}$ sobre $[a, b]$, definida por

$$\mathbb{P}_{[a,b]}(v) := \text{mín}\left\{b, \text{máx}\{a, v\}\right\} = \begin{cases} a & \text{si} \quad v < a. \\ v & \text{si} \quad a \leq v \leq b. \\ b & \text{si} \quad b < v. \end{cases}$$

   Teorema 3.4.12. Si $\lambda > 0$, entonces $\bar{u}$ es un control óptimo para el problema (3.14) – (3.16) si, y solo si, $\bar{u}$ satisface, junto con el estado adjunto p, la fórmula siguiente

$$\bar{u}(x) = \mathbb{P}_{[u_a(x), u_b(x)]}\left(-\frac{1}{\lambda}\, \beta(x)\, p(x) \right) \quad \text{para casi todo } x \in \Omega. \tag{3.27}$$

   Demostración. Para probar el teorema, basta, en virtud del lema (3.4.7) mostrar la equivalencia entre (3.27) y (3.24). Fijándonos en (3.27), de la definición anterior se sigue para casi todo $x \in \Omega$ que,

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \mathbb{P}_{[u_a(x), u_b(x)]}\left(-\frac{1}{\lambda}\, \beta(x)\, p(x) \right) \\ &= \begin{cases} u_a(x) & \text{si} \quad -\frac{1}{\lambda}\, \beta(x)\, p(x) < u_a(x) \\ -\frac{1}{\lambda}\, \beta(x)\, p(x) & \text{si} \quad u_a(x) \leq -\frac{1}{\lambda}\, \beta(x)\, p(x) \leq u_b(x) \\ u_b(x) & \text{si} \quad u_b(x) < -\frac{1}{\lambda}\, \beta(x)\, p(x) \end{cases} \\ &= \begin{cases} u_a(x) & \text{si} \quad \beta(x)\, p(x) + \lambda u_a(x) > 0. \\ -\frac{1}{\lambda}\, \beta(x)\, p(x) & \text{si} \quad u_a(x) \leq -\frac{1}{\lambda}\, \beta(x)\, p(x) \leq u_b(x). \\ u_b(x) & \text{si} \quad \beta(x)\, p(x) + \lambda u_b(x) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Lo que en virtud del comentario previo es equivalente a (3.24). □

Observación 3.4.13. Observemos que el teorema previo, se puede ver como una consecuencia del teorema (3.4.10). De hecho, la solución al problema de optimización cuadrático en $\mathbb{R}$, formulado en términos del principio del mínimo

$$\min_{v\in[u_a(x),u_b(x)]} \big\{\beta(x)\, p(x)\, v + \frac{\lambda}{2}\, v^2\big\},$$

viene dado por la fórmula de proyección (3.27).

Por último tratemos un tercer caso, que no es más que un caso particular de este segundo.

3. Si $\lambda > 0$ y $U_{ad} = L^2(\Omega)$: En este caso, el control no está sujeto a ninguna restricción, y podemos deducir de (3.27) que

$$\bar{u} = -\frac{1}{\lambda}\,\beta\, p. \tag{3.28}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación de estado, llegamos al siguiente sistema optimal:

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y &=& -\lambda^{-1}\,\beta^2\, p & \text{en} \quad \Omega, \\ y &=& 0 & \text{en} \quad \Gamma. \\ \\ -\Delta p &=& y - y_\Omega & \text{en} \quad \Omega, \\ p &=& 0 & \text{en} \quad \Gamma. \end{array}$$

Obtenemos pues, un sistema de problemas de contorno elípticos acoplados, que nos sirven para determinar $y = \bar{y}$, y p. Una vez que hayamos obtenido p, el control óptimo $\bar{u}$ se obtiene directamente de la expresión (3.28).

3.4.3. Formulación de Karush-Kuhn-Tucker

Introduciendo el concepto de multiplicador de Lagrange, podemos reformular la desigualdad variacional (3.20) del sistema optimal, como una ecuación adicional.

