UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales y de la Matemática

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA DESDE UN PUNTO DE VISTA AXIOMÁTICO

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Elena Domínguez Campillo

Tutor: José Cano Torres

Valladolid, Julio 2017

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Los Elementos de Euclides constituyen una exposición excelente del método axiomático en Matemáticas y, más concretamente, en Geometría. Aunque el método axiomático ha permitido la fundamentación de toda la Matemática y es el paradigma en el que se desarrolla la Matemática actual, el nivel de abstracción que requiere presenta enormes dificultades para su introducción en la enseñanza de la Geometría en la etapa secundaria. En esta etapa educativa se da por sentado que la Geometría Euclídea se corresponde con el mundo físico tridimensional, y el objetivo de la enseñanza no es tanto demostrar cuanto "convencer" y mostrar las relaciones entre los diferentes conceptos geométricos. Ahora bien, algunos libros de texto de la etapa de educación secundaria, especialmente de la E.S.O., siguen presentando notables deficiencias en la exposición de la Geometría: son frecuentes las definiciones circulares, algunas definiciones no son precisas, cuando algunos razonamientos se apoyan en dibujos se elige la posición más favorable de las figuras eludiendo los casos complicados, etc. Estas mismas deficiencias fueron también detectadas en los libros de texto rusos y americanos (véanse los libros de A.I. Fetisov y J.M. Lee).

Tras los preliminares históricos y los referentes teóricos desarrollados en las secciones 2 y 3, dedicamos la sección 4 a resaltar la importancia de la Geometría en el contexto global de las matemáticas y en el de su enseñanza. En la sección 5, tras exponer los sistemas axiomáticos de Hilbert (1899) y Birkhoff (1930), que solo son abordables en la enseñanza universitaria, se describen los postulados del School Mathematics Study Group (SMSG) los cuales suponen un intento de fundamentar la Geometría elemental sin acudir a un método axiomático estricto.

A principios de los años 60 del siglo pasado, la SMSG pretendió una reforma curricular de las matemáticas en la enseñanza primaria y secundaria de Estados Unidos que, en gran medida, no llegó a ser implementada con éxito por el rechazo de los docentes, pero el conjunto de postulados para la Geometría Euclídea fue muy bien recibido y sigue siendo muy utilizado en Estados Unidos y Canadá. La SMSG nos proporciona un conjunto de axiomas razonablemente completo, pedagógicamente sólido y (esto es lo más importante) accesible a los estudiantes, permitiendo que estos se introduzcan en el estudio formal de la geometría. Para lograr estos objetivos, se optó por sacrificar la independencia, ya que los conjuntos de axiomas independientes requieren la demostración, a veces difícil, de un gran número de teoremas preliminares (que suelen ser intuitivamente obvios) antes de llegar a las demostraciones de los teoremas principales.

Dedicamos la sección 6 a justificar la conveniencia e importancia de que aparezcan en la E.S.O.; así como en la etapa de Bachillerato, unos mínimos rudimentos de Geometría. En la sección 7 se describe el contenido actual del bloque de Geometría en la educación secundaria de la Comunidad de Castilla y León. Finalmente, en la sección 8 presentamos una propuesta didáctica para el curso 3º de la E.S.O.

2. CONTEXTO

2.1 HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

El nacimiento de la Matemática en la historia humana está estrechamente relacionado con el desarrollo del concepto de número, proceso que ocurrió de manera muy gradual en las comunidades humanas primitivas. Aunque disponían de una cierta capacidad de estimar tamaños y magnitudes, no poseían inicialmente una noción de número.

Mucho antes de los primeros registros escritos, hay dibujos que indican algún conocimiento de matemáticas elementales y de la medida del tiempo basada en las estrellas. Hay evidencias de que las mujeres inventaron una forma de llevar la cuenta de su ciclo menstrual, de 28 a 30 marcas en un hueso o piedra. También los cazadores y pastores empleaban los conceptos de uno, dos y muchos, así como la idea de ninguno o cero, cuando hablaban de manadas de animales.

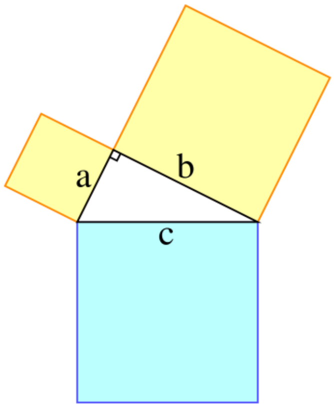
Con el avance en la complejidad de la estructura social, los problemas a resolver se hicieron más difíciles y ya no bastaba, como en las comunidades primitivas, con solo contar un pequeño número de objetos, sino que llegó a ser crucial contar conjuntos cada vez mayores, medir el tiempo, operar con fechas o posibilitar el cálculo de equivalencias para el trueque. Es el momento en que surgen los nombres y símbolos numéricos. Así, por ejemplo:

- En Egipto, V milenio a. C., ya se representaban pictóricamente diseños espaciales geométricos.
- Los monumentos megalíticos en Inglaterra y Escocia, del III milenio a. C., incorporan ideas geométricas tales como círculos, elipses y ternas pitagóricas en su diseño
- En la India, las primeras matemáticas conocidas datan del 3000-2600 a. C., esta civilización desarrolló: un sistema de medidas y pesas uniforme que usaba el sistema decimal, una avanzada tecnología con ladrillos para representar razones, calles dispuestas en perfectos ángulos rectos y una serie de formas geométricas y diseños, incluyendo cuboides, barriles, conos, cilindros y diseños de círculos y triángulos concéntricos y secantes. Los instrumentos matemáticos empleados incluían una exacta regla decimal.

Entre los textos matemáticos más antiguos se encuentran:

- El papiro de Moscú, que data del Imperio Medio de Egipto, hacia el 2000-1800 a. C.
- El papiro de Rhind (hacia 1650 a. C.), también egipcio, que es un manual de instrucciones en aritmética y geometría. Proporciona fórmulas para calcular áreas y métodos para la multiplicación, división y trabajo con fracciones.
- El papiro de Berlín (hacia 1300 a. C.), que muestra cómo los antiguos egipcios ya podían resolver una ecuación cuadrática.

En estos textos se menciona el teorema de Pitágoras, que parece ser el más antiguo y extendido desarrollo matemático después de la aritmética básica.



Las matemáticas egipcias y babilónicas fueron ampliamente desarrolladas por la Matemática helénica, es decir, la matemática en la Grecia Antigua, desde 600 a.C. hasta 300 d.C.

Las matemáticas griegas comenzaron con Tales y Pitágoras. La primera demostración formal del Teorema de Pitágoras está realizada por los pitagóricos.

Los matemáticos griegos usaron la lógica para deducir conclusiones, o teoremas, a partir de definiciones y de axiomas. La idea de las matemáticas como un entramado de teoremas sustentados en axiomas está explícita en “Los Elementos” de Euclides (hacia el 300 a. C.). En Los Elementos de Euclides se abordan todos los problemas fundamentales de la Matemática a través de un lenguaje geométrico.

Muchos textos griegos y árabes de matemáticas fueron traducidos al latín, lo que llevó a un posterior desarrollo de las matemáticas en la Edad Media.

La Matemática en el islam medieval, a su vez, desarrolló y extendió los resultados conocidos por las civilizaciones anteriores. Es de destacar que, a finales del siglo XI, Omar Khayyam escribió “Discusiones sobre las dificultades en Euclides”, un libro sobre los defectos en los Elementos de Euclides, especialmente el postulado de las paralelas, y estableció los fundamentos de la geometría analítica y la geometría no euclídea. También fue el primero en encontrar la solución geométrica a la ecuación cúbica.

En el siglo XIV hay un fuerte desarrollo en el área de las matemáticas que daría lugar, usando un lenguaje cinemático, a la base de la "ley de la caída de los cuerpos", de Galileo.

Hasta fines del siglo XVI, la resolución de problemas matemáticos continúa siendo una cuestión retórica. El cálculo simbólico aparecerá a finales del siglo XVI.

La principal aportación a la Matemática, en estos siglos del Renacimiento, fue la introducción de los polinomios. En este periodo el álgebra, que desde los Elementos de Euclides se había estudiado desde un punto de vista geométrico, se independiza de la geometría y se convierte en una rama autónoma dentro de la Matemática.

En los siglos XVII y XVIII (periodo de revolución científica), las matemáticas se inclinan sobre aspectos físicos y técnicos. Newton y Leibniz crean el cálculo infinitesimal, con lo que se inaugura la era del análisis matemático, la derivada, la integración y las ecuaciones diferenciales (no obstante, la formulación precisa del concepto de límite no se produjo hasta el siglo XIX con Cauchy).

El siglo XVIII está dominado por la figura de Leonhard Euler y por sus impresionantes aportaciones en todas las ramas de las matemáticas.

El siglo XIX (La Matemática moderna) es una época muy rica y fecunda para las matemáticas. Aparecen nuevas teorías nuevas y se completan trabajos comenzados anteriormente en los que domina el rigor (las matemáticas se vuelven más abstractas). En este siglo, el estudio de las matemáticas se convierte en una profesión de vanguardia. El número de profesionales no deja de crecer y las matemáticas adquieren una importancia nunca antes vista. Las aplicaciones se desarrollan rápidamente en amplios dominios, haciendo creer que la ciencia todo lo puede. El dominio de la física, ciencia experimental por excelencia, se ve completamente invadido por las matemáticas: el calor, la electricidad, el magnetismo, la mecánica de fluidos, la resistencia de materiales y la elasticidad, la cinética química, son todas matematizadas.

En este siglo se desarrollan dos formas de geometría no euclidiana, en las que el postulado de las paralelas de la geometría euclídea ya no es válido. El matemático ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky y su rival, el matemático húngaro János Bolyai, independientemente definen y estudian la geometría hiperbólica. La geometría elíptica fue desarrollada más tarde por el matemático alemán Bernhard Riemann (Geometría de Riemann).

La Matemática en siglo XX y hasta la actualidad. En un discurso en 1900 frente al Congreso Internacional de Matemáticos, David Hilbert propuso una lista de 23 problemas matemáticos. Esta lista, que toca varias áreas de las matemáticas, atrajo la atención de muchos matemáticos del siglo XX. En 2011, diez de esos problemas habían sido resueltos, siete parcialmente resueltos y dos permanecían aún abiertos; los cuatro restantes están formulados de manera muy vaga para decidir si han sido resueltos o no.

Un grupo de matemáticos franceses, incluyendo Jean Dieudonné y André Weil, publican bajo el pseudónimo «Nicolás Bourbaki», con intención de exponer la totalidad del conocimiento matemático como un todo riguroso y coherente. El resultado de varias docenas de volúmenes, reunidos en Elementos de Matemática, ha tenido una influencia decisiva en la educación matemática universitaria del siglo XX, fundamentalmente en los países occidentales.

La aparición del ordenador permitió trabajar con cantidades cada vez más grandes de datos, surgiendo áreas como por ejemplo la teoría de la computabilidad de Alan Turing. La computación y la tecnología de las comunicaciones llevan a una importancia creciente los conceptos de las matemáticas discretas y la expansión de la combinatoria, incluyendo la teoría de grafos.

En resumen, en este último siglo, los descubrimientos matemáticos han ido creciendo exponencialmente hasta el día de hoy, este crecimiento está ayudado por la muchas publicaciones y las excelentes revistas de matemáticas, tanto en formato tradicional (impresas en papel) como electrónico.

2.2 INCORPORACIÓN DE LA HISTORIA Y LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS AL AULA

Incorporar la Historia de la Matemática en el aula de educación secundaria tiene una gran importancia. Es conveniente que los alumnos descubran la evolución de las matemáticas a través de la historia, cómo han surgido las diferentes teorías y conceptos matemáticos y cómo se relacionan entre ellos, así como quiénes han iniciado y formalizado dichas teorías.

Las matemáticas para muchos alumnos son solo una sucesión de definiciones, propiedades, operaciones y fórmulas que hay que aprender. El desconocimiento de su historia contribuye a que los alumnos piensen que es una materia en la que todo ha sido ya descubierto. Si a la necesidad de razonamiento abstracto que las matemáticas exigen añadimos la falta de conocimiento de su historia, de cómo han surgido y evolucionado los conceptos, obtenemos como resultado que muchos jóvenes encuentren esta materia no solo ardua, sino también incomprensible. Muchos alumnos ven las matemáticas como un gran "recetario" para resolver los ejercicios.

Los profesores no solo han de poner énfasis en los cálculos y procedimientos de resolución de problemas sino también han de dar a conocer el origen de los objetos matemáticos que se estudian, utilizando para ello una metodología adecuada para su presentación en el aula.

Al alumno no solo se le debe dar la visión de lo pasado como la ruta que permitió llegar a lo nuevo, sino que se le han de presentar explicaciones de los contextos en los que se desarrollaron algunos de los conceptos matemáticos que se enseñan, los problemas que se intentaron y se intentan solucionar en cada momento y los cambios conceptuales que algunos supusieron, de forma que la Matemática resulte una ciencia viva, no solo deductiva sino también inductiva, compartiendo algunos de los métodos de las ciencias experimentales.

En la actualidad son muchos los autores que creen en la conveniencia de recuperar la historia en la Didáctica de cualquier ciencia, en nuestro caso de la Matemática.

Como señala Barona (1994): "*En el campo de la Historia de la Ciencia, la relevancia histórica de los hechos y de los acontecimientos no está sólo en función del criterio del historiador, sino que además es la propia evolución de la ciencia la que establece su propia forma de selección de lo que es relevante y lo que no lo es, de lo que debe permanecer y de lo que debe ser abandonado*".

Santaló (1994) insiste también en la importancia de incorporar la Historia de la Matemática al aula, para el acercamiento de algunos estudiantes que se verán atraídos por este enfoque.

Kazim (1980), citado por Santaló (1994), da algunos elementos para incorporar la Historia de la Matemática en la enseñanza media (secundaria):

1. Poner ejemplos de casos en que la Matemática ha progresado gracias a la idea de generalizar resultados conocidos. Hacer observar que casi todos los grandes descubrimientos tienen sus precursores.
2. Existencia de problemas que se enuncian fácilmente y que, sin embargo, todavía no han podido ser resueltos.

3. Poner de manifiesto la lenta evolución de los conceptos de las distintas clases de números (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, complejos) y sus métodos de cálculo. Exponer las discusiones que se originan y las dificultades que aparecen cada vez que se introduce un nuevo concepto, generalmente de manera oscura, hasta su paulatina clarificación y aceptación generalizada.
4. Dar ejemplos de resultados que nacieron como puramente teóricos y que luego resultaron de mucho interés práctico.
5. Importancia de un simbolismo adecuado para el progreso de la matemática.
6. Existencia de grandes matemáticos con otras profesiones.
7. Conocimiento de otras civilizaciones y de sus formas de calcular, sus tipos de construcciones arquitectónicas, su arte, su escritura, etc.
8. Conocer pugnas, controversias y otros estados de desacuerdos entre científicos y matemáticos, intereses personales de los científicos, de las instituciones y modos de divulgar la ciencia.
9. Aparición de grupos de investigadores en Historia de la Matemática.

Otro autor que trabaja esta línea es Fauvel (1991), quien da once puntos u orientaciones para con los alumnos, que son: "*mencionar anécdotas matemáticas del pasado, presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos, fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que aparecen en clase, impartir lecciones de Historia de la Matemática, idear ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado, fomentar la creación de pósteres, exposiciones u otros proyectos con un tema histórico, realizar proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado, usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos, explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje, idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico y, por último, idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico*".

Por su parte, Maz (2003) da algunas razones acerca de la conveniencia de la utilización de la Historia de la Matemática en las clases:

1. Ayuda e incrementa la motivación para el aprendizaje.
2. Muestra el aspecto humano de las matemáticas.
3. Cambia en los alumnos su percepción de las matemáticas.
4. Ayuda al desarrollo de un acercamiento multicultural.
5. Provee la posibilidad de un trabajo interdisciplinar.
6. Ayuda a ordenar la presentación de los temas en el currículo.
7. Ayuda a la comprensión de los conceptos, estudiando cómo fueron desarrollándose.
8. Los alumnos se sienten más atraídos para la realización de los problemas.

2.3 LA VISIÓN DEL DOCENTE

La educación es arte y ciencia que requiere de conocimiento, intuición y afecto. Cuando un docente pretende enseñar debe crear las condiciones adecuadas para que se produzca el aprendizaje, sin olvidar la atención a la diversidad, es decir, a la singularidad de cada alumno. Debe tener muy en cuenta que cada alumno tiene un ritmo concreto de aprendizaje, unas preferencias personales y una manera propia de asimilar los conocimientos.

Miguel de Guzmán asegura que, "*Enseñar bien consiste en conseguir que los estudiantes quieran aprender y de hecho aprendan*".

Las preguntas que cualquier docente debe hacerse son:

- ¿Valoro y doy a conocer el lugar importante de la Matemática en todos los niveles del sistema educativo debido a su papel de herramienta universal y a su importancia en la formación intelectual de los alumnos?
- ¿Cómo construir un currículum de actividades capaces de mezclar y unificar experiencia y conocimiento, juego y aprendizaje, educación e instrucción, respetando las motivaciones propias del alumno y tratando de que aprenda un lenguaje simbólico que le permita lograr su educación matemática actual y prepararse para una educación futura?
- ¿Preparo un ambiente favorable para que nuestros alumnos tengan experiencias matemáticas? ¿Qué hago para motivar a los alumnos? ¿Busco hacer comprender claramente las metas cercanas y lejanas de un desarrollo teórico? ¿Cómo los ayudo a razonar frente a un tema? ¿Tengo en cuenta el hecho de que cada persona razona frente a un tema según la significación que el mismo tiene para ella?
- La mayoría de los estudiantes reniega de las matemáticas, ¿a qué se debe?

Los estudiantes muchas veces ven las matemáticas como una materia rígida e impenetrable debido a sus contenidos abstractos y a su lenguaje propio.

Una de las innovaciones más significativas de las últimas décadas en la enseñanza de las matemáticas consiste en el creciente interés de los investigadores por la incorporación de un enfoque histórico en la Educación Matemática. Si bien las opiniones pueden diferir acerca de la metodología en la que la Historia se introduce en la enseñanza, en la comunidad de investigación en educación existe un consenso acerca de la importancia de la Historia para el proceso educativo.

El docente debe utilizar la historia como una herramienta auxiliar para lograr objetivos tales como:

- Hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas;
- Enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes;
- Señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente;
- Apuntar las conexiones históricas de la Matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.

Ahora bien, es evidente que no solo se debe aplicar esta mejora en la docencia, existen muchas otras herramientas útiles en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por ejemplo, otra mejora importante es reconocer que los avances tecnológicos, si resultan útiles, deben ser adoptados para fines educativos. Los docentes deben tener un papel protagonista en el proceso de la transformación de la educación y en el descubrimiento constante de nuevas formas de enseñar. La utilización de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs) es esencial en la búsqueda de estas nuevas formas, puesto que se trata de instrumentos facilitadores y motivadores del aprendizaje y permite considerar la singularidad del alumno en su ascenso cognoscitivo. Incorporar estos recursos implica adoptar, adaptar e integrar las nuevas herramientas al trabajo cotidiano, a fin de tornarlo más eficaz y productivo atendiendo al progreso y a las transformaciones sociales. La introducción del ordenador como recurso didáctico debe ser abordado desde una perspectiva educativa global.

3. REFERENTES TEÓRICOS: EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Es necesario que el alumno, en el proceso de su educación, reciba una formación integral. El modelo de enseñanza-aprendizaje se ha de sustentar en los cuatro pilares de la educación: aprender a hacer, aprender a convivir, aprender a aprender y aprender a ser (tal y como apunta Jackes Delors en su artículo "La Educación encierra un tesoro").

El proceso de enseñanza-aprendizaje se concibe pues como el espacio en el cual el principal protagonista es el alumno y el profesor cumple una función de facilitador de los procesos de aprendizaje. Son los alumnos quienes construyen el conocimiento a partir de leer, investigar, de aportar sus experiencias y reflexionar sobre ellas así como de intercambiar sus puntos de vista con sus compañeros y con el profesor. En este espacio, se pretende que el alumno tome un papel activo en su proceso de aprendizaje, que disfrute con él y que se comprometa a seguir aprendiendo a lo largo de toda su vida. Por lo tanto, se ha de considerar al estudiante como protagonista ya que la parte fundamental de su aprendizaje se da a través del hacer, del practicar, de aplicar en la vida real lo que se aprende en el aula.

Se concibe el aprendizaje no sólo como un fin en sí mismo, sino como una herramienta. El aprendizaje debe ser en la vida, de por vida y para la vida. En este sentido, mucho del aprendizaje debe desarrollarse en escenarios reales, atendiendo a situaciones reales, sin olvidar que la comprensión y la atención de los problemas más complejos requieren un trabajo interdisciplinar.

Los conceptos enseñanza y aprendizaje están estrechamente relacionados, tanto que en muchos casos son considerados equivalentes. Cuando hablamos de aprendizaje hacemos referencia a lo que se aprende y a cómo se aprende, mientras que la enseñanza se centra en los procesos utilizados por un agente externo al alumno para que el aprendizaje se produzca.

Debemos acudir al ámbito de las Ciencias de la Educación, más concretamente a la Psicología y a la Pedagogía, para analizar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

3.1 ÁMBITO DE LA PSICOLOGÍA

Teorías del aprendizaje: el conductismo y el constructivismo.

La Psicología del Desarrollo estudia el desarrollo humano, es decir, los cambios que se producen en el individuo y las características que permanecen estables, y dentro de ella podemos encontrar dos teorías del aprendizaje, el conductismo y el constructivismo.

El conductismo defiende que los cambios que se producen en la conducta de un individuo son debidos al aprendizaje y no tiene en cuenta los procesos cognitivos. El hombre se presenta como un organismo pasivo, que únicamente reacciona a los estímulos del entorno. Aunque uno de sus representantes más conocidos es Paulov, con su condicionamiento clásico, es importante destacar el condicionamiento instrumental u operante de Skinner, quien afirma que la conducta depende de las consecuencias que ésta provoca y está orientada a la consecución de un resultado. Es interesante por la teoría de reforzadores que implementa (refuerzos/castigos positivos/negativos), y se utiliza en el aula de una manera más o menos consciente.

El constructivismo entiende que las modificaciones de las conductas son provocadas por cambios en el conocimiento y en la capacidad intelectual de la persona. Tienen en cuenta los procesos cognitivos y consideran al hombre como un organismo activo, protagonista de la construcción de su conocimiento como resultado de la interacción y elaboración de la información que recibe del entorno. Dentro de esta teoría podemos destacar algunos autores importantes como:

- Piaget, padre del constructivismo, quien preconiza que el origen de la inteligencia está en la acción;
- Vygotski, se centra en el papel del medio e interacción social como elementos clave en la construcción de la inteligencia. Según este autor el desarrollo cognitivo es biológico en sus orígenes pero socio-cultural en su configuración y desarrollo;
- Ausubel, precursor de lo que se conoce como "aprendizaje significativo". Defiende la importancia de "aprender a aprender" y que el alumno sea autónomo y capaz de autorregularse con el apoyo de la figura del profesor como mediador, siendo consciente de sus propios procesos cognitivos (metacognición).

