



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

**Dpto. Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales y de la
Matemática**

**LA ENSEÑANZA DE LAS
MATEMÁTICAS
EN SECUNDARIA EN OTROS PAISES
EN
LA ACTUALIDAD**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación
Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.**

Alumno: Jorge Rico Ramón

Tutor: Alfonso Jesús Población Sáez

Valladolid, Junio 2017

Índice

1. INTRODUCCIÓN.....	1
2. EUROPA.....	2
2.1. Portugal.....	5
2.2. Italia.....	10
2.3. Francia.....	14
2.4. Polonia.....	19
2.5. Otros países europeos.....	22
3. LOS PAÍSES CON MEJORES RESULTADOS.....	28
3.1. Singapur.....	28
3.2. Corea del Sur.....	33
3.3. Finlandia.....	38
3.4. Canadá.....	43
3.5. Otros países con los mejores resultados.....	49
4. ASPECTOS DE LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA INTERNACIONAL.....	53
4.1. Latinoamérica.....	53
4.2. India.....	57
4.3. Oriente Medio.....	60
4.4. Las etnomatemáticas.....	63
5. CONCLUSIONES.....	70
5.1. Conclusiones sobre la enseñanza matemática en Europa.....	70
5.2. Conclusiones sobre la enseñanza matemática en los países con mejores resultados.....	74
5.3. ¿Qué podemos hacer nosotros?.....	76
Bibliografía.....	79

1. INTRODUCCIÓN

Existe un interés permanente en conocer de qué manera podrían impartirse mejor las matemáticas en las aulas, pues es de todos sabido que nuestro sistema educativo tiene una serie de carencias, empezando por un continuo cambio legislativo, pasando por una falta de diversidad metodológica, y finalizando por un desencanto en el alumno, con malos resultados educativos.

No podemos eludir una visión en perspectiva, mirando más allá de nuestras fronteras, comparando nuestra enseñanza con la enseñanza de las matemáticas en otros países, deteniéndonos a reflexionar delante de los informes PISA en rendimiento de matemáticas, barajando la posibilidad de realizar cambios curriculares. Adaptamos el estilo educativo a los nuevos tiempos, descartando esa concepción clásica que se tiene de la matemática, la cual se forja a menudo en las aulas, a base de clases expositivas, procedimientos, rutinas y ejercicios, que no contribuyen para nada a la labor educativa ni al correcto aprendizaje de las matemáticas.

Nuestros ojos se podrían posar en países punteros en la enseñanza de las matemáticas como son, por ejemplo, Corea del Sur, Finlandia o Singapur; sin embargo cuando queremos buscar respuestas a las preguntas que nos hacemos, no sólo bastan los modelos educativos de éxito. También es conveniente que tengamos una referencia en lo geográfico y político, como podrían ser países de la Unión Europea; y cercanos culturalmente, como son los países mediterráneos, o hispanoamericanos. Finalmente, hemos de conocer los lazos de cooperación que se crean entre las naciones, para compartir experiencias y lograr una enseñanza de mejor calidad.

No podemos ignorar cómo es la enseñanza matemática en lugares donde ha existido el conflicto y la división. Kosovo ha vivido una etapa trágica de guerra y posguerra, y que ya está en el camino del restablecimiento, con planes integradores en la educación. Por otra parte, en el contexto de las etnomatemáticas, veremos cómo afrontan las matemáticas en Secundaria los países en vías de desarrollo, que han necesitado mantener su sentido de comunidad, como es el caso de Brasil o Sudáfrica.

Sin pretender emular los modelos de cada país, aunque nos detengamos en particularidades propias de algunos de éstos, las conclusiones extraídas van a ser de gran interés en la dimensión reflexiva e investigadora de la docencia y, por tanto, supondrán una mejor enseñanza de las matemáticas. Tal es el propósito de este documento.

2. EUROPA

Se ha elegido como primera parada Europa, ya no sólo por ser nuestro continente y área de influencia más inmediata, con países que podrían tener una similitud cultural, y con los que tenemos unos vínculos políticos más estrechos; también hay que considerar que la enseñanza matemática en Europa se ha consolidado en siglos, siendo uno de los continentes donde más se ha investigado en las matemáticas; en la época griega, y a partir del Renacimiento. Por tanto, se ha asentado una tradición en la enseñanza de las matemáticas que perdura hasta nuestros días.

En Europa vamos a distinguir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas por países guiándonos en ciertos aspectos geográficos, culturales y económicos. Tras una visión general del panorama educativo de las matemáticas a nivel europeo, empezamos por la enseñanza en un país escogido por haber compartido historia con nosotros y que también comparte la península ibérica, como es de Portugal. Ya no solamente nos hemos guiado por este criterio, sino porque es un país que está consiguiendo sorprendentes resultados en las evaluaciones externas, y en el que ha mejorado notablemente la calidad en educación matemática.

También haremos la comparativa de la enseñanza en Italia, un país mediterráneo, culturalmente similar al nuestro, y que tiene algunas particularidades que señalaremos. Italia, desde la Edad Media, con el *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa, y con momentos cumbre en el Renacimiento, ha sido un país con notables contribuciones en matemáticas. Sin embargo, es también un país con grandes desigualdades territoriales y socioculturales que influyen en el rendimiento matemático de sus alumnos de Secundaria.

Abordaremos la educación en los países menos afines culturalmente, pero que conforman un núcleo fuerte en las matemáticas. Francia, además de una gran tradición matemática -con grandes personajes que construyeron gran parte de las matemáticas actuales- también tiene un peso político y económico.

Polonia, que puede presumir de tener muy buenos resultados en matemáticas, estuvo hasta hace poco, en la órbita de influencia soviética, y ha tenido que realizar grandes reformas legislativas para modernizar su sistema educativo.

Finalizamos con Kosovo, un país que ha vivido la tragedia de la guerra y la confrontación; y no nos podemos olvidar de la enseñanza matemática en el Reino Unido y Alemania.

Aunque se está tratando como un caso aparte, por su excelencia y repercusión, estudiaremos el sistema finlandés y su educación matemática, pero será en el capítulo siguiente, cuando nos centremos en los países que han demostrado un gran rendimiento en las evaluaciones externas

PISA. Otro país europeo muy interesante, que también se tratará en el siguiente capítulo es Estonia.

Las matemáticas en Europa han conocido épocas de esplendor, partiendo de la civilización griega. Tras una larga decadencia, en la Edad Media, llegaron las contribuciones árabes, principalmente en álgebra, y el continente se convirtió en el centro del pensamiento matemático.

Sin embargo, en la actualidad, y ya consolidada la escolarización obligatoria, las matemáticas siguen teniendo un grave problema de fondo. Se sigue percibiendo por parte de los alumnos como una asignatura difícil y costosa, mostrando una actitud de rechazo. Pocos países se han aventurado a realizar un estudio profundo sobre la motivación y actitud que tienen los escolares hacia las matemáticas, pudiendo esto arrojar algo de luz al respecto.

La gran mayoría de países europeos apuestan por las actividades extracurriculares, así como un fomento de acuerdos con empresas y universidades, favoreciendo enfoques didácticos más específicos que puedan hacer el aprendizaje de las matemáticas más productivo para el alumno. Sin embargo, estas actividades suelen estar pensadas para estudiantes con altas capacidades, siendo el Reino Unido la excepción, con su programa STEM *Science Technology Engineering Mathematics; Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Matemáticas*.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la educación matemática europea. Divulgación.

A pesar de que las actividades extracurriculares en matemáticas no se hacen para todos los niveles, tanto las instituciones educativas, como las administraciones centrales coinciden en que las TIC como apoyo en la educación matemática son positivas y recomendables. Sigue existiendo, bien entrado el S. XXI, una resistencia por parte de profesores y alumnos a incorporar tales recursos. Según un consejo de la UE, para poder mejorar la implicación de los alumnos en su enseñanza, se ha de aprovechar la curiosidad que tienen, desde edades tempranas, por las ciencias en general y las matemáticas en particular.

Todos los países avanzan en el ámbito digital, que favorece el aprendizaje, y hay que destacar el esfuerzo que se realiza en Irlanda, con su programa DEIS *Delivering Equality of Opportunity in Schools; Igualdad de Oportunidades en los Centros Escolares de Irlanda*, y que consigue una mejora de los resultados en aritmética, en áreas desfavorecidas.

Sólo nueve países organizan campañas que fomenten el aprendizaje de las matemáticas. Polonia, Reino Unido y Portugal se han aventurado divulgando en sus medios de comunicación, creando programas cortos dirigidos especialmente a estudiantes de educación secundaria donde se analizan problemas y se busca solucionarlos. También se habla de números, juegos, curiosidades.

Formación inicial y permanente del profesorado

No sólo los conocimientos y las habilidades del profesor son determinantes en el escenario de la enseñanza sino que también tienen un papel primordial las habilidades pedagógicas. La clara correlación entre la calidad del sistema educativo y la formación del profesorado establece la necesidad de tener un profesorado bien formado, y con posibilidades de seguir formándose. En no pocos países se deja notar una merma en la capacidad docente en cuanto a enseñanza matemática, demandándose profesores competentes.

Recordemos que en algunos países como Eslovenia un gran porcentaje del profesorado no ha tenido estudios universitarios, y en Italia existe un problema similar. En Irlanda se anima a los profesores de matemáticas sin titulación especializada a obtener un diploma de posgrado. En Islandia hay más seriedad con la preparación del profesorado, y los profesores deberán completar un máster de 300 créditos, independientemente de si van a ejercer en educación infantil o secundaria.

En paralelo está la cuestión del reemplazo generacional del profesorado. En Finlandia la edad media del profesorado de matemáticas es superior al de otras áreas. El envejecimiento de los profesores y su jubilación es un problema a tener en cuenta en toda Europa, pues se necesitará una provisión de profesores jóvenes y cualificados.

Evaluaciones externas

Según el estudio TIMSS, se ha comprobado que hay una fuerte relación entre el rendimiento académico en matemáticas de un alumno y su situación familiar; sin embargo, también es cierto que no influye el entorno familiar cuando un estudiante saca malos resultados.

Estudiar las diferencias en rendimiento académico entre chicos y chicas resulta complicado, pues éstas son similares en los informes TIMSS, pero en los informes PISA se constata un mayor rendimiento académico en matemáticas por parte de los chicos, no en todos los países, y que están influido por los itinerarios y agrupamientos. Así mismo, el informe PISA 2003 constata que las chicas tienden a tener menos interés por las matemáticas y a experimentar un mayor nivel de ansiedad en las tareas encomendadas.

Estructura de cada apartado

Se ha intentado seguir un cierto orden a la hora de exponer la realidad educativa matemática y así será el esquema aproximado que seguiremos en éste y en el siguiente capítulo:

- Se hace un resumen inicial del contexto educativo como pueden ser peculiaridades, estructuración de la secundaria, las reformas en la legislación que se han llevado a cabo

recientemente, abarcando hasta secundaria superior, donde por lo general se hace una prueba de acceso o se consigue un certificado de estudios.

- Después profundizaremos en los aspectos del currículo matemático; de qué es lo que dicta la norma del país, en cuanto a contenidos; así como las recomendaciones que se hacen a la hora de poner en práctica la enseñanza de las matemáticas.
- También consideramos interesante analizar las peculiaridades de sus libros de texto así como las tareas que se suelen llevar a cabo con ellos, pues el libro de texto sigue siendo una manifestación del saber escrito, enormemente arraigado en la cultura de la mayor parte de países.
- Se describirán las metodologías y la forma de evaluación del alumno o del docente, ya sea del fruto de investigaciones, indicaciones, observaciones o programaciones procedentes de centros específicos en la enseñanza secundaria, preferentemente del ámbito público.
- Finalmente, se ha considerado el apoyo al docente una pieza clave; su formación continua es garantía de éxito para lograr una correcta enseñanza de las matemáticas. Nos detendremos aquí también en los aspectos de la innovación. En algunos casos, es interesante que hablemos también de la divulgación que se están dando a las matemáticas, ya sea en medios audiovisuales u otros.

2.1. Portugal

La enseñanza básica obligatoria en Portugal comprende tres ciclos de escolarización, hasta los 15 años de edad. El tercer ciclo de esta etapa de educación básica es el que corresponde con lo que aquí llamamos enseñanza secundaria obligatoria. La enseñanza secundaria allí es lo que consideramos habitualmente como bachillerato, ramificándose, igualmente que en España y otros países, en diversas especialidades, tanto académicas como de formación profesional.

Crisis económica y reformas educativas

Se ha realizado un conjunto de reformas de mejora de la calidad educativa, en las que se han mejorado las condiciones de los alumnos desfavorecidos, gracias a ayudas como libros u ordenadores, entre otras. También se implementó una evaluación de más calidad en profesores y centros, así como medios asistenciales para formar al profesorado y éste sea más competente.

Sin embargo, al igual que en España, hay dos males que azotan al país: La crisis económica, que ha sido un impedimento serio en las reformas que se han acometido; y también las constantes reformas del sistema educativo, en las cuales parece que cada gobierno quiere dejar su impronta.

Hay dos hechos relevantes que nos hace prestar atención:

- La mejora en cuanto a resultados, especialmente en Matemáticas y Lengua, en las pruebas PISA.
- La reducción de la desigualdad en las aulas: Los alumnos con menos recursos económicos o con familias desfavorecidas sacan cada vez mejores resultados.

La programación de matemáticas, tras la reforma del currículum en el año 2008, tiene en cuenta las destrezas transversales relacionadas. A pesar de los buenos resultados, la APM *Associação de Professores de Matemática* no se muestra tan optimista.