Definición 3.4.14. Dada una función, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos su parte positiva $f_+ : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y su parte negativa $f_- : X \longrightarrow \mathbb{R}$, respectivamente, como sigue

$$\begin{array}{rclcl} f_+ &:=& \frac{1}{2}(f + |f|) &=& \max\{0, f\}, \\ f_- &:=& \frac{1}{2}(|f| - f) &=& -\min\{0, f\}. \end{array}$$

Observación 3.4.15. Es inmediato de la propia definición las siguientes propiedades

$$f := f_+ - f_- \,,$$
$$f_+ \geq 0, \quad f_- \geq 0.$$

Teorema 3.4.16. La desigualdad variacional (3.20) es equivalente a que existan de funciones $\mu_a, \mu_b \in L^2(\Omega)$ no negativas en casi todo punto de Ω, que satisfacen la siguiente ecuación

$$\beta\, p + \lambda\, \bar{u} - \mu_a + \mu_b = 0, \tag{3.29}$$

además de las condiciones complementarias

$$\mu_a(x)\big(u_a(x) - \bar{u}(x)\big) = \mu_b(x)\big(\bar{u}(x) - u_b(x)\big) = 0. \tag{3.30}$$

para casi todo $x \in \Omega$.

Demostración. Veamos que (3.29) y (3.30) son consecuencia de la desigualdad variacional (3.20). Para ello definamos las funciones μ_a y μ_b como siguen

$$\begin{aligned} \mu_a(x) &:= \big(\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x)\big)_+, \\ \mu_b(x) &:= \big(\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x)\big)_-. \end{aligned}$$

En virtud de la observación previa, tenemos por un lado que $\mu_a \geq 0, \mu_b \geq 0$, y por otro que $\beta\, p + \lambda\, \bar{u} = \mu_a - \mu_b$. Esto prueba la primera condición (3.29). Además, teniendo presente (3.24), se cumplen para casi todo $x \in \Omega$, las siguientes implicaciones:

$$\begin{array}{rcl} \big(\beta\, p + \lambda\, \bar{u}\big)(x) > 0 & \text{implica que} & \bar{u}(x) = u_a(x), \\ \big(\beta\, p + \lambda\, \bar{u}\big)(x) < 0 & \text{implica que} & \bar{u}(x) = u_b(x), \\ u_a(x) < \bar{u}(x) < u_b(x) & \text{implica que} & \big(\beta\, p + \lambda\, \bar{u}\big)(x) = 0. \end{array}$$

Estas implicaciones justifican (3.30), ya que en ambos productos, al menos uno de los factores se anula para casi todo $x \in \Omega$. En efecto, tomemos $x \in \Omega$, y distingamos tres caso:

1. Supongamos que $\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) > 0$, entonces por un lado se tiene que $\mu_b(x) = 0$ anulándose la segunda igualdad de (3.30). Por otro lado, se sigue de las implicaciones previas que $\bar{u}(x) = u_a(x)$ lo que anula la primera igualdad de (3.30). Además, $\mu_a(x) > 0$.

2. A continuación, supongamos que $\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) = 0$, entonces tanto $\mu_a(x) = 0$, como $\mu_b(x) = 0$ son nulos, y por tanto también se cumple (3.30).

3. Por último, supongamos que $\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) < 0$, entonces por un lado deducimos que $\mu_a(x) = 0$ anulándose la primera igualdad de (3.30). Por otro lado, se sigue de las implicaciones previas que $\bar{u}(x) = u_b(x)$ lo que anula la segunda igualdad de (3.30). Además, $\mu_b(x) > 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\bar{u} \in U_{ad}$ satisface (3.29) y (3.30), y fijemos $u \in U_{ad}$. Distingamos tres casos:

1. Para casi todo $x \in \Omega$ con $u_a(x) < \bar{u}(x) < u_b(x)$ (y por tanto, $\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) = 0$), se deduce de las condiciones complementarias (3.30) que $\mu_a(x) = \mu_b(x) = 0$. Sustituyendo en (3.29), deducimos que

$$(\beta\, p + \lambda\, \bar{u})(x) = 0.$$

Por tanto, tenemos que

$$\big(\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big) \geq 0.$$

2. A continuación, supongamos que para casi todo $x \in \Omega$ se tiene que $\bar{u}(x) = u_a(x)$. En esta situación, para cada $u \in U_{ad}$, se tiene que $u(x) - \bar{u}(x) \geq 0$. De las condiciones complementarias, se deduce que $\mu_b(x) = 0$. Por tanto, llevando esto a (3.29), se tiene que