Es importante destacar que actualmente en el ámbito de la educación el conductismo es una teoría que ha sido superada y dejada atrás, habiéndose implantado y aceptado el paradigma constructivista de manera general. Hoy en día esta teoría está presente en la mayor parte de los docentes, en las leyes de educación y en las metodologías, recursos y actividades realizados en las aulas de secundaria.

Según el paradigma constructivista la inteligencia es un conjunto integrado de estrategias, habilidades y automatismos que el individuo utiliza para la resolución de problemas y para la creación de nuevas cuestiones, modelos y problemas. Entiende también que existe una "inteligencia biológica", constituida por lo que se denominan "los correlatos biológicos de la inteligencia", que es innata y por tanto no puede desarrollarse o mejorarse. Sin embargo, la inteligencia biológica por sí sola no sirve de nada al individuo, ya que es meramente una inteligencia potencial.

Los principales componentes del paradigma constructivista son los siguientes:

1. Procesos de enseñanza:

- Enseñar es ayudar a aprender.
- La diversificación de las tareas, recursos, agrupamientos, etc. favorece el aprendizaje.
- La enseñanza ha de centrarse en el alumno, en el conocimiento y en la comunidad.
- La mediación contextual, personal y social facilitan el aprendizaje significativo.
- En la enseñanza, lo cognitivo es importante, pero también lo afectivo, social y motriz.

2. Procesos de aprendizaje:

- Aprender significativamente es construir significados compartidos mediante la interacción del conocimiento previo, la información nueva y la actividad mental.
- Todo conocimiento se construye a partir de uno anterior. El conocimiento previo es el factor que más influye en el aprendizaje.
- El conocimiento previo condiciona el funcionamiento de los procesos cognitivos.
- El aprendizaje situado resulta muy eficaz.

3. El profesor:

- El profesor se concibe como un mediador y un modelo de aprendizaje.
- El profesor debe ayudar al alumno a automatizar los conocimientos básicos, ya que esto es imprescindible para el desarrollo de la inteligencia y de la creatividad.
- El profesor siempre ayuda a aprender (simultáneamente) dos tipos de conocimiento en los alumnos: conocimientos escolares y estrategias, habilidades y automatismos.

4. El alumno:

- La actividad mental del alumno es imprescindible para aprender.
- Los factores motivacionales dirigen el aprendizaje.
- El autoconocimiento y la autorregulación del aprendizaje por parte del alumno son esenciales para el desarrollo de su autonomía personal.
- La memoria es imprescindible para construir el conocimiento.

Cabe mencionar también dos importantes teorías del aprendizaje enmarcadas dentro del paradigma constructivista:

- Teoría del aprendizaje significativo. Según esta teoría, el aprendizaje significativo es simultáneamente un proceso y un producto. Como proceso consta de cinco operaciones mentales (inclusión, diferenciación progresiva, combinación, reconciliación integradora y consolidación) las cuáles se dan en orden. Como producto está condicionado por los conocimientos previos, la predisposición del alumno a aprender, la presencia de contenidos potencialmente significativos y el comportamiento del profesor en el aula.
- Teoría genética del aprendizaje. Esta teoría entiende que el aprendizaje se produce a partir de la secuencia ordenada de 4 grupos de operaciones mentales (construir esquemas de la realidad sensoriales, construir esquemas de la realidad icónicos o verbales, construir esquemas de conocimiento concretos y por último construir esquemas de conocimiento abstractos).

El desarrollo cognitivo y la personalidad del adolescente

No debemos olvidar que los alumnos con los que vamos a trabajar (pertenecientes a los cursos de la E.S.O. y Bachillerato) se encuentran en plena adolescencia, etapa en la que se producen cambios en múltiples facetas de su vida: físicos, sociales, emocionales, cognitivos, etc.

El adolescente comienza a conformar el pensamiento social y a desarrollar aspectos clave en su personalidad como la autoestima, la autoimagen, la identidad personal, la empatía o la capacidad de juicio moral. Además, empieza también a desarrollar procesos metacognitivos y las denominadas funciones ejecutivas (actualización, inhibición, flexibilidad, planificación y toma de decisiones). Sin embargo, quizá los cambios más significativos se produzcan en la esfera cognoscitiva, es decir, en lo que concierne a la inteligencia. El adolescente entrará en la etapa de desarrollo del pensamiento formal, lo que se traduce en que irá adquiriendo nuevas habilidades cognitivas, entre las cuales destacan las siguientes:

1. Capacidad de pensamiento abstracto. El adolescente comienza a ser capaz de realizar razonamientos sin necesidad de contar con referentes de la realidad.
2. Capacidad de formular hipótesis, utilización del método hipotético-deductivo para evaluar alternativas.
3. Capacidad para concebir lo posible, entendiendo la realidad como una opción más.
4. Uso de la combinatoria, organizando todos los elementos.
5. Uso de la lógica proposicional y desarrollo del lenguaje complejo.
6. Desarrollo de la memoria.

En cuanto a la personalidad, los rasgos cognitivos que predominan en el adolescente son el idealismo, la tendencia a discutir y cuestionar los puntos de vista, la duda, la indecisión y el egocentrismo, entendiéndose a sí mismo como el centro de atención, ser único y a salvo de todo riesgo.

Es esencial que el docente tenga en cuenta todos estos cambios así como las características propias de esta etapa, a fin de lograr que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea lo más adecuado y efectivo posible, es decir, que los alumnos realicen aprendizajes significativos. Para ello es esencial que comprenda, respete y apoye a los alumnos en esta etapa. Además, el docente tiene también la labor, como educador, de supervisar a los alumnos para evitar problemas y conductas de riesgo. Para los propios adolescentes, gestionar los cambios propios de esta etapa no resulta fácil, y en muchas ocasiones pueden darse situaciones y problemas complejos y graves como agresividad, ansiedad, trastornos depresivos, trastornos alimenticios, consumo de drogas, acoso escolar o incluso el suicidio. El profesor debe estar muy atento a cualquier signo de de alarma y actuar de inmediato para evitar y frenar cualquier problema.

Factores intrapersonales e interpersonales del proceso de enseñanza-aprendizaje

Podemos clasificar las variables personales que influyen en el aprendizaje del alumno en:

- Cognición: donde estarían incluidas sus capacidades y sus conocimientos previos.
- Conación: el uso que hace de sus capacidades.
- Afecto: teniendo en cuenta la motivación, la emoción y la personalidad.

La unión de las tres variables da como resultado unas determinadas estrategias de aprendizaje que influyen directamente en el rendimiento escolar del alumno.

La motivación es el "motor" que mueve toda conducta. Es la que inicia, mantiene y orienta el comportamiento. Ayuda a fomentar la eficacia, las metas de aprendizaje y la emoción. No podemos obviar la importancia de la inteligencia emocional, entendiéndola como la capacidad de reconocer nuestros propios sentimientos y los de los demás, de motivarnos y manejar adecuadamente las relaciones con los demás y con nosotros mismo. Este término es muy amplio y engloba otros ingredientes.

Atención a la diversidad

A la hora de enfrentarse al trabajo diario, el docente debe ser consciente de la amplia diversidad existente en el aula, lo cual añade una gran dificultad a la hora de conseguir que la totalidad de los alumnos realicen aprendizajes significativos. Pero esto no debe ser motivo de frustración por parte del profesor, quien debe actuar bajo los principios de calidad, equidad, flexibilidad y no discriminación. Para ello, el sistema educativo ha desarrollado las medidas de atención a la diversidad, que son aquellas actuaciones educativas dirigidas a dar respuesta a distintas situaciones de aprendizaje, siempre desde un punto de vista inclusivo y de no diferenciación.

Dentro de las diferentes situaciones especiales se ha de prestar especial atención a:

- La alta capacidad intelectual: superdotación o talentos.
- Alumnos con necesidades educativas especiales (ACNEE), que son aquellos que por un periodo o toda su vida requieren apoyos y atenciones educativas específicas a causa de una discapacidad, enfermedad o trastorno grave de conducta. Dentro de este grupo se encuentra el trastorno de déficit de atención con hiperactividad (TDAH) y los trastornos del espectro autista (TEA), con alteraciones en la interacción social, la comunicación y el comportamiento.
- Alumnos que sin presentar una necesidad educativa especial tienen un ritmo de aprendizaje más lento.

3.2 ÁMBITO DE LA PEDAGOGÍA

La Didáctica

Las Ciencias de la Educación definen la Didáctica como la disciplina científica, técnica y tecnológica de la educación en los procesos de enseñanza-aprendizaje que tiene lugar en contextos diversos y a lo largo de la vida. Su finalidad es garantizar una educación y formación de calidad para todos los estudiantes, es decir, alcanzar una formación integral a través del desarrollo de capacidades (poder hacer) para adquirir competencias (saber hacer) y facultades (ser).

Las capacidades son aquellas aptitudes que posee el individuo con un alto componente biológico o genético, que definen un potencial y dan lugar a una gran diversidad. Mediante la intervención socioeducativa podemos aplicar procedimientos que, mediante la práctica, transformen esas capacidades en habilidades o destrezas, en otras palabras, pasamos del “poder hacer” al “saber hacer”. Si además somos capaces de introducir el componente de la autorregulación, estamos diseñando estrategias que dan lugar a competencias, lo que significa ser capaz de tomar decisiones de forma consciente en el momento oportuno para resolver un problema.

No debemos olvidar que la educación empieza en la familia y continúa en el ambiente sociocultural, y que la formación se lleva a cabo en la escuela. Sin embargo, todo ellos forman parte del contexto educativo del alumno.

Las Competencias

No existe una única definición de competencia puesto que, si bien es un concepto que se utilizaba con frecuencia en el mundo laboral, su aplicación al ámbito de la educación es relativamente nueva. Pero realizando una síntesis de las definiciones que dan diferentes organismos como la OCDE, la Comunidad Europea o el informe PISA, podemos decir que se entiende por competencia el conjunto complejo e integrado de recursos personales (tales como conocimientos, habilidades, actitudes, experiencias, comportamientos, valores, etc) que un individuo posee para resolver de forma eficaz problemas o situaciones que se pueden plantear en contextos diversos y relevantes a lo largo de toda su vida. Su puesta en práctica requiere:

- Saber (conocimientos teórico-conceptuales específicos).
- Saber hacer (procedimientos, habilidades, actitudes, destrezas).
- Saber convivir (principios, hábitos, normas, costumbres y valores).

Por todo lo expuesto, se considera esencial que un individuo adquiera, a través del proceso educativo, una serie de competencias básicas que le permitan desenvolverse de manera digna y eficaz en el contexto actual. Pero las competencias no solo definen los fines de la educación, sino que además constituyen una guía para la propia enseñanza y funcionan como parámetros de evaluación.

El modelo educativo basado en competencias fue introducido con la Ley Orgánica de Educación (LOE). En él se definen ocho competencias básicas:

- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia matemática.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana.
- Competencia en expresión cultural y artística.
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

Estas competencias básicas parten de un enfoque general de la educación y es por ello que se constituyen como elementos transversales dentro del proceso educativo, es decir, la misma competencia se debe desarrollar, en mayor o menor medida, mediante aportaciones complementarias de las distintas materias del currículo.

Componentes didácticos de los procesos de enseñanza-aprendizaje

Según el modelo de Biggs, existen tres componentes principales en el modelo de enseñanza-aprendizaje. La interacción entre todos estos componentes didácticos da lugar a dicho modelo.

- Pronóstico: el profesor es el gestor clave del proceso, el estudiante es el agente central del proceso y el contexto corresponde con la entrada de influencias.
- Proceso: estrategias o actividades llevadas a cabo para la consecución de los resultados.
- Producto: Resultados.

La Educación

Podemos definir educación como el proceso permanente a través del cual cada persona puede llegar a dirigir con sentido su propia vida y alcanzar su plena realización, considerando los cuatro pilares de conocimiento (planteados por Jackes Delors en "La Educación encierra un tesoro"): aprender a conocer, a hacer, a convivir y a ser.

Anteriormente hemos identificado al profesor como el gestor clave del proceso educativo, por lo que sus rasgos personales más significativos deberían ser:

- Objetividad, en términos de credibilidad, coherencia y justicia.
- Sensibilidad, con empatía y flexibilidad.
- Entusiasmo, tanto por la materia como por la propia docencia.

Y en cuanto a las cualidades referentes a su actuación docente:

- Claridad en la exposición.
- Organización y orden.
- Variedad de métodos, recursos y tareas.
- Capacidad de adaptarse al ritmo de aprendizaje de los alumnos.
- Manejo adecuado de los niveles de abstracción.
- Utilización de la evaluación para comprobar y no para sancionar.

La Programación Didáctica

A la hora de realizar la programación didáctica hay que tener en cuenta: *El Diseño Curricular Base* (ley de educación a nivel estatal y de comunidad autónoma), *el Proyecto Educativo del Centro* (diseñado por el Consejo Escolar) y *la Programación Didáctica del Departamento* (realizada a nivel de claustro y equipo docente).

Con la Programación Didáctica el profesor gestiona el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que se definen los objetivos didácticos, contenidos, competencias, metodología, recursos, actividades y criterios de evaluación.

Como consecuencia, las características que debemos exigirle a una buena programación son:

- Coherencia y secuencia, conformando una unidad fundamental.
- Flexibilidad para introducir mejoras o modificaciones sin romper esa unidad.
- Objetividad y realismo.
- Precisión y claridad.

3.3 PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA

Desde una perspectiva curricular, las matemáticas contribuyen a la formalización de las ciencias tanto experimentales como sociales y nos ayudan a entender el mundo que nos rodea, por lo que forman parte de nuestra cultura.

En cuanto al proceso de enseñanza de esta materia, debe realizarse de forma intuitiva y buscando paulatinamente el rigor matemático, sirviéndose del uso racional de la tecnología y recursos disponibles y de las posibilidades de las diferentes metodologías, con el fin de que el aprendizaje sea también inductivo y fomente el desarrollo autónomo de los alumnos y su interés y entusiasmo por las Matemáticas.

El currículo de matemáticas publicado en el BOCYL se estructura en cinco bloques:

- **Procesos, métodos y actitudes en matemáticas**. Este bloque está constituido por cuatro grandes ejes: la resolución de problemas; el planteamiento y ejecución de investigaciones matemáticas relacionadas con los cuatro bloques; el enfoque modelizador e interpretativo que la matemática confiere a la realidad; el conocimiento de la propia capacidad y el desarrollo de una actitud positiva y responsable para enfrentarse a los retos, las ciencias y la Matemática; y, finalmente, la capacitación para aplicar y utilizar los diferentes medios tecnológicos, especialmente informáticos.
- **Números y Álgebra**. Propone el estudio de los diferentes conjuntos de números, sus operaciones y propiedades, y la utilización del lenguaje algebraico para expresar de manera simbólica propiedades o relaciones, para transformar e intercambiar información y para resolver problemas relacionados con la vida diaria.
- **Geometría**. Comprende figuras y objetos, definiciones, resultados y fórmulas, y favorece la comprensión espacial de formas y estructuras geométricas mediante la descripción, clasificación, análisis de propiedades, relaciones y transformaciones.
- **Funciones**. Establece relaciones entre variables y las expresa mediante el lenguaje habitual, tablas, gráficas y ecuaciones y establece modelos matemáticos que permiten describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos económicos, sociales o naturales.
- **Estadística y probabilidad**. Con él se pretende que el alumnado sea capaz de realizar un análisis crítico de la información estadística que aparece en los medios de comunicación. Además, es necesaria también la comprensión de los problemas de la vida cotidiana relacionados con los fenómenos aleatorios, sus reglas y la cuantificación de su incertidumbre.

El currículo de matemáticas ha de desarrollarse de forma global, atendiendo a las conexiones internas de la materia. También se debe considerar el carácter progresivo en el tratamiento de todos los elementos del propio currículo, tratamiento en espiral que amplía a lo largo de la etapa los contenidos que se necesitan, para facilitar su asimilación y su profundización. Los dos últimos cursos de la E.S.O. así como los cursos de Bachillerato tienen dos posibilidades de elección: enseñanzas académicas (ofrecen la posibilidad de fortalecer tanto los aspectos teóricos como las aplicaciones prácticas en contextos reales) y enseñanzas aplicadas (se centran en las aplicaciones prácticas de los problemas en situaciones de la vida cotidiana).

Con la enseñanza de las Matemáticas se persiguen los siguientes objetivos:

- Aplicar adecuadamente herramientas matemáticas a situaciones de la vida cotidiana.
- Dotar a los alumnos de capacidades y estrategias para la resolución de cualquier tipo de problema de índole matemática.
- Integrar las matemáticas dentro de la cultura del alumno, desde un punto de vista histórico, y apreciando su papel en el desarrollo de la sociedad actual. Así mismo, dotarle de herramientas para apreciar el uso de las matemáticas en el arte.
- Incorporar las matemáticas, su modo de expresión y su razonamiento al lenguaje y modo de argumentación de la persona, para conseguir dotarle de un pensamiento crítico y reflexivo.
- Dotar al alumno del manejo de recursos informáticos en el ámbito de las matemáticas, como calculadoras y programas informáticos para la resolución de problemas.

Las matemáticas contribuyen a la adquisición de todas las competencias básicas:

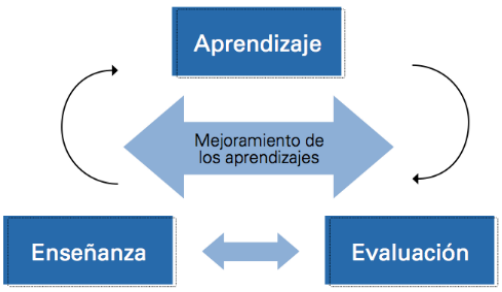
- **Competencia matemática.** Todos los contenidos de la materia están orientados a potenciar y desarrollar en los alumnos el razonamiento matemático, mediante la aplicación de diferentes destrezas, actitudes y argumentación matemática.
- **Competencia en conocimiento e interacción con el mundo físico.** El aprendizaje de las matemáticas contribuye al desarrollo de habilidades para desenvolverse en diferentes ámbitos de la vida así como áreas de conocimiento y analizar fenómenos y elementos de la realidad. Ello se consigue a través del estudio de relaciones y estructuras geométricas, el desarrollo de la visión espacial, el análisis probabilístico, etc. La modelización constituye otro referente en esta misma dirección.
- **Tratamiento de la información y competencia digital.** Esta competencia consiste en disponer de habilidades para buscar, obtener, procesar y comunicar la información, así como transformarla en conocimiento. En la enseñanza de las matemáticas es posible incorporar herramientas tecnológicas para la comprensión de conceptos, la elaboración de modelos, la resolución de problemas o la representación gráfica de los mismos, lo permitirá al alumno aprender a tratar y procesar la información.
- **Competencia en comunicación lingüística.** Esta competencia se trabaja en especial durante la resolución de problemas ya que es necesario que el alumno sepa expresar, tanto de forma oral como escrita, el proceso realizado y los razonamientos seguidos a fin de formalizar el pensamiento. Es imprescindible que aprenda a expresarse correctamente mediante el lenguaje matemático, el cual destaca por su precisión y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio.
- **Competencia social y ciudadana.** El conocimiento matemático aporta a los alumnos la capacidad de análisis objetivo de la realidad así como criterios científicos para poder tomar decisiones adecuadas y fundadas. Además, las matemáticas fomentan el sentido crítico y reflexivo debido a que los problemas no tienen un único método de resolución y los alumnos deben, por tanto, valorar e investigar la forma de afrontarlos.

- **Competencia en expresión cultural y artística.** La materia de matemáticas contribuye al desarrollo de esta competencia puesto que el propio conocimiento matemático forma parte de la expresión universal de la cultura, sin embargo, existen campos particulares, como el de la Geometría, que tienen una relación más directa con el mundo del arte. El conocimiento de conceptos y recursos geométricos ayudará al alumno (en el presente y en el futuro) a cultivar la sensibilidad y el gusto estético por las formas y a aplicar estos conocimientos a diferentes campos artísticos.

- **Competencia para aprender a aprender.** Esta competencia consiste en la disposición de habilidades para iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma. Tanto las explicaciones como los ejercicios de matemáticas están orientados hacia la perseverancia y el esfuerzo para abordar situaciones de creciente complejidad, la sistematización y el pensamiento crítico.

- **Autonomía e iniciativa personal.** A través de la materia de matemáticas se desarrolla esta competencia puesto que los procesos de resolución de problemas ayudan al alumno a aprender a planificar estrategias, asumir retos, convivir con la incertidumbre y a tomar decisiones.

La evaluación de las matemáticas forma parte de su didáctica. El concepto de evaluación varía desde ser considerada como una mera valoración numérica de los logros académicos (método cuantitativo), hasta ser considerada una herramienta que además de calificar al alumno informa de los puntos fuertes y débiles del proceso de enseñanza-aprendizaje en la que este ha de apoyarse (método cualitativo).



Así, en la perspectiva actual, la evaluación deja de centrarse únicamente en la valoración académica del alumno, y fija cada vez más su atención en las interacciones que ocurren en el aula, convirtiéndose a su vez en una herramienta de reflexión sobre el propio proceso de enseñanza-aprendizaje. La evaluación pasa a ser un eje regulador del proceso educativo, por lo que es necesario que todo el equipo del centro se involucre activamente para adaptar el proceso a las necesidades que van dictando los resultados de la propia evaluación.

De acuerdo con este concepto de evaluación, podemos definir las siguientes funciones de la evaluación matemática:

- **Función social**. La evaluación puede realizar una clasificación social, ya que supone el reconocimiento de haber adquirido una serie de habilidades y conocimientos.