Currículo oficial de las matemáticas en Portugal

El currículo oficial señala tres objetivos primordiales para las matemáticas en el tercer ciclo de enseñanza básica obligatoria: Estructurar el pensamiento mediante la jerarquización de los conceptos matemáticos, y de esta forma alcanzar una forma de pensar crítica y coherente; analizar el mundo natural que nos rodea, conectando las matemáticas con las ciencias naturales, la geografía, la física, la química; y finalmente interpretar la sociedad, las actividades humanas, que relaciona las matemáticas con el ámbito de lo cotidiano, las ciencias sociales, la política o la economía. El alumno ha de poder identificar, designar, reconocer, saber, demostrar (o probar), extender (o generalizar) y justificar.

Equações do 2.º grau

3. Completar quadrados e resolver equações do 2.º grau

1. Determinar, dado um polinómio do 2.º grau na variável x , $ax^2 + bx + c$, uma expressão equivalente da forma $a(x + d)^2 + e$, onde d e e são números reais e designar este procedimento por «completar o quadrado».
2. Resolver equações do 2.º grau começando por completar o quadrado e utilizando os casos notáveis da multiplicação.
3. Reconhecer que uma equação do segundo grau na variável x , $ax^2 + bx + c = 0$, é equivalente à equação $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ e designar a expressão $\Delta = b^2 - 4ac$ por «binómio discriminante» ou simplesmente «discriminante» da equação.

Ilustración 1: Contenidos y metas curriculares. Bloque de Álgebra, 9º año. Programa e Metas Curriculares Matemática, Ensino Básico (Ministério da Educação, Governo De Portugal, 2013, p. 115)

En cuanto a contenido, hay que señalar el tratamiento axiomático que se tiene de la geometría (Elementos de Euclides) en el tercer ciclo. Relación de rectas y planos. Los vectores comienzan a analizarse con detalle en el 8º curso. En secundaria de Ciencias y Tecnología se relega al tercer curso la enseñanza de las fórmulas trigonométricas, pero en contrapartida se preparan las matemáticas de la universidad, en el curso 12º, utilizando modelos de variación u oscilatorios, mediante ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden. Así mismo, se describen los

números complejos mediante la fórmula de Euler, y se anticipa ya en el 10º curso la geometría analítica en el espacio.

En el itinerario de Humanidades hay dos años de matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales en las que se pone especial énfasis a la estadística, la probabilidad, los modelos económicos o la matemática discreta (teoría de grafos).

El Ministerio de Educación portugués ha elaborado un documento muy completo, que incluye fórmulas, diagramas y operaciones representativas.

En cuanto a propuesta metodológica, el documento oficial constata que en los ciclos de educación básica, hasta los 15 años, la experiencia docente es un factor clave para el éxito educativo, en concreto para las matemáticas. En el desarrollo de las matemáticas el profesor ha de tener sumo cuidado, porque puede haber malas interpretaciones en conceptos clave. El uso de las calculadoras es únicamente aconsejado a la hora de afrontar problemas matemáticos que las necesiten, principalmente cuando se necesitan realizar cálculos de cierta complejidad, de forma concatenada, raíces, razones trigonométricas, etc.

En el ciclo de secundaria, las matemáticas son trasladadas a una etapa cognitiva superior, en la que la rutina del cálculo desaparece y aparecen actividades en las que claramente se resuelven problemas, se ha de razonar, hacer conjeturas y demostrarlas. Se hace una mención especial a la utilización de las matemáticas en la vida real, como herramienta cotidiana. El lenguaje matemático es más preciso a la hora de comunicarse y se valora la historia matemática como vehículo válido y enriquecedor.

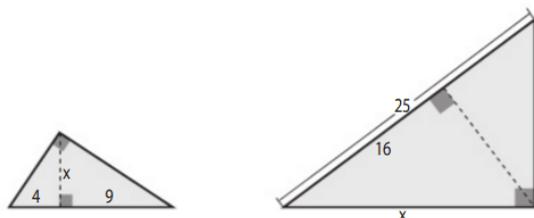
La tecnología es incorporada en los últimos cursos y es considerada como necesaria a la hora de introducir determinados contenidos. Se considera en el currículo la representación gráfica de funciones, la geometría, el cálculo, incluyendo el diferencial. El docente ha de ser consciente de las limitaciones que tiene la tecnología a la hora de afrontar problemas; de qué forma aprovecharla mejor. Portugal es el único país europeo donde en su legislación se especifica qué tipo de calculadoras deben utilizar los alumnos.

Libros de texto de matemáticas en Portugal

Varias editoriales portuguesas suministran los libros de texto y sus contenidos son evaluados en cuanto a coherencia con el currículo oficial por organismos oficiales, para darles el visto bueno. Los centros son libres de escoger los libros que han sido aprobados por el gobierno.

Como ocurre en los libros de texto españoles, los libros de texto portugueses acompañan los problemas y ejercicios de una colección de diagramas, dibujos y fotografías, en consonancia con el curso que se está impartiendo.

4. Calcula o valor de x nos seguintes triângulos rectângulos:



5. O terreno da figura tem a forma de um triângulo equilátero com 180 m de perímetro. Determina a sua área. (Quando necessário usa valores aproximados à unidade).

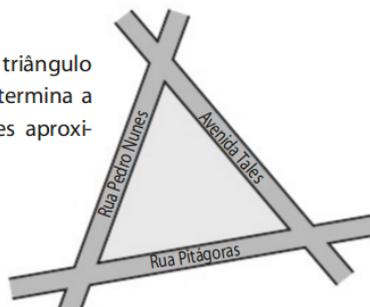


Ilustración 2: Problemas métricos del plano en hojas de ejercicios de *Matematicamente falando*, 8º curso. (Conceição, A., Almeida, M., 2017)

Metodología y evaluación

Los niveles de desempeño son considerados en los ejercicios, problemas y actividades, incluyendo la revisión del cuaderno donde se plasman. No todos los alumnos pueden alcanzar los niveles altos y estos últimos son, por tanto, opcionales.

- Propiedades que han de ser reconocidas, y que hayan sido enunciadas. Estas propiedades son las básicas, por ejemplo, en la resolución de ejercicios y problemas.
- Procedimientos, considerados en un abanico amplio; desde la resolución de ejercicios por cuenta propia hasta situaciones más complejas que requieran el estudio de un problema, en un marco de actividad grupal.
- Propiedades que han de ser demostradas y teoremas. No sólo basta con conocer, memorizar o esquematizar, sino que también hay que argumentar, explicar y razonar.

Durante la década 1990-2000 comenzó a imponerse como actividad de aula la resolución de problemas y eso ha tenido gran influencia al conformar el currículo del país. Se afrontan las situaciones problemáticas a la hora de diseñar las actividades matemáticas. La ventaja de la resolución de problemas es que exige una participación total del estudiante, que no puede recurrir a áreas aisladas de la materia, o las que mejor domina, sino que ha de movilizar todo lo aprendido,

así como también ha de investigar. Esto dota a las matemáticas de una integridad, una relevancia, más allá de procedimientos y rutinas.

Es importante tener en cuenta, según han concluido algunos investigadores portugueses, que la investigación a la hora de desarrollar actividades matemáticas parece ser un elemento clave y motivador que mejora el rendimiento del alumno, consolida una autoeficacia, y crea unas herramientas que facilitan futuras exploraciones; también aporta una actitud científica que se complementa con otras áreas del conocimiento.

Hay una fuerte influencia de las evaluaciones, tanto internas como externas, en los tres últimos cursos (grados 10-12), más decisivas y con mayor impacto que, por ejemplo, la que finaliza el período de estudios básicos (Grado 9), siendo esta última, como en el resto de países, orientativa, según los informes PISA.

Evaluación del sistema educativo, innovación docente, formación del profesorado y divulgación en Portugal

Además de la evaluación general, que incluye la revisión de las programaciones de matemáticas, cada centro lleva a cabo una evaluación interna al final del curso escolar, dentro del marco del *Plan de Matemáticas II* en la que se analizan las estrategias que se han llevado a cabo, el rendimiento del alumnado, y el desarrollo de la programación de matemáticas que tiene el centro, estableciendo líneas futuras de actuación.

La recomendación estatal para implementar las TIC se materializa en el programa *Habilidades TIC* en el que se ofrece una formación permanente para los profesores. El *Portal das escolas* cuenta con recursos para la enseñanza de las matemáticas, a nivel de aula, y en áreas como la geometría o el análisis matemático. Todos los recursos son acompañados de una ficha con el curso al que está destinado, duración aproximada de la actividad en aula, recomendaciones, etc.

Los esfuerzos por difundir las matemáticas no sólo se detienen en el aula, pues también se han creado espacios de difusión, en televisión u otros medios. Por ejemplo, se ha hecho muy famoso el programa de divulgación matemática *Isto é Matemática*, por el profesor y matemático Rogério Martins y promovido por la Sociedad Portuguesa de Matemáticas.

En el programa, con un tono distendido, divertido, se tratan temas como la proporción áurea, las curvas parabólicas y su utilidad, la recreación del universo mediante fractales, la fascinante geometría de los cuadros de Escher, o los números primos. Actualmente, el programa se emite en varios países y ha recibido prestigiosos premios.

2.2. Italia

En el sentido educativo, al igual que en el cultural, Italia está marcada por el contraste. Ya no sólo queda reflejado en los informes PISA, sino también en los informes del Servicio Nacional de Evaluación (SNV) en los que se manifiesta una disparidad de resultados durante la etapa de Educación Secundaria, siendo estas discrepancias más acusadas entre regiones del sur. Los alumnos extranjeros suelen tener un rendimiento más bajo, en una distribución más homogénea a lo largo del país.

La educación obligatoria, como en la mayoría de países, comienza a los seis años, donde los alumnos ingresan en la escuela elemental. La escuela secundaria empieza a los once años y consiste en tres años de enseñanza media (*scuola media*), equivalente a ESO. El estudiante que supera esta etapa adquiere un certificado (*licenza media*).

Finalmente, está la etapa secundaria superior, de cinco años de duración, que se separa en itinerarios, impartidos académicamente en los liceos (liceo clásico, artístico, científico, etc.), con vistas a un posterior acceso universitario. También el alumno puede optar por los institutos técnicos, y las escuelas de formación profesional.

Curriculo oficial de las matemáticas en Italia

La particularidad que tiene Italia en su legislación es la carencia de unos criterios de evaluación. Los objetivos y resultados del aprendizaje son expuestos a modo de indicación, en los objetivos de aprendizaje de la secundaria superior y curriculares para primaria y secundaria inferior.

Es por ello que los centros han de conformar un diseño curricular específico que satisfaga los objetivos y evaluación en las distintas áreas y materias, teniendo en cuenta también los factores socioeconómicos del centro y del alumnado.

Nos centramos en los aspectos contemplados en el currículo oficial o *Indicazioni Nazionali*. En cada itinerario del Liceo se da un tratamiento a las matemáticas, que puede variar, en cuanto a competencias y líneas generales, según la especialidad, pero cuya enseñanza es esencial. También se dan indicaciones sobre el tratamiento informático de las matemáticas, incluyendo programación, algorítmica. Este nexo informático también se ha incorporado en el currículo de liceos públicos y privados.

- En el Liceo Artístico, es relevante para la comprensión e interpretación del mundo físico, siendo necesario conocer todos sus fundamentos, y no esencialmente en lo geométrico, como podría esperarse en una especialidad de este tipo. Por ejemplo, en el primer Bienio el

alumno ha de consolidar la resolución de ecuaciones, sistemas, conocer la variación, las funciones, modelado algebraico de problemas, aspectos de los números irracionales, manejo de la calculadora para los problemas estadísticos. En el segundo Bienio, se han de conocer los espacios vectoriales, producto escalar y los principales conceptos del cálculo infinitesimal. El quinto año se profundiza sobre geometría, propiedades de los principales sólidos; relaciones y funciones.

- En el Liceo de Ciencias, el contenido en matemáticas apenas cambia con respecto a los demás en el primer Bienio, sin embargo, en los demás cursos comienza a haber una especialización, en la cual la materia toma una forma muy clara en su aspecto académico e instrumental, indicando que el alumno ha de profundizar en el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas, funciones trigonométricas, periodicidad, cálculo combinatorio en probabilidad, derivabilidad en todos sus aspectos y propiedades, métodos de integración. Es relevante, al igual que en otros currículos europeos, que en el quinto año, el alumno tenga que ahondar en ecuaciones diferenciales, ayudándose de la dinámica newtoniana. También se realiza una introducción a los métodos numéricos como la búsqueda de raíces por bisección, como aplicación directa del Teorema de Bolzano. En el apartado de datos y previsiones el alumno culminará el Liceo estudiando las distribuciones discretas y continuas más importantes.
- En el liceo de Ciencias Sociales, no se distinguen demasiado los contenidos de los del currículo español, y el segundo Bienio equivale a las matemáticas aplicadas a las CCSS de Bachillerato. Se presta una especial atención a los polinomios, como elementos clave para establecer interpolaciones y extrapolaciones (en especial, los de primero y segundo grado), la función exponencial y logarítmica también son relevantes a la hora de explicar diversos fenómenos de la economía o las ciencias sociales. Se estudian distribuciones continuas, y no se descuida la geometría (representaciones analíticas de las rectas, planos y esferas).

Libros de texto de matemáticas en Italia

Se han analizado libros de varias editoriales, y todas cuentan con versiones, cada vez más extendidas de ediciones *digit* o ediciones digitales.