$$\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) = \mu_a(x) \geq 0.$$

En consecuencia, se tiene que

$$\big(\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big) \geq 0.$$

3. Por último, supongamos que para casi todo $x \in \Omega$ se tiene que $\bar{u}(x) = u_b(x)$. En esta situación, para cada $u \in U_{ad}$, se tiene que $u(x) - \bar{u}(x) \leq 0$. De las condiciones complementarias, se deduce que $\mu_a(x) = 0$. Por tanto, llevando esto a (3.29), se tiene que

$$\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x) = -\mu_b(x) \leq 0.$$

En consecuencia, se tiene que

$$\big(\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x)\big)\big(u(x) - \bar{u}(x)\big) \geq 0. \tag{3.31}$$

En los tres casos, la desigualdad variacional (3.31) se satisface para casi todo $x \in \Omega$. Basta pues, integrar en Ω para llegar a la expresión (3.20). $\square$

En virtud del teorema anterior, podemos reemplazar el sistema optimal (3.22), que contenía la desigualdad variacional (3.20), por el siguiente sistema de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y & = & \beta u & \text{en} \quad \Omega, \\ y & = & 0 & \text{en} \quad \Gamma. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} -\Delta p & = & y - y_\Omega & \text{en} \quad \Omega, \\ p & = & 0 & \text{en} \quad \Gamma. \end{array}$$

$$\begin{gathered} \beta\, p + \lambda\, u - \mu_a + \mu_b = 0, \\ u_a \leq u \leq u_b, \qquad \mu_a \geq 0, \qquad \mu_b \geq 0, \\ \mu_a\big(u_a - u\big) = \mu_b\big(u - u_b\big) = 0. \end{gathered} \tag{3.32}$$

Aquí, las relaciones establecidas en las tres últimas líneas se verifican para casi todo $x \in \Omega$.

Definición 3.4.17. Las funciones $\mu_a, \mu_b \in L^2(\Omega)$ definidas en el teorema (3.4.16), se denominan multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de desigualdad $u_a \leq u$ y $u \leq u_b$, respectivamente.

3.4.4. El gradiente del funcional coste reducido

Mediante el uso del estado adjunto p, podemos simplificar el cálculo del gradiente reducido, esto es, el gradiente de $f(u) = J(y(u), u)$.

Lema 3.4.18. El gradiente del funcional

$$f(u) = J(y(u), u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

viene dado por

$$f'(u) = \beta\, p + \lambda\, u,$$

donde $p \in H^1_0(\Omega)$ es el estado adjunto. Es decir, la solución débil de la ecuación adjunta

$$\begin{array}{rcll} -\Delta p & = & y - y_\Omega & \text{en} \quad \Omega, \\ p & = & 0 & \text{en} \quad \Gamma. \end{array} \tag{3.33}$$

donde el estado asociado a u, se representa por, $y = y(u)$.

Demostración. En virtud de (3.13) deducimos que

$$f'(u)h = \big(S^*(S\,u - y_\Omega) + \lambda\,u, h\big)_{L^2(\Omega)} \quad \text{para todo } h \in L^2(\Omega).$$

Por el lema (3.4.2), tenemos que $S^*(y - y_\Omega) = \beta\,p$, donde p resuelve (3.33). Así que,

$$f'(u)h = \big(\beta\,p + \lambda\,u, h\big)_{L^2(\Omega)} \quad \text{para todo } h \in L^2(\Omega).$$

Para concluir, basta aplicar el teorema de representación de Riesz, escribiendo $f'(u) = \beta\,p + \lambda\,u$. □

A continuación reformularemos la desigualdad variacional (3.17). Se sigue de la definición del operador adjunto S^*, que la desigualdad variacional (3.17) es equivalente a

$$\big(S\bar{u} - y_\Omega, Su - S\bar{u}\big)_{L^2(\Omega)} + \lambda\big(\bar{u}, u - \bar{u}\big)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Sustituyendo $\bar{y} = S\bar{u}$, e $y = Su$, podemos reescribir la desigualdad anterior como

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \big(\bar{y} - y_\Omega, y - \bar{y}\big)_{L^2(\Omega)} + \lambda\big(\bar{u}, u - \bar{u}\big)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \tag{3.34}$$

3.5. Condiciones de frontera Robin

En esta sección, trataremos dos problemas de control óptimo, cuyas ecuaciones en derivadas parciales tiene condiciones frontera de tipo Robin homogéneas. La diferencia entre los dos problemas de control que veremos reside en la forma del funcional coste.

