



---

**Universidad de Valladolid**

MÁSTER DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

Curso 2016-2017

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

---

La Teoría de Morse Discreta aplicada al estudio  
de las resoluciones celulares

---

Autor: MARIO MORÁN CAÑÓN

Tutor: PHILIPPE T. GIMENEZ

## ÍNDICE GENERAL

<b>Índice general</b>	<b>2</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1 Los pilares algebraicos</b>	<b>8</b>
1.1. Multigraduaciones . . . . .	9
1.2. Complejos multigraduados y resoluciones . . . . .	15
1.3. Números de Betti . . . . .	31
1.4. Ejemplos: ideales y módulos monomiales . . . . .	34
<b>2 Amalgama</b>	<b>40</b>
2.1. CW-Complejos . . . . .	41
2.2. Complejos de cadenas y resoluciones celulares . . . . .	67
2.3. Ejemplos de resoluciones ¿celulares? . . . . .	76
<b>3 Teoría de Morse Discreta</b>	<b>81</b>
3.1. Los Teoremas de Morse . . . . .	82
3.2. La Teoría de Morse Discreta en términos de emparejamientos acíclicos . . . . .	90
3.3. Minimalización de resoluciones celulares . . . . .	102
3.4. Teoría de Morse Discreta Algebraica . . . . .	105
<b>4 El método de la poda</b>	<b>109</b>
4.1. El algoritmo de poda general . . . . .	110
4.2. Variantes del algoritmo de poda . . . . .	113
4.3. La poda en práctica . . . . .	117
<b>Bibliografía</b>	<b>124</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>127</b>

## INTRODUCCIÓN

¿Qué son las Matemáticas? Propongo un experimento: formulemos a gente al azar (sin pararnos a pensar demasiado en cómo podemos hacer una elección al azar, no pretendo plantear un dilema por línea) la pregunta “¿Sabes qué son las Matemáticas?”. Con total seguridad la respuesta será afirmativa. Hagámosles entonces la primera pregunta: “¿Qué son?”. Cuando no opten por el silencio, la inmensa mayoría de los encuestados darán una respuesta vaga, parcial, muy limitada y en general insatisfactoria.

Esta memoria no está dirigida a gente al azar, y el lector contará muy probablemente con un cierto bagaje matemático, en muchas ocasiones realmente amplio, que le permitirá con toda seguridad dar una definición mucho más precisa de las Matemáticas. Pero aún así se encontrará con grandes dificultades, y en todo caso tendrá la sensación de que no transmite perfectamente la esencia del concepto. Incluso a los diccionarios les ocurre esto. El *Diccionario de la Real Academia Española* (vigésimotercera edición), en la quinta acepción de la entrada “*matemático,ca*”, da la siguiente definición: “*Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones*”. Por su parte, el *Oxford English Dictionary*, en su versión de 1933 define las Matemáticas como “*The abstract science which investigates deductively the conclusions implicit in the elementary conceptions of spatial and numerical relations, and which includes as its main divisions geometry, arithmetic, and algebra*”. Lo que parece claro, según todos los diccionarios etimológicos, es que procede del vocablo griego μάθημα, “conocimiento”. Hay un artículo en Wikipedia, [Wik], dedicado exclusivamente a definiciones de las Matemáticas, que recoge algunas poco ortodoxas, pero no carentes de veracidad, como la siguiente, dada por Eugene Wigner: “*Mathematics is the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose (this purpose being the skillful operation...)*”, o esta otra atribuida a Charles Darwin: “*A mathematician is a blind man in a dark room looking for a black cat which isn't there*” (las referencias precisas, junto con otras definiciones de este estilo, pueden encontrarse en el citado artículo).

Las dos primeras definiciones que hemos dado coinciden en que se trata de una ciencia abstracta, o formal, y deductiva que estudia las propiedades de objetos de distintas naturalezas, lo que da lugar a diversas áreas, entre las que el *Oxford English Dictionary* destaca la Geometría, la Aritmética o el Álgebra, aunque hoy en día no podemos obviar a otras como el Análisis Matemático, la Probabilidad, el Análisis Numérico o las Matemáticas Computacionales. Estas y otras grandes áreas admiten a su vez subdivisiones y así sucesivamente en un proceso de especialización a lo largo del cual los matemáticos han hecho alarde de su habilidad de nominación. Sin embargo, esta clasificación no ha dado lugar, ni mucho menos,

a compartimentos estancos y ajenos los unos a los otros, sino que proliferan las interrelaciones entre ellos, que colaboran enormemente al enriquecimiento de las Matemáticas, las cuales pueden de este modo visualizarse como una red con sus límites en constante expansión, pero que también va tupiéndose cada vez más, reduciendo los vanos.

En este sentido está dirigido el presente opúsculo, que toca tres grandes áreas tan notables en las Matemáticas como son el Álgebra Conmutativa, la Topología y la Combinatoria. El objetivo, sintetizado en el título, es describir la forma en que la Teoría de Morse Discreta puede aplicarse al estudio de las resoluciones celulares. Ahora bien, para un lector que no esté suficientemente familiarizado con estas ramas los tecnicismos anteriores supondrán un auténtico galimatías que no explica ni el objetivo ni tan siquiera la interacción entre las áreas a las que hemos hecho referencia. A continuación trataremos de desentrañarlo, e indicaremos en qué partes de la memoria se trata cada punto.

Un iniciado sabrá seguramente que la Teoría de Morse es una técnica topológica, e identificará las estructuras celulares como objetos de esa misma área. Por su parte, y aunque el nombre no es tan explícito, al decir resoluciones estamos refiriéndonos a resoluciones libres de módulos sobre un anillo, e indudablemente esta descripción nos lleva a pensar inmediatamente en el Álgebra Conmutativa. ¿Pero qué es de la Combinatoria? Tendremos que analizar más detenidamente nuestros objetos.

Las resoluciones libres de módulos sobre un anillo (podemos entender que de polinomios, aunque también podrá ser un conciente de uno de estos) lo que nos permiten es, *grosso modo*, conocer la estructura de un módulo, y ese es precisamente su interés. Ahora bien, queremos que la información que nos proporciona una de tales resoluciones no sea redundante, es decir, que esta sea minimal, de ahí que sea deseable contar con métodos de minimalización de resoluciones. Hasta este punto llegan los contenidos del capítulo 1, cuyo título hace referencia precisamente a que sirve tanto de punto de partida como de motivación para todo el texto.

El capítulo 2 tiene como objeto dar sentido a las dos últimas palabras del título de la memoria, *resoluciones celulares*. Tiene dos partes bien diferenciadas: la primera puramente topológica, en la que introducimos con cierto detalle las estructuras de tipo celular más relevantes, y la segunda que encarna la transversalidad del trabajo y explica el título del capítulo. A grandes rasgos, podemos asociar una de las estructuras celulares anteriores a algunas resoluciones sobre módulos siempre que estos cumplan un cierto requisito, a saber, que estén generados por monomios, pues la combinatoria de sus exponentes será la que nos permita relacionar los objetos algebraicos y los topológicos. Es por esto que decimos que la Combinatoria sirve como elemento cohesivo entre Álgebra Conmutativa y Topología, para crear una amalgama de la que poder sacar un partido mayor que el obtenido mediante las técnicas expuestas en el capítulo 1, ya que gran parte del potencial de la Topología Algebraica, en particular la homología, será aprovechado para codificar propiedades algebraicas de las resoluciones.

A pesar de que la utilidad de las estructuras celulares como almacén de la información de resoluciones de módulos ha comenzado a explotarse en las dos últimas décadas (esta teoría fue propuesta por Bayer, Peeva y Sturmfels en su artículo [BPS98], de 1998, y perfec-

cionada ese mismo año por Bayer y Sturmfels en [BS98]), la idea de explotar la combinatoria de los ideales y módulos para poder decir algo más sobre sus propiedades algebraicas en general y sus resoluciones en particular no es novedosa, y de hecho el estudio de ideales asociados a grafos es un prolífico campo de investigación.

Pero no nos limitamos a la lectura de propiedades algebraicas con argumentos topológicos, sino que, recordando que nuestro objetivo era minimalizar las resoluciones desechando así el exceso de información, queremos aplicar técnicas topológicas con este fin. Y como en nuestra amalgama tenemos una resolución ligada a una estructura celular, el blanco evidente de nuestros esfuerzos será esta última. Y aquí es donde entra en juego la primera parte del título, la Teoría de Morse Discreta, que no es más que una adaptación de la Teoría de Morse al caso de estructuras celulares. Sin entrar en detalles, pues todos pueden encontrarse en el capítulo 3 y en las referencias allí citadas, la Teoría de Morse permite construir, a partir de una variedad, una estructura celular homotópicamente equivalente a la primera, ganando así en simplicidad si lo que nos interesa de la variedad es solo su topología. En el caso discreto, en el que ya partimos de una estructura celular, la ganancia se basa en que la estructura final es más sencilla que la de partida y por lo tanto la resolución asociada contendrá menos información que la original, pero probaremos que la esencial se mantiene tras este proceso.

Para terminar la memoria, en el capítulo 4 expondremos un método recientemente desarrollado por Josep Àlvarez Montaner, Óscar Fernández Ramos y Philippe Gimenez, tutor de este Trabajo de Fin de Máster, que aplica la Teoría de Morse Discreta para obtener, para cualquier ideal monomial dado, resoluciones celulares mejores (en el sentido de que encierran menos información redundante) que las generalistas (aplicables a cualquier ejemplo) conocidas hasta el momento. Este método está detallado en el *preprint* [AFG17].

Dada la estructura de la memoria, es posible que el lector se pregunte en varias ocasiones por la utilidad de lo que exponemos, ya que en el primer capítulo mostraremos un método algebraico de minimalización de resoluciones aplicable a cualquier módulo y que siempre tiene éxito, mientras que conforme vayamos avanzando iremos imponiendo más y más restricciones, comenzando por la exigencia de que los ideales sean monomiales, pero también otras sobre las estructuras celulares para garantizar la aplicabilidad de la Teoría de Morse Discreta, por lo que al terminar tenemos un método de minimalización que solo es válido en un contexto muy limitado y que no siempre es eficaz, pues en muchas ocasiones no puede proporcionar la resolución minimal. Desde este momento quiero hacer hincapié en que la utilidad de estos métodos es eminentemente teórica, puesto que nos permiten minimalizar resoluciones de familias enteras de módulos (más concretamente de ideales) y deducir de estas propiedades interesantes, mientras que el método algebraico al que hemos hecho referencia solo es aplicable a ejemplos concretos, y por lo tanto resulta poco interesante desde el punto de vista teórico.

En cuanto a la bibliografía, creo necesario anticipar que el hecho de que sea significativamente amplia se debe principalmente a que, al tratar varias áreas distintas, precisamos de referencias específicas para cada una de ellas, puesto que no hay ninguna que desarrolle todos los aspectos que aquí aparecen con la misma profundidad. Es por ello que en cada

capítulo e incluso en cada sección se advierte de cuáles serán los textos que se han seguido para su redacción. Lo más similar a un libro de referencia sobre este tema es [OW07], que sin embargo se centra más en la parte de la amalgama entre resoluciones y estructuras celulares y la aplicación a esta de la Teoría de Morse Discreta, sin entrar en detalles sobre las propias resoluciones, las estructuras celulares e incluso los fundamentos de la Teoría de Morse Discreta. Por otra parte, y pese a no ser textos publicados, quiero destacar la utilidad que para mí han tenido el Trabajo de Fin de Grado ([Mar13]) y el Trabajo de Fin de Máster ([Mar14]) que también bajo la tutela de Philippe Giménez en esta misma Universidad realizó Umberto Martínez Peñas y en los que recoge los aspectos más importantes sobre resoluciones y resoluciones celulares respectivamente, complementando así en buena medida a [OW07].

Antes de finalizar esta introducción quiero explicar los objetivos con que me planteo la redacción de este trabajo. El primero de ellos era, como ya indiqué, lograr que cualquier persona con unos ciertos conocimientos sobre Matemáticas, pero no necesariamente especialista en el área, pudiera comprender cómo la Topología puede aplicarse al estudio y minimalización de resoluciones de módulos, pero sin tener que recurrir para ello a muchas referencias diferentes incluso dentro del mismo área, cada una con su notación y sus peculiaridades. Es por ello que consideré importante partir de cero, explicando primero con detalle qué son y qué significan las resoluciones de módulos, describiendo después diferentes estructuras celulares para finalmente centrarme en su interacción y la aplicación de la Teoría de Morse Discreta. No he escatimado en comentarios, y también hay suficientes ejemplos que, aunque sumamente sencillos, ilustran suficientemente la teoría. Todo esto ha dado como fruto una memoria considerablemente más extensa de lo recomendable para un Trabajo de Fin de Máster, pero espero que el lector pueda perdonar este aspecto en aras de la utilidad que me gustaría que tuviera para todo aquel interesado en iniciarse en estos temas o recordarlos, al igual que los trabajos a los que antes hice referencia, de naturaleza muy similar a este, han tenido para mí. El segundo objetivo, apropiado para alguien que está finalizando un Máster en Investigación en Matemáticas, consistía en demostrarme que puedo llegar a entender los últimos avances en investigación en un cierto tema, reto aún mayor si tenemos en cuenta que este se encuentra en la intersección de diversas áreas de las Matemáticas. Y aunque ha exigido esfuerzo y dedicación durante todo un año, pienso que lo he conseguido y de paso he descubierto en mí la capacidad para afianzar los hilos de la red e incluso asomarme al borde y aventurar qué podría haber más allá. El siguiente paso es tejer yo mismo.

## **Agradecimientos**

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor, Philippe Gimenez, el que me animara a arriesgarme con este tema, tan distinto al de mi Trabajo de Fin de Grado que él mismo dirigió, pese a que no conocía prácticamente nada sobre resoluciones, CW-complejos y Homología y tan solo los conceptos básicos sobre Teoría de Morse Clásica. Aún así me dio total libertad de actuación para que, partiendo de unas pocas referencias, rebuscara en una bibliografía que finalmente ha resultado ser mucho más amplia hasta lograr el objetivo de

encajar todas las piezas. Y también le agradezco la enorme confianza que ha depositado en mí para resolver mis propias dudas y el resto de problemas que me han ido surgiendo en la redacción, obligándome de este modo a ganar una independencia, tanto de recursos como de razonamientos, que presumo que será de vital importancia en mi carrera futura como matemático. Y todo ello a pesar de las dificultades que ha atravesado este año.

Al margen de lo puramente matemático, tengo que agradecer a Philippe que gestionara mi admisión en el Instituto de Investigación en Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVA), permitiéndome así obtener una Beca de Colaboración con dicho Instituto concedida por el Consejo Social de la Universidad de Valladolid. Esta memoria es fruto de dicha colaboración, por lo que quiero dar las gracias también al IMUVA y particularmente a sus gestores, que además me ha proporcionado un agradable lugar de trabajo durante este año.

Para desarrollar este proyecto, en gran medida debido a su carácter transversal, he tenido que pedir ayuda especializada a varios profesores que me han dado clase en estos últimos años. Todos ellos pusieron su muy escaso tiempo y sus muy amplios conocimientos a mi disposición para resolver dudas y corregir errores, por lo cual quiero expresarles mi más profundo agradecimiento.

Y por último, pero en absoluto por ello menos importante, quiero agradecer a mis seres queridos su apoyo incondicional tanto en lo relacionado con las Matemáticas como en todos los demás aspectos de mi vida.

## Notación

A lo largo de toda la memoria seguiremos los siguientes convenios notacionales:

Denotaremos al conjunto de los números naturales por  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ , y a los elementos de  $\mathbb{N}^n$  por  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , cuyo módulo será  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

$k$  será un cuerpo, y denotaremos por  $k[x_1, \dots, x_n]$  al anillo de polinomios en  $n$  variables sobre  $k$ , que usualmente abreviaremos por  $S$  cuando el número de variables no sea relevante o esté unívocamente determinado por el contexto. Los monomios (mónicos) de  $S$  serán productos  $\underline{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ , donde  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ; un polinomio genérico de  $S$  será  $f = \sum \lambda_\alpha \underline{x}^\alpha$ . El ideal maximal de  $S$  será  $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , es decir, el ideal generado por los elementos  $x_1, \dots, x_n$ .

Cuando hablemos de un anillo, nos referiremos a un anillo conmutativo con elemento unidad con las operaciones  $(+, \cdot)$ , que genéricamente denotaremos por  $A$ . Designaremos mediante  $R$  a un anillo cociente de  $S$  por un cierto ideal graduado.

Dado un conjunto  $E$ , denotaremos mediante  $\#E$  a su cardinal, y mediante  $\mathcal{P}(E)$  a su conjunto de partes.

## LOS PILARES ALGEBRAICOS

Como ya avanzamos en la introducción durante el análisis pormenorizado del título de esta memoria, el Álgebra, parapetada tras la palabra “resoluciones”, jugará un papel destacado, aunque pasivo. Destacado porque son objetos algebraicos los que requieren del estudio para el cual se desarrollaron la teoría y los métodos topológicos que detallaremos en los subsiguientes capítulos; pasivo porque nos centraremos en dicha teoría y estas construcciones algebraicas, las resoluciones de módulos, no jugarán otro papel que el de objetos de aplicación de los métodos referidos, sin profundizar en absoluto en las implicaciones algebraico-geométricas de los resultados obtenidos.

Esto explica el título del capítulo, en referencia a que el Álgebra aquí presentada pretende dar sentido y soporte a los contenidos del resto de capítulos. Y está, en efecto, solamente presentada, como una colección de definiciones, ejemplos y resultados, en su mayoría sin demostración, aunque siempre procurando dar referencias bibliográficas en las que encontrarlas. Esto ha resultado inevitable para que la extensión del texto fuera razonable, pues incluyendo todas las demostraciones, notas y ramificaciones interesantes de la teoría de las resoluciones multigraduadas y en particular de las sizigias, este primer capítulo sería en sí mismo una buena memoria, como ya demostrara Umberto Martínez Peñas en su Trabajo de Fin de Grado [Mar13]. Es por ello que tomaremos los contenidos de ese trabajo como referencia de esta parte algebraica, generalizando algunos aspectos, como las graduaciones, cuando nuestro objetivo lo requiera.

Y si la teoría topológica que vamos a desarrollar en los siguientes capítulos nació para profundizar en el estudio de las resoluciones de módulos, estas, y más concretamente la teoría de las sizigias, al igual que la mayoría de las construcciones del Álgebra Conmutativa, surgieron para responder a problemas de la Geometría Algebraica. De hecho, el gran impulsor del estudio de las sizigias, David Hilbert, llegó a ellas a través de la ahora llamada función de Hilbert y el polinomio homónimo, que encierra información relevante relativa a variedades algebraicas afines y proyectivas, como la dimensión y el grado (cardinal de la



intersección de la variedad con un subespacio genérico de codimensión igual a la dimensión de esta). Y dicho polinomio de Hilbert puede obtenerse a partir de una resolución del ideal asociado a la variedad, por lo que esta información geométrica y más aún se encuentra encerrada en la resolución y es especialmente accesible si es minimal, en cuyo caso podremos recuperarla de unos invariantes numéricos llamados números de Betti. Un libro monográfico sobre la relación entre sizigias y geometría es [Eis05]. También en [CLO97, Capítulo 9] se pueden ver aspectos geométricos derivados de las resoluciones y el polinomio de Hilbert, en particular las definiciones de dimensión y grado a las que hacíamos referencia antes, así como en las últimas páginas de [Mar13].

Comenzaremos el capítulo introduciendo el lenguaje y los resultados básicos sobre graduaciones y multigraduaciones de anillos y módulos (sección 1.1), para pasar inmediatamente en la sección 1.2 a definir los complejos multigraduados y, como un caso particular, las resoluciones, de entre las cuales nos interesarán las minimales. Profundizaremos algo más en su significado al hablar de sizigias, para continuar en la siguiente sección definiendo los números de Betti. Dedicaremos la última sección a introducir un caso particular de módulos, los ideales monomiales, que son los que nos interesarán en los siguientes capítulos. En este contexto presentaremos la definición algebraica de la resolución de Taylor como un ejemplo de resolución que, pese a no ser minimal, debido a su sencillez al interpretarla como una resolución celular (de hecho simplicial) jugará un papel importante en esta memoria, siendo el punto de partida del método de poda de resoluciones celulares que veremos en el capítulo 4.

Las principales referencias para este capítulo serán [MS05], [Mar13], [Mar14], [Eis95] y [Eis05].

---

## 1.1 MULTIGRADUACIONES

---

Una propiedad importante del anillo de polinomios es que admite una graduación natural, la llamada graduación estándar, que es la que corresponde a la noción de grado de un polinomio que todos conocemos. En esta sección daremos una definición general de anillos y módulos graduados que, a la postre, proporcionará una graduación más fina que la estándar sobre el anillo de polinomios. Las principales referencias serán [Eis95], en particular la sección 1.5, [OW07, Sección 2.1], [MS05, Capítulos 7 y 8] y muy especialmente [Pee11, Secciones 1.1 y 1.2].

**Definición 1.1 (Anillo y módulo graduados)** Sean  $A$  un anillo y  $\Lambda$  un semigrupo (conmutativo con elemento neutro). Diremos que  $A$  es graduado sobre  $\Lambda$  si existen subgrupos  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de  $A$  tales que:

- $A = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ , y
- $A_\lambda A_{\lambda'} \subset A_{\lambda + \lambda'}$ ,  $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$ .

Análogamente, si  $(M, +, \cdot_A)$  es un  $A$ -módulo (donde  $A$  es un anillo graduado), se dice que es *graduado sobre  $\Lambda$*  si existen subgrupos suyos  $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  tales que:

- $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  (como grupos), y
- $A_\lambda M_{\lambda'} \subset M_{\lambda+\lambda'}$ ,  $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$ .

$A_\lambda$  y  $M_\lambda$  se denominan *componentes homogéneas  $\lambda$ -ésimas* o de grado  $\lambda$  de  $A$  y  $M$ , respectivamente; sus elementos son los *elementos homogéneos* de grado  $\lambda$  de  $A$  y  $M$ .

Un elemento  $f \in M$  se escribe de forma única como  $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ , donde  $f_\lambda \in M_\lambda$  y  $f_\lambda = 0$  salvo para una cantidad finita. Decimos entonces que  $f_\lambda$  es la *componente homogénea* de grado  $\lambda$  de  $f$ . Puesto que un anillo  $A$  es trivialmente un  $A$ -módulo, esta definición es válida igualmente para elementos de un anillo.

Si denotamos por  $0$  al elemento neutro de  $\Lambda$ , de  $A_0 M_0 \subset M_0$  deducimos que  $M_0$  es un submódulo de  $M$ , y de  $A_0 M_\lambda \subset M_\lambda$  que cada  $M_\lambda$  es un  $A_0$ -módulo, y la suma directa es una suma directa de  $A_0$ -módulos.

Nuestro objetivo es estudiar construcciones a partir del anillo de polinomios  $S$  en un número finito de indeterminadas, por lo que queremos ver graduaciones de dicho anillo.

---

### EJEMPLO 1.2 (La graduación estándar de $k[x_1, \dots, x_n]$ )

---

Se considera el semigrupo de los naturales  $\mathbb{N}$ , con la operación suma usual, y queremos dar una estructura de anillo graduado de  $S$  sobre  $\mathbb{N}$ . Dado un monomio  $\underline{x}^\alpha \in S$ , se dice que tiene *grado*  $\deg(\underline{x}^\alpha) = |\alpha|$ . Si  $f = \sum \lambda_\alpha \underline{x}^\alpha \in S$ , se dice que tiene *grado*  $\deg(f) = \max\{|\alpha| : \lambda_\alpha \neq 0\}$ , y se dice que es *homogéneo* si todos sus monomios tienen el mismo grado. La graduación estándar de  $S$  sobre  $\mathbb{N}$  es aquella para la que las componentes homogéneas son los conjuntos de elementos homogéneos de un cierto grado, es decir,  $S_m = \{f \in S : f \text{ es homogéneo con } \deg(f) = m\}$ . Claramente es una graduación, pues  $S = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} S_m$  y  $S_m S_k \subset S_{m+k}$  equivale a  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ .

Para nuestros intereses en esta memoria tanta importancia como la graduación estándar de  $S$  tiene la siguiente graduación, también llamada *multigraduación estándar* o  $\mathbb{N}^n$ -graduación estándar de  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

---

### EJEMPLO 1.3 (La multigraduación estándar de $k[x_1, \dots, x_n]$ )

---

Consideramos ahora el semigrupo conmutativo y con elemento neutro  $\mathbb{N}^n$ , donde la operación suma es la definida componente a componente en el semigrupo  $\mathbb{N}$ , y el neutro es  $(0, \dots, 0)$ . Entonces, asignando a los monomios  $x_i$  grados (también llamados *multigrados*)  $m\deg(x_i) = \mathbf{e}_i$ , donde  $\mathbf{e}_i$  es el vector  $i$ -ésimo de la base estándar de  $\mathbb{N}^n$ , es claro que  $m\deg(\underline{x}^\alpha) = \alpha$ , y se tiene una graduación, la *multigraduación estándar* de  $S$  sobre  $\mathbb{N}^n$ , en la que las componentes homogéneas son  $S_\alpha = \{\lambda \underline{x}^\alpha : \lambda \in k\}$ .

Evidentemente los elementos homogéneos de  $S$  para esta graduación son precisamente los monomios. La definición de suma en  $\mathbb{N}^n$  hace que la comprobación de que se trata efectivamente de una graduación sea inmediata.

Dando un orden monomial en  $S$  (ver, por ejemplo, [CLO97, Sección 2.2]) podemos definir el multigrado de polinomios cualesquiera de  $S$ , al igual que hicimos con la graduación estándar (aprovechando el orden natural sobre  $\mathbb{N}$ ).

Esta graduación puede entenderse como un refinamiento de la estándar, puesto que  $S_i = \bigoplus_{|\alpha|=i} S_\alpha$ , cada componente homogénea para la graduación estándar puede descomponerse como suma directa de una cantidad finita de componentes homogéneas para la multigraduación estándar.

Estas serán las dos graduaciones que manejaremos en la práctica, por lo que a partir de esta sección e incluso en algunos de los subsiguientes resultados nos restringiremos a ellas, renunciando a la generalidad de tratar con semigrupos. De hecho, los semigrupos más generales posibles para los que podemos desarrollar esta teoría son los semigrupos conmutativos cancelativos positivos, pues en ellos es todavía cierto el Lema de Nakayama (cuya versión para el caso (multi)graduado es el lema 1.11) y por lo tanto las generalizaciones de los teoremas 1.12 y 1.13. La definición de estos semigrupos, junto con propiedades suyas que avalan que son “aptos para graduar” se puede encontrar en [CP01], así como en [MS05, Capítulo 7] con una nomenclatura distinta. En particular podemos considerar las graduaciones análogas a las anteriores utilizando como semigrupos  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}^n$  respectivamente, con lo que obtenemos grados negativos que resultan útiles al tratar con polinomios de Laurent, aunque nos limitaremos a los casos que ya hemos visto.

En esta memoria, los  $S$ -módulos tendrán tanta o más presencia que  $S$ , por lo que conviene que veamos algunas propiedades de estos.

**Proposición 1.4** Un  $A$ -módulo graduado  $M$  sobre un semigrupo  $\Lambda$  admite un sistema de generadores homogéneos. Dicho  $A$ -módulo  $M$  es finitamente generado si y solo si admite un sistema finito de generadores homogéneos.

*Demostración.* Puesto que  $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ , evidentemente  $M$  está generado por sus elementos homogéneos, luego admite un sistema de generadores homogéneos. Si suponemos que  $M$  es finitamente generado, admite un sistema de generadores finito y bastará con tomar las componentes homogéneas de los elementos de dicho sistema, que serán un número finito. El recíproco es trivial.  $\square$

También nos interesará considerar los submódulos de un módulo graduado dado.

**Proposición 1.5** Sea  $N$  un submódulo de un  $A$ -módulo graduado  $M$  sobre un semigrupo  $\Lambda$ . Son equivalentes:

1. Si  $m \in N$ , entonces toda componente homogénea de  $m$  está en  $N$ .
2.  $N = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$  (como grupos), donde  $N_\lambda = N \cap M_\lambda$ .

3.  $N$  está generado por sus elementos homogéneos.
4.  $N$  tiene un sistema de generadores homogéneos.

Todo submódulo que cumpla estas propiedades se denomina *submódulo graduado* u *homogéneo* de  $M$  y es un módulo graduado con la graduación heredada de  $M$ ,  $N = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ .

*Demostración.* Las implicaciones  $1 \Rightarrow 2$ ,  $2 \Rightarrow 3$  y  $3 \Rightarrow 4$  son evidentes. Veamos entonces  $4 \Rightarrow 1$ . Si  $m \in N$ ,  $m = \sum_{j \in \Lambda} a_j g_j$ , donde  $\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  es el sistema de generadores homogéneos y los  $a_j \in A$  son elementos homogéneos. Basta entonces con agrupar los  $a_j g_j$  del mismo grado para comprobar que cada componente de  $m$  está en  $N$ .  $\square$

Y una vez que tenemos bien definidos tanto módulos como submódulos graduados de los primeros que heredan la graduación, como es natural en Álgebra Conmutativa nos preguntamos qué ocurre en el paso al cociente (con la esperanza, que en esta ocasión se cumple, de que todo continúe funcionando).

**Proposición 1.6** Sea  $N$  un submódulo graduado del  $A$ -módulo graduado  $M$  sobre el semigrupo  $\Lambda$ . Entonces:

1.  $M/N = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (M/N)_\lambda$  (como grupos), donde  $(M/N)_\lambda \cong M_\lambda/N_\lambda$  y se tiene la contención  $A_\lambda(M/N)_{\lambda'} \subset (M/N)_{\lambda+\lambda'}$ . Es decir,  $M/N$  adquiere de forma natural una graduación a partir de la de  $M$ .
2. Existe una biyección entre los submódulos homogéneos de  $M$  que contienen a  $N$  y los submódulos homogéneos de  $M/N$ .

*Demostración.* 1. En virtud de la proposición anterior, están bien definidos los cocientes  $M/N = \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \right) / \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \right) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda/N_\lambda$ . Entonces  $(M/N)_\lambda$  es la contraimagen por dicho isomorfismo de  $M_\lambda/N_\lambda$  y a partir de esto es inmediato que  $A_\lambda(M/N)_{\lambda'} \subset (M/N)_{\lambda+\lambda'}$ .

2. Se sigue de tomar en cada caso sistemas de generadores homogéneos.  $\square$

Estos resultados se aplican en particular a anillos e ideales multigraduados y se deduce que los ideales multigraduados de  $S$  son exactamente los *ideales monomiales* (que admiten un sistema de generadores formado por monomios). Profundizaremos sobre ellos en la sección 1.4.

El objetivo de esta sección es introducir la categoría de módulos graduados en la que trabajaremos en el resto de la memoria (de hecho nos restringiremos a los módulos multigraduados, como ya hemos adelantado). Puesto que ya hemos visto los objetos, procedemos ahora a definir los morfismos.

**Definición 1.7 (Homomorfismo graduado)** Decimos que un homomorfismo  $\Phi : M \rightarrow N$  entre  $A$ -módulos graduados sobre un semigrupo  $\Lambda$  es *graduado* de grado  $\lambda$  o simplemente de grado  $\lambda$  si la imagen de un elemento homogéneo de grado  $\lambda'$  es un elemento homogéneo de grado  $\lambda + \lambda'$ , para todo elemento homogéneo que no pertenece a  $\ker(\Phi)$ . Si  $\Phi$  tiene grado 0, diremos simplemente que  $\Phi$  es graduado. Denotaremos por  $\text{Hom}_\lambda(M, N)$  al conjunto de homomorfismos de grado  $\lambda$  de  $M$  en  $N$ .

En general  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_\lambda(M, N) \subset \text{Hom}(M, N)$ , siendo este último el conjunto de los homomorfismos de módulos entre  $M$  y  $N$ , pero si  $M$  es finitamente generado se tiene la igualdad (ver [Pee11, Proposición 2.7]).

De nuevo todo funciona bien al considerar homomorfismos graduados entre módulos, y los módulos que surgen de forma natural a partir de estos homomorfismos son de nuevo graduados, como afirma la siguiente proposición, demostrada en [Pee11, Proposición 2.9].

**Proposición 1.8** Si  $\Phi : M \rightarrow N$  es un homomorfismo graduado de  $A$ -módulos, entonces  $\ker(\Phi)$  e  $\text{Im}(\Phi)$  son submódulos graduados de  $M$  y  $N$  respectivamente, y  $\text{Coker}(\Phi)$  es un  $A$ -módulo graduado.

En muchas ocasiones nos interesará alterar la graduación de los módulos, generalmente para hacer que un determinado homomorfismo sea de grado 0. Esto se hace mediante el llamado desplazamiento de grados. Para evitar imponer condiciones adicionales sobre el semigrupo, consideraremos ya el caso de  $S$ -módulos con la multigraduación estándar.

**Definición 1.9 (Desplazamiento de graduaciones)** Dado un  $S$ -módulo multigraduado, definimos la graduación *desplazada* o *trasladada* (en inglés *shifted*) con *desfase*  $\alpha$  como  $M(-\alpha)$  de forma que  $M(-\alpha)_\beta = M_{\beta-\alpha}$ , donde se define  $M_\gamma = 0$  si  $\gamma \in \mathbb{Z}^n$  tiene alguna componente negativa.

Resumiendo: los grados de  $M(-\alpha)$  son los mismos que los de  $M$ , pero empezando en grado  $\alpha$ . Así, si  $\Phi : M \rightarrow N$  es un homomorfismo (multi)graduado de grado  $\alpha$ , el homomorfismo  $\tilde{\Phi} : M(-\alpha) \rightarrow N$  tal que  $\tilde{\Phi}(m) = \Phi(m)$  para todo  $m \in M$  (como  $S$ -módulo, obviando la graduación) es de grado 0.

---

### EJEMPLO 1.10

En la práctica, el ejemplo de módulo graduado que utilizaremos y que motiva esta sección es el obtenido con la suma directa de copias de  $S$  con graduaciones y multigraduaciones desplazadas con distinto desfase, es decir, el  $S$ -módulo libre  $M = S(-\alpha_1) \oplus \cdots \oplus S(-\alpha_r)$  en el caso de la multigraduación, que describiremos a continuación con detalle (para la graduación se procede de forma análoga). Considerando la base canónica de  $S^r$ ,  $\{e_1, \dots, e_r\}$  con  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , donde el 1 está en la posición  $i$ -ésima,  $1 \leq i \leq r$ , se define  $\deg(e_i) = \alpha_i$ . Es decir, la componente homogénea de grado  $\beta$  de  $M$  es

$$M_{\boldsymbol{\beta}} = \left\{ \mathbf{m} = \sum_{j=1}^r q_j \mathbf{e}_j : q_j \in S_{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_j} \right\} = S_{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1} \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus S_{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_r} \langle \mathbf{e}_r \rangle,$$

donde la suma directa es una suma directa de  $k$ -espacios vectoriales, y donde  $S_{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_j} \langle \mathbf{e}_j \rangle$  denota al  $k$ -espacio vectorial formado por productos de un elemento de  $S_{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_j}$ , que será 0 si  $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_j$  tiene alguna entrada negativa, por  $\mathbf{e}_j$ . De hecho, puesto que estamos en el caso multigradado, los elementos de  $S_{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_j}$  serán los diferentes productos por constantes de un único monomio, el de grado  $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_j$  (siempre que  $S_{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_j} \neq 0$ ). Los elementos de  $S_{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_j} \langle \mathbf{e}_j \rangle$  son, en cierto modo, generalizaciones de los monomios clásicos en el módulo  $M$ .

Es decir, los elementos de la base tienen un cierto multigrado, al que se suma el del coeficiente (que será un polinomio homogéneo puesto que no estamos tratando otro caso, ya que nos veríamos obligados a introducir órdenes monomiales para tener bien definido el multigrado de un elemento) para obtener el multigrado total.

Así, si consideramos  $S = k[x_1, x_2]$  y el  $S$ -módulo  $S(-2,0) \oplus S(-1,3)$ , el elemento  $(x_1 x_2^3, x_1^2)$  es homogéneo de multigrado  $(3,3)$ , y el homomorfismo de  $S$ -módulos  $\Phi : S(-2,0) \oplus S(-1,3) \rightarrow S$  tal que  $\Phi(\mathbf{e}_1) = x_1^2$ ,  $\Phi(\mathbf{e}_2) = x_1 x_2^3$  es homogéneo de grado  $\mathbf{0}$ .

En algunos textos se utiliza una notación monomial para denotar los multigrados, considerando el semigrupo multiplicativo de los monomios unitarios de  $S$ ,  $\{\underline{x}^{\boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n\}$ . Con dicha notación, la graduación trasladada se escribiría como  $M(\underline{x}^{\boldsymbol{\alpha}}) = M(-\boldsymbol{\alpha})$ ; así  $S(\underline{x}^{\boldsymbol{\alpha}}) \oplus S(\underline{x}^{\boldsymbol{\beta}}) = S(\boldsymbol{\alpha}) \oplus S(\boldsymbol{\beta})$ , y diríamos que  $\text{mdeg}(\mathbf{e}_1) = \underline{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ .

Para terminar la sección, daremos unos resultados importantes para el resto del capítulo y por ende para los demás, que prueban, en particular, que si  $M$  es un  $R$ -módulo (multi)graduado y libre, (recordemos que  $R$  es un cociente de  $S$  por un cierto ideal), entonces tiene una base formada por elementos homogéneos, es decir, las graduaciones de  $R^n$  son todas como las del ejemplo 1.10, sustituyendo  $S$  por  $R$ .

Comenzaremos con una versión (multi)graduada del Lema de Nakayama, que no es exactamente un caso particular del resultado que tradicionalmente se conoce bajo este nombre (ver, por ejemplo [Eis95, Corolario 4.8]).

**Lema 1.11 (de Nakayama (multi)graduado)** Sean  $J$  un ideal propio (multi)graduado de  $R$  y  $M$  un  $R$ -módulo (multi)graduado finitamente generado. Se verifican los siguientes enunciados:

1. Si  $M = JM$  entonces  $M = 0$ .
2. Si  $M = JM + N$ , donde  $N$  es un submódulo (multi)graduado de  $M$ , entonces  $M = N$ .

Este lema, en la versión graduada, se puede encontrar en [Pee11, Lema 2.11]. La demostración se basa en que un  $A$ -módulo finitamente generado siempre tiene un generador de

grado minimal; por lo tanto, para adaptarla al caso multigraduado basta con elegir un orden monomial. En [Eis95, Ejercicio 4.6] puede verse enunciada una versión del Lema de Nakayama para la que la graduación permite suprimir la hipótesis de finitud. De hecho, en [CP01, Sección 4] se explica que esta versión es válida para graduaciones sobre cualquier semigrupo conmutativo, cancelativo y positivo, en particular  $\mathbb{N}$ .

El Lema de Nakayama nos conduce directamente a los siguientes resultados, que se corresponden con [Pee11, Teorema 2.12], donde se puede ver su demostración (en el caso graduado, aunque es análoga para el multigraduado).

**Teorema 1.12** Sea  $M$  un  $R$ -módulo multigraduado finitamente generado. Entonces:

1. Si  $\{\overline{\mathbf{m}}_1, \dots, \overline{\mathbf{m}}_p\}$  es una base del  $k$ -espacio vectorial  $\overline{M} = M/\mathfrak{m}M$ , con  $\mathbf{m}_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  elementos homogéneos de  $M$ , entonces  $\{\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_p\}$  es un sistema minimal de generadores homogéneos de  $M$ . Además, todo sistema minimal de generadores homogéneos de  $M$  se obtiene de esta forma.
2. Todo sistema minimal de generadores homogéneos de  $M$  tiene  $p$  elementos, de los cuales  $d_\alpha$  tienen multigrado  $\alpha$ , donde  $d_\alpha = \dim_k(\overline{M}_\alpha)$ .

Del segundo apartado del teorema anterior se deduce en particular que todo ideal monomial de  $S$  admite un único sistema minimal de generadores monomiales. Esto se puede probar también viendo que un sistema minimal de generadores monomiales debe ser una base de Gröbner reducida del ideal para cualquier orden monomial.

Finalmente tenemos el resultado que habíamos anticipado.

**Teorema 1.13** Sean  $M$  un  $R$ -módulo multigraduado libre finitamente generado y un sistema minimal de generadores homogéneos  $\{\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_p\}$ . Entonces dicho sistema forma una base de  $M$  y, de hecho, la aplicación  $\varphi: R(-\alpha_1) \oplus \dots \oplus R(-\alpha_p) \rightarrow M$ , tal que  $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{m}_i$  con  $\text{mdeg}(\mathbf{m}_i) = \alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , es un isomorfismo de grado  $\mathbf{0}$ .

Evidentemente para completar la demostración bastará con probar que  $\varphi$  es un isomorfismo, y esto puede encontrarse (en el caso graduado) en la demostración del lema 9.2 de [Pee11] (aunque aparentemente lo que se quiere demostrar es el recíproco). La demostración en el caso multigraduado es análoga.

---

## 1.2 COMPLEJOS MULTIGRADUADOS Y RESOLUCIONES

---

En esta sección presentaremos las estructuras sobre las que trabajaremos en el resto de la memoria: los complejos (multi)graduados de módulos y, en particular, las resoluciones libres (multi)graduadas de módulos finitamente generados, de entre las que nos interesarán especialmente las minimales, pues de hecho nuestro objetivo en el trabajo es dar métodos de minimalización de resoluciones.

### 1.2.1 Complejos multigraduados

Comencemos con la estructura más general de complejos multigraduados. Si se considera la graduación, las definiciones son completamente análogas; de hecho lo son en el caso más general en que se considera la graduación procedente de un semigrupo conmutativo, cancelativo y positivo, enunciadas en términos similares a esos las podemos encontrar en [OW07, Sección 2.1]. Otra referencia será [Pee11, Sección 1.3].

**Definición 1.14 (Complejo multigraduado de módulos)** Un *complejo*  $\mathcal{C}$  o  $(\mathcal{C}, d)$  de  $R$ -módulos es una sucesión de  $R$ -módulos  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  y de homomorfismos de  $R$ -módulos  $d = \{d_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  con  $d_i : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_{i-1}$ , llamados *diferenciales* de  $\mathcal{C}$ , que verifican  $d_i \circ d_{i+1} = 0$ .

$$\mathcal{C} \equiv \cdots \rightarrow \mathcal{C}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{C}_i \xrightarrow{d_i} \mathcal{C}_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{C}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0 \rightarrow \cdots .$$

Diremos que es un *complejo por la izquierda* si  $\mathcal{C}_i = 0$  para todo  $i < 0$ , es decir,

$$\mathcal{C} \equiv \cdots \rightarrow \mathcal{C}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{C}_i \xrightarrow{d_i} \mathcal{C}_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{C}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0 \rightarrow 0 .$$

Se dice que  $(\mathcal{C}, d)$  es un *complejo (por la izquierda) sobre un  $R$ -módulo  $M$*  si es un complejo por la izquierda y se tiene un homomorfismo de  $R$ -módulos  $\epsilon : \mathcal{C}_0 \rightarrow M$  (llamado *aumento*) tal que  $\epsilon \circ d_1 = 0$ .

$$\mathcal{C} \equiv \cdots \rightarrow \mathcal{C}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{C}_i \xrightarrow{d_i} \mathcal{C}_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{C}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0 .$$

El complejo es *(multi)graduado* si cada  $\mathcal{C}_i$  es un módulo (multi)graduado y cada  $d_i$  es un homomorfismo de (multi)grado  $\mathbf{0}$  (o  $0$  en el caso graduado). Un complejo sobre  $M$  es (multi)graduado si es un complejo (multi)graduado,  $M$  es (multi)graduado y el aumento también es de multigrado  $\mathbf{0}$  ( $0$  en el caso graduado).

**Definición 1.15** Dado un complejo por la izquierda  $\mathcal{C}$  (ya sea sobre un módulo  $M$  o no), se define su longitud como  $\text{long}(\mathcal{C}) = \max\{i \in \mathbb{N} : \mathcal{C}_i \neq 0\}$ .

Nótese que si el complejo es sobre un módulo  $M$ , se dice que tiene igual longitud que otro en el que no se especifique tal propiedad y que conste de un módulo no nulo menos, por lo que, dicho de manera informal,  $M$  “no se cuenta”, ya que su presencia se da por supuesta.

Un complejo multigraduado  $\mathcal{C}$  se dice que es bigraduado, pues  $\mathcal{C}_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{C}_{i, \alpha}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , donde  $\mathcal{C}_i$  se llama la componente de *grado homológico*  $i$  de  $\mathcal{C}$ , y  $\mathcal{C}_{i, \alpha}$  es la componente homogénea de multigrado  $\alpha$  de  $\mathcal{C}_i$ , y sus elementos se dice que tienen grado homológico  $i$  y multigrado interno (aunque sirve igualmente con el grado)  $\alpha$ . El grado homológico se denotará por  $\text{hdeg}$ . Como en el caso de módulos graduados, se define el *complejo desplazado o trasladado* (en grado homológico)  $\mathcal{C}[p]$  como el obtenido de  $\mathcal{C}$  mediante  $\mathcal{C}[p]_i = \mathcal{C}_{p+i}$ .



**EJEMPLO 1.16**

El complejo de  $R$ -módulos  $\mathcal{C}$  tiene de hecho estructura de  $R$ -módulo, y con esta estructura el grado homológico define efectivamente una graduación como las que vimos en la sección 1.1, por lo que no resulta extraño que digamos que el complejo graduado es bigraduado. Si consideramos  $d : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  como un homomorfismo de  $R$ -módulos,  $d$  tiene grado homológico  $-1$  y multigrado  $\mathbf{0}$ .

**EJEMPLO 1.17**

En virtud del teorema 1.13, si cada  $R$ -módulo  $\mathcal{C}_i$  de un complejo multigraduado  $\mathcal{C}$  es libre y de generación finita, entonces puede escribirse como

$$\mathcal{C}_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R(-\alpha)^{c_{i,\alpha}},$$

y por lo tanto el complejo es de la forma

$$\mathcal{C} \cong \dots \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R(-\alpha)^{c_{i,\alpha}} \xrightarrow{d_i} \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R(-\alpha)^{c_{i-1,\alpha}} \longrightarrow \dots$$

**EJEMPLO 1.18**

Volviendo al ejemplo 1.10, si en  $S = k[x_1, x_2]$  llamamos  $\mathcal{C}_1 = S(-2, 0) \oplus S(-1, 3)$  y  $\mathcal{C}_0 = S$ , y tomamos como diferencial  $d_1 = \Phi$ , tenemos trivialmente el complejo (por la izquierda) multigraduado

$$\mathcal{C} \cong 0 \longrightarrow \mathcal{C}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0 \longrightarrow 0,$$

donde los homomorfismos no explicitados son los obvios.

Evidentemente la condición  $d_i \circ d_{i+1} = 0$  equivale a que  $\text{Im}(d_{i+1}) \subset \ker(d_i)$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$  y por lo tanto tienen sentido las siguientes definiciones.

**Definición 1.19 (Homología de un complejo)** Se define el  $i$ -ésimo módulo de homología del complejo  $\mathcal{C}$  como  $H_i(\mathcal{C}) = \ker(d_i) / \text{Im}(d_{i+1})$ . Los módulos  $Z_i(\mathcal{C}) = \ker(d_i)$  y  $B_i(\mathcal{C}) = \text{Im}(d_{i+1})$  reciben el nombre de módulos de *ciclos* y *bordes*, respectivamente. Se dice que el complejo  $\mathcal{C}$  es *exacto en*  $\mathcal{C}_i$  (o en el paso  $i$ ) si  $H_i(\mathcal{C}) = 0$ , y si esto ocurre para todo  $i \in \mathbb{Z}$  se dice que el complejo es *exacto*. Si un complejo por la izquierda es exacto en  $\mathcal{C}_i$  para todo  $i > 0$ , se dice que es *acíclico*, y si además  $H_0(\mathcal{C}) = W$  se dice que es *acíclico sobre*  $W$ .

Si  $\mathcal{C}$  es un complejo multigraduado, las proposiciones 1.8 y 1.6 permiten asegurar que los módulos de homología están multigraduados mediante  $H_i(\mathcal{C}) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} H_{i,\alpha}(\mathcal{C})$ , donde  $H_{i,\alpha}(\mathcal{C}) \cong Z_{i,\alpha}(\mathcal{C}) / B_{i,\alpha}(\mathcal{C})$ . Análogamente ocurre en el caso graduado y por lo tanto la homología está bigraduada.

Hemos definido nuevos objetos, los complejos de módulos (y en particular los (multi)graduados), por lo que lo siguiente que queremos formalizar serán los morfismos entre ellos.

**Definición 1.20 (Homomorfismo de complejos)** Dados dos complejos  $(\mathcal{C}, d)$  y  $(\mathcal{D}, \partial)$ , un *homomorfismo de complejos*  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es una sucesión de homomorfismos  $\varphi_i : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{D}_i$  tales que  $\varphi_{i-1} \circ d_i = \partial_i \circ \varphi_i$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$  (suele escribirse abreviadamente por  $\varphi \circ d = \partial \circ \varphi$ ).

Si tanto  $\mathcal{C}$  como  $\mathcal{D}$  son multigraduados, se dice que  $\varphi$  es un *homomorfismo de complejos multigraduados*, o simplemente que es *multigraduado* de multigrado  $\alpha$  si cada  $\varphi_i$  tiene multigrado  $\alpha$  (el mismo para todo  $i \in \mathbb{Z}$ ); análogamente en el caso graduado.

El siguiente diagrama ayuda a visualizar la situación:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C} \equiv \dots & \longrightarrow & \mathcal{C}_i & \xrightarrow{d_i} & \mathcal{C}_{i-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_{i-1} & & \\ \mathcal{D} \equiv \dots & \longrightarrow & \mathcal{D}_i & \xrightarrow{\partial_i} & \mathcal{D}_{i-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

No es difícil probar el siguiente lema ([Pee11, Lema 3.4]):

**Lema 1.21** Si  $\varphi$  es un homomorfismo de complejos entre  $(\mathcal{C}, d)$  y  $(\mathcal{D}, \partial)$ , se verifica que  $\varphi(\ker(d)) \subseteq \ker(\partial)$  y  $\varphi(\text{Im}(d)) \subseteq \text{Im}(\partial)$ , donde los índices correspondientes son los obvios.

En otras palabras, el homomorfismo lleva ciclos en ciclos y bordes en bordes y por lo tanto se tienen homomorfismos inducidos por  $\varphi$  a nivel de la homología  $H_i(\varphi) : H_i(\mathcal{C}) \rightarrow H_i(\mathcal{D})$  tales que  $H_i(\varphi)(\bar{c}) = \overline{\varphi_i(c)}$ . La sucesión de estos homomorfismos induce un homomorfismo

$$H(\varphi) : H(\mathcal{C}) \rightarrow H(\mathcal{D}).$$

Además, si  $\varphi$  es multigraduado de multigrado  $\alpha$ ,  $H(\varphi)$  también lo es y se tiene una familia de homomorfismos  $H_{i,\beta}(\varphi) : H_{i,\beta}(\mathcal{C}) \rightarrow H_{i,\alpha+\beta}(\mathcal{D})$  para todos  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^n$ . Evidentemente todo esto se puede traducir al caso graduado.

Y, como en toda categoría que se precie, tenemos que definir los subobjetos.

**Definición 1.22 (Subcomplejo)** Decimos que un complejo  $(\mathcal{D}, \partial)$  es un *subcomplejo* del complejo  $(\mathcal{C}, d)$  si  $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{C}_i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$  y las inclusiones  $j_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{C}_i$  forman un homomorfismo de complejos (es decir,  $\partial$  es la restricción de  $d$  a  $\mathcal{D}$ ).

Si  $\mathcal{C}$  es un complejo multigraduado, como cada  $\mathcal{C}_i$  es graduado se tiene que  $\mathcal{C}_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{C}_{i,\alpha}$  y como las diferenciales tienen multigrado  $\mathbf{0}$ , se cumple que  $d_i(\mathcal{C}_{i,\alpha}) \subseteq \mathcal{C}_{i-1,\alpha}$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Denotaremos por  $d_{i,\alpha}$  a la restricción de la diferencial  $d_i$  al multigrado interno  $\alpha$ . El complejo puede verse como en el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\
 \mathcal{C}_\alpha \equiv & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{C}_{i+1,\alpha} & \xrightarrow{d_{i+1,\alpha}} & \mathcal{C}_{i,\alpha} & \xrightarrow{d_{i,\alpha}} & \mathcal{C}_{i-1,\alpha} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\
 \mathcal{C}_\beta \equiv & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{C}_{i+1,\beta} & \xrightarrow{d_{i+1,\beta}} & \mathcal{C}_{i,\beta} & \xrightarrow{d_{i,\beta}} & \mathcal{C}_{i-1,\beta} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Cada fila  $\mathcal{C}_\alpha$  es un subcomplejo de  $k$ -espacios vectoriales de  $\mathcal{C}$  al considerar las diferenciales  $d_{i,\alpha}$ , que denotaremos en su conjunto por  $d_\alpha$ . Como  $d_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} d_{i,\alpha}$ ,  $\mathcal{C}$  está multigrado en el sentido de que  $\mathcal{C} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{C}_\alpha$ .