Con *La matematica. Per la scuola media, con espansione online* de la editorial Mondadori se ofrece, además de los libros de texto habituales, una selección de ejercicios preparatorios para la prueba nacional de evaluación. Por cada área de las matemáticas hay un volumen, como podría ser Aritmética o Geometría. También cuenta con un volumen de Informática, en el cual el alumno puede ejercitar las matemáticas usando *GeoGebra* o *Cabri*, mediante actividades explicadas y situaciones de laboratorio, en las que investigar. Cada tema, en este libro de texto de secundaria,

cuenta con ejercicios propuestos, existencia de tres niveles de dificultad, según el desempeño del alumno, existiendo ejercicios de profundización. También cuenta con ejercicios complementarios de recuperación y autoevaluación.

La propuesta particular del liceo estatal napolitano “Ischia” tiene como libro de texto para su itinerario científico la *Matemática Multimediale.blu* de la editorial Zanichelli. El libro de primer curso cuenta también con varios niveles de dificultad (dos niveles). Al final de cada lección hay cuatro hojas que sirven para consolidar las competencias del alumno, y también una versión digital, con tutor online, que sirve de ayuda en la resolución de los problemas, especialmente al operar en álgebra.

Una rappresentazione geometrica di $-\infty$ e $+\infty$ si può ottenere proiettando i punti della semicirconferenza tracciata in fig. 1.8 dal suo centro C sulla retta reale. In questo modo, a ogni punto della semicirconferenza corrisponde un punto della retta e viceversa (per esempio considera i punti P e P' , Q e Q'), con la sola eccezione dei due punti A e B , estremi della semicirconferenza, cui non corrisponde sulla retta alcun punto: diremo che $-\infty$ è il corrispondente di A e $+\infty$ il corrispondente di B .

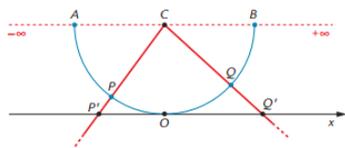


Figura 1.8

Ilustración 3: Construcción de la recta real extendida. *Nuova Matematica a colori 5*. (Sasso, L., 2012, p. 9)

En otras enseñanzas de la misma etapa educativa, como los institutos técnicos de informática y telecomunicaciones, la estructura de los libros es similar, existiendo autoevaluaciones, recuperación y profundización, pero el contenido, especialmente en cuanto a análisis matemático y álgebra, es mucho más avanzado en estas especialidades, estando el quinto curso dedicado a aspectos de las series de Fourier, así como a aproximaciones polinomiales o series de Taylor.

Metodología y evaluación

En lo metodológico, no hay mucho que destacar si lo comparamos con las actividades que se desarrollan en España. En el contexto de la educación pública, las matemáticas en el trienio de educación específica (Liceo científico, en este caso), opta por clases expositivas, así como las clases participativas en edades más avanzadas. Se incorpora en la metodología la tecnología informática, los medios audiovisuales, y los trabajos grupales.

En cuanto a evaluación, hay algunos aspectos que se tienen en cuenta, a nivel de aula, y que son tradicionales, como la observación, revisión de cuadernos y de las tareas para casa, realizados de una forma rutinaria. Otros aspectos son más puntuales como es la necesaria evaluación del alumno en actividades que requieren una mayor abstracción o implicación del alumno; puntuales pero más exigentes. Se procurará valorar las aportaciones del alumno, cuando se exprese de forma

Il simbolo

$$\sqrt{7}$$

indica il numero reale positivo definito come sezione $[A; B]$ di razionali, dove A contiene tutti i razionali negativi, lo zero e tutti i razionali positivi il cui quadrato è minore di 7, mentre B contiene tutti i razionali positivi il cui quadrato è maggiore di 7. Poiché:

$$2^2 = 4 \quad 3^2 = 9$$

risulta:

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

Ilustración 4: Aproximando un número irracional en el itinerario técnico. *Lezione di Matematica 1 per il trienni*. (Lamberti, L., Mereu, L., Nanni, A., 2008, p. 8)

oral, y de forma escrita, no descuidando detalles como su forma de expresión, o la ortografía a la hora de escribir.

En cuanto a recuperación, también hay un cierto paralelismo con lo que conocemos aquí, y por lo general ésta se vuelve satisfactoria si el alumno demuestra una mayor implicación y una mejora sustancial, en cuanto a participación o motivación. La progresión se demuestra y es síntoma de un propósito de mejora, aumentando la capacidad autónoma.

Innovación y evaluación del sistema educativo

INDIRE *Istituto Nazionale Documentazione Innovazione Ricerca Educativa*; *Instituto nacional de documentación, innovación e investigación educativa*, en su plan operativo nacional (PON), tiene como objetivo principal desarrollar las competencias del estudiante. Se ha creado *m@t.abel*, cuyo campo de actuación es la investigación educativa matemática, a través de aulas virtuales y nuevas tecnologías.

Es también una fuente para la formación del profesorado, donde profundizar en la metodología de resolución de problemas. Sus tres pilares fundamentales son:

- La enseñanza de las matemáticas como una labor de comunidad, en la que todos los alumnos participan.
- El conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), que se ha vuelto relevante, pues permite distinguir componentes en las matemáticas que hagan de ésta un objeto de estudio, de enseñanza y aprendizaje.
- La importancia del laboratorio. El laboratorio de las matemáticas, como modalidad didáctica, en la que el alumno construye el saber, mediante la experimentación y el error. Esto dota a las matemáticas de una verdadera naturaleza científica, en la que formular hipótesis. Así queda establecido en la normativa para el Primer Ciclo.

Entre las posibilidades que brinda la tecnología para la educación, están los cursos de formación o la implementación de actividades del tipo semipresencial como el *Blended Learning*, en las que el alumno administra su tiempo para aprender de una forma autónoma, como parte del camino del aprendizaje, estando convenientemente tutelado.

Las tareas grupales en un espacio virtual se complementan con información, documentos, indicaciones y consejos para llevar a cabo las actividades en dicho espacio; desde las comunicaciones asíncronas (foros), pasando por wikis, blogs, programas de trabajo, sistematización de la materia por bloques, y un largo etcétera.

INVALSI es el acrónimo del *Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo*. Gestiona las evaluaciones del sistema (incluyendo evaluaciones de fin de ciclo). También vela por una transparencia y una correcta accesibilidad a los datos del sistema educativo, para la opinión pública. Establece unos mecanismos de control y mejora, desde las políticas de la dirección, como los programas, la docencia, o la forma de impartir las clases.

2.3. Francia

El sistema educativo francés obliga a la escolarización entre los seis y los dieciséis años. Las etapas de escolarización están divididas en tres: La educación elemental, de seis a once años; la educación secundaria, denominada *collège*, que finaliza a los quince años, y finalmente el liceo o *lycée*, en el que, a partir de los dieciséis años, un alumno puede optar por una enseñanza equivalente al Bachillerato, académica (*lycée général* o *lycée technique*) u optar por una formación profesional, en el *lycée professionnel*. Finalmente, ha de realizar la selectividad, denominada *Baccalauréat*, si desea acceder a los estudios universitarios.

La polémica reforma educativa en el 2015

Hay dos aspectos que han dado mucho que hablar, y que han sido muy controvertidos, abriéndose debates encendidos, mostrándose claras manifestaciones en contra:

- Otorgar una mayor autonomía para los centros, aumentando éstos sus competencias en educación y pudiendo distanciarse del currículo oficial del estado. Esto ha provocado quejas de sindicatos, que advierten que podrían provocar arbitrariedades locales y regionales.
- Un enfoque multidisciplinar, que a la vez de servir de soporte para interesantes metodologías de centro, propiciando una mayor colaboración entre departamentos y docentes. De esta forma, hay una educación de calidad, aunque también ocasiona una fragmentación del contenido, o incluso podría degenerar en la desaparición de asignaturas como la enseñanza del alemán, o las lenguas clásicas (latín y griego).

Contenido de matemáticas en Francia

En el liceo general hay varias especialidades, según el itinerario del alumno, que puede ser el científico (S), el económico y social (ES) o el literario (L); cada uno con unas matemáticas específicas. En el contexto científico, el alumno tiene un contacto profundo con aspectos de la geometría, el análisis y el álgebra.

En el último curso del liceo científico (*Terminale*) se estudian las propiedades de la derivada de la exponencial, que es una introducción a las ecuaciones diferenciales básicas y que también

ayuda a comprender modelos físicos y sociales. Cabe señalar también una presencia detallada de los números complejos, y de características físico-geométricas particulares, como el baricentro de una figura.

En cuanto a probabilidad, se estudia probabilidad condicionada de experimentos múltiples, en diagramas de árbol, distribuciones continuas y de Gauss, sin embargo no hay una mención al Teorema de Bayes; simplemente se desarrolla el cálculo de un suceso condicionado a partir de una partición, teniendo claras nociones como los sucesos independientes.

Fuera del currículo mínimo obligatorio los alumnos también pueden tener un contacto con aspectos de la aritmética de enteros (congruencias, propiedades de los números primos), o las matrices en recurrencia, en problemas planteados, que harán que el alumno investigue y se inicie en lo que serán los estudios universitarios relacionados con las ciencias exactas.

En matemáticas de la economía y las ciencias sociales, hay un mayor contenido en estadística, estudio de la distribución normal o gaussiana, análisis diferencial (concavidad, puntos de inflexión en una gráfica), exponenciales, logaritmos, y progresiones geométricas. Las actividades investigadoras que se proponen en esta especialidad utilizan grafos, matrices de transición y fenómenos evolutivos (poblaciones, estudios de tendencias de mercado).

En el currículo nacional, uno de los objetivos de la enseñanza media es el de comprender y utilizar el lenguaje matemático, científico e informático. El alumno no sólo lee y comprende sino que también transmite, produce sus propias reflexiones en escritos y documentos. Los objetivos educativos específicos de las matemáticas, en el cuarto ciclo, también llamada secundaria inferior son las siguientes:

- Realizar una transición desde la geometría, el recuento y las propiedades a otra basada en la racionalización, en la que se emplean múltiples registros con los que conformar los objetos matemáticos, todo ello ayudado por la informática; ya sea la geometría dinámica, o las calculadoras.
- La resolución de problemas como eje central para canalizar los conocimientos, métodos y automatismos y dotar a las matemáticas de una dimensión reflexiva y constructiva.
- Competencias matemáticas a desarrollar:
 - Búsqueda, orden, organización a la hora de interpretar un documento y de afrontar la recopilación de datos y conocimientos. Esto incluye descomponer un problema en problemas más pequeños, utilizar el método científico como establecer hipótesis, teorías, ensayar soluciones.

- Modelado. Reconocer modelos de comportamiento en situaciones reales (proporcionalidad, semejanza, etc.), traducir en lenguaje matemático dichos modelos, utilizar simulaciones. Validar o rechazar haciendo uso de criterios objetivos.
- Representación adecuada de los números, del planteamiento de un problema, o de un razonamiento, así como la confección de esquemas, representaciones de sólidos, curvas de nivel o patrones.
- Razonamiento. Poner en práctica todos los conocimientos para enfrentarse a multitud de situaciones físicas, económicas o geométricas. Participar en una investigación individual o en grupo que permita confrontar puntos de vista o llegar a acuerdos. La demostración mediante fórmulas, propiedades y teoremas es un pilar del razonamiento matemático, que permite sacar conclusiones en los problemas o ejercicios planteados. Argumentar los propios descubrimientos de una forma fundamentada.
- Cálculo. En esta etapa se han de cuidar las operaciones que utilizan números racionales, representados por fracciones, o de manera aproximada. Utilización adecuada del cálculo mental y del cálculo instrumental (calculadora). Controlar la cota de error y poner especial cuidado en el encadenamiento de cálculos.
- Comunicación. La lengua francesa y el lenguaje algebraico como medios de transmisión de las matemáticas. Explicación oral y escrita de razonamientos y descripciones como una construcción geométrica o un algoritmo. Comprensión de las explicaciones dadas por otros. Distinguir entre lo objetivo y lo subjetivo a la hora de interpretar datos en tablas, gráficas y diagramas.

En la norma también se muestran actividades y situaciones de aprendizaje. De hecho, de todas las legislaciones que se han revisado ésta es la más detallada, e incorpora multitud de sugerencias. Uno de sus muchos ejemplos es la interpretación cualitativa, cuantitativa y porcentual de una factura de la luz; y en el apartado de algorítmica y programación se propone tareas como cifrado de datos (transposición César, Morse), o calcular el día en un calendario.

En la etapa del liceo, los contenidos se diversifican por itinerarios.

- Liceo científico. Aunque mucho contenido apenas difiere del currículo español, observamos particularidades. En *Première*, se establece la condición de colinealidad de dos vectores \vec{x} e \vec{y} cuyos componentes cumplen que $x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 = 0$, y esto acerca más al alumno hacia el concepto de determinante, mientras que en nuestras Matemáticas de 1º de Bachillerato utilizamos la definición de dependencia lineal y asignamos parámetros. En

probabilidad y estadística cabe señalar el uso de las variables estadísticas, con el uso de la esperanza y la varianza de una variable multiplicada por un número. También se hace una introducción en *Première* de la distribución binomial o de Bernoulli. En *Terminale* hay más convergencia con el currículo español, aunque también hay más profundización en estadística (Esperanza de una función de densidad); en álgebra se estudian las sucesiones, como introducción de lo que se dará después en las carreras de ciencias.

- Liceo de Ciencias Sociales. Como en otros currículos, las matemáticas en Ciencias Sociales tienen una especial consideración con las funciones de importancia estadística y poblacional, como son las exponenciales y las logarítmicas. En análisis prima el estudio de funciones y gráficas, con los conceptos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión que ayudarán a interpretar una función o un modelo matemático de la vida real. En estadística hay que destacar, ya en el último curso, el empleo de estimaciones e intervalos de confianza.