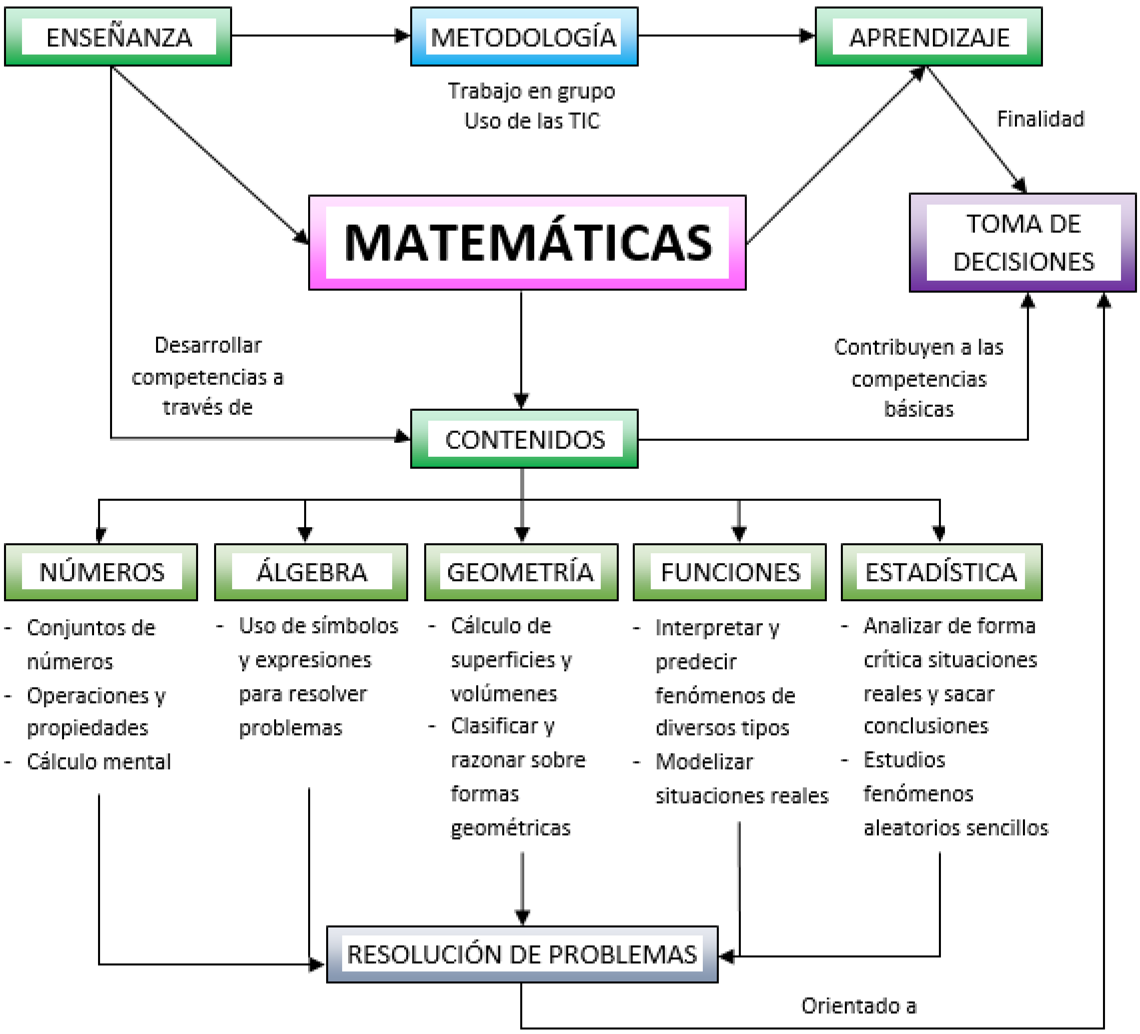
- **Función pedagógica**. La evaluación regula y controla el aprendizaje del alumno y sus interacciones con el procedimiento educativo utilizado, y es una herramienta muy útil para guiar el proceso pedagógico utilizado por el profesor.

- **Función profesional**. Debe servir para identificar habilidades, regular el proceso o para intervenir en la planificación promoviendo mejoras e influyendo en las decisiones.

Los medios TIC son recursos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas que sirven de apoyo al profesor y favorecen muy notablemente el aprendizaje de los alumnos a todos los niveles. En el campo de la matemática destacan los siguientes:

- **Cabri Géomètre II Plus**: Es un software de geometría dinámica de fácil manipulación y de rápido aprendizaje, que permite a los estudiantes visualizar, descubrir, conjeturar y comprobar propiedades que se deseen trabajar.
- **GeoGebra**: Es un software gratuito y de código abierto de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos, que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. Su gran utilidad radica en el hecho de que está especialmente diseñado para la enseñanza secundaria.
- **Descartes**: Herramienta para crear objetos interactivos, diseñada especialmente para las matemáticas, aunque aplicable también a otros temas y asignaturas. Además de trabajar en geometría, se pueden crear gráficos de álgebra, estadística o funciones.
- **Wiris:** Aplicación online que permite construir y resolver expresiones algebraicas.

Aparte de estas aplicaciones específicas, es conveniente hacer uso de las calculadoras, pantallas digitales u ordenadores.



4. LA GEOMETRÍA EN LAS MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

4.1 IMPORTANCIA DE LA GEOMETRÍA DENTRO DE LAS MATEMÁTICAS

La Geometría es probablemente la parte más antigua de las matemáticas, formada en un principio por un conjunto de conocimientos prácticos para satisfacer la necesidad de medir longitudes, áreas y volúmenes. Posteriormente, también las necesidades cartográficas y astronómicas impulsan los descubrimientos geométricos. "Los Elementos" de Euclides exponen toda la Geometría y Aritmética de su tiempo, se utiliza en ellos un sistema axiomático (basado en cinco postulados o axiomas) que ha perdurado hasta el siglo XIX en la enseñanza de la Geometría. Los trece volúmenes de "Los Elementos" son considerados como una de las mayores aportaciones de la cultura occidental. Descartes, mediante la introducción de coordenadas, establece una indisoluble relación entre Álgebra y Geometría, dando lugar a la Geometría Analítica. Las aportaciones de Euler, Gauss y Riemann nos llevarán al nacimiento de la Topología y la Geometría Diferencial.

Los tres problemas geométricos de la Antigüedad

Platón propuso para las construcciones geométricas el uso solo de la regla y del compás, al considerarlos instrumentos divinos ya que permitían la construcción con precisión, mientras que otro tipo de curvas introducidas con instrumentos mecánicos no permitían tal precisión.

La geometría griega fracasó ante estos tres problemas:

- Duplicación del cubo (utilizando solo regla y compás): ¿Cómo determinar el lado de un cubo, cuyo volumen fuese exactamente el doble del volumen de otro cubo dado?
- Trisección del ángulo: ¿Cómo dividir un ángulo, utilizando solo regla y compás, en tres ángulos iguales?
- Cuadratura del círculo (utilizando solo regla y compás): ¿Cómo determinar el lado de un cuadrado cuya área sea la de un círculo dado?

Estos tres problemas geométricos, no resueltos por la geometría griega, habrían de esperar a que el avance del Álgebra permitiera una respuesta definitiva: ninguna de las tres construcciones es posible en general usando sólo regla y compás.

La Geometría en la Edad Media

Durante los siguientes siglos la Matemática avanza de la mano de hindúes y árabes en Trigonometría (por su relación con la Astronomía) y Álgebra (introducción del cero), pero en Geometría apenas se conocen nuevas aportaciones. En Occidente, a pesar de que la Geometría es una de las siete Artes liberales (encuadrada en el Quadrivium), las escuelas y universidades se limitan a enseñar "Los Elementos", y no hay nuevas aportaciones.

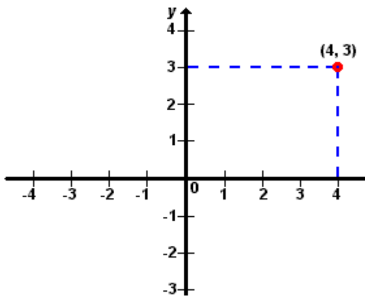
La Geometría en el Renacimiento: Geometría Proyectiva

Es en el Renacimiento cuando las nuevas necesidades de representación del arte y de la técnica empujan a ciertos humanistas a estudiar propiedades geométricas para obtener nuevos instrumentos que les permitan representar la realidad. Tras descubrir la perspectiva y la sección, sientan las bases formales en las que cimentar la Geometría Proyectiva, cuyos principios fundamentales aparecen de la mano de Desargues en el siglo XVII. Esta nueva geometría de Desargues fue estudiada ampliamente por Pascal, pero, debido al interés suscitado por la Geometría Analítica de Descartes, no alcanzó gran difusión hasta la llegada de Gaspard Monge (principios del siglo XIX) en primer lugar y sobre todo de Poncelet.

La Geometría Cartesiana

La Geometría en la Edad Moderna lleva la impronta de Descartes, quien con su geometría analítica propone un nuevo método de resolver problemas geométricos y, por extensión, de investigar en geometría.

El nuevo método aborda la geometría utilizando ecuaciones algebraicas. Tras la introducción de coordenadas cartesianas en el plano, los puntos se corresponden con pares de números reales, y las relaciones entre los puntos se traducen por ecuaciones entre sus coordenadas. Se cambian la regla y el compás clásicos por expresiones numéricas relacionadas por ecuaciones algebraicas.



Persiste una cierta controversia sobre la verdadera paternidad de este método. Lo cierto es que se publica por primera vez como "Geometría Analítica", apéndice al "Discurso del Método", de Descartes, si bien se sabe que Pierre de Fermat conocía y utilizaba el método antes de su publicación por Descartes. Aunque Omar Khayyam ya en el siglo XI utilizara un método muy parecido para determinar ciertas intersecciones entre curvas, es imposible que alguno de los citados matemáticos franceses tuviera acceso a su obra.

Lo novedoso de la Geometría Analítica es que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x, y) = 0$, donde f representa una función. En particular, las rectas pueden expresarse como ecuaciones polinómicas de grado 1 y las circunferencias y el resto de cónicas como ecuaciones polinómicas de grado 2. Esto convierte toda la Geometría griega en el estudio de las relaciones que existen entre polinomios de grados 1 y 2. El método sintético da paso al algebraico: estudio de los objetos geométricos como representaciones en el espacio del conjunto de raíces de polinomios.

Tras el desarrollo del Álgebra Moderna y de la Lógica Matemática entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX, la Geometría de los griegos puede desprenderse de sus axiomas y estudiarse directamente usando la axiomática de la Teoría de Conjuntos, como el resto de la Matemática.

La Geometría Algebraica y la Geometría Diferencial

El método algebraico en Geometría se vio posibilitado por el avance en Álgebra que tuvo lugar durante el siglo XVI: la resolución de las ecuaciones de grado 3º y 4º. Esto permitió generalizar la Geometría, al estudiar curvas que no vienen dadas por polinomios de segundo grado, y que no pueden construirse con regla y compás. Pero este método, que terminará constituyendo una disciplina propia, la Geometría Algebraica, tardará aún mucho en salir de unas pocas nociones iniciales, pues habrá de esperar al desarrollo de la Teoría de Anillos y del Álgebra

Conmutativa en el siglo XX. Téngase en cuenta que la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de quinto grado no fue descubierta hasta el siglo XIX

El método algebraico tiene otra generalización natural, que es la de considerar una curva no como una ecuación polinómica, sino como una ecuación $f(x,y) = 0$ en la que el polinomio es ahora sustituido por una función f de dos variables, o bien $f(x,y,z) = 0$ cuando lo generalizamos a tres variables. Vemos una curva como el conjunto de ceros de una función diferenciable de dos variables, y una superficie curva como el conjunto de ceros de una función diferenciable de tres variables. La relación entre el Análisis Matemático y la Geometría se hace así estrechísima desde incluso los orígenes del mismo. Las ideas geométricas no solo fueron la base de los instrumentos iniciales del Cálculo Infinitesimal, sino que fueron en gran medida su inspiración.

La principal aportación de Gauss a la geometría es la creación de la geometría diferencial, es Gauss quien introduce la noción fundamental de curvatura de una superficie y muestra el paralelismo entre las rectas del plano y las geodésicas de una superficie: si tenemos dos puntos sobre una superficie, el camino más corto entre esos dos puntos sin salirnos de la superficie es un segmento de geodésica. Existen superficies en las que los triángulos formados por geodésicas miden más de la medida de dos ángulos rectos, y otras en las que mide menos. Esto, esencialmente, es contradecir el V postulado de Euclides. Estas consideraciones mostraron a Gauss la existencia de geometrías no euclídeas, pero nunca publicó esos resultados. Sólo vieron la luz cuando Bolyai publicó su geometría no euclídea. Son Bolyai y Lobatchevsky quienes, de manera independiente y simultáneamente publican cada uno una geometría distinta en la que no se verifica el V postulado de Euclides.

4.2 LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

Piaget así como otros psicólogos y pedagogos, en la década de los sesenta, tienen una influencia directa en la comunidad escolar en cuanto a la geometría que debía formar parte de la Enseñanza Secundaria, habiéndose alcanzando en estos momentos un cierto consenso:

- La geometría sintética en la enseñanza obligatoria (Primaria y E.S.O.).
- La geometría analítica en la post-obligatoria (Bachillerato).

La geometría sintética, propia del modelo «euclidiano», está basada en una axiomática más o menos explícita, mientras que la geometría analítica, propia del modelo «cartesiano», se sustenta en las técnicas del álgebra, cuya axiomática suele quedar más implícita.

Luis Antonio Santaló afirma que, por lo que respecta a la enseñanza de la geometría, se ha caído repetidamente en el error de pensar que los fundamentos de una ciencia, por el hecho de partir de cero, son la parte más fácil y simple de la misma y que, por tanto, deben ser el punto de partida para su estudio. Afirma también que, como es imposible una construcción impecable y rigurosa de la geometría sin salirse del nivel elemental y sin rebasar la capacidad de aprendizaje de los alumnos, en torno a 1980 se optó por suprimir la geometría o trasladarla al álgebra lineal, con la consiguiente pérdida total de sus características de belleza y armonía que la habían acompañado desde la antigüedad.

Para Santaló, la geometría en el sentido clásico tiene mucho que ofrecer como gimnasia razonadora y como depósito de ejemplos que ayuden a comprender el mundo, la Matemática y las ciencias naturales.

Es indudable que la "belleza" y la "utilidad" de la geometría es una parte importante de la cultura del hombre, no es fácil encontrar contextos en los que la geometría no aparezca de forma directa o indirecta. Actividades tan variadas como la ingeniería, el deporte o la arquitectura se sirven de la utilización de procedimientos geométricos.

También la geometría basa su importancia en cuanto a ser formadora de la "visión espacial y del razonamiento lógico". Pocos son quienes discuten su trascendencia tanto en estudios posteriores de cualquier ciencia como en el desarrollo de habilidades cotidianas. No es casual que la geometría fuese ya en la antigua Grecia una rama importante del saber (incluso antes).

La geometría ha sido durante siglos uno de los pilares de la formación académica desde edades tempranas y aunque, como ya se ha dicho, en el siglo pasado perdió paulatinamente presencia en los planes de estudio, afortunadamente, los actuales currículos de matemáticas de todos los niveles educativos confieren a la geometría la importancia que nunca debió perder.

En los objetivos generales del currículo del área de geometría, publicados por en el BOCyL, se apunta:

"*Aplicar los conocimientos geométricos para comprender y explicar formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad del espacio físico que nos rodea, en el campo de la tecnología y en las distintas formas de expresión artística*".

El NCTM en los Principios y Estándares para la Educación Matemática afirma:

"*La Geometría ofrece medios para describir, analizar y comprender el mundo, y ver la belleza en sus estructuras*"

Estos argumentos difieren muy poco de las afirmaciones ya expresadas por Galileo:

"*El Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras. Sin ese lenguaje, navegamos en un oscuro laberinto*".

En la actualidad disponemos de una herramienta auxiliar extraordinaria, el ordenador, para el aprendizaje de la geometría. Los programas de geometría dinámica han demostrado en las dos últimas décadas su capacidad de ayuda al usuario para adquirir destrezas en uno de los campos más creativos de las matemáticas.

Pero, ¿la enseñanza de la Geometría responde a estas demandas?

En el estudio Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria 2000, desarrollado por el I.N.C.E. (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación) y las Comunidades Autónomas, se pone de manifiesto el escaso progreso en el aprendizaje de la geometría de nuestros alumnos.

Nos hacemos las siguientes preguntas:

- ¿Estamos enseñando a nuestros alumnos una geometría adecuada?
- ¿Es suficiente que nuestros alumnos calculen longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas a partir de unos datos, despejando la magnitud desconocida de una expresión algebraica que relaciona objetos geométricos?
- ¿Es más importante calcular el área de un triángulo rectángulo o construir el triángulo rectángulo a partir de una circunferencia?
- ¿Qué geometría debemos enseñar?
- ¿Pueden nuestros alumnos estudiar geometría analítica en el segundo ciclo de educación secundaria obligatoria y en el bachillerato **sin conocimientos sólidos de geometría sintética (axiomática)**?

En el siguiente apartado analizaremos los fundamentos de la geometría para así, poder sacar conclusiones y hacer, posteriormente, una propuesta didáctica que introduciremos en el aula de uno de los cursos de la E.S.O., donde el alumno podrá apreciar la geometría desde un punto de vista axiomático.

5. BREVE ESTUDIO DE LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA

5.1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

La palabra "*Geometría*" proviene del griego, concretamente de los vocablos *geo* (tierra) y *metreim* (medir), por lo que su significado se traduce como "*medida de la tierra*", lo cual literalmente implica que esta rama de las matemáticas se centra en la medida de los objetos terrestres. Como ya hemos comentado anteriormente, la geometría tiene sus inicios en la medida práctica necesaria para la agricultura de la civilización babilónica y egipcia. Estas dos culturas eran conocidas por sus grandes avances en ingeniería, los cuales les permitían prever y controlar inundaciones, diseñar avanzados sistemas de riego y la construcción de grandes edificios y estructuras. Buena parte de la geometría egipcia y babilónica estaba, no obstante, restringida únicamente al cálculo de medidas de segmentos, áreas y volúmenes. Los resultados que obtenían, normalmente a partir de una secuencia de instrucciones aritméticas, eran hallados de manera empírica y en muchos casos eran incorrectos. Por ejemplo, los egipcios utilizaban la siguiente fórmula: $A = 1/4\ (a + c)\ (b + d)$ para calcular el área de cualquier cuadrilátero cuya medida de lados sucesivos es a, b, c y d. Esta expresión es correcta para el caso de los rectángulos, pero no para los cuadriláteros en general. No fue hasta la primera mitad del siglo VI a.C. cuando los matemáticos comenzaron a cuestionarse si estos resultados obtenidos de manera empírica eran ciertos. Es en este momento cuando se produce un profundo cambio en la manera en la que la geometría es concebida, ya que los matemáticos griegos introducen la abstracción, la deducción lógica y las demostraciones en la geometría. Se comienza a dar importancia a que los resultados estén basados en razonamientos lógicos efectuados a partir de unos principios generales, lo que hace que sean exactos, verdaderos e incuestionables, en lugar de simplemente aproximados. Esta nueva forma de entender y trabajar con la geometría hace que esta de un salto desde el campo de la experiencia práctica diaria a ser una ciencia que estudia entidades abstractas.

El desarrollo de la geometría moderna, como toda la Matemática en general, ha seguido un camino puramente formal, elaborándose a partir de <u>sistemas axiomáticos</u>, los cuales sientan las bases para poder formular teoremas y llegar a resultados exactos, utilizando un razonamiento estrictamente lógico. Es por ello que las recientes investigaciones y desarrollos en el estudio de la geometría tienen poco o nada que ver con sus orígenes históricos. De hecho, el estudio contemporáneo de la geometría no requiere necesariamente tomar medidas reales de objetos y ni siquiera está restringida a la tierra.

5.2 MÉTODO AXIOMÁTICO, SISTEMAS AXIOMÁTICOS Y MODELOS

Método axiomático

Es fundamental comprender en qué consiste el método axiomático para entender los fundamentos de la geometría, pero su importancia va más allá, ya que no solo es utilizado en el desarrollo de la geometría, sino, como acabamos de decir, de toda la matemática moderna. El método axiomático es un procedimiento mediante el cual es posible demostrar o probar que los resultados (teoremas, etc.) obtenidos a través de la experimentación, observación, método de prueba y error o incluso mediante la intuición, realmente son correctos. Este método, pues, tiene como objeto aumentar la claridad y certeza de los conceptos aceptados de una determinada ciencia y crear así una base sólida para la misma.

El método axiomático se basa en la formulación de un conjunto de axiomas o postulados, relacionados entre sí de manera deductiva, que funcionan como hipótesis o condiciones de partida para un determinado sistema, llamado sistema axiomático.

Sistema axiomático

La <u>estructura de un sistema axiomático</u> está establecida por las siguientes partes del mismo: términos primitivos, términos definidos, axiomas o postulados, demostraciones, teoremas, reglas de inferencia y lenguaje.

- <u>Términos primitivos o indefinidos</u>. Se trata de ciertos términos que no se definen sino que se asumen como palabras clave del sistema, debido a la imposibilidad de definir todos los conceptos sin caer en redundancias. Además, de hacer esto, acabaríamos con una secuencia interminable de definiciones. En geometría, los términos "línea" o "punto" suelen considerarse términos primitivos.

- Términos definidos. Algunos términos del sistema axiomático sí que se definen. El objetivo es partir de un número reducido de términos primitivos y posteriormente definir otras palabras utilizando los términos primitivos así como otros términos ya definidos. El propósito de las definiciones no es sólo facilitar el entendimiento de los enunciados y aportar claridad, sino acortarlos.

- Axiomas o postulados. Los axiomas son enunciados que son aceptados sin demostración y se asumen, por tanto, como verdades absolutas del sistema axiomático. Todas las suposiciones relevantes deben estar basadas en los axiomas y las únicas propiedades de los términos primitivos que pueden ser utilizadas en las demostraciones son aquellas que se encuentran de forma explícita en los axiomas (nunca otras propiedades o hechos obtenidos a partir de la intuición o la experiencia). Los axiomas constituyen el punto de partida de cualquier demostración, por lo que son el núcleo y parte más importante del sistema axiomático.

- Demostraciones. En un sistema axiomático, la demostración de un resultado específico es simplemente una secuencia de enunciados, cada uno de los cuales se deduce de manera lógica de los anteriores, y que nos lleva de una afirmación que se sabe que es verdadera a otra que es la que inicialmente queríamos probar. A esta última afirmación verdadera, por tanto, se le llama teorema.

- Teoremas. Constituyen la última de las proposiciones de un proceso deductivo, por ello, es una verdad dentro del sistema que puede ser demostrada a partir de los axiomas del mismo.

- Reglas de inferencia. Para que una demostración sea convincente y correcta es necesario establecer unas reglas básicas para determinar cuándo un enunciado se deduce lógicamente de otro.

- Lenguaje. Para que los axiomas, demostraciones y teoremas puedan ser comprendidos por todo el que los lea, debe estar definido un lenguaje. Este lenguaje puede ser formal, en el que cada enunciado es una cadena finita de signos en el alfabeto del lenguaje formal, o puede ser informal, en el que los enunciados se expresan mediante la lengua natural formalizada.

Todo sistema axiomático debe ajustarse y cumplir lo siguiente:

- Todo sistema axiomático contiene un conjunto de términos técnicos que son deliberadamente elegidos como términos primitivos del sistema y que están sujetos a la interpretación del lector.

- Todos los demás términos técnicos del sistema están definidos en última instancia por medio de los términos primitivos.

- Todo sistema axiomático contiene un conjunto de enunciados que, al igual que ocurre con los términos primitivos, se decide que no necesiten ser demostrados. Estos son los axiomas del sistema axiomático.

- Todas las demás proposiciones del sistema deben ser consecuencias lógicas de los axiomas. Estos enunciados derivados son llamados teoremas del sistema axiomático.