**Definición 1.23** En la situación anterior, se llama a  $\mathcal{C}_\alpha$  *componente homogénea o multigrada* de multigrado  $\alpha$ , o *banda* de multigrado  $\alpha$  de  $\mathcal{C}$ .

Claramente, por ser  $H_i(\mathcal{C}) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} H_{i,\alpha}(\mathcal{C}) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} H_i(\mathcal{C}_\alpha)$ ,  $\mathcal{C}$  será exacto si y solo si lo es cada  $\mathcal{C}_\alpha$ , donde  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . De nuevo, todo se puede reescribir de forma análoga en el caso graduado.

Una operación interesante (y previsible tras lo que hemos visto hasta ahora) entre complejos de módulos es su suma directa.

**Definición 1.24 (Suma directa de complejos de módulos)** Dada una familia de complejos de módulos  $\{(\mathcal{C}_\theta, d_\theta)\}_{\theta \in \Theta}$ , se define su *suma directa* como el complejo  $\bigoplus_{\theta \in \Theta} \mathcal{C}_\theta$  con módulos

$$\left( \bigoplus_{\theta \in \Theta} \mathcal{C}_\theta \right)_i = \bigoplus_{\theta \in \Theta} (\mathcal{C}_\theta)_i \text{ y diferencial } \bigoplus_{\theta \in \Theta} d_\theta \text{ dada por } \left( \bigoplus_{\theta \in \Theta} d_\theta \right)_i = \bigoplus_{\theta \in \Theta} (d_\theta)_i.$$

Si los complejos son todos (multi)graduados, su suma directa hereda de forma natural dicha (multi)graduación, y las componentes homogéneas serán las sumas directas de las componentes homogéneas del mismo grado de cada uno de los sumandos, mientras que la suma directa de homomorfismos de (multi)grado nulo es evidentemente de (multi)grado nulo.

Para terminar la subsección introduciremos la noción de homotopía entre homomorfismos de complejos y los resultados básicos que de ella se derivan. En [Pee11, Sección 6] se puede encontrar un análisis más profundo de las homotopías.

**Definición 1.25 (Homotopía entre homomorfismos de complejos)** Dos homomorfismos de complejos de  $R$ -módulos  $\varphi, \psi : (\mathcal{C}, d) \rightarrow (\mathcal{D}, \delta)$  se dice que son *homótopos* (o que  $\varphi$  es

homótopo a  $\psi$ ) y se denota por  $\varphi \simeq \psi$  si existe un homomorfismo de  $R$ -módulos graduados homológicamente  $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  de grado homológico 1 tal que  $\varphi - \psi = \partial \circ h + h \circ d$ , que recibe el nombre de *homotopía*. Esto equivale a decir que existe una sucesión de homomorfismos de  $R$ -módulos  $h_i: \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{D}_{i+1}$  tales que  $\varphi_i - \psi_i = \partial_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d_i$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

El siguiente diagrama ayuda a fijar ideas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{C}_{i+1} & \longrightarrow & \mathcal{C}_i & \xrightarrow{d_i} & \mathcal{C}_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \searrow^{h_i} & \downarrow^{\varphi_i - \psi_i} & & \swarrow_{h_{i-1}} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{D}_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & \mathcal{D}_i & \longrightarrow & \mathcal{D}_{i-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son complejos multigraduados y  $\varphi$  y  $\psi$  son homomorfismos multigraduados de complejos del mismo multigrado  $\beta$ , una homotopía  $h$  entre  $\varphi$  y  $\psi$  no tiene por qué ser multigrada, pero a partir de ella se puede construir otra homotopía  $h'$  que sí será multigrada de grado  $\beta$ : se define  $h'_i: \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{C}_{i,\alpha} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{D}_{i,\alpha}$  como  $h'_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (p_{i,\alpha+\beta} \circ h_i \circ q_{i,\alpha})$ , donde  $q_{i,\alpha}: \mathcal{C}_{i,\alpha} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{C}_{i,\alpha}$  es la inmersión de la componente de multigrado  $\alpha$  y  $p_{i,j}: \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{D}_{i,\alpha} \rightarrow \mathcal{D}_{i,\alpha}$  es la proyección sobre la componente de grado  $\alpha$ . Entonces  $h'_i$  es un homomorfismo de grado  $\beta$  y se comprueba que  $\varphi_i - \psi_i = \partial_{i+1} \circ h'_i + h'_{i-1} \circ d_i$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

Los dos resultados siguientes son el motivo principal por el que nos interesan las homotopías. Intuitivamente, el primero ([Pee11, Proposición 6.3]) nos dice que homomorfismos de complejos homótopos inducen homomorfismos iguales a nivel de la homología, y su corolario ([Pee11, Teorema 6.4]) nos proporciona una forma de probar que un determinado complejo de módulos es exacto.

**Proposición 1.26** Sean  $\varphi, \psi: (\mathcal{C}, d) \rightarrow (\mathcal{D}, \partial)$  dos homomorfismos de complejos de módulos. Si  $\varphi \simeq \psi$  entonces  $H(\varphi) = H(\psi)$ .

**Corolario 1.27** Sea  $\mathcal{C}$  un complejo de módulos. Si el homomorfismo identidad  $\text{Id}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es homótopo al homomorfismo 0, entonces  $\mathcal{C}$  es exacto.

Si somos capaces de obtener la expresión de una homotopía  $h$  entre  $\text{Id}$  y 0, para probar que  $(\mathcal{C}, d)$  es exacto solo tendremos que verificar que  $\text{Id}_i = d_{i+1} \circ h'_i + h'_{i-1} \circ d_i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

En realidad, los teoremas anteriores son válidos en una situación un poco más general, en la que a la homotopía no se le pide que sea un homomorfismo de  $R$ -módulos, sino tan solo de  $k$ -espacios vectoriales, en cuyo caso recibe el nombre de  *$k$ -homotopía*.

**EJEMPLO 1.28**

Sea  $R = k[x]/\langle x^2 \rangle$ , que es obviamente un  $k$ -espacio vectorial de base  $\{1, x\}$ . Se considera el complejo de módulos siguiente, donde las diferenciales son todas el producto por  $x$ :

$$\mathcal{C} \equiv \cdots \longrightarrow \mathcal{C}_{i+1} = R \xrightarrow{x} \mathcal{C}_i = R \xrightarrow{x} \cdots \xrightarrow{x} \mathcal{C}_1 = R \xrightarrow{x} \mathcal{C}_0 = R \longrightarrow 0.$$

Se define  $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $h_i: \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_{i+1}$  está definido por  $h_i(1) = 1$  y  $h_i(x) = (1-x)$  y es extendido a  $\mathcal{C}_i = R$  como un homomorfismo de  $k$ -espacios vectoriales. Entonces:

$$(xh_{i+1} + h_i x)(1) = xh_{i+1}(1) + h_i x(1) = x + (1-x) = 1$$

$$(xh_{i+1} + h_i x)(x) = xh_{i+1}(x) + h_i x(x) = x(1-x) + h_i(0) = x.$$

Por lo tanto  $h$  es una  $k$ -homotopía entre el homomorfismo identidad y el nulo de  $\mathcal{C}$ , luego  $\mathcal{C}$  es un complejo exacto en virtud del corolario 1.27.

**1.2.2 Resoluciones libres multigraduadas**

Una vez que hemos introducido las definiciones y las propiedades elementales de los complejos de módulos, estamos en condiciones de presentar un tipo concreto de ellos, aquellos complejos exactos sobre un módulo  $M$  formados por módulos libres, a los que llamaremos resoluciones de  $M$ , y que son los objetos centrales del estudio topológico que desarrollaremos en los subsiguientes capítulos. Dedicaremos lo que resta de sección a exponer propiedades algebraicas y ejemplos de resoluciones; la referencia principal es [Pee11].

**Definición 1.29 (Resolución libre)** Se denomina *resolución libre* de (o sobre) un  $R$ -módulo finitamente generado  $M$  a un complejo por la izquierda sobre  $M$ ,  $(\mathcal{F}, d)$ , que sea exacto y tal que  $M \cong \mathcal{F}_0/\text{Im}(d_1)$  y cada  $\mathcal{F}_i$  sea un  $R$ -módulo libre finitamente generado para todo  $i \geq 0$ .

$$\mathcal{F} \equiv \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{d_i} \mathcal{F}_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

Lo anterior se puede resumir diciendo que una resolución es un complejo por la izquierda acíclico sobre  $M$ , cuyos módulos son todos libres y finitamente generados. Si además  $\mathcal{F}$  es un complejo (multi)graduado sobre  $M$ , se dice que es una *resolución (multi)graduada* de  $M$  (en cuyo caso el isomorfismo  $M \cong \mathcal{F}_0/\text{Im}(d_1)$  también tiene (multi)grado nulo).

Dada una resolución libre sobre un  $R$ -módulo finitamente generado, las diferenciales  $d_i$  vienen representadas por matrices  $D_i$  cuyos coeficientes son elementos homogéneos de  $R$ . Estas matrices, que obviamente dependen del sistema de generadores elegido en cada módulo, reciben el nombre de *matrices diferenciales*.

Dado un  $R$ -módulo finitamente generado, siempre se podrá construir una resolución libre sobre él, que será (multi)graduada si lo era el módulo. Esto es lo que afirma el siguiente teorema, cuya demostración constructiva proporciona una suerte de algoritmo para obtener la citada resolución. Aunque lo enunciaremos en su versión multigrada, el caso graduado es completamente análogo.

**Teorema 1.30 (Existencia de una resolución libre)** Todo  $R$ -módulo  $M$  finitamente generado admite una resolución libre. Además, si  $M$  es multigrado entonces admite una resolución libre multigrada.

*Demostración.* Construiremos la resolución por inducción sobre el grado homológico  $i$ .

**Paso  $i = 0$**  Se eligen (en virtud de 1.4) generadores homogéneos de  $M$ ,  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_r$ , de multigrados respectivos  $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ . Se define  $\mathcal{F}_0 = R(-\boldsymbol{\alpha}_1) \oplus \dots \oplus R(-\boldsymbol{\alpha}_r)$ . Si  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$  son los vectores de la base canónica de  $\mathcal{F}_0$  (nótese que son homogéneos, de multigrados respectivos  $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ ), se define

$$\begin{aligned} \epsilon: \mathcal{F}_0 &\longrightarrow M \\ \mathbf{e}_j &\longmapsto \mathbf{m}_j \quad \text{para } 1 \leq j \leq r. \end{aligned}$$

Evidentemente,  $\epsilon$  es un homomorfismo multigrado de grado  $\mathbf{0}$  y sobreyectivo, y por lo tanto  $\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta (la definición de sucesión exacta de módulos puede encontrarse en [Eis95, pág. 16], un complejo exacto es en particular una sucesión exacta, y nosotros pretendemos asegurarnos de que la exactitud se cumple en cada paso).

Supóngase que ya se ha construido hasta el módulo  $\mathcal{F}_i$  y su correspondiente diferencial  $d_i$ .

**Paso  $i + 1$**  Por ser  $S$  un anillo de polinomios sobre un cuerpo, que siempre es noetheriano (ver la definición en [Eis95, Sección 1.4]), se puede aplicar el Teorema de la Base de Hilbert [Eis95, Teorema 1.2] y se concluye que es noetheriano, y como  $R$  es un cociente de  $S$ , en particular es imagen homomorfa de  $S$  (por la aplicación de paso al cociente), y [Eis95, Corolario 1.3] asegurar que es noetheriano. Entonces por ser  $\mathcal{F}_i$  un  $R$ -módulo finitamente generado, es noetheriano por [Eis95, Proposición 1.4], y por definición todo submódulo suyo es finitamente generado, en particular  $\ker(d_i)$ . Se elige  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s$  un sistema de generadores homogéneos suyos, de multigrados respectivos  $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_s$ . Se define  $\mathcal{F}_{i+1} = R(-\boldsymbol{\beta}_1) \oplus \dots \oplus R(-\boldsymbol{\beta}_s)$ . Otra vez se utiliza la base canónica  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s$  de  $\mathcal{F}_{i+1}$  para definir

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{i+1}: \mathcal{F}_{i+1} &\longrightarrow \ker(d_i) \subset \mathcal{F}_i \\ \mathbf{e}_j &\longmapsto \mathbf{f}_j \quad \text{para } 1 \leq j \leq s. \end{aligned}$$

De nuevo  $\tilde{d}_{i+1}$  es un homomorfismo sobreyectivo de multigrado  $\mathbf{0}$ , y al extenderlo a  $d_{i+1}: \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \mathcal{F}_i$  el multigrado es el mismo y por construcción  $\text{Im}(d_{i+1}) = \ker(d_i)$ , con lo que la sucesión  $\mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{d_i} \mathcal{F}_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$  es exacta y el complejo definido por inducción también lo es.  $\square$

La construcción del paso  $i + 1$ -ésimo se puede ver sobre el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F}_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & \mathcal{F}_i & \xrightarrow{d_i} & \mathcal{F}_{i-1} \\
 & \searrow \tilde{d}_{i+1} & \nearrow & & \\
 & & \ker(d_i) & & 
 \end{array}$$

En el proceso de construcción, si se tienen los generadores (multigraduados en su caso) de  $M$ , para hallar los generadores (multigraduados) de cada módulo  $\ker(d_i)$  hay que resolver los sistemas de ecuaciones lineales (en  $R$ )  $d_i(\mathbf{f}) = 0$ , pues como ya hemos dicho  $d_i$  viene dada por la matriz diferencial  $D_i$ . Calcular una *resolución* consiste entonces en *resolver repetidamente* sistemas de ecuaciones  $R$ -lineales. Aún así, no resulta inmediato resolver dichos sistemas y surgen algunas preguntas, como el número mínimo de generadores de los núcleos, cómo comprobar si cierto conjunto de soluciones generan todas las demás o si hay un procedimiento para extender en cada paso la sucesión exacta, es decir, para encontrar, dada  $B$ , la matriz  $C$  tal que  $R^t \xrightarrow{C} R^p \xrightarrow{B} R^q$  es exacta. El álgebra lineal resuelve este problema si  $R = k$ , en nuestro caso más general lo hacen las bases de Gröbner, a través del algoritmo de Schreyer (ver [Pee11, Sección 23], [Eis95, Sección 15.5]). Para más detalles sobre la interpretación de las resoluciones en estos términos, ver [Pee11, Sección 5].

No incluiremos ningún ejemplo de construcción de una resolución por este método porque resolver los citados sistemas es tedioso si no se recurre al algoritmo de Schreyer, y presentar la teoría de las bases de Gröbner nos desviaría de nuestro objetivo del capítulo de definir y dar las propiedades elementales de las resoluciones, para el que un ejemplo explícito de construcción no es demasiado relevante. El lector interesado puede dirigirse a [Pee11, Ejemplo 4.3], donde los sistemas son resueltos heurísticamente.

En general no se puede asegurar que el proceso termine (es decir, que exista  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{F}_i = 0$  para todo  $i \geq m$ ), aunque el Teorema de las Sizigias de Hilbert (teorema 1.45) garantiza la existencia de resoluciones libres que terminan en el caso de  $S$ -módulos y de hecho da una cota para  $m$ , que será el número de variables del anillo de polinomios  $S$  en el que estemos trabajando.

Es más, hay una resolución “más pequeña” que las demás, que en particular cumplirá esa cota, y a la que llamaremos resolución libre minimal, que probaremos que es en cierto modo única. La minimalidad de dicha resolución, junto con su unicidad, la hace especialmente interesante puesto que se trata de un objeto que contiene la misma información (de interés geométrico, por ejemplo, como anunciamos en la introducción del capítulo) que cualquier otra resolución, sin incluir aquella redundante procedente de la no minimalidad y con una cierta unicidad. Esto explica que queramos estudiar métodos de minimalización de resoluciones, tanto algebraicos, como veremos en esta sección, como otros que apro-

vechan la combinatoria de los módulos y la explotan desde un punto de vista topológico y que, si bien no siempre logran su objetivo, tienen utilidad teórica.

Por comodidad en la notación a partir de este punto consideraremos en ocasiones que  $M = \mathcal{F}_{-1}$ ,  $\epsilon = d_0$  y la aplicación nula es  $d_{-1}$ . La siguiente definición se puede traducir de nuevo al caso graduado.

**Definición 1.31 (Resolución libre multigraduada minimal)** Sea  $M$  un  $R$ -módulo multigraduado finitamente generado y  $(\mathcal{F}, d)$  una resolución libre multigraduada de  $M$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  es *minimal* si, dada una base  $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s\}$  de  $\mathcal{F}_{i+1}$  formada por elementos homogéneos, las imágenes  $d_{i+1}(\mathbf{g}_1), \dots, d_{i+1}(\mathbf{g}_s) \in \mathcal{F}_i$  forman un sistema minimal de generadores homogéneos de  $\ker(d_i) \subset \mathcal{F}_i$ , para todo  $i \geq -1$ .

En principio, habría que comprobar la independencia de la base elegida para asegurar que la definición es consistente, pero la siguiente proposición resuelve este punto, además de proporcionar una noción equivalente de resolución minimal mucho más útil en la práctica, pues es de comprobación inmediata a la vista de las matrices diferenciales.

**Proposición 1.32** Una resolución libre multigraduada  $\mathcal{F}$  de un  $R$ -módulo finitamente generado  $M$  es minimal si y sólo si  $d_{i+1}(\mathcal{F}_{i+1}) = \ker(d_i) \subset \mathfrak{m}\mathcal{F}_i$ , para cada  $i \geq -1$  (recordemos que  $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , el ideal maximal de  $S$ ).

Este resultado, que se corresponde con [Pee11, Teorema 7.3] donde se puede ver la demostración, implica en particular que una resolución libre graduada es minimal si y sólo si en ninguna de las matrices diferenciales  $D_i$ ,  $i \geq -1$ , aparecen coeficientes que sean unidades de  $R$ , es decir, constantes no nulas. Es evidente la utilidad de esta caracterización que nos permite saber, con un simple vistazo a la resolución (con las matrices diferenciales sobre las flechas de las diferenciales correspondientes), si es minimal y en caso de no serlo en qué paso está la obstrucción.

La siguiente definición y el teorema que le sigue están orientados a probar la unicidad de la resolución libre multigraduada minimal y explicar la forma de las obstrucciones a las que acabamos de hacer referencia. El caso graduado es totalmente análogo.

**Definición 1.33 (Complejo trivial)** Llamamos *complejo trivial corto multigraduado* a todo aquel complejo multigraduado de la forma  $0 \longrightarrow R(-\alpha) \xrightarrow{\text{Id}} R(-\alpha) \longrightarrow 0$  (obviando los módulos que son todos nulos). Llamamos *complejo trivial multigraduado* a todo complejo multigraduado que sea suma directa (ver definición 1.24) de complejos triviales cortos (en los que la parte relevante puede estar en diferentes grados homológicos).

**Teorema 1.34 (Existencia y unicidad de la resolución libre minimal multigraduada)** Sea  $M$  un  $R$ -módulo multigraduado finitamente generado.

1. Existe una resolución minimal multigraduada de  $M$ .
2. Si  $\mathcal{F}$  es una resolución libre multigraduada minimal de  $M$  y  $\mathcal{G}$  es otra resolución libre multigraduada de  $M$ , entonces existe un complejo trivial  $\mathcal{T}$  tal que  $\mathcal{G} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$ , donde el isomorfismo es de multigrado  $\mathbf{0}$ .



3. Dos resoluciones libres multigraduadas de  $M$  son isomorfas mediante un isomorfismo de grado  $\mathbf{0}$ .

Este teorema es el 7.5 de [Pee11]. El apartado 1 se obtiene de la construcción de la resolución libre multigraduada en la prueba del teorema 1.30 sin más que considerar en cada paso un sistema minimal de generadores homogéneos del núcleo correspondiente, de acuerdo con la definición 1.31. El apartado 3 se obtiene inmediatamente del 2 y la demostración de este es bastante técnica (puede encontrarse en [Pee11, Sección 9]), requiriendo el uso de las homotopías y del lema de Nakayama 1.11 (en concreto el teorema 1.12, que se obtiene a partir de él). Esto se debe a que se precisa que todos los sistemas minimales de generadores de los módulos que intervienen tengan el mismo número de elementos, de ahí que, en un abuso del lenguaje, se les llame bases. Por ello, aunque los complejos y las resoluciones libres pueden definirse sobre anillos noetherianos conmutativos cualesquiera (e incluso sobre algunos no conmutativos), el concepto de resolución libre minimal solo está bien definido en aquellos en los que se verifica el lema de Nakayama, como es el caso de los anillos noetherianos locales y de las álgebras finitamente generadas sobre un cuerpo y graduadas sobre un semigrupo conmutativo cancelativo positivo, donde se incluye nuestro estudio.

La resolución libre multigraduada minimal de un  $R$ -módulo libre multigraduado finitamente generado nos da una descripción de su “estructura” sin ninguna información redundante, pues en el paso 0 estamos dando un sistema minimal de generadores homogéneos de  $M$ , en el paso 1 damos un sistema minimal de relaciones homogéneas entre los generadores homogéneos de  $M$ , en el paso 2 encontramos un sistema minimal de relaciones homogéneas entre las relaciones que habíamos encontrado en el paso 1 y así sucesivamente hasta que no podamos encontrar más relaciones. No resulta sorprendente, por lo tanto, que muchas propiedades de  $M$  puedan extraerse de su resolución libre minimal. Más adelante, en la subsección 1.2.3, volveremos brevemente sobre estas relaciones, a las que llamaremos *sizigias*.

A continuación presentamos un ejemplo de minimalización de una resolución libre graduada, pues exige menos cálculos y es igualmente representativo que el caso multigraduado.

---

**EJEMPLO 1.35** (*Minimalización de resoluciones libres*)

---

Sea  $R = S = k[x, y]$ . Considérese la resolución libre graduada (solo la parte relevante, no nula) del ideal  $I = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$

$$0 \longrightarrow R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R(-3) \\ \oplus \\ R(-4) \\ \oplus \\ R(-5) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & 0 & y^3 \\ x & -y^2 & 0 \\ 0 & x & -x^2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R(-2) \\ \oplus \\ R(-2) \\ \oplus \\ R(-3) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} I \longrightarrow 0.$$

No es minimal, pues la última matriz diferencial tiene un 1 como coeficiente. Sean  $\mathbf{f}_1 = (f_1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{f}_2 = (0, f_2, 0)$ ,  $\mathbf{f}_3 = (0, 0, f_3)$  elementos de una base de  $R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5)$  (con lo que  $f_1$  es un generador de  $R(-3)$ ,  $f_2$  de  $R(-4)$  y  $f_3$  de  $R(-5)$ ). Cambiamos la base a  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  de forma que  $\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2$  y  $\mathbf{g}_3 = y^2 \mathbf{f}_1 + x \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ . En la nueva base la resolución es

$$0 \longrightarrow R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} R(-3) \\ \oplus \\ R(-4) \\ \oplus \\ R(-5) \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & 0 & 0 \\ x & -y^2 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} R(-2) \\ \oplus \\ R(-2) \\ \oplus \\ R(-3) \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} I \longrightarrow 0.$$

Esta resolución es suma directa del complejo trivial corto

$$0 \longrightarrow R(-5) \longrightarrow R(-5) \longrightarrow 0$$

cuya parte relevante está situada en los grados homológicos 2 y 3, y la resolución libre graduada minimal (pues ya no hay constantes no nulas en los coeficientes de las matrices diferenciales) siguiente:

$$0 \longrightarrow \begin{array}{c} R(-3) \\ \oplus \\ R(-4) \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & 0 \\ x & -y^2 \\ 0 & x \end{pmatrix}} \begin{array}{c} R(-2) \\ \oplus \\ R(-2) \\ \oplus \\ R(-3) \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} I \longrightarrow 0.$$

El proceso de extraer el complejo trivial corto de la resolución original como en el ejemplo se llama de *cancelación consecutiva*, y en este caso se dice que las dos copias de  $R(-5)$  se cancelan. Esta cancelación no se puede hacer siempre que en dos módulos consecutivos tengamos una componente homogénea del mismo grado: obsérvese que en la resolución minimal en los grados homológicos 1 y 2 hay una componente  $R(-3)$ , pero no por ello se cancela (de hecho, puesto que la resolución ya es minimal, no debe hacerse si se quiere seguir teniendo una resolución).

Este ejemplo no solo ilustra la existencia de una resolución minimal, como ya aseguraba el teorema 1.34, sino que proporciona un método práctico, el de las cancelaciones consecutivas, para obtener una resolución libre (multi)graduada minimal de un módulo concreto a partir de una resolución libre graduada suya cualquiera: basta con repetir el proceso de cancelación consecutiva tantas veces como sea necesario, evidentemente a lo sumo un número finito si la resolución de la que partíamos era finita (lo cual puede suponerse en el caso de  $S$ -módulos, en virtud del Teorema 1.45 de las Szigias de Hilbert, en

particular será finita la que proporciona el algoritmo de Schreyer). Tenemos por lo tanto un procedimiento de minimalización algebraico que funciona siempre para ejemplos concretos; aún así en los siguientes capítulos nuestro objetivo será dar otros métodos que, si bien no son aplicables a módulos cualesquiera y no siempre tienen éxito, aportan aspectos teóricos relevantes pues permiten el tratamiento conjunto de familias de módulos.

El siguiente resultado relaciona las resoluciones libres de un módulo y de su correspondiente módulo cociente, lo que en particular es cierto para un ideal y el anillo cociente que le corresponde. Pese a su sencillez, resulta de gran utilidad.

**Proposición 1.36** Sea  $M$  un submódulo finitamente generado del  $R$ -módulo libre  $R^s$ . Entonces

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{d_i} \mathcal{F}_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de  $M$  si y solo si

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{d_i} \mathcal{F}_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\epsilon} R^s \longrightarrow R^s/M \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de  $R^s/M$ , donde el homomorfismo  $R^s \longrightarrow R^s/M$  es el de paso al cociente.

En el caso (multi)graduado, considerando las correspondientes (multi)graduaciones en los módulos que intervienen inducidas por la de  $R$ , una resolución es minimal graduada si y solo si lo es la otra.

*Demostración.* Es consecuencia directa de que  $\text{Im}(\epsilon) = M$  y por lo tanto coincide con el núcleo de la aplicación cociente.  $\square$

### 1.2.3 Sizigias

En la subsección anterior ya introdujimos la noción de sizigias de un sistema minimal de generadores de un módulo como las relaciones homogéneas entre dichos generadores. Aunque este es el caso verdaderamente importante, podemos considerar las sizigias también en la situación más general en la que no requerimos la minimalidad. En esta subsección veremos cómo surgió la noción de resolución y la teoría que la rodea, destacando los paralelismos con lo que ya hemos visto en la subsección anterior.

**Definición 1.37 (Sizigias)** Sea  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado. Llamamos *sizigia* del sistema de generadores  $\{f_1, \dots, f_s\}$  de  $M$  a cualquier elemento  $(a_1, \dots, a_s) \in R^s$  tal que  $a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s = 0$ . En ocasiones también llamaremos sizigia a la relación, por extensión. Denominamos módulo de sizigias del sistema al  $R$ -módulo

$$\text{Siz}(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_s) \in R^s : a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s = 0\}.$$

Efectivamente  $\text{Siz}(f_1, \dots, f_s)$  es un  $R$ -módulo, puesto que evidentemente coincide con el núcleo del aumento en una resolución libre de  $M$ , y si  $M$  es (multi)graduado y el sis-

tema de generadores es homogéneo, según la construcción de la demostración del teorema 1.30 (paso  $i = 0$ ) el módulo  $\text{Siz}(f_1, \dots, f_s)$  es (multi)graduado, y tenemos *sizigias (multi)graduadas*.

El cálculo del módulo de sizigias de un sistema de generadores de un módulo dado no es, por tanto, más que el primer paso de la construcción de una resolución libre de dicho módulo, que se completa con la noción de presentación.

**Definición 1.38** Sea  $M$  un  $R$ -módulo finitamente generado. Llamamos *presentación* de  $M$  respecto del sistema de generadores  $\{f_1, \dots, f_s\}$  a todo homomorfismo  $\varphi : R^t \rightarrow R^s$  tal que, si  $\epsilon : R^s \rightarrow M$  es el aumento (es decir,  $\epsilon(e_j) = f_j$ ), entonces la sucesión  $R^t \xrightarrow{\varphi} R^s \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$  es exacta, es decir,  $\text{Im}(\varphi) = \ker(\epsilon) = \text{Siz}(f_1, \dots, f_s)$ . A la matriz de  $\varphi$  en las bases canónicas se la denomina *matriz de la presentación*.

Si  $M$  es multigraduado y los generadores son homogéneos, se puede considerar la *presentación multigraduada* escribiendo los módulos libres correspondientes como sumas directas de  $R$  con la multigraduación desplazada cuanto sea necesario, al igual que se hacía en la demostración del teorema 1.30 (de la que aprovechamos la mayor parte de la notación).

Obviamente, lo que aquí llamamos presentación no es más que la diferencial  $d_1$ , y calcular la presentación es lo mismo que construir el paso 1 de la resolución, solo hay que encontrar unos generadores  $\{g_1, \dots, g_t\}$  del módulo  $\text{Siz}(f_1, \dots, f_s)$  para obtener una presentación  $\varphi : R^t \rightarrow R^s$  dada por  $\varphi(e_j) = g_j$ ,  $j \in \{1, \dots, t\}$ . Recíprocamente, dada una presentación  $\varphi : R^t \rightarrow R^s$ ,  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_t)\}$  es un sistema de generadores de  $\text{Siz}(f_1, \dots, f_s)$  y por lo tanto las columnas de la matriz de la presentación generan el módulo de sizigias.

Tal y como hemos adelantado, un sistema de generadores de un módulo junto con sus sizigias (es decir, una presentación del módulo) determinan su estructura, es el sentido que establece la siguiente proposición.

**Proposición 1.39** Sean  $M$  y  $N$  dos  $R$ -módulos generados por  $\{f_1, \dots, f_s\}$  y  $\{g_1, \dots, g_s\}$  respectivamente, tales que  $\varphi : R^t \rightarrow R^s$  es una presentación de ambos respecto de estos sistemas de generadores (el que le corresponda en cada caso). Entonces  $M \cong N$ . En el caso (multi)graduado el isomorfismo es de (multi)grado 0.

*Demostración.* Obsérvese que  $M \cong R^s / \text{Siz}(f_1, \dots, f_s) = R^s / \text{Im}(\varphi) = R^s / \text{Siz}(g_1, \dots, g_s) \cong N$  □

Después de lo visto en la subsección anterior, el lector ya sabe que este proceso se puede repetir hasta agotar todas las relaciones, completando así una resolución libre. En los términos en los que estamos trabajando ahora, dado un  $R$ -módulo  $M$  generado por  $\{f_1, \dots, f_s\}$  se calcula su módulo de sizigias  $\text{Siz}(f_1, \dots, f_s)$  y se construye una presentación  $\varphi : R^t \rightarrow R^s$ , de forma que  $\{g_1, \dots, g_t\} = \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_t)\}$  es un sistema de generadores de  $\text{Siz}(f_1, \dots, f_s)$ . Ahora se puede calcular el módulo de sizigias de este último módulo respecto de dicho sistema de generadores,  $\text{Siz}(g_1, \dots, g_t)$ , al que llamaremos *segundo módulo de*

*sizigias* de  $M$  respecto de  $\{f_1, \dots, f_s\}$ ; sus elementos recibirán el nombre de *segundas sizigias* (de  $M$  respecto de  $\{f_1, \dots, f_s\}$ ). Al construir una presentación de  $\text{Siz}(f_1, \dots, f_s)$  se obtiene una sucesión exacta de módulos y homomorfismos

$$R^u \xrightarrow{\psi} R^t \xrightarrow{\varphi} R^s \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0,$$

con lo que se tienen los dos primeros pasos de una resolución libre de  $M$ . Repitiendo el proceso se obtiene el *i-ésimo módulo de sizigias* de  $M$  respecto de  $\{f_1, \dots, f_s\}$ , a cuyos elementos llamamos *i-ésimas sizigias* (de  $M$  respecto de  $\{f_1, \dots, f_s\}$ ), y así hasta que sea el módulo nulo, en cuyo caso habremos completado la parte relevante de la resolución libre. En el caso (multi)graduado todo funciona como esperamos.

Nótese que tras la proposición 1.39 cobra formalidad la idea intuitiva que dábamos en la subsección previa de que la resolución determinaba la estructura del módulo. En el primer paso, el primer módulo de sizigias determina la estructura del módulo, pero a su vez el segundo módulo de sizigias determina la estructura del primer módulo, y así sucesivamente hasta que un módulo de sizigias sea nulo.

Hemos insistido (quizás demasiado) en la dependencia de las sizigias del sistema de generadores elegido de nuestro módulo. En efecto, esta dependencia es fuerte, pero aún así podemos relacionar los módulos de sizigias de un cierto módulo respecto de dos sistemas de generadores diferentes (que pueden tener incluso distinto número de elementos).

**Definición 1.40** Dos  $R$ -módulos  $M$  y  $N$  son equivalentes si existen  $R$ -módulos libres  $L$  y  $L'$  tales que  $M \oplus L \cong N \oplus L'$ .

**Proposición 1.41** Sean  $M$  y  $N$  dos  $R$ -módulos generados por  $\{f_1, \dots, f_s\}$  y  $\{g_1, \dots, g_t\}$  respectivamente. Si  $M$  y  $N$  son equivalentes, entonces  $\text{Siz}(f_1, \dots, f_s)$  y  $\text{Siz}(g_1, \dots, g_t)$  también lo son.

Esta proposición, cuya demostración puede encontrarse en [Mar13, Proposición 1.24], es aplicable en particular cuando  $M = N$ .

A pesar de este resultado, aún estamos lejos de lograr una cierta unicidad en los módulos de sizigias que implicaría unicidad en la resolución, como la que tenemos en el caso de la resolución minimal. Es por esto que ese sigue siendo el caso más interesante, y lo que motiva que al hablar de sizigias nos refiramos en general a las relativas a un sistema minimal de generadores, ya sea del módulo original en el caso de las primeras o del módulo de sizigias precedente en el caso de las siguientes, en consonancia con la siguiente definición.

**Definición 1.42 (Sizigias en el caso minimal)** Sea  $M$  un  $R$ -módulo (multigraduado) finitamente generado y  $\mathcal{F}$  su resolución libre minimal (multigraduada). Llamamos *i-ésimo módulo de sizigias* (multigraduado) de  $M$  al submódulo  $\text{Siz}_i(M) := \ker(d_{i-1}) = \text{Im}(d_i) \cong \text{coker}(d_{i+1}) \subset \mathcal{F}_{i-1}$ , para  $i > 0$ . Sus elementos reciben el nombre de *i-ésimas sizigias* (multigraduadas). Frecuentemente a las primeras sizigias las llamamos simplemente *sizigias*. Por comodidad en la notación muchas veces se define también  $\text{Siz}_0(M) = M$ .

A partir de esta definición y de las propiedades de las resoluciones libres minimales se deducen los hechos siguientes.

**Lema 1.43** Sea  $\mathcal{F}$  es la resolución libre minimal (multigraduada) de un  $R$ -módulo (multigraduado) finitamente generado  $M$ . Entonces:

- (i)  $\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{d_i} \text{Siz}_i(M) \longrightarrow 0$  es la resolución libre minimal (multigraduada) de  $\text{Siz}_i(M)$ , para todo  $i \geq 0$ .
- (ii)  $\text{Siz}_i(\text{Siz}_j(M)) = \text{Siz}_{i+j}(M)$ .
- (iii) Para cada  $i \geq 0$  se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \text{Siz}_{i+1}(M) \longrightarrow \mathcal{F}_i \xrightarrow{d_i} \text{Siz}_i(M) \longrightarrow 0$$

y el complejo por la izquierda exacto

$$0 \longrightarrow \text{Siz}_i(M) \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \mathcal{F}_{i-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

El siguiente teorema, que se puede encontrar en [Pee11, Teorema 10.2], es obvio después de lo que ya hemos visto en esta subsección y la anterior.

**Teorema 1.44** Sea  $\mathcal{F}$  una resolución libre minimal (multi)graduada del  $R$ -módulo  $M$ . Para cada  $i \geq 0$  si  $f_1, \dots, f_p$  forman una base de  $\mathcal{F}_i$  entonces los elementos  $d_i(f_1), \dots, d_i(f_p)$  forman un sistema minimal de generadores homogéneos de  $\text{Siz}_i(M)$ .

Estamos en condiciones de enunciar con precisión el ya anunciado Teorema de las Szigias de Hilbert, que implica la finitud de las resoluciones libres minimales, y de hecho proporciona una cota para su longitud (recuérdese la definición 1.15 de longitud de un complejo por la izquierda sobre un módulo, que evidentemente puede aplicarse a las resoluciones).

**Teorema 1.45 (de las Szigias de Hilbert)** Sea  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ . La resolución libre minimal (multi)graduada de un  $S$ -módulo (multi)graduado finitamente generado es finita y su longitud es a lo sumo  $n$ .

Se conocen varias demostraciones de este resultado, todas ellas de una cierta dificultad y extensión, por lo que para evitar apartarnos aún más del objetivo de este trabajo no incluiremos ninguna. No obstante, este es el teorema 15.2 de [Pee11], y allí se puede encontrar una demostración homológica en la que intervienen el funtor Tor y el complejo de Koszul. Otra demostración constructiva en términos de bases de Gröbner, mediante el algoritmo de Schreyer, puede encontrarse en [Eis95, Sección 15.5], libro en el que se esbozan otras pruebas. Ambas demostraciones están bien detalladas en los capítulos 2 y 3 de [Mar13] respectivamente, trabajo en el que este teorema es protagonista.

## 1.3 NÚMEROS DE BETTI

Ahora que hemos presentado los objetos algebraicos fundamentales de nuestro estudio, que son las resoluciones libres de módulos, nos interesa manejar la mínima cantidad de información posible. Ya hemos dado un primer paso en este sentido al definir las resoluciones libres minimales y demostrar su unicidad salvo isomorfismo. Ahora queremos ir más allá y, partiendo ya de una resolución libre minimal, definir los números de Betti, que son una colección de naturales que contienen la información esencial sobre los módulos de cualquier resolución libre minimal de un módulo, y por lo tanto de cualquier resolución libre suya. En este sentido son una suerte de invariantes del módulo, como resulta obvio del hecho de que “casi” lo fuera su resolución libre minimal.

La principal referencia para esta sección es de nuevo [Pee11, Secciones 11 y 12]. Las notaciones serán las mismas que en las secciones previa.

**Definición 1.46 (Números de Betti)** Sea  $\mathcal{F}$  una resolución libre minimal multigradaada de un  $R$ -módulo multigradaado finitamente generado  $M$ .

- Se define el  $i$ -ésimo número de Betti de  $M$  sobre  $R$  como  $\beta_i^R(M) = \text{rg}(\mathcal{F}_i)$ , donde  $\text{rg}$  denota el rango del  $R$ -módulo libre (ver [Eis95, Sección 0.3] para la definición de rango de un módulo libre).
- Escribiendo  $\mathcal{F}_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R(-\alpha)^{c_{i,\alpha}}$  (ver teorema 1.13), se definen los *números de Betti multigradaados* de  $M$  sobre  $R$  como  $\beta_{i,\alpha}^R(M) = c_{i,\alpha}$  para  $i \geq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .
- Análogamente se puede trabajar en el caso graduado, y si  $\mathcal{F}_i = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} R(-p)^{c_{i,p}}$  se definen los *números de Betti graduados* de  $M$  sobre  $R$  como  $\beta_{i,p}^R(M) = c_{i,p}$  para  $i \geq 0$ ,  $p \in \mathbb{N}$  (que de nuevo serán finitos por ser los  $\mathcal{F}_i$  finitamente generados).

En ocasiones, nos referiremos a los primeros números de Betti que hemos definido como *números de Betti totales*, para diferenciarlos de los graduados y multigradaados. Cuando el contexto determina unívocamente el anillo  $R$ , podemos escribir simplemente  $\beta_i(M)$ ,  $\beta_{i,\alpha}(M)$  y  $\beta_{i,p}(M)$ .

Del hecho de que la multigradaación estándar sea un refinamiento de la graduación estándar se deduce inmediatamente que  $\beta_i^R(M) = \sum_{|\alpha|=p} \beta_{i,\alpha}^R(M)$  y las definiciones anteriores implican que  $\beta_i^R(M) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \beta_{i,p}^R(M) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \beta_{i,\alpha}^R(M)$ .

**Definición 1.47 (Dimensión proyectiva)** Se define la *dimensión proyectiva* de  $M$  sobre  $R$  como  $\text{dp}_R(M) = \max\{i \in \mathbb{N} : \beta_i^R(M) \neq 0\}$ .

De nuevo si el anillo  $R$  está determinado por el contexto podemos omitir la referencia explícita al mismo en la notación. Nótese que en particular  $\text{dp}_R(M) = \text{long}(\mathcal{F})$ , y el Teorema

1.45 de las Sizigias de Hilbert puede expresarse en términos de la dimensión proyectiva del módulo (de hecho suele hacerse así).

Los números de Betti nos proporcionan gran parte de la información contenida en la resolución libre minimal de un cierto módulo, pues a partir de ellos obtenemos los módulos libres de que consta, con lo que solo faltarían por determinar las diferenciales. Los números de Betti graduados y especialmente los multigraduados proporcionan aún más información, como cabe esperar, pues determinan los desplazamientos en las (multi)graduaciones de los módulos libres, y las matrices diferenciales tendrán como coeficientes monomios (en el caso multigraduado) que si son no nulos estarán determinados, salvo producto por constante, por los multigrados de los elementos de las bases de los módulos libres de la resolución.

Para muchas familias de módulos no sabemos calcular todos sus números de Betti, con lo que a menudo tendremos que conformarnos con obtener cotas para ellos y saber cuándo son no nulos. A partir del Teorema de las Sizigias de Hilbert (teorema 1.45) podemos deducir algunas de las más sencillas para el caso de  $S$ -módulos. Algunas obvias son, por ejemplo,  $\beta_i^S(M) \leq \max\{\beta_i^S(M) : i \leq \text{dp}_S(M)\}$  y el hecho de que  $\beta_i^S(M) = 0 \Leftrightarrow i > \text{dp}_S(M)$ . Estas propiedades limitan los números de Betti totales “por arriba”, es decir, proporcionan información sobre el punto a partir del cual son todos nulos. En el sentido contrario va la siguiente proposición, que se refiere a los números de Betti graduados y los limita “por abajo”. Se corresponde con la proposición 12.3 de [Pee11], donde se puede encontrar una demostración.

**Proposición 1.48** Sea  $c = \min_{j \in \{1, \dots, r\}} \{\deg(\mathbf{m}_j)\}$ , donde  $\{\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_r\}$  es un sistema minimal de generadores homogéneos de  $M$  (recordemos que  $c$  es independiente del sistema minimal de generadores elegido, en virtud del teorema 1.12). Entonces  $\beta_{i,p}^R(M) = 0$  si  $p < i + c$ .

Esta proposición nos proporciona, fijado un grado homológico  $i$ , una “cota inferior” para los números de Betti graduados no nulos. Para el estudio de las “cotas superiores” de los mismos, se introduce la siguiente noción.

**Definición 1.49 (Regularidad de Castelnuovo-Mumford)** Sea  $M$  un  $R$ -módulo graduado finitamente generado. Se define su *regularidad de Castelnuovo-Mumford*, o simplemente su *regularidad*, como  $\text{reg}_R(M) = \max\{j \in \mathbb{N} : \exists i \in \mathbb{N} \text{ con } \beta_{i,i+j}^R(M) \neq 0\}$ .

La proposición anterior explica que consideremos  $\beta_{i,i+j}^R(M)$  y no simplemente  $\beta_{i,j}^R(M)$ . Teniendo esto en cuenta, los números de Betti graduados suelen organizarse en una tabla, comúnmente llamada *diagrama de Betti*, con la disposición siguiente, en la que las columnas se corresponden con un cierto grado homológico y las filas con la suma de los grados homológico e interno correspondientes.



	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\dots$	$\beta_d$	0	$\dots$
0	$\beta_{0,0}$	$\beta_{1,1}$	$\beta_{2,2}$	$\dots$	$\beta_{d,d}$	0	$\dots$
1	$\beta_{0,1}$	$\beta_{1,2}$	$\beta_{2,3}$	$\dots$	$\beta_{d,d+1}$	0	$\dots$
2	$\beta_{0,2}$	$\beta_{1,3}$	$\beta_{2,4}$	$\dots$	$\beta_{d,d+2}$	0	$\dots$
3	$\beta_{0,3}$	$\beta_{1,4}$	$\beta_{2,5}$	$\dots$	$\beta_{d,d+3}$	0	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	$\beta_{0,r}$	$\beta_{1,1+r}$	$\beta_{2,2+r}$	$\dots$	$\beta_{d,d+r}$	0	$\dots$
r+1	0	0	0	$\dots$	0	0	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

El motivo de que el número de Betti graduado que aparece en la posición  $(j, i)$  del diagrama sea  $\beta_{i,i+j}^R(M)$  en lugar de  $\beta_{i,j}^R(M)$  es que, en virtud de la proposición 1.48, si representáramos estos últimos todas las posiciones por encima de la diagonal serían nulas, con el consiguiente desperdicio de espacio que ello conlleva. El hecho de que cada módulo de la resolución libre minimal de un  $S$ -módulo  $M$  sea libre y de rango finito garantiza que podemos organizar todos sus números de Betti graduados en un diagrama de Betti finito, cuyo número de columnas con algún elemento no nulo está acotado por la dimensión proyectiva  $d = \text{dp}_S(M)$ , y cuyo número de filas (también con algún elemento no nulo) está acotado por la regularidad de Castelnuovo-Mumford,  $r = \text{reg}_S(M)$ . Evidentemente podríamos organizar análogamente los números de Betti multigraduados, pero necesitaríamos una tabla de más de dos dimensiones.

---

**EJEMPLO 1.50**

---

Volviendo al ejemplo 1.35, habíamos obtenido una resolución libre minimal del ideal  $I = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  de  $S = k[x, y]$ :

$$0 \longrightarrow \begin{matrix} R(-3) \\ \oplus \\ R(-4) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & 0 \\ x & -y^2 \\ 0 & x \end{pmatrix}} \begin{matrix} R(-2) \\ \oplus \\ R(-2) \\ \oplus \\ R(-3) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} I \longrightarrow 0.$$

El diagrama de Betti de  $I$  tal y como lo hemos descrito arriba será entonces el de la izquierda, aunque frecuentemente se escribe como a la derecha, para economizar espacio.

	3	2		
0	0	0		
1	0	0		
2	2	1		
3	1	1		

	3	2
2	2	1
3	1	1

Al trabajar con ejemplos concretos podemos obtener cotas superiores para los números de Betti de un cierto módulo a partir de cualquier resolución suya, y dichas cotas serán más ajustadas cuanto más próxima esté la resolución de ser minimal. Esto lo formalizamos en el lema siguiente.

**Lema 1.51** Sea  $\mathcal{G}$  una resolución multigradaada cualquiera de un  $R$ -módulo  $M$ , de forma que sus módulos pueden escribirse como  $\mathcal{G}_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R(-\alpha)^{l_{i,\alpha}}$  y  $\mathcal{G}_i = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} R(-p)^{l_{i,p}}$ , entonces se cumple que:

- $\beta_i^R(M) \leq \text{rg}(\mathcal{G}_i)$ .
- $\beta_{i,\alpha}^R(M) \leq l_{i,\alpha}$  para  $i \geq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .
- $\beta_{i,p}^R(M) \leq l_{i,p}$  para  $i \geq 0$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

*Esquema de la demostración.* La idea de la prueba se basa en que dada una resolución multigradaada de  $M$ , siempre podemos obtener de ella una minimal aplicando cancelaciones consecutivas (recuérdese el ejemplo 1.35), que en todo caso eliminan sumandos directos de cada módulo, nunca los añaden, con lo que, de modificarse, los  $l_{i,\alpha}$  solo pueden disminuir, y por lo tanto lo mismo les ocurrirá a los  $l_{i,p}$  y  $\text{rg}(\mathcal{G}_i)$ .  $\square$

## 1.4 EJEMPLOS: IDEALES Y MÓDULOS MONOMIALES

Ya hemos adelantado en varias ocasiones que nuestro objetivo en este trabajo es aplicar a unos objetos algebraicos, las resoluciones de  $R$ -módulos, técnicas topológicas que nos permitan conocer más cosas sobre ellas. Pero no es posible aplicar dichas técnicas a cualquier  $R$ -módulo, sino que necesitaremos que tenga una cierta estructura combinatoria, concretamente que sea monomial. A la presentación de los ideales monomiales dedicaremos esta sección, para continuar introduciendo el ejemplo de resolución que en el capítulo 4 será objeto de aplicación de las técnicas que expondremos principalmente en el capítulo 3, la resolución de Taylor. Terminaremos generalizando ligeramente la noción de ideales monomiales a la de módulos monomiales, para los que también será válida gran parte de la teoría de los capítulos posteriores. Las referencias básicas para esta sección son [CLO97] y [HH11].

Pese a que probablemente el lector ya las conozca, daremos las definiciones de monomios e ideales monomiales en el anillo  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ .

**Definición 1.52 (Monomios e ideales monomiales)** Se definen los *monomios* de  $S$  como los elementos de la forma  $\underline{m} = \underline{x}^\alpha$ , donde  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Se dice que un ideal  $I \subset S$  es *monomial* si  $I$  puede ser generado por una colección de monomios. Se dice que  $\underline{n} = \underline{x}^\beta$  divide a  $\underline{m} = \underline{x}^\alpha$  y se escribe  $\underline{n} | \underline{m}$  si  $\underline{x}^\beta | \underline{x}^\alpha$ , es decir,  $\beta_k \leq \alpha_k$  para  $k = 1, \dots, n$ . Se define en ese caso el *cociente*  $\underline{m} / \underline{n} = \underline{x}^\alpha / \underline{x}^\beta = \underline{x}^{\alpha - \beta} \in S$ , con lo que si  $\underline{n} | \underline{m}$  entonces  $\underline{m} = (\underline{m} / \underline{n}) \cdot \underline{n}$ .

Aunque no entraremos en ello, una de las propiedades más interesantes de los monomios de  $S$  es que pueden ordenarse siguiendo un orden monomial, lo que, entre otras cosas, nos permite generalizar el algoritmo de división euclídea al anillo  $S$ , pese a que  $S = k[x_1, \dots, x_n]$  no sea un dominio euclídeo si  $n \geq 2$ . Puede encontrarse más información sobre esto en [CLO97, Capítulo 2, secciones 2 y 3].

Los ideales monomiales juegan, pese a su sencillez, un papel importante dentro del Álgebra Conmutativa y como ya anunciamos poseen una estructura combinatoria que explotaremos en el próximo capítulo.

Además son ideales homogéneos de  $S$  al considerar la multigraduación estándar, con lo que son aplicables los resultados de la sección 1.1, en particular la proposición 1.5 y el teorema 1.12. Dichos resultados son completados con otras propiedades específicas de estos ideales, lo que hace que sean objetos muy manejables.

**Lema 1.53** Sea  $I \subset S$  un ideal monomial generado por monomios  $\{\mathbf{n}_i\}_{i \in J}$  y sea  $\mathbf{m} \in S$  un monomio. Entonces  $\mathbf{m} \in I$  si y solo si  $\mathbf{n}_j | \mathbf{m}$  para algún  $j \in J$ .

Este lema aparece enunciado y demostrado en [CLO97, Capítulo 2, sección 4] como Lema 2, y allí remitimos al lector interesado en la prueba.

**Lema 1.54 (Lema de Dickson)** Sea  $I \subset S$  un ideal monomial generado por monomios  $\{\mathbf{n}_i\}_{i \in J}$ . Entonces existen  $j_1, \dots, j_s \in J$  tales que  $I = \langle \mathbf{n}_{j_1}, \dots, \mathbf{n}_{j_s} \rangle$ .

*Demostración.* Basta con aplicar el Teorema de la Base de Hilbert [Eis95, Teorema 1.2] para deducir que  $S$  es noetheriano (por serlo  $k$ ), y se deduce el resultado de la proposición 1.4. No obstante, el Teorema de la Base de Hilbert es un resultado considerablemente más fuerte que el Lema de Dickson, y una demostración directa puede encontrarse en [CLO97, Capítulo 2, sección 4], Teorema 5.  $\square$

Y finalmente, tenemos el siguiente corolario, que es la interpretación del apartado 2 del teorema 1.12 en este caso particular y que nos interesará más adelante, pues será el que nos permita el tratamiento combinatorio de los ideales monomiales.