Las tareas para casa en matemáticas, etapa secundaria inferior son consideradas obligatorias y así se refleja en la legislación, teniendo los profesores que recoger y revisar las tareas encomendadas con regularidad.

Libros de texto de matemáticas en Francia

Aquí hay que hacer una distinción con respecto a los libros de otros países, pues en el país galo se estructuran tradicionalmente de una manera que se acerca a las nociones de constructivismo de Piaget. Existe una parte llamada *activités* y que precede la lección principal. Antes de sistematizar los conceptos, con ayuda del libro y de las explicaciones del profesor, el alumno tiene oportunidad de realizar unas actividades cognitivas que preparen el aprendizaje de los nuevos conceptos, intercalándose con conocimientos previos y facilitando el planteamiento de dudas que ayudarán a un mejor aprendizaje.

A. Restitution organisée des connaissances : R.O.C.

1 Démonstration de cours

Établir que si f est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a ; b]$, alors f réalise une bijection de l'intervalle $[a ; b]$ sur l'intervalle $[f(b) ; f(a)]$.

2 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, soit f_n la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^3 - 2nx + 1.$$

a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $a_n \leq \frac{1}{n}$.

c) En déduire que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

Illustración 5: Ejercicio para la preparación de Selectividad (Baccalauréat). Déclic Maths - Terminale S Enseignement obligatoire et de spécialité - Livre de l'élève - Ed. 2006 (Beltramone J, Brun, V., Claude, F., Misset, L., Talamoni, C., 2006, p. 25)

Los docentes franceses tienden a usar el libro de texto como principal recurso, pues proporciona abundante material para las actividades de matemáticas.

Metodología y evaluación

Un objetivo fundamental del profesor de matemáticas francés es mantener, en todo momento, una conexión entre el conocimiento y las habilidades propias del alumno, junto a las tareas cognitivas de investigación. En ese equilibrio se propicia la tarea y se acostumbra a que el alumno tenga que explicar sus razonamientos, sus demostraciones; a veces con rigor.

Se invierte muy poco tiempo en tareas rutinarias como podría ser el cálculo a la hora de resolver un problema basado en un sistema de ecuaciones. Lo que importa es saber llegar a esas ecuaciones, o interpretar los resultados. Las tareas procedimentales o rutinarias, se suelen reservar para las actividades o ejercicios que hay que hacer en casa.

La enseñanza de las matemáticas están influenciada de una forma casi decisiva por el racionalismo y el enciclopedismo francés, de ahí la combinación que hay entre las actividades cognitivas, de desafío e investigación, y los ejercicios que consolidan la materia.

Como se había indicado en el apartado curricular, existe en la legislación francesa una información muy detallada sobre recursos, que también incluye las evaluaciones formativas y sumativas correspondientes, añadiéndose a éstas las evaluaciones entre iguales.

Innovación y mejora docente en Francia

La inspección que hace el sistema educativo francés en matemáticas tiene en cuenta tres principios fundamentales:

- Una correcta integración de las TIC, que favorezca en todo lo posible la enseñanza de la materia.
- Una actitud de investigación. Recordemos que en la metodología de enseñanza francés el alumno ha de tomar contacto por sí mismo con la materia, e investigar..
- También se valora la exposición oral en los ejercicios, en la que el alumno ha de utilizar el lenguaje adecuado a la hora de razonar, explicar las conjeturas y hacer creíbles sus razonamientos.

Los recursos para que el profesorado avance en su autoformación y en su mejora docente son abundantes y uno es el ESN o *Espace Numérique des Savoirs*; *espacio digital del conocimiento*. Además de los artículos didácticos o los vídeos expositivos con ejemplos de matemáticas, también se facilita la labor del profesor que se apoya en las tecnologías de la comunicación.

2.4. Polonia

La principal razón por la que se escogió este país es el dinamismo con el que ha despegado su educación, tras más de dos décadas desde el final de la era comunista. Entre los años 1995 y 2009, el porcentaje de universitarios ha aumentado de un 9,7% a un 21,2%. Además, en matemáticas es un país que supera a Portugal, en el rendimiento de sus alumnos; y es comparable a países como Alemania.

Reformas de 1999, 2002 y 2009

El dinamismo educativo está reflejado en las reformas legislativas, que han sido abundantes. La primera gran reforma devolvió al país la figura del *gimnazjum* o la escuela de enseñanza media tradicional. Seis son los cursos de primaria, tres los de secundaria y tres son los cursos de post-secundaria o secundaria superior.

Según la Constitución, todos los ciudadanos tienen derecho a la educación y el estado proporciona escuelas e institutos públicos; sin embargo, las pruebas de graduación en secundaria obligatoria se han convertido en eventos importantes y de gran repercusión para cada alumno, pues al haber pocas plazas disponibles en educación secundaria superior, se tiene muy en cuenta la calificación numérica de la prueba final que les permite acceder. Es por ello que hay una fuerte tendencia propedéutica, haciendo que el estudio en cursos previos se enfoque a resolver exámenes.

Curriculo oficial de las matemáticas de secundaria en Polonia

Después de la enseñanza secundaria obligatoria, el sistema educativo polaco contempla los siguientes itinerarios en la enseñanza media:

- Tres cursos de secundaria superior general o académica (*liceum ogólnokształcące*).
- Cuatro cursos de secundaria superior en escuelas técnicas (*technikum*).
- Tres cursos de enseñanza profesional de grado medio (*zasadnicza szkoła zawodowa*).

En lo concerniente a las matemáticas, el currículo nacional establece que en la etapa de secundaria, todo alumno ha de ser capaz de utilizar las herramientas matemáticas en el día a día, formulando conclusiones basadas en el lenguaje matemático.

Los objetivos de las matemáticas en la enseñanza media (*gimnazjum*) son: Desarrollar y potenciar el conocimiento en aritmética y geometría, preparar a los estudiantes para que utilicen el conocimiento matemático en la resolución de problemas, aprender el lenguaje matemático, construir modelos matemáticos para situaciones concretas, desarrollar la intuición espacial, discutir problemas, fomentar la claridad en las respuestas. Hay que tener en cuenta que la tradición

educativa polaca presta mucha atención al uso del idioma a la hora de exponer un problema matemático, y esto está presente ya en los primeros cursos de Primaria.

Los contenidos en Secundaria son: Números racionales, aproximación, números irracionales, comparación de números, potencias con exponentes enteros, propiedades de exponenciación, escritura algebraica y evaluación de expresiones, funciones, sus características a partir de las gráficas, ecuaciones y sistemas lineales, recolección de datos, su ordenación y su presentación en tablas o gráficas, experimentos aleatorios simples, polígonos, círculos, discos, lugares geométricos (mediatrices, bisectrices), ángulos (centrales e inscritos), criterios de congruencia en triángulos, transformaciones geométricas (por ejemplo, isometrías), problemas métricos en el plano como cálculo de áreas y perímetros de polígonos o triángulos, figuras tridimensionales, posición relativa de objetos (paralelismo, perpendicularidad).

También, en esta etapa, el alumno ha de saber utilizar la calculadora, de una forma apropiada. En cuanto a utilización de expresiones matemáticas, se presta relevancia a la presentación matemática cuando se exploran o se resuelven los problemas propuestos.

Libros de texto de matemáticas en Polonia

Aunque existe una regulación gubernamental, los libros de texto pasan por un mercado libre, en el que compiten diferentes editoriales. Son los profesores de los centros quienes eligen los libros que creen más adecuados, sin que pueda haber decisión por parte de los padres, ya sea en cuanto a criterio de calidad o de precio de adquisición. Las familias con menos medios económicos disponen de un subsidio que financia los libros de texto y el material escolar. Desde el año 2012 se ha implementado un programa de escuela digital pionero propuesto por el ORE *Ośrodek Rozwoju Edukacji; recursos gratuitos para la educación* que ha atraído mucho interés y que proporciona libros libres de derechos de autor, y en formato digital. Las ventajas son indiscutibles.

- Suponen un enorme ahorro en la economía de las familias y de las escuelas, en la enseñanza secundaria. Hay que tener en cuenta que cada familia se puede llegar a gastar en libros hasta 120€.
- Permiten la participación de padres y educadores en el proceso de mejora del material educativo, ajustando el contenido de una manera rápida de una manera rápida y apropiada.
- Permiten una adaptación fácil de los contenidos, según el contexto social y cultural del centro.

Metodología y evaluación de las matemáticas en Polonia

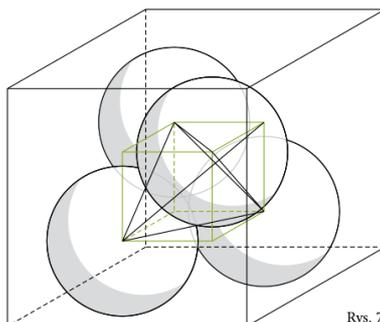
Los años 90, coincidiendo con la apertura de los países del este, han sido clave para que los profesores de matemáticas introduzcan, gracias a la libertad del nuevo currículo, toda clase de metodologías en el aula. Citamos algunas de ellas:

- Aprendizaje individualizado, que ha obtenido una cota más alta gracias a las nuevas tecnologías. Cada alumno aprende de acuerdo con sus necesidades, fortalezas y debilidades. Esta metodología facilita la inclusión y la atención a la diversidad.
- Trabajo en grupo, que implica la interacción de varios alumnos para conseguir un objetivo común.
 - El aprendizaje cooperativo, en el que se vuelve especialmente útil el método Jigsaw, en el que se logra resolver diferencias étnicas, haciendo que cada alumno dependa de otro para conseguir la consecución de una tarea matemática.
 - El aprendizaje basado en proyectos, que además del aprovechar las ventajas del trabajo en equipo, conecta las matemáticas con situaciones concretas.

Preparación del profesor de matemáticas en Polonia. Mejora docente

Las frecuentes reformas educativas han propiciado también un cambio de los métodos docentes, a la vez que ha habido una apertura a las nuevas formas de enseñar matemáticas. Todo esto se ha visto potenciado por la creciente cualificación académica.

we kule mieszczą się w sześcianie, to zmieści się tam jeszcze i czwarta kula tej samej wielkości.



Rys. 7

Zadanie o kulach w sześcianie ma jeszcze i tę zaletę, że niesłychanie łatwo je przeformułować, zmieniając liczbę 3 na jakąś inną. Na przykład dla liczby 2 rozwiązanie właściwie już uzyskaliśmy – daje je porównanie liczb $\sqrt{3}(1-2R)$ oraz $2R$, skąd otrzymujemy $R = (3-\sqrt{3})/4$, a dla liczby 8 rozwiązanie daje porównanie liczb $1-2R$ oraz $2R$, skąd mamy $R = 1/4$. A co dla innych liczb?

Ilustración 6: Extraído de la guía para dirigir la enseñanza matemática en alumnos de altas capacidades. Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki (Dymel, J., Gałązka, K., Kordos, M. et al., 2012, p. 47)

La preparación universitaria del profesorado en Polonia, de ser del 50% ha subido hasta el 98%. También se han visto incrementadas las posibilidades de promoción, que se deben

principalmente a la voluntad del docente para formarse, actualizarse, en cuanto a conocimiento del contenido, así como en cuanto a didáctica de las matemáticas.

El portal *Scholaris*, promovido por ORE, tiene una base de datos con ejemplos de actividades, en *GeoGebra*, vídeos, recursos y libros que sirven de guía, tanto para alumnos como para profesores.

2.5. Otros países europeos

La educación matemática en Europa abarca muchos más países. Aunque se han marcado unas líneas generales y hemos visto aspectos muy familiares, también se nos presentan algunas particularidades. Vamos a ver cómo es la enseñanza de las matemáticas en Kosovo, Reino Unido y Alemania.

Kosovo

Es un país que ha atravesado momentos muy difíciles y trágicos, debido a la guerra, consecuencia de la desintegración y la confrontación étnica, que azotó lo que un día fue la antigua Yugoslavia. Su sistema educativo comenzó a resentirse tras la abolición de la autonomía de Kosovo, por parte de Serbia, y eso provocó la aparición de dos sistemas educativos, uno serbio y otro albanés, con un fuerte carácter nacionalista del segundo.

El conflicto bélico, además del coste en vidas humanas y la destrucción de instalaciones escolares, también provocó una fragmentación del sistema, careciendo los centros de medios y de profesorado. Sin embargo, en el 2001, se consiguió poner de acuerdo un nuevo currículo nacional en el que se reflejara el pluralismo, el avance de las ciencias, y el desarrollo de actividades que promovieran la investigación, el análisis de ideas y la búsqueda de soluciones.

La educación matemática también ha pasado por momentos difíciles, pues el alumnado, aparte de encontrarse con las dificultades conceptuales de las matemáticas, tenía falta de motivación e incluso mostraba rechazo a la asignatura de matemáticas. Esto se ha achacado a una tradicional desconexión de las matemáticas con el resto de conocimientos, del todo inadecuado. Si además las matemáticas son enclaustradas en un conjunto de simples conceptos y procedimientos, se malogra su propósito, su importancia, así como su potencialidad. Por estos motivos, quedaba claro que los objetivos y los métodos debían cambiar.

Actualmente las matemáticas en los institutos del país tienen como objetivo comprender el mundo, mediante expresiones, el desarrollo de habilidades numéricas, lógica, razonamiento, competencias que permitan al individuo desenvolverse en actividades intelectuales más elevadas e identificar situaciones idóneas en las que aplicar el conocimiento matemático. Los conceptos y los

procedimientos se complementan con una buena actitud, y el centro de aprendizaje es el propio alumno.