Modelos

En un sistema axiomático, tal como se ha descrito, los términos primitivos no tienen por sí mismos ningún significado, exceptuando aquello que está explícitamente definido en los axiomas. Estos términos, por tanto, podrían ser interpretados de cualquier forma, siempre que se mantenga la coherencia con los axiomas. Una interpretación de un sistema axiomático es una manera particular de dar significado a los términos primitivos del mismo, y es llamada "modelo para el sistema axiomático" cuando se cumple que los axiomas son enunciados correctos (verdaderos) para esa interpretación. Debido a que todos los teoremas del sistema están deducidos de forma lógica a partir de los axiomas, sabemos que, si los axiomas son verdaderos para un determinado modelo, automáticamente todos los teoremas serán también correctos para ese modelo.

Se dice que un enunciado o proposición en un sistema axiomático es independiente de los axiomas si es imposible tanto probar que es cierta como probar que es falsa siguiendo un proceso de deducción lógica a partir de los axiomas. Una buena forma de mostrar si una proposición es independiente de los axiomas es encontrar un modelo para ese sistema en el que la proposición sea cierta y otro modelo en el que sea falsa. Como se mostrará más adelante, esta es exactamente la forma en la que se suele mostrar que el quinto postulado de Euclides es independiente del resto de postulados de Euclides.

Un sistema axiomático se considera consistente si ninguna contradicción lógica puede derivarse de sus axiomas (propiedad deseable para todo sistema axiomático). Los modelos resultan muy útiles en este aspecto ya que se cumple que si existe al menos un modelo para un sistema axiomático determinado, entonces ese sistema es consistente, lo que quiere decir que sus axiomas son consistentes. La existencia de un modelo para la geometría euclidiana y, por lo tanto, la consistencia de los postulados de Euclides se dio por sentado hasta el siglo XIX, momento en el cual comienzan a plantearse cuestiones acerca de la consistencia y existencia de modelos.

5.3 LA GEOMETRÍA EUCLÍDEA Y LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

El proceso de introducir la lógica en la geometría (comentado anteriormente) aparentemente comenzó con Tales de Mileto, hacia el año 600 a.C. y culminó con el trabajo de Euclides de Alejandría en torno al año 300 a.C. Euclides es el geómetra griego más famoso, tanto que su nombre es conocido universalmente y asociado con la geometría que se estudia en las escuelas hoy en día. La mayoría de las ideas incluidas en lo que normalmente denominamos "Geometría Euclídea" probablemente no proceden realmente de Euclides, sin embargo, la gran contribución de Euclides fue el hecho de organizar y exponer los conocimientos geométricos de la Grecia clásica de una forma lógica y coherente. Los resultados de Euclides fueron publicados en un tratado compuesto por trece libros conocido como *Los Elementos*, cuya importancia y trascendencia ha sido enorme, pues han establecido la guía para el desarrollo de la geometría durante los siguientes dos milenios.

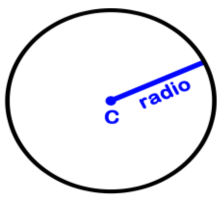
Los Elementos de Euclides están organizados a partir de reglas lógicas estrictas. Cada uno de los libros de Euclides comienza con una rigurosa lista de definiciones de los términos técnicos que serán usados posteriormente en el libro. En el "Libro I" se establecen, después de las definiciones, cinco "*postulados*" así como cinco "*nociones comunes*" (que equivaldrían a los axiomas). Tanto los postulados como las nociones comunes son afirmaciones muy básicas y sencillas obtenidas a partir de la percepción y la experiencia práctica, evidentes para cualquier persona, y son aceptados sin demostración. Euclides sabía que es imposible demostrarlo todo y que era necesario asumir algunas nociones como ciertas, por ello trató de ser muy claro en relación a exactamente qué conceptos estaba asumiendo.

Postulados de "Los Elementos" de Euclides

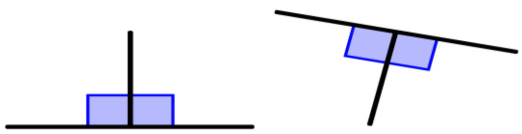
- Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.

- Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

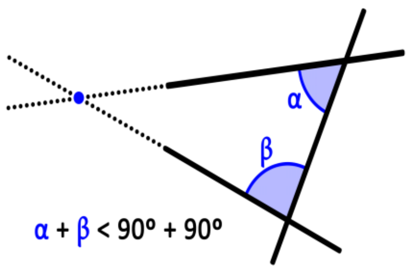
- Se puede trazar una circunferencia con un centro y un radio cualquiera.



- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.



- **(Postulado de las paralelas).** Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.



De los cinco postulados planteados por Euclides, el quinto (postulado de las paralelas) resulta ser el más controvertido y complicado de todos, dando lugar a lo largo de la historia a grandes discusiones y debates. Se ha demostrado que es el único que es independiente del resto, lo que quiere decir que es posible la construcción de geometrías que cumplen todos los postulados de Euclides excepto el quinto.

Nociones comunes de "Los Elementos" de Euclides

- Varias cosas que son iguales a otra cosa son también iguales entre sí.
- Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales también son iguales.
- Si a cosas iguales se les substraen cosas iguales, los totales también son iguales.
- Varias cosas que coinciden con otra cosa son iguales a la otra cosa.
- El todo es mayor que la parte.

Una vez establecidos los puntos de partida (definiciones, postulados y nociones comunes), en *Los Elementos*, Euclides desarrolla toda una secuencia de deducciones o demostraciones partiendo de los mismos, para llegar a distintos teoremas y finalmente constituir lo que hoy conocemos como "Geometría Euclídea".

Geómetras más recientes, tales como David Hilbert o G.D.Birkhoff, han desarrollado diferentes aproximaciones a la Geometría Euclídea a partir de grupos de axiomas distintos a los de Euclides, así como diferentes definiciones y una mejor y más precisa aplicación de las reglas de la lógica. A continuación, se estudiarán algunos de estos sistemas axiomáticos, que no son más que diferentes formas de construir la Geometría Euclídea.

Cabe mencionar también que otros matemáticos han construido geometrías no euclídeas, lo cual es posible solo porque, en estas geometrías, se asumen postulados que contradicen algunos de los postulados de Euclides. De igual manera, en este tipo de sistemas geométricos se incluyen teoremas que contradicen algunos de los demostrados por Euclides.

5.4 SISTEMAS AXIOMÁTICOS PARA LA GEOMETRÍA EUCLÍDEA

5.4.1 INTRODUCCIÓN

La lucha de dos mil años para comprender el lugar del quinto postulado de Euclides dentro de los fundamentos de la geometría dio lugar a algo más que al descubrimiento de que el quinto postulado es independiente de los otros; también condujo a una nueva visión de lo que un sistema axiomático debe incluir. Mientras que Euclides se daba por satisfecho con simplemente establecer como axiomas algunos enunciados clave, actualmente se demanda que los axiomas de un sistema axiomático especifiquen todo aquello que se deduce de los términos primitivos del sistema. Esto significa que un tratamiento axiomático moderno de la geometría debe partir de un conjunto mucho más extenso de axiomas comparados con los de Euclides. Actualmente no existe un consenso sobre cuáles y cómo deben ser formulados los axiomas para la geometría plana y es por ello que conviven varios sistemas axiomáticos diferentes, planteados por distintos matemáticos.

Es ampliamente conocido el hecho de que los postulados de Euclides no contienen todas las suposiciones necesarias, pero surge entonces la pregunta siguiente: ¿qué debe ser añadido para completar las suposiciones que faltan en el sistema Euclidiano? Existen fundamentalmente dos maneras de dar respuesta a esta cuestión, es decir, dos formas distintas de conseguir incluir en el sistema todas las hipótesis adicionales necesarias para construir la geometría de manera correcta. La primera de ellas consiste en establecer axiomas que completen todas las suposiciones en términos puramente geométricos. Existen dos matemáticos que han desarrollado sistemas axiomáticos de esta manera: David Hilbert (1899) y Oswald Veblen (1904). De estos dos sistemas es mucho más conocido el de Hilbert. El segundo método se originó con G. D. Birhoff en torno al año 1930, el planteamiento de este matemático es basar los axiomas de la geometría en el conocimiento previo sobre el sistema de números reales. Este tipo de geometría construida sobre los números reales es denominada "geometría métrica" ya que los números reales son utilizados para tomar medidas de ciertos elementos geométricos.

5.4.2 AXIOMAS DE HILBERT

Introducción y contexto histórico

Durante el siglo XIX resultó evidente para los matemáticos interesados en geometría que no existía un único sistema axiomático que diese lugar a un modelo geométrico universal. Además, se llegó al consenso de que la validez de un sistema geométrico dependía exclusivamente de la consistencia, independencia e integridad del conjunto de axiomas sobre el que está construido. Es cierto que se sabía que diferentes conjuntos de axiomas podían dar lugar a modelos diferentes, pero el estudio de la geometría dejó de estar restringido por la noción de que el modelo resultante debía encajar con el modelo euclidiano.

Sin embargo, como el modelo geométrico euclidiano era, con mucho, el más intuitivo y el que contaba con una base histórica más amplia, varios matemáticos asumieron la tarea de construir un conjunto de axiomas que diera lugar a los teoremas de Euclides y que además cumpliera los requerimientos modernos en cuanto a rigor matemático. De entre estos trabajos el más conocido es "*Grundlagen der Geometrie*" (los fundamentos de la geometría), publicado en el año 1899 por David Hilbert, posiblemente el matemático más destacado de la época.

Realmente, "*Grundlagen der Geometrie*" formó parte de un extenso trabajo en el cual Hilbert pretendía concluir que los sistemas axiomáticos matemáticos, tales como la Geometría Euclídea, podían establecerse para las diversas ramas de las matemáticas de tal manera que fueran consistentes, independientes y completos. Kurt Gödel demostró en 1931 que esta meta era imposible. No obstante, la presentación de la Geometría Euclídea que realizó Hilbert supuso un importante paso hacia adelante en la historia de las matemáticas, y particularmente de la Geometría, ya que está exenta de los defectos presentes en "Los Elementos" de Euclides.

Hilbert conocía muy bien las exigencias de la axiomática moderna y fue capaz de establecer un conjunto muy simple de términos indefinidos a partir de los cuales podían definirse todos los términos necesarios para construir la geometría euclídea plana.

Términos indefinidos del sistema axiomático de Hilbert

- Punto.
- Recta.
- Plano.
- Estar sobre (noción de incidencia de punto a línea).
- Estar entre (relación relativa a tres puntos distintos).
- Congruencia (relación de equivalencia).

Con estas sencillas nociones básicas, Hilbert fue capaz de definir los distintos conjuntos de puntos, así como relaciones entre objetos geométricos, tales como líneas paralelas y perpendiculares. Una vez establecidas las definiciones precisas de los objetos geométricos y de las relaciones geométricas entre ellos, Hilbert procedió a componer los axiomas que darían lugar a los teoremas de Euclides.

Algunas definiciones de objetos geométricos dadas por Hilbert

A continuación se mostrarán, a modo de ejemplo, algunas definiciones de objetos geométricos dentro del sistema axiomático de Hilbert:

- **Definición de Segmento de línea $\overline{AB}$**. Dados dos puntos A y B distintos, el segmento de línea AB es el conjunto de todos los puntos que están entre A y B. Los puntos A y B se conocen como los extremos del segmento (para Hilbert los extremos del segmento no pertenecen al segmento).
- **Definición de semirrecta o rayo $\overrightarrow{AB}$**. Dados dos puntos A y B distintos, la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de todos los puntos del segmento AB y los puntos C tales que B esté entre A y C. Decimos que la semirrecta "emana de A" o que A es el punto de origen de la semirrecta.
- **Definición de ángulo BAC.** Dados tres puntos A, B y C distintos, el ángulo BAC es el par de semirrectas ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) que emanan de un mismo punto A, al que llamamos vértice del ángulo, y no son opuestas.
- **Definición de triángulo ABC.** Dados tres puntos A, B y C distintos no alineados, el triángulo $\widehat{ABC}$ es el conjunto de puntos definido por la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, los cuales son llamados lados del triángulo, mientras que los puntos A, B y C son llamados vértices.
- **Definición de circunferencia S(O,$\overline{OA}$).** Dados un punto O y un segmento $\overline{OA}$, la circunferencia S (O,$\overline{OA}$) es el conjunto de puntos P tales que $\overline{OP} \equiv \overline{OA}$ (el segmento $\overline{OP}$ es congruente con el segmento $\overline{OA}$).

Algunas definiciones de relaciones geométricas dadas por Hilbert

De igual manera, se expondrán también algunas definiciones de relaciones geométricas dadas por Hilbert para su sistema axiomático:

- **Definición de "estar del mismo lado de una recta":** Sea m una recta y sean A y B dos puntos que no están sobre m, decimos que "*A y B están del mismo lado de m*" si, o bien A y B son el mismo punto (A=B), o bien A y B son puntos distintos (A≠B) y el segmento $\overline{AB}$ no corta a m (no tiene puntos en común con m). En caso contrario, decimos que "*A y B no están del mismo lado de m*".
- **Definición de "interior de un ángulo".** Un punto D está en el interior de un ángulo $\widehat{CAB}$ si D está del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ que B y si D y C están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Axiomas del Sistema Axiomático de Hilbert

A continuación se enunciarán los axiomas definidos por Hilbert, agrupados en 5 grandes bloques, así como algunos de los teoremas y postulados que de ellos se deducen.

I. Axiomas de incidencia

- **I.1.** "*Por cada par de puntos distintos A, B, existe una única recta m tal que A y B estén sobre m*".
- **I.2.** *"Cada recta contiene al menos dos puntos distintos."*
- **I.3.** *"Existen al menos tres puntos que no están sobre la misma recta."*

Estos axiomas determinan lo que se conoce como "geometría de incidencia". Si a estos axiomas le añadimos el axioma de las paralelas (que se enunciará más adelante) podemos construir la llamada "geometría afín".

El primer postulado de Euclides se enuncia como "*Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta*". Si lo contrastamos con el axioma I.1 vemos que el sentido general es el mismo, pero con la diferencia de que Hilbert añade el concepto de unicidad. Hilbert no sólo postula la existencia de una recta entre dos puntos distintos, sino que también postula la unicidad de la misma (Realmente Euclides pretendía llegar a esa misma idea, pero falla al realizar los postulados).

Debido a que el conjunto de axiomas de Hilbert pretende proporcionar la base de la geometría euclídea tradicional, debemos esperar que todas nuestras ideas intuitivas acerca de la geometría plana sean válidas en su sistema axiomático. Por ejemplo, supongamos que m y q son rectas. ¿Es posible que m y q se corten en más de un punto? La mayoría de nosotros respondería "no, las rectas no pueden intersecarse en más de un punto". Sin embargo, no existe un axioma que prohíba explícitamente que esto suceda. Debe, entonces, existir un teorema que incluya esta propiedad.

- **Teorema 1**: "*Dos rectas distintas no pueden intersecarse en más de un punto*".

Demostración: Procederemos indirectamente y asumiremos lo contrario. Supongamos que dos rectas distintas, m y q, se intersecan en dos puntos distintos, A y B. Bajo esta hipótesis, A y B son puntos distintos por los que pasan dos rectas distintas, lo cual contradice el axioma I.1, en el que se explicita que solo puede existir una única recta. Como el axioma I.1 es cierto, entonces el enunciado del que partimos es falso, es decir, que dos rectas distintas no pueden intersecarse en más de un punto.

A continuación pasamos a demostrar el siguiente teorema, que también se interpreta como una idea intuitiva de la geometría plana

- **Teorema 2:** "*Si se verifican los axiomas I.1, I.2 y I.3, entonces existen al menos tres rectas no concurrentes*".

Demostración: Tomamos A, B y C puntos distintos y no alineados. Conociendo I.1 (por cada par de puntos distintos pasa una única recta) y aplicándolo a los puntos dados tenemos que:

- Los puntos A y B definen la única recta m.
- Los puntos A y C definen la única recta n.
- Los puntos B y C definen la única recta l.

Debido a que I.3 es cierto (por ser un axioma) sabemos que existen al menos 3 puntos no alineados. Si dos de las rectas m, n y l fueran iguales, entonces los puntos A, B y C estarían alineados, por tanto concluimos que las rectas m, n y l son tres rectas distintas.

Por otro lado, conociendo el Teorema 1 sabemos que dos rectas distintas se intersecan en un único punto. Supongamos que las tres rectas fuesen concurrentes, tendrían que tener un único punto en común. m y n tienen el punto A en común, por lo que este punto debería ser, a la fuerza, el punto de intersección de las tres rectas. La recta l y la recta m tienen el punto B en común, por lo que este punto tendría que ser también el punto de intersección. Llegamos así a una contradicción, ya que A y B son puntos distintos, por lo que podemos concluir que la suposición de partida es falsa y que las tres rectas no pueden ser concurrentes.

Mientras que los axiomas de incidencia de Hilbert son fáciles de comprender, algunos del resto de sus axiomas (y las implicaciones que pueden deducirse de ellos) son menos evidentes.

<u>II. Axiomas de orden o de la noción "estar entre"</u>

En primer lugar se debe especificar que escribiremos [A,B,C]para denotar que B es un punto que está entre A y B.

- **II.1.** "*Si A, B y C son puntos distintos y tenemos que [A,B,C], entonces A, B y C están sobre la misma recta y se tiene también [C,B,A]* ".

- **II.2.** *"Por cada dos puntos A y C distintos, existe al menos un punto B que esté sobre la recta AC tal que [A,C,B]."*

- **II.3.** *"Dados A, B y C puntos distintos sobre una recta, uno y solo uno está entre los otros dos"*

- **II.4.** *"Dados A, B y C puntos distintos no alineados y m recta que no contiene a ninguno de los tres puntos, si m contiene un punto del segmento AB entonces también contiene un punto del segmento $\overline{AC}$ o del segmento $\overline{BC}$ "*

- **II. 5.** *"Dada una recta m y tres puntos distintos A, B y C que no están sobre la recta m, se deben verificar los siguientes enunciados:*

  - *Si A y B están del mismo lado de m y B y C están del mismo lado de m, entonces A y C también están del mismo lado de m.*
  - *Si A y B no están del mismo lado de m y B y C tampoco están del mismo lado de m, entonces A y C sí que están del mismo lado de m."*

De este grupo de axiomas podemos extraer dos consecuencias, que se enuncian como proposiciones:

- **Proposición 1:** Una recta divide el plano en dos lados, es decir, dada una recta m, en el conjunto de todos los puntos del plano exceptuando los puntos que están sobre la recta se pueden diferenciar exactamente dos lados.

- **Proposición 2:** Un punto divide a una recta en dos lados, es decir, dada una recta m y un punto A que está sobre m, existen dos puntos B y C distintos tales que [B,A,C]. Se cumple que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = m$ y $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$.

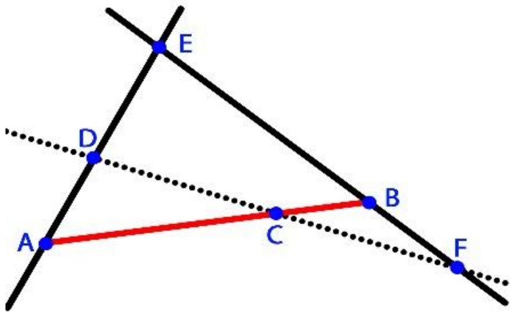
El propósito de este grupo de axiomas es dar sentido a la noción o idea de "estar entre". Como el término "estar entre" es uno de los términos indefinidos del sistema axiomático, solamente los axiomas pueden garantizar que los puntos se comportan en esta geometría de una forma consecuente con nuestra idea intuitiva de "estar entre". Aunque al principio no parece tan obvio, las relaciones que se crean a partir de este grupo de axiomas son consistentes con la manera en la que esperamos que se comporte esta geometría (es decir, coincide con la manera en la que se comporta la geometría en el mundo físico).

- **Teorema 3**: "*Dados dos puntos A y B distintos, existe un tercer punto C sobre la recta AB tal que [A,C,B]* ".

Demostración: El enunciado de este teorema no es exactamente el mismo que el del axioma II.2 (aunque a primera vista puede parecerlo), pero también se trata de una propiedad que suponemos que debe ser cierta. Para demostrar el teorema, comenzamos partiendo de un segmento cualquiera $\overline{AB}$.

  - Por el axioma I.3 sabemos que existe un tercer punto D que no está alineado con A y B (es decir, no está sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$).

- Por el axioma II.2 podemos fijar un punto distinto E tal que [A,D,E].
- Por el axioma I.1 sabemos que existe una única recta que pasa por los puntos E y B.
- Por el axioma II.2 podemos fijar un punto F tal que [E,B,F].
- Ahora consideramos los 3 puntos no alineados A, E y B y la única recta que pasa por D y F. Por el axioma II.4 sabemos que si la recta $\overleftrightarrow{DF}$ contiene un punto del segmento $\overline{AE}$ (el punto D) entonces debe contener también un punto del segmento $\overline{EB}$ o del segmento $\overline{AB}$. Como las rectas $\overleftrightarrow{DF}$ y $\overleftrightarrow{EB}$ se cortan en el punto F y no se pueden cortar en un segundo punto de $\overline{EB}$ (por el teorema 1) entonces existe un punto C en el segmento $\overline{AB}$ que es intersección de la recta $\overleftrightarrow{DF}$ y dicho segmento. Como el segmento $\overline{AB}$ contiene a todos los puntos que están entre A y B, en efecto tenemos que [A,C,B].



III. Axiomas de congruencia de segmentos

- **III.1.**"*La congruencia de segmentos es una relación de equivalencia y por ello cumple las siguientes propiedades:*
  - *Propiedad reflexiva*. $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$
  - *Propiedad simétrica*. *Si* $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ *entonces* $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$
  - *Propiedad transitiva*. *Si* $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ *y* $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, *entonces* $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ ".
- **III.2.**"*Dados A y B puntos distintos y A' y B' otros puntos distintos, entonces en la semirrecta* $\overrightarrow{A'B'}$ *existe un único punto C' tal que* $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ ".
- **III.3.**"*Si tenemos que [A,B,C] y [A',B',C'], si* $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ *y* $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ *entonces* $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ ".

IV. Axiomas de congruencia de ángulos

- **IV.1.**"*La congruencia de ángulos es una relación de equivalencia y por ello cumple las siguientes propiedades:*
  - *Propiedad reflexiva*. $\alpha \equiv \alpha$
  - *Propiedad simétrica*. *Si* $\alpha \equiv \beta$ *entonces* $\beta \equiv \alpha$
  - *Propiedad transitiva*. *Si* $\alpha \equiv \beta$ *y* $\beta \equiv \gamma$, *entonces* $\alpha \equiv \gamma$

- **IV.2.**"*Dados A, B y C puntos distintos, $\widehat{ABC}$ ángulo, A' y B' otros puntos distintos y $\overrightarrow{A'B'}$ semirrecta, entonces existe una semirrecta $\overrightarrow{A'C'}$ única tal que $\widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{ABC}$*"

Para poder enunciar siguiente axioma (criterio SAS) es necesario definir con anterioridad la congruencia de triángulos.