**Corolario 1.55** Todo ideal monomial  $I \subset S$  admite un único sistema minimal finito de generadores formado por monomios, que denotaremos por  $\text{MinGen}(I)$ .

*Demostración.* Los resultados que acabamos de presentar nos permiten dar otra demostración sin utilizar el teorema 1.12 y por lo tanto el Lema de Nakayama. Por el Lema de Dickson siempre podemos encontrar un sistema finito de generadores de  $I$  formado por monomios. Supongamos que tenemos dos que además son minimales, por el lema 1.53 los elementos de uno dividen a los del otro y por minimalidad deben coincidir.  $\square$

Estamos en condiciones de presentar la resolución de Taylor, introducida por Diana Taylor en su tesis doctoral [Tay66], dando por conocidas las nociones básicas sobre álgebras exteriores y las graduaciones de sus módulos, que funcionan de la forma esperada.

Estas cuestiones no van a tener demasiada relevancia (de hecho podríamos definir los módulos del complejo de Taylor de una forma no tan precisa evitando la noción de álgebra exterior, como se hace en [Eis95, Ejercicio 17.11]); el lector interesado puede encontrar más información en [HH11, Capítulo 5].

**Definición 1.56 (Complejo de Taylor, versión algebraica)** Sea  $I$  un ideal monomial en el anillo  $S$  con  $\text{MinGen}(I) = \{\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_q\}$  (el conjunto ordenado) y consideremos el  $S$ -módulo libre  $S^q$  con base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ . Se define el *complejo de Taylor*  $\mathcal{T}_I$  sobre  $S/I$  de la forma siguiente:

- $\mathcal{T}_{I,i} = \wedge^{i+1} S^q$  para  $i = -1, \dots, q$ , que será un  $S$ -módulo libre del cual los elementos  $\mathbf{e}_J = \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_{i+1}}$  forman una base, donde  $J = \{j_1 < \dots < j_{i+1}\} \subset \{1, \dots, q\}$  (nótese que tiene cardinal  $i + 1$ ).
- La diferencial  $d_i : \mathcal{T}_{I,i} \longrightarrow \mathcal{T}_{I,i-1}$ , para  $i = 0, \dots, q$ , se define como

$$d_i(\mathbf{e}_J) = d_i(\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_{i+1}}) = \sum_{p=1}^{i+1} (-1)^{p-1} \frac{\text{mcm}(\mathbf{m}_{j_1}, \dots, \mathbf{m}_{j_{i+1}})}{\text{mcm}(\mathbf{m}_{j_1}, \dots, \widehat{\mathbf{m}}_{j_p}, \dots, \mathbf{m}_{j_{i+1}})} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{e}}_{j_p} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_{i+1}}$$

donde  $\widehat{\mathbf{m}}_{j_p}$  y  $\widehat{\mathbf{e}}_{j_p}$  indican la omisión de los correspondientes términos.

En cuanto a las graduaciones internas del complejo, la graduación estándar viene dada por  $\deg(\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_i}) = \deg(\text{mcm}(\mathbf{m}_{j_1}, \dots, \mathbf{m}_{j_i}))$  mientras que la multigraduación está definida por  $\text{mdeg}(\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_i}) = \text{mdeg}(\text{mcm}(\mathbf{m}_{j_1}, \dots, \mathbf{m}_{j_i}))$ , de forma que las diferenciales son homogéneas.

Nótese que si en vez de comenzar en  $i = -1$  omitiéramos este primer paso e hiciéramos la construcción anterior para  $i \geq 0$  el complejo de módulos anterior no lo sería sobre  $S/I$ , sino sobre  $I$ , al considerar el aumento adecuado. En los siguientes capítulos las resoluciones que construyamos serán todas sobre el ideal, y no sobre el cociente, pero sirva lo anterior para entender cómo se puede pasar de un caso al otro sin dificultad.

Probar mediante procedimientos algebraicos que el objeto que hemos definido es efectivamente un complejo de módulos es engorroso, y más aún demostrar que es una resolución, conocida como *resolución de Taylor*. En [Pee11, Sección 26] se puede encontrar la construcción junto con una indicación para probar que es un complejo de módulos, aunque para la demostración de que es una resolución libre de  $S/I$  utiliza aspectos combinatorios similares a los que describiremos en el siguiente capítulo, y que nos permitirán probar las dos cosas de forma más sencilla. Para ver una demostración puramente algebraica el lector puede acudir a [HH11, Sección 7.1].

Este método proporciona siempre una resolución multigraduada fácil de manejar dado un sistema minimal de generadores formado por monomios de un ideal monomial. Sin embargo, esta resolución está, en general, lejos de ser minimal, pues de hecho su longitud coincide con el número de generadores del sistema minimal, por lo que puede incluso superar la cota dada por el Teorema de las Sizigias, como ocurre en el ejemplo siguiente.

De hecho, el interés que tiene para nosotros es que será el punto de partida del algoritmo de minimalización de resoluciones que presentaremos en el capítulo 4.

---

**EJEMPLO 1.57**

---

Si volvemos al ejemplo 1.35, la resolución libre de partida de  $I$ , donde  $S = k[x, y]$  e  $I = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  nos proporciona una resolución libre de  $S/I$ ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & R(-5) & \longrightarrow & R(-3) & \longrightarrow & R(-2) \\
 & & \begin{pmatrix} y^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} -y & 0 & y^3 \\ x & -y^2 & 0 \\ 0 & x & -x^2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix} \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
 & & R(-4) & \longrightarrow & R(-2) & \longrightarrow & S \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
 & & R(-5) & & R(-3) & & \\
 & & & & & & S \longrightarrow S/I,
 \end{array}$$

que es precisamente la resolución de Taylor de  $S/I$ , aunque no lo demostraremos ahora. No solo no es minimal, sino que supera la cota de longitud impuesta por el Teorema de las Sizigias de Hilbert.

Según el lema 1.51, la resolución de Taylor proporciona una cota para los números de Betti del cociente de  $S$  por un cierto ideal monomial.

**Corolario 1.58** Sea  $I \subset S$  un ideal monomial generado minimalmente por  $s$  monomios. Entonces  $\beta_i(S/I) \leq \binom{s}{i+1}$  para  $i = 0, \dots, s$  (y los siguientes serán obviamente nulos).

*Demostración.* El resultado se sigue inmediatamente del lema 1.51 sin más que tener en cuenta que el rango del módulo libre  $\mathcal{T}_{I,i}$  es precisamente  $\binom{s}{i+1}$ .  $\square$

El complejo de Taylor se puede “podar” (esta palabra cobrará un sentido mucho más preciso en el capítulo 4) para obtener un complejo que de hecho es una resolución más cercana a la minimal también en el caso de ideales monomiales. Lyubeznik introdujo esta resolución, que lleva su nombre, en su tesis doctoral. En el artículo [Lyu88] puede verse la demostración de que es, en efecto, una resolución.

**Definición 1.59 (Complejo de Lyubeznik)** Sea  $I$  un ideal monomial en el anillo  $S$  con  $\text{MinGen}(I) = \{\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_q\}$  (el conjunto ordenado). Consideremos el subcomplejo sobre  $S/I$   $\mathcal{L}_I$  de  $\mathcal{T}_I$ , llamado *complejo de Lyubeznik*, tal que  $\mathcal{L}_{I,i}$  es el  $S$ -submódulo libre de  $\mathcal{T}_{I,i}$  del cual los elementos  $\mathbf{e}_J = \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_{i+1}}$  forman una base, donde  $J = \{j_1 < \dots < j_{i+1}\} \subset \{1, \dots, q\}$  cumple que para todo  $k < i + 1$  y para todo  $t < j_k$ , el monomio  $\mathbf{m}_t$  no divide a  $\text{mcm}(\mathbf{m}_{j_k}, \mathbf{m}_{j_{k+1}}, \dots, \mathbf{m}_{j_{i+1}})$ . Las diferenciales se toman obviamente como restricciones de las de  $\mathcal{T}_I$ .

Es posible extender la noción de ideales monomiales al anillo de polinomios de Laurent  $T = k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} kx^\alpha$  sin más que generalizar la definición de monomios permi-

tiendo exponentes negativos. Como  $T$  tiene una estructura de módulo sobre  $S$ , diremos que una de tales extensiones de los ideales monomiales es un módulo monomial.

**Definición 1.60 (Módulo monomial)** Un  $S$ -módulo  $M$  se dice que es un *módulo monomial* si es un submódulo de  $T$  generado por una colección de monomios de la forma  $\underline{x}^\alpha$ , donde  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ .

Debemos advertir al lector que en la literatura especializada hay otro concepto que aparece también con el nombre de  $S$ -módulo monomial. Se obtiene a partir de otra generalización del concepto de monomio, en la que en lugar de permitir exponentes negativos decimos, intuitivamente, que un monomio en el módulo libre  $S^m$  es un monomio (en el sentido tradicional) en una posición, y todas las demás son nulas (más formalmente, un monomio de  $S^m$  es el producto de un monomio de  $S$  por un elemento de la base del módulo libre  $S^m$ ). Aunque es más natural llamar módulo monomial a un módulo generado por una colección de monomios de este tipo que a los que nosotros hemos dado ese nombre, por comodidad utilizaremos esta terminología, ya utilizada en [BS98] y en [OW07]. Más detalles sobre los otros módulos monomiales pueden encontrarse en [CLO98, Capítulo 5].

El impedimento que tenemos en el caso de módulos monomiales para que la estructura combinatoria sea lo suficientemente rica para llevar a cabo lo que nos disponemos a hacer en el capítulo siguiente se manifiesta en lo relativo al sistema minimal de generadores formado por monomios. Para ello se introducen los módulos monomiales co-Artinianos, a los que se puede generalizar cuanto veremos más adelante, y cuya definición y propiedades pueden encontrarse en [BS98, Sección 1] y en [OW07, Sección 2.5]. Básicamente son submódulos que cumplen las tres condiciones siguientes, que son equivalentes para cualquier  $S$ -submódulo monomial  $M$  de  $T$ :

1.  $M$  está generado por sus monomios minimales, los elementos del conjunto

$$\left\{ \underline{x}^\alpha \in M : \frac{x^\alpha}{x_i} \notin M \text{ para } i = 1, \dots, n \right\}.$$

2. No existe ninguna sucesión decreciente (para la relación de divisibilidad) de monomios de  $M$  no estacionaria.
3. Para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  el conjunto de los monomios de  $M$  de grado  $\leq \alpha$  es finito.

Para terminar la sección y el capítulo vamos a introducir un lenguaje que nos permitirá manejar los ideales monomiales en términos de los exponentes de los monomios que pertenecen a él, apoyándonos en la unicidad del sistema minimal de generadores formado por monomios, y que nos acercará al enfoque combinatorio que precisaremos en el siguiente capítulo.

**Definición 1.61** Se definen los siguientes objetos:

1. Un *semigrupo afín*  $\Lambda$  es un subsemigrupo finitamente generado del semigrupo  $\mathbb{N}^n$ . Un semigrupo afín  $\Lambda$  induce un orden parcial sobre  $\mathbb{N}^n$  de forma que  $\alpha \leq \beta$  si y solo si  $\alpha + \lambda = \beta$  para algún  $\lambda \in \Lambda$ . Se denota por  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$  a dicho conjunto parcialmente ordenado.
2. Sea  $k$  un cuerpo, un anillo  $R$  se dice que es un *anillo de semigrupo afín* si  $R = k[\Lambda]$  (la  $k$ -álgebra de semigrupo, ver [CP01, Sección 4]) es el subanillo de  $S = k[x_1, \dots, x_n]$  con  $k$ -base dada por los monomios  $\underline{x}^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$  para  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda$  un semigrupo afín.

En el contexto de los ideales monomiales, lo único que estamos haciendo es pasar del mundo de los monomios al de sus exponentes, ya que evidentemente describen el mismo objeto. Los generadores del semigrupo afín no son más que las  $n$ -uplas de enteros que juegan el papel de exponentes (o multigrados) de los monomios del sistema minimal de generadores, con lo que el semigrupo al completo es el conjunto de multigrados posibles de todos los monomios del ideal, y el anillo de semigrupo afín es el propio ideal monomial, que obviamente será multigraduado. El orden parcial definido por el semigrupo sobre  $\mathbb{N}^n$  es inducido por la relación de divisibilidad entre los monomios. Estas estructuras nos permiten trabajar en un contexto un poco más amplio que el de los ideales y módulos monomiales (la adaptación del lenguaje a estos es inmediata, sin más que sustituir  $\mathbb{N}$  por  $\mathbb{Z}$ ), aunque estos serán los casos que tendremos en mente a lo largo de la memoria.

CAPÍTULO 

## AMALGAMA

Si el primer capítulo lo dedicamos al Álgebra, en este les ha llegado el turno a las otras dos áreas que se entremezclan en nuestro estudio, la Topología y la Combinatoria. Iniciaremos el capítulo desde un enfoque puramente topológico, definiendo objetos sin relación aparente con las resoluciones que hemos tratado en el capítulo precedente, como son los CW-complejos, y estudiando sus propiedades. Sin embargo, en la sección 2.2 la Combinatoria hará acto de presencia para actuar como pegamento entre las resoluciones y los CW-complejos, entre el Álgebra y la Topología, y esa cohesión será lo suficientemente fuerte como para que los métodos topológicos que apliquemos a los CW-complejos tengan un cierto efecto sobre las resoluciones que, como ya hemos razonado, nos interesa minimalizar.

Lo anterior explica el título del capítulo, pues su objetivo fundamental es precisamente amalgamar los objetos algebraicos y topológicos con la Combinatoria como elemento coalescente, haciendo que formen un todo con dos caras entre las que podemos movernos a voluntad según nuestras necesidades, en lo que constituye una simbiosis de las tres áreas.

No obstante, es importante destacar que lo anterior no es aplicable a resoluciones libres sobre cualquier tipo de módulos. Esto se debe precisamente a que es la estructura combinatoria de los módulos la que debe permitir la fusión, y si esta no es lo suficientemente rica no lograremos la mezcla. Necesitaremos, como ya indicáramos en la sección 1.4, que sean ideales monomiales (módulos monomiales co-Artinianos si nos extendiéramos al caso de los polinomios de Laurent), pues la unicidad del sistema minimal de generadores juega un papel esencial.

La última sección pretende terminar de convencer a los escépticos de la utilidad de esta simbiosis, puesto que recuperamos los mismos ejemplos de la sección 1.4, las resoluciones de Taylor y de Lyubeznik, pero vistos desde su cara topológica, lo que nos facilitará notablemente la prueba que dejamos pendiente de que la primera es efectivamente una



resolución.

Esta fusión aparece descrita por primera vez, incluso con más generalidad de la que vamos a presentar aquí, en [BS98]. Otras referencias fundamentales de este capítulo serán [OW07] y [Mar14], que es una memoria dedicada precisamente a establecer la amalgama de la que hemos hablado apoyándose en su trabajo previo [Mar13].

---

## 2.1 CW-COMPLEJOS

---

Ahora que ya sabemos que nuestro objetivo es amalgamar ciertos aspectos del Álgebra Conmutativa y la Topología, y teniendo en cuenta que a los primeros ya dedicamos todo el capítulo precedente, el paso lógico es presentar los objetos topológicos, que son los CW-complejos. Estos no son más que una generalización de los complejos simpliciales, que posiblemente resulten más familiares al lector; en todo caso les dedicamos la subsección 2.1.1 puesto que son los que nos interesarán en muchas aplicaciones prácticas. Y como no podía ser de otra manera al trabajar en el ámbito de la Topología, la subsección 2.1.2 estará dedicada a aspectos homológicos de los CW-complejos, que serán claves en la relación con el Álgebra. Para ampliar información sobre los CW-complejos, el lector puede acudir a [Mas80, Capítulo IV], a [Bre93, Capítulo IV, secciones 8 a 12], a [Hat02, Apéndice], a [Pic73, Capítulo I], a [Whi78, Capítulo II, sección 1] o a [Rot88, Capítulo 8]. Dos referencias especializadas en CW-complejos y otras estructuras celulares son [FP90] y el clásico [LW69].

Comencemos definiendo las células, nuestros ladrillos topológicos.

**Definición 2.1 (Células)** Un espacio topológico se dice que es una *célula abierta* de dimensión  $d$  (o simplemente una  $d$ -*célula*) si es homeomorfo a la bola abierta unidad de dimensión  $d$ ,  $B_d = \{(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d y_i^2 < 1\}$ .

Análogamente, un espacio topológico se dice que es una *célula cerrada* de dimensión  $d$  (o simplemente una  $d$ -*célula cerrada*) si es homeomorfo a la bola cerrada unidad de dimensión  $d$ ,  $\bar{B}_d = \{(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d y_i^2 \leq 1\}$ .

Si  $\sigma$  es una célula abierta, su adherencia  $\bar{\sigma}$  es una célula cerrada de la misma dimensión. Recíprocamente, si  $\sigma$  es una célula cerrada, su interior  $\overset{\circ}{\sigma}$  es una célula abierta. En estas situaciones decimos que son *correspondientes* o *asociadas* la una a la otra. En ocasiones denotaremos a una  $d$ -célula  $\sigma$  (abierta o cerrada) por  $\sigma^d$  para tener presente su dimensión.

Y junto con el cemento que constituyen las aplicaciones características, construimos los CW-complejos, definidos por vez primera por Whitehead en [Whi49].

**Definición 2.2 (CW-complejo)** Se dice que un espacio topológico  $X$  es un *CW-complejo* si existe una colección  $X^{(*)} = \{\sigma_i : i \in I\}$  de células abiertas disjuntas (también llamadas *caras* del complejo) de forma que  $X = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$  y se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $X$  es de Hausdorff.
2. Para toda célula abierta  $\sigma \in X^{(*)}$  de dimensión  $d$ , existe una aplicación continua (la *aplicación característica de  $\sigma$* )  $f_\sigma : \bar{B}_d \rightarrow X$  tal que su restricción a la bola (célula) abierta  $f_\sigma^\circ = f_\sigma|_{B_d} : B_d \rightarrow \sigma$  es un homeomorfismo (se considera también la restricción en llegada a  $\sigma$ ) y de forma que la imagen  $f_\sigma(S_{d-1})$  de la frontera  $S_{d-1}$  de  $\bar{B}_d$  (la esfera unidad) tiene intersección no trivial con una cantidad finita de células de  $X^{(*)}$ , todas las cuales tendrán dimensión a lo sumo  $d - 1$ .
3. Un subconjunto  $F \subset X$  es cerrado en  $X$  si y solo si  $F \cap \bar{\sigma}$  es cerrado en  $\bar{\sigma}$  para toda célula  $\sigma \in X^{(*)}$  (o lo que es equivalente, si  $f_\sigma^{-1}(F \cap \bar{\sigma})$  es cerrado en  $\bar{B}_d$ , donde  $d$  es la dimensión de  $\sigma$ ).

Para  $d \in \mathbb{N}$  se denota por  $X^d \subset X$  a la unión de todas las células de  $X$  de dimensión a lo sumo  $d$  y se denomina el  *$d$ -esqueleto* de  $X$ . Por  $X^{(d)} \subset X^{(*)}$  se denota el conjunto de todas las células de  $X$  de dimensión exactamente  $d$ .

A los CW-complejos que constan de un número finito de células se les suele llamar *complejos celulares*. Cabe destacar que los CW-complejos de dimensión finita y en particular los complejos celulares son más sencillos de manejar que los generales. De hecho, en ese caso la condición 3 se hace superflua y el pegado de células mediante las aplicaciones características determina completamente la topología del complejo, ya que la unión finita de cerrados es un cerrado y un subespacio compacto en un espacio de Hausdorff es cerrado, y la adherencia de una célula abierta debe ser un compacto, pues la imagen de un compacto por una aplicación continua es compacta.

Detengámonos un momento a analizar las denominaciones de complejo celular y CW-complejo que utilizamos para referirnos a estos objetos. La primera no necesita mayor explicación, si acudimos a la definición de “complejo” del *Diccionario de la RAE*, encontramos que la tercera acepción es “*Conjunto o unión de dos o más cosas que constituyen una unidad*”, y coincide con lo que hemos definido, una unión de células (abiertas) “pegadas” mediante sus funciones características de forma que constituyen un espacio topológico bien definido. Las letras CW, en cambio, no indican de forma tan clara la naturaleza de dicho espacio a menos que las analicemos, en cuyo caso proporcionan una descripción precisa de su topología:

- La letra C se refiere al término inglés *Closure-finiteness*, que podríamos traducir como finitud de la adherencia y que resume la última parte de la propiedad 2 de la definición anterior, según la cual la adherencia de una célula (abierta) del complejo corta a una cantidad finita de células.
- La letra W se refiere a *Weak topology*, topología débil, que es como se conoce en general a la topología descrita por la propiedad 3. Nótese que esta caracterización de los cerrados proporciona de manera inmediata una caracterización análoga de los abiertos, de forma que un conjunto  $A$  es abierto en  $X$  si, y solo si,  $A \cap \bar{\sigma}$  es abierto en

$\bar{\sigma}$  para toda célula  $\sigma \in X^{(*)}$ . Más adelante, cuando demos la definición constructiva de los CW-complejos (teorema 2.14), caracterizaremos de otra forma esta topología.

Ya hemos definido los objetos, procedamos ahora con sus subobjetos y otras nociones que surgen de ellos.

**Definición 2.3 (Sub CW-complejo)** Un *sub CW-complejo*  $A$  de un CW-complejo  $X$  es un subespacio topológico de  $X$  dado por la unión de un subconjunto de células abiertas  $A^{(*)} \subset X^{(*)}$  tales que  $\bar{\sigma} \subset A$  para toda célula  $\sigma \in A^{(*)}$ .

Esto implica que la imagen de cada aplicación característica  $f_\sigma$  está contenida en  $A$ , con lo que  $A$  es de nuevo un CW-complejo (pues el resto de propiedades se heredan de  $X$ ). Alternativamente se podría definir el subcomplejo  $A$  como la unión de células abiertas de un subconjunto  $A^{(*)} \subset X^{(*)}$  que es en sí misma un CW-complejo con las mismas aplicaciones características. La topología de CW-complejo de  $A$  coincide con la topología de subespacio inducida por la de  $X$ , pues ambas coinciden en cada célula de  $A^{(*)}$ .

En particular, el  $d$ -esqueleto de un CW-complejo es un sub CW-complejo suyo.

**Definición 2.4 (Par de CW-complejos)** Decimos que  $(X, A)$  es un *par de CW-complejos* si  $X$  es un CW-complejo y  $A$  es un subcomplejo suyo. En esta situación, denotamos por  $(X, A)^{(d)} = \{\sigma \in X^{(d)} : \sigma \notin A^{(d)}\}$ , y por  $(X, A)^{(*)} = \bigcup_d (X, A)^{(d)}$ , el conjunto de células de  $X$  que no están en  $A$ .

En particular, tomando  $A = \emptyset$  (el complejo vacío) un complejo  $X$  puede verse como el par  $(X, \emptyset)$ , identificación que en adelante consideraremos de forma implícita al tratar con pares de CW-complejos.

La siguiente definición introduce algunos conceptos que utilizaremos continuamente en lo que resta de memoria.

**Definición 2.5 (Conjunto parcialmente ordenado, caras, facetas)** Se puede ver de forma natural  $(X, A)^{(*)}$  como un conjunto parcialmente ordenado de la forma siguiente: dadas células  $\sigma, \sigma' \in (X, A)^{(*)}$ , tenemos que  $\sigma' \leq \sigma$  si, y solo si, la célula cerrada  $\bar{\sigma}'$  es un subconjunto de la célula cerrada  $\bar{\sigma}$ , en cuyo caso se dice que  $\sigma'$  es una *cara* de  $\sigma$ . Se dice que  $\sigma'$  es una *faceta* de  $\sigma$  si  $\sigma' \neq \sigma$  y para toda célula  $\tau \in (X, A)^{(*)}$  las inclusiones  $\sigma' \leq \tau \leq \sigma$  implican  $\tau \in \{\sigma, \sigma'\}$ . Decimos que  $\sigma$  es una *cara maximal* de  $X$  si es maximal respecto del orden parcial anterior sobre  $X^{(*)}$ . Por convenio se suele considerar el vacío,  $\emptyset$ , como una cara de dimensión  $-1$  de todo CW-complejo (excepto del CW-complejo vacío, que diremos que tiene dimensión  $-\infty$ ) aunque nosotros la obviaremos en muchas ocasiones.

La siguiente terminología relacionada con CW-complejos nos resultará útil en el capítulo 3.

**Definición 2.6 (Isomorfismo de CW-complejos)** Dados dos CW-complejos  $X$  e  $Y$ , se dice que son *isomorfos* y se denota por  $X \cong Y$  si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$ , al que

llamamos *isomorfismo*, tal que su restricción a cualquier célula de  $X$  es un homeomorfismo sobre una única célula de  $Y$ .

**Definición 2.7 (Subdivisión de un CW-complejo)** Dado un CW-complejo  $X$ , se dice que otro CW-complejo  $\tilde{X}$  es una *subdivisión* de  $X$  si existe un homeomorfismo  $h : \tilde{X} \rightarrow X$  tal que la imagen de cualquier célula de  $\tilde{X}$  está contenida en una única célula de  $X$ .

**Definición 2.8 (Equivalencia de CW-complejos)** Dados dos CW-complejos  $X$  e  $Y$ , se dice son *equivalentes* y se denota por  $X \approx Y$ , si admiten subdivisiones finitas  $\tilde{X}$  de  $X$  y  $\tilde{Y}$  de  $Y$  tales que  $\tilde{X} \cong \tilde{Y}$ .

Una clase de CW-complejos con buenas propiedades son los CW-complejos regulares, que tienen una hipótesis adicional sobre las aplicaciones características que facilita considerablemente las demostraciones de algunos de los resultados más importantes del capítulo 3.

**Definición 2.9 (CW-complejo regular)** Un CW-complejo  $X$  se dice que es *regular* si las aplicaciones características  $f_\sigma : \bar{B}_d \rightarrow X$  de toda célula  $\sigma \in X^{(*)}$  son homeomorfismos.

En ocasiones será suficiente para nuestros razonamientos que una célula sea regular como cara de otra célula, noción que precisamos a continuación.

**Definición 2.10 (Cara regular)** Sea  $X$  un CW-complejo,  $\sigma, \tau \in X^{(*)}$  células tales que  $\sigma \leq \tau$  con  $\dim(\sigma) = d-1$ ,  $\dim(\tau) = d$ ,  $d \geq 1$ . Sean  $f_\sigma : \bar{B}_{d-1} \rightarrow X$  y  $f_\tau : \bar{B}_d \rightarrow X$  sus respectivas aplicaciones características. Se dice que  $\sigma$  es una *cara regular* de  $\tau$  si existen homeomorfismos  $g_\tau : \bar{B}_d \rightarrow \bar{B}_d$  y  $g_\sigma : S_{d-1}^{\geq 0} = \{(x_1, \dots, x_d) \in S_{d-1} : x_1 \geq 0\} \rightarrow \bar{B}_{d-1}$  tales que el siguiente diagrama, en el que  $i$  denota la inclusión, es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 S_{d-1}^{\geq 0} & \xrightarrow{g_\sigma} & \bar{B}_{d-1} & & \\
 \downarrow i & & \searrow f_\sigma & & \\
 \bar{B}_d & \xrightarrow{g_\tau} & \bar{B}_d & \xrightarrow{f_\tau} & X
 \end{array}$$

Si no se cumple esta condición, se dice que  $\sigma$  es una *cara irregular* de  $\tau$ .

Nótese que todas las células de un complejo regular son caras regulares de cualquier célula de dimensión superior en una unidad que las contenga.

---

### EJEMPLO 2.11 (La esfera como CW-complejo)

---

Puesto que una 0-célula consta de un único punto, existe una única aplicación de cualquier espacio en una 0-célula. Si consideramos una 0-célula  $\sigma$  (que será un punto) y una  $d$ -célula  $\tau$ ,  $X = \sigma \cup \tau$ , las únicas aplicaciones características posibles son  $f_\sigma : \bar{B}_0 = \{0\} \rightarrow X$  con  $f_\sigma(0) = \sigma$  y  $f_\tau : \bar{B}_d \rightarrow X$  con  $f_\tau(S_{d-1}) = \sigma$ .

Entonces el CW-complejo que solo tiene una célula de dimensión 0 y otra de dimensión  $d$  es (homeomorfo a) la esfera de dimensión  $d$ , pues toda la frontera de la célula  $d$ -dimensional debe contraerse (pegarse) a un punto, como se muestra en la figura 2.1 para el caso  $d = 2$ . Esto hace que el complejo celular (nótese que en todo caso tiene dos células, y podemos adoptar esta terminología) resultante no sea regular ni tan siquiera en el caso  $d = 1$  (pues  $S_0$  tiene dos componentes conexas, y la 0-célula solo una, y por lo tanto no pueden ser homeomorfas). La propiedad de Hausdorff se traslada por las aplicaciones características de forma obvia, por lo que en general no la mencionaremos, y puesto que solo consideramos un número finito de células no necesitamos preocuparnos por que se respete la topología débil (condición 3 de la definición 2.2) y como normalmente trabajaremos en este caso tampoco haremos referencia a ello en general.



Figura 2.1: Conjunto de células cerradas (izquierda) y complejo celular (derecha)  $X$  no regular homeomorfo a  $S_2$ . Consta de una 2-célula cuya frontera se pega a un único punto, una 0-célula, según el código de colores que respeta las identificaciones del pegado.

Nótese que para especificar cómo se pegan las células basta con dar las imágenes por las aplicaciones características de cada células de las fronteras de las bolas cerradas, es decir, las esferas, tal y como hemos hecho en el ejemplo anterior, ya que en el interior sabemos que es un homeomorfismo. Es por ello que en muchas ocasiones a las restricciones de estas aplicaciones a las correspondientes esferas se las denomina *aplicaciones de pegado* y se denota por  $f_{\partial\sigma} : S_{d-1} \rightarrow X$  a la correspondiente a una  $d$ -célula  $\sigma$  en el complejo  $X$ . Volveremos sobre esto en el teorema 2.14.

---

#### EJEMPLO 2.12 (De nuevo la esfera como CW-complejo)

---

Podemos dar otra estructura de CW-complejo para la  $d$ -esfera. Comencemos considerando dos 0-células (puntos)  $\sigma_0^0, \sigma_1^0$  que constituirán el 0-esqueleto  $X^0 = \sigma_0^0 \cup \sigma_1^0$ , con sus correspondientes aplicaciones características que las envían en puntos distintos, de forma que con la topología de CW-complejo tenemos el homeomorfismo  $X^0 \simeq S_0$ .

Consideremos ahora dos 1-células  $\sigma_0^1, \sigma_1^1$  pegadas a las anteriores mediante los homeomorfismos  $f_{\sigma_i^1}$  con  $f_{\sigma_i^1}(S_0) = X^0$ ,  $i = 0, 1$ , formando el 1-esqueleto  $X^1 = \sigma_0^0 \cup \sigma_1^0 \cup \sigma_0^1 \cup \sigma_1^1$  con lo que al considerar la topología de CW-complejo tenemos  $X^1 \simeq S_1$ . Si ahora pegamos a esto otras dos 2-células  $\sigma_0^2, \sigma_1^2$  (que podemos visualizar como los hemisferios norte y sur) mediante los homeomorfismos  $f_{\sigma_i^2}$  con  $f_{\sigma_i^2}(S_1) = X^1$ ,  $i = 0, 1$ , de nuevo  $X^2 = \sigma_0^0 \cup \sigma_1^0 \cup \sigma_0^1 \cup \sigma_1^1 \cup \sigma_0^2 \cup \sigma_1^2 \simeq S_2$ . Repitiendo el proceso de añadir dos células de cada dimensión tenemos en cada paso un complejo celular  $X^d = \bigcup_{j=0}^d (\sigma_0^j \cup \sigma_1^j) \simeq S_d$ , que además es regular. La figura 2.2 muestra gráficamente el proceso hasta dimensión 2.

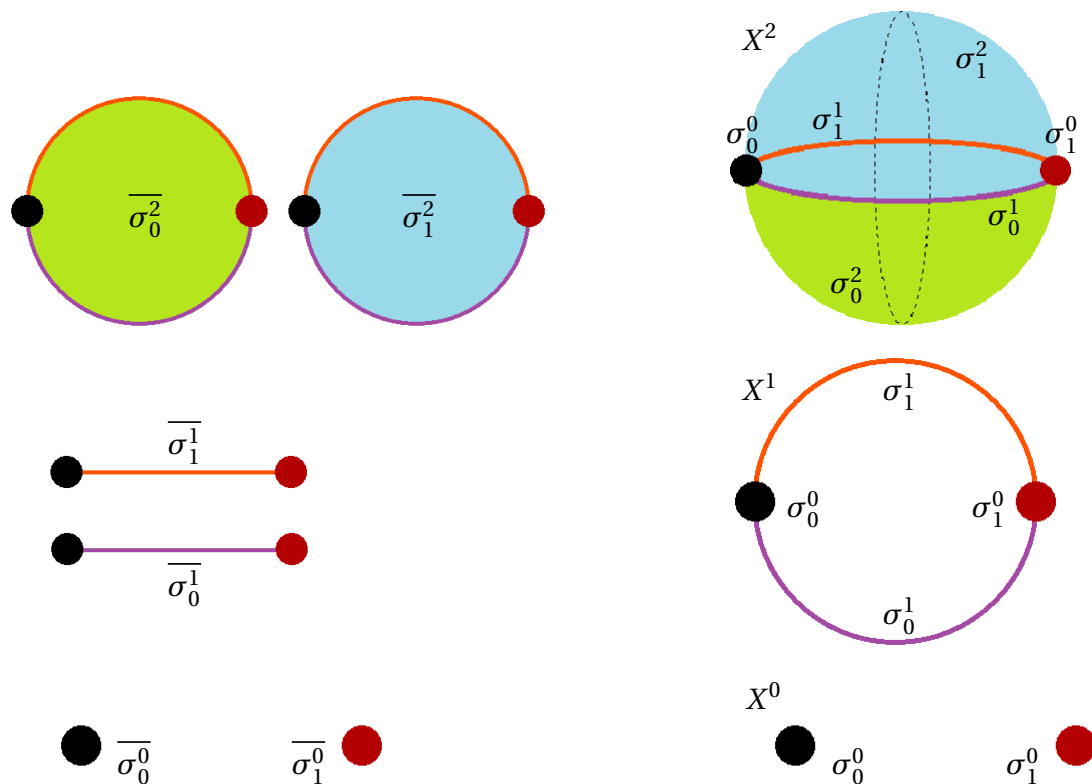


Figura 2.2: Conjunto de células cerradas (izquierda) y esqueletos (derecha) de la esfera hasta dimensión 2, con las identificaciones del pegado marcadas con colores.

El ejemplo y la figura 2.2 ilustran un método de construcción de CW-complejos que se basa precisamente en partir de las células de dimensión más baja e ir añadiéndoles tantas veces como sea necesario otras de dimensión superior mediante las aplicaciones de pegado, que actúan como aplicaciones cociente, con lo que la topología de los espacios obtenidos en cada paso está bien definida y coincide con la de CW-complejo determinada por la definición 2.2 y por lo tanto puede considerarse como una caracterización alternativa de estos espacios. Precisaremos esto a continuación.

**Definición 2.13 (Pegado de espacios vía una aplicación continua)** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos,  $A \subset X$  un cerrado y  $f: A \rightarrow Y$  una aplicación continua. Se denomina *pegado de  $X$  e  $Y$  por (o vía)  $f$*  y se denota por  $X \cup_f Y$  al espacio topológico cociente de la unión disjunta  $X \sqcup Y$  por la relación de equivalencia generada por las relaciones  $a \sim f(a)$  para todo  $a \in A$ , dotado de la topología cociente inducida por dicha relación.

**Teorema 2.14 (Caracterización constructiva de los CW-complejos)** Un espacio topológico  $X$  es un CW-complejo si y solo si puede obtenerse mediante el siguiente proceso inductivo de adjunción de células de dimensiones crecientes:

Se parte de un conjunto discreto de puntos (0-células)  $X^0$ , que forman el 0-esqueleto. Supongamos que ya se ha construido el  $d-1$ -esqueleto  $X^{d-1}$ . Sea  $\bigsqcup_{\sigma \in I_d} \bar{B}_d^\sigma$  una unión dis-

junta de bolas cerradas de dimensión  $d$ ,  $\bar{B}_d^\sigma \simeq \bar{B}_d$ , donde  $\sigma$  recorre un cierto conjunto de índices  $I_\sigma$ . Para todo  $\sigma \in I_\sigma$  sea  $f_{\partial\sigma}: S_{d-1} = \partial\bar{B}_d^\sigma \rightarrow X^{d-1}$  una aplicación continua (que será la de pegado de  $\sigma$ ) cuya imagen corte no trivialmente solo a una cantidad finita de células de  $X^{d-1}$ . Dichas aplicaciones inducen una aplicación continua

$$f: \bigsqcup_{\sigma \in I_d} S_{d-1}^\sigma = \partial \left( \bigsqcup_{\sigma \in I_d} \bar{B}_d^\sigma \right) \rightarrow X^{d-1},$$

donde  $S_{d-1}^\sigma = \partial\bar{B}_d^\sigma$ . Se construye el  $d$ -esqueleto de  $X$  fijando

$$X^d = \left( \bigsqcup_{\sigma \in I_d} \bar{B}_d^\sigma \right) \cup_f X^{d-1}.$$

La aplicación  $f$  de pegado de las  $d$ -células contiene la información sobre cómo se pegan las bolas  $\bar{B}_d^\sigma$  por sus fronteras  $S_{d-1}^\sigma$  a  $X^{d-1}$ .

Ahora se fija

$$X = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} X^d,$$

y se define su topología estableciendo que para  $F \subset X$ ,  $F$  es cerrado en  $X$  si y solo si  $F \cap X^d$  es cerrado en  $X^d$  para todo  $d \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Supongamos primero que tenemos un espacio topológico como el descrito en el enunciado, queremos ver que es un CW-complejo según la definición 2.2. Se observa que hay una correspondencia biunívoca entre las células de  $X$  (en el sentido de la definición 2.2) y los elementos de la unión disjunta  $I = \bigsqcup_{d \in \mathbb{N}} I_d$ , que en el propio enunciado ya hemos dado por supuesta para facilitar su comprensión, aunque en principio se trata simplemente de índices en un determinado conjunto. La aplicación característica de la célula (abierto) que se corresponde con  $\sigma \in I_d$ ,  $f_\sigma: \bar{B}_d^\sigma \rightarrow X$ , está dada por la composición

$$\bar{B}_d \xrightarrow{\cong} \bar{B}_d^\sigma \hookrightarrow \bigsqcup_{\sigma \in I_d} \bar{B}_d^\sigma \hookrightarrow \bigsqcup_{\sigma \in I_d} \bar{B}_d^\sigma \cup X^{d-1} \xrightarrow{q_f} \left( \bigsqcup_{\sigma \in I_d} \bar{B}_d^\sigma \right) \cup_f X^{d-1} \hookrightarrow X,$$

donde las aplicaciones indicadas por  $\hookrightarrow$  son las inclusiones obvias, que son continuas, y  $q_f$  es (la restricción de) la aplicación cociente asociada a  $f$  según la definición 2.13. Esta aplicación es evidentemente continua por ser composición de continuas y al restringirla a la

bola abierta  $B_d$  es un homeomorfismo entre esta y  $f_\sigma(B_d)$ , que será la  $d$ -célula (abierto) de  $X$  en el sentido de la definición 2.2 que se corresponde con el índice  $\sigma \in I_d$  (en lo sucesivo no haremos esta distinción), ya que la aplicación  $f_{\partial\sigma}$  y por lo tanto  $f$  no están definidas en  $B_d^\sigma$  sino solo en su frontera, con lo que la correspondiente aplicación cociente no identificará puntos de  $B_d$  con ningún otro. Además, al considerar la inclusión de  $X^{d-1}$  en  $X$  en la aplicación  $f_{\partial\sigma} : S_{d-1} \rightarrow X^{d-1} \hookrightarrow X$  se tiene que  $f_\sigma|_{S_{d-1}} = f_{\partial\sigma}$  (de ahí que en el enunciado la llamáramos aplicación de pegado y la denotáramos de esta manera), por lo que se cumple la hipótesis de finitud de la adherencia.

En cuanto a la topología débil, queremos ver que  $F \subset X$  es cerrado en  $X$  si y solo si  $F \cap X^d$  es cerrado en  $X^d$  para todo  $d \in \mathbb{N}$ , con la topología cociente en  $X^d$  en cada caso. En primer lugar comprobaremos que si  $F \subset X^d$  es un cerrado (en  $X^d$ ) entonces  $F \cap \overline{\sigma^m}$  es un cerrado para toda  $m$ -célula  $\sigma^m \in X^{(*)}$ . Que  $F$  sea cerrado en  $X^d$  con la topología cociente equivale a decir que  $q_f^{-1}(F)$  es cerrado en  $\bigcup_{\sigma \in I_d} \overline{B}_d^\sigma \cup X^{d-1}$ . Sea  $\sigma^m$  una  $m$ -célula. Se nos presentan ahora tres casos:

- Si  $m < d$  entonces el hecho de que  $q_f^{-1}(F)$  sea cerrado en  $\bigcup_{\sigma \in I_d} \overline{B}_d^\sigma \cup X^{d-1}$  implica en particular que  $F \cap X^{d-1}$  es cerrado, y por lo tanto  $F \cap \overline{\sigma^m}$  es cerrado por ser  $\overline{\sigma^m}$  un cerrado contenido en  $X^{d-1}$ .
- Si  $m = d$  entonces  $\sigma^m \in I_d$ , y el hecho de que  $q_f^{-1}(F)$  sea cerrado en  $\bigcup_{\sigma \in I_d} \overline{B}_d^\sigma \cup X^{d-1}$  implica que  $F \cap \overline{B}_d^{\sigma^m}$  es cerrado en  $\overline{B}_d^{\sigma^m}$ , luego compacto (por ser el espacio métrico) y por lo tanto su imagen por  $q_f$ ,  $F \cap \overline{\sigma^m}$ , es compacta, luego cerrada (ya que el espacio será de Hausdorff).
- Si  $m > d$  entonces como  $F \subset X^d$  se tiene que  $F \cap \overline{\sigma^m} \subset \text{Im}(f_{\partial\sigma^m})$ , que está contenido en una unión finita de  $\overline{\tau_j^{l_j}}$ , con  $l_j < m$ . Procediendo por inducción sobre la dimensión de las células y aplicando los dos casos anteriores se deduce que cada  $F \cap \overline{\tau_j^{l_j}}$  es cerrado, donde  $j$  recorre un conjunto finito  $\mathcal{J}$ , luego  $F \cap \left( \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \overline{\tau_j^{l_j}} \right)$  es cerrado, por lo que  $F \cap \overline{\sigma^m} = F \cap \left( \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \overline{\tau_j^{l_j}} \right) \cap \overline{\sigma^m}$  también lo será.

Podemos concluir entonces que si un conjunto  $F$  es tal que  $F \cup X^d$  es un cerrado para todo  $d \in \mathbb{N}$ , entonces  $F \cup \overline{\sigma}$  es un cerrado para toda célula  $\sigma \in X^{(*)}$  sin más que razonar como antes con  $d$  suficientemente avanzado.

Recíprocamente, si  $F \cup \overline{\sigma^m}$  es un cerrado para toda célula  $\sigma^m \in X^{(*)}$  entonces  $f_{\sigma^m}^{-1}(F)$  es un cerrado en  $\overline{B}_m^{\sigma^m}$  para todo  $\sigma^m$ . Supongamos por inducción que  $F \cap X^{n-1}$  es cerrado en  $X^{n-1}$  para  $1 \leq n < d$  (para  $X^0$  es evidente). Como  $f_{\sigma^d}^{-1}(F)$  es un cerrado en  $\overline{B}_d^{\sigma^d} \simeq \overline{B}_d$  para cada  $\sigma^d$ , también lo será en  $\bigcup_{\sigma \in I_d} \overline{B}_d^\sigma$  y como por hipótesis de inducción  $F \cap X^{d-1}$  es cerrado



en  $X^{d-1}$ , por la definición 2.13 de la topología cociente también  $F \cap X^d$  será cerrado en  $X^d = \left( \bigcup_{\sigma \in I_d} \overline{B}_d^\sigma \right) \cup_f X^{d-1}$ .

La demostración de que el espacio construido es de Hausdorff no resulta especialmente interesante para nuestros propósitos, y remitimos al lector interesado a [Hat02, Apéndice, proposición A.3], que previamente construye una familia de entornos abiertos de un subconjunto del CW-complejo utilizando coordenadas polares inductivamente para después demostrar que puede tomar entornos disjuntos para cerrados disjuntos del CW-complejo. Dispersas en las páginas anteriores de la misma referencia pueden encontrarse también todas las ideas que hemos utilizado en la demostración de las otras propiedades. Una prueba alternativa de la propiedad de Hausdorff puede encontrarse en [Pic73, Teorema I.3.6], donde construye también abiertos apropiados pero después de un desarrollo teórico mucho mayor, en línea con todo el tratamiento que hace de los CW-complejos. Resulta más interesante la prueba desarrollada en [LW69, Capítulo II, proposición 2.1], que puede ser integrada en nuestro esquema inductivo, pues demuestra que, partiendo de un espacio de Hausdorff, al pegarle un cierto conjunto de células el espacio resultante es de nuevo de Hausdorff. De hecho toda la sección 2 del capítulo II de este libro está dedicada a demostrar la equivalencia establecida en este mismo teorema de una forma menos directa que la que hemos expuesto aquí (pero que a cambio le proporciona otros resultados que le resultarán útiles), y en la sección 4 prueba la paracompacidad de (todos los subconjuntos de) los CW-complejos, que es más fuerte que la propiedad de Hausdorff.  $\square$

Es interesante no solo la nueva caracterización de los complejos como espacios topológicos construidos “por dimensiones”, sino también la nueva caracterización de la topología, que nos ahorra hacer las comprobaciones célula a célula, cambiándolas por los esqueletos. Esta noción constructiva y la que introdujimos en 2.2 son utilizadas a partes iguales en la literatura como definición de CW-complejo. Así, por ejemplo, en [Whi49] Whitehead los definió por primera vez como en 2.2 mientras que casi 30 años después, en su libro [Whi78], utiliza la caracterización que hemos dado en el teorema 2.14 hasta el punto de apenas mencionar la otra, aduciendo en la introducción del capítulo que “parece más apropiado construirlos esqueleto a esqueleto, obteniendo cada nuevo esqueleto a partir del anterior por la adjunción simultánea de una familia de células” ([Whi78, pág. 47]). En [Bre93, Capítulo IV, sección 8] Bredon utiliza la definición constructiva y ni tan siquiera menciona la otra, mientras que Massey [Mas80, Capítulo IV, sección 2] hace una mezcla de ambas, considerando intrínsecamente la equivalencia desde el principio y luego poniendo de manifiesto en comentarios y teoremas la redundancia de la definición. Lundell y Weingram, en la obra clásica de referencia sobre CW-complejos [LW69], se inclinan por la definición en términos de aplicaciones características. Piccinini, en [Pic73], aborda la caracterización constructiva pero con una definición mucho más teórica del pegado como el colímite de un cierto diagrama, definido en términos de una propiedad universal a la que recurre constantemente en sus demostraciones. Esto es equivalente a nuestra definición 2.13, expresada en un lenguaje que pretende resultar más sencillo, más similar al que el mismo autor utiliza varios años después en su monografía conjunta con Fritsch [FP90].

En cuanto a la conveniencia de considerar CW-complejos generales o finitos, que como ya comentamos previamente son mucho más manejables, en la introducción del artículo en el que define estos objetos el propio Whitehead da una justificación:

There are two main reasons why we do not confine ourselves to finite complexes. The first is that we want to include such simple spaces as open manifolds or, more generally, infinite but locally finite complexes. The second is that we have a great deal to do with covering complexes. We do not restrict ourselves to locally finite complexes because this restriction would be troublesome when considering “mapping cylinders” of infinite complexes.

[Whi49, pág. 214]

Sin embargo, ninguna de estas razones representan un impedimento para nuestros objetivos, por lo que aunque desarrollaremos gran parte de la teoría en el caso general, no tendremos reparos en saltar al caso de complejos celulares (es decir, con un número finito de células) para ganar en simplicidad. De hecho, los ejemplos que consideraremos serán todos de este tipo.

En [Hat02, Apéndice], [Bre93, Capítulo IV, sección 8], y en [Mas80, Capítulo IV, sección 3] se pueden encontrar más resultados puramente topológicos relacionados con los CW-complejos, en el caso de las dos últimas referencias acompañados de ejemplos de CW-complejos homeomorfos a espacios conocidos como el espacio proyectivo real y complejo  $n$ -dimensional, el toro o la botella de Klein. En más profundidad aparecen en [FP90, Sección 1.3] y en [LW69, Capítulo II, sección 3].

Antes de empezar con la subsección siguiente daremos un resultado que será útil en el capítulo 3, y que ayuda a fijar algunas ideas sobre las diferencias entre los CW-complejos generales y regulares.

**Lema 2.15** Sea  $X$  un CW-complejo regular,  $\sigma^n, \tau^d \in X^{(*)}$  células de dimensión  $n < d$  y  $d$  respectivamente. Si  $\sigma^n \cap \tau^d \neq \emptyset$  entonces  $\sigma^n$  es una cara de  $\tau^d$ ,  $\sigma^n < \tau^d$ .

*Demostración.* Basta con probarlo para  $n = d - 1$  y acabar por inducción, el caso  $n = d$  es trivial pues por ser todas las células abiertas disjuntas,  $\sigma^n = \tau^d$  y una célula es una cara (impropia) de sí misma. Como  $\bar{\tau}^d$  es compacto,  $\sigma^{d-1} \cap \bar{\tau}^d$  es cerrado en  $\sigma^{d-1}$ . Por ser  $\sigma^{d-1}$  un abierto de  $X^{d-1}$ ,  $\sigma^{d-1} \cap \bar{\tau}^d = \sigma^{d-1} \cap \partial\tau^d$  es un abierto de  $\partial\tau^d \simeq S_{d-1}$ . Por el Teorema de Invarianza del Dominio ([Mas80, Capítulo III, teorema 6.6 y corolario 6.7]),  $\sigma^{d-1} \cap \bar{\tau}^d$  es también un abierto de  $\sigma^{d-1}$ . Como es no vacío por hipótesis y  $\sigma^{d-1}$  es conexo, debe ser  $\sigma^{d-1} \cap \bar{\tau}^d = \sigma^{d-1}$ .  $\square$

Este resultado, cuya demostración puede encontrarse en [Mas78, Lema 5.5], no es cierto para CW-complejos cualesquiera, pues precisa del Teorema de Invarianza del Dominio, una de cuyas hipótesis es que el homeomorfismo de las aplicaciones características se extienda también a la frontera de la bola. En esa misma referencia pueden encontrarse otros resultados interesantes sobre complejos regulares.

### 2.1.1 Complejos simpliciales

Un caso particular especialmente sencillo de CW-complejos son los complejos simpliciales, aquellos cuyas células (cerradas, o si se prefiere la adherencia de las abiertas) son símplices. A continuación daremos su definición y comprobaremos que efectivamente pueden verse como CW-complejos regulares, por lo que resultan especialmente interesantes para los ejemplos (de hecho la práctica totalidad de los CW-complejos que utilizaremos serán complejos simpliciales). Pueden tomarse como referencias [Rot88, Capítulo 7], [Bre93, Capítulo IV, sección 21], [OW07, Sección 2.3] y [Mar14, Sección 2.1].

Conviene recordar algunas nociones básicas antes de entrar con las definiciones que nos interesan. La *envolvente*, *clausura* o *cierre convexo* de un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$  para un cierto  $d \in \mathbb{N}$  es la intersección de todos los conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^d$  que lo contienen. Por otra parte, dado un conjunto finito de puntos  $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ , se dice que son *afínmente independientes* si  $\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i = 0$  y  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ , con  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  para todo  $i = 0, \dots, n$ , implica  $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ , lo cual es equivalente a decir que entre todos generan minimalmente el menor subespacio afín que los contiene, o que este tiene dimensión  $n$ . Si lo anterior no se cumple y, por ejemplo,  $\lambda_0 = -1$ , entonces  $v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , y por lo tanto  $v_0$  está en el subespacio afín generado por  $v_1, \dots, v_n$ .