En lo epistemológico, el nuevo currículo nacional rompe con los esquemas anteriores y converge con el moderno currículo de otros países. Las matemáticas pasan de ser deductivas a ser inductivas, el rigor se convierte en parte de las tareas matemáticas y se tiene en cuenta la construcción social y psicológica del conocimiento.

Reino Unido

La primera particularidad del sistema inglés es la partición de la enseñanza obligatoria (primaria y secundaria) en cuatro etapas, siendo las dos últimas etapas lo que denominamos enseñanza secundaria; de 11 a 16 años. Al final de cada etapa los alumnos son evaluados y se les asigna una de las ocho calificaciones, desde A*, A, B... hasta G; de la más alta, a la más baja.

Esta calificación, en las diferentes etapas de primaria y secundaria, decide qué estudios seguirá el alumno, pues hay calificaciones que no serán admitidas por las universidades, y algunas universidades sólo permitirán las calificaciones más altas, quedando las más bajas con la única posibilidad de entrar en los estudios vocacionales o de formación profesional.

Con este sistema tan rotundo queda claro que la enseñanza de las matemáticas tendrá un carácter particular. El sistema suele ser el siguiente: El profesor proporciona unas instrucciones sobre las tareas, y cada alumno tiene su cuadernillo con el que empieza a practicar los primeros ejercicios del tema correspondiente. En un principio, las tareas pueden ser grupales y los alumnos simplemente han de preguntar las dudas al profesor cada uno; o grupo por grupo.

Es también importante señalar que en las escuelas británicas las matemáticas no son separadas en apartados independientes, y se puede recurrir a la geometría o la estadística en cualquier momento del curso. Los conceptos son entrelazados de una forma muy variada y compleja. Por ejemplo, el cuadernillo puede empezar proponiendo resolver una situación geométrica que conlleve calcular una raíz (Alguna situación que requiera utilizar el Teorema de Pitágoras, o calcular un lado de un cuadrado a partir de su área); y cuando el alumno ve que la raíz es inexacta se puede iniciar la enseñanza de los números irracionales, las características de sus decimales, o la imposibilidad de que se puedan representar como una fracción de números enteros que son primos entre sí.

Tal riqueza en las actividades de aula es muy conveniente a la hora de atender a la diversidad, sin embargo, los alumnos con necesidades educativas especiales suelen estar en aulas aparte, haciendo otras matemáticas de menor nivel, y sólo comparten con el resto del curso tareas y asignaturas de menos demanda cognitiva, como plástica o cocina.

Figura 2.

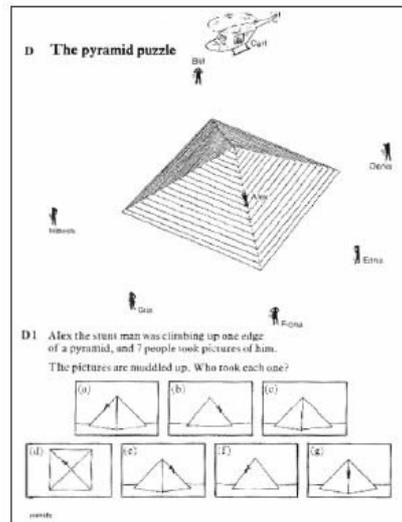


Ilustración 7: Actividad de perspectiva espacial
¿Qué es lo que ve cada una de las personas
situadas alrededor de la pirámide? Experiencias
en un centro educativo del Reino Unido (Núñez
A., 2005).

Los alumnos de Secundaria tienen un contacto con la geometría tridimensional y se concibe la construcción de elementos como circunferencias, ángulos, mediatrices, tangentes desde un punto, polígonos, etc. con regla y compás, como un aspecto ya no sólo teórico sino práctico. Las matemáticas, en ese sentido son muy prácticas y muchos problemas no quedan expuestos como simples ejercicios procedimentales.

El *Sixth Form* británico es la etapa que equivale a nuestro Bachillerato, y las matemáticas, en esta etapa son divididas en matemáticas puras, mecánica y estadística, según la especialidad escogida.

Las aulas tienen pocos alumnos, y cada alumno estudia pocas asignaturas. Éstas están relacionadas con la especialidad. Los alumnos y el profesor se sientan alrededor de una mesa grande. El contenido de las matemáticas es también muy diferente, pues en unos aspectos los alumnos están obligados a aprender conceptos de Secundaria que no dieron, pero a la vez profundizan mucho en las matemáticas, llegando a aprender a integrar numéricamente o a resolver ecuaciones diferenciales.

Por ejemplo, un estudiante británico de 16 años puede desconocer cómo se dibuja una función polinómica de segundo grado o parábola. Tampoco sabría cómo identificar su vértice. En España, en cambio, estos contenidos son abordados en 3º y en 4º ESO.

Según una experiencia en la Lockleaze School de Bristol (Núñez, A., 2005), se llegan a estas conclusiones:

- La metodología en las matemáticas británicas es activa y participativa. Las matemáticas, aunque sean elementales, son útiles y sus conceptos son interrelacionados como un todo integral.
- El sistema de evaluación, que utiliza tests que clasifican a los alumnos según su rendimiento en matemáticas. Esta situación estimula el estudio por objetivos, marcados en dichas evaluaciones, pero por otra parte no permite que los alumnos que se quedaron descolgados por uno u otro motivo, ya fuese intrínseco o extrínseco, puedan rectificar, influyendo irreversiblemente en su futuro académico y profesional, a la hora de ingresar en la universidad o en la escuela vocacional. Esto malogra la educación en los individuos que maduran intelectualmente más tarde, por motivos puramente biológicos.
- La enseñanza secundaria superior o *Sixth Form*, explota al máximo el potencial intelectual de un alumno preuniversitario, proporcionando una marcada especialización y pocas asignaturas. Permiten que el alumno pueda trabajar de una forma más relajada, con conceptos más avanzados y evita la tendencia propedéutica del último curso de la enseñanza secundaria superior que se da en otros países.

Han sido muchos los esfuerzos que las instituciones públicas han puesto para la enseñanza de las matemáticas, especialmente en cuanto a difusión. La televisión pública británica (BBC) y algunos medios privados llevan emitiendo contenido educativo matemático, tanto para alumnos de primaria, como alumnos de secundaria, desde hace décadas, llegando a emitir programas sobre estadística.

En tiempos recientes, la oferta es mucho más variada, destacándose *Ecomaths* (2011) en la que las matemáticas son utilizadas en situaciones de la vida real, y hacer un mundo más sostenible. Marcus Du Sautoy es un matemático británico que ha realizado muy buenos documentales para la BBC, sobre la historia de las matemáticas o la música de los números primos. También se ha emitido *The Code, Let's Do Maths*, etc.

Alemania

El sistema educativo federal alemán, al contrario que el francés, es un modelo de descentralización, en el que cada estado o *länder* tiene competencias educativas y pueden diferir legislativamente entre ellos. Además, Alemania es uno de los primeros países que históricamente implantó la enseñanza obligatoria.

La escolarización comienza desde el jardín de infancia, pero se hace obligatoria a partir de los seis años, en el que empieza la etapa de escuela básica o primaria (*Grundschule*), ya sea estatal o privada, durante cuatro, o seis años, dependiendo del estado. Posteriormente, el sistema alemán se ramifica en múltiples escuelas y métodos educativos.

En la etapa secundaria, hay una complejidad evidente. Los alumnos se pueden inscribir en un *Gymnasium* que es el equivalente a la secundaria, hasta obtener el título de Bachillerato (*Abitur*). Es, con diferencia, el itinerario educativo más académico y con el propósito claro de continuar los estudios superiores. Las matemáticas, por tanto, tienen un nivel de exigencia más alto.

También existen los *Realschule*, que están más orientados a facilitar una formación profesional de grado medio o superior, con carga académica, como podría ser economía o enfermería. Las matemáticas también han de tener un fundamento sólido en este itinerario.

Finalmente, están las escuelas básicas o *Hauptschule*, que son puramente vocacionales, y que permiten también una formación profesional, como el caso de las *Berufsschule*. El alumno compagina unos estudios a tiempo parcial con prácticas en empresas, aprendiendo un oficio.

La separación en diferentes escuelas, a los 10-12 años, según el estado, es controvertido y muy criticado, por su segregación cuando los alumnos no han madurado intelectualmente y aún no muestran sus diferentes talentos o actitudes ante las materias de estudio.

Al igual que en Francia, del libro de texto emanan muchas actividades y tareas que el docente propone o que usa como medio para sus propias actividades. El libro es un recurso indispensable. Cada tipo de escuela en Alemania tiene un libro de matemáticas diferente, según el nivel. Sin embargo, los libros de texto alemanes presentan un nivel de profundización y coherencia bastante alto, en especial cuando se trata de lógica y estructuración de las matemáticas. Tratan el tema con precisión, y por ello podrían parecer libros sosos y aburridos; en especial, los empleados en los *Gymnasium*.

Los libros suelen suponer una fuerte carga económica para las familias, principalmente para las más desfavorecidas y es por eso que al final del curso se suelen revender, o adquirir de segunda mano.

Los libros alemanes tienen una estructura que empiezan por tareas de introducción, seguidas por la exposición, las nociones principales alrededor de las cuales giran el grueso de tareas y ejercicios, los ejemplos resueltos, y los ejercicios. La orientación pedagógica de los libros de texto alemanes es constructivista. Las exposiciones están caracterizadas por su sistematización y recursos visuales. Sin embargo, sólo unos pocos libros analizados tienen organizador previo como introducción al tema y en otros pocos hay ejercicios de repaso.

Esta estructura, de evidente función pedagógica, suele hacer que los alumnos, por impaciencia, prescindan de la introducción, la exposición, y se centren en los conceptos principales como primer paso para aprender el tema.

En el *gymnasium* los docentes procuran mantener un rigor en las matemáticas, valorando la demostración y la lógica al razonar, como una forma de hacer matemáticas. Sin embargo, también es cierto que no se valora la creatividad, en el sentido de que la invención de soluciones o nuevos procedimientos queda relegado a un segundo plano. Las lecciones de matemáticas se conservan en una apariencia formal, con respecto al contenido.

El pensamiento humanista-liberal alemán anima a los profesores de matemáticas a convertir sus clases en una discusión, pues a diferencia del modelo francés, hay una tendencia a considerar el lado moral de la educación, siendo los profesores los que propician un ambiente de debate que puede ocupar toda la hora de clase, si fuese necesario. Los resultados que se extraen de las actividades matemáticas, son cuestionables y cada alumno ha de participar para exponer su punto de vista o su razonamiento ante un problema. Los errores que pudieran cometer los alumnos en sus tareas para casa son los realmente considerados en la evaluación.

Como modelo a tener en cuenta en la comunidad docente, se puso en marcha el programa SINUS *Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts; mejora del rendimiento en educación matemática y ciencias* que busca la mejora de la enseñanza de las ciencias en general y de las matemáticas en particular. Es un programa que se organiza a nivel regional. Está compuesto por once módulos que pueden ser escogidos por centros y profesores. En dichos módulos se abordan temas de gran interés para la enseñanza de las matemáticas como el aprendizaje basado en problemas, aprendizaje a partir de errores, propuestas interdisciplinares, metodologías grupales de cooperación o colaboración.

Es una propuesta muy interesante, sin embargo, como en toda innovación metodológica, se necesita un compromiso pleno de los participantes, en la comunidad educativa, así como de una planificación, que asegure su éxito.

3. LOS PAÍSES CON MEJORES RESULTADOS

Vamos a investigar qué es lo que ocurre en los países con el mejor rendimiento en Matemáticas, y cuyos resultados en las evaluaciones externas, especialmente PISA son siempre motivo de opinión y debate. Son países en los que va a ser inevitable que nos comparemos y de los que quizá podamos extraer alguna conclusión interesante al respecto.

Cuatro son los países que consideraremos con detalle en este capítulo: Dos de estos países son asiáticos: Singapur y Corea del Sur. Sus excelentes resultados están propiciados ya no sólo por determinadas características de su sistema educativo, sino por su posición en la industria tecnológica o en las finanzas, siendo países con gran demanda de personal cualificado.

Finlandia podría haber sido incluida en el capítulo sobre los países europeos, pero hemos considerado oportuno basarnos en sus excelentes resultados, e incluirla en esta lista de países con gran rendimiento matemático en la educación. Tampoco podemos prescindir -aunque lo tratemos más brevemente- de Estonia; un país perteneciente a la antigua órbita de la Unión Soviética que ha conseguido sorprendentes resultados, llegando a sobrepasar a Finlandia en rendimiento matemático (PISA, 2015).

China y Japón son otros países asiáticos que han logrado las calificaciones más altas, y al igual que Corea del Sur, son países que demandan actualmente mucha mano de obra cualificada, con alto rendimiento en matemáticas y ciencias. Finalmente, también analizaremos Canadá como el principal país americano que ha conseguido llevar a sus alumnos a la excelencia matemática.

El objetivo de este capítulo, lejos de comparativas “mirando hacia arriba”, por tratarse de países con unas calificaciones altas, es el de proporcionarnos una mirada crítica, teniendo presentes las diferencias culturales, económicas y de estructuración de los sistemas educativos.

3.1. Singapur

Singapur es un país pequeño de casi 700 km² entre Malasia e Indonesia, en el sur de Asia. Es además un centro financiero, comparable a otros lugares como Hong Kong, Corea del Sur o Taiwán. Además de su posición destacada en las evaluaciones externas, siendo el primer país en cuanto a competencia matemática en PISA 2015, también ha sido modelo de exportación de su método educativo matemático en Primaria: el “Método Singapur”, que ha sido aprovechado por Estados Unidos y otros países. Es interesante que hablemos de esta forma de trabajar las matemáticas en Primaria, pues es una base que influirá notablemente en el rendimiento matemático de los alumnos, en Secundaria.