- **Definición de Triángulos congruentes.** Un triángulo $\widehat{ABC}$ es congruente con otro $\widehat{A'B'C'}$ (y denotamos $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$) si la correspondencia que envía A en A', B en B' y C en C' es tal que los lados y ángulos correspondientes son congruentes. De esta manera, se cumple que: $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$, $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}$,

- **IV.3. Criterio SAS.** "*Dados A, B y C puntos distintos y A', B' y C' otros puntos distintos, de manera que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ y $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, entonces $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$.*"

Euclides contempla el criterio SAS como un teorema, sin embargo, la demostración que realiza de dicho teorema no se considera válida debido a que asume la capacidad de aplicar transformaciones a figuras en el plano (esta capacidad se puede establecer formalmente pero Euclides la asume sin probarla). Aunque el uso de las transformaciones es razonable, cualquier demostración que haga uso de esta técnica viola las reglas de la axiomática formal a menos que se establezcan postulados (o teoremas) que justifiquen hacerlo. Varios geómetras legitimaron esta técnica formalmente postulando la existencia de transformaciones geométricas, y ello les permite utilizar imágenes de figuras geométricas en la demostración de un gran número de teoremas. Hilbert decidió seguir otro camino y no introducir en su sistema axiomático el concepto de transformación geométrica.

Hilbert reconoció que al menos una parte del criterio SAS para los triángulos es realmente independiente del resto de postulados euclidianos tradicionales. En consecuencia, concluyó que era necesario incluir como axioma un postulado que hiciese referencia a la congruencia de triángulos y decidió que fuese el criterio SAS por ser la condición más obvia. El resto de las condiciones de congruencia son derivadas de los axiomas como teoremas.

V. Axioma de las paralelas

- **Axioma de las paralelas.** *"Dada una recta m y un punto P que no está sobre m, existe una única recta que pasa por P y que no corta a m".*

VI. Axiomas de continuidad

- **Axioma de Arquímedes.** *"Dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ segmentos, con C diferente de D, entonces existe un número n tal que n copias de $\overline{CD}$ colocadas de forma contigua al punto A, a lo largo de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$, exceden al punto B ".*

- **Postulado de completitud. "***No es posible añadir al sistema un conjunto de puntos con su orden y relaciones de congruencia que preserve las relaciones existentes entre los elementos originales del sistema así como las propiedades fundamentales de orden y congruencia que se deducen de los axiomas."*

5.4.3 AXIOMAS DE BIRKHOFF

Introducción y contexto histórico

En el apartado anterior se desarrolló el conjunto de axiomas de Hilbert, quién fue capaz de desarrollar un sistema riguroso para la geometría euclidiana siendo muy meticuloso en el desarrollo lógico de los teoremas. El precio que Hilbert tuvo que pagar por el gran rigor fue un conjunto de axiomas considerablemente más amplio que el de Euclides así como la necesidad de realizar demostraciones relativamente complicadas para una serie de conclusiones intuitivamente obvias.

Pocos años después de publicarse la obra de Hilbert, en el año 1932, un matemático estadounidense, G. D. Birkhoff, desarrolló otro sistema axiomático para la geometría euclídea de gran importancia. Dado que el trabajo de Birkhoff, al igual que el de Hilbert, fue construido para ser consistente con la geometría de Euclides, no aportó nuevos resultados en términos de teoremas. Por el contrario, su interés reside en el enfoque radicalmente diferente del que este sistema parte para el desarrollo de la geometría. El conjunto de axiomas de Birkhoff es mucho más pequeño que el de Hilbert (incluso más pequeño en número que el de Euclides).

Términos indefinidos del sistema axiomático de Birkhoff

- Punto.
- Recta.
- Distancia.
- Ángulo.

Desarrollo del sistema axiomático de Birkhoff

Siguiendo el texto "Curso de Geometría Básica" de P. Buser y A. Costa, se va a exponer a continuación un sistema axiomático matemáticamente correcto para la geometría euclidiana plana. Se hará uso del "axioma de la regla graduada". Este axioma, debido a G.D. Birkhoff, permite trasladar con facilidad a cada recta las propiedades del conjunto de los números reales. Nos limitaremos a una simple introducción, el desarrollo completo puede verse en el texto antes mencionado.

Trabajaremos con un conjunto **P** al que llamaremos plano y una aplicación d: **P** x **P** → **R** llamada distancia. Los elementos del plano se llamarán puntos. Las propiedades que caracterizan **P** y d serán las que se deduzcan de los axiomas que introduciremos a continuación. Pretendemos que el conjunto **P** sea una representación matemática de una hoja de papel o una pizarra que se extiende sin límites.

- **Axioma P1:** *"El plano (**P**, d) es un espacio métrico, es decir, **P** es un conjunto no vacío y se verifican las siguientes condiciones para todo X, Y, Z pertenecientes a **P**:*
  1) $d(X, Y) > 0$ si $X \neq Y$, y $d(X, X) = 0$;
  2) $d(X, Y) = d(Y, X)$;
  3) $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$."

Definición (Segmentos y puntos alineados): Sean A, B dos puntos del plano **P**. Se llama **segmento** de extremos A y B, y se denota por [A, B] al conjunto siguiente:

$$[A, B] = \{ X \in \mathbf{P} : d(A, X) + d(X, B) = d(A, B) \}.$$

La distancia d(A, B) se llama **longitud** del segmento [A, B].

Se dice que tres puntos de **P** están **alineados** si uno de ellos está situado (es decir, pertenece) sobre el segmento determinado por los otros dos. Se prueba fácilmente que [A, A] = { A } y que [A, B] = [B, A].

Definición (Rectas): Un subconjunto r del plano **P** se llama **recta** si satisface las condiciones siguientes:

(i) r contiene al menos dos puntos distintos;
(ii) toda terna de puntos distintos A, B, C de r están alineados;
(iii) todo punto de **P** que esté alineado con dos puntos distintos de r ha de estar en r.

Aunque utilizaremos habitualmente el lenguaje de la teoría de conjuntos, con frecuencia daremos preferencia (y ya lo hemos hecho sin advertirlo previamente) al lenguaje tradicional en Geometría, así, en lugar de decir que el punto A pertenece a la recta r, preferiremos decir que "la recta r pasa por A".

- **Axioma P2:** *" (i)* ***P*** *contiene al menos tres puntos no alineados;*
  (ii) Por dos puntos distintos de ***P*** *pasa una única recta."*

Si A y B son dos puntos distintos de **P**, denotaremos por r_{AB} la única recta de **P** que pasa por A y B.

Definición (Rectas que se cortan y rectas paralelas): Diremos que dos rectas del plano se **cortan** si tienen exactamente un punto en común. Dos rectas que son iguales o que no tienen ningún punto en común se llaman **paralelas**. Si r y s son rectas paralelas, escribiremos r || s.

- **Teorema**: Dos rectas del plano o se cortan o son paralelas.

Demostración: Supongamos que las rectas r y s no son paralelas. Luego r y s no son iguales y no tienen intersección vacía. La intersección de r y s ha de reducirse a un punto, pues si la intersección tuviese al menos dos puntos A, B, entonces, en virtud del axioma P2(ii), concluiríamos que r =r_{AB} = s, en contradicción con lo supuesto.

- **Axioma P3. Axioma de la regla graduada:** *"Para cada recta r del plano* ***P*** *existe una aplicación biyectiva ρ: r →* ***R*** *tal que |ρ(X) - ρ(Y)| = d(X, Y), para todo par de puntos X, Y de r."*

Teorema: Sean A y B dos puntos distintos de una recta r. Existe un único punto M en r tal que d(M, A) = d(M, B); además M pertenece al segmento [A, B]. El punto M se llama el **punto medio** de [A, B] y escribiremos M = medio [A, B].

Demostración: Sea ρ: r → **R** una biyección dada por el Axioma P3. Sea a = ρ(A), b = ρ(B) y, para un punto genérico X de r, escribamos t = ρ(X). Observemos que a ≠ b, ya que A ≠ B y ρ es una aplicación biyectiva. Ciertamente d(X, A) = d(X, B) si y solo si |t - a| =|t - b|. Veamos que esto último equivale a que t = $\frac{a+b}{2}$. Es inmediato que |t - a| =|t - b| si t = $\frac{a+b}{2}$. Para probar lo recíproco, elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad |t - a| =|t - b| y, tras simplificar, obtenemos -2at + a^2 = -2bt + b^2, de donde, 2t(b-a)= b^2 - a^2. Dividiendo ahora por b - a, concluimos que t = $\frac{a+b}{2}$. Esto demuestra que la única posibilidad para M es que M=$\rho^{-1}(\frac{a+b}{2})$.

Ampliamos la definición de punto medio de un segmento, definiendo medio [A, A] = A.

Definición (Semirrecta): Sea r una recta y P un punto de r. Sea ρ: r → **R** una biyección dada por el Axioma P3. Los conjuntos

$$\{ Q \in r : \rho(Q) > \rho(P) \} \quad y \quad \{ Q \in r : \rho(Q) < \rho(P) \}$$

se llaman **semirrectas** en r determinadas por P. Diremos que dos puntos A y B de la recta r **están del mismo lado** con respecto a P si pertenecen a la misma semirrecta determinada por P, en caso de pertenecer a distintas semirrectas se dice que **están en lados contrarios**.

La definición anterior precisa alguna matización. Podríamos tener la tentación de introducir una ''orientación'' en las semirrectas, es decir, de definir como semirrecta derecha al primero de los subconjuntos anteriores y como semirrecta izquierda al segundo, pero eso sería incorrecto ya que no sería independiente de la biyección elegida. Basta observar que si c = ρ(P), entonces la aplicación ρ'(X) = c - ρ(X) sigue cumpliendo lo exigido por el Axioma P3, pero invierte la ''orientación'', es decir, transforma la semirrecta derecha con relación a ρ en la semirrecta izquierda con relación a ρ'. Ahora bien, el que dos puntos estén del mismo lado o en lados contrarios con respecto a P es independiente de la biyección ρ dada por el Axioma P3. De hecho, puede probarse sin dificultad que dos puntos distintos X e Y de una recta r están en lados contrarios con respecto a P si y solo si P ∈ [X, Y] y P no pertenece a { X, Y }.

- **Axioma P4. Axioma de separación:** *"Para cada recta r de* ***P*** *hay dos subconjuntos* H^1, H^2 *que verifican las condiciones siguientes:*

  (1) $H^1 \cup H^2$ *=* ***P*** *- r;*
  (2) X, Y ∈ H^i *implica que [X, Y] está contenido en* H^i*, para i = 1, 2 y todo X, Y ∈* ***P.***
  (3) X ∈ H^1*,* $Y \in H^2$ *implica que [X, Y] corta a r, para todo X, Y ∈* ***P.***"

Puede probarse con facilidad que los conjuntos H^1, H^2 están únicamente determinados por r (salvo la numeración). Se les llama **semiplanos** determinados (o separados) por r. La recta r se llama el borde de H^1 y H^2. Diremos que dos puntos P, Q **están del mismo lado** de r si pertenecen al mismo semiplano determinado por r y diremos que **están en lados contrarios** si cada uno pertenece a un semiplano distinto de los dos determinados por r.

Definición (Triángulo): Sean P, Q, R tres puntos no alineados. Diremos que los segmentos [P, Q], [Q, R] y [R, P] forman el **triángulo** Δ{P, Q, R} y dichos segmentos son denominados **lados** del triángulo. Se dice que los puntos P, Q, R son los **vértices** del triángulo Δ{P, Q, R}. Se dice que un vértice y un lado de un triángulo son **opuestos** si el vértice no es extremo del lado. Así, P es el vértice opuesto al lado [R, Q] y el lado [R, Q] es el opuesto al vértice P.

- **Teorema**: Dado un triángulo Δ{P, Q, R} y una recta r, si la recta r corta al lado [P, Q] entonces r corta también a uno de los otros dos lados [Q, R] o [R, P].

Demostración.- Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que r no corta ni a [Q, R] ni a [R, P]. Entonces Q y R están en el mismo semiplano H^1 de los dos determinados por r, y lo mismo sucede con R y P. Por lo tanto, P y Q pertenecen ambos a H^1 y [P, Q] no corta a r, lo que es contradictorio.

Definición (Isometría): Una **isometría** de P es una biyección g: **P** → **P** que conserva las distancias, es decir, tal que d(g(X), g(Y)) = d(X, Y), para todo X, Y ∈ **P**. Denotaremos por Isom(**P**) el conjunto de todas las isometrías de **P**.

Puede probarse fácilmente que las isometrías conservan las rectas, la alineación, etc.

Cuando estamos clasificando figuras geométricas en una hoja de papel queremos saber cuándo dos figuras han de considerarse iguales. En relación con los textos de enseñanza rusos (y creemos que también es trasladable a los textos españoles), A.I. Fetisov expone en [“Acerca de la demostración en geometría”, MIR 1980] la siguiente **trampa** expositiva: decimos que dos figuras geométricas son iguales (o equivalentes) si, podemos mover (sin deformar, es decir, permaneciendo invariable) una de ellas hasta hacerla coincidir con la segunda de tal modo que ambas figuras coincidan en todas sus partes. A primera vista, esta definición de igualdad parece totalmente comprensible, pero, si se analiza atentamente, no es difícil descubrir en ella un círculo vicioso. En efecto, para determinar la igualdad de las figuras tenemos que hacerlas coincidir una con otra, y para hacerlas coincidir tenemos que trasladar una de las figuras, permaneciendo esta invariable durante el proceso de traslado. Pero, ¿qué significa “permanecer invariable”? Esto quiere decir que la figura, durante todo el tiempo, sigue siendo igual a cierta imagen inicial suya. Así, resulta que el concepto de “igualdad” lo determinamos por medio del traslado de una “figura invariable”, y el concepto de “figura invariable” por medio del concepto de “igualdad”. Para evitar estos círculos viciosos introducimos los axiomas relativos a isometrías.

- **Axioma P5 (Axioma de movilidad):** *"Si A_1, A_2 ∈ **P** y B_1, B_2 ∈ **P** son dos pares de puntos verificando d(A_1, A_2) = d(B_1, B_2), entonces existe una isometría g ∈ Isom(**P**) tal que g(A_1) = B_1, g(A_2) = B_2."*

Definición (Figuras congruentes): Dos figuras o conjuntos de puntos $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ se dicen **congruentes** o equivalentes si existe una isometría g ∈ Isom(**P**) tal que g($\mathcal{F}_1$) = $\mathcal{F}_2$.

El axioma P5 nos garantiza que un segmento $[A_1, A_2]$ es congruente con otro $[B_1, B_2]$ si y solo si d(A_1, A_2) = d(B_1, B_2).

El siguiente axioma es la formalización de lo que sucede cuando reflejamos el plano de una hoja de papel en un espejo colocado perpendicularmente a la mesa donde está dicha hoja. Será una isometría que deja invariantes los puntos en que el espejo toca al papel y tendrá también la siguiente propiedad: si una figura reflejada se refleja de nuevo en el espejo obtenemos la figura de partida.

Axioma P6 **(Axioma de la reflexión):** **"***Para cada recta r en* ***P,*** *existe una isometría σ ∈ Isom(****P****) verificand:*

(1) $\sigma(X) = X$ si y solo si $X \in r$, para todo $X \in \boldsymbol{P}$;
(2) $\sigma \circ \sigma = id$ (aplicación identidad)."

Una isometría como la del axioma P6 se llama **reflexión** de eje r (o simetría axial).

Axioma P7 **(Axioma de las paralelas):** **"***Para cada recta r y cada punto P del plano, existe una única recta paralela a r pasando por P."*

El axioma P7 aparece también en los "Elementos" de Euclides aunque con una formulación distinta. Como ya hemos mencionado, descubrir si este axioma era independiente del resto de axiomas de la geometría euclídea se convirtió en uno de los problemas más famosos e importantes de la Geometría. La Geometría Hiperbólica, descubierta en el siglo XIX por Bolyai y Lovachevski (trabajando independientemente el uno del otro) muestra que el axioma de las paralelas es independiente de los restantes axiomas, pues en esta geometría (que satisface los restantes axiomas) hay infinitas rectas paralelas a una recta dada pasando por un punto exterior a tal recta.

5.4.4 POSTULADOS DE LA SMSG

Introducción y contexto histórico

Los dos conjuntos de axiomas estudiados anteriormente desarrollan la Geometría Euclídea partiendo de dos enfoques muy diferentes. El sistema axiomático de Hilbert establece la base de lo que podríamos llamar un enfoque sintético de la geometría, ya que los axiomas proporcionan las características cualitativas de los elementos geométricos (puntos, rectas,...) necesarias para deducir todas las proposiciones y teoremas de "*Los elementos*" de Euclides de manera sintética. Por el contrario, el conjunto de axiomas de Birkhoff tiene una naturaleza más analítica, ya que sus postulados nos permiten relacionar términos como punto, recta o ángulo con cantidades numéricas gracias a la correspondencia uno a uno entre ellos y los números reales. Pero a pesar de partir de visiones distintas, los dos conjuntos de axiomas conducen al mismo cuerpo de teoremas, los cuales constituyen la Geometría Euclídea.

A principios de los años 60 se creó otro sistema axiomático para la Geometría Euclídea por un grupo de matemáticos y profesores de matemáticas estadounidenses, quienes trabajaban para el grupo conocido como la SMSG (*School Mathematics Study Group*). Este grupo fue, en parte, creado para abordar el fracaso que se percibía en Estados Unidos a la hora de competir en las áreas de ciencia y matemáticas con países del resto del mundo (especialmente con la Unión

Soviética). A finales de la década de 1950, en plena Guerra Fría, la Unión Soviética comenzó a mostrar signos de superioridad tecnológica frente a Estados Unidos. Fue por ello que el Congreso creó la NSF (*National Science Foundation*), a través de la cual dedicó fondos sustanciales a la meta de mejorar la enseñanza de matemáticas y ciencias en Estados Unidos. El proyecto fue bautizado con el nombre de "*School Mathematics Study Group*", o SMSG, y su objetivo era realizar una reforma curricular en la asignatura de matemáticas en la enseñanza primaria y secundaria, o lo que es lo mismo, definir una "nueva matemática" para el país.

Dirigida por el matemático Edward G. Begle, la SMSG desarrolló ejemplos de libros de texto para la enseñanza que fueron probados durante los primeros años de los años 60 en escuelas de todo el país. Pero mientras que buena parte de la nueva matemática fue blanco de críticas y no llegó a ser implementada con éxito, el conjunto de postulados de la SMSG para la Geometría Euclídea fue muy bien recibido. Éste ha sobrevivido, prácticamente intacto, hasta el presente y ha sido y es muy utilizado en la enseñanza (sobre todo secundaria pero también universitaria) en países como Estados Unidos y Canadá.

La intención de los autores de la SMSG era proporcionar un conjunto de axiomas que fuera (en la medida de lo posible) completo y pedagógicamente sólido, y que al mismo tiempo fuera accesible a los estudiantes, permitiendo que éstos se introduzcan en el estudio formal de la geometría. Para lograr el segundo de estos objetivos, los autores de SMSG decidieron sacrificar la independencia. La razón de esta decisión fue que los conjuntos de axiomas independientes requieren la demostración, a veces difícil, de un gran número de teoremas preliminares (que resultan ciertos de manera obvia) antes de llegar a las demostraciones de los teoremas principales. El tiempo y el esfuerzo necesarios para realizar este "comienzo" en el modelo de Hilbert nos permite un buen ejercicio en la aplicación de la lógica formal, sin embargo no le aportan al estudiante ninguna nueva visión de la geometría.

Debido al hecho de que el conjunto de postulados de la SMSG no es independiente, algunos de los postulados resultan redundantes, ya que asumen más de lo que es absolutamente necesario y ello hace que puedan demostrarse utilizando los otros. Esta es una debilidad del sistema axiomático, pero es contrarrestada por la facilidad y rapidez con la que se puede pasar a resultados significativos e importantes utilizando el conjunto de postulados de la SMSG.

Términos indefinidos del sistema axiomático de la SMSG

- Punto.
- Recta.
- Plano.
- Estar sobre.
- Distancia (medida de longitud).
- Medida de ángulo.
- Área.
- Volumen.

Conjunto de postulados de la SMSG

A continuación se presentarán los postulados (axiomas) de la SMSG, así como las relaciones entre los mismos y los axiomas de Hilbert y Birkhoff.

Axioma de incidencia

- **Postulado 1.** *"Dados dos puntos distintos, existe únicamente una recta que contiene a ambos puntos."*

Axiomas de medida de rectas

- **Postulado 2. Postulado de la distancia.** *"A cada par de puntos distintos le corresponde un único número positivo. "*

El único número positivo estipulado por el Postulado 2 para cada par de puntos A y B es precisamente la distancia entre A y B, d (A, B). Esta relación se hace más explícita en el Postulado 3.

- **Postulado 3. Postulado de la regla.** *"Los puntos de una recta están en correspondencia uno a uno con los números reales tal que:*
    a. *A cada punto le corresponde un único número real llamado coordenada del punto.*
    b. *A cada número real le corresponde un único punto de la recta.*
    c. *La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de dichos puntos. "*

Este postulado en realidad es una revisión o corrección del postulado de Birkhoff relativo a la medida de rectas. Los puntos (a) y (b) establecen la correspondencia uno a uno mientras que el punto (c) aporta el significado de distancia en coherencia con lo que planteaba Birkhoff.

Mediante el uso de las propiedades que el postulado 3 establece para las coordenadas de dos puntos cualesquiera, A y B, podemos demostrar que d (A, B) es única, por lo que el Postulado 2 se puede demostrar a partir del Postulado 3. Sin embargo, la demostración de esta afirmación no es de naturaleza geométrica, y es por ello que la SMSG decide postularlo como verdad antes que demostrarlo. Otra consecuencia del postulado 3 sería el principio de Arquímedes

- **Postulado 4. Postulado de la colocación de la regla.** *"Dados dos puntos P y Q de una recta, el sistema de coordenadas (es decir, la correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta y los números reales) puede ser elegido de tal manera que la coordenada de P sea cero y la coordenada de Q sea positiva."*

El Postulado 4 tampoco es independiente, ya que puede ser demostrado a partir de los postulados 2 y 3.

<u>Axiomas de relaciones espaciales</u>

Los postulados siguientes, del 5 al 8, son axiomas referentes a las relaciones en el espacio, y por tanto se ocupan de construir la geometría en tres dimensiones. Este trabajo se centra en el estudio de la geometría plana, pero aun así se expondrán a continuación dichos postulados con el fin de dar una idea global del sistema axiomático establecido por la SMSG.

- **Postulado 5.** *"Todo plano contiene al menos tres puntos no alineados. El espacio contiene al menos cuatro puntos no coplanarios."*
- **Postulado 6.** *"Si dos puntos están contenidos en un plano, entonces la recta que contiene a esos dos puntos está contenida en el mismo plano."*
- **Postulado 7.** *"Tres puntos cualesquiera están contenidos en al menos un plano. Tres puntos no alineados están contenidos en un único plano."*
- **Postulado 8.** *"Si dos planos se intersecan, la intersección es una recta."*

<u>Axiomas de separación</u>

- **Postulado 9. Postulado de la separación de planos.** "*Dados una recta y un plano que la contiene, los puntos del plano que no están sobre la recta forman dos conjuntos tales que:*
    a. *Cada uno de los conjuntos es convexo.*
    b. *Si P está en un conjunto y Q está en el otro, el segmento $\overline{PQ}$ corta a la recta."*

- **Postulado 10. Postulado de la separación de espacios.** *"Los puntos del espacio que no están contenidos en un plano dado forman dos conjuntos tal que:*
    a. *Cada uno de los conjuntos es convexo.*
    b. *Si P está en un conjunto y Q está en el otro, el segmento $\overline{PQ}$ corta al plano."*

Estos dos postulados siguen el mismo razonamiento, con la diferencia de que el 9 se refiere a la geometría plana y el 10 a la geometría espacial.