Comencemos, probando un análogo del lema (3.4.1), que podremos aplicar en los dos problemas, para determinar la ecuación adjunta.

Lema 3.5.1. Consideremos las funciones $a_\Omega, v \in L^2(\Omega)$, $a_\Gamma, u \in L^2(\Gamma)$, $c_0, \beta_\Omega \in L^\infty(\Omega)$ y $\alpha, \beta_\Gamma \in L^\infty(\Gamma)$, donde $\alpha \geq 0$ y $c_0 \geq 0$ en casi todo punto. Además, sean y, y p las soluciones débiles, respectivamente, de los problemas de valores frontera siguientes

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y + c_0\,y &=& \beta_\Omega\,v & \text{en } \Omega, \\ \partial_{n_e} y + \alpha\,y &=& \beta_\Gamma\,u & \text{en } \Gamma. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} -\Delta p + c_0\,p &=& a_\Omega & \text{en } \Omega, \\ \partial_{n_e} p + \alpha\,p &=& a_\Gamma & \text{en } \Gamma. \end{array}$$

Entonces, se cumple la siguiente igualdad

$$\int_\Omega a_\Omega\,y\,dx + \int_\Gamma a_\Gamma\,y\,ds = \int_\Omega \beta_\Omega\,p\,v\,dx + \int_\Gamma \beta_\Gamma\,p\,u\,ds. \tag{3.35}$$

Demostración. La demostración resulta análoga a la que se realizó en el lema (3.4.1). Usaremos la formulación variacional de los dos problemas de valores frontera anteriores. Por un lado, si $y \in H^1(\Omega)$ es solución débil del primer problema, entonces verifica la igualdad variacional (2.8), y tomando como función test $p \in H^1(\Omega)$, debe cumplirse que

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla p \, dx + \int_\Omega c_0 \, y \, p \, dx + \int_\Gamma \alpha \, p \, y \, ds = \int_\Omega \beta_\Omega \, v \, p \, dx + \int_\Gamma \beta_\Gamma \, u \, p \, ds,$$

Por otro lado, tomando $p \in H^1(\Omega)$ solución débil del segundo problema, y tomando como función test $y \in H^1(\Omega)$, se verificará la igualdad variacional (2.8), por tanto, debe cumplirse que

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla y \, dx + \int_\Omega c_0 \, p \, y \, dx + \int_\Gamma \alpha \, y \, p \, ds = \int_\Omega a_\Omega \, y \, dx + \int_\Gamma a_\Gamma \, y \, ds.$$

Como los lados izquierdos de ambas ecuaciones son iguales, se deduce el enunciado. □

Teniendo presente este resultado, tratemos el problema de encontrar una fuente de calor estacionaria, con condiciones frontera de tipo Robin homogéneas. Concretamente, tratemos el siguiente problema:

$$\text{mín}\, J(y,u) := \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.36}$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y &=& \beta u & \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_{n_e} y + \alpha\, y &=& 0 & \text{en} \quad \Gamma, \end{array} \tag{3.37}$$

y

$$u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \quad \text{para casi todo } x \in \Omega. \tag{3.38}$$

Supondremos que $\lambda \ge 0$, $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, y que la función $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ es no negativa en casi todo punto.