Método Singapur

Este método, introducido en 1983 por el Dr. Kho Tek Hong y su equipo de trabajo, tiene un considerable soporte gráfico, y es una ayuda en aritmética, en la escuela de Primaria, de tal forma que los alumnos son capaces de resolver problemas de un nivel de secundaria. En esencia, plasma un problema, por ejemplo, de proporciones, en forma de diagramas de barras o cajas, que permiten al alumno distinguir entre cantidades conocidas y desconocidas en toda clase de problemas (proporcionalidad, repartos, etc.). Un ejemplo podría ser éste, que aparece en un libro de quinto curso, pero que perfectamente podría pasar por un problema de secundaria:

“La señora Chen ha hecho un montón de pastelillos. Vendió $\frac{3}{5}$ de ellos por la mañana y un cuarto de los que quedaban por la tarde. Si ha vendido 200 pastelillos más por la mañana que por la tarde ¿Cuántos pastelillos ha hecho?” (Liping, M., 2013, p.1285).

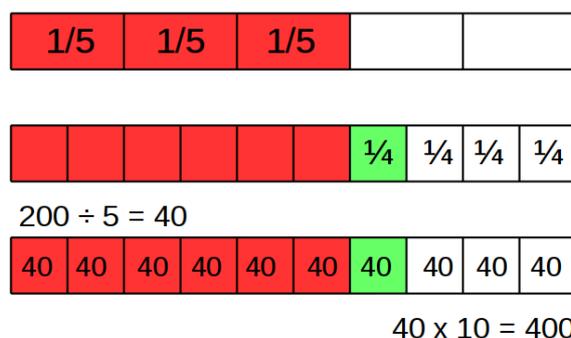


Ilustración 8: Resolviendo el problema de los pastelillos de la señora Chen. Imagen de elaboración propia.

Dibujamos una barra que partimos en cinco partes, rellenamos de un color tres de esas partes y partimos por la mitad la otra parte, que representa el cuarto de lo que queda, rellenándolo de otro color. Puede hacerse un reparto en partes iguales, y de ahí establecer la proporción, en la que hay cinco cuadrados más en la mañana que en la tarde. Nos queda que cada cuadrado son 40 pastelillos, y habiendo 10 cuadrados totales, la señora Chen fabricó 400 pastelillos antes de venderlos.

Este método es una herramienta muy poderosa para resolver problemas, pues facilita el cambio de lo verbal a la representación en diagrama, que es un paso importante para que el alumno utilice símbolos abstractos, en cursos posteriores, incentivando el empleo del lenguaje matemático en los problemas de la vida real.

Currículo oficial de las matemáticas en Singapur

El marco nacional del currículo de las matemáticas en Singapur influye en los 12 cursos, desde Primaria a la formación preuniversitaria y tiene como centro la resolución de problemas.

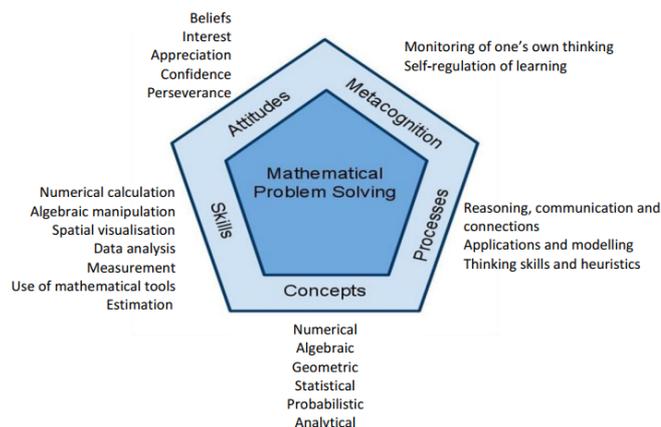


Ilustración 9: Marco teórico y de trabajo para las actividades de matemáticas en Singapur. Mathematics Syllabus Pre-University H1 Mathematics Implementation starting with 2016 Pre-University One Cohort (Ministry of Education, Singapore, 2016, p.2)

En Secundaria, se aprenden todos los números, de los naturales a los reales, así como sus operaciones aritméticas. También se acostumbra el alumno a utilizar calculadora.

- En números y álgebra: Ordenación, uso de símbolos que incluyen desigualdades, aproximación, estimación, porcentaje, representación a escala en mapas, funciones y gráficas, ecuaciones lineales y cuadráticas, ratios y velocidad, descomposición en números primos con máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- En geometría y medida: Construcción de figuras planas, ángulos asociados en líneas paralelas, ángulos de polígonos, teorema de Pitágoras, área de superficies, volúmenes, relaciones trigonométricas en una representación de ángulo agudo o primer cuadrante.
- En probabilidad y estadística: Interpretación estadística de tablas de datos, análisis de representaciones estadísticas, así como todos los fundamentos de probabilidad.

La enseñanza secundaria superior es llamada preuniversitaria, y en ella tienen cabida especializaciones tanto de ciencias, como de letras. Hay tres caminos principales: La escuela técnica, la escuela exprés y la escuela académica. La única diferencia entre las dos últimas es que la escuela exprés tiene un año menos de duración, siendo la escuela académica normal. La gran mayoría de alumnos escogen el itinerario académico y de éstos una gran mayoría de alumnos siguen un itinerario en la escuela exprés.

Suele ser habitual que los alumnos cambien de itinerario, a medida que van descubriendo sus aptitudes en las materias que van afrontando, siendo en ese sentido el sistema de Singapur totalmente flexible.

En las actividades matemáticas, según el currículo nacional, se sigue un ciclo:

- Un problema del mundo real puede ser interpretado matemáticamente, puede ser modelado y simplificado, conectando la situación con el mundo matemático.
- El modelo matemático es tratado, ya sea por métodos algebraicos, o por medio de la computación, con la finalidad de resolver la situación planteada.
- Una vez presentados los resultados, éstos han de ser interpretados correctamente, y aquí es donde el alumno ha de presentar el resultado, asegurándose de que éste es coherente con la situación de la vida real que está resolviendo.
- Finalmente, se vuelve a conectar de nuevo con el primer punto, pues una vez resuelta la situación, el modelo matemático se puede mejorar, particularizar o generalizar.

Los contenidos de matemáticas en los cursos pre-universitarios son similares a los de otros países y, por recomendación curricular, son expuestos con ayuda de situaciones específicas: Los problemas de optimización como maximizar beneficios o minimizar costes son adecuados para complementar las lecciones de cálculo, inecuaciones o programación lineal; los modelos de población hacen uso de funciones exponenciales y logarítmicas.

Libros de texto de Matemáticas en Singapur

El gobierno es quien regula y pone sello de calidad a los libros de texto que cumplen el estándar curricular, así como determina la exposición de los contenidos, temario y secuenciación.

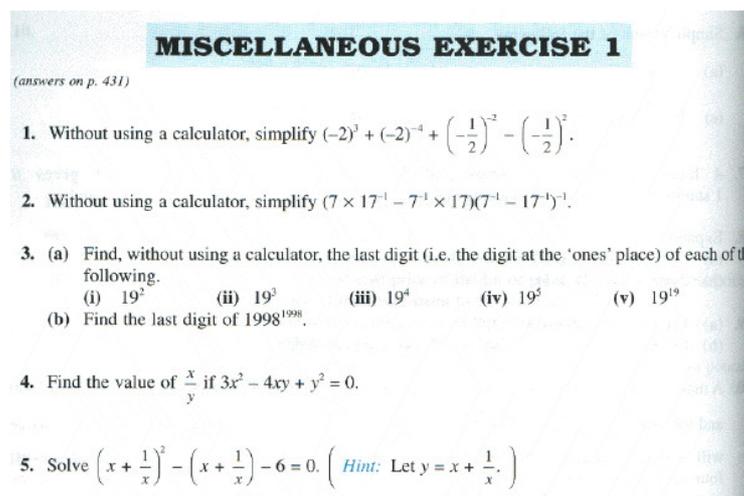


Ilustración 10: Hoja de ejercicios. Workbooks. Miscellaneous Exercise 1 (Singapore Math Inc., 2017)

Hasta el año 2001, un departamento del Ministerio de Educación escribía los únicos libros autorizados para la enseñanza, pero actualmente, mediante revisión por el Ministerio, son editoriales privadas las que ofrecen un mercado de libros de texto de matemáticas.

El inglés está fuertemente implantado en el país, siendo también el idioma que se sigue en los libros de texto de matemáticas. Debido al éxito del método Singapur, también se han hecho célebres los libros de texto y se intenta plasmar en otros países las actividades que tan buenos resultados están dando en matemáticas.

Metodología y Evaluación en Singapur

Son diferentes las situaciones de evaluación que el docente de matemáticas en Singapur ha de considerar.

En cuanto a evaluaciones sumativas, los estudiantes realizan varios exámenes y tests durante el curso y se les asigna una puntuación; sin embargo la docencia en Singapur no sólo se detiene en esto y concede una gran importancia a la evaluación formativa y a la evaluación de diagnóstico.

En el aula, la evaluación formativa logra que el docente conozca las necesidades de aprendizaje de los alumnos a la vez que los alumnos conocen sus fortalezas y debilidades; es decir, esta evaluación se sirve de una comunicación activa entre profesor y alumno.

El marco teórico en el que se basa la enseñanza de las matemáticas es el constructivismo y se dispone de las herramientas que se cita a continuación:

- El aprendizaje individual y grupal basado en actividades, como pueden ser ejercicios o la resolución de problemas.
- Fomentar la investigación, convenientemente dirigida y tutelada por el profesor de matemáticas. En dicha investigación el alumno utilizará todos sus recursos y competencias, intentando demostrar, haciéndose preguntas, y profundizando en el campo de investigación de las matemáticas que se esté abordando.
- Se hace uso de la *Flipped Classroom*, que es una modalidad del aprendizaje adaptado o semipresencial. Las tareas más rutinarias son tareas para casa. Las actividades de aula son las exigen mayor demanda cognitiva por parte del alumno y una mayor implicación del docente.
- Seminarios y discusiones sobre matemáticas, que son situaciones específicas en las que el alumno reflexiona.
- Estudios de casos, por ejemplo mediante lecturas de datos en periódicos, analizando la realidad presente.
- Proyectos que incluyan modelos matemáticos e investigación estadística.

- Laboratorio de matemáticas en el cual se puedan realizar simulaciones, como apoyo a la investigación, utilizando software.

Es, por tanto, que el profesor de matemáticas en Singapur facilita la consecución de los niveles más abstractos de la matemática, que incluye la comunicación entre alumnos y otros profesores; colaborando y participando.

Formación del profesorado e innovación docente

La flexibilidad en la formación del profesorado es también una pieza clave en Singapur, estableciéndose por docente una formación continua, con más de 100 horas de cursos, seminarios y talleres, al año. A los profesores noveles e inexpertos se les asigna una carga de trabajo docente de un 80% porque de esta forma puede discutir más sobre educación matemática con sus compañeros más experimentados y adquirir conocimientos, así como herramientas pedagógicas.

3.2. Corea del Sur

El milagro coreano tiene similitudes con el milagro japonés. Tras los desastres de la II Guerra Mundial el país quedó arrasado, con el añadido de que pocos años después también se desencadenó una cruenta guerra entre Corea del Norte y Corea del Sur, respaldada por las respectivas superpotencias soviética y americana, estando actualmente la antigua Corea dividida en dos países confrontados políticamente y militarmente.

Tras la firma de la paz, a mediados del Siglo XX, Corea del Sur ha ido transformándose en un productor industrial de primera magnitud, integrándose en el mercado mundial. Esta situación ha transformado también radicalmente su sistema educativo, que se podría calificar como de un modelo que ha ido realizando una transición y que también está estratificado, es competitivo y requiere continuo esfuerzo de los alumnos que acaban su formación secundaria para poder acceder a la Universidad.

Currículo oficial de las matemáticas en Corea del Sur

El currículo en Corea del Sur, como estado refundado en 1945, está fuertemente marcado por el sistema educativo estadounidense. Estados Unidos es un país con el que tiene fuertes lazos militares y económicos y que también ha dejado una impronta en su pedagogía.

Las matemáticas han ido evolucionando, junto con el resto de materias escolares, ya desde el mismo inicio, tras el cese de la guerra. Estuvieron desde un primer momento influenciadas por la Escuela Progresiva de Dewey, y su vertiente pragmática “Saber haciendo”, en la cual las matemáticas tienen un sentido como materia que enseña a desenvolverse en la vida real.

Hasta el año 2000 ha pasado por otras seis reformas, en las que se ha procurado que la enseñanza sea sistemática, ha acometido la modernización de enseñanza de las matemáticas, como en otros países del mundo, consecuencia de una gran industrialización, en el último cuarto del Siglo XX; y ya más actualmente se ha centrado en la resolución de problemas, así como también ha procurado una diferenciación de currículo, según los itinerarios (binomio matemáticas académicas-aplicadas), en los dos últimos cursos (grado 11 y grado 12). La contribución de las matemáticas en los objetivos educativos son evidentes cuando estos enfatizan la creación de una sociedad tecnológica o la rápida circulación de la información.