**Definición 2.16 (Símplice (geométrico))** Dados puntos  $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$  afínmente independientes, se define el *símplice* (geométrico o afín)  $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$  como la envolvente convexa de dichos puntos, que es el conjunto

$$\sigma = (v_0, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Si  $p = \sum_{i=0}^n \lambda_{p_i} v_i$ , los números  $\lambda_{p_i}$  reciben el nombre de *coordenadas baricéntricas* de  $p \in \sigma$ . Se dice que este símplice tiene dimensión  $n$  (en general la dimensión de un símplice será una unidad menor del número de puntos que lo generan). Se considera el símplice vacío  $()$ , denotado por  $\emptyset$ , como el único símplice de dimensión  $-1$ . Se denominan *vértices* del símplice a los puntos  $v_0, \dots, v_n$  (el conjunto que forman se denota por  $V(\sigma)$ ) y *cara  $k$ -dimensional* (o simplemente  *$k$ -cara*) a cualquier símplice  $(v_{i_0}, \dots, v_{i_k})$ .

Una vez definidos los símplices, el propio nombre induce a pensar que los complejos simpliciales serán a estos lo que los CW-complejos eran a las células, es decir, un conjunto de ellos con ciertas propiedades sobre cómo se agregan unos a otros.

**Definición 2.17 (Complejo simplicial geométrico)** Un *complejo simplicial geométrico*  $\Delta$  en  $\mathbb{R}^d$  es una colección de símplices (geométricos) en  $\mathbb{R}^d$ , llamados *caras de  $\Delta$*  (de la dimensión que corresponda), tales que:

1. Si  $\sigma \in \Delta$  y  $\tau$  es una cara de  $\sigma$  entonces  $\tau \in \Delta$ .

2. Si  $\sigma, \tau \in \Delta$  entonces  $\sigma \cap \tau \in \Delta$  o bien  $\sigma \cap \tau = \emptyset$ .

En muchas ocasiones, para simplificar la segunda propiedad, se asume que  $\emptyset \in \Delta$ . Las caras de dimensión 0 de  $\Delta$  también reciben el nombre de *vértices*, y el conjunto que forman se denota por  $V(\Delta) \subset \mathbb{R}^d$ . La unión conjuntista de todas las caras de  $\Delta$  se representa mediante  $|\Delta| \subset \mathbb{R}^d$ . Se define la *dimensión* del complejo  $\Delta$  como el máximo de las dimensiones de sus caras,  $\dim(\Delta) := \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$ .

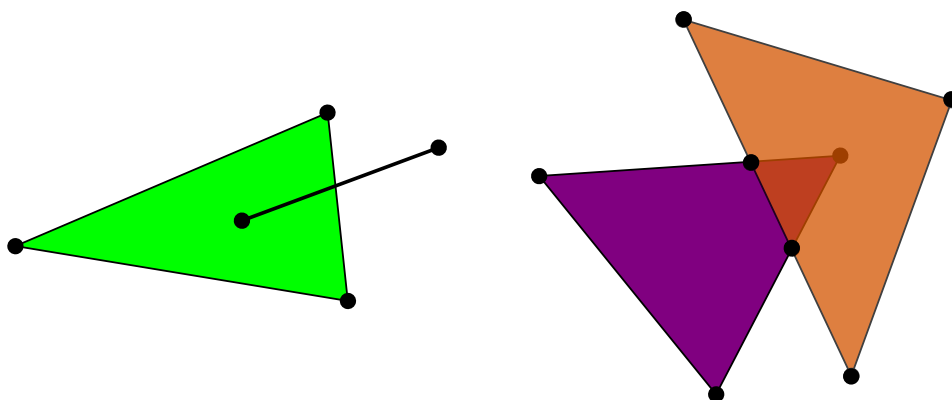


Figura 2.3: Dos ejemplos de figuras que no son complejos simpliciales, pues no cumplen la propiedad 2 de la definición.

El hecho de que los símlices sean conjuntos de un espacio euclídeo permite “visualizar” los complejos simpliciales que acabamos de definir siempre que la dimensión sea lo suficientemente baja. En todo caso pueden considerarse como objetos geométricos, de ahí el adjetivo. Por otra parte, en muchas ocasiones solo nos interesará su marcado carácter combinatorio (al fin y al cabo un símlice geométrico viene determinado por sus vértices, que son un conjunto discreto de puntos con el que podemos identificar cualquier otro cuya combinatoria nos interese explotar), lo que nos lleva a la siguiente abstracción del concepto de complejo simplicial.

**Definición 2.18 (Complejo simplicial abstracto)** Un *complejo simplicial abstracto* sobre un conjunto base discreto  $\Omega$  es un subconjunto  $\Delta \subset \mathcal{P}(\Omega)$  (el conjunto de partes de  $\Omega$ ) tal que  $\{a\} \in \Delta$  para todo  $a \in \Omega$  y si  $\sigma \in \Delta$  y  $\tau \subset \sigma$  entonces  $\tau \in \Delta$ .

Los elementos de  $\Delta$ , que serán conjuntos de elementos de  $\Omega$ , reciben el nombre de *caras* del complejo simplicial de dimensión una unidad menos que su cardinal, es decir, si  $\sigma = \{a_{i_0}, \dots, a_{i_k}\}$  diremos que es una cara  $k$ -dimensional. Las caras 0-dimensionales  $\{a\}$ , que identificaremos con los elementos  $a \in \Omega$ , reciben el nombre de *vértices*. Se define la *dimensión* del complejo  $\Delta$  como el máximo de las dimensiones de sus caras,  $\dim(\Delta) := \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$  (si no existe dicho máximo, diremos que es de dimensión infinita).

Para aquellos familiarizados con la noción de complejo simplicial resultará conocido que son equivalentes los conceptos de complejo simplicial geométrico y abstracto. Una de-

mostración rigurosa puede encontrarse en [Rot88, Teorema 7.8], donde define las categorías de complejos simpliciales geométricos y abstractos, que tienen como objetos respectivos los que hemos definido, y como morfismos las aplicaciones simpliciales correspondientes en cada caso (que no definiremos puesto que no vamos a necesitarlas, y supondría desviarnos de nuestro objetivo), y a continuación prueba la existencia de un funtor covariante entre ambas categorías. Aunque se restringe a los complejos simpliciales finitos, el propio autor admite en una nota a pie de página que las definiciones se pueden extender al caso infinito y con ellas las categorías y los funtores. Podemos resumir la correspondencia entre los objetos: partiendo de un complejo simplicial geométrico  $\Delta$  es inmediato obtener uno abstracto  $\tilde{\Delta}$  sin más que considerar como conjunto base los vértices de  $\Delta$ ,  $V(\Delta)$ , y como caras los conjuntos  $V(\sigma)$  donde  $\sigma \in \Delta$  recorre el conjunto de caras de  $\Delta$ . Recíprocamente, dado un complejo simplicial abstracto  $\tilde{\Delta}$  sobre el conjunto base  $\{a_0, \dots, a_d\}$ , podemos identificar en  $\mathbb{R}^d$  los elementos  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , con los puntos del espacio euclídeo correspondientes a los vectores de la base canónica  $e_i$  (que denotaremos de la misma forma) y  $a_0$  con el  $\mathbf{0}$  (por comodidad lo denotaremos por  $e_0$ ), nótese que estos  $d + 1$  puntos son afinmente independientes. Definimos un complejo simplicial geométrico  $\Delta$  tal que  $V(\Delta) = \{e_0, e_1, \dots, e_d\}$  formado por la colección de símplices  $\sigma = (e_{i_0}, \dots, e_{i_k})$  asociados las caras  $\tilde{\sigma} = \{a_{i_0}, \dots, a_{i_k}\}$  de  $\tilde{\Delta}$ . Llamaremos al complejo  $\Delta$  así definido *realización geométrica* de  $\tilde{\Delta}$ , por lo que acabamos de probar que cada complejo simplicial abstracto tiene una realización geométrica, que de hecho conserva las relaciones de inclusión entre caras y sus dimensiones (y por lo tanto la del complejo). En vista de esto, en adelante no distinguiremos entre la noción abstracta y geométrica de los complejos simpliciales, e incluso confundiremos las notaciones relativas a ambos, aunque generalmente trataremos con la versión abstracta, pues basta para codificar los aspectos combinatorios que nos interesan.

En base a lo anterior, diremos que  $\Delta$  es un complejo simplicial en  $d$  vértices si es un complejo simplicial abstracto sobre un conjunto base con  $d$  elementos, que en muchas ocasiones denotaremos simplemente por  $\{1, 2, \dots, d\}$ . También se suele considerar como complejo simplicial el complejo vacío,  $\Delta = \emptyset$ , cuya dimensión se conviene que es  $\dim(\emptyset) = -\infty$ . No debe confundirse con el complejo irrelevante  $\{\emptyset\}$ , cuya única cara es el símplice vacío, y cuya dimensión será, por lo tanto,  $-1$ . En general, se asume que el símplice vacío es una cara de todo complejo simplicial.

La correspondencia entre complejos simpliciales abstractos y geométricos no es en absoluto única. De hecho, dada una realización geométrica de un complejo simplicial abstracto, cualquier complejo simplicial homeomorfo a ella será otra realización geométrica suya. Esto nos permitirá visualizar las realizaciones geométricas en espacios euclídeos de dimensión inferior al de la construcción anterior cuando no se alcance la dimensión máxima en ninguno de los símplices.

## EJEMPLO 2.19

Sea  $\tilde{\Delta} = \{\emptyset, \{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_0, a_1\}, \{a_0, a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_0, a_1, a_2\}\}$  un complejo simplicial abstracto sobre el conjunto base  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ . Los dos complejos de la figura 2.4, determinados por las etiquetas de los vértices, son realizaciones geométricas suyas, una vista en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  y otra en  $\mathbb{R}^2$ .

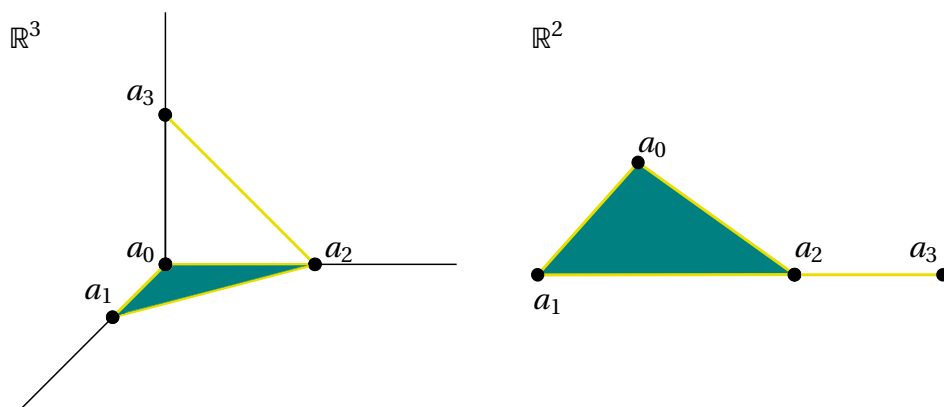


Figura 2.4: Dos realizaciones geométricas de  $\tilde{\Delta}$ , una vista en  $\mathbb{R}^3$  y otra en  $\mathbb{R}^2$ . Las etiquetas en los vértices permiten la identificación de todas las caras, aquellas coloreadas (junto con los propios vértices) son las que pertenecen al complejo.

La importancia del papel de los complejos simpliciales como inspiración de la noción de CW-complejo es admitida por el propio Whitehead en la introducción del capítulo II de su libro [Whi78], en la que narra las analogías que buscaba al desarrollar la teoría de CW-complejos con la ya establecida en el caso simplicial, esquivando los problemas de que esta adolecía. Un término medio son los CW-complejos regulares, según se puede leer en el siguiente fragmento extraído de la misma referencia:

Regular cell complexes constitute a compromise between simplicial and CW-complexes. On the one hand, they are very close to simplicial complexes (in fact, only one barycentric subdivision away), so that they share many of the advantages of the latter. On the other hand, they lack the rigidity of the simplicial ones; for example, the Cartesian product of regular cell complexes has a natural structure as a regular cell complex.

[Whi78, pág. 47]

A la vista de lo anterior, y como cabía esperar, resulta que los complejos simpliciales pueden verse como casos particulares de CW-complejos, como probaremos a continuación.

**Teorema 2.20** Un complejo simplicial (geométrico)  $\Delta \subset \mathbb{R}^\infty$  es un CW-complejo regular.

*Esquema de la demostración.* Definimos el *símplice estándar*  $n$ -dimensional en  $\mathbb{R}^\infty$  para  $d \geq n$  como  $\Delta_n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{e}_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$ , donde  $\mathbf{e}_i$  para  $i = 1, \dots, n$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^\infty$  y  $\mathbf{e}_0$  denota al origen de coordenadas.

Si  $\sigma = (v_{\sigma_0}, \dots, v_{\sigma_n})$  es una cara de  $\Delta$  consideremos la aplicación  $g_\sigma = \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  tal que  $g_\sigma \left( \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_{\sigma_i}$ , entonces  $\text{Im}(g_\sigma) = \sigma$  y de hecho es un homeomorfismo entre ambos símlices, que se restringe a un homeomorfismo entre sus fronteras.

Por otra parte podemos considerar el baricentro de  $\Delta_n$  (que no es más que el punto de coordenadas  $\lambda_i = \frac{1}{n+1}$  para todo  $i = 0, \dots, n$ ) y la proyección radial  $\pi_n$  desde dicho baricentro de la bola cerrada unidad  $\overline{B}_n$  con centro en el mismo punto sobre  $\Delta_n$ , que es otro homeomorfismo y de nuevo se restringe a un homeomorfismo entre  $S_{n-1}$  y la frontera de  $\Delta_n$ .

Entonces la composición  $g_\sigma \circ \pi_n$  es un homeomorfismo entre  $\overline{B}_n$  y  $\sigma$  que se restringe a un homeomorfismo entre las fronteras (y por lo tanto entre los interiores). En el caso de complejos simpliciales de dimensión finita se cumple la propiedad de finitud de la adherencia y el complejo tendrá la topología débil, mientras que la propiedad de Hausdorff se hereda de  $\mathbb{R}^d$  para  $d \geq \dim(\Delta)$ . En el caso general, la misma demostración del teorema 2.14 puede adaptarse a este caso sin dificultad.  $\square$

Los complejos simpliciales nos permiten presentar un primer ejemplo muy básico de la amalgama entre Álgebra, Topología y Combinatoria que da título a este capítulo: la correspondencia de Stanley-Reisner. El contenido combinatorio de los complejos simpliciales, encarnado en los complejos abstractos, puede ser aprovechado para codificar unívocamente un cierto tipo de ideales monomiales con una estructura muy marcada, los libres de cuadrados.

**Definición 2.21** Volviendo a la notación del capítulo 1, sea  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ . Dado un monomio  $m \in S$  decimos que es *libre de cuadrados* si no es divisible por  $x_i^2$ , para todo  $i = 1, \dots, n$  (es decir, si no tiene variables repetidas). Llamamos ideal (monomial) *libre de cuadrados* a un ideal  $I \subset S$  generado por monomios libres de cuadrados.

**Definición 2.22 (Correspondencia de Stanley-Reisner)** Considérense  $S = k[x_1, \dots, x_n]$  y el conjunto  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ .

- Dado  $\sigma \subset \Omega$  (que puede entenderse como un símlice sobre el conjunto base  $\Omega$ ), definimos  $\underline{x}^\sigma = \prod_{i \in \sigma} x_i$ .
- Dado un complejo simplicial  $\Delta$  sobre el conjunto base  $\Omega$ , se define su *ideal de Stanley-Reisner* como  $I_\Delta = \langle \{ \underline{x}^\sigma : \sigma \notin \Delta \} \rangle$ , y su *anillo de Stanley-Reisner* como  $S_\Delta = S / I_\Delta$ .

Llamamos *correspondencia de Stanley-Reisner* a la que asocia  $\Delta$  con su ideal de Stanley-Reisner  $I_\Delta$ .

Se observa fácilmente que  $I_\Delta$  es siempre un ideal monomial libre de cuadrados que tiene como generadores los monomios asociados a las “no caras” de  $\Delta$ , con lo que los monomios libres de cuadrados no nulos en  $S_\Delta = S/I_\Delta$  son exactamente aquellos de la forma  $\underline{x}^\sigma$  con  $\sigma \in \Delta$ , y la correspondencia será inyectiva. Como todo ideal libre de cuadrados se puede escribir en la forma  $I_\Delta$ , la correspondencia de Stanley-Reisner es una biyección entre el conjunto de complejos simpliciales sobre el conjunto base  $\Omega$  (o lo que es lo mismo, en  $n$  vértices) y el conjunto de ideales monomiales libres de cuadrados en  $S$ .

En la definición del monomio asociado a un símlice y por lo tanto del ideal y el anillo de Stanley-Reisner, lo que hacemos es identificar las variables  $x_1, \dots, x_n$  con los vértices, es decir, “etiquetamos” los vértices del complejo con las variables. Esta técnica combinatoria del etiquetado de las caras de los complejos será el pegamento que nos permitirá relacionar Álgebra y Topología de una forma mucho más general que como acabamos de hacer, aunque tendremos que esperar para verlo a la sección 2.2.

### EJEMPLO 2.23

El complejo simplicial irrelevante  $\{\emptyset\}$  se corresponde con el ideal maximal  $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , mientras que el complejo simplicial  $\Delta = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) \setminus \{1, \dots, n\}$  (un “símlice hueco”) se corresponde con el ideal principal  $I_\Delta = \langle x_1 x_2 \cdots x_n \rangle$ .

Recuperando el símlice del ejemplo 2.19, al que denotaremos por  $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$ , si lo etiquetamos como en la figura 2.5 el ideal de Stanley-Reisner correspondiente es  $I_\Delta = \langle x_1 x_4, x_2 x_4, x_1 x_2 x_4, x_1 x_3 x_4, x_2 x_3 x_4, x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \langle x_1 x_4, x_2 x_4 \rangle$ .

Por otra parte, si partimos del ideal monomial libre de cuadrados de  $S = k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ ,  $I = \langle x_1 x_4, x_1 x_5, x_2 x_5, x_3 x_5, x_4 x_5, x_2 x_3 x_4 \rangle$ , las “no caras” no serán solo las correspondientes a estos monomios generadores, sino también a todos los monomios libres de cuadrados que pertenezcan al ideal  $I$  y que serán, por lo tanto, múltiplos de estos. De hecho los símlices asociados a estos monomios son las “no caras minimales” del complejo, y toda cara que las contenga tampoco pertenecerá al mismo. Se deduce que el complejo simplicial es  $\Gamma = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$ , identificando  $x_i$  con  $i$ .

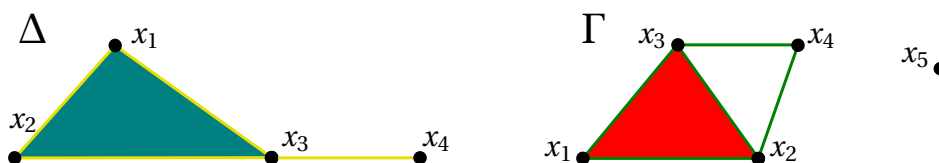


Figura 2.5: A la izquierda, realización geométrica de  $\Delta$  con los vértices etiquetados por las variables. A la derecha, lo mismo para  $\Gamma$ . En ambos casos los símlices de diferentes dimensiones están marcados con colores distintos.



Esta correspondencia nos permite expresar algunos de los resultados algebraicos propios de ideales libres de cuadrados en términos de complejos simpliciales, y en ocasiones sus demostraciones son más sencillas utilizando este lenguaje. Un ejemplo es la prueba de la unicidad de la descomposición de un ideal libre de cuadrados como intersección de ideales primos de  $S$  (ver [Mar14, Proposición 2.6]). En esa misma referencia se pueden encontrar más resultados relacionados con la correspondencia de Stanley-Reisner, así como en [Pee11, Sección 51], en [HH11, Subsección 1.5.2] y muy especialmente en [MS05, Capítulo 1]. Una de sus consecuencias más interesantes es que se pueden recuperar los números de Betti multigraduados de  $S_\Delta$  a partir de la homología (simplicial o singular reducida) de  $\Delta$ , a través de la fórmula de Hochster. Esta relación puede extenderse al caso de CW-complejos, como de hecho haremos en la subsección 2.2.2, pero antes tendremos que introducir la homología celular.

### 2.1.2 Homología celular

Precisamente porque la homología de los CW-complejos encierra una parte valiosa de la información sobre las estructuras algebraicas que vamos a asociarles, nos interesa poder calcularla y manejarla con facilidad. El lector probablemente conoce los axiomas de Eilenberg-Steenrod para las teorías de homología, esbozados en su artículo [ES45] y desarrollados en profundidad en [ES52], con los cuales consiguieron “poner orden” en el “zoológico” de teorías de homología al probar que todas aquellas que verifiquen dichos axiomas son esencialmente la misma. A consecuencia de esto, las diferentes teorías no son sino especializaciones de una misma, de forma que se puede utilizar la más apropiada en cada situación contando con que será respaldada por los resultados teóricos comunes a todas ellas e incluso, si resulta más conveniente, se puede pasar al dual y considerar las respectivas teorías de cohomología, como se hace con las de De Rham o de Čech al tratar variedades diferenciables. Y entre todas ellas, por su conveniencia para trabajar en el marco teórico, destaca la homología singular. No en vano en muchas ocasiones para demostrar que una determinada teoría de homología es equivalente a todas las demás se prueba que lo es a esta, por lo que en cierto modo juega un papel unificador.

En esta sección no pretendemos hacer nada distinto a esto, sino que nuestro objetivo es definir otra teoría de homología, llamada celular, que resulta especialmente apropiada para trabajar con CW-complejos, pues permite realizar cálculos explícitos a la vez que aprovechar todos los resultados ya conocidos para el resto de teorías. Pese a que la definición del complejo de cadenas que da lugar a la homología celular es sencilla (de hecho los módulos que forman el complejo estarán generados por las células de una determinada dimensión, algo más complicado es definir las diferenciales), no resulta en absoluto trivial probar rigurosamente la equivalencia con la homología singular. Ni tan siquiera es sencillo esbozar una demostración intuitiva, ya que intervienen resultados relativamente avanzados de Topología Algebraica y Álgebra Homológica tales como el Teorema de Escisión y técnicas de caza en diagramas, que quedan muy alejados de los objetivos de esta memoria. No obstante, intentaremos establecer los pasos a seguir en las pruebas, pidiendo fe a los lectores menos familiarizados y remitiendo a todos los interesados a textos en los que pue-

de seguirse, con mayor o menor detalle, la línea de razonamientos que justifica la validez de la homología celular.

Asumiremos conocidas la definición y propiedades básicas de la homología singular, singular reducida y relativa, así como algunos resultados más avanzados tales como el Teorema de Escisión o la sucesión de Mayer-Vietoris, que son propios de un curso de Topología Algebraica y pueden encontrarse en cualquier texto sobre el tema, como [GH81, Parte II], [Rot88, Capítulos 4, 5 y 6], [Hat02, Sección 2.1] o prácticamente cualquiera de las referencias que hemos dado en esta sección en cuyo título se mencione la homología o la Topología Algebraica.

**Definición 2.24 (Complejo de cadenas celular)** Sean  $(X, Y)$  un par de CW-complejos y  $A$  un anillo base (que suele ser  $\mathbb{Z}$  o un cuerpo  $k$ ). Se denota por  $\mathcal{C}_n(X, Y)$  al  $A$ -módulo libre generado por los elementos de  $(X, Y)^{(n)} = \{\sigma \in X^{(n)} : \sigma \notin Y^{(n)}\}$ , las  $n$ -células de  $X$  que no lo son de  $Y$ . Estos serán los módulos del complejo de cadenas (ver [GH81, Definición 10.1]) que queremos considerar, con lo que solo nos faltan por definir los homomorfismos entre ellos, a los que llamaremos diferenciales. Para ello tendremos que efectuar la construcción siguiente, que puede seguirse en un ejemplo concreto de CW-complejo regular (complejo simplicial, de hecho) en la figura 2.6.

- En primer lugar, para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideramos el espacio cociente  $X^n/X^{n-1}$  y denotamos por  $q_n : X^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$  a la aplicación de paso al cociente. Nótese que, topológicamente, tenemos un homeomorfismo  $X^n/X^{n-1} \simeq \bigvee_{\sigma \in X^{(n)}} S_n^\sigma$  con un ramillete de esferas, donde por  $S_n^\sigma = S_n \times \{\sigma\}$  denotamos a la esfera  $n$ -dimensional que representa la imagen de la célula cerrada  $f_\sigma(\overline{B}_n)$  por el paso al cociente  $q_n$ . El pegado de estas esferas para formar el ramillete se hace eligiendo un punto base en cada una,  $*$   $\in S_n$  e identificando todos los pares  $(*, \sigma)$  para  $\sigma \in X^{(n)}$  (es decir, pegándolas todas por sus puntos base, que no es necesario diferenciar pues acabarán siendo el mismo en el cociente).
- Evidentemente se puede considerar la aplicación  $\pi_\sigma : \bigvee_{\sigma \in X^{(n)}} S_n^\sigma \rightarrow S_n$ , donde este  $S_n$  es un espacio punteado (es decir, seguimos distinguiendo el punto base  $*$ ). Esta aplicación de proyección no es más que la composición de las dos proyecciones  $\bigvee_{\sigma \in X^{(n)}} S_n^\sigma \rightarrow S_n^\sigma$  y  $S_n^\sigma \rightarrow S_n$ , con lo que aunque la salida y la llegada sean las mismas para toda célula  $\sigma \in X^{(n)}$ , las aplicaciones son distintas.
- Para  $n \in \mathbb{N}$ , la frontera de la bola cerrada  $\overline{B}_n$  es una esfera  $S_{n-1}$ , y al identificar todos los puntos de esta (es decir, colapsar la frontera) obtenemos una esfera  $n$ -dimensional. Se denota por  $\gamma_n : \overline{B}_n \rightarrow S_n$  a una aplicación continua que envía todos los puntos de  $S_{n-1} \subset \overline{B}_n$  en el punto base  $*$   $\in S_n$  tal que su restricción a  $B_n$  (el interior de  $\overline{B}_n$ ) es un homeomorfismo sobre su imagen (que será  $S_n \setminus \{*\}$ ).
- Se define la aplicación de proyección celular correspondiente a  $\sigma \in (X, Y)^{(n)}$  como la única aplicación  $p_\sigma : X^n \rightarrow S_n$  tal que  $p_\sigma \circ f_\sigma = \gamma_n$  y  $p_\sigma \circ f_{\sigma'} = c_*$ , la aplicación constante con imagen el punto base  $*$   $\in S_n$  si  $\sigma' \in (X, Y)^{(n)}$ ,  $\sigma' \neq \sigma$ .

- Recuérdese que si tenemos una aplicación  $g : S_i \rightarrow S_i$  con  $i > 0$ , la aplicación inducida a nivel de la homología (singular, por ejemplo)  $g_* : H_i(S_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(S_i, \mathbb{Z})$  es un homomorfismo de un grupo cíclico infinito en sí mismo, y por lo tanto debe ser de la forma  $g_*([\alpha]) = d[\alpha]$ , donde  $d \in \mathbb{Z}$  solo depende de  $g$ . Este entero recibe el nombre de *grado de la aplicación*  $g$ , y se denota por  $\deg(g)$ , terminología introducida por Brouwer cuando lo definió (aunque de forma distinta a como lo acabamos de hacer, pues es previo al desarrollo de la homología). En [Hat02, Sección 2.2] se puede encontrar la definición del grado de una aplicación, junto con varias de sus propiedades que referiremos cuando las necesitemos, como por ejemplo el hecho (trivial a partir de la definición) de que el grado de la aplicación identidad es 1, de que aplicaciones no sobreyectivas tienen grado 0 (pues inducen la aplicación nula a nivel de la homología), de que es un invariante homotópico (es decir, aplicaciones homótopas tienen el mismo grado, y de hecho es una equivalencia según un teorema de Hopf, ver [Hat02, Corolario 4.25]), o de que  $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$ , de donde se deduce que las homotopías tienen grado  $\pm 1$ .

Se definen entonces las diferenciales  $\partial_n : \mathcal{C}_n(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(X, Y)$  de forma que si  $\sigma \in X^{(n)}$ ,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\zeta \in X^{(n-1)}} [\zeta : \sigma] \zeta,$$

donde  $[\zeta : \sigma] = \deg(p_\zeta \circ f_{\partial\sigma})$ , que recibe el nombre de *número de incidencia* de  $\sigma$  y  $\zeta$ .

Esta definición encierra en sí misma una proposición y es que las aplicaciones  $\partial_n$  que hemos definido son, en efecto, diferenciales, es decir,  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ , la aplicación nula, para todo  $n \geq 1$ . En ese caso el complejo que acabamos de definir, junto con esas diferenciales, da lugar a una teoría de homología, a la que llamaremos homología celular.

**Definición 2.25 (Homología celular)** Sellama *homología celular* del par de CW-complejos  $(X, Y)$  y se denota por  $H_*^{CW}(X, Y)$  (en general prescindimos de la referencia al anillo base  $A$ ), a la homología del complejo de cadenas celular

$$\mathcal{C}(X, Y) \equiv \dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{C}_n(X, Y) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(X, Y) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(X, Y) \xrightarrow{0} 0,$$

es decir, aquella cuyos módulos son

$$H_n^{CW}(X, Y) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})} \quad \text{para } n \geq 0, \text{ donde } \partial_0 = 0.$$

Y, como no podía ser de otra manera, se tiene que esta homología celular es la misma que la singular (o que cualquier otra equivalente a ella), y nuestra construcción tiene sentido.

**Teorema 2.26** La homología celular del par de CW-complejos  $(X, Y)$ ,  $H_*^{CW}(X, Y)$ , es isomorfa a la homología singular relativa  $H_*(X, Y)$ .

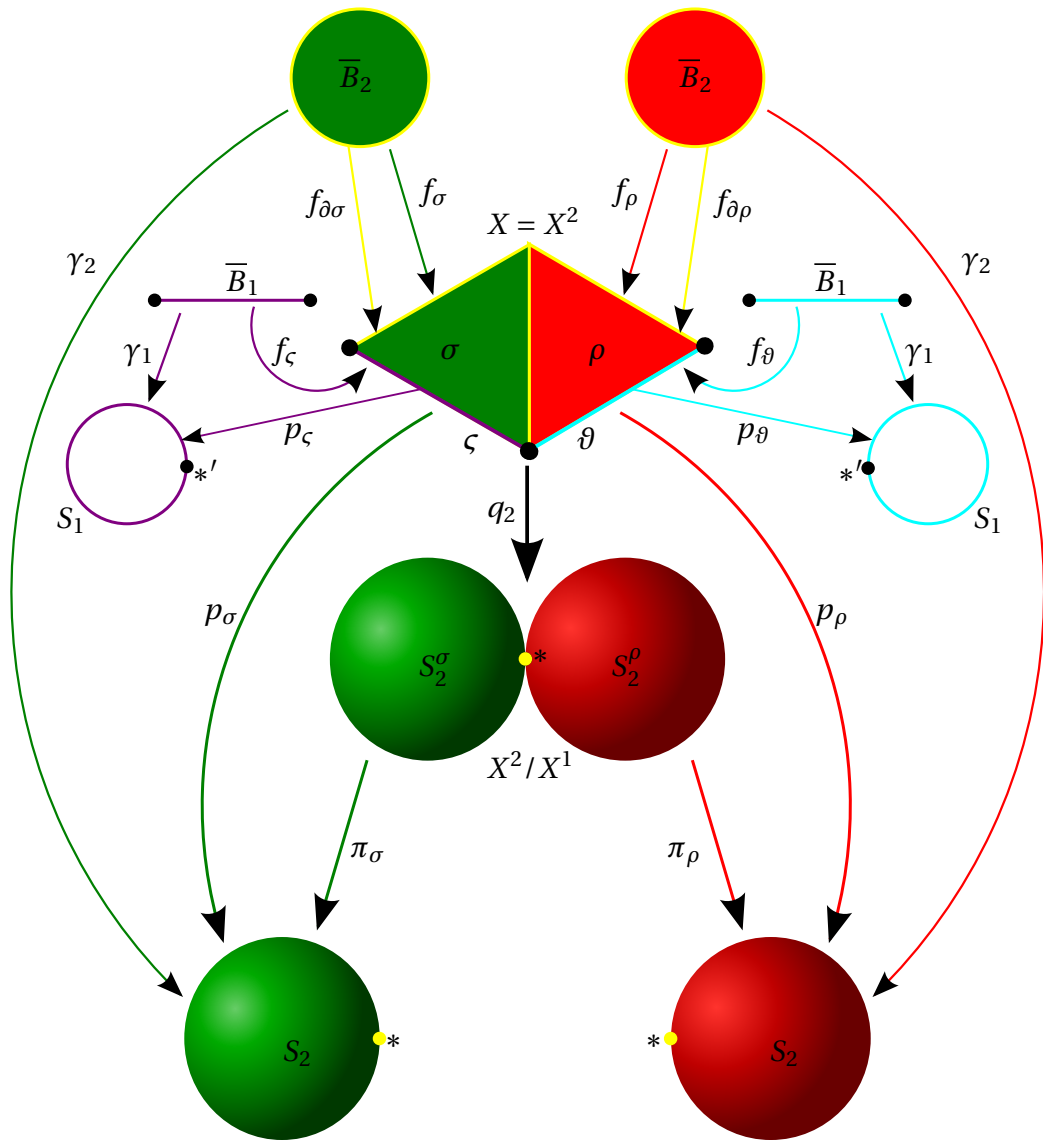


Figura 2.6: Aplicaciones que intervienen en la construcción de la definición 2.24 para el caso particular del complejo celular (simplicial)  $X$  de dimensión 2, con el código de colores facilitando el seguimiento de cada célula vía las diferentes aplicaciones que intervienen.

En ocasiones, por razones combinatorias, se amplía el complejo de cadenas anterior añadiendo el módulo  $\mathcal{C}_{-1}(X, Y)$  con generador indexado por la cara vacía, de dimensión  $-1$ . En ese caso el teorema anterior se reformula diciendo que la homología celular reducida del par de CW-complejos, a la que da lugar el complejo de cadenas extendido y que se denota por  $\tilde{H}_*^{CW}(X, Y)$ , es isomorfa a la homología singular reducida relativa del par,  $\tilde{H}_*(X, Y)$ .

La demostración de este teorema es larga y en ella intervienen resultados importantes de Topología Algebraica, por lo que teniendo en cuenta que se trata de una mera herra-

mienta que utilizaremos para alcanzar nuestros verdaderos objetivos en el trabajo solo esbozaremos la estrategia y dejaremos al lector interesado un buen número de referencias en que puede encontrarla, señalando las peculiaridades de cada texto.

Las diferenciales pueden, de hecho, definirse de un modo más general mediante funciones de incidencia

$$\epsilon : \left\{ (\zeta, \sigma) \in (X^{(*)})^2 : \dim(\sigma) = \dim(\zeta) + 1 \right\} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

de las cuales el número de incidencia dado por el grado de la composición de las aplicaciones que hemos definido más arriba es solo un ejemplo. Las diferenciales correspondientes a una función de incidencia  $\epsilon$  vendrán definidas por

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\zeta \in X^{(n-1)}} \epsilon(\zeta, \sigma) \zeta,$$

si  $\sigma \in X^{(n)}$ . En el caso de CW-complejos no regulares las funciones de incidencia no están caracterizadas de forma precisa, y en general se considera que es una función de incidencia cualquier aplicación del tipo anterior que de lugar a una definición consistente de las diferenciales. En cambio, si se consideran CW-complejos regulares, las funciones de incidencia solo pueden tomar valores en  $\{-1, 0, 1\}$  y están caracterizados por las propiedades del teorema 7.2 de [Mas80]. En este caso particular es cierta la idea intuitiva de que las funciones de incidencia determinan las orientaciones inducidas por las células sobre sus caras. A partir de la definición de los números de incidencia que nosotros utilizamos es fácil comprobar que para CW-complejos regulares solo toman los valores 0 (si y solo si la célula de dimensión menor no es una cara de la otra), 1 o -1 (pues  $p_\tau \circ f_{\partial\sigma}$  es homótopa a un homeomorfismo). Una discusión más profunda sobre las funciones de incidencia puede encontrarse en [Mas80, Capítulo IV, secciones 5 y 7].

Una vez hecha esta observación, importante para entender la demostración del teorema 2.26 puesto que algunas de las referencias que indicaremos más adelante trabajan en términos de funciones de incidencia, podemos pasar a describir la estrategia seguida en prácticamente todos esos textos. Por simplicidad consideraremos el caso en que solo tenemos un CW-complejo  $X$  y no un par de CW-complejos o, equivalentemente, que  $Y = \emptyset$ . La demostración en el caso general sigue el mismo esquema, aprovechando las propiedades de la homología singular relativa. La estrategia consistirá en partir de la homología singular y acabar probando, tras una serie de pasos intermedios, el isomorfismo con la homología celular.

- Se consideran los módulos de homología singular relativa  $H_* (X^{(n)}, X^{(n-1)})$ , y se demuestra que  $H_i (X^{(n)}, X^{(n-1)}) = 0$  si  $i \neq n$  y que si  $i = n$  es un  $A$ -módulo libre (recordemos que  $A$  era el anillo base) con una base (sistema de generadores minimal) en correspondencia biyectiva con las  $n$ -células de  $X$ . Para ello se utilizan, entre otros resultados, el Teorema de Escisión (ver, por ejemplo, [GH81, Capítulo 15], o [Hat02, Teorema 2.20]) o la sucesión exacta de homología. La idea es probar que como los

cocientes  $X^{(n)}/X^{(n-1)}$  son (homeomorfos a) ramilletes de esferas indexadas por las  $n$ -células, las inclusiones  $i_\sigma : S_n^\sigma \longrightarrow \bigvee_{\sigma \in X^{(n)}} S_n^\sigma$  inducen un isomorfismo

$$\bigoplus_{\sigma \in X^{(n)}} (i_\sigma)_* : \bigoplus_{\sigma \in X^{(n)}} H_i(S_n^\sigma) \longrightarrow H_i\left(\bigvee_{\sigma \in X^{(n)}} S_n^\sigma\right)$$

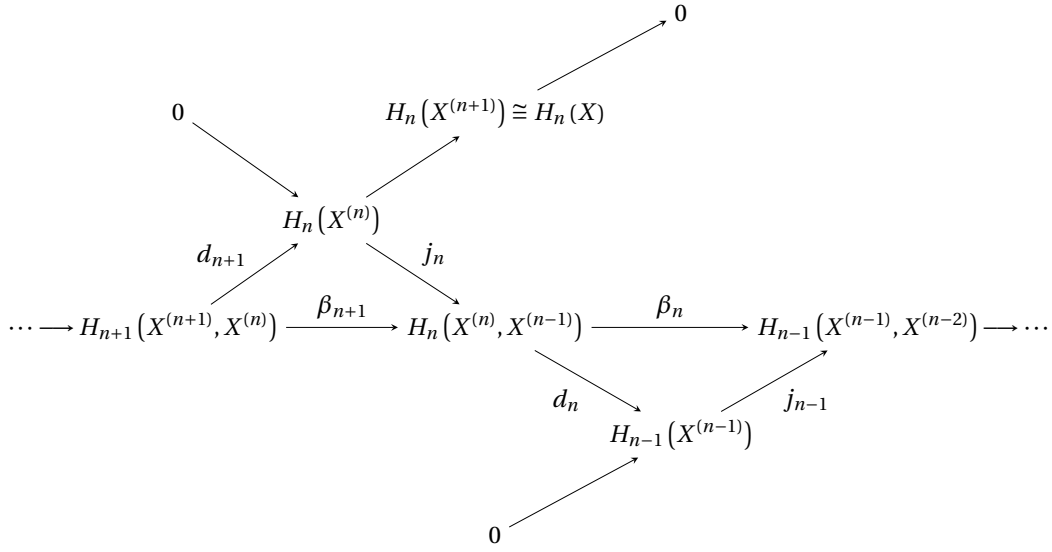
(en lo que sigue denotaremos siempre por  $g_*$  a la aplicación inducida a nivel de la homología por la aplicación  $g$  entre espacios topológicos) y ya sabemos que  $H_i(S_n) = 0$  si  $i \neq n$  y  $H_n(S_n) = A$  y una comprobación técnica asegura que  $H_*(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong H_*(X^{(n)}/X^{(n-1)})$ .

- Consideremos la sucesión exacta larga del par  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ ,

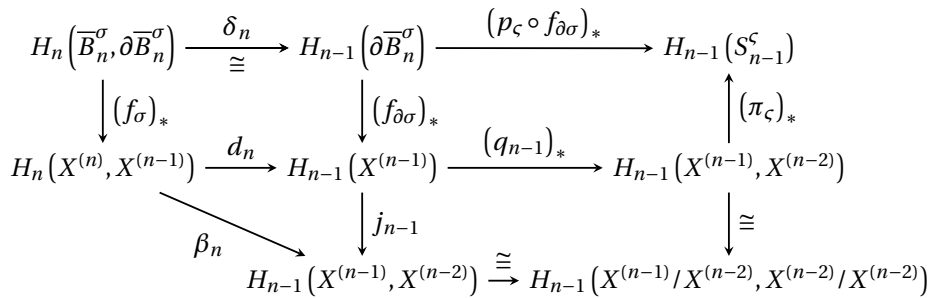
$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \longrightarrow H_i(X^{(n-1)}) \longrightarrow H_i(X^{(n)}) \longrightarrow H_i(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \longrightarrow \cdots$$

Del punto anterior se deduce que si  $i \neq n$ ,  $i \neq n-1$  los módulos de la parte exterior de la sucesión son nulos y por lo tanto  $H_i(X^{(n-1)}) \cong H_i(X^{(n)})$ , por lo que si  $i > n$  se tiene que  $H_i(X^{(n)}) \cong H_i(X^{(n-1)}) \cong H_i(X^{(n-2)}) \cong \cdots \cong H_i(X^{(0)}) = 0$ . Por otra parte si  $i < n$  se tiene que  $H_i(X^{(n)}) \cong H_i(X^{(n+1)}) \cong H_i(X^{(n+2)}) \cong \cdots \cong H_i(X^{(n+m)})$  para todo  $m \geq 0$ .

- La última parte del punto anterior prueba que las inclusiones  $i : X^{(n)} \longrightarrow X$  inducen isomorfismos  $i_* : H_i(X^{(n)}) \longrightarrow H_i(X)$  si  $i < n$  en el caso en que  $X$  es de dimensión finita. Si no es así, la prueba es bastante más complicada. El enfoque más directo se apoya en el caso finito-dimensional para probar tanto la sobreyectividad como la inyectividad, bajando a nivel de las cadenas y teniendo en cuenta que una cadena singular en  $X$  (una combinación lineal de símlices singulares con coeficientes en el anillo  $A$ ) tiene imagen compacta, por lo que solo corta a un número finito de células de  $X$  (por la finitud de la adherencia), y cada cadena está en un esqueleto finito. El otro enfoque, más general, puede verse en [Bre93, Apéndice A] y en [Hat02, pág. 138].
- Ahora utilizamos lo que acabamos de ver junto con trozos de las sucesiones exactas de homología de los pares  $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$ ,  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  y  $(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$  para formar el siguiente diagrama, donde las  $\beta$ 's se definen de forma que el diagrama sea conmutativo a partir de las otras aplicaciones ya conocidas,  $\beta_{n+1} = j_n \circ d_{n+1}$ ,  $\beta_n = j_{n-1} \circ d_n$ , y que por lo tanto cumplirán  $\beta_n \circ \beta_{n+1} = 0$ , por lo que son diferenciales y la sucesión horizontal es un complejo de cadenas celular (pues en el primer punto vimos que los módulos son libres y con base las células de la correspondiente dimensión).



- Si ahora denotamos (temporalmente) mediante  $H_*^{CW}(X)$  a la homología a la que da lugar dicho complejo de cadenas (es decir,  $H_i^{CW}(X) = \ker(\beta_i) / \text{Im}(\beta_{i+1})$  es el  $i$ -ésimo módulo de homología), queremos probar que  $H_i^{CW}(X) \cong H_i(X)$  para  $i \geq 0$ . Pero esto se deduce también del diagrama anterior, ya que  $H_n(X) \cong H_n(X^{(n)}) / \text{Im}(d_{n+1})$ , y por ser  $j_n$  inyectiva aplica  $\text{Im}(d_{n+1})$  de forma isomorfa sobre  $\text{Im}(j_n \circ d_{n+1}) = \text{Im}(\beta_{n+1})$  y es también un isomorfismo entre  $H_n(X^{(n)})$  y su imagen,  $\text{Im}(j_n) = \ker(d_n)$ . Ahora bien, por ser  $j_{n-1}$  inyectiva, un razonamiento análogo muestra que  $\ker(d_n) \cong \ker(\beta_n)$ . Entonces  $j_n$  induce un isomorfismo entre  $H_n(X^{(n)}) / \text{Im}(d_{n+1})$  y  $\ker(\beta_n) / \text{Im}(\beta_{n+1})$ , como queríamos demostrar.
- Entonces lo único que nos falta por ver es que el complejo de cadenas anterior es precisamente el complejo de cadenas celular de la definición 2.24. Puesto que ya hemos visto que los módulos son libres y tienen como base el conjunto de células del complejo de una determinada dimensión, solo queda probar que las diferenciales  $\beta_i$  se pueden expresar en términos de los números de incidencia tal y como hacíamos en dicha definición. Identificando las células con los generadores de los módulos correspondientes, fijémonos en el siguiente diagrama, cuya comprensión resultará más fácil apoyándose en la figura 2.6 ( $\sigma$  denota de forma genérica a una  $n$ -célula y  $\zeta$  a una  $n - 1$ -célula).



Las aplicaciones tienen la misma notación que en el diagrama anterior o en la figura 2.6, de forma que  $q_{n-1}$  y  $\pi_\zeta$  son las aplicaciones análogas a  $q_n$  y  $\pi_\sigma$  en dicha figura, respectivamente (en la segunda aplicación, la esfera resultante de colapsar el complementario de  $\zeta$  a un único punto se identifica con  $S_{n-1}^\zeta = \overline{B}_n^\sigma / \partial \overline{B}_n^\sigma$  vía la aplicación característica de  $\zeta$ ), mientras que  $\delta_n$  denota a la aplicación correspondiente de la sucesión exacta de homología del par  $(\overline{B}_n^\sigma, \partial \overline{B}_n^\sigma)$ , que es un isomorfismo (es un resultado general para bolas de cualquier dimensión, ver [GH81, Ejemplo 14.4]), al igual que lo son los otros dos con llegada en  $H_{n-1}(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}, X^{(n-2)}/X^{(n-2)})$ , trivialmente en el caso del vertical, comprobable siguiendo las definiciones en el del horizontal.

Ahora bien,  $(f_\sigma)_*$  lleva a un generador  $[\overline{B}_n^\sigma] \in H_n(\overline{B}_n^\sigma, \partial \overline{B}_n^\sigma)$  en un generador del sumando directo de  $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  correspondiente a  $\sigma$ , al que, en un abuso de notación, denotaremos también por  $\sigma$ . Por la conmutatividad de la parte izquierda del diagrama,  $\beta_n(\sigma) = j_{n-1} \circ (f_{\partial\sigma})_* \left( \partial [\overline{B}_n^\sigma] \right)$ . Para la base de  $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$  dada por las  $n-1$ -células,  $(\pi_\zeta)_*$  es la proyección de  $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$  sobre el sumando directo correspondiente a  $\zeta$  y como  $(p_\zeta \circ f_{\partial\sigma})_* \left( \partial [\overline{B}_n^\sigma] \right) = \deg(p_\zeta \circ f_{\partial\sigma}) \zeta = [\zeta : \sigma] \zeta$  por la conmutatividad del diagrama y los isomorfismos se concluye el resultado.

Los pasos anteriores, tomados en conjunto, completan la prueba del teorema 2.26. Nótese que, en particular, la expresión de la diferencial para una  $n$ -célula dada es una suma finita, pues los números de incidencia serán todos nulos excepto para aquellas  $n-1$ -células contenidas en la adherencia de la primera, que por la finitud de la adherencia son un número finito. Como ya hemos indicado, son varios los libros que, de una u otra forma, efectúan al menos parte de estos pasos, con importantes variantes entre unos y otros que comentamos a continuación.

En [LW69, Capítulo V] pueden encontrarse en la sección 1 resultados sobre homología singular y en particular la escisión en CW-complejos, mientras que en la sección 2 se define el complejo de cadenas celular y se prueba el equivalente a nuestro teorema 2.26. En la sección 3 profundiza en la forma explícita de las diferenciales a través de los números de incidencia y define unos números de incidencia de células respecto de aplicaciones, y las relaciona con los grados de aplicaciones entre esferas y el significado de la orientación.

Por su parte, [Bre93, Capítulo IV] es más conciso y su objetivo es exactamente el mismo que el nuestro (de hecho nuestro teorema 2.26 es su teorema 10.3), de forma que en la sección 9 prepara el terreno para probar la equivalencia en la sección 10, aunque la parte de la demostración específica para el caso de CW-complejos de dimensión infinita la llevan al Apéndice A (es la versión más compleja que la que hemos esbozado). El hecho de que trabaje con la homología cúbica complica ligeramente la comprensión. Por otra parte ni siquiera hace referencia a las funciones de incidencia, limitándose a dar los números de incidencia que definimos nosotros en términos del grado de una aplicación.

El extremo contrario es [Mas80, Capítulo IV], donde apenas se hace referencia a nuestros números de incidencia, sino que profundiza bastante en las propiedades de las funcio-



nes de incidencia tanto en el caso general como en el de CW-complejos regulares. [Whi78, Capítulo II, sección 2] adopta un enfoque excesivamente abstracto de forma que, aunque prueba la equivalencia de la homología singular y la homología celular (denominación que no utiliza), no presta demasiada atención a los aspectos que la hacen especialmente apropiada para nuestros intereses, como son el hecho de que los módulos del complejo de cadenas celular tienen como sistema de generadores las células de una determinada dimensión y la determinación explícita de las diferenciales.

Probablemente el texto más equilibrado de todos y que mejor se ajusta a lo que queremos transmitir es [Hat02], que a lo largo del capítulo 2 va desgranando resultados sobre las homologías singular y simplicial y en la sección 2.2 trata con bastante profundidad el grado de una aplicación, su relación con los números de incidencia y la definición de homología celular y su equivalencia con la singular.

En la aplicación de todos estos aspectos topológicos a las resoluciones libres juegan un papel importante los complejos celulares acíclicos, que ya estamos en condiciones de definir después de entender la homología aplicada a los CW-complejos. En virtud del teorema que acabamos de probar, denotaremos a la homología celular de igual forma que la singular.

**Definición 2.27 (CW-complejo acíclico)** Dado un anillo  $A$ , decimos que un CW-complejo  $X$  es *acíclico* si se tiene que  $\tilde{H}_i(X; A) = 0$  para todo  $i$ , o lo que es lo mismo, si

$$H_i(X; A) = \begin{cases} A & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que un CW-complejo conexo  $X$  es acíclico si y solo si  $\ker(\partial_i) = \text{Im}(\partial_{i+1})$  para todo  $i \geq 1$ . Esta condición nos recuerda a la análoga para las diferenciales de una resolución, y de hecho están íntimamente relacionadas, como veremos más adelante.

Ya hemos visto que en el caso de CW-complejos regulares las funciones de incidencia, y en particular los números de incidencia, toman solo los valores 0 (únicamente cuando la célula de dimensión menor no es una cara de la otra), 1 y  $-1$  (según la orientación inducida por la célula de dimensión mayor sobre su cara coincida con la de esta o sea la opuesta, respectivamente). Ahora bien, en el caso de que nuestro complejo sea simplicial podemos decir algo más, concretado en el siguiente lema (ver [Bre93, pág. 247]).

**Lema 2.28** Sea  $\Delta$  un complejo simplicial (geométrico, por la notación que utilizamos, aunque esto no tiene mayor importancia) con vértices ordenados  $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ . Se pueden elegir aplicaciones características para las caras del complejo tales que si  $\sigma = (v_{\sigma_0}, \dots, v_{\sigma_n})$ , con los vértices reenumerados respetando el orden de los de  $\Delta$ , y una cara suya es  $\zeta = (v_{\sigma_0}, \dots, \hat{v}_{\sigma_i}, \dots, v_{\sigma_n})$  entonces  $[\zeta : \sigma] = (-1)^i$ .