Al enunciarse el postulado 9 se presupone como conocido la definición de conjunto convexo, que es la siguiente:

- **Definición de conjunto convexo.** Un conjunto A es convexo si $\forall$ P,Q $\in$ A, entonces el segmento $\overline{PQ}$ está en A.

El postulado 9 juega el mismo rol en el sistema de la SMSG que el axioma II.5 (axioma de Pasch) en el sistema de Hilbert. A partir del postulado 9 podemos demostrar el axioma de Pasch como un teorema, y viceversa. Si bien puede parecer paradójico demostrar el axioma de Pasch, por ser un axioma, realmente la distinción entre axiomas y teoremas es una cuestión de elección.

Axiomas de medida de ángulos

- **Postulado 11. Postulado de la medida de ángulos.** "*A cada ángulo le corresponde un número real entre 0 y 180.*"
- **Postulado 12. Postulado de la construcción de ángulos.** "*Sea AB una semirrecta en el borde del semiplano H. Para cada número r entre* 0° *y* 180°*existe una única semirrecta* $\overrightarrow{AP}$ *con P en H tal que m* $\widehat{PAB} = r$*.*"
- **Postulado 13. Postulado de la suma de ángulos.** "*Dado un punto D en el interior del ángulo* $\widehat{BAC}$*, entonces m* $\widehat{BAC}$ = *m* $\widehat{BAD}$ + *m* $\widehat{DAC}$*.*"
- **Postulado 14. Postulado de los ángulos suplementarios.** "*Si dos ángulos forman una recta, entonces son suplementarios.*"

Al enunciarse el postulado 13 se presupone como conocida la definición de "interior de un ángulo", la cual aceptamos que es la misma que la que se da en el sistema de Hilbert.

El Postulado 13 se puede demostrar mediante el 11 y el 12, pero la SMSG lo ha elegido como axioma debido a que su enunciado resulta intuitivamente obvio mientras que su demostración no lo es. De manera similar, el postulado 14, que es prácticamente una definición, ha sido incluido a fin de eliminar la demostración tediosa de un resultado obvio.

Axioma de congruencia

- **Postulado 15. Postulados SAS.** "*Dada una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y el mismo). Si dos lados y el ángulo que forman del primer triángulo son congruentes con los elementos correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia es una congruencia.*"

Si comparamos este postulado con el axioma de Hilbert sobre el criterio SAS de congruencia de triángulos, podemos ver que el postulado aporta más información de la que es absolutamente necesaria. Esto es así porque, una vez más, los autores de SMSG decidieron elegir la conveniencia sacrificando independencia.

Los 15 postulados enumerados hasta ahora constituyen la base de lo que se conoce como geometría neutra. Estos 15 postulados pueden utilizarse tanto para construir la geometría euclídea como la hiperbólica, ya que ninguno de ellos implica suposiciones relativas al paralelismo.

Axioma de paralelismo

- **Postulado 16. Postulado de las paralelas.** "*Por un punto externo a una recta dada pasa al menos una recta paralela a dicha recta.*"

Este es el postulado que caracteriza a la geometría euclídea. Es posible reemplazar este postulado por otro distinto y de esta manera construir la geometría hiperbólica

Axiomas de medida de área y volumen

- **Postulado 17.** "*A cada región poligonal le corresponde un único número real positivo llamado área.*"
- **Postulado 18.** "*Si dos triángulos son congruentes, entonces las dos regiones correspondientes a dichos triángulos tienen el mismo área.*"
- **Postulado 19.** "*Supongamos que la región R es la unión de dos regiones R_1 y R_2. Si R_1 y R_2 se intersecan al menos en un número finito de puntos, entonces el área de R es la suma de las áreas de R_1 y R_2.*"
- **Postulado 20.** "*El área de un rectángulo es igual al producto de la longitud de su base y la longitud de su altura.*"
- **Postulado 21.** "*El volumen de un paralelepípedo es igual al producto de la longitud de su altura y el área de su base.*"
- **Postulado 22. Principio de Cavalieri.** "*Dados dos sólidos y un plano, si para todo plano que corta a ambos sólidos y es paralelo al plano dado, las dos intersecciones determinan regiones de igual área, entonces los dos sólidos tienen el mismo volumen.*"

Ningún postulado de este último grupo es absolutamente necesario para el desarrollo de la geometría euclídea o de geometrías no euclídeas.

5.5 CONCLUSIÓN

En los puntos anteriores se han desarrollado los siguientes cuatro sistemas axiomáticos que dan lugar al mismo conjunto de teoremas: los teoremas establecidos por Euclides.

1. **"*Los Elementos*", de Euclides.** La primitiva exposición de principios (postulados) que definieron la disciplina conocida como geometría, hace más de 2000 años.
2. **"*Grundlagen der Geometrie*", de Hilbert.** Un moderno (1899) tratamiento de la geometría euclídea que es fiel al espíritu del trabajo de Euclides y que además utiliza un sistema axiomático aceptable bajo los estándares actuales.
3. ***"A Set of Postulates for Plane Geometry (Based on Scale and Protactor)"*, de Birkhoff.** Un segundo esfuerzo de construir la geometría euclídea que se asienta sobre una firme base cuya pieza central es la medida.
4. **"*Geometry*", del School Mathematics Study Group.** Un conjunto de postulados orientados a la pedagogía que combina características de los sistemas de Hilbert y Birkhoff de tal forma que permite un desarrollo eficiente y sencillo de la geometría euclídea (pero sacrificando la independencia de los postulados).

A lo largo de los años se han desarrollado otros conjuntos de axiomas para la geometría euclídea, pero los enumerados anteriormente son quizá los más significativos desde un punto de vista histórico y matemático.

6. ¿DEBEN APARECER LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA EN LA E.S.O?

Los Fundamentos de la Geometría se basan en la definición de un conjunto de axiomas con los que se construyen y demuestran todos los conceptos geométricos.

El estudio axiomático tiene la ventaja de ser sólido en sus bases pero, como hemos visto anteriormente, tiene el problema de un avance lento y dificultoso, y por otra parte, es casi imposible trasmitir al alumno de secundaria la necesidad de fundamentar razonamientos que para él son evidentes a partir de un dibujo. Este estudio, pues, solo puede hacerse en el ámbito de la Universidad pero no en el nivel de educación secundaria y, menos aún, en la E.S.O.

Es indudable que la geometría analítica, con el uso de coordenadas, ofrece un método potentísimo al poder reducir a números los objetos y sus posiciones, pero:

¿es necesario conocer primero los problemas geométricos y su motivación, y observar su dificultad antes de reducirlos a ecuaciones?

Entendemos que sí, pero solo en determinadas ocasiones, el objetivo de ello sería que los alumnos:

- Aprendan a razonar geométricamente (para modelar los objetos geométricos bastará con papel, lápiz, regla, compás,…).
- Tengan claro que en ocasiones argumentos propios de la geometría axiomática (geometría "sintética") resuelven problemas, difíciles con el enfoque analítico, o los simplifican enormemente.
- Sean conscientes de que los razonamientos algebraicos son abstractos y, a veces, no fácilmente visualizables. Un razonamiento de geometría sintética ofrece con frecuencia una mayor comprensión geométrica que ayuda a entender nuestro espacio tridimensional (o de dos dimensiones en el caso del plano). Por ejemplo, aunque se puede determinar a través de rangos de matrices cuál es la intersección de dos planos no paralelos, el alumno ya ha visto geométricamente que esa intersección es una recta.

Así pues, es necesario que nos planteemos cómo podemos introducir en secundaria cierto rigor en las explicaciones, demostraciones y justificaciones geométricas. No se debe explicar a los alumnos qué es un sistema axiomático formal pero sí podemos introducir ciertos puntos de partida como los que plantea la SMSG, consideramos que si no lo hiciésemos no sería una clase de matemáticas.

La demostración es uno de los elementos que caracteriza a las matemáticas y que la diferencia de otras ciencias. Esto hace que aprender a demostrar haya sido siempre, desde antiguo, uno de los principales objetivos de la enseñanza de las matemáticas superiores. Durante la segunda mitad del siglo XX, se ha pasado por épocas de posturas extremas, tanto a favor como en contra de la demostración en enseñanza secundaria, hasta llegar a la situación actual en la que hay un consenso internacionalmente mayoritario entre profesores de matemáticas sobre la necesidad de que los estudiantes terminen la enseñanza obligatoria habiendo comprendido la importancia y necesidad de la demostración en matemáticas y habiendo desarrollado habilidades de razonamiento deductivo, dejando el aprendizaje de la demostración formal para el bachillerato y la universidad. (Recogido en el Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM).

Es necesario, por lo tanto, profundizar en la tarea de lograr que los alumnos de la enseñanza obligatoria practiquen y entiendan las matemáticas y, en especial, el razonamiento deductivo matemático como herramienta de razonamiento riguroso que les será útil en cualquier contexto docente, familiar, laboral, etc.

El docente tiene la misión de dejar claro que una demostración es una secuencia de argumentos deductivos (definiciones y teoremas) que deben ser expresados mediante el lenguaje de las matemáticas. En el lenguaje matemático, como en cualquier otro lenguaje, las formas de expresión son importantes, y los profesores deben prestar atención a que los estudiantes se expresen con la corrección adecuada a sus posibilidades. Los profesores deben mantener el equilibrio entre permitir a sus alumnos usar un vocabulario intuitivo, que les resulta más fácil y próximo, y el progresivo aprendizaje de los términos matemáticos correctos.

Es posible plantear en todos los niveles educativos actividades de geometría que ayuden a los alumnos a desarrollar sus habilidades de razonamiento matemático.

El modelo de aprendizaje de Van Hiele, en concreto lo referente a los niveles de razonamiento, es un instrumento que ha demostrado ser muy útil en esta tarea, especialmente en el contexto de la geometría. Estos cinco niveles de razonamiento son: reconocimiento o visualización, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal, rigor.

Estos niveles se diferencian progresivamente por el grado de abstracción que requieren los razonamientos a él asociados. Cada nivel superior exige un razonamiento más complejo que el anterior. Por ello, mientras no se produzcan los aprendizajes relativos a un nivel, no pueden adquirirse los aprendizajes correspondientes al siguiente nivel. Los aprendizajes asociados a cada nivel, (conceptos, procedimientos y consecuente desarrollo de un lenguaje específico,…) generan capacidades que mejoran el razonamiento del individuo y que permiten aprendizajes más completos (del siguiente nivel).

A continuación se describen estos cinco niveles de razonamiento (de forma muy sintética) aplicados al contexto de la geometría.

- **Nivel 1. Reconocimiento:** El razonamiento es puramente visual y físico. Los elementos o partes de una figura geométrica que se identifican (por ej., lados o vértices de un polígono) no tienen carácter matemático, sino que se perciben únicamente como elementos físicos. Los razonamientos de los alumnos se basarán en descripciones de características físicas de las figuras u objetos geométricos. Por tanto, en este nivel no se debe esperar que los estudiantes desarrollen razonamientos matemáticos, ni se les debe pedir todavía realizar demostraciones, pero sí que expliquen sus respuestas.
- **Nivel 2. Análisis:** Es el inicio del razonamiento matemático. En este nivel las figuras geométricas, sus elementos y sus propiedades ya tienen carácter matemático. Los razonamientos de los estudiantes son inductivos, pues se basan en la observación o

manipulación de ejemplos concretos, a partir de los cuales se generalizan propiedades matemáticas. Las demostraciones son de tipo empírico, es decir, no son verdaderas demostraciones sino comprobaciones de que la conjetura se verifica en una cantidad pequeña de ejemplos.

- **Nivel 3. Clasificación:** Es el inicio del razonamiento matemático lógico-deductivo. Los estudiantes de este nivel aprenden a diferenciar los elementos de un enunciado (hipótesis y tesis) y entienden el concepto de dependencia lógica de una propiedad respecto de otra. Sus razonamientos y demostraciones, aunque deductivos, tienen un carácter informal, lo cual se refleja, por una parte, en su necesidad de apoyarse en la manipulación de un ejemplo concreto que les guía en la creación de la demostración y, por otra parte, en su incapacidad para escribir demostraciones formales y usar la simbología matemática formal.

- **Nivel 4. Deducción formal:** En este nivel se comprende la ventaja y la importancia del razonamiento lógico-deductivo formal sobre las formas de razonamiento típicas de los niveles anteriores. Los estudiantes ya pueden entender la estructura de un sistema axiomático y el papel de cada elemento (términos no definidos, axiomas, definiciones, teoremas). Son capaces de realizar razonamientos totalmente abstractos, desligados de cualquier ayuda concreta o referencia a la realidad y basados sólo en la manipulación de las definiciones o teoremas aceptados de acuerdo con las reglas de la lógica formal, así como de escribir demostraciones formales.

- **Nivel 5. Rigor:** Representa el nivel máximo de rigor y abstracción en el razonamiento matemático. Su característica diferenciadora del nivel anterior es la capacidad para trabajar en sistemas axiomáticos diferentes y para comprender que la veracidad o falsedad de una afirmación matemática no es absoluta, sino que depende del "mundo" en el que nos encontremos. Conlleva también aceptar como ciertas demostraciones contrarias a la intuición y sentido común, si el argumento es válido. Además, el estudiante es capaz de comprender las propiedades de que puede gozar un sistema deductivo, como la consistencia, la independencia y la completitud de los postulados.

En una enseñanza de las matemáticas de calidad, en la que los estudiantes desempeñen un papel activo y participativo, un objetivo razonable de aprendizaje de las destrezas de razonamiento y demostración es que los estudiantes inicien la adquisición del segundo nivel de razonamiento al comienzo del ciclo superior de Primaria, que en la E.S.O., completen la adquisición de este nivel de razonamiento e inicien la adquisición del tercero, de manera que un estudiante típico termine la E.S.O. siendo capaz de realizar razonamientos y demostraciones deductivos abstractos informales. Por último, todos los estudiantes de Bachillerato deberían completar la adquisición del tercer nivel de razonamiento y los de las especialidades científicas iniciar la toma de contacto con el cuarto nivel de razonamiento.

Lo definido anteriormente son los mínimos, pero el profesor debe tratar siempre de que cada alumno en concreto alcance el máximo nivel de razonamiento posible, de acuerdo con sus posibilidades y capacidades.

7. CONTENIDOS DE GEOMETRÍA EN LA ETAPA SECUNDARIA

Una vez analizados los fundamentos de la geometría y conocido el hecho de que no se pueden introducir en el aula en su totalidad sino sólo parcialmente, es necesario analizar cómo se introducen los conceptos geométricos actualmente en los diferentes cursos de la educación secundaria (obligatoria y bachillerato) antes de plantear cualquier propuesta.

Con fecha de 8 de mayo de 2015, el BOCYL (Boletín Oficial de Castilla y León) establece el currículo y regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, dentro del marco de la Ley Orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). Por cursos, los contenidos del bloque de Geometría son los siguientes:

Primer curso de E.S.O.

- Elementos básicos de la geometría del plano (punto, segmento, recta, ángulo, etc.)
- Relaciones de paralelismo y perpendicularidad.
- Construcciones elementales con regla y compás.
- Descripción, construcción, clasificación y propiedades características de figuras planas elementales: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y circunferencias.
- Cálculo de áreas y perímetros de las figuras planas elementales.
- El número π.

Segundo curso de E.S.O.

- Semejanza. El Teorema de Tales. Razón de semejanza. Escalas. Aplicaciones. Triángulos rectángulos. El Teorema de Pitágoras.
- Elementos básicos de la geometría del espacio: punto, recta, plano.
- Ángulos diedros.
- Descripción y propiedades características de los cuerpos geométricos elementales: cubo, prisma, pirámide, paralelepípedos, poliedros, cono, cilindro y esfera. Cálculo de áreas laterales de los cuerpos geométricos.
- Cálculo de volúmenes. Unidades de volúmenes y de capacidad.

Tercer curso de E.S.O.

- Geometría del plano: Descripción y propiedades elementales de las figuras planas (ángulos de un polígono, figuras semejantes, Teoremas de Tales y de Pitágoras,…)
- Traslaciones, giros y simetrías en el plano.
- Figuras y cuerpos geométricos: descripción y propiedades elementales de los cuerpos geométricos.
- El cilindro y el cono.
- Algunos movimientos en el espacio.
- Poliedros regulares.
- Cálculo de áreas y volúmenes: cubo, prisma, pirámide, pirámide truncada, paralelepípedos, cilindro y cono.
- La esfera. El globo terráqueo.

Cuarto curso de E.S.O. (opción A)

- Figuras semejantes. Razón de semejanza. Teorema de Tales.
- Razones trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos.
- Iniciación a la geometría analítica plana: puntos y coordenadas. Rectas y ecuaciones.
- Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones.

Primer curso de Bachillerato (modalidad de tecnología)

- Ampliación del concepto de ángulo. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Funciones trigonométricas. Resolución de ecuaciones trigonométricas.
- Resolución de triángulos rectángulos. Teoremas del seno y del coseno. Resolución de triángulos.
- Números complejos. Forma binómica, trigonométrica y polar.
- Vectores en el plano. Bases. Producto escalar de vectores. Ortogonalidad.
- Ecuaciones de la recta. Incidencia, paralelismo y perpendicularidad. Cálculo de distancias entre puntos y rectas.
- Lugares geométricos del plano. Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

Segundo curso de Bachillerato (modalidad de tecnología)

- Vectores en el espacio tridimensional. Operaciones y bases. Producto escalar. Ortogonalidad y bases ortonormales. Producto vectorial y producto mixto.
- Sistema de referencia. Coordenadas de puntos. Obtención e interpretación de las ecuaciones de rectas y planos a partir de un sistema de referencia ortonormal.
- Resolución de problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos.
- Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
- Esfera y elipsoide.

Centrándonos solo en los contenidos de geometría en la E.S.O., volvemos a reiterar que se configuran (como en el resto de los contenidos de las matemáticas en esta etapa) en sentido cíclico (de espiral) de manera que en cada curso coexisten nuevos contenidos tratados a modo de introducción con otros que afianzan y complementan los del curso anterior, con ampliación del campo de trabajo, del nivel de información y de precisión.

Al finalizar la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria, según establece la LOMCE, los alumnos han de saber:

1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana.

2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizar el lenguaje matemático adecuado para expresar los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas geométricos.

3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados), y emplearlo para resolver problemas geométricos.

4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.).

6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.

8. PROPUESTA DIDÁCTICA (3º CURSO DE LA E.S.O.)

8.1 JUSTIFICACIÓN

Nos centraremos en el temario de Geometría del curso 3º de la E.S.O., que comprende los bloques siguientes:

- Geometría del plano.
- Movimientos en el plano: Traslaciones, giros y simetrías.
- Figuras y cuerpos geométricos en el espacio.

Estos bloques se corresponden, por ejemplo, con las lecciones 11, 12 y 13 de las 16 del temario del libro Matemáticas de 3º de ESO, editorial SM, de los autores José Vizmanos, Máximo Anzola, Serafín Mansilla y M.Paz Bujanda.

Los libros de texto de secundaria que se han manejado para la realización de este trabajo se apoyan en imágenes para que los alumnos rápidamente lleguen a visualizar los conceptos geométricos, pero siempre queda la duda de si sabrán los alumnos comprender dichos conceptos si se introducen modificaciones en dichas imágenes. La respuesta a esta pregunta no se conoce, puesto que no se ha realizado una investigación al respecto, pero existe un gran peligro de que esto suceda cuando los conceptos geométricos se sustentan única y exclusivamente en ejemplos visuales.

Por esta razón, se hace necesario el hecho de introducir en la etapa de secundaria obligatoria algo de rigor en las demostraciones geométricas, de esta manera el alumno no se quedará solo con el ejemplo puntual, sino que se acostumbrará a plantearse otras situaciones y a razonar como resolverlas. También resulta importante hacer ver al alumno que con unos axiomas o puntos de partida, se construye la "geometría".

Quedará claro en este proyecto que la introducción de la geometría en la etapa de la E.S.O, basándonos en una axiomática, es muy poco deseable y además imposible por múltiples razones: el tiempo, la capacidad de abstracción de los alumnos a esas edades, la importancia de mantener el interés de todos los alumnos por lo que se explica, etc.

Ahora bien, en esta parte haremos una propuesta, para cada uno de los bloques, acerca de cómo podríamos introducir un cierto rigor en el razonamiento apoyándonos en la geometría sintética. De esta manera, se ha elegido un concepto geométrico de cada uno de los tres bloques de Geometría presentes en el temario de 3º de la E.S.O. para desarrollarlo a modo de ejemplo:

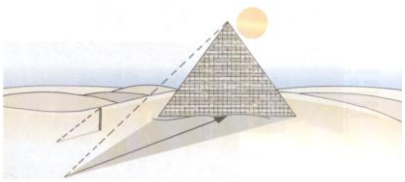
- Bloque 1: Geometría del plano. (**Teoremas de Tales y Pitágoras**)
- Bloque 2: Movimientos en el plano: Traslaciones, giros y simetrías. (**Introducción**)
- Bloque 3: Figuras y cuerpos geométricos en el espacio. (**Los poliedros**)

8.2: CONTENIDOS, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

8.2.1 GEOMETRÍA DEL PLANO

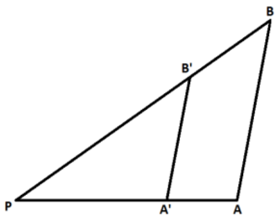
EL TEOREMA DE TALES

Se cuenta que Thales de Mileto (s.IV a.C.) calculó la altura de una pirámide comparando su sombra con la que proyectaba una estaca clavada verticalmente en el suelo.