Consideremos el operador, lineal y continuo, de control-estado asociado al problema de contorno, $G : L^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ tal que $Gu = y(u)$, solución débil de (3.37). De nuevo, interpretaremos G como un operador con rango en $L^2(\Omega)$. Para ello, tomamos $S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, esto es, $S = E_Y G$, y escribimos

$$y = Su.$$

El funcional coste toma pues, la forma

$$J(y,u) = f(u) := \frac{1}{2}\|Su - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Razonaremos de forma similar a como hicimos en las sección previa con el problema (3.14) – (3.16). Sean $\bar{u} \in U_{ad}$ y $\bar{y}$ el control óptimo, y el estado asociado, respectivamente. Aplicando el teorema (3.3.2), y simplificando la expresión de la desigualdad variacional como en (3.34), llegamos a que

$$f'(\bar{u})(u-\bar{u}) = \big(\bar{y}-y_\Omega, y-\bar{y}\big)_{L^2(\Omega)} + \lambda\big(\bar{u}, u-\bar{u}\big)_{L^2(\Omega)} \geq 0. \tag{3.39}$$

A continuación, querríamos aplicar el lema (3.5.1). Buscando poder expresar el producto interno que depende de y, en función de u, y así poder calcular $f'(u)$. Por un lado, si comparamos los problemas de valores frontera que debe satisfacer y, llegamos a la elección de $\beta_\Omega = \beta$, $\beta_\Gamma = 0$ y $c_0 = 0$.
Por otro lado, vemos que la expresión $(\bar{y} - y_\Omega, y - \bar{y})_{L^2(\Omega)}$, aparece en el lado izquierdo de la igualdad (3.35), siempre que reemplacemos y por $y - \bar{y}$, elijamos $a_\Omega = \bar{y} - y_\Omega$, y $a_\Gamma = 0$.
En vista de estas consideraciones, y a fin de poder aplicar el lema (3.5.1), definimos p como la solución de la siguiente ecuación adjunta

$$\begin{array}{rcll} -\Delta p &=& \bar{y} - y_\Omega & \text{en } \Omega, \\ \partial_{n_e} p + \alpha\, p &=& 0 & \text{en } \Gamma. \end{array} \tag{3.40}$$

El lado derecho de la ecuación diferencial pertenece a $L^2(\Omega)$, puesto que $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ por hipótesis, e $\bar{y} \in H^1(\Omega)$. Como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, entonces se tiene que $\bar{y} \in L^2(\Omega)$. Aplicando el teorema (2.1.13), deducimos que el problema (3.40) admite una única solución débil $p \in H^1(\Omega)$, que satisface la ecuación variacional

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \alpha\, p\, v\, ds = \int_\Omega (\bar{y} - y_\Omega)\, v\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

El estado óptimo $\bar{y} = S\bar{u}$ es la solución débil a la ecuación de estado asociada a $\bar{u}$, mientras que $y = Su$ es la correspondiente a u. Así que, por la linealidad de la ecuación de estado, tenemos que $y - \bar{y} = S(u - \bar{u})$. Aplicando el lema (3.5.1), tomando como y a $y - \bar{y}$, y como v a $u - \bar{u}$, se tiene que

$$\int_\Omega (\bar{y} - y_\Omega)(y - \bar{y})\, dx = \int_\Omega \beta\, p\, (u - \bar{u})\, dx.$$

Utilizando esto en (3.39), llegamos a que

$$\begin{aligned} f'(\bar{u})(u-\bar{u}) &= \big(\bar{y}-y_\Omega, y-\bar{y}\big)_{L^2(\Omega)} + \lambda\big(\bar{u}, u-\bar{u}\big)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega \beta\, p\, (u-\bar{u})\, dx + \lambda \int_\Omega \bar{u}\,(u-\bar{u})\, dx \\ &= \int_\Omega (\beta\, p + \lambda\, \bar{u})(u-\bar{u})\, dx \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}. \end{aligned}$$

De hecho, la forma de la derivada $f'(\bar{u})$ no depende del hecho de que $\bar{u}$ sea óptimo. Por tanto, obtenemos como un resultado secundario que el gradiente reducido $f'(u)$ para un u arbitrario, tiene la forma

$$f'(u) = \beta\, p + \lambda\, u,$$

donde p resuelve la ecuación adjunta asociada

$$\begin{aligned} -\Delta p &= y(u) - y_\Omega \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_{n_e} p + \alpha\, p &= 0 \qquad\qquad\;\; \text{en} \quad \Gamma. \end{aligned}$$