*Esquema de la demostración.* El teorema 2.20 nos garantiza que  $\Delta$  es un CW-complejo regular, y ya hemos dicho que los números de incidencia solo pueden ser en ese caso 0, 1 o

–1. La diferencial es entonces de la forma

$$\partial(v_{\sigma_0}, \dots, v_{\sigma_n}) = \sum_{i=0}^n \epsilon_{n,i} (v_{\sigma_0}, \dots, \hat{v}_{\sigma_i}, \dots, v_{\sigma_n}),$$

donde  $\epsilon_{n,i} = \pm 1$ , y lo que queremos es determinar este signo. Del hecho de que sea una diferencial y por lo tanto  $\partial \circ \partial = 0$  se deduce que  $\epsilon_{n,i} = -\epsilon_{n,i+1}$  y en consecuencia  $\epsilon_{n,i} = \epsilon_n (-1)^i$  y solo hay que decidir el signo de  $\epsilon_n = \pm 1$ . Pero esta es precisamente la elección de la orientación, y para cálculos homológicos no tiene importancia, pues los ciclos y los bordes no dependen de ella, por lo que basta con fijar  $\epsilon_n = 1$  y hacer las elecciones oportunas de las aplicaciones características para que la orientación se corresponda con el signo, con lo que

$$\partial(v_{\sigma_0}, \dots, v_{\sigma_n}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_{\sigma_0}, \dots, \hat{v}_{\sigma_i}, \dots, v_{\sigma_n}).$$

□

Es evidente que este lema facilita enormemente el cálculo explícito de las diferenciales en el caso en que los CW-complejos sean complejos simpliciales, de ahí que sean nuestra mayor fuente de ejemplos.

Lo que hemos visto hasta ahora nos permite probar la siguiente propiedad de los CW-complejos, que utilizaremos en la sección 3.1. Otra demostración diferente de este resultado (que hemos extraído de [For98, Teorema 1.2]) puede encontrarse en [Mas78, Lema 5.10].

**Proposición 2.29** Sea  $X$  un CW-complejo,  $v^{d-1} < \sigma^d < \tau^{d+1} \in X^{(*)}$ . Entonces o bien  $v$  es una cara irregular de  $\sigma$ , o bien  $\sigma$  es una cara irregular de  $\tau$ , o bien existe una  $d$ -célula  $\tilde{\sigma} \neq \sigma$  tal que  $v < \tilde{\sigma} < \tau$ .

*Demostración.* Supongamos que  $v$  es una cara regular de  $\sigma$  y esta a su vez lo es de  $\tau$ . Entonces sabemos que  $[\sigma : \tau] = \pm 1$ , con lo que

$$\partial\tau = \pm\sigma + \sum_{\substack{\tilde{\sigma}^d \neq \sigma \\ \tilde{\sigma} < \tau}} [\tilde{\sigma} : \tau] \tilde{\sigma}.$$

Entonces

$$0 = \partial^2\tau = \pm\partial\sigma + \sum_{\tau > \tilde{\sigma} \neq \sigma} [\tilde{\sigma} : \tau] \partial\tilde{\sigma} = \pm v + \sum_{\substack{\tilde{v}^{d-1} \neq v \\ \tilde{v} < \sigma}} [\tilde{v} : \sigma] \tilde{v} + \sum_{\tau > \tilde{\sigma} \neq \sigma} [\tilde{\sigma} : \tau] \partial\tilde{\sigma}.$$

Ahora bien, para que la igualdad sea cierta el último sumando no puede ser nulo (pues en otro caso no se anularía el término  $\pm v$ ), luego debe existir  $\tilde{\sigma}^d \neq \sigma$ ,  $\tilde{\sigma} < \tau$  tal que  $\partial\tilde{\sigma} = [v : \tilde{\sigma}]v + \sum_{\tilde{v} \neq v} [\tilde{v} : \tilde{\sigma}] \tilde{v}$  con  $[v : \tilde{\sigma}] \neq 0$ , y por lo tanto  $v < \tilde{\sigma}$ , luego  $v < \tilde{\sigma} < \tau$ . □

Esta propiedad puede generalizarse de la forma siguiente, que se corresponde con [For98, Teorema 1.3]

**Proposición 2.30** Sea  $X$  un CW-complejo regular y supongamos que para ciertos  $d, r \geq 1$  existen  $\tau^{d+r}, \nu^{d-1} \in X^{(*)}$  con  $\tau > \nu$ . Entonces existen  $(p+r-1)$ -células  $\sigma, \tilde{\sigma} \in X^{(*)}$ ,  $\sigma \neq \tilde{\sigma}$  tales que  $\nu < \sigma < \tau$  y  $\nu < \tilde{\sigma} < \tau$ .

*Demostración.* Razonemos por inducción sobre  $r$ . En el caso  $r = 1$  tenemos  $\tau^{d+1}, \nu^{d-1} \in X^{(*)}$ . Como  $X$  es regular, el Teorema de Invarianza del Dominio nos asegura que la unión de todas las  $d$ -células en  $\bar{\tau} \setminus \tau$  (recordemos que las células se toman abiertas) es densa en  $\bar{\tau} \setminus \tau$ , es decir,

$$\overline{\bigcup_{\sigma^d \geq \tau} \sigma} = \bar{\tau} \setminus \tau.$$

Entonces existe una  $d$ -célula  $\sigma$  con  $\nu < \sigma < \tau$ , y la proposición 2.29 nos garantiza la existencia de  $\tilde{\sigma}^d \neq \sigma$  tal que  $\nu < \tilde{\sigma} < \tau$ .

Supongamos ahora que el resultado se cumple hasta un cierto  $r$ , por el mismo razonamiento que antes (la unión de todas las  $(d+r-1)$ -células de  $\bar{\tau} \setminus \tau$  es densa en dicho conjunto) podemos encontrar una  $(d+r-1)$ -célula  $\sigma$  con  $\nu < \sigma < \tau$ . Aplicando la hipótesis de inducción, podemos encontrar una  $(d+r-2)$ -célula  $\zeta$  tal que  $\nu < \zeta < \sigma$ , y aplicando a la terna  $\zeta < \sigma < \tau$  la proposición 2.29 deducimos la existencia de una  $(d+r-1)$ -célula  $\tilde{\sigma} \neq \sigma$  tal que  $\zeta < \tilde{\sigma} < \tau$ , con lo que  $\nu < \tilde{\sigma} < \tau$  y  $\sigma$  y  $\tilde{\sigma}$  satisfarán lo que queríamos.  $\square$

---

## 2.2 COMPLEJOS DE CADENAS Y RESOLUCIONES CELULARES

---

En esta sección entraremos de lleno en la anunciada relación entre CW-complejos y resoluciones libres multigraduadas de ideales monomiales por medio de la combinatoria, gracias a las buenas propiedades de los sistemas minimales de generadores homogéneos (que en el caso de la multigraduación son precisamente los sistemas minimales de generadores formados por monomios), en particular la unicidad del número de elementos de que constan. Las referencias principales serán [MS05, Capítulo 4], [OW07, Capítulos 2 y 3] y el artículo pionero en esta relación, [BS98], que es la generalización del trabajo efectuado en [BPS98] para complejos simpliciales.

Puesto que a lo largo del capítulo 1 hemos insistido mucho en las graduaciones y ahora pretendemos relacionar objetos algebraicos graduados (de hecho multigraduados) con CW-complejos, parece natural extender la noción de graduación a estos.

**Definición 2.31 (CW-complejo graduado)** Dados un conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq)$  no necesariamente finito, un par de CW-complejos  $(X, A)$  y una aplicación entre conjuntos parcialmente ordenados  $f : (X, A)^{(*)} \rightarrow P$  (recuérdese la estructura de conjunto parcialmente ordenado de los pares de CW-complejos introducida en la definición 2.5), si  $f$  conserva el orden se dice que  $(X, A, f)$  es un *par de CW-complejos graduado por  $P$* , o  *$P$ -graduado*, o simplemente un *CW-complejo  $P$ -graduado* si  $A = \emptyset$ .

En esta situación, dado  $p \in P$  se denota por  $X_{\leq p}$  al sub CW-complejo  $P$ -graduado de  $X$  formado por las células  $\sigma \in (X)^{(*)}$  tales que  $f(\sigma) \leq p$ .

El siguiente es un ejemplo trivial de graduación en un CW-complejo, pero permite fijar ideas y comprender que los CW-complejos pueden graduarse por conjuntos parcialmente ordenados cualesquiera, sin exigir mayor estructura algebraica como ocurría en la sección 1.1:

---

### EJEMPLO 2.32

---

Sea  $X$  un CW-complejo y sea  $P$  el conjunto de las células de  $X$  (parcialmente) ordenadas por inclusión. Entonces si  $f$  es la aplicación que envía las células de  $X$  en sus correspondientes copias en  $P$ ,  $(X, f)$  es un CW-complejo  $P$ -graduado.

Evidentemente a nosotros nos interesará dotar a los CW-complejos de la multigraduación estándar, o  $\mathbb{N}^n$ -graduación, donde el conjunto parcialmente ordenado es  $\mathbb{N}^n$  con el orden inducido por el semigrupo afín correspondiente a un determinado ideal monomial (ver definición 1.61). Si trabajamos con polinomios de Laurent y módulos monomiales co-Artinianos será necesario considerar una  $\mathbb{Z}^n$ -graduación, de forma totalmente análoga a esta. Precisaremos esto en la siguiente definición y en los comentarios posteriores. Se trata de una de las partes fundamentales de esta memoria, pues supone la ya anunciada amalgama de CW-complejos y complejos de módulos y, en particular, resoluciones libres de ideales monomiales, con la combinatoria de los monomios como elemento coalescente, que nos sitúa en la confluencia de Topología, Álgebra y Combinatoria.

**Definición 2.33 (Complejo de módulos celular)** Sea  $R$  un anillo como en el capítulo 1 (anillo cociente de  $S = k[x_1, \dots, x_n]$  por un cierto ideal graduado). Se considera un complejo por la izquierda de módulos libres multigraduado

$$\mathcal{C} \equiv \cdots \longrightarrow \mathcal{C}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{C}_i \xrightarrow{d_i} \mathcal{C}_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{C}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0 \longrightarrow 0,$$

donde

$$\mathcal{C}_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R(-\alpha)^{c_{i,\alpha}}.$$

Se dice que  $\mathcal{C}$  es un complejo de módulos celular si existen un semigrupo afín  $\Lambda$  y un par de CW-complejos  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado  $(X, A, \text{gr})$  tales que:

1. Para todo  $i \in \mathbb{N}$  existe una base  $\{e_\sigma\}$  del módulo libre  $R(-\alpha)^{c_{i,\alpha}}$  indexada por las  $i$ -células  $\sigma \in (X, A)^{(i)}$ ,  $i \geq 0$ , tal que  $\text{gr}(\sigma) = \alpha$ .
2. Para todos  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\sigma \in (X, A)^{(i)}$  la  $i$ -ésima diferencial de  $\mathcal{C}$  se expresa como

$$d_i(e_\sigma) = \sum_{\sigma \geq \zeta \in X^{(i-1)}} [\zeta : \sigma] \underline{x}^{\text{gr}(\sigma) - \text{gr}(\zeta)} e_\zeta,$$

donde  $[\zeta : \sigma]$  es el número de incidencia de  $\sigma$  y  $\zeta$ , que coincide con el coeficiente de  $\zeta$  en la expresión de la diferencial de  $\sigma$  en el complejo de cadenas celular del par de CW-complejos  $\sigma \in (X, A)$  (ver definición 2.24).

En esta situación el complejo de módulos se denota mediante  $\mathcal{C}_{(X,A)}^{\text{gr}}$ , y se dice que el par de CW-complejos  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado  $(X, A, \text{gr})$  es su *soporte*.

En el caso en que el complejo de módulos libres sea un complejo sobre un ideal monomial  $I$ , el semigrupo afín  $\Lambda$  será aquel cuyos generadores son los multigrados de los monomios de su sistema minimal de generadores,  $\text{MinGen}(I)$ .

Evidentemente si el complejo de módulos es de longitud finita bastará con que el par de CW-complejos sea de dimensión finita, como ocurre, en particular, en el caso de las resoluciones libres multigraduadas de  $S$ -módulos, por el Teorema 1.45 de las Sizigias de Hilbert.

La definición anterior es bastante abstracta y puede resultar difícil de entender en la primera lectura, ya que partimos de un complejo de módulos libres y construimos el CW-complejo (o más generalmente el par de CW-complejos, por simplicidad razonaremos con el caso sencillo pero la extensión es inmediata) apropiado que la soporta. Pero esta construcción puede realizarse a la inversa, de forma que partiendo de un CW-complejo  $X$  obtenemos el complejo de módulos libres sobre un ideal monomial con la única condición de que  $\sharp(\text{MinGen}(I)) = \sharp(X^{(0)})$  (ya sea este valor finito o infinito) mediante la técnica del *etiquetado*: se etiquetan las células de  $X$  estableciendo primero una biyección  $\text{gr}$  entre  $X^{(0)}$  y los generadores del semigrupo afín  $\Lambda$  (que se corresponden justamente con los multigrados de los elementos de  $\text{MinGen}(I)$ , de ahí que necesitemos la igualdad de cardinales para poder establecer la biyección, por lo que en la práctica tenemos también una biyección entre  $X^{(0)}$  y  $\text{MinGen}(I)$ , y para  $v \in X^{(0)}$  denotamos por  $\lambda_v$  y por  $m_v = \underline{x}^{\lambda_v}$  respectivamente al elemento de  $\Lambda$  y el monomio de  $\text{MinGen}(I)$  que se corresponden con dicha 0-célula). A continuación se extiende esta aplicación a  $X^{(*)}$  asignando a  $\sigma \in X^{(*)}$  el elemento  $\lambda_\sigma \in \Lambda$ , donde  $\lambda_\sigma = \text{mdeg}(m_\sigma)$ ,  $m_\sigma = \text{mcm}\{m_v : v \in X^{(0)}, v \leq \sigma\}$  (por brevedad denotaremos en ocasiones  $\lambda_\sigma = \bigvee_{\sigma \geq v \in X^{(0)}} \lambda_v$ ). También se puede realizar este etiquetado “por pisos” de forma inductiva, de forma que si  $\sigma \in X^{(i)}$ ,  $\lambda_\sigma = \bigvee_{\sigma \geq \zeta \in X^{(i-1)}} \lambda_\zeta$ .

A partir del CW-complejo etiquetado construir el complejo de módulos es sencillo, solo hay que considerar su complejo de cadenas celular multigraduado de forma que cada elemento de la base de cada módulo tenga multigrado la etiqueta (el grado) de la célula que le corresponde, por lo que para que se mantenga la homogeneidad (de multigrado  $\mathbf{0}$ ) de las diferenciales se debe introducir como corrección el cociente de los monomios correspondientes a las dos células que intervienen. Así pues, si  $\sigma \in (X, A)^{(i)}$ ,

$$\partial_i(\sigma) = \sum_{\sigma \geq \zeta \in X^{(i-1)}} [\zeta : \sigma] \frac{m_\sigma}{m_\zeta} \zeta$$

en la notación del complejo de cadenas celular, que se corresponde exactamente con la expresión de la diferencial de la definición 2.33 identificando los elementos de las bases de los módulos libres con las células que los indexan. Es por ello que este complejo recibe también el nombre de *complejo de cadenas celular etiquetado*, o simplemente *complejo de cadenas etiquetado*. A partir de esta construcción se obtiene de forma natural la siguiente definición.

**Definición 2.34 (Resolución libre celular)** Si en la situación anterior el complejo de módulos libres  $\mathcal{C}_{(X,A)}^{\text{gr}}$  sobre el ideal monomial  $M$  es una resolución libre multigraduada de dicho módulo,  $\mathcal{C} = \mathcal{F}$ , se dice que es una *resolución libre celular* multigraduada con soporte el par de CW-complejos  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado  $(X, A, \text{gr})$  y se la denota por  $\mathcal{F}_{(X,A)}^{\text{gr}}$ .

Ya advertimos en la sección 2.1 que a pesar de que suele considerarse el vacío como una cara de todo CW-complejo excepto del vacío, en la práctica muchas veces lo obviamos, y de hecho la condición  $i \geq 0$  en la definición 2.33 lo excluye explícitamente. En este caso, si lo añadimos como cara (con grado nulo) el complejo de módulos celular correspondiente no lo sería sobre el módulo  $M$ , sino sobre el cociente  $R/M$ .

En ocasiones en vez de referirnos a una de estas resoluciones libres con el adjetivo genérico de *celular* se precisa un poco más la naturaleza concreta de la estructura celular que la soporta, denominándola resolución simplicial o celular regular cuando el soporte sea un complejo simplicial o un CW-complejo regular, respectivamente. Evidentemente toda resolución simplicial es en particular celular regular, y estas a su vez son celulares.

Ante la definición anterior surgen algunas preguntas, la más evidente si todo ideal monomial admite una resolución celular. La respuesta en este caso resulta ser afirmativa, puesto que ya adelantamos en la sección 1.4 que para todo ideal monomial puede construirse su resolución de Taylor (definición 1.56) y como veremos más adelante esta resolución es simplicial, por lo que en realidad es cierto algo aún más fuerte que lo que nos preguntábamos.

Sin embargo, también advertimos que la resolución de Taylor dista, en general, de ser minimal (y de hecho dimos un ejemplo que lo ilustra). Entonces la siguiente pregunta que se nos plantea es si hay ideales monomiales (o familias de estos) cuya resolución minimal sea simplicial, celular regular pero no simplicial, celular pero no celular regular, o ni tan siquiera celular. Todas las posibilidades pueden darse, en particular la resolución de Taylor es minimal en ciertas ocasiones, como veremos en la sección 2.3; en [MS05, Subsección 4.3.5] y [Mar14, Ejemplo 3.27] encontramos ejemplos de resoluciones minimales soportadas por CW-complejos regulares pero no simpliciales y en [Jac04, Sección 3.2] se demuestra de forma muy sencilla que la resolución libre minimal de un cierto ideal asociado a un grafo no puede ser simplicial, mientras que en [Vel08] se prueba en la sección 4 que hay resoluciones celulares minimales de ideales monomiales que no son regulares en ninguna característica (sí, en asuntos de resoluciones la característica en que trabajemos también importa) y en la sección 5 que hay resoluciones libres minimales de ideales monomiales que no están soportadas por ningún CW-complejo, e incluso construye una amplia familia de ideales para los que esto ocurre.

Aunque nos hemos restringido al caso de ideales monomiales, ya indicamos en la sección 1.4 que los módulos monomiales co-Artinianos poseen una estructura combinatoria suficientemente fuerte para que sean válidos la mayor parte de las construcciones y resultados que en esta memoria enunciamos en términos de ideales monomiales. En particular son ciertos todos los de esta sección, sin más que sustituir  $\mathbb{N}$  por  $\mathbb{Z}$  cuando proceda.

**EJEMPLO 2.35**

Aprovechando el complejo simplicial del ejemplo 2.19, que tiene 4 vértices, podemos construir una resolución libre celular (de hecho simplicial) del ideal  $I = \langle x^2, xy, y^2, xz \rangle \subset S = k[x, y, z]$ , generado por otros tantos monomios. La numeración de las células (simplices en este caso) y el etiquetado pueden verse en la figura 2.7, tanto con los grados en  $\mathbb{N}^3$  como con los monomios correspondientes. En la notación de la definición 2.33 las diferenciales son las siguientes:

$$d_1(e_{\zeta_0}) = (-1)^1 \frac{x^2 y}{x^2} e_{v_0} + (-1)^0 \frac{x^2 y}{xy} e_{v_1} = -y e_{v_0} + x e_{v_1}.$$

$$d_1(e_{\zeta_1}) = (-1)^1 \frac{xy^2}{xy} e_{v_1} + (-1)^0 \frac{xy^2}{y^2} e_{v_2} = -y e_{v_1} + x e_{v_2}.$$

$$d_1(e_{\zeta_2}) = (-1)^1 \frac{x^2 y^2}{x^2} e_{v_0} + (-1)^0 \frac{x^2 y^2}{y^2} e_{v_2} = -y^2 e_{v_0} + x^2 e_{v_2}.$$

$$d_1(e_{\zeta_3}) = (-1)^1 \frac{xyz}{xy} e_{v_1} + (-1)^0 \frac{xyz}{xz} e_{v_3} = -z e_{v_1} + y e_{v_3}.$$

$$d_2(e_\sigma) = (-1)^2 \frac{x^2 y^2}{x^2 y} e_{\zeta_0} + (-1)^0 \frac{x^2 y^2}{xy^2} e_{\zeta_1} + (-1)^1 \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2} e_{\zeta_2} = y e_{\zeta_0} + x e_{\zeta_1} - e_{\zeta_2}$$

Y la resolución celular libre de  $I$  asociada a este complejo simplicial será:

$$0 \rightarrow S(-2, 2, 0) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y \\ x \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S(-2, 1, 0) \\ \oplus \\ S(-1, 2, 0) \\ \oplus \\ S(-2, 2, 0) \\ \oplus \\ S(-1, 1, 1) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & 0 & -y^2 & 0 \\ x & -y & 0 & -z \\ 0 & x & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}} \begin{matrix} S(-2, 0, 0) \\ \oplus \\ S(-1, 1, 0) \\ \oplus \\ S(-0, 2, 0) \\ \oplus \\ S(-1, 0, 1) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & xz \end{pmatrix}} I \rightarrow 0,$$

que evidentemente no es minimal. En los ejemplos sucesivos, por aligerar la notación, identificaremos las células con los correspondientes generadores de los módulos libres.

**2.2.1 ¿Cuándo un CW-complejo soporta una resolución?**

La definición 2.33 y los comentarios posteriores a esta hacen evidente que todo CW-complejo puede verse como el soporte de un complejo de módulos libres sobre un ideal monomial  $I \subset S$  sin más que exigir que el número de monomios que general minimalmente  $I$  sea igual al número de 0-células del CW-complejo. Sin embargo, no todo complejo de módulos libres es una resolución (pues se requiere la exactitud de la sucesión), y puesto

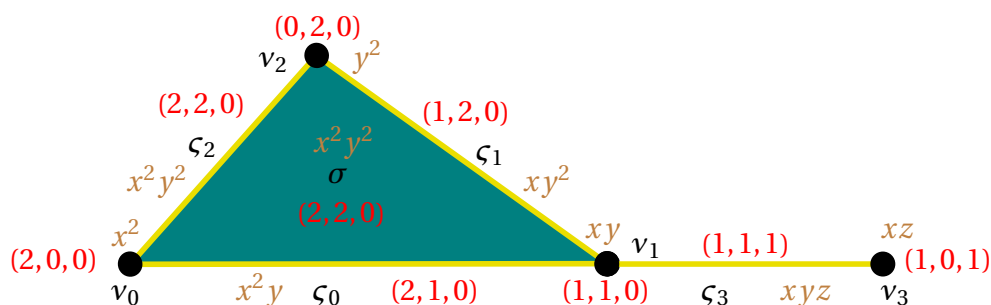


Figura 2.7: Complejo simplicial con las caras enumeradas (en negro) y etiquetadas (en rojo los grados en  $\mathbb{N}^3$ , en marrón los monomios correspondientes) de forma que soporta la resolución libre celular del ideal monomial  $I = \langle x^2, xy, y^2, xz \rangle$

que estos son los objetos que nos interesan queremos identificar las condiciones bajo las cuales un CW-complejo puede ser soporte de una resolución. Los resultados de esta subsección pueden encontrarse en [BS98] y [OW07, Sección 3.1].

En primer lugar necesitaremos la siguiente definición.

**Definición 2.36** Sea

$$\mathcal{C} \equiv \cdots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0,$$

donde

$$C_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R(-\alpha)^{c_{i,\alpha}},$$

un complejo multigrado de módulos libres y finitamente generados sobre el anillo de semigrupo afín  $R = k[\Lambda]$ , subanillo de  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ . Dado  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  denotamos por  $\mathcal{C}_{\leq \alpha}$  (respectivamente por  $\mathcal{C}_{< \alpha}$ ) al subcomplejo (de nuevo multigrado) de  $\mathcal{C}$  formado por los módulos  $C_{i,\leq \alpha} = \bigoplus_{\beta \leq \alpha} C_{i,\beta}$  (respectivamente  $C_{i,< \alpha} = \bigoplus_{\beta < \alpha} C_{i,\beta}$ ), generados por los generadores de  $C_i$  de multigrado menor o igual que  $\alpha$  (respectivamente de multigrado estrictamente menor que  $\alpha$ ) según el orden inducido en  $\mathbb{N}^n$  por el semigrupo afín  $\Lambda$ .

Nótese que en la definición anterior  $C_{i,\alpha} \neq R(-\alpha)^{c_{i,\alpha}}$ . De hecho, en general ninguno es un subconjunto del otro.

Y podemos probar ya el resultado que nos interesa.

**Proposición 2.37** Sea  $R = k[\Lambda]$  un anillo de semigrupo afín, subanillo de  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ . El CW-complejo  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado  $(X, \text{gr})$  es el soporte de una resolución libre de un  $R$ -módulo multigrado si y solo si para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  el CW-complejo  $X_{\leq \alpha}$  es acíclico o vacío (como anillo base para la homología se toma el cuerpo  $k$ ).

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}_X^{\text{gr}}$  el complejo de módulos asociado a  $(X, \text{gr})$ . Para que sea una resolución deberá ser acíclico, pero ya sabemos (ver los comentarios tras la definición 1.23) que esta lo es si y solo si lo son todas sus bandas  $\mathcal{F}_{X,\alpha}^{\text{gr}}$  para  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Ahora bien, los módulos libres de una de tales bandas  $\mathcal{F}_{X,\alpha}^{\text{gr}}$  están generados por elementos  $\{e_\sigma\}_{\sigma \in X_{\leq \alpha}^{(*)}}$ , al igual



que ocurre con el complejo de cadenas celular  $\mathcal{C}(X_{\leq \alpha}; k)$  si identificamos  $e_\sigma$  con  $\sigma$ . Puesto que la homología de dicho complejo es la homología celular del complejo  $X_{\leq \alpha}$ , lo que queremos probar es que la banda es acíclica si y solo si lo es el correspondiente sub CW-complejo.

Sea  $z = \sum_{\sigma \in X_{\leq \alpha}^{(i)}} a_\sigma \underline{x}^{\alpha - \text{gr}(\sigma)} e_\sigma$  un elemento de  $\mathcal{F}_{X, i, \alpha}^{\text{gr}}$ . Entonces  $d_i(z) = 0$  si y solo si el coeficiente en la expresión de la diferencial  $b_\zeta$  de cualquier  $e_\zeta$  con  $\zeta \in X_{\leq \alpha}^{(i-1)}$  es nulo. Pero  $b_\zeta = \underline{x}^{\alpha - \text{gr}(\zeta)} \sum_{\sigma \in X_{\leq \alpha}^{(i)}} a_\sigma [\zeta : \sigma]$ , con lo que  $b_\zeta = 0$  si y solo si  $\sum_{\sigma \in X_{\leq \alpha}^{(i)}} a_\sigma [\zeta : \sigma] = 0$ , que equivale a que  $\partial_i \left( \sum_{\sigma \in X_{\leq \alpha}^{(i)}} a_\sigma \sigma \right) = 0$ , con lo que  $z$  es un ciclo si la cadena correspondiente en el complejo de cadenas celular,  $\tilde{z}$ , lo es. La prueba de que lo mismo ocurre con los bordes, es decir, que  $z = d_{i+1} z'$  si y solo si  $\tilde{z} = \partial_{i+1} \tilde{z}'$  con es muy similar, por lo que la omitiremos y esto prueba lo que queríamos ver.  $\square$

Esta caracterización puede extenderse inmediatamente a pares de CW-complejos si extendemos también al definición de CW-complejos acíclicos a los pares, exigiendo la anulación de todos los módulos de homología salvo en grado 0, para el que será isomorfo al anillo base (o la anulación de todos los módulos para la homología reducida).

Podemos ir un poco más lejos y caracterizar los CW-complejos que soportan una resolución libre minimal de un cierto ideal monomial.

**Proposición 2.38** Con la notación de la proposición anterior, una resolución celular con soporte un CW-complejo  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado  $(X, \text{gr})$  es minimal si y solo si para todo par de células  $\sigma, \zeta \in X^{(*)}$  con  $\zeta \leq \sigma$  y  $\dim(\zeta) = \dim(\sigma) - 1$  o bien  $\text{gr}(\sigma) \neq \text{gr}(\zeta)$  o bien  $[\zeta : \sigma] = 0$ .

*Demostración.* Se deduce de la expresión de las diferenciales de un complejo de módulos celular asociado a un CW-complejo  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado (definición 2.33) y de la proposición 1.32, pues las del enunciado son las únicas posibilidades para que no aparezcan unidades en las matrices diferenciales.  $\square$

---

### EJEMPLO 2.39

---

Si volvemos al ejemplo 2.35,  $\text{gr}(\sigma) = \text{gr}(\zeta_2)$ , lo que explica que la resolución no sea minimal.

## 2.2.2 Leyendo los números de Betti

Ya vimos que unos invariantes importantes de las resoluciones minimales de un módulo son sus números de Betti, que nos permiten recuperar los módulos libres de la resolución. En el caso de resoluciones libres celulares estos números de Betti se codifican en la

topología del CW-complejo que actúa como soporte, y en esta subsección veremos cómo extraerlos.

El siguiente lema nos muestra cómo partiendo de cualquier resolución libre pueden extraerse sus números de Betti, aunque no sea minimal, a través de su homología.

**Lema 2.40** Sea  $R$  como en el capítulo 1,  $M$  un  $R$ -módulo multigradoado y  $\mathcal{F}$  una resolución libre multigradaada de  $M$ . Entonces

$$\beta_{i,\alpha}(M) = \dim_k \left( H_i \left( (\mathcal{F}_{\leq \alpha})_{\alpha}, (\mathcal{F}_{< \alpha})_{\alpha} \right) \right).$$

*Demostración.* Si  $\mathcal{F}$  es minimal la propiedad se sigue del hecho de que todas las diferenciales del complejo de cadenas relativo  $\left( (\mathcal{F}_{\leq \alpha})_{\alpha}, (\mathcal{F}_{< \alpha})_{\alpha} \right)$  son nulas. En general, el teorema 1.34, apartado 2, asegura que existe una resolución libre minimal  $\mathcal{G}$  de  $M$  y un complejo trivial  $\mathcal{T}$  tal que  $\mathcal{F} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{T}$ . Entonces

$$\begin{aligned} H_i \left( (\mathcal{F}_{\leq \alpha})_{\alpha}, (\mathcal{F}_{< \alpha})_{\alpha} \right) &\cong H_i \left( (\mathcal{G}_{\leq \alpha} \oplus \mathcal{T}_{\leq \alpha})_{\alpha}, (\mathcal{G}_{< \alpha} \oplus \mathcal{T}_{< \alpha})_{\alpha} \right) \cong \\ &\cong H_i \left( (\mathcal{G}_{\leq \alpha})_{\alpha}, (\mathcal{G}_{< \alpha})_{\alpha} \right) \oplus H_i \left( (\mathcal{T}_{\leq \alpha})_{\alpha}, (\mathcal{T}_{< \alpha})_{\alpha} \right), \end{aligned}$$

y como la homología de  $\left( (\mathcal{T}_{\leq \alpha})_{\alpha}, (\mathcal{T}_{< \alpha})_{\alpha} \right)$  es nula se deduce el resultado.  $\square$

Y este lema nos permite probar la siguiente proposición.

**Proposición 2.41** Sea  $R = k[\Lambda]$  un anillo de semigrupo afín, subanillo de  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ . Sea  $M$  un  $R$ -módulo multigradoado y  $(X, A, \text{gr})$  un par de CW-complejos  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado que soporta una resolución libre multigradaada de  $M$ . Entonces

$$\beta_{i,\alpha}(M) = \dim_k \left( H_i \left( X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k \right) \right) = \begin{cases} \dim_k \left( H_{i-1} \left( X_{< \alpha}, A_{< \alpha}; k \right) \right) & \text{si } A_{\leq \alpha} \neq \emptyset, \\ \dim_k \left( \tilde{H}_{i-1} \left( X_{< \alpha}; k \right) \right) & \text{si } A_{\leq \alpha} = \emptyset, \end{cases}$$

donde la primera igualdad se cumple para todo  $i \geq 0$  y la segunda para todo  $i \geq 2$ . Si además  $X_{\leq \alpha}$  y  $A_{\leq \alpha}$  son acíclicos o vacíos la segunda igualdad es también válida para  $i = 1$ . En particular  $\beta_{i,\alpha}(M) = 0$  si en  $(X, A)^{(i)}$  no hay células de grado  $\alpha$ .

*Demostración.* En virtud de la prueba de la proposición 2.37, siguiendo la notación de la definición 2.24 el complejo de cadenas relativo  $\left( \left( \mathcal{F}_{(X,A),\leq \alpha}^{\text{gr}} \right)_{\alpha}, \left( \mathcal{F}_{(X,A),< \alpha}^{\text{gr}} \right)_{\alpha} \right)$  puede verse, a efectos de la homología, de la manera siguiente, donde las diferenciales son las inducidas del complejo de cadenas celular.

$$\cdots \longrightarrow \frac{\mathcal{C}_{i+1}(X_{\leq \alpha}, A_{\leq \alpha})}{\mathcal{C}_{i+1}(X_{< \alpha}, A_{< \alpha})} \longrightarrow \frac{\mathcal{C}_i(X_{\leq \alpha}, A_{\leq \alpha})}{\mathcal{C}_i(X_{< \alpha}, A_{< \alpha})} \longrightarrow \frac{\mathcal{C}_{i-1}(X_{\leq \alpha}, A_{\leq \alpha})}{\mathcal{C}_{i-1}(X_{< \alpha}, A_{< \alpha})} \longrightarrow \cdots .$$

Se tiene la cadena de isomorfismos siguiente:

$$\frac{\mathcal{C}_i(X_{\leq \alpha}, A_{\leq \alpha})}{\mathcal{C}_i(X_{< \alpha}, A_{< \alpha})} \cong \frac{\mathcal{C}_i(X_{\leq \alpha}) / \mathcal{C}_i(A_{\leq \alpha})}{\mathcal{C}_i(X_{< \alpha}) / \mathcal{C}_i(A_{< \alpha})} \cong \frac{\mathcal{C}_i(X_{\leq \alpha})}{\mathcal{C}_i(X_{< \alpha}) + \mathcal{C}_i(A_{\leq \alpha})} \cong$$

$$\cong \frac{\mathcal{C}_i(X_{\leq \alpha})}{\mathcal{C}_i(X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha})} \cong \mathcal{C}_i(X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}) .$$

Como las diferenciales inducidas son las mismas que las del complejo de cadenas celular del par  $(X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha})$ , aplicando el lema 2.40 se obtiene la primera igualdad.

Para la segunda igualdad se puede utilizar la cadena de isomorfismos anterior para reescribir la sucesión exacta larga de homología del par  $(\mathcal{C}(X_{\leq \alpha}, A_{\leq \alpha}), \mathcal{C}(X_{< \alpha}, A_{< \alpha}))$  como sigue:

$$\cdots \rightarrow H_{i+1}(X_{\leq \alpha}, A_{\leq \alpha}) \rightarrow H_{i+1}(X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}) \rightarrow H_i(X_{< \alpha}, A_{< \alpha}) \rightarrow H_{i+1}(X_{\leq \alpha}, A_{\leq \alpha}) \rightarrow \cdots ,$$

y de la exactitud se deduce la igualdad de las dimensiones de los módulos de homología que nos interesan vía el homomorfismo de conexión, para  $i \geq 2$ . El caso en que  $A_{\leq \alpha} = \emptyset$  es similar sin más que hacer el ajuste de la homología, tomando la reducida.

Analicemos ahora el caso en que  $X_{\leq \alpha}$  y  $A_{\leq \alpha}$  son acíclicos o vacíos, la sucesión exacta larga de homología del par proporciona la siguiente sucesión exacta (considerando la homología reducida esta vez):

$$0 = \tilde{H}_1(X_{\leq \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_1(X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_0(X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_0(X_{\leq \alpha}; k) = 0 .$$

$$\text{Obviamente esto implica que } \tilde{H}_1(X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k) \cong \tilde{H}_0(X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k)$$

En el caso en que  $A_{\leq \alpha} = \emptyset$  la exactitud de esta situación implica lo que queríamos ver, que  $\tilde{H}_1(X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k) = \tilde{H}_0(X_{< \alpha}; k)$  (recordemos que el único módulo de homología para el que la reducida no coincide con la general es el 0-ésimo).

Si  $A_{\leq \alpha}$  es acíclico pero no vacío, como se tiene que  $X_{< \alpha} \cap A_{\leq \alpha} = A_{< \alpha}$  el fragmento siguiente de la sucesión de Mayer-Vietoris (ver, por ejemplo, [GH81, Capítulo 17]) de la terna  $(X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}, X_{< \alpha}, A_{\leq \alpha})$ :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(A_{< \alpha}; k) &\longrightarrow \tilde{H}_0(X_{< \alpha}; k) \oplus \tilde{H}_0(A_{\leq \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_0(X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \tilde{H}_{-1}(A_{< \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_{-1}(X_{< \alpha}; k) \oplus \tilde{H}_{-1}(A_{\leq \alpha}; k) \end{aligned}$$

es simplemente:

$$\tilde{H}_0(A_{< \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_0(X_{< \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_0(X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_{-1}(A_{< \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_{-1}(X_{< \alpha}; k) ,$$

mientras que la sucesión exacta larga del par  $(X_{< \alpha}, A_{< \alpha})$  proporciona la sucesión

$$\tilde{H}_0(A_{< \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_0(X_{< \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_0(X_{< \alpha}, A_{< \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_{-1}(A_{< \alpha}; k) \longrightarrow \tilde{H}_{-1}(X_{< \alpha}; k) .$$

Aplicando a estas dos sucesiones el Lema de los Cinco (ver, por ejemplo, [GH81, Lema 14.7]) se deduce lo que queríamos ver:

$$\begin{aligned} H_1(X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k) &= \tilde{H}_1(X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k) \cong \tilde{H}_0(X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k) \cong \\ &\cong \tilde{H}_0(X_{< \alpha}, A_{< \alpha}; k) = H_0(X_{< \alpha}, A_{< \alpha}; k) . \end{aligned}$$

Por último obsérvese que si no hay ninguna  $i$ -célula de grado  $\alpha$  en  $(X, A)^{(i)}$  entonces  $H_i(X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k) = H_i(X_{\leq \alpha}, X_{\leq \alpha}; k) = 0$ , con lo que  $\beta_{i, \alpha}(M) = 0$ .  $\square$

Nótese que  $\dim_k(H_0(X_{\leq \alpha}, X_{< \alpha} \cup A_{\leq \alpha}; k))$  es, en general, fácil de calcular.

## 2.3 EJEMPLOS DE RESOLUCIONES ¿CELULARES?

Al igual que hicimos en el capítulo precedente cerraremos con una sección dedicada a ejemplos significativos, al menos para nuestros intereses, de resoluciones. De hecho, y para completar el paralelismo, estos serán precisamente los mismos que en dicha sección 1.4: las resoluciones de Taylor y de Lyubeznik, que son celulares. Las interrogaciones en el título de la sección hacen referencia a que en ambos casos son resoluciones simpliciales, mucho más fáciles de manejar que las celulares en general, debido a la expresión sencilla de las diferenciales. Hay muchos otros ejemplos de (familias de) resoluciones celulares, algunas de ellas no simpliciales, como la de Scarf, la de Hull (introducida en [BS98]), las definidas por complejos radicales, la hipersimplicial o la Bar, entre otras que se pueden encontrar en [OW07, Sección 3.3] o [MS05, Sección 4.3].

Conviene también destacar que, aunque no hemos hecho referencia a ellas, hay otro tipo de estructura celular, los poliedros, que son CW-complejos regulares algo más generales que los complejos simpliciales pero que aún tienen una estructura combinatoria suficientemente fuerte como para que las diferenciales puedan expresarse de forma sencilla, y que proporcionan ejemplos de resoluciones celulares regulares no simpliciales. En [Mar14] pueden encontrarse más detalles sobre resoluciones poliedrales.

### 2.3.1 La resolución de Taylor

En la definición 1.56 dimos la construcción algebraica de un complejo de módulos (aunque ni siquiera demostramos que lo fuera) asociado a un determinado ideal monomial al que llamamos complejo de Taylor, y tampoco probamos que fuera una resolución del ideal, aunque lo afirmamos. Ambas cosas las veremos a continuación apoyándonos en la teoría de la sección precedente, lo que sirve también como ejemplo de la utilidad de nuestra amalgama.

A pesar de que la definición algebraica se dio para un ideal monomial, al definir el complejo asociado a un determinado CW-complejo etiquetado se puede generalizar fácilmente al caso de módulos monomiales co-Artinianos, como se hace en [BS98, Sección 1]. Solo en el resto de esta sección trabajaremos en dichos términos, como muestra de la posibilidad de extensión.

**Definición 2.42 (Complejo de Taylor, versión celular)** Sea  $M$  un módulo monomial co-Artiniano sobre un anillo  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ . Considérese  $\Delta_{\mathcal{T}_M}$  el complejo simplicial (abstracto) sobre el conjunto base  $\text{MinGen}(M)$ ,  $\Delta_{\mathcal{T}_M} = \mathcal{P}(\text{MinGen}(M))$  (el complejo formado por un símplex  $(\sharp(\text{MinGen}(M)) - 1)$ -dimensional junto con todas sus caras), y lo etiquetamos asignando a cada vértice el multigrado del monomio de  $\text{MinGen}(M)$  que le corresponde, con lo que lo convertimos en un complejo graduado  $(\Delta_{\mathcal{T}_M}, \text{gr})$ . El complejo de módulos asociado a este complejo simplicial etiquetado es el *complejo de Taylor* de  $M$ , que denotamos por  $\mathcal{T}_M$ .

En efecto, si comparamos el complejo de la definición 1.56 y el de 2.33, tanto los módulos como las diferenciales coinciden y por lo tanto es verdaderamente un complejo de módulos libres. La siguiente proposición asegura que es una resolución.

**Proposición 2.43** El complejo de módulos libres  $\mathcal{T}_M$  es una resolución libre multigrada da de  $M$ .

*Demostración.* Aplicando la proposición 2.37 basta con ver que para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$   $(\Delta_{\mathcal{T}_M})_{\leq \alpha}$  es acíclico o vacío. Si no es vacío,  $(\Delta_{\mathcal{T}_M})_{\leq \alpha}$  es el complejo formado por el sím plice de vértices  $\{\mathbf{m}_j : \text{mdeg}(\mathbf{m}_j) \leq \alpha\} \subset \text{MinGen}(M)$  y todas sus caras, que es contráctil (su realización geométrica lo es), luego acíclico.  $\square$

En [OW07, Sección 3.3] se generaliza el complejo de Taylor al caso de un par de módulos co-Artinianos  $N \subset M$  tomando como conjunto base la unión de los generadores minimales de ambos módulos  $\Delta_{\mathcal{T}_{M,N}}$ , etiquetado de la manera obvia. Entonces el par de CW-complejos graduado  $(\Delta_{\mathcal{T}_{M,N}}, \Delta_{\mathcal{T}_N})$  soporta la llamada resolución de Taylor de  $M/N$ .

La resolución de Taylor es probablemente la resolución celular más simple que se puede tomar por la sencillez del complejo simplicial, pero como ya hemos advertido en varias ocasiones está, en general, lejos de ser minimal. No obstante la proposición 2.38 nos proporciona una condición sobre el CW-complejo bajo la cual la resolución asociada (si efectivamente lo es) es minimal. En el caso particular de la resolución de Taylor se formula de la manera siguiente.

**Proposición 2.44** Sea  $M$  un módulo co-Artiniano. Entonces su resolución de Taylor  $\mathcal{T}_M$  es minimal si y solo si para todo  $\sigma \in \Delta_{\mathcal{T}_M}$  y todo  $\mathbf{m} \in \sigma$  (recordemos que el conjunto base del complejo simplicial es  $\text{MinGen}(M)$ , aunque evidentemente puede tomarse cualquier otro conjunto del mismo cardinal)  $\text{gr}(\{\mathbf{m}\}) \not\subseteq \text{gr}(\sigma \setminus \{\mathbf{m}\})$ , o lo que es lo mismo,  $\mathbf{m} \nmid_{\underline{x}} \text{gr}(\sigma \setminus \{\mathbf{m}\})$ .

Si nos restringimos a ideales (monomiales), hay una clase de estos muy importante en Álgebra Conmutativa para los cuales la resolución de Taylor es minimal.

**Definición 2.45** Se definen las siguientes nociones:

1. Sea la sucesión de polinomios  $p_1, \dots, p_k \in S[x_1, \dots, x_n]$ . Se dice que la sucesión es *S-regular* si  $\langle p_1, \dots, p_k \rangle \neq S$  y para todo  $i = 1, \dots, k$   $p_i$  no es un divisor de cero en  $\frac{S}{\langle p_1, \dots, p_{i-1} \rangle}$ .
2. Si  $p_1, \dots, p_k$  es una sucesión regular, se dice que el ideal  $\langle p_1, \dots, p_k \rangle \subset S$  es *intersección completa*.

Nótese que un ideal monomial  $I \subset S$  es intersección completa si y solo si en los elementos de  $\text{MinGen}(I)$  intervienen variables distintas, es decir, si  $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \text{MinGen}(I)$ ,  $\mathbf{m} \neq \mathbf{m}'$  y una variable  $x_s \mid \mathbf{m}$  entonces  $x_s \nmid \mathbf{m}'$ .

**Proposición 2.46** Sea  $I \subset S$  un ideal monomial que es intersección completa, entonces su resolución de Taylor es minimal.

*Demostración.* Se deduce inmediatamente aplicando la proposición 2.44.  $\square$

### EJEMPLO 2.47

En el ejemplo 1.57 anunciamos que la resolución del ejemplo 1.35, era la resolución de Taylor del ideal monomial  $I = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  del anillo  $S = k[x, y]$  (en realidad vimos que al extenderla obteníamos la resolución de Taylor de  $S/I$ ). Ahora estamos en condiciones de comprobarlo.

El complejo de Taylor asociado a dicho ideal es el de la figura 2.8, ya etiquetado. A partir de él podemos calcular fácilmente las diferenciales (siguiendo la notación de la definición 2.33 salvo porque identificamos los elementos de las bases de los módulos libres con las células que los indexan).

$$d_1(\zeta_0) = (-1)^1 \frac{x^2 y}{x^2} v_0 + (-1)^0 \frac{x^2 y}{xy} v_1 = -y v_0 + x v_1.$$

$$d_1(\zeta_1) = (-1)^1 \frac{xy^3}{xy} v_1 + (-1)^0 \frac{xy^3}{y^3} v_2 = -y^2 v_1 + x v_2.$$

$$d_1(\zeta_2) = (-1)^1 \frac{x^2 y^3}{x^2} v_0 + (-1)^0 \frac{x^2 y^3}{y^3} v_2 = -y^3 v_0 + x^2 v_2.$$

$$d_2(\sigma) = (-1)^2 \frac{x^2 y^3}{x^2 y} \zeta_0 + (-1)^0 \frac{x^2 y^3}{xy^3} \zeta_1 + (-1)^1 \frac{x^2 y^3}{x^2 y^3} \zeta_2 = y^2 \zeta_0 + x \zeta_1 - \zeta_2.$$

Y la resolución de Taylor es la siguiente:

$$0 \longrightarrow S(-2,3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ x \\ -1 \end{pmatrix}} S(-2,1) \oplus S(-1,3) \oplus S(-2,3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & 0 & -y^3 \\ x & -y^2 & 0 \\ 0 & x & x^2 \end{pmatrix}} S(-2,0) \oplus S(-1,1) \oplus S(-0,3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} I \longrightarrow 0.$$

Esta resolución es la misma que la de los citados ejemplos, indicando los multigrados en vez de solo los grados (evidentemente el signo en las diferenciales no es inconveniente). El hecho de que no sea minimal se deduce de que el grado de  $\sigma$  es el mismo que el de  $\zeta_2$ , y por lo tanto el ideal no es intersección completa (pues el generador  $xy$  comparte variables con los otros dos).

### 2.3.2 La resolución de Lyubeznik

Ya hemos visto que la resolución de Taylor destaca tanto por su sencillez como por estar, en general, lejos de ser minimal, y en la sección 1.4 introdujimos el complejo de Lyubeznik

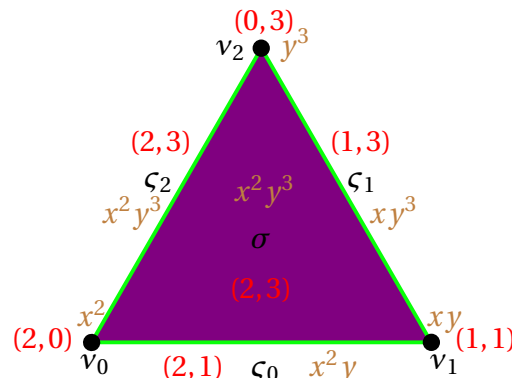


Figura 2.8: Complejo de Taylor del ideal monomial  $I = \langle x^2, xy, y^3 \rangle \subset S = k[x, y]$  con las caras enumeradas (en negro) y etiquetadas (en rojo los grados en  $\mathbb{N}^2$ , en marrón los monomios correspondientes).

de un ideal como un subcomplejo del de Taylor que era, de hecho, una resolución y estaba más próxima a ser minimal que la de Taylor. Pues bien, también es una resolución simplicial y esa mayor “proximidad a la minimalidad” deberá asimismo reflejarse en el complejo simplicial que la soporta, que es un subcomplejo del de Taylor. De nuevo consideraremos la generalización a módulos monomiales co-Artinianos.

**Definición 2.48 (Complejo de Lyubeznik, versión celular)** Sea  $M$  un módulo monomial co-Artiniano sobre un anillo  $S = k[x_1, \dots, x_n]$  y tómesese un orden total  $\trianglelefteq$  en  $\text{MinGen}(M)$ . Considérese  $\Delta_{\mathcal{L}_M}$  el complejo simplicial (abstracto) sobre el conjunto base  $\text{MinGen}(M)$  formado por todos los símlices  $\sigma = \{m_{\sigma_0}, \dots, m_{\sigma_s}\}$ ,  $m_{\sigma_0} \triangleleft m_{\sigma_1} \triangleleft \dots \triangleleft m_{\sigma_s}$ , que cumplen que para todo  $t < s$  y todo  $m \in \text{MinGen}(M)$  tal que  $m \triangleleft m_{\sigma_t}$ , se tiene que  $m \nmid \text{mcm}\{m_{\sigma_t}, \dots, m_{\sigma_s}\}$ . Se etiqueta  $\Delta_{\mathcal{L}_M}$  asignando a cada vértice el multigrado del monomio de  $\text{MinGen}(M)$  que le corresponde, convirtiéndolo en un complejo graduado  $(\Delta_{\mathcal{L}_M}, \text{gr})$ . El complejo de módulos asociado a este complejo simplicial etiquetado es el *complejo de Lyubeznik* de  $M$ , que se denota por  $\mathcal{L}_M$ . Este complejo es una resolución (aunque no lo demostraremos, en [Lyu88] se puede encontrar una prueba algebraica), la llamada *resolución de Lyubeznik*.

A la vista de la construcción, el complejo simplicial de Lyubeznik puede obtenerse del de Taylor eliminando algunos de los símlices que suponían una obstrucción a la minimalidad según la proposición 2.44, pero no todos en general, pues seguimos necesitando que los subcomplejos simpliciales hasta cada grado sean acíclicos para que soporte una resolución. Es por ello que, aunque supone una notable mejora respecto a la resolución de Taylor, aún no es minimal en general. Otro problema que plantea es la fuerte dependencia del orden total elegido en  $\text{MinGen}(M)$ ; dependiendo de este se eliminan más o menos caras del complejo de Taylor, y por lo tanto la resolución estará más o menos cerca de ser minimal, por lo que para obtener la “mejor” debemos probar con todos los órdenes posibles.

---

**EJEMPLO 2.49**

Volvamos al ejemplo 2.47, en el que construimos el complejo de Taylor (figura 2.8) y la correspondiente resolución del ideal monomial  $I = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  del anillo  $S = k[x, y]$ .

Ordenemos los monomios generadores (minimales) así:  $xy \triangleleft x^2 \triangleleft y^3$ .

Todos los vértices del complejo de Taylor  $\Delta_{\mathcal{T}_I}$  cumplen trivialmente la condición para estar en el de Lyubeznik (pues para ellos  $s = 0$  y no hay ninguna posibilidad de elegir  $t < s$ ). También la cumple  $\zeta_0 = \{xy, x^2\}$  pues  $m_{\zeta_{00}} = xy$ ,  $m_{\zeta_{01}} = x^2$  y entonces  $s = 1$  y solo puede ser  $t = 0 < s$ , pero no existen monomios en  $\text{MinGen}(I)$  menores (según el orden que hemos dado) que  $m_{\zeta_{00}} = xy$ . Exactamente el mismo razonamiento se aplica a  $\zeta_1 = \{xy, y^3\}$ .