Repasamos los contenidos que aprenden los estudiantes coreanos en su enseñanza secundaria obligatoria:

- En cuanto a números, operaciones y álgebra, no deja de ser un aspecto sorprendente que la noción de conjuntos desapareciera en primaria a partir del séptimo currículo coreano, y se diese por primera vez en el séptimo grado. En el resto de contenidos de este bloque, los alumnos se hacen con el manejo algorítmico de operaciones, tasas porcentuales, números racionales en su forma fraccionaria, raíces cuadradas, números reales (tanto como soluciones algebraicas, como números trascendentes) y finalmente, el dominio de los números complejos.
- Tradicionalmente la geometría ha tenido su propio carácter, principalmente porque el contacto con formas y figuras, reconocimiento de ángulos, caras y distancias, empieza en una edad muy temprana. En las últimas revisiones del currículo coreano se está recalcando una mayor presencia de la percepción espacial, desde los niveles más elementales. El contenido geométrico en la educación secundaria obligatoria incluye clasificación de figuras sólidas y planas, congruencia, simetría, propiedades del hexaedro, prismas, pirámides, similitud de figuras, coordenadas en el plano, ecuación de la recta y la circunferencia, traslación de figuras.
- Las medidas, aunque tengan un carácter geométrico, y relacionadas con la geometría en muchas ocasiones, son un concepto más general, ligado a la física, al mundo real, a las magnitudes. Los aspectos contemplados son: tiempo, espacio, capacidad, estimación de errores, regiones en desigualdades; también unido a la geometría con cálculos de áreas y volúmenes de cilindros, relaciones trigonométricas.
- Probabilidad y estadística. En el séptimo currículo se introdujo el diagrama de tallos y hojas, como forma eficiente de presentar información estadística. En este bloque se recoge la elaboración de tablas, organización de datos y muestreo, representación en gráficas,

diagramas de dispersión, medidas centrales y de dispersión de datos, distribuciones y frecuencias acumuladas.

- Expresiones. En el contexto de enseñanza secundaria, se le podría llamar “Resolución de problemas”, aunque esto da lugar a equivocaciones, pues en realidad lo que establece es una forma de aprender y enseñar matemáticas. También se relaciona con ecuaciones e inecuaciones, cálculo de expresiones, de sistemas, factorización de polinomios.
- Modelos y funciones. Por una parte el alumno reconoce patrones, en modelos de la física o las ciencias sociales, y por otra cuantifica estos fenómenos, señalando sus características más notables, como son máximos, mínimos, tendencias, etc. Los modelos naturales son trasladados al lenguaje matemático. También tiene un fuerte significado geométrico, al construirse figuras regulares, rectas, cuadráticas (parábola), así como las determinadas por las funciones circulares (trigonométricas). Se analizan funciones, y se busca su presencia en modelos naturales. Por ejemplo, la parábola está asociada a los movimientos uniformemente acelerados.

En el caso de la enseñanza secundaria superior, distinguimos varios itinerarios, y opciones que puede escoger el alumno, desde las matemáticas más prácticas, hasta una profundización académica.

- Las matemáticas prácticas son una opción a elegir en la que el alumno aprende a desenvolverse en la vida cotidiana, o en las ciencias sociales. Son varios dominios principales: Las matemáticas de las calculadoras y la computación (hojas de cálculo, por ejemplo), la economía, la interpretación estadística, la optimización, la programación lineal y la resolución de problemas.
- Matemáticas I y II. Son las matemáticas de ciencias, con proyección académica, que fundamentan la preparación universitaria, en ciencia, o ingeniería. En muchos aspectos, al igual que con las matemáticas prácticas lo son en matemáticas de las ciencias sociales, estas matemáticas tienen el mismo contenido que en España: Cálculo matricial, combinatoria, funciones exponenciales y logarítmicas, sucesiones y límites. También se estudian series infinitas, algoritmos, principio de inducción y diagramas de flujo. Tras aprobar el primer curso (Matemáticas I) el alumno que lo desee puede profundizar con Matemáticas II, donde se abordarán vectores, cónicas, límites, inecuaciones o geometría analítica, en el plano y en el espacio.
- Diferenciación e integración. Esta materia aparece separada y es acometida de forma opcional por alumnos que lo deseen y que hayan finalizado Matemáticas II. El nombre de

este curso lo dice todo: Se estudian los límites de funciones, incluyendo trigonométricas, derivadas, aplicaciones de las derivada; integración y aplicación de las integrales definidas.

- Probabilidad y estadística. Es una materia que no necesita tener completadas las matemáticas del décimo curso y también es opcional. Se aborda: probabilidad, probabilidad condicionada, variables aleatorias, análisis estadístico de un conjunto de datos, muestreo y estimación por intervalo.
- Matemáticas discretas. Al igual que Probabilidad y estadística, es opcional, y se ofrece a los alumnos que, hayan completado o no su curso de décimo grado, desean profundizar sobre esta clase de matemáticas, asociada a los grafos, algoritmos, combinatoria, toma de decisiones, teoría de juegos u optimización. Se utilizan problemas de la vida real y muchas situaciones didácticas en matemática discreta.

Libros de texto de matemáticas en Corea del Sur

Un estudio (Hong, D.S., 2014) indica que los libros de texto de matemáticas de Secundaria en Corea del Sur revelan una exposición de conocimientos más precoz que sus equivalentes en Estados Unidos. Los estudiantes surcoreanos aprenden antes los diversos conceptos matemáticos, sin embargo no profundizan en resolución de problemas con respecto a los libros de texto estadounidenses.

Lo expuesto en los libros de texto está tipificado por el currículum nacional, que marca y guía su redacción de una forma detallada y estricta. Es relevante la influencia que el libro de matemáticas tiene en los alumnos de secundaria y el papel fundamental que desempeña en su aprendizaje.

- Los docentes recurren a los libros de texto como una fuente principal de recursos para proporcionar actividades, y es por ello que suelen demandar buenos libros de texto, completos y que cubran adecuadamente sus propuestas de actividades.
- Los textos se ciñen escrupulosamente a lo marcado en el currículo, existiendo directrices generales para su redacción y contenido. Son redactados por un equipo especializado del Ministerio de Educación, asistido por profesores en activo que enseñan en los institutos; de esta forma se tiene en cuenta la realidad de las aulas. La colaboración entre las instituciones académicas es fundamental, principalmente entre institutos y universidades.
- Los borradores de los libros son evaluados y revisados por KICE, que es el instituto coreano del currículo y la evaluación. También es analizado el libro del profesor.

- En Secundaria hay un dato sorprendente, y es que los profesores disponen en su versión del libro, de un resumen del currículo en matemática de otros países, así como metodologías que se aplican en el extranjero. Los escritores de los libros de texto tienen muy en cuenta cómo se está evolucionando la didáctica de la matemática en el resto del mundo.
- La selección del libro de texto más conveniente para un instituto de secundaria no suele ser un proceso sencillo pues previamente se reúne un comité de profesores de matemáticas y evalúan meditadamente varios libros de texto, para finalmente elegir uno de ellos.
- Los libros son gratuitos en la enseñanza primaria y en secundaria, pero en los últimos grados, que equivalen a nuestro bachillerato, o secundaria superior, son los padres los que han de afrontar los gastos para comprar los libros de texto.

Metodología y evaluación

Puede parecer sorprendente, pero en el octavo grado (equivalente a 3º ESO), un gran porcentaje de alumnos manifiestan no tener autoconfianza a la hora de afrontar las matemáticas, y -peor aún- casi la mitad no tienen interés por la asignatura. Otro gran obstáculo, de índole cultural es la desigualdad de oportunidades entre chicos y chicas, pues los padres, e incluso algunos profesores, no esperan que las chicas aprendan matemáticas con la misma eficacia con la que lo hacen los chicos. También hay una desigualdad entre zonas rurales y zonas urbanas.

La potencialidad tecnológica es muy buena, principalmente por ser un país que fabrica tecnología, electrónica de consumo; sin embargo, el profesorado aún sigue teniendo una gran resistencia usando las TIC, en los últimos cursos de la enseñanza secundaria obligatoria. Los profesores coreanos no realizan agrupaciones de dos o tres alumnos en el aula, sino que procuran considerar el aula como un todo. También hay dominio de las clases expositivas. El docente no tiene demasiado aprecio por la memoria y lo procedimental (enseñanza algorítmica de las matemáticas), pero a la vez encuentra exagerado tener que abordar la resolución de problemas, por prescripción curricular, tendiendo a menospreciarla; así como también tiende a menospreciar las aplicaciones en la vida real de las matemáticas o las conclusiones lógicas.

En cuanto a la evaluación, es norma general que un estudiante tenga que enfrentarse a exámenes de respuesta cerrada, o exámenes de tipo test, y eso podría explicar, aunque sea parcialmente, la ventaja que tienen los surcoreanos a la hora de superar gran parte de las evaluaciones externas.

Innovación y evaluación del sistema educativo coreano. Cualificación del profesorado

Otra característica notable del sistema educativo coreano es la selección del profesorado, que es escogido de entre los que han obtenido las mejores calificaciones académicas a la hora de acceder a las universidades de educación. Además, los futuros profesores son entrevistados, para de esta forma se determine su dimensión docente, o sus aptitudes sociales y pedagógicas.

Son las universidades de educación las que preparan los profesores de matemáticas de Secundaria. El fuerte aprecio por la educación que tiene el país es responsable de que se formen una enorme cantidad de futuros profesores al año.

Un docente de matemáticas en Corea del Sur aprende los fundamentos de matemáticas: álgebra lineal, cálculo, probabilidad y estadística, álgebra abstracta, topología y geometría. Se completa esta preparación en educación con evaluación en matemáticas, teoría de la educación matemática (o didáctica de la matemática), materiales de enseñanza, psicopedagogía, y enseñanza mediante resolución de problemas.

Otras universidades, como la Universidad de Seúl, profundizan ambos aspectos del educador de matemáticas. En cuanto al conocimiento del contenido incorporan geometría diferencial, funciones de varias variables, análisis complejo, análisis numérico, y ecuaciones diferenciales. En pedagogía se valora que el profesor sepa utilizar el ordenador para enseñar.

3.3. Finlandia

El modelo educativo finlandés es motivo de alabanzas constantes, en la prensa nacional, internacional y en los artículos especializados.

Antes de la escuela obligatoria casi la totalidad de los niños de seis años participan en un programa preescolar que les permite aprender a leer y a escribir. Dicha escuela obligatoria se divide en una primera etapa que equivale a nuestra educación primaria, de seis cursos, y en una segunda etapa que equivale a nuestra secundaria, en la cual los profesores están especializados.

Tras finalizar la educación obligatoria, el alumno, como ocurre en otros países, puede optar por una formación profesional o académica.

La reforma educativa en Finlandia

Aunque ahora el país sea un modelo de éxito educativo, parece ser que estos resultados provienen de cuarenta años de educación integradora, en la cual se han intentado eliminar las barreras sociales, aunque éstas aún persisten, en suburbios o zonas rurales. En los años setenta, el

país tenía a sus alumnos segregados en distintos niveles por curso, hasta que se acometió la reforma educativa.

- Se ha fomentado una igualdad de oportunidades, con una red de centros que cubre toda la geografía, sin diferenciación de ningún tipo. Además las necesidades de los alumnos son cubiertas, al disponer de garantía de desplazamiento, comedor gratuito, material escolar, etc.
- La formación del profesorado es de alta cualificación, son independientes en su trabajo, con una gran autonomía, y además es una profesión que socialmente tiene prestigio. La sociedad, igualmente valora mucho la educación, pues gran parte de su población tiene estudios medios o superiores.
- Cooperación entre centros y entre las administraciones de la enseñanza que establecen una red de colaboración, entre profesores en activo, colegios profesionales o universidades.
- Orientadores eficaces que guían a sus alumnos con base en sus capacidades, dificultades y fortalezas.
- Aprendizaje activo centrado en el estudiante, así como una evaluación exhaustiva, con incentivos y apoyo.

Currículo oficial de las matemáticas en Finlandia

El peso de las matemáticas en las clases va aumentando a medida que se avanzan cursos. En cuanto a horas semanales, las matemáticas son superadas por las clases de lengua. Los contenidos de matemáticas en la enseñanza secundaria inferior (grado 6 al grado 9) son:

- Habilidades del pensamiento y métodos. Comparación, medida, interpretación y producción de textos matemáticos. Demostración, prueba y error; y también historia de las matemáticas.
- Aritmética. Números naturales, enteros, racionales y reales, valores absolutos, fracciones y números decimales, operaciones con fracciones, porcentajes, exponentes y raíces.
- Álgebra. Expresiones lineales y exponenciales, concepto de polinomio y sus operaciones, resolución de problemas lineales, inecuaciones, ecuaciones cuadráticas, resolución gráfica de sistemas. Estudio de las sucesiones numéricas.
- Funciones. Correlación entre dos variables, presentación en coordenadas cartesianas, tablas, análisis de una gráfica, búsqueda de raíces, máximos, mínimos, incrementos, decrementos, funciones lineales, cuadráticas; proporcionalidad directa e inversa.

- Geometría. Relación entre ángulos, congruencia, elementos de triángulos y cuadriláteros, polígonos, circunferencias, perímetros, áreas, clasificación de figuras tridimensionales, cálculo de superficies y volúmenes, traslaciones, rotaciones y reflexiones, teorema de Pitágoras.
- Probabilidad y estadística. Probabilidad, frecuencia absoluta, relativa, media, mediana, moda, medidas de dispersión, interpretación de gráficas, recopilación de información y su presentación resumida y clara.

En secundaria superior, los objetivos educativos de las matemáticas, entre otros, preparan al alumno para tener un criterio a la hora de valorar datos cuantitativos, adquirir una práctica en el modelado de los problemas, aprovechar y utilizar apropiadamente los métodos matemáticos, capacidad de discusión en términos matemáticos y tener una confianza a la hora de realizar investigaciones que utilicen las matemáticas.

En esta etapa las matemáticas son obligatorias, sin importar la especialidad, y también hay cursos con matemáticas específicas.