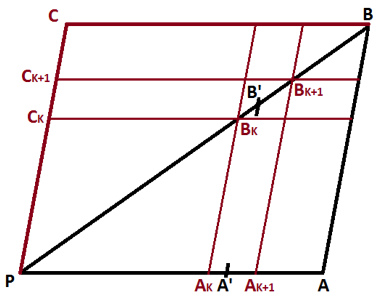


Teorema de Tales

"*Sea un triángulo PAB y sean A' un punto del segmento PA, y B' un punto del segmento PB tales que las rectas $r_{A'B'}$ y r_{AB} son paralelas. Entonces se tiene:* $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$. "



Demostración (utilizando la axiomática de Birkhoff, pg.37)



Sea C el punto del plano que hace que PABC sea un paralelogramo. Para un número natural **n** mayor que 1, dividimos el lado [P,A] en **n** segmentos de igual longitud tomando P=$A_0, A_1, A_2,…,A_n = A$. Repetimos este proceso con el lado [P,C], P=$C_0, C_1, C_2,…,C_n = C$. Para k=0,1,…,n introducimos las rectas a_k paralelas r_{PC} pasando A_k y también las rectas c_k paralelas a r_{PA} pasando por C_k. Así el paralelogramo PABC se divide en n^2 paralelogramos más pequeños (ver figura). Si $P_{kl} = a_k \cap c_l$, los puntos A_k, A_{k+1} , $P_{(k+1)l}, P_{kl}$ forman un paralelogramo, y se tiene que $P_{(k+1)l}P_{kl} = \frac{PA}{n}$ y $P_{kl}, P_{kl+1} = \frac{PC}{n}$. Llamamos $B_k = P_{kk}$, teniendo en cuenta que la reflexión central σ_{B_k} es una isometría (pg.40) del plano, y también el axioma de las paralelas (pg.41), se deduce que ….,B_k,B_{k+1},… están alineados, están en [P,B], son equidistantes y que $B_kB_{k+1} = \frac{PB}{n}$, k=0,…,n-1, de donde $\frac{PA_k}{PA} = \frac{PB_k}{PB}$ (1). En efecto, cada una de las razones es $\frac{k}{n}$. Hemos demostrado es teorema para el caso en que A' es de la forma A_k.

Para el caso general si A' está en $[A_k, A_{k+1}]$, la recta a'=$r_{A'B'}$ es paralela a a_k y a a_{k+1}. Por tanto: $\frac{PA_k}{PA} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PA_k}{PA} + \frac{1}{n}$, además por (1) se tiene, $\frac{PB_k}{PB} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB_k}{PB} + \frac{1}{n}$. Y dado que $B_kB_{k+1} = \frac{PB}{n}$, se tiene que: $\frac{PB'}{PB} - \frac{1}{n} \leq \frac{PA'}{PA} \leq \frac{PB'}{PB} + \frac{1}{n}$

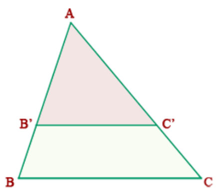
Y como es válido para todo número natural n, queda demostrado el teorema.

Observación:

Como se ha mencionado anteriormente, este tipo de demostraciones formales (basadas, en este caso, en los axiomas de Birkhoff) no son adecuadas para realizarse con alumnos de educación secundaria.

Razonamiento para realizar en el curso de 3º de la E.S.O.

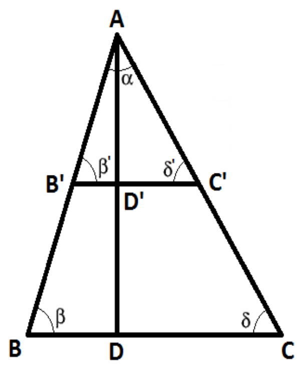
- Partimos de que el alumno conoce ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.
- Daremos la siguiente definición de triángulos semejantes: Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales.
- Se enunciará el Teorema de Tales de la siguiente manera: "*Toda recta paralela a un lado de un triángulo y que corta a los otros dos lados, determina un triángulo más pequeño que es semejante al triángulo original.*"



- Se realizará la siguiente demostración del teorema de Tales:

  Trazando la recta perpendicular al lado BC que pasa por A conseguimos los triángulos rectángulos ADB y AD'B' que tienen un ángulo en común y otro recto, así pues el tercer ángulo ha de coincidir en ambos triángulos ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. Por lo tanto β y β' son iguales.

  La perpendicular anterior determina también los triángulos rectángulos ADC y AD'C'. Razonando como en el caso anterior vemos que δ = δ'. Como el ángulo α es común a ambos triángulos, queda probado que los triángulos son semejantes.

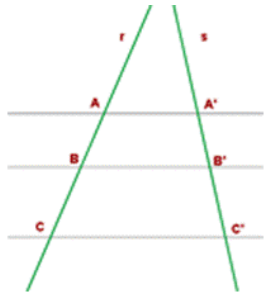


- De la relación de semejanza entre triángulos se deduce la proporcionalidad entre sus lados:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

- También podemos deducir lo siguiente: *"Si dos rectas cualesquiera r y s se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas AB y BC son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra A'B' y B'C'.*

  Así: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$."



- Demostración del enunciado anterior:

  Si llamamos O al punto de corte de las rectas r y s, entonces son semejantes los triángulos OAA' y OBB', y también OAA' y OCC', de donde:

  - $\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$, y como OB=OA+AB y OB'=OA'+A'B', se tiene, $\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'}$.
  - $\frac{OC}{OA} = \frac{OC'}{OA'}$, y como OC=OA+AB+BC y OC'=OA'+A'B'+B'C', se tiene,

    $\frac{AB+BC}{OA} = \frac{A'B'+B'C'}{OA'}$, o bien $\frac{AB}{OA} + \frac{BC}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} + \frac{B'C'}{OA'}$.

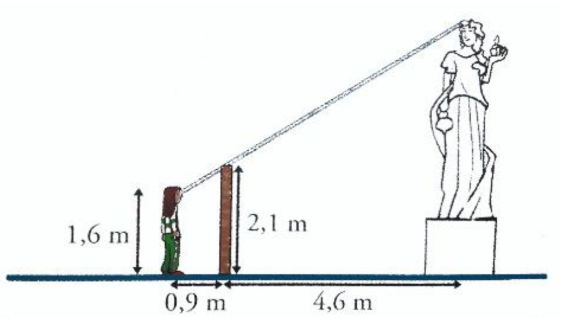
  Con las dos igualdades anteriores deducimos que $\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'}$ y $\frac{BC}{OA} = \frac{B'C'}{OA'}$.

  De donde obtenemos que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Propuesta didáctica para realizar en el aula

1. Para calcular directamente:

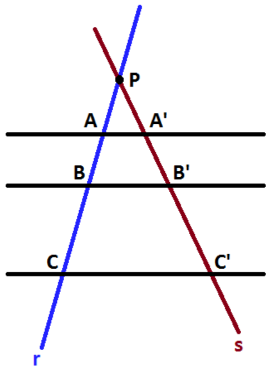
   Calcular la altura de la estatua con los datos que aparecen en la siguiente figura.



2. Para razonar:

Sean r y s dos rectas que se cortan en P.

Si AA'=10 cm, $\frac{AA'}{BB'} = \frac{2}{3}$ y $\frac{AA'}{CC'} = \frac{1}{2}$.



- Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

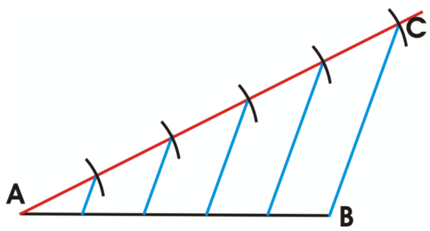
  $\frac{PA}{PC} = \frac{AA'}{CC'}$, $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$, $\frac{PB}{PA} = \frac{AA'}{BB'}$, $\frac{BB'}{CC'} = \frac{3}{4}$

- El área del triángulo PAA' es 30 cm^2, de entre las siguientes, ¿cuál es el área del trapecio AA'B'B?

  $30\ \text{cm}^2$, $37'50\ \text{cm}^2$, $45'50\ \text{cm}^2$, $28\ \text{cm}^2$, $70'25\ \text{cm}^2$ o $80\ \text{cm}^2$.

3. Para aplicar:

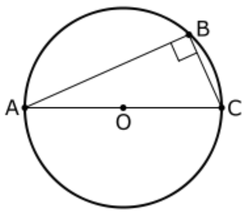
Tomemos regla, cartabón y compás, y propongamos a los alumnos que dividan un segmento AB en n partes iguales (por ejemplo, n=5).



Sólo tendrán que trazar una recta que pase por un extremo del segmento, por ejemplo, A (y que no contenga a B) y con el compás determinar 5 segmentos de igual longitud. Si C es el extremo final, unimos C con B y trazamos rectas paralelas al segmento BC por cada uno de los extremos.

TEOREMA SOBRE TRIÁNGULOS, CIRCUNFERENCIAS Y ÁNGULOS INSCRITOS.

Teorema: "*Sea B un punto de la circunferencia de diámetro no nulo AC y centro O, entonces el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, siendo el ángulo ABC de 90º.*"



Demostración: Los triángulos AOB y BOC son isósceles porque en ambos hay dos lados que coinciden con el radio de la circunferencia.

Como la suma de los ángulos del triángulo ABC es 180º : 2α+2β=180º, o bien, α+β=90º

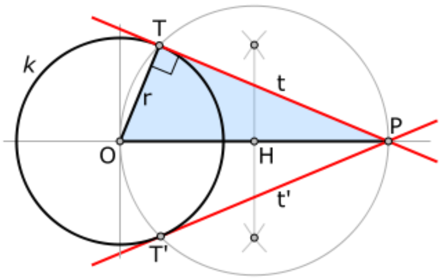
Con lo que queda demostrado el teorema.

Consecuencias de este teorema:

1.- La circunferencia circunscrita a todo triángulo rectángulo siempre tiene radio igual a la mitad de la hipotenusa.

2.- En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana correspondiente a la hipotenusa es siempre la mitad de la misma.

3.- Vamos a trazar las dos tangentes a una circunferencia que pasan por un punto P exterior a la misma. Sea k la circunferencia en cuestión. Para encontrar el punto T de tangencia y así poder obtener la recta t (tangente a k que pasa por P), razonamos de la siguiente forma:



- El radio r de la circunferencia k es perpendicular a la tangente a k en el punto T, por lo que concluimos que el ángulo OTP es necesariamente recto.
- Lo anterior implica que el triángulo OTP es rectángulo. Por lo tanto, es inscribible en una circunferencia cuyo radio tiene de longitud la mitad de la longitud de la hipotenusa OP.
- Entonces, llamando H al punto medio de la hipotenusa OP y haciendo centro en el mismo, podemos dibujar una segunda circunferencia auxiliar que será la que circunscribe al triángulo OTP.
- Esta última circunferencia se intersecará con la circunferencia k en dos puntos T y T', que son justamente los puntos de tangencia de las dos rectas tangentes a k pasando por el punto P. Ahora, ya determinados los puntos T y T', basta trazar las rectas TP y T'P (rojas en la figura) para tener resuelto el problema.

Propuesta didáctica para realizar en el aula

Se propondrá a los alumnos que, distribuidos en grupos de tres, dibujen en una hoja de papel una circunferencia de radio 3 cm y centro el origen de coordenadas de un sistema de ejes cartesianos.

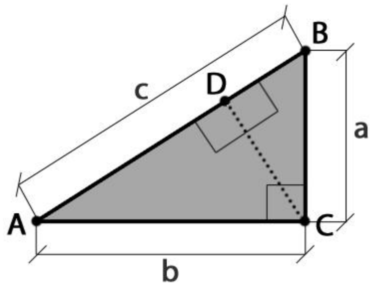
A continuación, un alumno del grupo considerará el punto P=(5,2), otro el punto Q=(-4,3), y el tercero el punto R=(4,-4).

Ahora tendrán que trazar las dos rectan tangentes a la circunferencia que pasan por P, Q o R, según el punto que les haya correspondido.

Una vez finalizado se intercambiarán los dibujos y serán críticos con lo observado en ellos, poniendo de manifiesto los posibles errores.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Teorema de Pitágoras: *"En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos, es decir, $a^2+b^2 = c^2$."*



Demostración del Teorema de Pitágoras:

Dado el triángulo rectángulo ABC con hipotenusa AB, si trazamos la altura CD sobre la hipotenusa, se obtienen dos parejas de triángulos semejantes.

ACD es semejante a ABC, por tener ambos dos ángulos iguales, el de 90º y el del vértice A, por lo tanto, AD/AC = AC/AB, de donde, $(AC)^2$=AD·AB.

CBD es semejante a ABC, , por tener ambos dos ángulos iguales, el de 90º y el del vértice B, por lo tanto, BD/CB = CB/AB, de donde, $(CB)^2$= BD· AB.

Sumando obtenemos: $(AC)^2 + (CB)^2 =$ AD·AB + BD· AB = (AD+DB)· AB =AB·AB=$(AB)^2$, es decir, $a^2+b^2 = c^2$.

Recíproco del teorema de Pitágoras: "*Si en un triángulo se satisface la igualdad $a^2+b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.*"

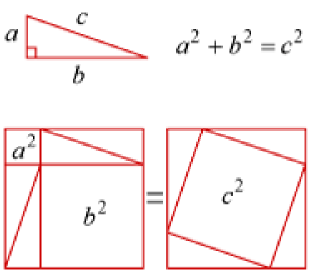
¿Sería el alumno capaz de razonar por si solo cómo se hace la demostración?

Algunas demostraciones visuales del teorema de Pitágoras

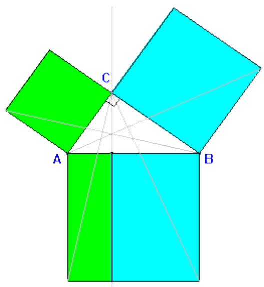
Aparte de la demostración anterior y otras diversas demostraciones formales del teorema de Pitágoras, existen múltiples demostraciones intuitivas (pruebas visuales) que permiten justificar la validez del teorema. Algunas de ellas son clásicas en la historia de la Matemática y se sustentan en argumentos geométricos, otras se apoyan en argumentos algebraicos y otras son válidas para triángulos especiales. Estas pruebas visuales son muy útiles ya que permiten un acercamiento intuitivo al teorema.

Se exponen a continuación algunas de esas pruebas visuales, presentadas por matemáticos notables en diferentes épocas de la historia.

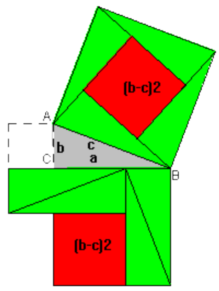
Pitágoras



Euclides



Bhaskara



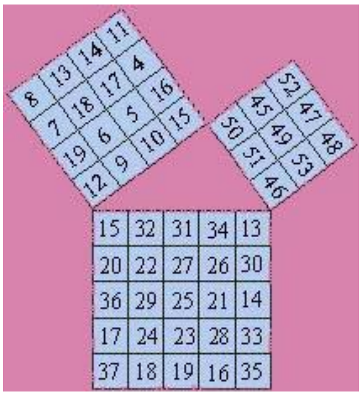
Problemas, juegos y curiosidades relacionados con el teorema de Pitágoras

Es importante resaltar en el aula la importancia del teorema de Pitágoras aplicándolo a diferentes situaciones de la vida cotidiana. Una vez que los alumnos comprendan el teorema y sepan aplicarlo como se indica en la propuesta didáctica, tiene interés mostrar una serie de juegos y curiosidades relacionados con dicho teorema, ya que a través de ellas daremos la posibilidad a los estudiantes de que investiguen, razonen y adquieran el conocimiento de nuevos conceptos mediante tareas que les resulten interesantes o motivadoras.

- Comprobación del teorema pesando. Tomamos un cartón de cierto grosor en el que hemos dibujado un triángulo rectángulo y los correspondientes cuadrados sobre la hipotenusa y los catetos. Una vez recortados, colocamos en un platillo de una balanza el cuadrado de la hipotenusa y en el otro los dos cuadrados de los catetos. La balanza quedará equilibrada.

- Ternas pitagóricas. Llamamos terna pitagórica a tres números a, b y c que cumplen la igualdad $a^2+b^2=c^2$. Por ejemplo: (3, 4, 5); (5,12,13); (8,15,17); (12,35,37); … Los alumnos pueden averiguar (consultando en Internet) qué ternas pitagóricas eran conocidas por los pueblos egipcios, babilónicos, hindús, etc. Es fácil ver que si (a, b, c) es una terna pitagórica, entonces (ka, kb, kc) también lo es, si K es un entero positivo.

- Cuadrados mágicos pitagóricos. Un cuadrado mágico es una cuadrícula (o matriz cuadrada) de números naturales en la que la suma de los elementos de cualquier fila, columna o diagonal vale lo mismo.



  Dibujemos un triángulo rectángulo y sobre sus catetos los cuadrados mágicos C1 y C2, y sobre la hipotenusa el cuadrado mágico H (véase la figura de al lado).

  El alumno comprobará que la suma de todos los números de C1 y C2 nos da la suma de todos los números de H.

- Curiosidad pitagórica

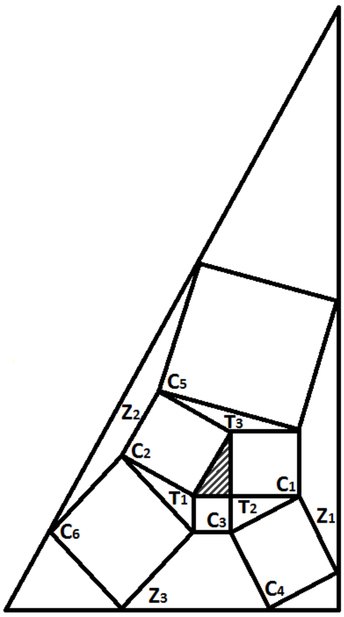
  Partiendo de un triángulo rectángulo **T** (el rayado), construimos la figura de al lado. Se demuestra que:

  1) área de C_1 + área de C_3 = área de C_2.

  2) área de T_1 = área de T_2 = área de T_3.

  3) área de Z_1 = área de Z_2 = área de Z_3 = 5·área de **T**.

  Y muchas más propiedades de áreas, paralelismos, ángulos, proporcionalidad, etc. que se pueden descubrir observando la figura.

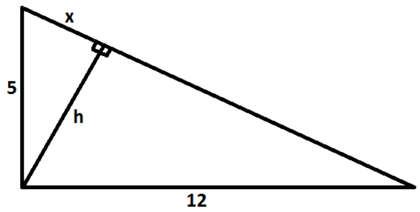


Propuesta didáctica para realizar en el aula

1. Para calcular directamente:

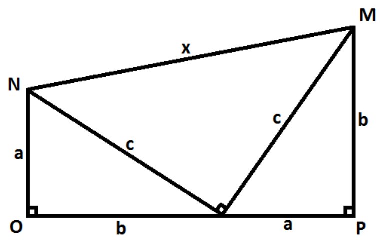
En la figura el valor de x es:

- 15/13
- 30/13
- 50/13
- 25/13



2. Para razonar:

En el trapecio OPMN se han determinado tres triángulos. A partir de la figura se puede deducir que $a^2+b^2=c^2$.



¿Con cuál o cuáles de los siguientes procedimientos es posible llegar a esta conclusión?

a) Expresar el área del trapecio como suma de las áreas de los tres triángulos.
b) Expresar el área del trapecio como suma del área de un rectángulo más el área de un triángulo rectángulo.
c) Determinar el perímetro del trapecio y expresar x en términos de a y b.

◯ Solamente a). ◯ Solamente a) y b).

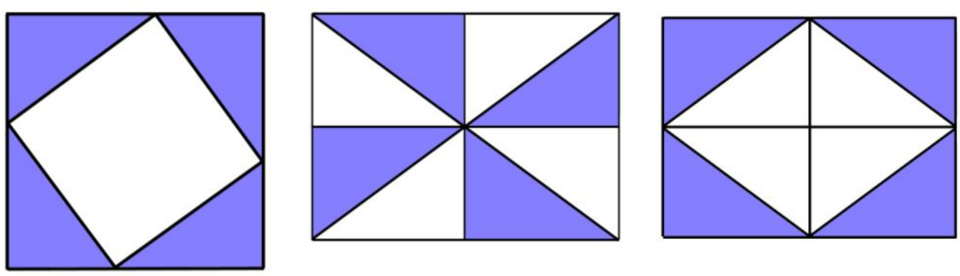
◯ Solamente b). ◯ Solamente b) y c).

◯ Solamente c). ◯ Solamente a) y c).

◯ a), b) y c). ◯ Ninguno.

3. Para aplicar y manipular

- Dibujar y recortar 4 triángulos rectángulos cuyos catetos midan 4 y 3 cm.
- Con los 4 triángulos conformar las siguientes figuras y reflexionar sobre el valor del área sombreada y el área en blanco.



- Dibujar un triángulo rectángulo cualquiera y trazar su altura sobre la hipotenusa.
- Con papel cebolla recortar los dos triángulos que se generan al trazar la altura y comprobar que son semejantes (constatando que sus ángulos son iguales).

8.2.2 MOVIMIENTOS EN EL PLANO: TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRÍAS

Como ya hemos dicho, las traslaciones, giros y simetrías forman parte del temario de la asignatura de Matemáticas de 3º de E.S.O. Con los siguientes **contenidos**:

- Elementos de un vector: módulo, dirección y sentido.
- Coordenadas de un vector en el plano.
- Traslaciones.
- Giros.
- Concepto de simetría axial.
- Búsqueda de ejes de simetría en figuras.

Los alumnos de este nivel ya tienen un criterio formado para conocer "a ojo" cuándo dos figuras dibujadas sobre el papel son congruentes. Desde el punto de vista geométrico podemos pensar que si son iguales hemos pasado de una a otra mediante una aplicación del plano en si mismo que conserva las distancias (isometría), de aquí surge la idea de movimiento: transformación que aplica cada figura en otra figura igual con la propiedad de conservar la distancia entre puntos.

Los <u>objetivos</u> del tema son que los alumnos conozcan qué es una transformación geométrica y sus elementos invariantes, así como que sepan diferenciar los distintos tipos de movimientos en el plano, distinguiendo entre congruencia y semejanza.

	Traslaciones	Dirección, módulo y sentido
Movimientos	Giros	Centro de giro y ángulo de giro
	Simetrías	Axial (eje de simetría) y Central (centro de simetría)

* *La simetría con deslizamiento es un movimiento del plano que no está incluido en el programa de 3º de E.S.O.*

Resulta muy interesante comenzar este tema con una lección que nos permita presentarlo de una forma atractiva. Así, los alumnos descubrirán relaciones geométricas a las que, aun siendo previamente conocidas, no les habían prestado interés desde el punto de vista matemático.

De esta manera, al terminar esta lección, el alumno estará más motivado para el estudio analítico de los movimientos.

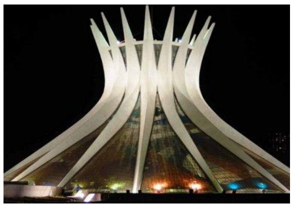
	Libro de espejos: Utilización del libro de espejos para generar polígonos regulares y obtener la figura simétrica de otra.
Procedimientos y actitudes	**Diseño artístico**: Apreciar la utilidad de los movimientos geométricos para el diseño de formas y objetos.
	Estudio de la naturaleza: Presentar la belleza que encierran las distintas formas de la naturaleza.

Metodología (introducción de los conceptos y aplicación de los mismos en el laboratorio)

A lo largo de la historia todas las culturas han utilizado figuras geométricas como elementos decorativos, no solo en sus manifestaciones artísticas y arquitectónicas, sino incluso en sus útiles domésticos.

Hoy en día, si salimos a la calle, la presencia de la geometría está en todos los lados y, a menudo, no aparece solo una figura geométrica, sino una repetición de una o varias de ellas que se mueven a lo largo del plano.