En cambio, para  $\zeta_2 = \{x^2, y^3\}$  se tiene que  $s = 1$  y para  $t = 0$  tenemos que  $xy \triangleleft m_{\zeta_{20}} = x^2$ , y como  $\text{mcm}\{x^2, y^3\} = x^2y^3$  y  $xy \nmid x^2y^3$  se deduce que  $\zeta_2$  no cumple el requisito, y no estará en el complejo de Lyubeznik. Lo mismo ocurre con  $\sigma = \{xy, x^2, y^3\}$  al tomar  $t = 1 < 2 = s$ ,  $xy \triangleleft m_{\sigma_0} = x^2$  y  $xy \nmid x^2y^3 \text{mcm}\{x^2, y^3\} = x^2y^3$ . Entonces el complejo de Lyubeznik es el de la figura 2.9, obtenido del de Taylor tras eliminar  $\zeta_2$  y  $\sigma$ . Puesto que las diferenciales son las inducidas por el complejo de Taylor, la resolución de Lyubeznik de  $I$  es la siguiente:

$$0 \longrightarrow \begin{array}{c} S(-2, 1) \\ \oplus \\ S(-1, 3) \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & 0 \\ x & -y^2 \\ 0 & x \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S(-2, 0) \\ \oplus \\ S(-1, 1) \\ \oplus \\ S(-0, 3) \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} I \longrightarrow 0,$$

que evidentemente es minimal, y coincide con la obtenida en el ejemplo 1.35 mediante el procedimiento algebraico de las cancelaciones consecutivas. Es trivial comprobar que el complejo simplicial graduado de la figura 2.9 verifica las hipótesis de las proposiciones 2.37 y 2.38.

Puede comprobarse fácilmente que si hubiéramos elegido cualquier otro orden en los monomios generadores minimales no hubiésemos podido cancelar ninguna cara del complejo de Taylor, lo que pone de relevancia la fuerte dependencia del orden que tiene la resolución de Lyubeznik.

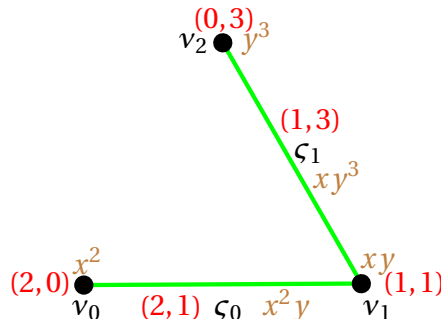


Figura 2.9: Complejo de Lyubeznik del ideal monomial  $I = \langle x^2, xy, y^3 \rangle \subset S = k[x, y]$  para el orden  $xy \triangleleft x^2 \triangleleft y^3$  con las caras enumeradas (en negro) y etiquetadas (en rojo los grados en  $\mathbb{N}^2$ , en marrón los monomios correspondientes).



## TEORÍA DE MORSE DISCRETA

Ahora que ya hemos presentado con detenimiento nuestro objeto de estudio, las resoluciones celulares, nos falta el método para conseguir nuestro objetivo, que es minimalizar dichas resoluciones, o al menos acercarnos a ello. En el capítulo 1 ya hemos visto un método algebraico de minimalización, el de las cancelaciones consecutivas, por lo que resulta natural preguntarse qué sentido tiene buscar otro método que solo es válido en el caso particular en el que podemos tener una resolución celular, es decir, para ideales monomiales (o a lo sumo módulos monomiales co-Artinianos). Además ya hemos visto que, aunque todos ellos admiten una resolución celular (la de Taylor), no siempre la resolución minimal va a ser de este tipo, por lo que para tener un éxito completo deberemos salir de la clase de resoluciones en que estamos trabajando.

La motivación que nos impulsa aparece, de forma intrínseca, a lo largo del capítulo 2. Y es que la topología de la estructura celular que sirve como soporte, junto con la graduación de esta procedente del etiquetado, reflejan muchas de las propiedades algebraicas de las resoluciones, entre ellas las que ya vimos en las subsecciones 2.2.1 y 2.2.2 sobre cuándo un CW-complejo soporta una resolución y cuándo esta es minimal, y la obtención de los números de Betti a partir de complejo celular aún si la resolución que soporta no es minimal. Este método es relevante por la información teórica que se obtiene durante el proceso y porque es aplicable a familias enteras de ideales, mientras que el método algebraico solo es válido para ejemplos concretos. Y por supuesto no hay que olvidar que en algunos casos el razonar topológicamente con el CW-complejo soporte de la resolución resulta mucho más sencillo que utilizar directamente argumentos algebraicos sobre la misma.

Es por esto que el procedimiento que vamos a ver es puramente topológico y consiste en el análogo para el caso de CW-complejos de la Teoría de Morse clásica para el caso de variedades, aprovechando la estructura combinatoria subyacente, por lo que recibe el nombre de Teoría de Morse Discreta.

La Teoría de Morse, rama de la Topología Diferencial de Variedades desarrollada en su origen por Marston Morse en [Mor34] bajo el nombre más genérico de *Cálculo de Variaciones*, analiza la topología de una determinada variedad a través del estudio de los puntos críticos de las funciones diferenciables sobre ella y en particular permite construir CW-complejos homotópicamente equivalentes a la misma. Aunque esta es precisamente la aplicación que buscamos adaptar al caso discreto, no hay que olvidar la relevancia de esta teoría en el ámbito de la Topología Diferencial, creciendo para incluir estructuras más generales como los fibrados y sirviendo como instrumento para probar los teoremas de  $h$ -cobordismo y  $s$ -cobordismo para variedades lisas (Smale, Milnor) y el teorema de periodicidad de Bott. La referencia fundamental para esta teoría es [Mil63].

Volviendo a lo que nos ocupa, fue Robin Forman, discípulo de Raoul Bott quien, en su artículo [For98], adapta las principales ideas de la Teoría de Morse al caso de estructuras celulares para iniciar la rama que ahora recibe el nombre de Teoría de Morse Discreta, cuyos fundamentos expondremos en la sección 3.1. En la sección 3.2 daremos una reformulación de esta teoría en términos de los llamados *emparejamientos acíclicos*, debida a Chari, que resultará ser mucho más manejable, tanto desde el punto de vista teórico como del práctico, para trabajar en el ámbito de los CW-complejos soporte de resoluciones. Continuaremos probando, en la sección 3.3, el resultado central que da sentido al capítulo y en buena medida a la memoria, según el cual la Teoría de Morse Discreta puede ser aplicada a las resoluciones celulares para obtener otras más próximas a las minimales. Terminaremos esbozando, en la sección 3.4, una generalización de la Teoría de Morse Discreta restringida al estudio de las resoluciones que permite prescindir de los soportes topológicos.

Existen otras versiones de Teoría de Morse Discreta de uso cada vez más frecuente en Informática Gráfica y en Visión Computacional que son diferentes de la presentada en esta Memoria. Para evitar confusiones se etiqueta como Teoría de Morse Digital a la relacionada con las aplicaciones tecnológicas.

Las referencias principales para este capítulo serán [For98] para la sección 3.1, [BW02] y [OW07] para la 3.2 y la 3.3 y [JW09] para la 3.4.

---

## 3.1 LOS TEOREMAS DE MORSE

---

Apoyándonos en [OW07, Sección 4.1] y especialmente en [For98] daremos una introducción a la Teoría de Morse Discreta para el caso de CW-complejos finitos (es decir, complejos celulares), hasta llegar a demostrar el análogo, en el caso regular, al ya anunciado resultado que permite construir un CW-complejo homotópicamente equivalente a una variedad a partir de los puntos críticos de una función diferenciable sobre esta cuyos puntos críticos sean todos no degenerados, que recibe el nombre de función de Morse. Este resultado, al que algunos textos se refieren como Teorema de Morse, se corresponde con el teorema 3.5 de [Mil63], aunque para el lector no iniciado en el tema es recomendable echar antes un vistazo a [Mil63, Sección 1], donde se desarrolla un ejemplo sencillo al reconstruir

la topología del toro a partir de los puntos críticos de la función altura, que es un caso particular de función de Morse (la más utilizada en las aplicaciones prácticas). El resultado es también cierto en el caso de complejos celulares no necesariamente regulares, aunque la demostración requiere la adaptación de muchos más conceptos de la Geometría Diferencial, como el campo vectorial gradiente, por lo que remitimos al lector interesado en ella a las secciones más avanzadas del artículo de Forman, [For98].

Nótese que estamos realizando una primera simplificación respecto del capítulo anterior y es que pedimos que los CW-complejos sean finitos para que los teoremas sean válidos. Esto implica que, si bien las resoluciones celulares podían considerarse también en el caso de módulos co-Artinianos, los métodos de minimalización que se apoyen en la Teoría de Morse Discreta no serán necesariamente válidos, por lo que en principio tendremos que restringirnos al caso de módulos monomiales con un número finito de monomios generadores minimales, o más concretamente a ideales monomiales. Más adelante veremos que sí es posible eludir la hipótesis de finitud.

En primer lugar tendremos que definir el análogo a las funciones de Morse a las que hemos hecho referencia antes.

**Definición 3.1 (Función de Morse discreta)** Una función de Morse sobre el CW-complejo  $X$  es una función  $f : X^{(*)} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple que:

1. Para toda célula  $\sigma^d \in X^{(*)}$ ,
  - (a)  $\#\{\tau^{d+1} \in X^{(*)} : \sigma^d < \tau^{d+1}, f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$ ,
  - (b)  $\#\{\nu^{d-1} \in X^{(*)} : \nu^{d-1} < \sigma^d, f(\nu) \geq f(\sigma)\} \leq 1$ .
2. Si  $\sigma, \tau \in X^{(*)}$  y  $\sigma$  es una faceta de  $\tau$  tal que  $f(\sigma) \geq f(\tau)$  entonces  $\sigma$  es una cara regular de  $\tau$  (recuérdense la definición 2.5 de faceta de una cara de un CW-complejo y de cara regular respecto de otra, definición 2.10).

En otras palabras, para que una función sobre el conjunto de células de un CW-complejo sea de Morse tiene que tomar para cualquier célula un valor estrictamente mayor que en cualquiera de sus facetas excepto a lo sumo en una, y un valor estrictamente menor que en cualquiera de las células de las que esta es faceta, excepto a lo sumo en una, y además estos pares de células en los que la función no respeta el orden solo pueden ser regulares (es decir, la célula de dimensión menor es una faceta regular de la otra), o lo que es equivalente, si una célula es una faceta irregular (o sea, no regular) de otra la función es estrictamente creciente con la dimensión. Es decir, son funciones que crecen estrictamente con la dimensión salvo a lo sumo en una excepción “local”.

---

### EJEMPLO 3.2

---

Dado un CW-complejo  $X$  todas las funciones sobre  $X^{(*)}$  que crecen estrictamente con la dimensión de las células son trivialmente funciones de Morse discretas.

---

**EJEMPLO 3.3**


---

En la figura 3.1 podemos ver un mismo CW-complejo, formado por tres 0-células y otras tantas 1-células, con dos funciones distintas sobre él dadas por los valores que toman sobre cada célula. La función del diagrama de la izquierda no es de Morse, pues  $\sigma_0, v_0$  y  $v_1$  incumplen la condición (b) y  $v_2, \sigma_1$  y  $\sigma_2$  incumplen la condición (a) de la definición 3.1. La función del diagrama de la derecha sí cumple todas las condiciones de dicha definición, y por lo tanto es una función de Morse discreta.

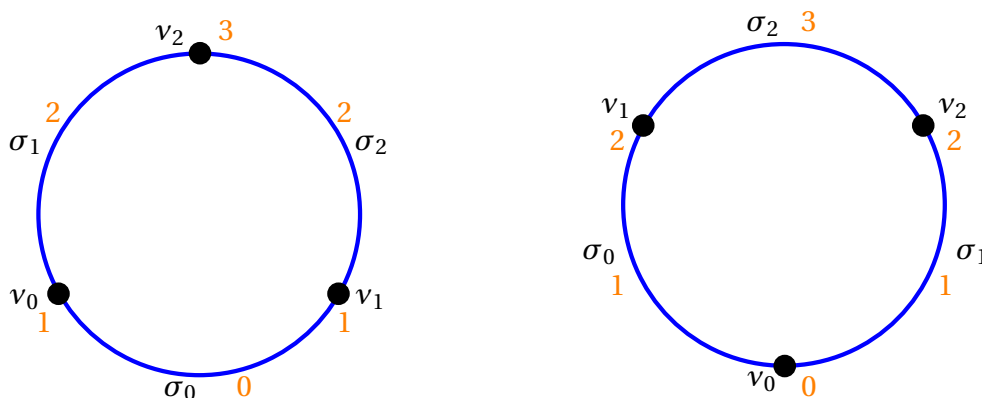


Figura 3.1: Un CW-complejo con dos funciones distintas sobre él, dadas por los valores (en naranja) que toman sobre cada célula. Solo la de la derecha es una función de Morse (ver ejemplo 3.3).

Una determinada función de Morse sobre un CW-complejo puede verse como un etiquetado de sus células, aunque el hecho de permitir excepciones al crecimiento de la función con la dimensión impide que tenga una estructura de CW-complejo graduado (recuérdese la definición 2.31). Aún así podemos extraer “subcomplejos de nivel” como en la siguiente definición.

**Definición 3.4** Sean  $X$  un CW-complejo y  $f$  una función (cualquiera, en particular es válido para las de Morse) sobre  $X$ . Dado  $c \in \mathbb{R}$  se denota por

$$X_c := \bigcup_{\substack{\sigma \in X^{(*)} \\ f(\sigma) \leq c}} \bigcup_{v \leq \sigma} v.$$

Es inmediato comprobar que  $X_c$  es un subcomplejo de  $X$ , formado por todas las caras de este sobre las cuales  $f$  toma un valor menor o igual que  $c$ , junto con todas las caras de estas (para que sea efectivamente un subcomplejo, pues esta era la única obstrucción).

Es evidente que para ver si una célula  $\sigma$  con  $f(\sigma) > c$  está en  $X_c$  tendremos que ver si existe alguna célula  $\tau \in X^{(*)}$  con  $\sigma < \tau$  y  $f(\tau) \leq c$ . En realidad, el siguiente lema nos asegura que en el caso regular y para funciones de Morse discretas es suficiente con buscar entre las células de una dimensión mayor que la de  $\sigma$ .

**Lema 3.5** Sea  $X$  un CW-complejo regular  $f$  una función de Morse discreta sobre  $X$ ,  $\sigma \in X^{(d)}$  y  $\tau \in X^{(*)}$  con  $\sigma < \tau$ . Entonces existe una  $(d+1)$ -célula  $\tilde{\tau} \in X^{(*)}$  con  $\sigma < \tilde{\tau} \leq \tau$  y  $f(\tilde{\tau}) \leq f(\tau)$ .

*Demostración.* Como  $\sigma < \tau$ ,  $\dim(\sigma) < \dim(\tau)$  y se razona por inducción. Si  $\dim(\tau) = d+1$  basta con tomar  $\tilde{\tau} = \tau$ . Supóngase ahora la propiedad cierta para  $\dim(\tau) = d+r-1$ ,  $r > 1$ , veámosla para  $\dim(\tau) = d+r$ . Por la proposición 2.30 se pueden encontrar dos  $(d+r-1)$ -células distintas  $\zeta_1, \zeta_2 \in X^{(*)}$  con  $\sigma < \zeta_1 < \tau$ ,  $\sigma < \zeta_2 < \tau$ . Ahora bien, por la condición (b) de la definición 3.1 o bien  $f(\zeta_1) < f(\tau)$  o bien  $f(\zeta_2) < f(\tau)$ , y aplicando la hipótesis de inducción sobre  $\sigma$  y la célula de estas dos para la que sea cierta la desigualdad se deduce el resultado.  $\square$

Ahora tenemos que definir qué entendemos por células críticas de una función de Morse discreta.

**Definición 3.6 (Células críticas)** Sea  $X$  un CW-complejo,  $f$  una función de Morse discreta sobre  $X$ . Una célula  $\sigma^d \in X^{(*)}$  se dice que es  $f$ -crítica de índice  $d$  si verifica las dos condiciones siguientes:

- (a)  $\#\{\tau^{d+1} \in X^{(*)} : \sigma^d < \tau^{d+1}, f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$ ,
- (b)  $\#\{\nu^{d-1} \in X^{(*)} : \nu^{d-1} < \sigma^d, f(\nu) \geq f(\sigma)\} = 0$ .

Se denota mediante  $X_{crit}^{(d)}(f) := \{\sigma \in X^{(*)} : \sigma \text{ es } f\text{-crítica de índice } d\}$  y más generalmente mediante  $X_{crit}^{(*)}(f) := \{\sigma \in X^{(*)} : \sigma \text{ es } f\text{-crítica}\}$ .

Se llaman números de Morse (discretos) a  $m_d(f) := \#X_{crit}^{(d)}$ , los números de células críticas de cada índice.

Se dice que  $c \in \mathbb{R}$  es un *valor crítico* de  $f$  si existe  $\sigma \in X_{crit}^{(*)}(f)$  con  $f(\sigma) = c$ .

Nótese que una célula de dimensión  $d$  no puede ser una célula crítica de ningún índice distinto de  $d$ , por lo que en adelante utilizaremos indistintamente índice y dimensión al tratar con células críticas, y omitiremos las referencias a estos si la dimensión de la célula es conocida. Tampoco especificaremos la función de Morse respecto de la que es crítica salvo si puede haber confusiones.

---

### EJEMPLO 3.7

---

En la función de Morse sobre el CW-complejo de la derecha de la figura 3.1,  $\nu_0$  es una célula crítica de índice 0,  $\sigma_2$  es crítica de índice 1 y no hay más células críticas.

La definición de célula crítica que acabamos de dar supone efectivamente el análogo discreto de la noción de célula crítica de un determinado índice para una función de Morse clásica. Por ejemplo, si  $x$  es un punto crítico de índice 1 de una función de Morse  $F$  sobre

una variedad lisa de dimensión  $n$ , el Lema de Morse (ver [Mil63, Lema 2.2]) afirma que existe un sistema de coordenadas  $(t_1, \dots, t_n)$  en un entorno de  $x$ , que se corresponde con  $(0, \dots, 0)$ , tal que

$$F(t_1, \dots, t_n) = F(x) - t_1^2 + \sum_{i=2}^n t_i^2.$$

Es decir, partiendo del punto  $x$ ,  $F$  decrece en la dirección de  $t_1$  en ambos sentidos y crece en todas las direcciones transversales a esta. Supongamos ahora que  $\sigma$  es una 1-célula crítica (de índice 1, obviamente) para una función de Morse discreta  $f$ . Entonces  $f(\sigma)$  es mayor (estrictamente) que el valor de  $f$  en cualquiera de las 0-células (vértices) sobre  $\sigma$ , y es menor que el valor que toma en cualquiera de las 2-células en cuya frontera está  $\sigma$ . Esto es,  $f$  decrece (de forma discreta) al movernos en la dirección de la “arista”  $\sigma$  hacia cualquiera de las células en su frontera y crece en todas las direcciones transversales, por lo que es realmente un análogo del caso liso. Análogamente se puede hacer la interpretación intuitiva, por medio del Lema de Morse, para células críticas de cualquier índice, de forma que una célula crítica de índice  $d$  puede entenderse como el subespacio  $d$ -dimensional “inestable” asociado a un punto crítico de índice  $d$  en el caso liso.

Las definiciones 3.1 y 3.6 permiten deducir otras propiedades de las funciones de Morse. Por ejemplo, si  $X$  es un CW-complejo regular y  $f$  es una función de Morse discreta sobre él, el mínimo de  $f$  debe alcanzarse en una 0-célula, que será crítica (de índice 0). Esto se debe a que si  $d \geq 1$ , una  $d$ -célula tiene al menos dos caras  $(d-1)$ -dimensionales, por lo que por ser la función de Morse al menos en una de ellas deberá tomar un valor estrictamente menor que el que tomaba en la  $d$ -célula. Otra propiedad interesante es que una determinada célula no puede incumplir simultáneamente las dos condiciones para ser una célula crítica.

**Lema 3.8** Sea  $X$  un CW-complejo,  $f$  una función de Morse discreta sobre  $X$ ,  $\sigma \in X^{(*)}$  una  $d$ -célula. Entonces no pueden ser ciertas las dos afirmaciones siguientes:

- (i)  $\exists \tau^{(d+1)} > \sigma$  tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ .
- (ii)  $\exists \nu^{(d-1)} < \sigma$  tal que  $f(\nu) \geq f(\sigma)$ .

*Demostración.* Para que la condición (ii) tenga sentido debemos suponer que  $d \geq 1$ . Supongamos que (i) es cierta, entonces  $\sigma$  debe ser una cara regular de  $\tau$ , y por la condición (a) de la definición 3.1 si  $\tilde{\sigma}$  es otra cara  $d$ -dimensional de  $\tau$  entonces  $f(\tilde{\sigma}) < f(\tau)$ , por lo que  $f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)$ .

Supongamos ahora que es cierta la condición (ii), razonando análogamente deducimos que  $\nu$  es una cara regular de  $\sigma$  y por la proposición 2.29 existe una  $d$ -célula  $\tilde{\sigma} \neq \sigma$  que cumple que  $\nu < \tilde{\sigma} < \tau$ , que por la condición (b) de la definición 3.1 cumplirá que  $f(\nu) < f(\tilde{\sigma})$ .

Combinando ahora todo lo anterior se obtiene la siguiente cadena de desigualdades, que nos conduce a una contradicción:

$$f(\sigma) \leq f(\nu) < f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma).$$

□

Antes de entrar a probar los resultados centrales de esta sección, necesitaremos introducir una nueva transformación topológica sobre los CW-complejos, su colapso.

**Definición 3.9 (Colapso de CW-complejos)** Sean  $X$  un CW-complejo y  $\sigma^d < \tau^{d+1}$  dos células cuyas tales que  $\sigma$  es una cara regular de  $\tau$  y no es cara de ninguna otra célula de  $X$ . Sea  $Y = X \setminus (\sigma \cup \tau)$ , entonces se dice que  $X$  colapsa (elementalmente) sobre  $Y$ . Más generalmente, se dice que  $X$  colapsa sobre  $Y$  y se denota por  $X \searrow Y$ , si  $X$  puede ser transformado en  $Y$  mediante un número finito de colapsos elementales.

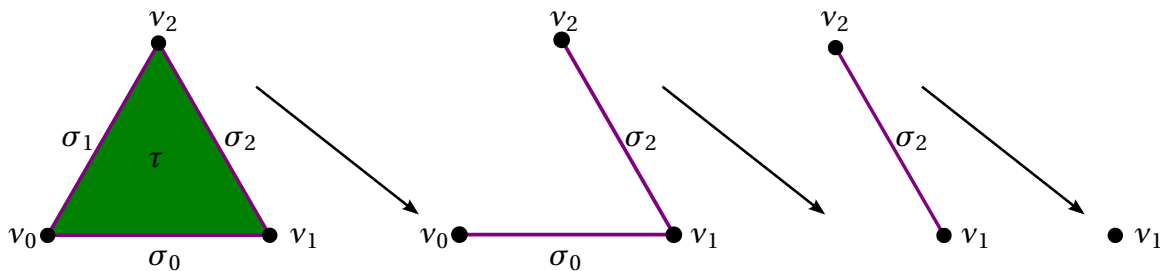


Figura 3.2: Colapso de un 2-símplice sobre uno de sus vértices. En el primer paso eliminamos  $\tau$  y  $\sigma_1$ , en el segundo  $\sigma_0$  y  $v_0$  y en el último  $\sigma_2$  y  $v_2$ .

La figura 3.2 ilustra el colapso de un 2-símplice sobre uno de sus vértices. Nótese que si  $X \searrow Y$ , en particular  $Y$  es un retracts por deformación de  $X$  y por lo tanto son homotópicamente equivalentes, luego su homología también coincidirá.

Estamos ya en condiciones de enunciar y probar los principales resultados de la Teoría de Morse Discreta. El primero dice que, dados un CW-complejo y una función de Morse discreta sobre él, dos “subcomplejos de nivel” son homotópicamente equivalentes mientras no haya valores críticos entre ambos “niveles”.

**Proposición 3.10 (Paso por valores no críticos)** Sean  $X$  un CW-complejo finito y regular,  $f$  una función de Morse discreta sobre  $X$  y  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que el intervalo  $[a, b]$  no contiene valores críticos de  $f$ . Entonces  $X_b \searrow X_a$ .

*Demostración.* En primer lugar obsérvese que si  $\sigma^d < \tau^{d+1} \in X^{(*)}$  son tales que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$  se puede modificar  $f$  cambiando  $f(\tau)$  por  $f(\tau) - \varepsilon$  o  $f(\sigma)$  por  $f(\sigma) + \varepsilon$ , para algún  $\varepsilon \geq 0$  suficientemente pequeño de forma que las células críticas para esta nueva función continúen siendo las mismas. Si  $\sigma^d$  cumple que  $f(\tau^{d+1}) \neq f(\sigma) \neq f(v^{d-1})$  para cada elección de células  $\tau^{d+1} > \sigma$  y  $v^{d-1} < \sigma$  también se puede modificar  $f$  cambiando  $f(\sigma)$  por  $f(\sigma) \pm \varepsilon$ , para algún  $\varepsilon \geq 0$  suficientemente pequeño de forma que las células críticas para esta nueva función continúen siendo las mismas. Combinando estas dos operaciones se puede modificar ligeramente  $f$  sin que varíen  $X_a$  y  $X_b$  pero de forma que  $f : X^{(*)} \rightarrow \mathbb{R}$  sea ahora una función (de Morse discreta) inyectiva.

Si  $f^{-1}([a, b]) = \emptyset$  entonces  $X_a = X_b$  y no hay nada que probar. En otro caso, considerando una partición adecuada de  $[a, b]$  en intervalos menores si fuera necesario, se puede suponer que hay una única célula no crítica  $\sigma^d$  con  $f(\sigma) \in [a, b]$ .

Por el lema 3.8 una y solo una de las dos posibilidades siguientes es cierta:

- (i)  $\exists \tau^{(d+1)} > \sigma$  tal que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ .
- (ii)  $\exists \nu^{(d-1)} < \sigma$  tal que  $f(\nu) \geq f(\sigma)$ .

Si se cumple (i) entonces  $\tau$  es una célula no crítica y debe ser  $f(\tau) < a$ , con lo que  $\tau \subseteq X_a$ , y como  $\sigma < \tau$  también  $\sigma \subseteq X_a$ , luego de nuevo no hay nada que probar.

Supóngase ahora que es cierto (ii), como ya hemos dicho (i) no puede ser cierto, y por lo tanto para toda célula  $\tau^{(d+1)} > \sigma$  se tiene que  $f(\tau) > f(\sigma)$ , y de hecho debe ser  $f(\tau) > b$  (pues en  $[a, b]$  no puede estar la imagen de ninguna célula, ya sea crítica, por hipótesis del teorema, o no, pues lo hemos supuesto antes). Entonces el lema 3.5 permite asegurar que para cualquier célula  $\zeta > \sigma$  (cualquiera que sea su dimensión),  $f(\zeta) > b$ . Por lo tanto  $\sigma \cap X_a = \emptyset$ .

Al suponer que (ii) es cierto hemos asumido que existe  $\nu^{(d-1)} < \sigma$  con  $f(\nu) > f(\sigma)$  (la igualdad no puede darse, pues  $f$  es inyectiva), y por lo tanto  $f(\nu) > b$ . Si  $\tilde{\nu}^{(d-1)} \neq \nu$  es otra cara  $(d-1)$ -dimensional de  $\sigma$  debe ser  $f(\tilde{\nu}) < f(\sigma)$  (por la condición (b) de la definición 3.1), luego  $f(\tilde{\nu}) < a$ , como hemos razonado previamente. Entonces  $\tilde{\nu}$  y todas sus caras están contenidas en  $X_a$ .

Sea ahora  $\tilde{\sigma}$  otra cara  $d$ -dimensional de  $X$  con  $\tilde{\sigma} > \nu$ , la condición (a) de la definición 3.1 garantiza que  $f(\tilde{\sigma}) > f(\nu) > b$ , y de nuevo aplicando el lema 3.5 se deduce que para cualquier célula  $\zeta > \nu$  (cualquiera que sea su dimensión),  $f(\zeta) > b$ . Por lo tanto  $\nu \cap X_a = \emptyset$ .

Se deduce entonces que  $X_b$  puede escribirse como la unión disjunta  $X_b = X_a \cup \sigma \cup \nu$ , donde  $\nu$  es una cara de  $\sigma$  y de ninguna otra célula de  $X_a$ , luego  $X_b \setminus X_a$ , como queríamos demostrar.

□

El segundo resultado, que complementa al que acabamos de ver, trata el caso en que entre los “niveles” de los subcomplejos hay un valor crítico, lo que se refleja topológicamente en la adjunción al subcomplejo de menor nivel de una célula de la misma dimensión que la crítica.

**Proposición 3.11 (Paso por un valor crítico)** Sean  $X$  un CW-complejo regular y finito y  $f$  una función de Morse discreta sobre él. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que existe una célula crítica de índice  $d$ ,  $\sigma^d$ , con  $f(\sigma) \in [a, b]$  y este es el único valor crítico del intervalo. Entonces  $X_b$  es homotópicamente equivalente a

$$X_a \bigcup_{f_{\partial e^d}} e^d,$$

donde  $e^d$  denota a una célula (abierta)  $d$ -dimensional.

*Demostración.* Al igual que en la prueba de la proposición 3.10 se puede suponer que  $f$  es inyectiva. Entonces es posible encontrar  $a', b' \in \mathbb{R}$  con  $a < a' < b' < b$  de forma que



$\sigma = f^{-1}([a, b])$ . La proposición 3.10 dice que  $X_b \setminus X_{b'}$  y  $X_{a'} \setminus X_a$  con lo que basta con probar que  $X_{b'}$  es homotópicamente equivalente a  $X_{a'} \cup_{f_{\partial e^d}} e^d$ .

Como  $\sigma$  es una célula crítica, para toda célula  $\tau^{d+1} > \sigma$  se tiene que  $f(\tau) > f(\sigma)$ , y por lo tanto  $f(\tau) > b'$  (porque hemos ajustado el intervalo para que no esté en él la imagen de ninguna otra célula). El lema 3.5 asegura que si  $\zeta > \sigma$  (cualquiera que sea su dimensión), entonces  $f(\zeta) > b'$ , luego  $\sigma \cap X_{a'} = \emptyset$ .

También por ser  $\sigma$  crítica, para toda célula  $\nu^{d-1} < \sigma$  se tiene que  $f(\nu) < f(\sigma)$  y el mismo razonamiento de antes implica que  $f(\nu) < a'$ , con lo que  $\nu \subseteq X_{a'}$ . Como esto ocurre para toda célula  $(d-1)$ -dimensional que sea una cara de  $\sigma$ , también las caras de dimensión menor estarán en  $X_{a'}$ , y como la unión de todas ellas es  $\bar{\sigma} \setminus \sigma$  se deduce que  $\bar{\sigma} \setminus \sigma \subseteq X_{a'}$ . Esto, junto con lo que hemos visto en el párrafo anterior, demuestra que

$$X_{b'} = X_{a'} \bigcup_{f_{\partial \sigma}} \sigma$$

y como  $\sigma$  es homeomorfa a  $e^d$  hemos probado lo que queríamos.  $\square$

Como corolario inmediato tenemos el siguiente teorema, que es el resultado central al que nos hemos estado refiriendo durante toda la sección.

**Teorema 3.12 (de Morse, caso regular)** Sean  $X$  un CW-complejo regular y finito y  $f$  una función de Morse discreta sobre él. Entonces  $X$  es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con exactamente  $m_i(f)$  células de dimensión  $i$ .

Para demostrarlo solo es necesario recorrer el conjunto imagen de la función de Morse, aplicando la proposición 3.10 en los intervalos sin valores críticos y la proposición 3.11 al encontrar uno de ellos.

La proposición 3.10 es la versión discreta de [Mil63, Teorema 3.1], mientras que la proposición 3.11 se corresponde con [Mil63, Teorema 3.2] y el teorema 3.12 es el análogo a [Mil63, Teorema 3.5]. Esta analogía con el caso clásico, también patente en las pruebas, explica que hayamos relegado los dos primeros resultados al rango de proposiciones. El lector interesado puede encontrar en el citado libro ilustraciones y ejemplos que le ayudarán a comprender mejor cómo funciona la Teoría de Morse clásica.

Las pruebas que hemos dado han sido extraídas de [For98, Sección 3]. En el resto del artículo, Forman continúa adaptando aspectos de la Teoría de Morse para variedades al caso discreto, en especial el campo vectorial gradiente y su flujo asociado y el complejo (de cadenas) de Morse y sus diferenciales (que tiene la misma homología que el CW-complejo), que le permitirán, en la sección 10 (teorema 10.2), generalizar el teorema 3.12 al caso de CW-complejos no regulares (aunque la finitud continúa siendo necesaria por el momento). El enunciado queda entonces como sigue:

**Teorema 3.13 (Teorema de Morse)** Sean  $X$  un CW-complejo finito y  $f$  una función de Morse discreta sobre él. Entonces  $X$  es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con exactamente  $m_i(f)$  células de dimensión  $i$ .

En realidad sí es posible extender los teoremas anteriores a CW-complejos infinitos, siempre que la función de Morse discreta  $f$  considerada sea propia, es decir, que  $f^{-1}(-\infty, x)$  sea compacto para todo  $x \in \mathbb{R}$  (lo que trivialmente se cumple en el caso finito). A esta generalización hacen referencia Batzies y Welker en el apéndice de su artículo [BW02], señalando como única fuente un correo electrónico intercambiado con Forman, por lo que no podemos dar referencias más precisas, a pesar de lo cual lo utilizaremos en la siguiente sección, tal y como hacen ellos.

En el capítulo 2 se formularon muchos de los enunciados en términos de pares de CW-complejos, por lo que una pregunta natural es si los resultados de esta sección y en particular el teorema 3.12 son válidos en el caso relativo. A la vista de las demostraciones de las proposiciones 3.10 y 3.11 se deduce que sí es posible tal extensión si introducimos la hipótesis adicional de que las células críticas para la función de Morse restringida al subcomplejo son las mismas que las células críticas para la función de Morse (sobre el CW-complejo ambiente) que están en el subcomplejo, es decir, no hay ninguna célula del subcomplejo que viole alguna de las condiciones de crecimiento de la función de Morse con la dimensión de la definición 3.1 respecto de una célula que esté en el CW-complejo ambiente pero no en el subcomplejo. En el proceso de construcción del nuevo CW-complejo solo hay que hacer el seguimiento de cuáles de las células que se añaden corresponden a células críticas que están en el subcomplejo, con lo que este nuevo CW-complejo será en realidad un par de CW-complejos, cuya homología (relativa) coincidirá con la del par de CW-complejos original.

---

## 3.2 LA TEORÍA DE MORSE DISCRETA EN TÉRMINOS DE EMPAREJAMIENTOS ACÍCLICOS

---

La Teoría de Morse Discreta que acabamos de ver en la sección anterior tiene una serie de carencias que la hacen difícil de aplicar a la situación que nos interesa, que es la de CW-complejos que son soporte de resoluciones celulares, con el objetivo de minimalizarlas.

Con las últimas extensiones (que no hemos probado) los teoremas presentados cubren prácticamente todos los posibles soportes de resoluciones celulares vistas en el capítulo 2. Sin embargo en ningún momento hemos garantizado que la equivalencia homotópica entre el CW-complejo de partida y el obtenido a partir de sus células críticas para una determinada función de Morse discreta se comporte “bien” cuando hay una graduación de por medio, que es precisamente la condición que sirve de “pegamento” entre la Topología y el Álgebra, como tantas veces hemos indicado.

En resumen, la Teoría de Morse Discreta nos permite “reducir” (en lo que al número de células se refiere) la parte topológica, pero si esta reducción no puede extenderse a la parte algebraica resultará totalmente inútil para nuestro objetivo de minimalizar resoluciones celulares (o al menos intentarlo). Como era de esperar sí podremos compatibilizar lo que

hemos visto en la sección precedente con las graduaciones de los CW-complejos.

Por otra parte, tanto para probar esto que acabamos de indicar como simplemente para trabajar con la Teoría de Morse Discreta sobre CW-complejos, el lenguaje en que la hemos formulado, con las funciones de Morse discretas, resulta incómodo. Ese lenguaje no es más que la adaptación literal del caso de variedades, pero resulta excesivo al trabajar en un ambiente discreto ya que no nos importan para nada los valores que toma la función en las células del CW-complejo, sino solo cómo están ordenados, que es lo que determina qué células son críticas.

Lo anterior indujo a Chari a trabajar sobre el grafo del CW-complejo (que definiremos más adelante, aunque no es más que el diagrama de Hasse asociado al conjunto parcialmente ordenado) en su artículo [Cha00]. En lugar de manejar todos los valores de la función de Morse discreta se limitó a marcar las aristas que unen dos células que incumplen el crecimiento de la función de Morse con la dimensión. Pero el lema 3.8, junto con las propias condiciones de la definición de función de Morse discreta 3.1 implican que cada célula solo puede violar ese crecimiento a lo sumo con una célula, ya sea de dimensión una mayor o una menor, por lo que las aristas marcadas serán en realidad emparejamientos de células. No todos los emparejamientos provienen de funciones de Morse discretas, sino que deberemos exigir una condición adicional (de ahí el adjetivo “acíclicos” que acompaña a los emparejamientos en el título de la sección).

La primera parte de la sección estará dedicada a desarrollar esta reinterpretación de la Teoría de Morse Discreta debida a Chari, mientras que en la subsección 3.2.1 abordaremos la compatibilidad con las graduaciones. Las referencias principales serán [BW02] y especialmente [OW07].

Comencemos definiendo el grafo de células asociado a un CW-complejo.

**Definición 3.14 (Grafo de células)** Sea  $X$  un CW-complejo, se llama *grafo de células* de  $X$  al grafo orientado cuyo conjunto de vértices es  $X^{(*)}$  y cuyo conjunto de aristas es  $E_X = \{\tau \rightarrow \sigma : \sigma \text{ es una faceta de } \tau\}$  y se denota por  $G_X = (X^{(*)}, E_X)$ .

Ahora podemos precisar a qué nos referíamos antes con la expresión “emparejamientos acíclicos”.

**Definición 3.15 (Emparejamientos acíclicos)** Sea  $X$  un CW-complejo con grafo de células  $G_X = (X^{(*)}, E_X)$ . Sea  $A \subset E_X$  un subconjunto de aristas  $\{\tau_a \rightarrow \sigma_a\}_a$  tales que  $\sigma_a$  es una cara regular de  $\zeta$  para todo  $\zeta \rightarrow \sigma_a \in E_X$ .

1. Se denota por  $G_X^A = (X^{(*)}, E_X^A)$  al grafo inducido por  $A$  con conjunto de aristas

$$E_X^A = (E_X \setminus A) \cup \{\sigma \Rightarrow \tau : \tau \rightarrow \sigma \in A\},$$

obtenido a partir de  $G_X$  invirtiendo la dirección de las aristas  $\tau \rightarrow \sigma$  que están en  $A$  (para evitar confusiones se representan mediante una flecha doble las aristas invertidas siempre que puedan ser distinguidas de las originales). Se dice que una arista  $\sigma \Rightarrow \tau \in E_X^A$  es una *A-arista* si la correspondiente arista invertida está en  $A$ ,  $\tau \rightarrow \sigma \in A$ .

2. Se dice que  $A$  es un *emparejamiento* en o sobre  $X$  si cada célula  $\sigma \in X^{(*)}$  aparece en a lo sumo una arista de  $A$ , ya sea como vértice de salida o de llegada (y por lo tanto  $A$  realmente lo que hace es emparejar células).
3. Se dice que  $A$  es un *emparejamiento acíclico* en o sobre  $X$  si es un emparejamiento sobre  $X$  y el grafo inducido  $G_X^A$  es acíclico, es decir, no contiene ciclos (orientados, pues el grafo lo es).
4. Una célula de  $X$  se dice que es *A-crítica* si no aparece en ninguna arista de  $A$ , ya sea como célula de salida o de llegada.
5. El conjunto de todas las células  $A$ -críticas se denota por

$$X_{crit}^{(*)}(A) = \{\sigma \in X^{(*)} : \sigma \text{ es } A\text{-crítica}\} .$$

6. Se denota por  $\tilde{G}_X^A = (X^{(*)}, \tilde{E}_X^A)$  al grafo inducido por  $A$  con conjunto de aristas

$$\tilde{E}_X^A = E_X \cup \{\sigma \Rightarrow \tau : \tau \rightarrow \sigma \in A\} ,$$

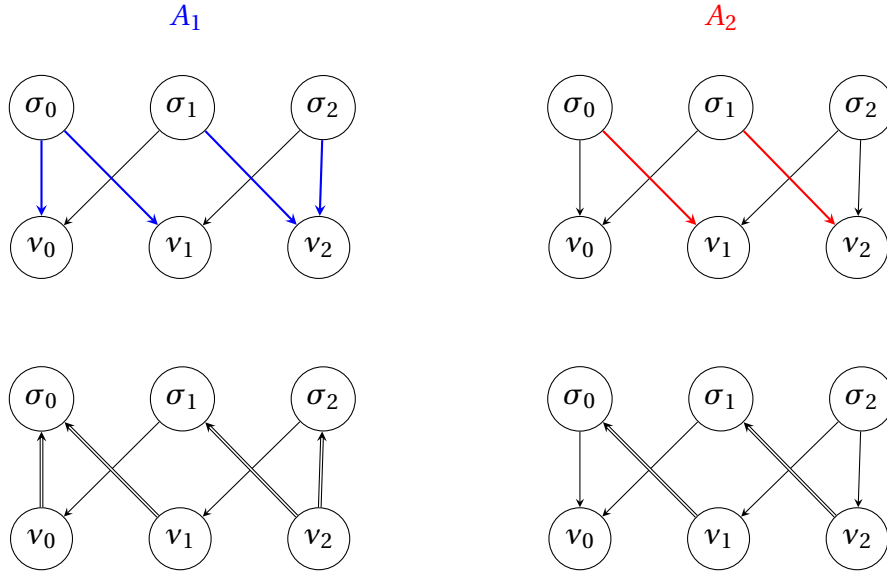
obtenido a partir de  $G_X$  añadiendo las aristas invertidas de las que están en  $A$  (sin eliminar estas).

---

### EJEMPLO 3.16

---

Los dos grafos superiores del siguiente diagrama son los grafos de células de un mismo CW-complejo  $X$  (con tres células de dimensión 0 y otras tres de dimensión 1). A la izquierda, marcadas en azul, tenemos un cierto conjunto de aristas  $A_1$  de  $G_X$ , mientras que a la derecha, en rojo, tenemos otro conjunto de aristas  $A_2$  del mismo grafo, y distinto del primero. Bajo cada uno de los grafos tenemos los correspondientes grafos inducidos,  $G_X^{A_1}$  a la izquierda y  $G_X^{A_2}$  a la derecha (las aristas de cada uno de los conjuntos han sido invertidas). Se observa que el conjunto de aristas de la izquierda ni siquiera es un emparejamiento, mientras que el de la derecha sí lo es y, de hecho, es acíclico.



Tendremos que dar algunos resultados y definiciones antes de desentrañar la relación entre funciones de Morse discretas y emparejamientos acíclicos. El siguiente lema nos garantiza que todo subemparejamiento de un emparejamiento acíclico es a su vez acíclico.

**Lema 3.17** Sean  $X$  un CW-complejo,  $A$  un emparejamiento acíclico sobre  $X$  y  $A' \subset A$ . Entonces  $A'$  es un emparejamiento acíclico sobre  $X$ .

*Demostración.* En primer lugar nótese que todo subconjunto de un emparejamiento debe ser, a su vez, un emparejamiento. Supongamos que  $\nu_0 \rightarrow \dots \rightarrow \nu_k = \nu_0$  es un ciclo en  $G_X^{A'}$ . Por ser  $A'$  un emparejamiento no puede ocurrir que dos aristas consecutivas  $\nu_i \rightarrow \nu_{i+1}$  y  $\nu_{i+1} \rightarrow \nu_{i+2}$  sean  $A'$ -aristas. Ahora bien, la dimensión de las células involucradas disminuye en una unidad para las aristas que no son  $A'$ -aristas, y aumenta en una unidad para las que sí lo son, con lo que podemos suponer que el ciclo es, en realidad, de la forma  $\tau_0 \rightarrow \sigma_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \tau_l \rightarrow \sigma_l \Rightarrow \tau_{l+1} = \tau_0$ , donde todas las aristas  $\sigma_i \Rightarrow \tau_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, l$  son  $A'$ -aristas y todas las  $\tau_i \rightarrow \sigma_i$ ,  $i = 0, \dots, l$  no lo son (puede ocurrir que el orden sea justo el contrario, pero el razonamiento sería totalmente análogo). Pero todas las  $A'$ -aristas son  $A$ -aristas, y sin embargo ninguna de las aristas del ciclo que no son  $A'$ -aristas pueden ser  $A$ -aristas, ya que  $A$  es un emparejamiento, con lo que el ciclo es también un ciclo en  $G_X^A$ , lo cual es absurdo, puesto que  $A$  es acíclico.  $\square$

Este resultado permite caracterizar los ciclos en el grafo  $\tilde{G}_X^A$  para un emparejamiento acíclico  $A$  sobre el CW-complejo  $X$ .

**Lema 3.18** Sean  $X$  un CW-complejo y  $A$  un emparejamiento acíclico sobre  $X$ . Los únicos ciclos en el grafo  $\tilde{G}_X^A$  son los formados solamente por una arista de  $A$  y la correspondiente arista invertida.

*Demostración.* En primer lugar, se tiene que todo ciclo en  $\tilde{G}_X^A$  debe contener una arista  $e \in A$  y su inversa, pues de lo contrario puede verse como un ciclo en  $G_X^{A'}$  para un cierto

$A' \subset A$ , lo que contradice el lema 3.17. Ahora bien, estas dos aristas nos permiten dividir el ciclo en dos partes que serán de nuevo ciclos, y razonando inductivamente se concluye que nuestro ciclo está formado solamente por pares de aristas dirigidas cada una en un sentido, una de las cuales está en  $A$ , pero como  $A$  es un emparejamiento solo puede estar formado por una de tales aristas (pues en otro caso una misma célula estaría en dos aristas de  $A$ ).  $\square$

Ahora que los ciclos de  $\tilde{G}_X^A$  no son un problema, podemos dar una estructura de conjunto parcialmente ordenado sobre el conjunto unión de  $A$  y sus células críticas (hay que tener cuidado, ya que estamos mezclando en un mismo conjunto células y aristas).

**Definición 3.19 (El conjunto parcialmente ordenado asociado al emparejamiento)** Sean  $X$  un CW-complejo y  $A$  un emparejamiento acíclico sobre  $X$ .

1. Se define el conjunto  $A^{(*)} = A \cup X_{crit}^{(*)}(A)$ , al que se dota de un orden parcial como sigue: dados  $a, b \in A^{(*)}$ , se establece que  $a \leq_A b$  si y solo si existe un camino (orientado) en  $\tilde{G}_X^A$  de  $b$  a  $a$ , donde si  $a = (\tau \rightarrow \sigma) \in A$  esto significa que existe un camino en  $\tilde{G}_X^A$  de  $b$  a  $\sigma$  o  $\tau$  y si  $b = (\tau \rightarrow \sigma) \in A$  significa que existe un camino en  $\tilde{G}_X^A$  de  $\sigma$  o  $\tau$  en  $a$ . Se dice que el par  $(A^{(*)}, \leq_A)$  es el *conjunto parcialmente ordenado asociado al emparejamiento*.
2. Se llama a la función  $gr_A : X^{(*)} \rightarrow A^{(*)}$  tal que

$$gr_A(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma \in X_{crit}^{(*)}(A), \\ \zeta' \rightarrow \zeta & \text{si } \sigma \in \{\zeta', \zeta\} \text{ y } \zeta' \rightarrow \zeta \in A, \end{cases}$$

la *graduación  $A$ -universal* de  $X$ . Se denotan los subcomplejos a los que da lugar esta graduación por  $X_{\leq_A a}$  para  $a \in A^{(*)}$ .

De este modo se obtiene una graduación sobre un CW-complejo en el sentido de la definición 2.31. La comprobación es técnica y por ello no la efectuaremos.

Mediante la siguiente definición y el lema que la sigue precisaremos la relación entre las funciones de Morse discretas y los emparejamientos acíclicos.

**Definición 3.20 (Emparejamiento acíclico asociado a una función de Morse discreta)** Sean  $X$  un CW-complejo,  $G_X = (X^{(*)}, E_X)$  su grafo de células y  $f : X^{(*)} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse discreta sobre  $X$ . Se considera el conjunto de aristas siguiente:

$$A_f = \{\tau \rightarrow \sigma \in E_X : f(\tau) \leq f(\sigma)\},$$

que se denomina el *emparejamiento acíclico sobre  $X$  asociado o correspondiente a  $f$* .

Tenemos que probar que efectivamente el conjunto de aristas así definido es un emparejamiento acíclico, y de paso justificar la notación para el conjunto de células  $A$ -críticas.

**Lema 3.21** Sean  $X$  un CW-complejo y  $f : X^{(*)} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse discreta sobre  $X$ . Entonces  $A_f$  es un emparejamiento acíclico y  $X_{crit}^{(*)}(A_f) = X_{crit}^{(*)}(f)$ .

*Demostración.* El lema 3.8, junto con la propia definición de función de Morse discreta, aseguran que una célula no puede violar simultáneamente las dos condiciones de crecimiento de la función con la dimensión (es decir, con una célula de dimensión mayor y otra de dimensión menor), y de violar alguna será solamente con una célula, y no más. Esto implica que una célula  $\sigma \in X^{(*)}$  puede aparecer como vértice de a lo sumo en una arista de  $A_f$ , y por lo tanto es un emparejamiento. El hecho de que sea acíclico se deduce de que  $f$  decrece en los caminos sobre el grafo inducido  $G_X^{A_f}$  (pues hemos invertido las aristas orientadas de  $G_X$  en las que no decrecía estrictamente), y de hecho decrece estrictamente en todas las aristas que no son  $A_f$ -aristas, y todo ciclo en  $G_X^{A_f}$  debe contener alguna de tales aristas por ser  $A_f$  un emparejamiento, con lo que no puede existir ninguno. El hecho de que  $X_{crit}^{(*)}(A_f) = X_{crit}^{(*)}(f)$  se deduce inmediatamente de las respectivas definiciones de ambos conjuntos y de la construcción de  $A_f$ .  $\square$

Para completar el paralelismo entre funciones de Morse discretas y emparejamientos acíclicos queremos que también a todo emparejamiento acíclico le corresponda una función de Morse discreta, que es lo que establece el lema siguiente.

**Lema 3.22** Sean  $X$  un CW-complejo y  $A$  un emparejamiento acíclico sobre  $X$ . Existe una función de Morse discreta  $f$  sobre  $X$  tal que  $A = A_f$ .

*Demostración.* Sea  $\leq$  cualquier orden total en  $A^{(*)}$  que extienda a  $\leq_A$  y sea  $f^{(*)} : A^{(*)} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que preserve estrictamente el orden  $\leq$ , es decir, tal que si  $a < b \in A^{(*)}$  entonces  $f^{(*)}(a) < f^{(*)}(b)$ . Se define una función  $f : X^{(*)} \rightarrow \mathbb{R}$  de la manera siguiente:

$$f(\sigma) = \begin{cases} f^{(*)}(a) & \text{si } \sigma = a \in X_{crit}^{(*)}(A), \\ f^{(*)}(a) & \text{si } a = (\zeta' \rightarrow \zeta) \in A \text{ y } \sigma \in \{\zeta', \zeta\}. \end{cases}$$

Es mecánico comprobar que  $f$  es una función de Morse discreta sobre  $X$  y que  $A_f = A$ .  $\square$

---

### EJEMPLO 3.23

Los grafos del ejemplo 3.16 se corresponden con el CW-complejo del ejemplo 3.3 para las dos funciones que allí se consideraban sobre él. Como la de la izquierda no era una función de Morse discreta el conjunto de aristas correspondiente ni siquiera es un emparejamiento, mientras que como la de la derecha sí lo era el emparejamiento sobre el grafo de la derecha en el ejemplo 3.16 es acíclico.

Entonces es posible reformular el teorema 3.12 en términos de los emparejamientos acíclicos. Nótese que hemos ganado un poco en generalidad respecto de ese resultado,

ya que las condiciones de regularidad que impuestas no son globales, sobre todo el CW-complejo, sino tan solo locales, es decir, afectan solo a ciertas células (son las de la parte 2 de la definición 3.1 y la definición 3.15), que en realidad son las únicas imprescindibles en las demostraciones que dimos de las proposiciones 3.10 y 3.11 (nótese que son, de hecho, la una la contrapartida de la otra al cambiar de lenguaje).