3.5.1. Variante del funcional coste

Para finalizar, realizaremos un estudio sobre un problema similar al anterior, donde añadimos a nuestro funcional coste un término relativo a la frontera. Concretamente, trataremos el problema

$$\text{mín}\, J(y,u) := \frac{\lambda_\Omega}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_\Gamma}{2}\|y - y_\Gamma\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -\Delta y &= \beta u \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_{n_e} y + \alpha\, y &= 0 \quad\;\; \text{en} \quad \Gamma. \end{aligned}$$

y

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{para casi todo } x \in \Omega.$$

Supondremos que $\lambda \geq 0$, $\lambda_\Omega \geq 0$, $\lambda_\Gamma \geq 0$, $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $y_\Gamma \in L^2(\Gamma)$, y que la función $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ es no negativa en casi todo punto.

Consideremos el operador, lineal y continuo, de control-estado asociado al problema de contorno, $G : L^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ tal que $Gu = y(u)$. De nuevo, interpretaremos G como un operador con rango en $L^2(\Omega)$. Para ello, tomamos $S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, esto es, $S = E_Y G$, y escribimos $y = Su$. Por otro lado, aplicando el teorema de traza (1.2.16), tomando $p = 2$ (expuesto en la observación (1.2.17)), podemos considerar el operador lineal y continuo

$$S_\Gamma = \tau \circ G : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma), \quad \text{actuando como sigue } u \mapsto S_\Gamma u := y(u)|_\Gamma.$$

El funcional coste toma pues, la forma

$$J(y,u) = f(u) := \frac{\lambda_\Omega}{2}\|Su - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_\Gamma}{2}\|S_\Gamma u - y_\Gamma\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Sean $\bar{u} \in U_{ad}$ y $\bar{y}$ el control óptimo, y el estado asociado, respectivamente. Aplicando el teorema (3.3.2), y simplificando la expresión de la desigualdad variacional, llegamos a que

$$\begin{aligned}
f'(\bar{u})(u-\bar{u}) &= \lambda_\Omega\big(S^*\,(S\bar{u}-y_\Omega), u-\bar{u}\big)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \lambda_\Gamma\big(S_\Gamma^*\,(S_\Gamma\bar{u}-y_\Gamma), u-\bar{u}\big)_{L^2(\Omega)} + \lambda\big(\bar{u}, u-\bar{u}\big)_{L^2(\Omega)} \\
&= \lambda_\Omega\big(\bar{y}-y_\Omega, y-\bar{y}\big)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \lambda_\Gamma\big(\bar{y}|_\Gamma - y_\Gamma, y|_\Gamma - \bar{y}|_\Gamma\big)_{L^2(\Gamma)} + \lambda\big(\bar{u}, u-\bar{u}\big)_{L^2(\Omega)} \geq 0. \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

A continuación, buscamos aplicar el lema (3.5.1). Por un lado, si comparamos los problemas de valores frontera que debe satisfacer y, llegamos a la elección de $\beta_\Omega = \beta$, $\beta_\Gamma = 0$ y $c_0 = 0$.
Por otro lado, vemos que la expresión $\lambda_\Omega(\bar{y}-y_\Omega, y-\bar{y})_{L^2(\Omega)}$, aparece en el primer sumando del lado izquierdo de la igualdad (3.35), siempre que reemplacemos y por $y-\bar{y}$, elijamos $a_\Omega = \lambda_\Omega(\bar{y}-y_\Omega)$.
Además, observemos que la expresión $\lambda_\Gamma(\bar{y}|_\Gamma - y_\Gamma, y|_\Gamma - \bar{y}|_\Gamma)_{L^2(\Gamma)}$, aparece en el segundo sumando de dicha igualdad (3.35), siempre que escojamos $a_\Gamma = \lambda_\Gamma(\bar{y}|_\Gamma - y_\Gamma)$.
En vista de estas consideraciones, y a fin de poder aplicar el lema (3.5.1), definimos p como la solución de la siguiente ecuación adjunta

$$\begin{aligned}
-\Delta p &= \lambda_\Omega(\bar{y}-y_\Omega) \quad \text{en} \quad \Omega, \\
\partial_{n_e} p + \alpha\, p &= \lambda_\Gamma(\bar{y}-y_\Gamma) \quad \text{en} \quad \Gamma.
\end{aligned} \qquad (3.42)$$