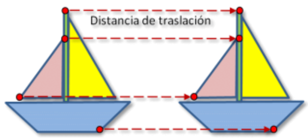




Todos tenemos clara la idea de lo que se traslada (barco), gira (noria), es simétrico (mariposa) o se deforma (nubes). Para definir los movimientos no hace falta ningún concepto matemático nuevo ya que palabras como giro, translación, simetría y reflexión están en nuestro lenguaje y la mente las asocia rápidamente.

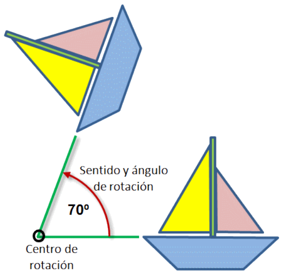
La traslación:

Es el movimiento más sencillo. Está presente en muchos elementos decorativos. Consiste en usar una figura trasladándola en una misma dirección y sentido.



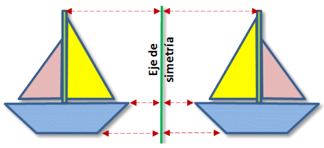
El giro:

Hoy en día todos sabemos que la Tierra gira y, ¿qué sería de nuestra civilización si careciera de la rueda? Un giro es un movimiento, es decir, es una transformación que mantiene la forma y el tamaño del objeto. Sólo se necesita un punto alrededor del cual se ha de girar y un ángulo de giro.



La simetría:

Esta noción ha estado asociada en todas las culturas con el equilibrio y la armonía. A nuestro alrededor descubrimos infinidad de objetos que son simétricos respecto de un eje: mariposa, letras o nuestro propio cuerpo. Si nos colocamos un espejo siguiendo nuestro eje de simetría veremos que se reproduce exactamente igual.



La idea de simetría está asociada a los espejos, ya que la imagen reflejada en ellos es simétrica respecto a la original. También un espejo es una herramienta muy útil para comprobar si una figura es simétrica respecto a un eje, ya que si colocamos un espejo siguiendo el eje de la figura y el espejo la reproduce exactamente igual, podemos afirmar que la figura es simétrica y obtener el eje de simetría.

Con frecuencia nos encontramos en la naturaleza formas que combinan la simetría y el giro, es decir, que tienen simetría de giro (por ejemplo, la estrella de mar) dándonos una sensación de equilibrio y de regularidad.

Hay figuras que giradas un determinado ángulo se transforman en sí mismas:

- El cuadrado es una figura que, si la giramos un ángulo de 90º, 180º, 270º o 360º, se transforma en sí misma, diremos que tiene una simetría de giro de orden 4.
- El triángulo equilátero tiene simetría de giro de orden 3.
- En general un polígono regular de n lados tiene una simetría de giro de orden n.

E**jemplos: los frisos y los mosaicos**

<u>Frisos</u>

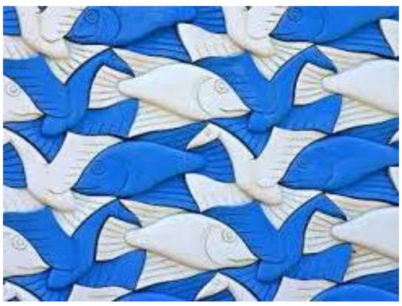
Un friso se obtiene mediante traslaciones constantes de una misma figura en una dirección, es decir, trasladando repetitivamente una misma figura a una distancia fija.

Encontramos frisos siempre que aparece un movimiento a intervalos en una misma dirección como:

- Motivos decorativos.
- Escaleras mecánicas.
- Cintas transportadoras.
- Cardiogramas.

<u>Mosaicos</u>

Un mosaico rellena todo el plano mediante una misma forma o motivo fundamental.



Si utilizamos baldosas con la forma de un polígono regular, se comprueba que solo se puede conseguir un mosaico con:

- Triángulos equiláteros. Ya que por ser sus ángulos de 60º es posible hacer confluir en cada vértice un total de 6 triángulos haciendo que el ángulo total sea de 360º.
- Cuadrados. Ya que por ser sus ángulos de 90º es posible hacer confluir en cada vértice un total de 4 cuadrados haciendo que el ángulo total sea de 360º.
- Hexágonos. Ya que por ser sus ángulos de 120º es posible hacer confluir en cada vértice un total de 3 hexágonos haciendo que el ángulo total sea de 360º.

Ningún otro polígono regular tiene ángulos que sean divisores de 360º, luego es imposible realizar un mosaico utilizando un polígono regular que sea distinto de un triángulo, cuadrado o hexágono. Ahora bien, combinando diferentes polígonos regulares hay más opciones.

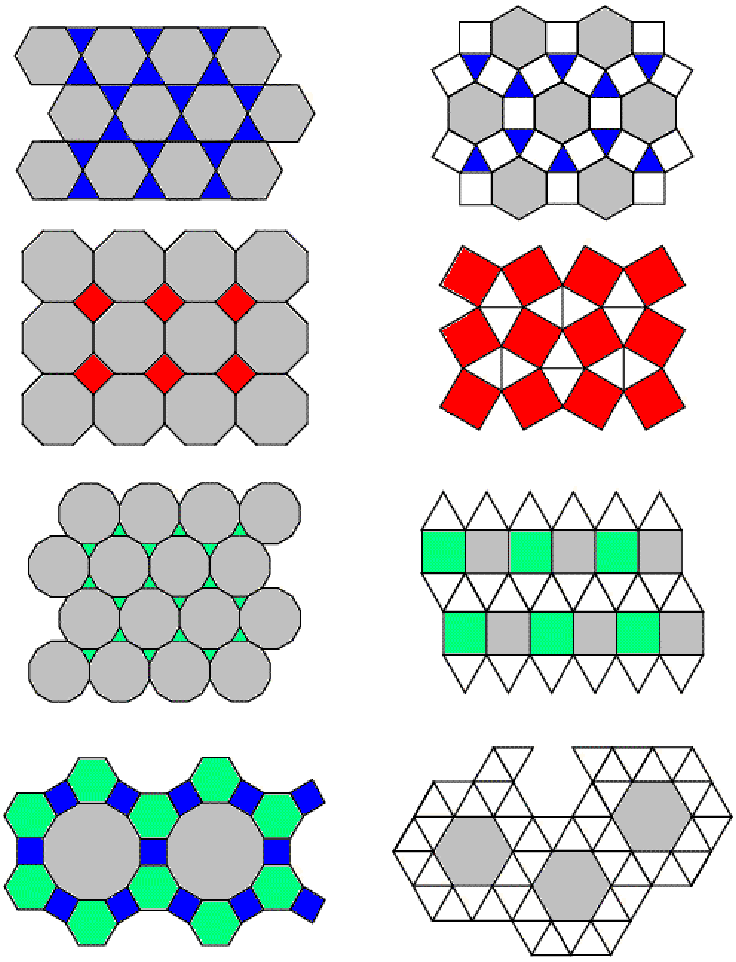
A los mosaicos que combinan varios polígonos regulares se les llama semi-regulares.

Aunque puede parecer que se pueden construir muchos, la respuesta es que son pocas las combinaciones.

En la siguiente figura lateral se muestran los únicos 8 modelos posibles.

Sin embargo, combinando otro tipo de figuras, la variación es inmensa.

A lo largo de la historia los humanos han creado, y seguimos creando, nuevas combinaciones de figuras para realizar mosaicos bellísimos. Como, por ejemplo, los realizados en la mezquita de Córdoba y en la Alhambra de Granada por grandes artistas musulmanes.



Propuesta didáctica para realizar en el laboratorio

Se necesitará el siguiente material:

- Tiras de papel de 60 cm de longitud y 10 cm de ancho.
- Tijeras y regla.
- Pliegos con los polígonos regulares: Triángulo, cuadrado, pentágono y hexágono.
- Libro de espejos: consiste en la unión de 2 láminas de espejos rectangulares con una cinta adhesiva en el borde, de manera que las superficies reflectantes queden hacia el interior del libro y procurando que éste abra y cierre con facilidad (con la posibilidad de abrirlo formando cualquier ángulo). Con esta herramienta:
    - El alumno visualizará fácilmente los ejes de simetría.
    - Podrá obtener formas geométricas y generar imágenes virtuales.
    - Además, podrá observar las regularidades de muchas figuras, que le ayudará a introducirse en el "mundo de los mosaicos".

Construcción de frisos:

Cada alumno tomará unas tijeras y una tira de papel que plegará en "acordeón". Una vez plegada realizará los recortes que crea convenientes para que al desplegada la tira pueda visualizar un friso más o menos artístico.

A continuación, localizará las traslaciones y la medida del vector de traslación. Localizará también las posibles simetrías así como el eje de simetría.

Construcción de mosaicos:

Se le proporcionará a cada alumno un libro de espejos con el que hará la siguiente investigación:

- Dibujará un segmento en una hoja de papel y con dicho segmento tendrá que generar polígonos regulares. Una vez conseguido, toda la clase reflexionará sobre cuál debe ser el ángulo de apertura del espejo para obtener cada uno de los polígonos.
- Ahora el alumno ha de ser capaz de construir un polígono estrellado (por ejemplo, con 6 puntas).
- A continuación, con rotuladores de colores formará un dibujo (garabato) no muy complicado, y observará la belleza de la simetría de muchos diseños (incluida la de los seres vivos).
- Para finalizar, el alumno recortará los polígonos e irá colocándolos sucesivamente en el libro de espejos para observar los siguientes mosaicos:
    - El determinado por el triángulo (concurren 6 triángulos en cada vértice).
    - El determinado por el cuadrado (concurren 4 cuadrados en cada vértice).
    - El determinado por el hexágono (concurren 3 hexágonos en cada vértice).
    - ¿Qué pasa con el pentágono?

Actividad final:

Como actividad final se propone a los alumnos que confeccionen un mosaico semi-regular ayudados por los polígonos regulares (todos ellos con el mismo lado) que han recortado y visualicen en él los tres movimientos.

8.2.3 FIGURAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS

Los contenidos de este bloque temático son:

- Poliedros.
- Prismas y pirámides.
- Cuerpos redondos.
- Simetrías en poliedros y cuerpos redondos.
- Cónicas.
- Áreas y volúmenes de poliedros, cilindros y conos.
- La esfera.

Nuestro objetivo es hacer una propuesta didáctica para introducir los poliedros, por ser las figuras que en el espacio desempeñan un papel muy parecido a los polígonos en el plano. Entre los poliedros, los regulares o cuerpos platónicos son, sin duda, los más relevantes. Vienen a ser como los polígonos regulares pero con una dimensión más. Al contrario de lo que sucede en el plano, donde hay polígonos regulares de cualquier número de lados, en el espacio solo hay 5 poliedros regulares:

El estudio de los cuerpos platónicos está contenido en el último tomo de los Elementos de Euclídes como el punto cumbre de la Geometría de su tiempo. Se atribuye su descubrimiento a Pitágoras y a Taeto (contemporáneo de Platón). Es muy interesante leer el diálogo de Timeo (360 a.C.) donde Platón da a los sólidos platónicos una importancia filosófica fabulosa.

Estudio de los poliedros

Definición 1: "*Un poliedro $\mathcal{P}$, es un conjunto finito de polígonos $\{C_k\}$ en el espacio, los polígonos de $\mathcal{P}$ se llaman caras del poliedro. Los vértices de los polígonos de $\mathcal{P}$ se llaman vértices del poliedro, y los lados de los polígonos, lados o aristas del poliedro. Para que $\mathcal{P}$ sea un poliedro se deben verificar las condiciones:*

- *Dos caras de un poliedro o bien no se cortan o bien tienen un único vértice en común, o bien tienen exactamente un lado en común, en este último caso se dice que las caras son adyacentes.*
- *Cada arista del poliedro es un lado de exactamente dos polígonos de $\mathcal{P}$.*
- *Las caras de un polígono que comparten exactamente un vértice en común V se pueden ordenar en una sucesión $C_1, \dots, C_r$ de modo que las caras C_i y C_{i+1} son adyacentes y el lado en común tiene por extremo V y lo mismo ocurre con C_r y C_1.*
- *Dadas dos caras C y C' de un poliedro existe una sucesión finita de caras de $\mathcal{P}$: $C_1, \dots, C_r$ de modo que C_i y C_{i+1} son adyacentes y C=C_1 y C_r=C'.*"

<u>Definición 2</u>: "*Un poliedro P se llama **convexo** si toda recta que no está contenida en ninguno de los planos que contienen a las caras del poliedro, corta como mucho en dos puntos a las caras. En caso contrario diremos que es cóncavo.*"

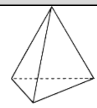
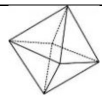
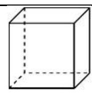
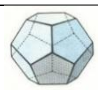
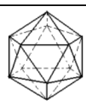
<u>Teorema de Euler</u>: **"***Sea P un poliedro convexo con, C caras, A aristas y V vértices, entonces:* ***C+V=A+2****.*"

<u>Definición 3</u>: "*Un poliedro convexo se dice que es regular si tiene todas las caras "congruentes" o iguales a un mismo polígono regular y cada vértice está en un mismo número de caras. Decimos que un poliedro regular tiene tipo {n,m} si sus caras son polígonos regulares con n lados y en cada vértice exactamente m caras.*"

<u>Teorema:</u> **"***Todo poliedro regular tiene uno de los cinco posibles tipos:*

{3,3}, {3,4}, {4,3}, {3,5} y {5,3}."

El número de caras, aristas y vértices viene dado por la siguiente tabla:

Tipo	Nº de caras	Nº de aristas	Nº de vértices	Poliedro
{3,3}	4 (triángulos)	6	4	Tetraedro 
{3,4}	8 (triángulos)	12	6	Octaedro 
{4,3}	6 (cuadrados)	12	8	Cubo 
{3,5}	20 (pentágonos)	30	12	Dodecaedro 
{5,3}	12 (triángulos)	30	20	Icosaedro 

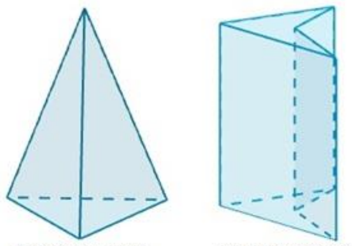
<u>Simetría de los sólidos platónicos</u>

Los sólidos platónicos tienen todos los tipos de simetrías que existen en el espacio, es decir, respecto a un punto, respecto a un eje y respecto a un plano.

- Simetría puntual: Para cada uno de los 5 sólidos existe un punto, que es siempre el punto central del poliedro que es el centro de simetría en la simetría puntual.
- Simetría axial: Todos los sólidos tienen además varios ejes de simetría. Para cada poliedro la cantidad varía; pero en todos ellos el eje de simetría pasa por el centro de simetría.
- Simetría de plano: De nuevo todos los sólidos platónicos presentan simetrías respecto a planos, en las que los planos de simetría contienen al centro de simetría, y a combinaciones de los ejes de simetría.

Observación:
En el curso de 3º de la E.S.O podemos "traducir" la definición formal de poliedro por la siguiente:

"*Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos planos. Hay poliedros cóncavos y convexos como se muestra la figura.*"

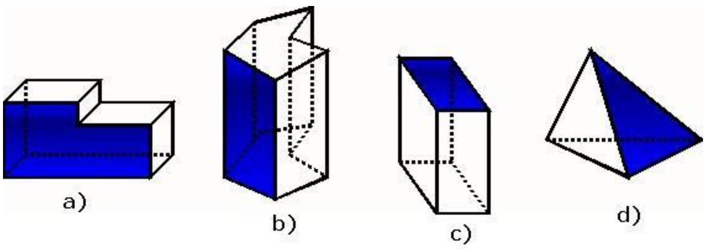


Poliedro convexo Poliedro concavo

Propuesta didáctica para realizar en el aula

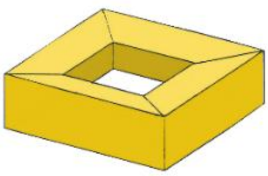
1) ¿Alguna de estas dos esculturas es un poliedro? En caso afirmativo, ¿es cóncavo o convexo?

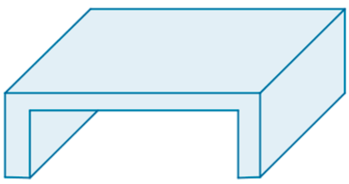
2) Observa los siguientes poliedros:



- Clasifícalos en cóncavos y convexos.
- Para los poliedros cóncavos, comprueba que se verifica el teorema de Euler.
- Nombra para cada uno de ellos un objeto de la vida real que se asemeje.

3) Comprueba si se cumple el teorema de Euler en los siguientes poliedros cóncavos:



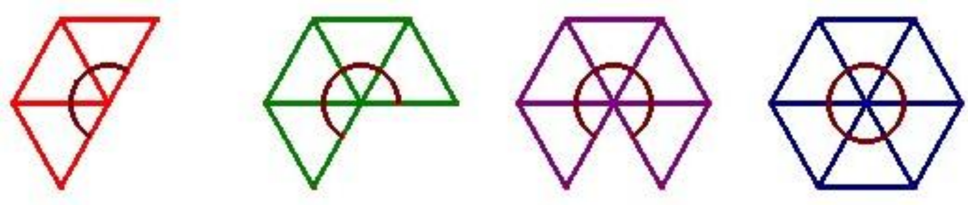


4) ¿Por qué solo hay 5 poliedros regulares?

Comenzaremos a dar respuesta a esta cuestión para hacer al alumno más fácil su entendimiento.

Para que un poliedro sea regular, todas sus caras han de ser el mismo polígono regular y los ángulos han de ser iguales también. Sabemos que existen sólo 5 poliedros regulares, lo que trataremos de hacer es comprobar si pueden existir otros poliedros regulares, partiendo de los polígonos regulares (triángulos, rectángulos, pentágonos, etc.)

Empezaremos por los triángulos equiláteros. Como su ángulo interior es de 60º, podemos agrupar 3, 4, 5 o 6 triángulos equiláteros alrededor de un vértice, tal como muestra la siguiente figura.

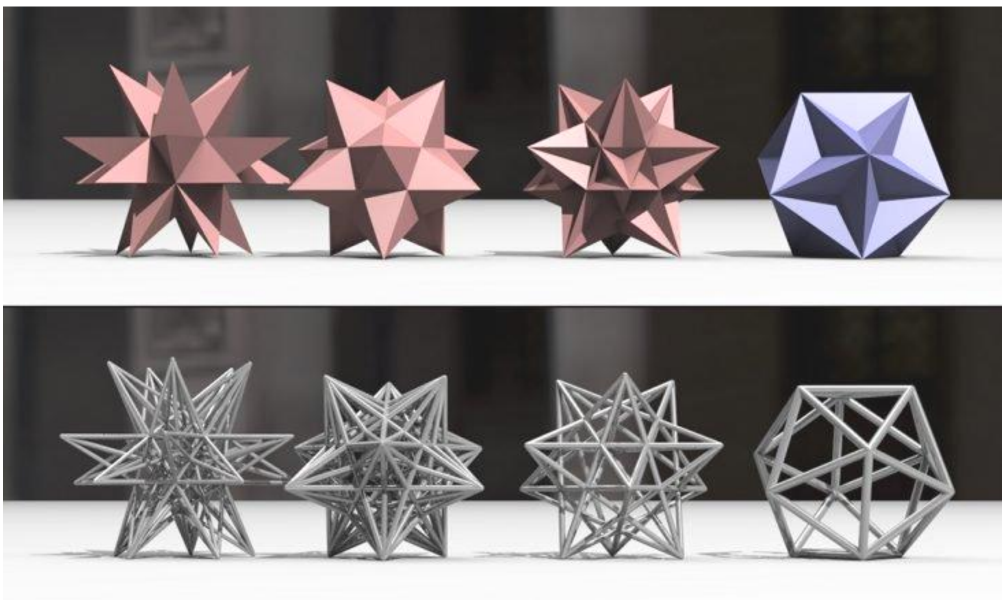


De esta forma obtenemos el **tetraedro**, el **octaedro** y el **icosaedro**. En el caso de la derecha, el ángulo que forman es de 360º, una circunferencia completa, y no podremos formar poliedro.

Una vez explicado lo anterior se planteará al alumno:

- Investiga con cuadrados
- Investiga con pentágonos.
- ¿Por qué no puede haber poliedros regulares con hexágonos?
- ¿Y con otros polígonos?

5) Investiga acerca de los sólidos de Kepler-Poinsot.



9. BIBLIOGRAFÍA

Libros:

- Barrantes López, M., "La Geometría y la formación del profesorado en Primaria y Secundaria". Universidad de Extremadura, 1998.
- Buser, P. y Costa, A. F., "Curso de Geometría Básica". Sanz y Torres, 2010.
- Castelnuovo, E., " Didáctica de la matemática moderna". Trillas,1990.
- Fetísov, A. I., "Acerca de la demostración en Geometría". Mir, 1980.
- Lee, J. M., "Axiomatic Geometry". American Mathematical Society.
- Marina, J.A., Pellicer, C. y Manso, J. "Libro Blanco de la profesión docente y su entorno escolar". Versión 1.3., Diciembre 2015.
- Sanz, I., "Matemáticas y su didáctica II. Geometría y medida". Universidad del País Vasco, 2004.
- Venema, G. A., "Fundations of Geometry". Pearson, 2012.
- Wallace, E. y West, S., "Roads to Geometry". Pearson, 2004.

Artículos:

- Alegría, P., "Las demostraciones geométricas".
- Aprendizaje de la Geometría de la Sociedad Española de Investigación en Educación matemática (S.E.I.E.M.). Razonamiento deductivo y demostraciones.
- Barrantes, M., Balletbo, I., Fernandez, M., "Enseñar geometría en secundaria".
- Cohen, "Axiomatic Geometry ". Lecture notes, 2015.
- Delors, J., "La Educación encierra un tesoro". Informe para la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo Veintiuno. México, 1996.
- Fouz, F., "Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría". Universidad del País Vasco.
- García López, A., "Problemas geométricos: Una visión sintética y analítica". Universidad Politécnica de Madrid.
- Gascón, J., "Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?" Suma 39.
- Meneses Benítez, G., "El proceso de enseñanza- aprendizaje: el acto didáctico". Universitat Rovira i Virgili.
- Quesada, C., "Los sólidos platónicos: Historia, Propiedades y Arte".
- Rangel Luengas, S., "El teorema de Pitágoras y el teorema de Thales. Instrumento de evaluación desde de las Pruebas Saber". Universidad Nacional de Colombia.

Páginas Web:

- Profesor en línea.
- Wikipedia.
- Monografías: "Propuesta Didáctica Constructivista para la Enseñanza de la Geometría" http://www.monografias.com/trabajos109/propuesta-didactica-constructivista-ensenanza-geometria/propuesta-didactica-constructivista-ensenanza-geometria4.shtml#referencia
- Universidad Complutense de Madrid: Cátedra Miguel de Guzmán. http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/historia
- http://espaciodegeometriasagrada.com/los-5-solidos-platonicos/
- http://www.roberprof.com/tag/hilbert/