**Teorema 3.24 (de Morse, en términos de emparejamientos acíclicos)** Sean  $X$  un CW-complejo finito y  $A$  un emparejamiento acíclico sobre  $X$ . Entonces existe un CX-complejo  $X_A$  cuyas  $i$ -células están en correspondencia biyectiva con las  $i$ -células críticas de  $X$  que es homotópicamente equivalente a  $X$ .

Al final de la sección previa hicimos referencia a la extensión de la Teoría de Morse Discreta a pares de CW-complejos y obtener análogos al Teorema de Morse sin más que exigir a la función de Morse discreta que “distinga” convenientemente el subcomplejo. La versión de dicho resultado en términos de emparejamientos acíclicos puede verse en el siguiente lema, que no demostraremos y que es menos general que el lema 7.2 de [BW02] (la hipótesis de regularidad en dicho lema es redundante, pues basta con la regularidad asociada al emparejamiento).

**Lema 3.25** Sean  $X$  un CW-complejo finito,  $Y \subset X$  un subcomplejo de  $X$  y  $A$  un emparejamiento acíclico sobre  $X$ . Supongamos que no hay aristas  $\tau \rightarrow \sigma \in A$  con  $\tau \in X^{(*)} \setminus Y^{(*)}$  y  $\sigma \in Y^{(*)}$ . Entonces  $Y_{A|_Y}$  es un subcomplejo de  $X_A$ , donde  $A|_Y$  es la restricción del emparejamiento  $A$  al subgrafo  $G_Y$  de  $G_X$ , que será un emparejamiento acíclico sobre  $Y$ .

### 3.2.1 Teoría de Morse Discreta para CW-complejos graduados

Utilizando como referencias [BW02] y especialmente [OW07], en esta subsección abordaremos la compatibilidad de la Teoría de Morse Discreta, siempre en términos de emparejamientos acíclicos, con las graduaciones en los CW-complejos incluso en el caso más general de CW-complejos no necesariamente finitos (con el análogo a la condición de que la función de Morse discreta sea propia). En el proceso daremos la construcción explícita del CW-complejo de Morse graduado asociado a un determinado CW-complejo graduado y un emparejamiento acíclico sobre él. No seremos tan rigurosos en las pruebas como en las últimas secciones, e incluso dejaremos algunas sin hacer. El lector interesado puede recurrir a las referencias ya citadas.

**Definición 3.26** Sean  $P$  un conjunto parcialmente ordenado y  $(X, \text{gr})$  un CW-complejo  $P$ -graduado.

1. Se dice que la graduación  $\text{gr} : X^{(*)} \rightarrow P$  es una  $P$ -graduación compacta de  $X$  si  $X_{\leq p}$  es compacto para todo  $p \in P$ .
2. Se dice que un emparejamiento acíclico  $A$  de  $X$  es *propio* si la correspondiente graduación  $A$ -universal  $\text{gr}_A : X^{(*)} \rightarrow A^{(*)}$  es compacta.



Se puede comprobar que un emparejamiento acíclico propio se corresponde con una función de Morse discreta propia, y para estas ya hemos dicho, aunque sin probarlo, que se pueden extender las proposiciones 3.10 y 3.11 al caso de CW-complejos infinitos, por lo que las construcciones y resultados del resto de la sección irán encaminados a encajar en este marco más general.

**Lema 3.27** Sea  $X$  un CW-complejo.

1. Sean  $\sigma, \tau \in X^{(*)}$  tales que  $\sigma$  es una cara regular de  $\tau$  y  $\dim(\tau) = \dim(\sigma) + 1$ . Entonces existe una retracción por deformación

$$h_{\tau \rightarrow \sigma} = \bar{\tau} \longrightarrow \bigcup_{\substack{\sigma' \in X^{(*)} \\ \sigma' < \tau \\ \sigma' \neq \sigma}} \bar{\sigma}'.$$

2. Sea  $A$  un emparejamiento acíclico sobre  $X$ ,  $a \in A^{(*)}$ . Si  $a = (\tau \rightarrow \sigma) \in A$  entonces existe una retracción por deformación  $\tilde{h}_{\tau \rightarrow \sigma} : X_{\leq A a} \longrightarrow X_{< A a}$  dada por

$$\tilde{h}_{\tau \rightarrow \sigma}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \bar{\tau}, \\ h_{\tau \rightarrow \sigma}(x) & \text{si } x \in \bar{\tau}. \end{cases}$$

*Demostración.* Ambas afirmaciones se deducen de las definiciones de cara regular 2.10 y del orden parcial inducido por  $A$  y la graduación  $A$ -universal sobre el CW-complejo.  $\square$

Definamos ahora una aplicación que necesitaremos en la construcción siguiente.

**Definición 3.28** Sean  $X, Y$  e  $Y'$  espacios topológicos,  $Z \subset X$  un subespacio topológico y  $\phi = Y \longrightarrow Y'$  y  $f : Z \longrightarrow Y$  aplicaciones continuas. Se denota mediante

$$\text{id} \cup_f \phi : X \cup_f Y \longrightarrow X \cup_{\phi \circ f} Y'$$

a la única aplicación que hace conmutativo el siguiente diagrama, en el que las flechas verticales denotan las aplicaciones sobreyectivas obvias:

$$\begin{array}{ccc} X \cup Y & \xrightarrow{\text{id} \cup \phi} & X \cup Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \cup_f Y & \xrightarrow{\text{id} \cup_f \phi} & X \cup_{\phi \circ f} Y' \end{array}$$

Estamos ya en condiciones de, dado un CW-complejo y un emparejamiento acíclico sobre él, describir la construcción inductiva, o “por pisos” según el orden del conjunto parcialmente ordenado asociado al emparejamiento (ver definición 3.19), del complejo de Morse que le corresponde. La inducción es válida porque aunque dicho conjunto no es de números naturales, tenemos un análogo al principio de buena ordenación, ya que todo subconjunto tiene elementos minimales (posiblemente varios, pero eso no es un problema).

**Definición 3.29 (Complejo y equivalencia de Morse)** Sean  $X$  un CW-complejo y  $A$  un emparejamiento acíclico propio sobre  $X$ . Para todo  $a \in A^{(*)}$  se definen inductivamente un CW-complejo  $(X_A)_{\leq_A a}$  y una aplicación  $H(A)_{\leq_A a} : X_{\leq_A a} \rightarrow (X_A)_{\leq_A a}$  de la forma siguiente:

- Si  $a \in A^{(*)}$  es  $\leq_A$ -minimal entonces debe ser  $a \in X_{crit}^{(*)}(A)$  (con lo que forma parte del análogo al paso por un valor crítico que recoge la proposición 3.11). Fijamos

$$(X_A)_{\leq_A a} = X_{\leq_A a} = a \text{ y } H(A)_{\leq_A a} = \text{id}_{X_{\leq_A a}}.$$

- Si  $a \in A^{(*)}$  no es  $\leq_A$ -minimal, supongamos (es la hipótesis de inducción) que para todo  $b <_A a$  los CW-complejos  $(X_A)_{\leq_A b}$  y las aplicaciones  $H(A)_{\leq_A b}$  ya han sido construidos de forma que para todos  $b, b' \in A^{(*)}$  con  $b' \leq_A b <_A a$  se tiene que  $(X_A)_{\leq_A b'} \subset (X_A)_{\leq_A b}$ , y el diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} X_{\leq_A b'} & \xrightarrow{H(A)_{\leq_A b'}} & (X_A)_{\leq_A b'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\leq_A b} & \xrightarrow{H(A)_{\leq_A b}} & (X_A)_{\leq_A b} \end{array}$$

Llamamos

$$(X_A)_{<_A a} = \bigcup_{b <_A a} (X_A)_{\leq_A b}$$

y  $H(A)_{<_A a} : X_{<_A a} \rightarrow (X_A)_{<_A a}$  a la aplicación inducida por las aplicaciones

$$H(A)_{\leq_A b} : X_{\leq_A b} \rightarrow (X_A)_{\leq_A b}, \text{ para todo } b <_A a.$$

Distinguimos ahora dos casos:

- Si  $a = (\tau \rightarrow \sigma) \in A$  (es el análogo al paso por valores no críticos de la proposición 3.10) fijamos  $(X_A)_{\leq_A a} = (X_A)_{<_A a}$  y definimos  $H(A)_{\leq_A a} : X_{\leq_A a} \rightarrow (X_A)_{\leq_A a}$  como

$$H(A)_{\leq_A a} = H(A)_{<_A a} \circ \tilde{h}_{\tau \rightarrow \sigma}.$$

- Si  $a = \sigma \in X_{crit}^{(*)}(A)$  estamos de nuevo en el análogo al paso por un valor crítico (proposición 3.11). Si  $\dim(\sigma) = i$ , su aplicación característica es  $f_\sigma : \bar{B}_i \rightarrow X_{\leq_A a}$  y ya sabemos que  $X_{\leq_A a} = \bar{B}_i \cup_{f_\sigma} X_{<_A a}$ . Entonces fijamos

$$(X_A)_{\leq_A a} = \bar{B}_i \cup_{H(A)_{<_A a} \circ f_\sigma} (X_A)_{<_A a}$$

y

$$H(A)_{\leq_A a} = \text{id}_{\bar{B}_i} \cup_{f_\sigma} H(A)_{<_A a}.$$

Se definen el CW-complejo

$$X_A = \bigcup_{a \in A^{(*)}} (X_A)_{\leq_A a}$$

y

$$H(A) : X \longrightarrow X_A$$

como la aplicación inducida por las aplicaciones  $H(A)_{\leq_A a} : X_{\leq_A a} \longrightarrow (X_A)_{\leq_A a}$ .

Se llama a  $X_A$  el *complejo de Morse* de  $X$  respecto de  $A$  y a  $H(A)$  la *equivalencia de Morse* correspondiente.

El siguiente teorema extiende y precisa el teorema 3.12 y su reescritura en términos de emparejamientos acíclicos, el teorema 3.24. Nótese que hemos prescindido de las hipótesis de finitud y regularidad del CW-complejo (aunque como ya hemos advertido las hipótesis de regularidad local están implícitas en la definición de emparejamiento acíclico).

**Teorema 3.30** Sean  $X$  un CW-complejo,  $A$  un emparejamiento acíclico propio sobre  $X$ ,  $X_A$  el correspondiente complejo de Morse y  $H(A) : X \longrightarrow X_A$  la equivalencia de Morse. Entonces:

1. Para todo  $i \in \mathbb{N}$  las  $i$ -células de  $X_A$  están en correspondencia biyectiva con las  $i$ -células  $A$ -críticas de  $X$ .
2. La equivalencia de Morse  $H(A) : X \longrightarrow X_A$  es una equivalencia homotópica.

Además existe una  $A^{(*)}$ -graduación canónica  $\text{gr}_A : X_A^{(*)} \longrightarrow A^{(*)}$  de  $X_A$  dada por la composición

$$X_A^{(*)} \xrightarrow{\cong} X_{crit}^{(*)}(A) \hookrightarrow X^{(*)} \xrightarrow{\text{gr}_A} A^{(*)}.$$

Para todo  $a \in A^{(*)}$  el subcomplejo  $(X_A)_{\leq_A a}$  respecto de esta graduación es el subcomplejo  $(X_A)_{\leq_A a} = (X_A)_{\leq_A a}$  de la definición 3.29 (en adelante adoptaremos esta última notación, haciendo referencia expresa a  $A$ ).

Y aún más, la equivalencia de Morse  $H(A) : X \longrightarrow X_A$  respeta esta  $A^{(*)}$ -graduación, es decir:

3. Para todo  $a \in A^{(*)}$  y todo  $i \in \mathbb{N}$  las  $i$ -células de  $(X_A)_{\leq_A a}$  están en correspondencia biyectiva con las  $i$ -células  $A$ -críticas de  $X_{\leq_A a}$ .
4. Para todo  $a \in A^{(*)}$  la restricción  $H(A)_{\leq_A a} = H(A)|_{X_{\leq_A a}}$  es una equivalencia homotópica  $H(A)_{\leq_A a} : X_{\leq_A a} \longrightarrow (X_A)_{\leq_A a}$ .

*Demostración parcial.* El hecho de que la graduación  $A$ -universal  $\text{gr}_A : X^{(*)} \longrightarrow A^{(*)}$  induce una  $A^{(*)}$ -graduación canónica  $\text{gr}_A : X_A^{(*)} \longrightarrow A^{(*)}$  de  $X_A$  se deduce de la definición inductiva sobre el conjunto parcialmente ordenado  $A^{(*)}$  del complejo de Morse (definición 3.29), pues cada nueva célula  $\sigma_A \in X_A^{(*)}$  correspondiente a una célula crítica  $\sigma \in X_{crit}^{(*)}(A)$  con

$\text{gr}_A(\sigma) = a$  es “pegada” al complejo  $(X_A)_{<_A a}$  de forma que para todas las caras  $\nu_A \in X_A^{(*)}$  de  $\sigma_A$  correspondientes a células críticas  $\nu \in X_{crit}^{(*)}(A)$  se tiene que  $\text{gr}_A(\nu) <_A \text{gr}_A(\sigma)$ .

Los puntos 1 y 3 del enunciado son también consecuencias inmediatas de la construcción inductiva del complejo de Morse, pues para cada elemento  $a \in A^{(*)}$  que es una célula crítica “pegamos” una célula de la misma dimensión, mientras que si  $a$  es una arista del emparejamiento no añadimos ninguna célula.

No efectuaremos las pruebas de los apartados 2 y 4 por necesitar resultados más específicos de teoría de homotopía. El lector interesado puede encontrar esbozadas estas partes en [OW07, Teorema 4.2.14].  $\square$

Hemos dotado tanto al CW-complejo original como al de Morse construido en la definición 3.29 de nuevas graduaciones. Ahora lo que nos interesa es ver la compatibilidad de los resultados con la graduación original que tuviera el CW-complejo (en particular la  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduación de que dotamos a los CW-complejos soporte de resoluciones en el capítulo anterior).

**Definición 3.31** Sean  $X$  un CW-complejo,  $A$  un emparejamiento acíclico sobre  $X$ ,  $P$  un conjunto parcialmente ordenado y  $\text{gr} : X^{(*)} \rightarrow P$  una  $P$ -graduación de  $X$ . Se dice que  $A$  es *homogéneo* con respecto a la  $P$ -graduación si para todo  $\tau \rightarrow \sigma \in A$  se tiene que  $\text{gr}(\tau) = \text{gr}(\sigma)$ .

La siguiente proposición, que no demostraremos (aunque no es difícil hacerlo sin más que utilizar las definiciones) explica por qué llamamos a  $\text{gr}_A : X^{(*)} \rightarrow A^{(*)}$  la graduación  $A$ -universal de  $X$ .

**Proposición 3.32** Sean  $X$  un CW-complejo,  $A$  un emparejamiento acíclico sobre  $X$ ,  $P$  un conjunto parcialmente ordenado y  $\text{gr} : X^{(*)} \rightarrow P$  una  $P$ -graduación de  $X$ . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.  $A$  es homogéneo respecto de la  $P$ -graduación.
2. La graduación  $A$ -universal de  $X$ ,  $\text{gr}_A : X^{(*)} \rightarrow A^{(*)}$ , es compatible con la  $P$ -graduación  $\text{gr} : X^{(*)} \rightarrow P$ , es decir, existe una aplicación  $g : A^{(*)} \rightarrow P$  entre conjuntos parcialmente ordenados que conserva el orden tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 & & A^{(*)} \\
 & \nearrow \text{gr}_A & \downarrow g \\
 X^{(*)} & \xrightarrow{\text{gr}} & P
 \end{array}$$

Y el siguiente lema asegura que podemos evitar la hipótesis de finitud sobre el CW-complejo si su graduación es compacta eligiendo un emparejamiento acíclico adecuado.

**Lema 3.33** Sean  $X$  un CW-complejo,  $P$  un conjunto parcialmente ordenado,  $\text{gr} : X^{(*)} \rightarrow P$  una  $P$ -graduación compacta de  $X$  y  $A$  un emparejamiento acíclico sobre  $X$  homogéneo respecto de la  $P$ -graduación. Entonces  $A$  es propio.

*Demostración.* A la vista del diagrama anterior se deduce que si  $\text{gr} : X^{(*)} \rightarrow P$  es una graduación compacta también lo es la graduación  $A$ -universal de  $X$ ,  $\text{gr}_A : X^{(*)} \rightarrow A^{(*)}$ , con lo que  $A$  será propio por definición.  $\square$

El siguiente teorema aúna los resultados anteriores para garantizar que la Teoría de Morse Discreta y en particular el complejo de Morse que hemos construido es compatible con las graduaciones sobre CW-complejos y por lo tanto aplicable a los que son soporte de resoluciones celulares (o más generalmente de complejos de módulos celulares).

**Teorema 3.34** Sean  $X$  un CW-complejo,  $P$  un conjunto parcialmente ordenado, una  $P$ -graduación compacta de  $X$   $\text{gr} : X^{(*)} \rightarrow P$  y un emparejamiento acíclico  $A$  sobre  $X$  homogéneo respecto de la  $P$ -graduación. Entonces la  $P$ -graduación  $\text{gr} : X^{(*)} \rightarrow P$  induce una  $P$ -graduación compacta del complejo de Morse  $X_A$ ,  $\text{gr} : X_A^{(*)} \rightarrow P$  y la equivalencia de Morse  $H(A) : X \rightarrow X_A$  respeta estas dos  $P$ -graduaciones, es decir:

1. Para todo  $p \in P$  y todo  $i \in \mathbb{N}$  las  $i$ -células de  $(X_A)_{\leq p}$  están en correspondencia biyectiva con las  $i$ -células  $A$ -críticas de  $X_{\leq p}$ .
2. Para todo  $p \in P$  la restricción  $H(A)_{\leq p} = H(A)|_{X_{\leq p}}$  es una equivalencia homotópica  $H(A)_{\leq p} : X_{\leq p} \rightarrow (X_A)_{\leq p}$ .

*Demostración parcial.* Considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & A^{(*)} \\
 & & & \nearrow \text{gr}_A & \downarrow g \\
 X_A^{(*)} & \xrightarrow{\cong} & X_{crit}^{(*)}(A) & \hookrightarrow & X^{(*)} & \xrightarrow{\text{gr}} & P
 \end{array}$$

La composición de las aplicaciones de la fila inferior es la  $P$ -graduación inducida sobre el complejo de Morse,  $\text{gr} : X_A^{(*)} \rightarrow P$ , que conserva el orden pues factoriza en  $\text{gr} = g \circ \text{gr}_A$ , donde  $\text{gr}_A : X_A^{(*)} \rightarrow A^{(*)}$  es la  $A^{(*)}$ -graduación canónica de  $X_A$  (nótese que estamos denotando igual a graduaciones distintas, ya que estas últimas a las que nos hemos referido no son las mismas que aparecen en el diagrama).

Para probar 1 solo hay que tener en cuenta que

$$X_{\leq p} = \bigcup_{\substack{a \in A^{(*)} \\ g(a) \leq p}} X_{\leq_A a},$$

mientras que

$$(X_A)_{\leq p} = \bigcup_{\substack{a \in A^{(*)} \\ g(a) \leq p}} (X_A)_{\leq_A a} .$$

Para probar 2 se necesitan las mismas técnicas que en la demostración de los apartados 2 y 4 del teorema 3.30, por lo que de nuevo remitimos al lector interesado a [OW07, Corolario 4.2.18].  $\square$

### 3.3 MINIMALIZACIÓN DE RESOLUCIONES CELULARES

Si las dos secciones anteriores son centrales en la memoria puesto que en ellas presentamos la Teoría de Morse Discreta y vimos cómo se podía aplicar a los CW-complejos graduados que manejamos en el capítulo anterior, esta, pese a su brevedad, no es en absoluto menos importante, pues justifica el objetivo de todo el trabajo, resumido en el título. Y es que tenemos que asegurarnos de que si partimos de una resolución celular y aplicamos al CW-complejo graduado que la soporta esta técnica, el complejo de Morse resultante (que también es graduado) soporta una nueva resolución, evidentemente más cerca de la minimal que la de partida pues tiene menos células, y no simplemente un complejo de módulos celular. Es decir, que no se pierde la exactitud del complejo, o bien, en la versión topológica, que los sub CW-complejos “de nivel” del complejo de Morse son todos acíclicos, como lo eran los del CW-complejo original. Las referencias para esta primera parte de la sección son [BW02, Sección 2] y [OW07, Sección 4.3].

En primer lugar necesitaremos el siguiente lema que relaciona la homología de los sub CW-complejos de un cierto nivel con la de la banda del mismo grado del complejo de módulos celular correspondiente.

**Lema 3.35** Sean  $\Lambda$  un semigrupo afín,  $X$  un CW-complejo  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado y  $\mathcal{C}_X^{\text{gr}}$  el complejo de módulos celular (en el anillo  $k[x_1, \dots, x_n]$ ) cuyo soporte es  $X$ . Entonces para todo  $i \in \mathbb{N}$  y todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  se tiene que, como  $k$ -espacios vectoriales,  $H_i \left( (\mathcal{C}_X^{\text{gr}})_{\alpha} \right) \cong H_i (X_{\leq \alpha}; k)$ .

*Demostración.* El resultado se deduce del hecho de que, fijado  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , una  $i$ -célula  $\sigma \in X^{(i)}$  da lugar a un elemento  $\underline{x}^{\alpha - \text{gr}(\sigma)}$  homogéneo de grado  $\alpha$  en grado homológico  $i$  si y solo si  $\text{gr}(\sigma) \leq \alpha$ .  $\square$

Este lema permite relacionar las homologías del complejo de módulos soportado por un CW-complejo graduado y el soportado por el correspondiente complejo de Morse para un emparejamiento acíclico que conserve las graduaciones (es decir, homogéneo) sobre dicho CW-complejo.

**Proposición 3.36** Sean  $\Lambda$  un semigrupo afín,  $X$  un CW-complejo  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado,  $A$  un emparejamiento acíclico homogéneo sobre  $X$  y  $\mathcal{C}_X^{\text{gr}}$  el complejo de módulos celular (en el

anillo  $k[x_1, \dots, x_n]$  cuyo soporte es  $X$ . Entonces  $(X_A, \text{gr})$  (la graduación es la del enunciado del teorema 3.34) es soporte de un complejo de módulos multigrado  $\mathcal{C}_{X_A}^{\text{gr}}$  que cumple que  $H_i(\mathcal{C}_{X_A}^{\text{gr}}) \cong H_i(\mathcal{C}_X^{\text{gr}})$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Por lema anterior  $H_i\left(\left(\mathcal{C}_{X_A}^{\text{gr}}\right)_\alpha\right) \cong H_i((X_A)_{\leq \alpha}; k)$  y  $H_i\left(\left(\mathcal{C}_X^{\text{gr}}\right)_\alpha\right) \cong H_i(X_{\leq \alpha}; k)$ . Ahora bien, el teorema 3.34 implica que  $H_i(X_{\leq \alpha}; k) \cong H_i((X_A)_{\leq \alpha}; k)$ , pues la equivalencia homotópica implica igualdad en la homología.  $\square$

Y finalmente el resultado anunciado, que se corresponde con el teorema 1.3 de [BW02] y con el teorema 4.3.1 de [OW07].

**Teorema 3.37** Sean  $R = k[\Lambda]$  un anillo de semigrupo afín, subanillo de  $S = k[x_1, \dots, x_n]$  y  $M$  un  $R$ -módulo multigrado. Supóngase que  $(X, \text{gr})$  es un CW-complejo compactamente  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado que soporta una resolución celular  $\mathcal{F}_X^{\text{gr}}$  de  $M$ . Entonces para cualquier emparejamiento acíclico homogéneo  $A$  de  $X$  el correspondiente complejo de Morse  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado  $(X, \text{gr})$  (la graduación es la inducida, descrita en el teorema 3.34) soporta una resolución celular  $\mathcal{F}_{X_A}^{\text{gr}}$  de  $M$ .

*Demostración.* Como  $\mathcal{F}_X^{\text{gr}}$  es una resolución de  $M$  se tiene que  $H_i(\mathcal{F}_X^{\text{gr}}) = 0$  para todo  $i \geq 1$  y  $H_0(\mathcal{F}_X^{\text{gr}}) = M$ . Por la proposición anterior  $X_A$  soporta un complejo de módulos celular  $\mathcal{C}_{X_A}^{\text{gr}}$  con  $H_i(\mathcal{C}_{X_A}^{\text{gr}}) = H_i(\mathcal{F}_X^{\text{gr}}) = 0$  para todo  $i \geq 1$  y  $H_0(\mathcal{C}_{X_A}^{\text{gr}}) = H_0(\mathcal{F}_X^{\text{gr}}) = M$ , y por lo tanto es la resolución celular buscada.  $\square$

Evidentemente este teorema será cierto en particular para ideales monomiales.

Como una primera aplicación de la Teoría de Morse Discreta que acababan de demostrar, a través de este teorema, que era válida para minimizar resoluciones celulares, Batzies y Welker, en [BW02, Sección 3] obtienen la resolución de Lyubeznik a partir de la de Taylor, encontrando un emparejamiento acíclico homogéneo adecuado sobre el CW-complejo de Taylor. El algoritmo del capítulo 4 puede adaptarse para encontrar también un emparejamiento acíclico y homogéneo sobre el CW-complejo de Taylor de forma que el complejo de Morse obtenido es el CW-complejo de Lyubeznik. Dicho capítulo puede entenderse, en su conjunto, como un ejemplo de la teoría expuesta en este, lo que explica la ausencia de ellos aquí.

### 3.3.1 Las diferenciales de Morse

En esta subsección daremos, sin demostración, una expresión de las diferenciales del complejo de cadenas celular asociado al complejo de Morse correspondiente a un emparejamiento acíclico sobre un CW-complejo, pues resultan necesarias para calcular las diferenciales del complejo de módulos al que este sirva como soporte (tras graduarlo). En [For98, Secciones 7 y 8] Forman presentó un complejo de módulos libres tal que el módulo en un cierto grado homológico tiene una base en correspondencia biyectiva con las

células críticas del CW-complejo de ese mismo índice (para una cierta función de Morse discreta, pues él trabajaba en esos términos) y su homología coincide con la homología del CW-complejo subyacente. En el teorema 8.10, da una fórmula para las diferenciales de dicho complejo de módulos. En [OW07, Sección 4.4] se prueba que dicho complejo de módulos coincide con el complejo de cadenas celular del complejo de Morse correspondiente al emparejamiento acíclico asociado a la función de Morse discreta, con lo que la fórmula proporciona las diferenciales de este complejo de cadenas celular, que son las que se utilizan para obtener las de la resolución minimalizada (ver definición 2.33). Aquí nos limitaremos a presentar la fórmula, para los resultados que la respaldan remitimos al lector a las referencias que acabamos de indicar.

**Definición 3.38** Sean  $X$  un CW-complejo,  $A$  un emparejamiento acíclico propio sobre él y  $X_A$  el complejo de Morse correspondiente. Considérese el complejo de cadenas celular asociado a  $X_A$  (ver definición 2.24)

$$\mathcal{C}(X_A) \equiv \dots \xrightarrow{\partial_{n+1}^A} \mathcal{C}_n(X_A) \xrightarrow{\partial_n^A} \mathcal{C}_{n-1}(X_A) \xrightarrow{\partial_{n-1}^A} \dots \xrightarrow{\partial_1^A} \mathcal{C}_0(X_A) \xrightarrow{0} 0,$$

se denota por  $[\ : ]_A$  a los coeficientes de las diferenciales, es decir (sin especificar el grado homológico)

$$\partial^A(\tau) = \sum_{\substack{\sigma \in X_A^{(*)} \\ \dim(\tau) = \dim(\sigma) + 1}} [\sigma : \tau]_A \sigma.$$

1. Dadas  $\sigma \in X^{(*)}$ ,  $\sigma' \in X_{crit}^{(*)}(A)$ , se define

$$\Gamma_A(\sigma, \sigma') = \{\gamma : \gamma \text{ es un camino en } G_X^A \text{ de } \sigma \text{ a } \sigma'\}.$$

2. Dadas  $\sigma \in X^{(*)}$ ,  $\sigma' \in X_{crit}^{(*)}(A)$  con  $\dim(\sigma) = \dim(\sigma')$  y  $\gamma \in \Gamma_A(\sigma, \sigma')$  el camino

$$\sigma = \sigma_0 \Rightarrow \tau_1 \rightarrow \sigma_1 \Rightarrow \dots \rightarrow \sigma_{k-1} \Rightarrow \tau_k \rightarrow \sigma_k = \sigma'$$

(nótese que  $\dim(\sigma_j) = \dim(\sigma)$ ,  $\dim(\tau_j) = \dim(\sigma) + 1$  y  $\tau_j \rightarrow \sigma_{j-1} \in A$  para  $j = 1, \dots, k$ ), se fija

$$m(\gamma) := (-1)^k \prod_{i=1}^k [\sigma_{i-1} : \tau_i] \cdot [\sigma_i : \tau_i],$$

donde  $[\sigma : \tau]$  es el número de incidencia de  $\sigma$  y  $\tau$  (ver definición 2.24).

Entonces los coeficientes de las diferenciales del complejo de cadenas celular asociado al complejo de Morse vienen dados por el siguiente teorema.

**Teorema 3.39** Sean  $X$  un CW-complejo,  $A$  un emparejamiento acíclico propio sobre él y  $X_A$  el complejo de Morse correspondiente. Sean  $\sigma, \tau \in X_{crit}^{(*)}(A)$  y  $\sigma_A, \tau_A \in X_A^{(*)}$  las células correspondientes del complejo de Morse. Entonces

$$[\sigma_A : \tau_A]_A = \sum_{\substack{\zeta \in X^{(*)} \\ \dim(\tau) = \dim(\zeta) + 1}} [\zeta : \tau] \sum_{\gamma \in \Gamma_A(\zeta, \sigma)} m(\gamma).$$



## 3.4 TEORÍA DE MORSE DISCRETA ALGEBRAICA

A lo largo de este capítulo hemos ido exponiendo la Teoría de Morse Discreta en un ámbito cada vez más general con el objetivo de aplicarla a las resoluciones celulares, aunque no hemos logrado hacerla extensiva a cualquier tipo de resolución celular (por ejemplo, no hemos conseguido prescindir totalmente de la condición de regularidad de algunas caras del CW-complejo soporte respecto de otras). En esta sección vamos a presentar una versión puramente algebraica de estas técnicas, llamada Teoría de Morse Discreta Algebraica por Jöllenbeck y Welker, que prescinde por completo de la parte topológica y trabaja directamente sobre los elementos de las bases de los módulos libres de las resoluciones, con lo que consiguen no solo evitar la exigencia de regularidad a la que acabamos de referirnos, sino hacer extensiva la técnica a resoluciones libres multigraduadas cualesquiera, sin la exigencia de que sean celulares y por lo tanto a resoluciones libres de módulos sin una estructura combinatoria tan marcada como los ideales monomiales que hemos considerado en gran parte de la memoria, con lo que el rango de aplicabilidad es similar al del método de las cancelaciones consecutivas, pese a que no lo es su eficacia para ejemplos concretos.

En esta sección pretendemos tan solo exponer los puntos básicos de esta teoría y poner de relieve el paralelismo con la Teoría de Morse Discreta para resoluciones celulares en términos de emparejamientos acíclicos que hemos desarrollado en las secciones precedentes, en ningún caso hacer las demostraciones. La Teoría de Morse Discreta Algebraica en los términos que vamos a presentarla fue desarrollada principalmente en [JW09], todos los contenidos de la sección pueden encontrarse en el capítulo 2 de dicha referencia, y la prueba del teorema principal está en su Apéndice B. Cabe destacar que, paralelamente a Jöllenbeck y Welker y de forma independiente, Emil Sköldberg desarrolló una teoría prácticamente idéntica en [Skö05], que desde entonces ha conseguido extender hasta hacerla más general que la que vamos a presentar.

Sean  $R$ , como en el capítulo 1, un cociente de  $S$  por un cierto ideal graduado y  $(\mathcal{C}, d)$  un complejo de  $R$ -módulos por la izquierda

$$\mathcal{C} \equiv \cdots \longrightarrow \mathcal{C}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{C}_i \xrightarrow{d_i} \mathcal{C}_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{C}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0 \longrightarrow 0.$$

Se elige una base  $X^{(i)}$  de cada módulo libre, de forma que  $\mathcal{C}_i \cong \bigoplus_{c \in X^{(i)}} Rc$ , y se define  $X^{(*)} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X^{(i)}$ . Este conjunto, al que nos referiremos en un abuso del lenguaje como la base del complejo de módulos, es, claramente, el análogo al conjunto de células del CW-complejo soporte de la resolución en el caso celular, mientras que los  $X^{(i)}$  son los análogos a los conjuntos de células de una cierta dimensión de  $X^{(*)}$  (la notación, aunque excesiva, trata de imitar el caso celular). Para completar el paralelismo, escribimos las diferenciales  $d_i : \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{C}_{i-1}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  en términos de la base como

$$d_i(c) = \sum_{c' \in X^{(i-1)}} [c' : c] c',$$

y llamamos a  $[c' : c]$  el número de incidencia de  $c'$  y  $c$ .

Dado el complejo de módulos  $\mathcal{C}$  y la base  $X^{(*)}$  se puede construir un grafo orientado y pesado  $G_{X^{(*)}}(\mathcal{C}) = (X^{(*)}, E_{X^{(*)}})$ , cuyo conjunto de vértices es precisamente la base del complejo y las aristas pesadas (con pesos los números de incidencia correspondientes) vienen dadas por la regla

$$(c, c', [c' : c]) \in E_{X^{(*)}} \iff \text{para algún } i \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } c \in X^{(i)}, c' \in X^{(i-1)} \text{ y } [c' : c] \neq 0.$$

En ocasiones obviamos el peso de una arista y escribimos simplemente  $c \rightarrow c' \in E_{X^{(*)}}$  para referirnos a que  $(c, c', [c' : c]) \in E_{X^{(*)}}$ .

Definamos ahora los análogos a los emparejamientos acíclicos, que denominaremos de igual forma.

**Definición 3.40** Un subconjunto finito de aristas  $A \subset E_{X^{(*)}}$  se dice que es un *emparejamiento acíclico* (sobre el complejo  $\mathcal{C}$  o simplemente sobre su base  $X^{(*)}$ ) si satisface las tres condiciones siguientes:

1. Cada vértice  $c \in X^{(*)}$  aparece a lo sumo en una arista  $a \in A$  (ya sea como salida o como llegada).
2. Para toda arista  $(c, c', [c' : c]) \in A$ , el peso  $[c' : c] \in R$  es una unidad en  $R$ .
3. El grafo  $G_{X^{(*)}}^A(\mathcal{C}) = (X^{(*)}, E_{X^{(*)}}^A)$ , donde

$$E_{X^{(*)}}^A = (E_{X^{(*)}} \setminus A) \cup \left\{ \left( c', c, \frac{-1}{[c' : c]} \right) : (c, c', [c' : c]) \in A \right\}$$

no tiene ciclos (orientados).

Estas condiciones son totalmente análogas a las que debía cumplir un emparejamiento acíclico sobre un CW-complejo. La primera es la que nos asegura que es efectivamente un emparejamiento, mientras que la tercera impone que sea acíclico. La única novedosa es la segunda, pero no es más que una condición para poder cambiar el sentido de las aristas, pues el peso debe ser invertido y cambiado de signo para que la teoría funcione bien. De hecho en [JW09] no exigen que el anillo sea conmutativo, por lo que deben introducir la hipótesis adicional de que los pesos de las aristas del emparejamiento estén en el centro del anillo.

El paralelismo con el caso celular se extiende también a las siguientes definiciones.

**Definición 3.41** Utilizando las notaciones anteriores, donde  $A$  es un emparejamiento acíclico sobre la base  $X^{(*)}$  de un complejo de  $R$ -módulos libres  $\mathcal{C}$ ,

1. Se dice que  $c \in X^{(*)}$  es crítico respecto de  $A$  si no aparece en ninguna arista  $a \in A$  (ya sea como salida o como llegada) y se denota por

$$X_{crit}^{(i)}(A) := \left\{ c \in X^{(i)} : c \text{ es crítico respecto de } A \right\}$$

al conjunto de elementos de la base de grado homológico  $i$  críticos y

$$X_{crit}^{(*)}(A) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_{crit}^{(i)}(A).$$

2. Se escribe simplemente  $c' < c$  si  $c \in X^{(i)}$ ,  $c' \in X^{(i-1)}$  para un cierto  $i \geq 1$  y  $[c' : c] \neq 0$ .
3. Dados  $c, c' \in X^{(*)}$  se denota el conjunto de los caminos en  $G_{X^{(*)}}^A(\mathcal{C})$  de  $c$  a  $c'$  por

$$\Gamma_A(c, c') := \{ \gamma : \gamma \text{ es un camino en } G_{X^{(*)}}^A(\mathcal{C}) \text{ de } c \text{ a } c' \}.$$

4. El peso  $m(\gamma)$  de un camino  $\gamma = (c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_k) \in \Gamma_A(c_1, c_k)$  está dado por

$$m(\gamma) := \prod_{i=1}^{k-1} m(c_i \rightarrow c_{i+1}),$$

donde

$$m(c \rightarrow c') = \begin{cases} \frac{-1}{[c' : c]} & \text{si } c < c', \\ [c' : c] & \text{si } c' < c. \end{cases}$$

5. Se denota por  $M_A(c, c') := \sum_{\gamma \in \Gamma_A(c, c')} m(\gamma)$  a la suma de los pesos de todos los caminos de  $c$  a  $c'$ .

Ahora podemos definir un complejo de módulos libres que será el análogo al complejo de módulos celular soportado por el complejo de Morse asociado a un CW-complejo graduado y un emparejamiento acíclico sobre él.

**Definición 3.42** Siguiendo la notación anterior, se define el complejo de  $R$ -módulos libres  $(\mathcal{C}^A, d^A)$ , que recibe el nombre de *complejo de Morse* de  $\mathcal{C}$  respecto de  $A$ , cuyos módulos vienen dados, para  $i \in \mathbb{N}$ , por

$$\mathcal{C}_i^A = \bigoplus_{c \in X_{crit}^{(i)}(A)} Rc,$$

y las diferenciales  $d_i^A : \mathcal{C}_i^A \rightarrow \mathcal{C}_{i-1}^A$  para  $i \geq 1$  por

$$d_i^A(c) = \sum_{c' \in X_{crit}^{(i-1)}(A)} M_A(c, c') c'.$$

Nótese que en esta definición se llama complejo de Morse a un complejo de módulos libres, mientras que en la definición 3.29 del caso celular se llama así a un CW-complejo celular. El análogo al teorema de Morse es el siguiente.

**Teorema 3.43** Con la notación precedente,  $\mathcal{C}^A$  es un complejo de módulos libres que cumple que  $H_i(\mathcal{C}^A) = H_i(\mathcal{C})$ .

Este teorema, enunciado con más generalidad en [JW09, Teorema 2.2] y demostrado en el Apéndice B de dicha referencia, se puede aplicar a resoluciones sobre un determinado  $R$ -módulo para obtener otras más próximas a la minimal. El resto del capítulo 2 de [JW09] lo dedican a imponer condiciones bajo las cuales este teorema puede extenderse al caso de emparejamientos acíclicos infinitos, con lo que consiguen salvar esa pequeña limitación de la teoría que hemos expuesto.

Cabe destacar que, aún restringiéndonos al caso de resoluciones celulares, en el que la Teoría de Morse Discreta Algebraica parece ser una simple reescritura de la que hemos dado en las secciones precedentes, la supresión de las hipótesis de regularidad que no pudimos esquivar en aquel caso (las de la definición de emparejamiento acíclico 3.15) permite iterar el procedimiento, es decir, partiendo de un CW-complejo y un emparejamiento acíclico sobre él se obtiene el complejo de Morse correspondiente y ahora se puede buscar sobre él un nuevo emparejamiento acíclico adecuado para obtener el complejo de Morse asociado y así sucesivamente. Esto no podía hacerse con la teoría celular, pues nada garantiza que el complejo de Morse correspondiente a un CW-complejo y un emparejamiento sobre él sea regular o al menos que satisfaga las hipótesis de regularidad mínimas para repetir el procedimiento. Por ello la Teoría de Morse Discreta Algebraica será útil en el algoritmo que daremos en el capítulo 4. Este importante avance supone que, como ya habíamos anunciado, la Teoría de Morse Discreta Algebraica tiene el mismo rango de aplicación que el método de las cancelaciones consecutivas. Más detalles sobre la relación entre ambos métodos y la inspiración de la Teoría de Morse Discreta Algebraica pueden encontrarse en [JW09, Capítulo 1].

## EL MÉTODO DE LA PODA

Tras definir los objetos de estudio, tanto algebraicos como topológicos, en los capítulos 1 y 2, en el capítulo 3 estudiamos la Teoría de Morse Discreta como método de minimización de resoluciones celulares (e incluso no celulares), que era el objetivo central de esta memoria y el que resume su título. No obstante, esta memoria quedaría incompleta si termináramos en este punto, habiendo expuesto, probablemente en más páginas de las recomendables, una teoría puramente abstracta, con las limitaciones que hemos ido indicando al exponerla y sin un solo ejemplo práctico, al margen del que hemos indicado que se puede encontrar en [BW02, Sección 3] en el cual a partir de una resolución ya conocida, la de Taylor, obtienen otra también conocida, la de Lyubeznik, lo que no supone una gran ganancia teniendo en cuenta que ya hay un método algorítmico algebraico que produce el mismo resultado.

Sirva entonces este capítulo postrero como colofón y motivación, lo primero porque se presenta un método de minimalización de la resolución de Taylor por medio de la Teoría de Morse Discreta, lo segundo porque encarna el objetivo del trabajo.

El método que se expone, tan reciente que aún no ha sido publicado (un *preprint* es [AFG17]) ha sido bautizado por sus creadores, Josep Àlvarez Montaner, Óscar Fernández-Ramos y Philippe Gimenez, tutor de este Trabajo de Fin de Máster, como poda (traducción literal de inglés *pruning*) de resoluciones, por ello nos referimos a él como método de la poda. Este no consiste más que en, partiendo del complejo simplicial de Taylor de un ideal monomial, dar un algoritmo que construya un emparejamiento acíclico homogéneo adecuado y la teoría del capítulo precedente asegura que el complejo de Morse correspondiente soporta una resolución más próxima a la minimal que la de Taylor. Por lo que ya sabemos, dicho complejo de Morse está formado por (células homeomorfas a) las células críticas del complejo original para el emparejamiento, con lo que el resultado es similar a eliminar las no críticas del complejo de Taylor, es decir, “podarlo” para quedarnos con la parte esencial, de ahí el nombre de la técnica.

El capítulo está estructurado en tres secciones: en la primera se presenta el algoritmo de poda estándar, que proporciona el emparejamiento acíclico más grande (es decir, que abarca mayor número de aristas) que se ha podido conseguir con esta idea; en la segunda se plantean dos variantes del algoritmo que proporcionan subemparejamientos acíclicos adecuados para que el complejo de Morse correspondiente sea simplicial o, más concretamente, el de Lyubeznik, y para terminar el capítulo y la memoria en la sección 4.3 se aplican los algoritmos anteriores a un ejemplo concreto para el que se obtienen resultados particularmente buenos.

La referencia para todo el capítulo es, como ya hemos indicado, el *preprint* [AFG17, Secciones 3 y 4].

---

## 4.1 EL ALGORITMO DE PODA GENERAL

---

El algoritmo que se presenta a continuación, que permite obtener un emparejamiento acíclico sobre el CW-complejo de Taylor asociado a un ideal monomial de forma que el complejo de Morse correspondiente soporte una resolución más próxima a la minimal que la de Taylor, está inspirado en el procedimiento mediante el cual en [BW02] obtuvieron el complejo de Lyubeznik partiendo del de Taylor por medio de la Teoría de Morse Discreta que acababan de introducir en ese mismo artículo. Sin embargo, y como ya hemos adelantado, el emparejamiento que proporciona este algoritmo es mejor, en el sentido de que la resolución final es, en general, más próxima a la minimal que la de Lyubeznik. Conviene advertir de que el lenguaje que aquí emplearemos en la descripción del algoritmo es un poco distinto, aunque totalmente equivalente, al utilizado en [AFG17] puesto que allí prefirieron formalizar el concepto de “poda de una arista”, mientras que aquí, más en línea con la terminología del capítulo precedente, diremos que la incluimos en el emparejamiento y exigimos que ninguna otra que contenga alguno de sus vértices pueda formar parte de este (para que sea verdaderamente un emparejamiento).

Siguiendo la notación de los capítulos precedentes, sea  $S = k[x_1, \dots, x_n]$  y consideremos un ideal monomial  $I = \langle \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_r \rangle \subset S$ . La definición 2.42 nos proporciona la construcción del complejo simplicial de Taylor graduado  $(\Delta_{\mathcal{T}_I}, \text{gr})$ , y este da lugar a la resolución de Taylor  $\mathcal{T}_I$ , que está, en general, lejos de ser minimal.

Con la numeración de los monomios generadores del ideal hemos establecido un orden sobre dicho conjunto de generadores. Ahora necesitaremos establecer un orden total sobre  $\Delta_{\mathcal{T}_I}^{(*)}$  que extienda al orden parcial (recordemos que la contención de caras lo dota de una estructura de conjunto parcialmente ordenado, ver definición 2.5) y que sea compatible con la dimensión de las caras (esto es, una cara  $d$ -dimensional será siempre menor, según este orden, que una cara  $d + 1$ -dimensional) y a igualdad de dimensión, compatible con el orden anterior sobre el conjunto de generadores (es decir, si tenemos dos caras  $d$ -dimensionales distintas  $\sigma = \{\mathbf{m}_{\sigma_1}, \dots, \mathbf{m}_{\sigma_d}\}$  y  $\sigma' = \{\mathbf{m}_{\sigma'_1}, \dots, \mathbf{m}_{\sigma'_d}\}$ , tales que  $i \in \{1, \dots, d\}$  es el menor natural para el que  $\mathbf{m}_{\sigma_i} \neq \mathbf{m}_{\sigma'_i}$ , entonces si  $\sigma_i < \sigma'_i$  como naturales deberá ser la

cara  $\sigma$  menor que la cara  $\sigma'$  según nuestro nuevo orden). En lo que sigue denotaremos a este orden mediante  $\leq$ , mientras que seguiremos usando  $\leq$  para el orden parcial (y para el orden sobre los naturales).

Considérese el grafo del complejo simplicial de Taylor  $G_{\Delta\mathcal{T}_I} = (\Delta_{\mathcal{T}_I}^{(*)}, E_{\Delta\mathcal{T}_I})$ , el siguiente algoritmo proporciona un subconjunto de  $E_{\Delta\mathcal{T}_I}$  que resulta ser un emparejamiento acíclico y homogéneo, con lo que aplicando el teorema 3.37 se deduce lo que queremos.

**Algoritmo 4.1 (de poda general)** Con la notación anterior, el algoritmo de poda general es el siguiente.

ENTRADA: El conjunto de aristas  $E_{\Delta\mathcal{T}_I}$ .

$A_P = \emptyset$ ;

**para**  $j$  **desde** 1 **hasta**  $r$ , **con paso** 1

**para**  $\sigma \in \Delta_{\mathcal{T}_I}^{(*)}$  **con**  $m_j \notin \sigma$ , **siguiendo el orden**  $\leq$

**si**  $\text{gr}(\sigma) = \text{gr}(\sigma \cup \{m_j\})$  y ni  $\sigma$  ni  $\sigma \cup \{m_j\}$  aparecen en ninguna arista de  $A_P$  (como salida o llegada)

**entonces**

$A_P = A_P \cup \{\sigma \cup \{m_j\} \rightarrow \sigma\}$ ;

**fin si**;

**fin para**;

**fin para**;

DEVOLVER:  $A_P$ .

El siguiente teorema garantiza la eficacia del algoritmo.

**Teorema 4.2** El conjunto  $A_P \subset E_{\Delta\mathcal{T}_I}$  que se obtiene como salida del algoritmo 4.1 es un emparejamiento acíclico homogéneo sobre  $\Delta\mathcal{T}_I$ .

*Esquema de la demostración:* Por el propio diseño del algoritmo es evidente que el conjunto de aristas  $A_P \subset E_{\Delta\mathcal{T}_I}$  es un emparejamiento y que es homogéneo. La comprobación de que es acíclico es, en cambio, muy técnica, por lo que remitimos al lector interesado al *preprint* [AFG17]. La estrategia es simple: partiendo de un hipotético ciclo en el grafo  $G_{\Delta\mathcal{T}_I}^{A_P} = (\Delta_{\mathcal{T}_I}^{(*)}, E_{\Delta\mathcal{T}_I}^{A_P})$  se trata de ver primero que todas sus células tienen el mismo grado (lo cual no es difícil) y después utilizar esto para probar que todas las aristas invertidas del ciclo se incluyen en el emparejamiento en el mismo paso (que es la parte verdaderamente técnica), y como la célula de partida de la primera arista y la de llegada de la última coinciden (por ser un ciclo) en realidad el ciclo consiste en ir y volver por una misma arista, lo que no es posible en  $G_{\Delta\mathcal{T}_I}^{A_P}$ .  $\square$

Ahora, sin más que aplicar el teorema 3.37, se deduce que el algoritmo es realmente efectivo para minimalizar en cierta medida la resolución de Taylor, como recoge el siguiente corolario. Conviene advertir que, en general, la resolución obtenida no será la minimal, aunque no podíamos aspirar a ello teniendo en cuenta que existen ideales monomiales cuya resolución minimal no es celular, como ya hemos indicado.

**Corolario 4.3** Sea  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ ,  $I = \langle \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_r \rangle \subset S$  un ideal monomial y  $R = k[\Lambda]$  el anillo de semigrupo afín correspondiente. Sea  $A_P \subset E_{\Delta_{\mathcal{T}_I}}$  el emparejamiento acíclico homogéneo que proporciona el algoritmo 4.1. Entonces el correspondiente complejo de Morse  $(\mathbb{N}^n, \Lambda)$ -graduado  $\left( (\Delta_{\mathcal{T}_I})_{A_P}, \text{gr} \right)$  soporta una resolución celular  $\mathcal{F}_{(\Delta_{\mathcal{T}_I})_{A_P}}^{\text{gr}}$  de  $I$ .

Nótese que hemos tenido que establecer un orden (total) en el conjunto de monomios generadores del módulo. Esto provoca que, como ocurría con la resolución de Lyubeznik, la resolución  $\mathcal{F}_{(\Delta_{\mathcal{T}_I})_{A_P}}^{\text{gr}}$  también dependa del orden elegido.

Sin embargo, el algoritmo tiene un aspecto muy positivo, ya que incluso aunque tomemos un sistema no minimal de generadores monomiales del módulo la resolución obtenida es la misma, es decir, conseguimos podar ese exceso de información y por lo tanto podemos despreocuparnos de si el sistema de generadores monomiales que consideramos es minimal y de su cálculo en el caso de que no lo sea. Esto se resume en el siguiente lema.

**Lema 4.4** Sean  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ ,  $I = \langle \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_r \rangle \subset S$  un ideal monomial y  $\{\mathbf{m}_{i_1}, \dots, \mathbf{m}_{i_s}\}$  el sistema minimal de monomios generadores asociado, con  $1 \leq i_1 < \dots < i_s < r$ . Sean  $\Delta_{\mathcal{T}_{I_r}}$  y  $\Delta_{\mathcal{T}_{I_s}}$  los complejos simpliciales de Taylor asociados (nótese que  $\Delta_{\mathcal{T}_{I_s}}$  es un subcomplejo simplicial de  $\Delta_{\mathcal{T}_{I_r}}$ , y la graduación del subcomplejo coincide con la inducida por el otro, por lo que las denotaremos igual), y sean  $A_P^r \subset E_{\Delta_{\mathcal{T}_{I_r}}}$  y  $A_P^s \subset E_{\Delta_{\mathcal{T}_{I_s}}}$  los emparejamientos acíclicos obtenidos aplicando el algoritmo 4.1 en cada caso. Entonces existe un isomorfismo de CW-complejos  $\mathbb{N}^n$ -graduados  $\left( (\Delta_{\mathcal{T}_{I_s}})_{A_P^s}, \text{gr} \right) \cong \left( (\Delta_{\mathcal{T}_{I_r}})_{A_P^r}, \text{gr} \right)$ , con lo que en particular las resoluciones del corolario anterior coinciden en ambos casos.

*Demostración.* Sea  $\mathbf{m}_j \notin \{\mathbf{m}_{i_1}, \dots, \mathbf{m}_{i_s}\}$  con  $1 \leq j \leq r$ , tenemos que comprobar que todos los vértices  $\sigma$  del grafo asociado  $G_{\Delta_{\mathcal{T}_{I_r}}}$  con  $\mathbf{m}_j \in \sigma$  han sido podados, es decir, están en alguna arista de  $A_P^r$ .