El lado derecho de la ecuación diferencial pertenece a $L^2(\Omega)$, puesto que $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ por hipótesis, e $\bar{y} \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Aplicando el teorema (2.1.13), deducimos que el problema (3.42) admite una única solución débil $p \in H^1(\Omega)$, que satisface la ecuación variacional para todo $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla v\, dx \,+\, \int_\Gamma \alpha\, p\, v\, ds = \int_\Omega \lambda_\Omega(\bar{y}-y_\Omega)\, v\, dx \,+\, \int_\Gamma \lambda_\Gamma(\bar{y}-y_\Gamma)\, v\, ds.$$

El estado óptimo $\bar{y} = S\bar{u}$ es la solución débil a la ecuación de estado asociada a $\bar{u}$, mientras que $y = Su$ es la correspondiente a u. Así que, por la linealidad de la ecuación de estado, tenemos que $y-\bar{y} = S(u-\bar{u})$. Aplicando el lema (3.5.1), tomando como y a $y-\bar{y}$, y como v a $u-\bar{u}$, se tiene que

$$\int_\Omega \lambda_\Omega(\bar{y}-y_\Omega)(y-\bar{y})\, dx \,+\, \int_\Omega \lambda_\Gamma(\bar{y}-y_\Gamma)(y-\bar{y})\, ds = \int_\Omega \beta\, p\,(u-\bar{u})\, dx.$$

Utilizando esto en (3.41), llegamos a que

$$\begin{aligned}
f'(\bar{u})(u-\bar{u}) &= \int_\Omega \beta\, p\,(u-\bar{u})\, dx + \lambda \int_\Omega \bar{u}\,(u-\bar{u})\, dx. \\
&= \int_\Omega (\beta\, p + \lambda\, \bar{u})(u-\bar{u})\, dx \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}.
\end{aligned}$$

Como en el ejemplo anterior, la forma de la derivada $f'(\bar{u})$ no depende del hecho de que $\bar{u}$ sea óptimo. Por tanto, obtenemos como un resultado secundario que el gradiente reducido $f'(u)$ para un u arbitrario, tiene la forma

$$f'(u) = \beta\, p + \lambda\, u,$$

donde p resuelve la ecuación adjunta asociada

$$\begin{array}{rcll} -\Delta p &=& \lambda_\Omega \big(y(u) - y_\Omega\big) & \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_{n_e} p + \alpha\, p &=& \lambda_\Gamma \big(y(u) - y_\Gamma\big) & \text{en} \quad \Gamma. \end{array}$$

Bibliografía

[Bre] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York Inc., 2010.

[But] G. Buttazzo, Kogut, *Weak optimal controls in coefficients for linear elliptic problems*, P.I. Rev Mat Complut, 2011.

[Car] H. Cartan, *Cálculo Diferencial*, Omega, 1976.

[Cas] E. Casas, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, Universidad de Cantabria, 1992.

[Gal] F. Galindo, *Introducción a los espacios de funciones*, Universidad de Valladolid, 2016.

[Luo] Y. Luo, *Necessary Optimality Conditions for Some Control Problems of Elliptic Equations with Venttsel Boundary Conditions*, Applied Mathematics and Optimization, 2010.

[Mau] H. Maurer, H.D. Mittelmann, *Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints. Part 2: Distributed control*, Computational Optimization and Applications, 2001.

[Olg] M. Olguín, D. A. Tarzia, *Numerical Analysis of a Distributed Optimal Control Problem Governed by an Elliptic Variational Inequality*, International Journal of Differential Equations, vol. 2015.

[Phi] P. Philip, *Optimal Control of Partial Differential Equations, Lecture Notes*, Universidad de Múnich, 2013.

[Sal] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*, Springer, Verlag Italia srl, 2008.

[Sch] L. Schwartz, *Analyse: Topologie générale et analyse fonctionelle*, Hermann, 1993.

[Trö] F. Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications*, American Mathematical Society, 2010.

[Ver] A. Vera, P. Alegría *Un curso de análisis funcional: teoría y problemas*, AVL, 1997.