Considérese el subconjunto de monomios generadores minimales que dividen a  $\mathbf{m}_j$ ,  $\{\mathbf{m}_{i_{j_1}}, \dots, \mathbf{m}_{i_{j_l}}\} \subset \{\mathbf{m}_{i_1}, \dots, \mathbf{m}_{i_s}\}$ , numerados de acuerdo con el orden elegido en el conjunto de monomios. Sea un vértice  $\sigma$  con  $\mathbf{m}_j \in \sigma$ , se abren dos posibilidades:

- Si  $\{\mathbf{m}_{i_{j_1}}, \dots, \mathbf{m}_{i_{j_l}}\} \not\subset \sigma$  entonces existe  $h \in \{1, \dots, l\}$  con  $\mathbf{m}_{i_{j_h}} \notin \sigma$  y puesto que  $\text{gr}(\sigma) = \text{gr}(\sigma \cup \{\mathbf{m}_{i_{j_h}}\})$  la arista  $\sigma \cup \{\mathbf{m}_{i_{j_h}}\} \rightarrow \sigma$  será incluida en  $A_P^r$  en el paso  $i_{j_h}$  si ni  $\sigma$  ni  $\sigma \cup \{\mathbf{m}_{i_{j_h}}\}$  eran vértices de ninguna otra arista que ya hubiera sido incluida previamente en  $A_P^r$ . Si  $\sigma$  es vértice de alguna otra arista que ya estuviera antes en  $A_P^r$  entonces hemos terminado. Si, por el contrario, es  $\sigma \cup \{\mathbf{m}_{i_{j_h}}\}$  el que ya aparece como extremo de una arista de  $A_P^r$ , puede aparecer como vértice de llegada o de salida. En el primer caso tenemos una arista  $(\sigma \cup \{\mathbf{m}_{i_{j_h}}\}) \cup \{\mathbf{m}_k\} \rightarrow \sigma \cup \{\mathbf{m}_{i_{j_h}}\} \in A_P^r$ , pero en ese caso también  $\sigma \cup \{\mathbf{m}_k\} \rightarrow \sigma$  habría sido añadida a  $A_P^r$  en el paso  $k$  (pues si



$\sigma \cup \{m_k\}$  fuera vértice de una arista ya añadida en un paso previo, también lo sería  $\sigma \cup \{m_{i_{j_h}}\} \cup \{m_k\}$  y la arista  $\sigma \cup \{m_{i_{j_h}}\} \cup \{m_k\} \rightarrow \sigma \cup \{m_{i_{j_h}}\}$  no podría estar en  $A_p^r$ .

En el otro caso la arista que ya está en  $A_p^r$  es  $\sigma \cup \{m_{i_{j_h}}\} \rightarrow \sigma \cup \{m_{i_{j_h}}\} \setminus \{m_k\}$ , donde  $k \neq i_{j_h}$ . Pero razonando como antes se deduce que la arista  $\sigma \rightarrow \sigma \setminus \{m_k\}$  también debe estar en  $A_p^r$ .

- Si  $\{m_{i_{j_1}}, \dots, m_{i_{j_l}}\} \subseteq \sigma$  entonces  $\text{gr}(\sigma) = \text{gr}(\sigma \setminus \{m_j\})$ , y la arista  $\sigma \rightarrow \sigma \setminus \{m_j\}$  será incluida en  $A_p^r$  en el paso  $j$  salvo si alguna otra arista que tenga a  $\sigma$  o a  $\sigma \setminus \{m_j\}$  como extremo ya estaba en ese paso en  $A_p^r$ . Si es  $\sigma$  el vértice por el que pasa otra arista de  $A_p^r$  hemos terminado. Si es  $\sigma \setminus \{m_j\}$  entonces un análisis completamente análogo al del caso anterior nos permite concluir que también  $\sigma$  será extremo de una arista que ya está en  $A_p^r$ .

□

Una apreciación relevante es que en ningún momento del algoritmo ni de las demostraciones hemos utilizado que el CW-complejo de partida sea el de Taylor. En realidad podemos partir de cualquier otro CW-complejo cuyas caras sean (o estén en correspondencia biyectiva con) elementos del conjunto de partes de un sistema de generadores formado por monomios del ideal monomial (en virtud del lema anterior ni siquiera pedimos que sea minimal), con la contención entre caras determinada por la contención de dichos elementos. Es decir, exigimos que los CW-complejos sean “rígidos” como los simpliciales (en el sentido de que todas las caras vienen determinadas por sus vértices, como ocurre con los símplices), pero no que sean “completos” como estos. Estas son las exigencias combinatorias mínimas, aunque otra cuestión son las condiciones topológicas de regularidad que debe verificar para que sea aplicable la Teoría de Morse Discreta.

---

## 4.2 VARIANTES DEL ALGORITMO DE PODA

---

El algoritmo de poda general que presentamos en la sección anterior tiene varias limitaciones, pero modificándolo convenientemente podemos superar algunas de ellas. A esto dedicaremos esta sección, cuya primera subsección, más precisa, se corresponde con las secciones 3.2 y 3.3 de [AFG17], mientras que la segunda tiene un carácter más especulativo, y está inspirada en parte por la sección 3.4 de la misma referencia.

### 4.2.1 Poda simplicial

Uno de los aspectos que más nos han preocupado sobre la Teoría de Morse Discreta durante el capítulo 3 es que el complejo de Morse correspondiente a un determinado emparejamiento acíclico (o función de Morse discreta) sobre un CW-complejo no es, en general,

regular, pese a todas las hipótesis de regularidad que imponamos sobre el CW-complejo. De cara a aplicar la Teoría de Morse Discreta esto dejó de ser demasiado preocupante tras la aparición de la Teoría de Morse Discreta Algebraica, pero puede haber otros motivos por los que nos interese que la resolución (el CW-complejo que la soporta, en realidad) tenga una mayor regularidad, o sea de hecho simplicial. Para lograr la conservación de la regularidad necesitaremos imponer restricciones sobre el emparejamiento acíclico, y esto es lo que nos proponemos en esta subsección: conseguir que la resolución obtenida tras la poda sea, de hecho, simplicial, que es una aspiración asumible teniendo en cuenta que nuestro complejo de partida era simplicial (evidentemente no podemos esperar el milagro de ganar estructura) pero era el “peor” (en cuanto a su número de caras) de ese tipo que podíamos considerar, con lo que es razonable que nos conformemos con obtener otro mejor que soporte la misma resolución manteniendo el carácter simplicial.

El siguiente algoritmo es una versión convenientemente modificada del algoritmo 4.1 de forma que solo poda las caras que no impiden que el complejo resultante sea simplicial.

**Algoritmo 4.5 (de poda simplicial)** Con la misma notación que en el algoritmo 4.1, el algoritmo de poda simplicial es el siguiente.

ENTRADA: El conjunto de aristas  $E_{\Delta\mathcal{T}_I}$ .

```

 $A_S = \emptyset;$ 
para  $j$  desde 1 hasta  $r$ , con paso 1
  para  $\sigma \in \Delta_{\mathcal{T}_I}^{(*)}$  con  $m_j \notin \sigma$ , siguiendo el orden  $\leq$ 
    si  $\text{gr}(\sigma) = \text{gr}(\sigma \cup \{m_j\})$ , ni  $\sigma$  ni  $\sigma \cup \{m_j\}$  aparecen en
    ninguna arista de  $A_S$  (como salida o llegada) y al
    acabar el paso  $j$  todas las caras  $\tau > \sigma$  son extremos
    de alguna arista de  $A_S$  entonces
       $A_S = A_S \cup \{\sigma \cup \{m_j\} \rightarrow \sigma\};$ 
    fin si;
  fin para;
fin para;

```

DEVOLVER:  $A_S$ .

Se tiene que  $A_S \subset A_P$ , es un subemparejamiento y por lo tanto también será acíclico (por el lema 3.17) y homogéneo. Evidentemente la nueva condición que imponemos asegura que el complejo de Morse correspondiente va a seguir siendo simplicial (pues partimos de uno simplicial), y es igualmente válido el análogo al corolario 4.3.

Nótese que podría ocurrir que una arista  $\sigma \cup \{m_j\} \rightarrow \sigma$  sea incluida en  $A_P$  en el paso  $j$  del algoritmo 4.1, pero no en  $A_S$  en ese mismo paso del algoritmo 4.5 porque es cara de algún símplice del complejo que aún no ha sido podado. Sin embargo, es posible (aunque no seguro) que dicho símplice sea podado en un paso posterior y eso permitiría (si no hubiera ningún otro símplice que lo impidiera) que  $\sigma \cup \{m_j\} \rightarrow \sigma$  fuera incluida en  $A_S$  por el algoritmo 4.5. Pues bien, como el complejo de Morse obtenido es simplicial, es del tipo admitido como entrada del algoritmo de poda (tanto el general como el simplicial) tal y

como razonamos al final de la sección previa y podemos aplicarle de nuevo este algoritmo 4.5 y así sucesivamente hasta que el emparejamiento devuelto sea vacío.

Ya indicamos en la sección 4.1 que el algoritmo de poda fue inspirado por la forma de obtener el complejo de Luybeznik a partir del de Taylor encontrando un emparejamiento acíclico adecuado que se lleva a cabo en [BW02, Sección 3]. El algoritmo de poda puede adaptarse para obtener este emparejamiento de la forma siguiente.

**Algoritmo 4.6 (de poda de Lyubeznik)** Con la misma notación que en el algoritmo 4.1, el algoritmo de poda de Lyubeznik es el siguiente.

ENTRADA: El conjunto de aristas  $E_{\Delta\mathcal{T}_I}$ .

```

 $A_L = \emptyset;$ 
para  $j$  desde 1 hasta  $r$ , con paso 1
  para  $\sigma \in \Delta_{\mathcal{T}_I}^{(*)}$  con  $m_i \notin \sigma \ \forall i \leq j$ , siguiendo el orden  $\leq$ 
    si  $\text{gr}(\sigma) = \text{gr}(\sigma \cup \{m_j\})$  y  $m_j$  ni  $\sigma$  ni  $\sigma \cup \{m_j\}$  aparecen en
    ninguna arista de  $A_L$  (como salida o llegada)
    entonces
       $A_L = A_L \cup \{\sigma \cup \{m_j\} \rightarrow \sigma\};$ 
    fin si;
  fin para;
fin para;

```

DEVOLVER:  $A_L$ .

De nuevo  $A_L$  es un subemparejamiento de  $A_P$ , acíclico por el lema 3.17 y homogéneo, con lo que es aplicable el análogo al corolario 4.3. La prueba de que la resolución  $\mathcal{F}_{(\Delta\mathcal{T}_I)_{A_L}}^{\text{gr}}$  es la de Lyubeznik es la misma que la del artículo [BW02].

Ya sabemos que la resolución de Lyubeznik es simplicial y de hecho la poda de este último algoritmo conserva dicha propiedad. Entonces tenemos las relaciones de contención  $A_L \subseteq A_S \subseteq A_P$ , y queda claro que la poda simplicial y la general no son más que extensiones de la de Lyubeznik, en las que vamos prescindiendo de las condiciones que nos aseguran una determinada estructura en el complejo de Morse asociado para quedarnos solo con la que garantiza que es efectivamente soporte de una resolución, es decir, que el emparejamiento es acíclico.

### 4.2.2 Por qué la poda no es perfecta y qué podemos hacer para mejorarla

Ya hemos dicho que el complejo de Morse asociado al emparejamiento sobre el complejo simplicial de Taylor obtenido de la aplicación del algoritmo 4.1 no soporta, en general, una resolución minimal. En la subsección anterior, al tratar el algoritmo de poda simplicial, vimos que una estrategia para lograr mejores resultados era iterar la aplicación del algoritmo, lo que en aquel caso era posible por ser el complejo de Morse correspondiente al emparejamiento proporcionado por el algoritmo 4.5 simplicial. Para el algoritmo 4.1 esto

no ocurre así, si bien el complejo de Morse sí es del tipo admisible como entrada sin más que identificar sus células con las células de  $\Delta\tau_I$  críticas para el emparejamiento  $A_P$ . Sin embargo, aún a pesar de que el CW-complejo es “rígido” (en el sentido que ya explicamos al discutir qué CW-complejos eran aptos para aplicarles el algoritmo) y por lo tanto satisface las exigencias combinatorias, no es necesariamente regular, con lo que no podemos aplicarle la Teoría de Morse Discreta. La idea lógica es entonces aplicar la Teoría de Morse Discreta Algebraica, que nos permite eludir esta hipótesis.

Tras lo visto en la sección 3.4 sabemos que podemos considerar las células de nuestro CW-complejo  $X$  (ya sea el de Taylor o un complejo de Morse obtenido aplicando el algoritmo de poda) como la base del complejo de módulos (la resolución en nuestro caso), y que las aristas del grafo  $(X^{(*)}, E_{X^{(*)}})$  son pesadas. En este contexto, las aristas de un emparejamiento tienen que tener pesos invertibles en el anillo correspondiente. Pero esto ocurre, pues los pesos de las aristas no son más que los números de incidencia de las células que unen, luego son elementos del cuerpo  $k$ , que serán invertibles (en el anillo  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ ) siempre que sean no nulos y ya sabemos que el número de incidencia entre una célula y una cara suya siempre es no nulo. El teorema 4.2 es válido también para estos emparejamientos y demuestra que el que proporciona el algoritmo 4.1 en este contexto más general es acíclico, luego por medio de la Teoría de Morse Discreta Algebraica se deduce que es cierto el análogo al corolario 4.3 aún en el caso de que el CW-complejo de partida sea “rígido” pero no regular. Entonces podemos aplicar iterativamente el algoritmo 4.1.

La idea de la poda puede ser generalizada en varios sentidos. En primer lugar, nos hemos restringido al caso de ideales monomiales con un sistema finito de generadores formado por monomios, pero el complejo simplicial de Taylor definido en 2.42 era válido incluso para módulos monomiales co-Artinianos (y la estructura combinatoria de tales módulos es suficientemente fuerte para se sea válido todo lo expuesto en los dos capítulos precedentes), aunque en este caso el sistema minimal de generadores no tenía por qué ser finito. En la sección 3.2 explicamos algunas condiciones bajo las cuales la Teoría de Morse Discreta puede aplicarse a CW-complejos no finitos, y en [JW09, Capítulo 2] se imponen condiciones bajo las cuales podemos considerar emparejamientos acíclicos infinitos en el marco de la Teoría de Morse Discreta Algebraica.

Una variante mucho más evidente consiste en partir, en lugar del complejo simplicial de Taylor, de otro que tenga la propiedad de “rigidez” pero sea más “pequeño”. Una posibilidad, aunque no la única, es el complejo simplicial de Lyubeznik, aunque tiene la desventaja de que depende del orden elegido en el sistema minimal de monomios generadores del módulo y además no es tan sencillo de construir como el de Taylor.

Otra modificación obvia después de lo que hemos visto consiste en buscar podas parciales, es decir, subemparejamientos del emparejamiento  $A_P$  obtenido con el algoritmo 4.1, como ya hicimos con la poda simplicial y la de Lyubeznik. Con ello podemos conseguir que los correspondientes complejos de Morse tengan una cierta estructura que beneficie a nuestros intereses, lo que puede resultar particularmente interesante si aplicamos la Teoría de Morse Discreta Algebraica.

Estas son solo algunas de las posibilidades de extensión que ofrece el método de la

poda incluso en la etapa embrionaria en la que ahora se encuentra, por lo que con total seguridad muchas otras surgirán en el futuro.

---

## 4.3 LA PODA EN PRÁCTICA

---

En esta última sección pondremos en práctica los algoritmos anteriores en un ejemplo particularmente sencillo pero que sirve de ejemplo de aplicación no solo del método de la poda, sino de la Teoría de Morse Discreta aplicada a la minimalización de resoluciones celulares que presentamos en el capítulo 3. Para evitar aburrir al lector con cuentas veremos el efecto de la poda sobre los módulos de la resolución, olvidándonos de las diferenciales, que sin embargo sabemos calcular después de la subsección 3.3.1. De este modo podemos comparar el antes y el después simplemente a través de los diagramas de Betti, que reflejarán cómo se reduce el número de células de cada dimensión (aunque no nos muestran los grados de estas, que equivalen a los multigrados de los generadores, y por lo tanto no podemos hacer el seguimiento de las que desaparecen simplemente con ellos).

En primer lugar introduciremos unos ideales monomiales muy interesantes desde el punto de vista combinatorio, pues se definen a partir de grafos.

**Definición 4.7 (Ideal de aristas de un grafo)** Dado un grafo  $G = (V, E)$  con  $n$  vértices, se considera el anillo de polinomios en  $n$  indeterminadas  $S = k[x_1, \dots, x_n]$ . Es posible establecer una correspondencia biyectiva entre las indeterminadas  $x_1, \dots, x_n$  y los vértices de  $V$ . Entonces se define el *ideal de aristas de  $G$*  como el ideal monomial de sistema monomial de generadores  $\{x_i x_j : (x_i, x_j) \in E\}$ , y lo denotamos por  $I(G)$ .

En algunas referencias llaman a estos ideales simplemente ideales de grafo, o asociados al grafo.

El ejemplo sobre el que aplicaremos el método de la poda será el ideal asociado al 5-camino, es decir, el grafo siguiente:

$$x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4 \longrightarrow x_5$$

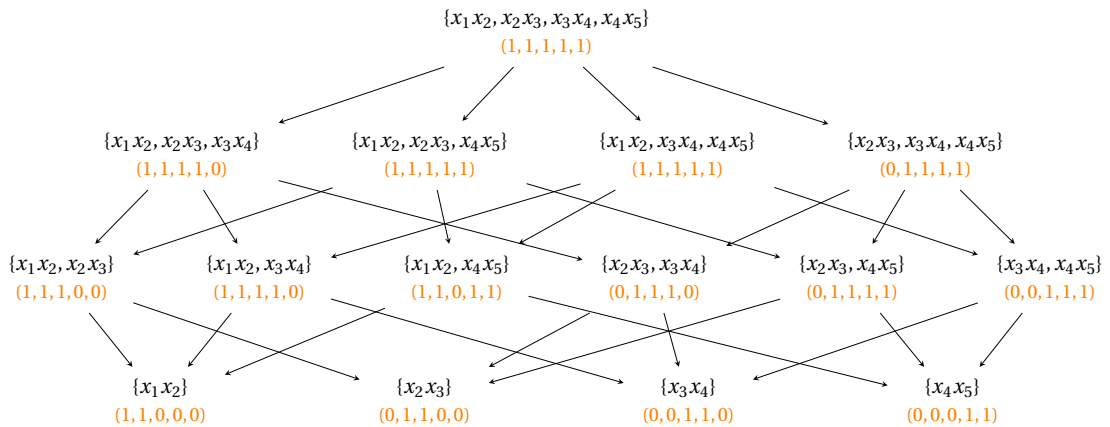
El ideal de aristas asociado es entonces  $I = \langle x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, x_4 x_5 \rangle \subset k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$  y su resolución de Taylor, (prescindiendo de las matrices diferenciales) es la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & S(-1, 1, 1, 0, 0) & & \\
 & & & & \oplus & & \\
 & & S(-1, 1, 1, 1, 0) & & S(-1, 1, 1, 1, 0) & & S(-1, 1, 0, 0, 0) \\
 & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\
 & & S(-1, 1, 1, 1, 1) & & S(-1, 1, 0, 1, 1) & & S(-0, 1, 1, 0, 0) \\
 0 \longrightarrow S(-1, 1, 1, 1, 1) \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow I \longrightarrow 0, \\
 & \oplus & & \oplus & & \oplus & \\
 & S(-1, 1, 1, 1, 1) & & S(-0, 1, 1, 1, 0) & & S(-0, 0, 1, 1, 0) & \\
 & \oplus & & \oplus & & \oplus & \\
 & S(-0, 1, 1, 1, 1) & & S(-0, 1, 1, 1, 1) & & S(-0, 0, 0, 1, 1) & \\
 & & & \oplus & & & \\
 & & & S(-0, 0, 1, 1, 1) & & & 
 \end{array}$$

de donde se deduce que el diagrama de Betti es este:

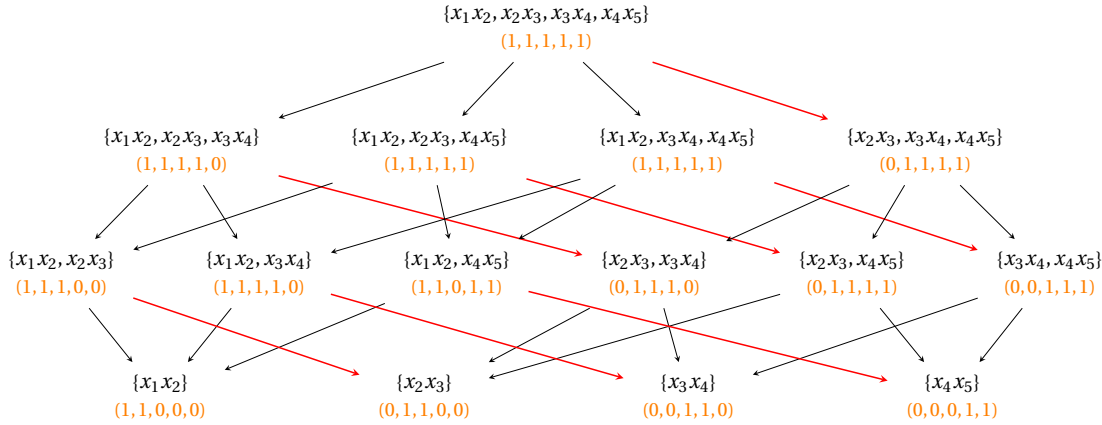
	4	6	4	1
2	4	3	2	1
3	0	3	2	0

En primer lugar tenemos que construir el grafo del complejo de Taylor,  $G_{\Delta_{\mathcal{T}_I}} = (\Delta_{\mathcal{T}_I}^{(*)}, E_{\Delta_{\mathcal{T}_I}})$ , con los vértices etiquetados con los grados de las células correspondientes (en naranja).



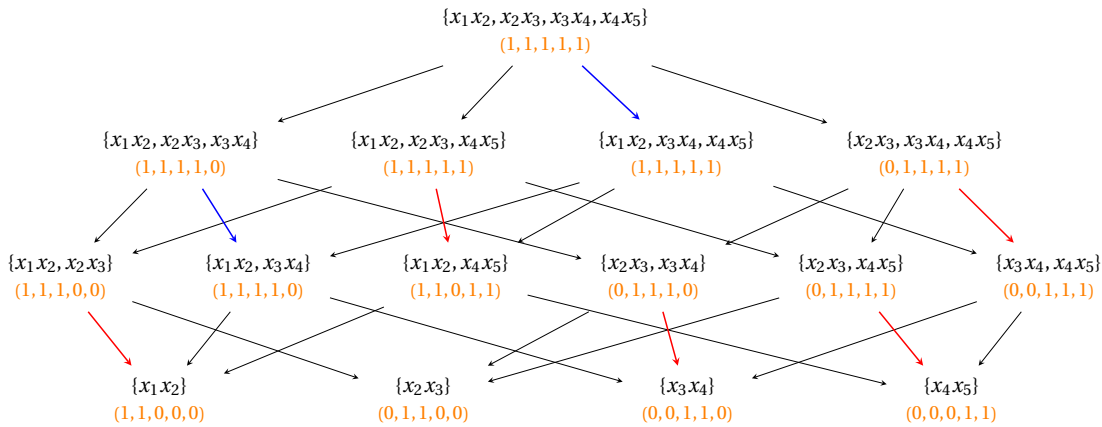
Y podemos empezar con el algoritmo. De hecho, aplicaremos simultáneamente los tres que hemos propuesto, el 4.1 (poda general), el 4.5 (poda simplicial) y el 4.6 (poda de Lyubeznik). Comencemos fijando  $A_P = \emptyset$ ,  $A_S = \emptyset$  y  $A_L = \emptyset$ .

Paso  $j = 1$  Se estudian las aristas coloreadas en el siguiente grafo:



Para ninguna de las aristas coloreadas coinciden los grados de (las células correspondientes a) sus extremos, por lo que no añadimos aristas a ninguno de los conjuntos, y por lo tanto  $A_P = \emptyset$ ,  $A_S = \emptyset$  y  $A_L = \emptyset$ .

**Paso  $j = 2$**  Se estudian las aristas coloreadas en el siguiente grafo:

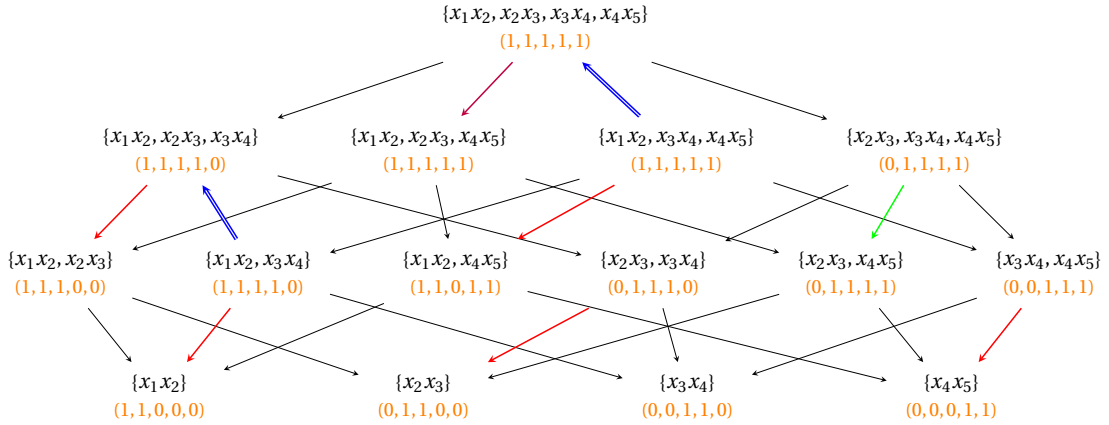


Para las aristas coloreadas en azul coinciden los grados de los extremos y como no comparten ninguno de dichos extremos, siguiendo el algoritmo 4.1 las añadiremos al emparejamiento y  $A_P = \{ \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4\}, \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4, x_4x_5\} \}$ .

Además,  $\{x_1x_2, x_3x_4, x_4x_5\}$  solo es cara de  $\{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\}$ , y las únicas células de las que  $\{x_1x_2, x_3x_4\}$  es cara son  $\{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\}$ ,  $\{x_1x_2, x_3x_4, x_4x_5\}$  y  $\{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\}$ , y todas ellas aparecen en aristas del emparejamiento al acabar este paso. Se deduce que ambas aristas serán incluidas según el algoritmo de poda simplicial 4.5, por lo que también  $A_S = \{ \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4\}, \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4, x_4x_5\} \}$ .

Sin embargo,  $x_1x_2 \in \{x_1x_2, x_3x_4\}$  y también  $x_1x_2 \in \{x_1x_2, x_3x_4, x_4x_5\}$ , con lo que ninguna de las aristas será añadida a  $A_L$  según el algoritmo 4.6 y por lo tanto  $A_L = \emptyset$ .

**Paso  $j = 3$**  Se estudian las aristas coloreadas en el siguiente grafo, en el que, por comodidad en las comprobaciones, ya hemos invertido las aristas previamente incluidas en los emparejamientos.



Solo coinciden los grados de los extremos en la arista morada y en la verde. Sin embargo, la arista morada tiene un extremo común con una arista que ya estaba en  $A_P$  y en  $A_S$ , y  $x_1x_2, x_2x_3 \in \{x_1x_2, x_2x_3, x_4x_5\}$  con lo que tampoco puede ser incluida en  $A_L$ .

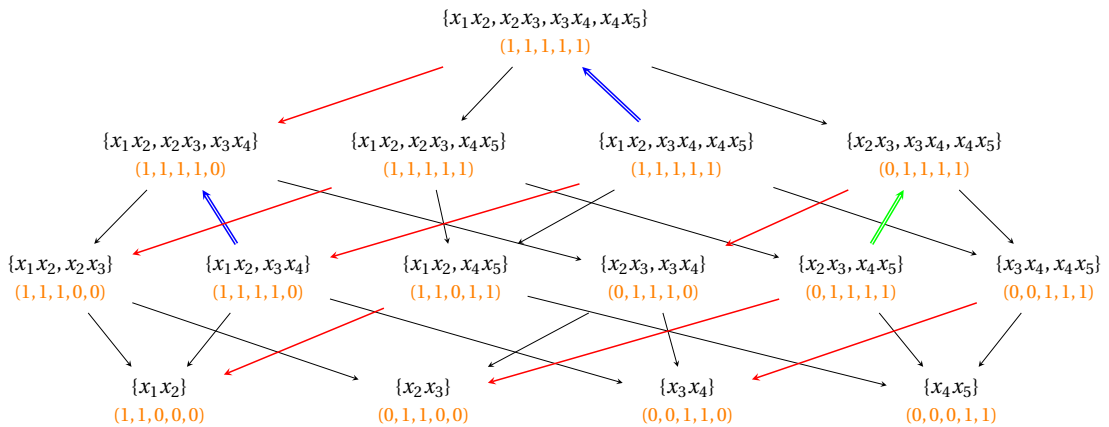
La arista verde, en cambio, sí puede ser incluida en  $A_P$ , pero no en  $A_S$  (de ahí que la hayamos marcado en verde y no en azul), pues  $\{x_2x_3, x_4x_5\}$  es cara de  $\{x_1x_2, x_2x_3, x_4x_5\}$  y esta célula no aparece en ninguna arista del emparejamiento al terminar el paso  $j = 3$ . Además  $x_1x_2 \in \{x_1x_2, x_2x_3, x_4x_5\}$  con lo que tampoco podemos añadirla a  $A_L$ . Entonces

$$A_P = \{ \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4\}, \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4, x_4x_5\}, \\ \{x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\} \rightarrow \{x_2x_3, x_4x_5\} \},$$

$$A_S = \{ \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4\}, \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4, x_4x_5\} \}$$

y  $A_L = \emptyset$ .

**Paso  $j = 4$**  Se estudian las aristas coloreadas en el siguiente grafo, en el que, por comodidad en las comprobaciones, ya hemos invertido las aristas previamente incluidas en los emparejamientos respetando el código de colores.





Se observa que para ninguna de las aristas coloreadas coinciden los grados de sus extremos, con lo que los emparejamientos serán los mismos que en el paso anterior.

En este momento el algoritmo (de hecho los tres que estamos aplicando simultáneamente) termina y devuelve los siguientes emparejamientos (acíclicos y homogéneos):

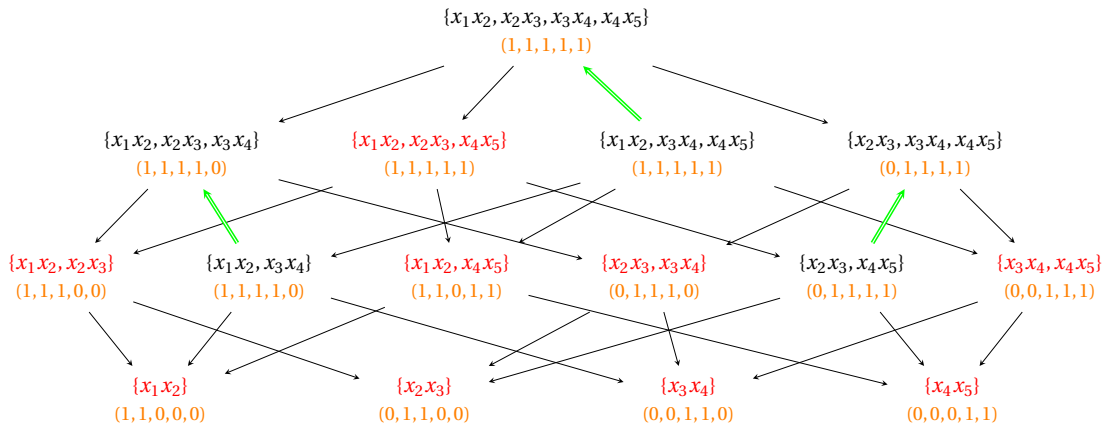
$$A_P = \{ \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4\}, \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4, x_4x_5\}, \{x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\} \rightarrow \{x_2x_3, x_4x_5\} \},$$

$$A_S = \{ \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4\}, \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\} \rightarrow \{x_1x_2, x_3x_4, x_4x_5\} \}$$

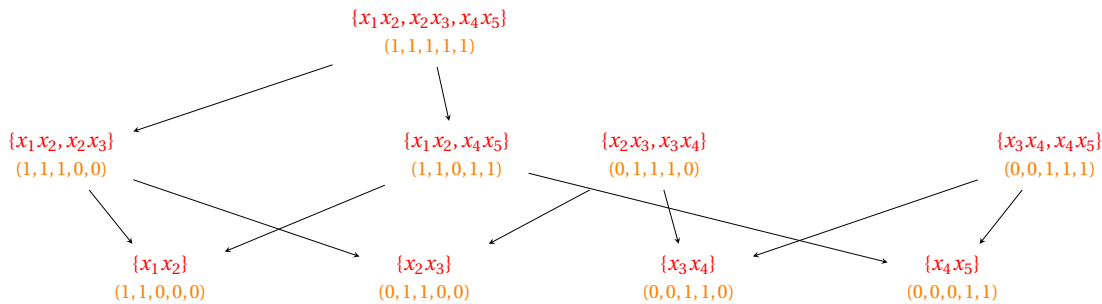
y

$$A_L = \emptyset.$$

Entonces para la poda general el grafo  $G_{\Delta\mathcal{T}_I}^{A_P} = (\Delta_{\mathcal{T}_I}^{(*)}, E_{\Delta\mathcal{T}_I}^{A_P})$  es el siguiente, en el que hemos marcado las células críticas en rojo:



El grafo podado (es decir, el grafo del complejo de Morse correspondiente al emparejamiento  $A_P$ , que, dado que hemos distribuido las células por dimensiones, refleja bien los cambios en el complejo simplicial) es el que se puede ver a continuación:



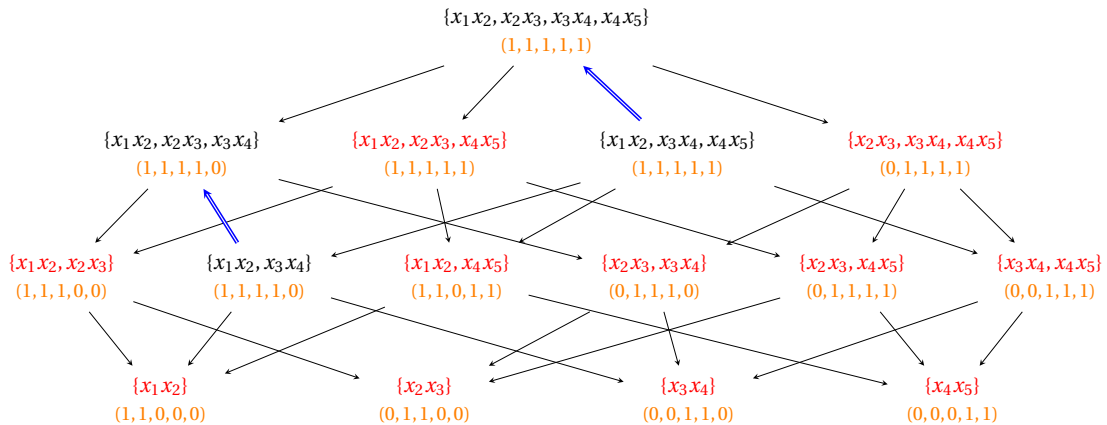
Y esta será la resolución que soporta (de nuevo prescindiremos de las diferenciales), y su diagrama de Betti:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & S(-1, 1, 1, 0, 0) & & S(-1, 1, 0, 0, 0) & & \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
 & & S(-1, 1, 0, 1, 1) & & S(-0, 1, 1, 0, 0) & & \\
 0 & \longrightarrow & S(-1, 1, 1, 1, 1) & \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow & I \longrightarrow 0, \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
 & & S(-0, 1, 1, 1, 0) & & S(-0, 0, 1, 1, 0) & & \\
 & & \oplus & & \oplus & & \\
 & & S(-0, 0, 1, 1, 1) & & S(-0, 0, 0, 1, 1) & & 
 \end{array}$$

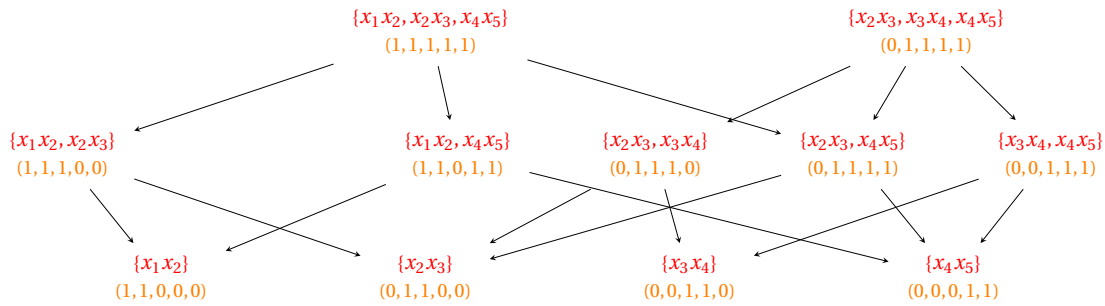
	4	4	1
2	4	3	0
3	0	1	1

Es fácil ver que la resolución es minimal (pues no coinciden los grados de células unidas por una arista, y se aplica la proposición 2.38). De hecho en [AFG17, Sección 5], y más concretamente en los ejemplos 5.8 y 5.9 se prueba que el método de la poda proporciona siempre resoluciones minimales para ideales asociados a caminos y a ciclos.

Para la poda simplicial procedemos análogamente, primero calculamos el grafo  $G_{\Delta_{\mathcal{T}_I}^{As}} = (\Delta_{\mathcal{T}_I}^{(*)}, E_{\Delta_{\mathcal{T}_I}^{As}})$ , con las células críticas marcadas en rojo.



A continuación mostramos el grafo podado:



Y finalmente la resolución y el diagrama de Betti correspondiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & S(-1, 1, 1, 0, 0) & & & \\
 & & & \oplus & & S(-1, 1, 0, 0, 0) & \\
 & & & S(-1, 1, 0, 1, 1) & & \oplus & \\
 & & S(-1, 1, 1, 1, 1) & \oplus & & S(-0, 1, 1, 0, 0) & \\
 0 \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow & S(-0, 1, 1, 1, 0) & \longrightarrow & \oplus & \longrightarrow I \longrightarrow 0, \\
 & S(-0, 1, 1, 1, 1) & & \oplus & & S(-0, 0, 1, 1, 0) & \\
 & & & S(-0, 1, 1, 1, 1) & & \oplus & \\
 & & & \oplus & & S(-0, 0, 0, 1, 1) & \\
 & & & S(-0, 0, 1, 1, 1) & & & 
 \end{array}$$

	4	5	2
2	4	3	1
3	0	2	1

En este caso no es minimal ya que no es la misma que la anterior, que sí lo era (aunque también puede razonarse con la proposición 2.38, ya que  $\{x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\}$  y  $\{x_2x_3, x_4x_5\}$  tienen el mismo grado). Sin embargo es la resolución simplicial más pequeña que podemos encontrar, pues el ideal asociado al 5-camino no admite una resolución simplicial, según se puede razonar utilizando un argumento similar al de [Jac04, Sección 3.2]. Es por ello que no tiene sentido aplicar de nuevo el algoritmo 4.5.

En el caso de la poda de Lyubeznik, como  $A_L = \emptyset$  el complejo de Taylor coincide con el de Lyubeznik (para el orden elegido en los generadores), y por lo tanto coincidirán también las resoluciones y los diagramas de Betti, y no hemos ganado nada.

En ejemplos más grandes se puede ver mejor la diferencia entre los tres tipos de poda, y a su vez entre las resoluciones que estas proporcionan y la de Taylor de partida. En [AFG17, Ejemplo 4.8] pueden encontrarse los diagramas de Betti de la resolución de Lyubeznik y la obtenida tras aplicar el algoritmo 4.1 (de poda general) de un ideal con 9 monomios generadores en el anillo de polinomios con 7 indeterminadas, siendo la segunda minimal.

## BIBLIOGRAFÍA

- [AFG17] ÁLVAREZ MONTANER, J., FERNÁNDEZ-RAMOS, O. y GIMENEZ, P. Pruned cellular free resolutions of monomial ideals. *arXiv:math/1701.01134*, preprint 2017.
- [BW02] BATZIES, E. y WELKER, V. Discrete Morse Theory for cellular resolutions. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 2002; **543**:147-168.
- [BPS98] BAYER, D., PEEVA, I. y STURMFELS, B. Monomial resolutions. *Mathematical Research Letters*. 1998; **5**:31-46.
- [BS98] BAYER, D. y STURMFELS, B. Cellular resolutions of monomial modules. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1998; **502**:123-140.
- [Bre93] BREDON, G.E. *Topology and Geometry*. Nueva York, EEUU: Graduate Texts in Mathematics **139**, Springer-Verlag; 1993.
- [CP01] CAMPILLO, A. y PISÓN, P. Toric Mathematics from Semigroup Viewpoint. *Ring Theory and Algebraic Geometry*. Editado por J.A. Hermida, A. Verschoren y A. Granja. Nueva York, EEUU: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **221**, Marcel Dekker, Inc.; 2001. 95-112.
- [Cha00] CHARI, M.K. On discrete Morse functions and combinatorial decompositions. *Discrete Mathematics*. 2000; **217**:101-113.
- [CLO97] COX, D., LITTLE, J. y O'SHEA, D. *Ideals, Varieties and Algorithms*. 4ª ed. Nueva York, EEUU: Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag; 2015.
- [CLO98] COX, D., LITTLE, J. y O'SHEA, D. *Using Algebraic Geometry*. Nueva York, EEUU: Graduate Texts in Mathematics **185**, Springer-Verlag; 1998.
- [ES45] EILENBERG, S. y STEENROD, N.E. Axiomatic approach to homology theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 1945; **31**(4):117-120.
- [ES52] EILENBERG, S. y STEENROD, N.E. Axiomatic approach to homology theory. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton, Nueva Jersey, EEUU: Princeton University Press; 1952.
- [Eis95] EISENBUD, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Nueva York, EEUU: Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer-Verlag; 1995.
- [Eis05] EISENBUD, D. *The Geometry of Syzygies. A Second Course in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Nueva York, EEUU: Graduate Texts in Mathematics **229**, Springer-Verlag; 1995.

- [For98] FORMAN, R. Morse Theory for Cell Complexes. *Advances in Mathematics*. 1998; **134**:90-145.
- [FP90] FRITSCH, R. y PICCININI, R.A. Cellular structures in topology. Cambridge, Reino Unido: Cambridge Studies in Advanced Mathematics **19**, Cambridge University Press; 1990.
- [GH81] GREENBERG, M.J. y HARPER, J.R. Algebraic Topology. A First Course. Reading, Massachusetts, EEUU: Mathematics Lecture Note Series, The Benjamin/Cummings Publishing Company; 1981.
- [Hat02] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press; 2002.
- [HH11] HERZOG, J. y HIBI, T. Monomial Ideals. Londres, Reino Unido: Graduate Texts in Mathematics **260**, Springer-Verlag; 2011.
- [Jac04] JACQUES, S. *Betti Numbers of Graph Ideals*. (Tesis doctoral) University of Sheffield; 2004.
- [JW09] JÖLLENBECK, M. y WELKER, V. Minimal Resolutions via Algebraic Discrete Morse Theory. *Memoirs of the American Mathematical Society*. 2009; **197**(923).
- [LW69] LUNDELL, A.T. y WEINGRAM, S. The Topology of CW Complexes. Nueva York, EEUU: The University Series in Higher Mathematics, Van Nostrand Reinhold Company; 1969.
- [Lyu88] LYUBEZNIK, G. A new explicit finite free resolution of ideals generated by monomials in an  $R$ -sequence. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 1998; **51**:193-195.
- [Mar13] MARTÍNEZ, U. *Una Introducción a la Teoría de las Sizigias*. (Trabajo de Fin de Grado) Universidad de Valladolid; 2013.
- [Mar14] MARTÍNEZ, U. *Resoluciones celulares*. (Trabajo de Fin de Máster) Universidad de Valladolid; 2014.
- [Mas78] MASSEY, W.S. *Homology and Cohomology Theory: An Approach Based on Alexander-Spanier Cochains*. Nueva York, EEUU: Marcel Dekker, Inc., Springer-Verlag; 1978.
- [Mas80] MASSEY, W.S. *Singular Homology Theory*. Nueva York, EEUU: Graduate Texts in Mathematics **70**, Springer-Verlag; 1980.
- [MS05] MILLER, E. y STURMFELS, B. Combinatorial Commutative Algebra. Nueva York, EEUU: Graduate Texts in Mathematics **227**, Springer-Verlag; 2005.
- [Mil63] MILNOR, J. *Morse Theory*. Princeton, Nueva Jersey, EEUU: Annals of Mathematics Studies **51**, Princeton University Press; 1963.
- [Mor34] MORSE, M. *The Calculus of Variations in the Large*. Nueva York, EEUU: American Mathematical Society Colloquium Publications **18**, American Mathematical Society; 1934.
- [OW07] ORLIK, P. y WELKER, V. Algebraic Combinatorics. Heidelberg, Alemania: Universitext, Springer-Verlag; 2007.

- [Pee11] PEEVA, I. *Graded Syzygies*. Londres, Reino Unido: Algebra and Applications **14**, Springer-Verlag; 2011.
- [Pic73] PICCININI, R.A. *CW-Complexes, Homology Theory*. Kingston, Ontario, EEUU: Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics **34**, Queen's University; 1973.
- [Rot88] ROTMAN, J.J. *An introduction to algebraic topology*. Nueva York, EEUU: Graduate Texts in Mathematics **119**, Springer-Verlag; 1988.
- [Skö05] SKÖLDBERG, E. Morse Theory from an algebraic viewpoint. *Transactions of the American Mathematical Society*. 2005; **358**(1):115-129.
- [Tay66] TAYLOR, D. *Ideals generated by an R-sequence*. (Tesis doctoral) University of Chicago; 1966.
- [Vel08] VELASCO, M. Minimal free resolutions that are not supported by a CW-complex. *Journal of Algebra*. 2008; **319**:102-114.
- [Whi49] WHITEHEAD, G.W. Combinatorial Homotopy. I. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1949; **55**(3):213-245.
- [Whi78] WHITEHEAD, G.W. *Elements of Homotopy Theory*. Nueva York, EEUU: Graduate Texts in Mathematics **61**, Springer-Verlag; 1978.
- [Wik] *Definitions of mathematics*. Wikipedia. Recuperado el 27 de junio de 2017, desde: [https://en.wikipedia.org/wiki/Definitions\\_of\\_mathematics](https://en.wikipedia.org/wiki/Definitions_of_mathematics)

## ÍNDICE ALFABÉTICO

- $\mathbb{N}^n$ -graduación estándar de  $S$ , véase multigraduación estándar de  $S$
- anillo graduado, 8
  - componente homogénea de un -, 9
  - componente homogénea de un elemento de un -, 9
  - elemento homogéneo de un -, 9
- aplicación característica, 41
- aplicación de pegado, 44, 46
- cancelación consecutiva, 25
- cara regular, 43
- célula
  - abierta, 40
  - aplicación característica de una -, 41
  - cerrada, 40
  - crítica para un emparejamiento acíclico, 91
  - crítica para una función de Morse discreta, 84
- cierre convexo, véase evolvente convexa50
- clausura convexa, véase evolvente convexa50
- complejo de cadenas celular, 57
  - etiquetado, 68
- complejo de módulos, 15
  - acíclico, 16
  - aumento de un -, 15
  - banda de un -, 18
  - bordes de un -, 16
  - celular, 67
  - ciclos de un -, 16
  - componente homogénea de un -, 18
  - desplazado, 15
  - diferenciales de un -, 15
  - exacto, 16
  - grado homológico en un -, 15
  - homología de un -, 16
  - homomorfismo de - graduados, 17
  - homomorfismo de-, 17
  - homomorfismos de - homótopos, 18
  - (multi)grado interno en un-, 15
  - (multi)graduado, 15
  - por la izquierda, 15
  - sobre un módulo, 15
  - soporte de un - celular, 68
  - subcomplejo de un -, 17
  - suma directa de -, 18
  - trivial, 23
  - trivial corto, 23
- complejo de Morse, 98, 106
- complejo simplicial
  - abstracto, 51
  - cara de un -, 50, 51
  - geométrico, 50
  - realización geométrica de un - abstracto, 52
  - vértice de un -, 51
- conjunto parcialmente ordenado asociado a un CW-complejo, 42
- coordenadas baricéntricas, 50
- CW-complejo, 40, 41
  - acíclico, 64
  - cara de un -, 40
  - cara de una célula en un -, 42
  - cara irregular de otra en un -, 43
  - cara maximal de un -, 42
  - cara regular de otra en un -, 43
  - colapso de -, 86
  - equivalencia de -, 43

- esqueleto de un  $\cdot$ , 41
- faceta de una célula en un  $\cdot$ , 42
  - graduado, 66
- grafo de células de un  $\cdot$ , *véase* grafo de células 90
- isomorfismo de  $\cdot$ , 42
- par de  $\cdot$ , 42
  - regular, 43
- subcomplejo de un  $\cdot$ , 42
- subdivisión de un  $\cdot$ , 43
  
- diagrama de Betti, 31
- Dickson, Lema de, 34
- dimensión proyectiva, 30
  
- emparejamiento, 91
  - acíclico, 91, 105
  - acíclico asociado a una función de Morse discreta, 93
  - acíclico homogéneo, 99
  - acíclico propio, 95
  - célula crítica para un  $\cdot$ , 91
  - conjunto parcialmente ordenado asociado al  $\cdot$ , 93
  - graduación universal asociada a un  $\cdot$ , 93
- envolvente convexa, 50
- equivalencia de Morse, 98
- etiquetado de CW-complejos, 68
  
- función de incidencia, 60
- función de Morse discreta, 82
  - célula crítica de una  $\cdot$ , 84
  - valor crítico de una  $\cdot$ , 84
  
- grado de una aplicación, 58
- graduación compacta, 95
- graduación desplazada, 12
- graduación estándar de  $S$ , 9
  - grado de un monomio para la  $\cdot$ , 9
  - grado de un polinomio para la  $\cdot$ , 9
  - polinomio homogéneo para la  $\cdot$ , 9
- graduado,  $\mathcal{A}$ 
  - anillo  $\cdot$ , *véase* anillo graduado
  - homomorfismo  $\cdot$ , 12
  - módulo  $\cdot$ , *véase* módulo graduado
  - submódulo  $\cdot$ , 11
- grafo de células, 90
  
- homología celular, 58
- homotopía, 19
- $k$ -homotopía, 19
  
- ideal de aristas de un grafo, 116
- ideal intersección completa, 76
- ideal monomial, 11, 33
  - libre de cuadrados, 54
  
- Lyubeznik
  - complejo de  $\cdot$ , 36, 78
  - resolución de  $\cdot$ , 36, 78
  
- módulo graduado, 9
  - componente homogénea de un  $\cdot$ , 9
  - componente homogénea de un elemento de un  $\cdot$ , 9
  - elemento homogéneo de un  $\cdot$ , 9
- módulo monomial, 37
- matrices diferenciales, 20
- MinGen( $I$ ), 34
- monomios, 33
  - cociente de  $\cdot$ , 33
- multigraduación estándar de  $S$ , 9
  - multigrado de un monomio para la  $\cdot$ , 9
  
- número de Betti, 30
  - graduado, 30
  - multigrado, 30
  - total, 30
- número de incidencia, 58
- números de Morse discretos, 84
- Nakayama, Lema de  $\cdot$ , 13
  
- pegado de espacios topológicos, 46
- presentación, 27
  - matriz de la  $\cdot$ , 27
  - multigrada, 27
  
- regularidad, 31



- de Castelnuovo-Mumford, *véase también* regularidad
- resolución libre, 20
  - celular, 69
  - minimal multigradaada, 23
  - (multi)gradaada, 20
- símplice
  - cara de un -, 50
  - dimensión de un -, 50
  - estándar, 54
  - geométrico, 50
  - vértice de un -, 50
  - vacío, 50
- semigrupo afín, 38
  - anillo de -, 38
- sizigias, 24, 26, 28
  - módulo de -, 26
  - graduaadas, 27
  - $i$ -ésimas -, 28
  - $i$ -ésimo módulo de -, 28
  - Teorema de las - de Hilbert, 29
- Stanley-Reisner
  - anillo de -, 54
  - correspondencia de -, 54
  - ideal de -, 54
- submódulo homogéneo, *véase también* submódulo graduaado
- submódulo monomial
  - co-Artiniano, 37
- sucesión regular, 76
- Taylor
  - complejo de -, 35, 75
  - resolución de -, 35