- En una primera parte del tronco común, el alumno será capaz de resolver ecuaciones, utilizar funciones polinómicas con destreza, factorizar, hallar raíces, manejar la trigonometría, calcular áreas, volúmenes, utilizar la geometría plana y espacial, con vectores; en análisis tomará contacto con el cálculo diferencial e integral. En estadística, tomará contacto con las distribuciones, métodos combinatorios, y reglas de cálculo de probabilidad.
- Otra parte del tronco común tiene un curso sobre expresiones y ecuaciones, en situaciones de la vida real, utilizando funciones lineales o cuadráticas; una profundización de la geometría; también se estudiarán modelos matemáticos, con especial interés en fenómenos naturales, físicos, económicos o poblacionales; en análisis se examinan las propiedades de las funciones, haciendo uso de los métodos numéricos o gráficos; en estadística se calculan los parámetros de diferentes distribuciones.
- Los cursos específicos permiten una especialización del alumno. Como cursos a elegir tenemos teoría de números y lógica en la que se estudian algoritmos, aritmética, operadores lógicos; métodos numéricos en los que se acotan errores de aproximación o se usan iteraciones para aproximar soluciones como el método de Newton-Raphson; cálculo diferencial e integral avanzado, con integrales impropias; matemáticas comerciales para el uso en economía y finanzas y un curso complementario de modelos matemáticos en el que se estudian funciones periódicas, que caracterizan muchos fenómenos físicos o sociales.

Libros de texto de matemáticas en Finlandia

Mientras que en la etapa de Primaria, los libros de texto se vuelven protagonistas absolutos en el aula, en Secundaria los profesores confían más en su conocimiento del contenido, además de tener una orientación didáctica para la enseñanza de las matemáticas mucho más especializada en la materia. Otros soportes para el aprendizaje como pueden ser textos, ejercicios o materiales manipulables, son proporcionados por los mismos profesores.

teaching new content

pages from pupils' textbook

solutions for homework

additional exercises

mental calculations

problem solving

Tavoitteena on oppia
- murtoluvun kertomisen avulla luonnollisella luvulla.

Oppitunnilla käsitellään ensimmäistä kertaa murtoluvun kertomista luonnollisella luvulla. Tunnilla opitaan myös yksinkertaistamaan kertolaskun tulos sekaluvuksi muuntamalla ja supistamalla.

Murtolukujen kertolaskua

Merkittävää lasku ja laske. Muunna tulos sekaluvuksi ja supista, jos voit.

Harjoituksia

Kertopeli numerokortilla

Oppilasparilla on kahdet numerokortit 1-10 (oppaan liite 12), kynä ja paperia.

Kortit ovat pakassa numeropuolet alaspäin. Kumpikin pelaaja nostaa vuorollaan kolme korttia ja muodostaa niistä murtoluvun kertolaskun (esim. $2 \cdot \frac{3}{4}$) ja laskee laskun. Kun kaikki kortit on käytetty, vertaillaan tuloksia.

Pohdittavaa

Ohjataan oppilaita käyttämään piirrettyjä tehtävien ratkaisun apuna.

Vihkolaskuja

Laske ja muunna sekaluvuksi, jos voit.

Ilustración 11: Resumen de actividades sobre fracciones. Promoting mathematical thinking in Finnish mathematics education (Krzywacki, H., Pehkonen, L., Laine, A., 2014, p. 11)

Todos los libros de texto en secundaria proporcionan materiales suficientes para las tareas de ejercicios, y como suele ocurrir, existen actividades y tareas que suponen un desafío en los alumnos que desean profundizar en las matemáticas. Aunque el profesor, en su libertad, puede optar por no utilizar el libro de texto de matemáticas, rara vez suele ocurrir esto.

Metodología y evaluación

Tradicionalmente, en Finlandia las clases han sido expositivas. El profesor es quien marca las pautas; es el centro del escenario de enseñanza y generalmente es quien comunica, pero a la vez la implicación de cada alumno se hace notar.

Otro factor que influye es la paciencia que tiene el docente, en el sentido de que prefiere no apresurarse y así garantizar el aprendizaje para todos los alumnos. También existe una diversidad metodológica, pues el docente constantemente se renueva, encuentra nuevas ideas y métodos que consideran útiles en su labor de aula. Algunos profesores suelen dar una lección especial de matemáticas en la que haya que resolver un problema o realizar un proyecto, una vez a la semana.

Es también tradición en la educación matemática finlandesa reservar los primeros cinco minutos de una sesión a realizar cálculos mentales, guiar u orientar en según qué actividades o conceptos. Se suelen hacer tareas para casa, y al igual que ocurre en España, el profesor se suele asegurar de que han sido correctamente hechas, haciendo una ronda por el aula. Los alumnos más aventajados suelen ser los elegidos para explicar las tareas más difíciles, al resto de la clase. El alumno recibe mucha información sobre las tareas que ha realizado, y la manera de mejorarlas si se hicieron mal. Por lo general, una tarea para casa que no se ha realizado no es motivo de reproche por el profesor, pero los padres son informados.

En cuanto a evaluación de los alumnos, el escenario finlandés es diferente con respecto a otros países, pues constatar la progresión de los conocimientos matemáticos recae casi en exclusiva en el profesor, en el aula y en el centro, no existiendo evaluaciones nacionales. Al final del sexto curso (al finalizar primaria) y del noveno curso (antes de secundaria superior) se realizan unas encuestas a efectos del sistema educativo. Esta evaluación, aunque no esté centralizada, recaba aspectos interesantes de la educación de cada alumno, tanto en su proceso como en el resultado, informando a su vez a alumnos y a profesores.

Otra particularidad en la evaluación matemática finlandesa es la autoevaluación del alumno, que ha sido adoptada en todos los niveles. El escenario de la autoevaluación es interesante, pues exige responsabilidad y logra cumplir los objetivos educativos comunes.

Innovación y formación docente en Finlandia

Las competencias del profesor finlandés ya no sólo provienen de su etapa formativa, sino que también afronta, debido a su posición autónoma, un montón de dificultades que poco a poco va resolviendo a medida que adquiere experiencia en su labor de aula.

Es por eso que la maduración de la identidad de cada docente, en Finlandia, pasa por muchas más fases, en cuanto a contingencias. Es sometida a frecuentemente a reflexión; mucho más que en otros países. Esto asegura buena parte del éxito educativo en matemáticas.

De media, todo docente de matemáticas en Secundaria invierte aproximadamente seis años en la universidad, como así ocurre en Helsinki. El requisito es cursar un número mínimo de créditos

de asignaturas de matemáticas, dependiendo de la especialización que se haya tomado. Esto se completa con un curso de didáctica.

Se valora mucho la práctica y la complementación en otros entornos educativos. Así mismo el futuro docente de matemáticas también se forma en discutir, exteriorizar sus experiencias y reflexiones.

3.4. Canadá

Si con los países anteriores de este capítulo hemos visto un sistema educativo nacional, o unas directrices generales, Canadá es muy diferente, pues se trata de un país con una educación plenamente descentralizada y podríamos hablar de trece sistemas educativos en sus respectivos territorios. Cada jurisdicción tiene responsabilidad plena para escribir su currículo, establecer políticas, publicar guías, o legislar sobre la composición académica y ejecutiva de los centros.

Además de los centros públicos, tenemos centros privados, centros segregados, internados, pudiéndose escoger idioma inglés o francés.

En líneas generales, el sistema educativo canadiense tiene una etapa primaria u obligatoria, que abarca seis u ocho cursos, dependiendo de la provincia. En Quebec la etapa secundaria son los cursos de 7° a 11°, mientras que en el resto del país la secundaria pueden ser de 9° a 12° ó de 7° a 12°.

Currículo de las matemáticas en Canadá

Aunque existan diferencias significativas en cuanto a currículo entre las provincias canadienses, se pueden establecer algunos puntos en común, al menos en la secundaria inferior (hasta el octavo curso). El objetivo primordial de las matemáticas es conseguir que el alumno conecte profundamente las matemáticas con otras disciplinas y con el mundo real (Artes, ciencias, actualidad, deporte, etc.); para ello se ha de servir de la comunicación, ya sea verbal o simbólica, resolver problemas que se presentan en diversos contextos, razonar y utilizar la lógica, representar adecuadamente los modelos matemáticos y los diagramas. Hace uso de la tecnología para consolidar su conocimiento matemático, relacionando, investigando y encontrando patrones.

Según el currículo de Ontario, en el séptimo y octavo curso, los alumnos han de conseguir:

- Representar, comparar y usar números decimales, usar múltiplos, submúltiplos ayudándose en el séptimo curso con útiles y objetos manipulables, manejar con soltura cantidades porcentuales. En el octavo curso convertir fracciones a decimales y viceversa, establecer factores comunes en factorización de primos, usar porcentajes en problemas prácticos (bancarios, por ejemplo) y descomponer en potencias de diez.

- En cuanto a medida, en séptimo curso se utilizarán magnitudes de medida, magnitudes derivadas; superficies y volúmenes, estimar medidas utilizando la investigación y la relación entre las magnitudes, ayudándose de objetos o geometría dinámica. En octavo curso se utiliza el círculo, la circunferencia, el cilindro, relacionando sus caras con su volumen; o comparando figuras.
- En cuanto a álgebra, los alumnos de séptimo curso han de ser capaces de determinar la fórmula de patrones como sucesiones aritméticas sencillas, aplicarlas en problemas cotidianos, resolver problemas algebraicos de proporcionalidad, como la duración de un viaje en coche a velocidad determinada, y ecuaciones lineales de primer grado. En octavo, evaluar ecuaciones con dos o tres variables, realizar conversiones entre lo algebraico, lo gráfico y otras representaciones numéricas o en tabla.
- Con la geometría, el alumno de séptimo ha de saber establecer un triángulo a partir de sus elementos (tres lados, dos lados y un ángulo, etc.) construir a partir de figuras (bisectrices, paralelas, perpendiculares, usar ángulos, mediante delineación, tableros geométricos, o software relacionado. También se inician en el uso de las coordenadas cartesianas y en las transformaciones. El currículo sugiere utilizar las transformaciones de la arquitectura de M.C. Escher. En octavo, se hace uso de figuras que tienen círculos, relación pitagórica, fórmula de Euler en poliedros, construcción de sólidos platónicos y una inspección en el mundo real de estos modelos y dónde pueden estar presentes.
- En cuanto al uso de datos (estadística) y probabilidad, los problemas propuestos pueden incluir estimaciones (por ejemplo, peces en un estanque), azar en experimentos aleatorios simples, siendo en octavo donde la probabilidad es sometida a investigación, en tendencias y aproximaciones teóricas. En cuanto a estadística, los ejemplos son innumerables: encuestas, recopilación de datos, por ejemplo de páginas web, distribución, gráficas, histogramas y resúmenes.

La secundaria superior también difiere según el territorio, pero en líneas generales hay itinerarios. Vamos a tomar como referencia el currículo de la Columbia Británica, que está variando la oferta de especialización de las matemáticas en estos cursos preuniversitarios.

- Las que denominamos matemáticas académicas, generales, son divididas en tres asignaturas: fundamentos de las matemáticas y el pre-cálculo 10; también fundamentos de las matemáticas 11º y 12º. Son materias totalmente sistematizadas. Entre lo más destacado está la adquisición de un dominio de las matemáticas a través de la computación, ya sea en

representación, como en análisis o recopilación de datos. Así mismo, se valora la geometría iterativa, como por ejemplo en la creación de fractales.

- Las matemáticas aplicadas, en formación profesional, inciden en la geometría, reconocimiento de patrones en figuras, resolución de puzzles, medidas con escalas graduadas (sistema métrico y anglosajón), conversión, aplicación de teoremas triangulares, trabajo con círculos.
- Cálculo y precálculo (grados 11° y 12°). También con una abundante presencia de las TIC, en este caso, en análisis, las funciones más importantes (trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.), procesos de cálculo en polinomios y modelos financieros asociados.

Las nuevas incorporaciones del currículo, que flexibilizan aún más las matemáticas, son:

- Estadística, de aplicación en carreras de economía y ciencias sociales. Contraste de hipótesis, distribuciones, intervalos de confianza, distribución normal y normal tipificada, técnicas de muestreo, conclusiones a partir de los datos.
- Matemáticas en ciencias de la computación. Implementación de algoritmos, decisiones, lógica, búsqueda en listas, ordenación, uso de ordenadores para los análisis financieros, modelado de problemas matemáticos utilizando lenguajes de programación.
- Historia de las matemáticas. Sistemas de numeración y su evolución histórica. De la tabla de cálculo al ordenador. Sucesión de Fibonacci, triángulo de Pascal, formulaciones algebraicas.
- Geometría. El círculo, las tangentes, geometría no euclídea y perspectiva, transformaciones de figuras, isometrías, formas.

El desarrollo de las competencias en el alumno son comunes en todas estas materias: Razonamiento y análisis; comprensión y resolución; comunicación y representación; conexión y reflexión.

Libros de texto de matemáticas en Canadá

Cada provincia canadiense tiene una política específica en cuanto a libros de texto. Por lo general es el ministerio quien valida los libros que son los adecuados para la enseñanza, y también facilita su adquisición mediante subsidio. Por ejemplo, en Ontario, existe una lista de libros de confianza, aprobados por el Ministerio, y que conforman el *Trillium List*. Son libros autorizados para la enseñanza en el aula de las escuelas públicas y privadas.

- Los libros de matemáticas han de hacer un aprovechamiento tecnológico, en todas las etapas; desde el jardín de infancia, hasta secundaria. Se ha hecho fundamental la utilización del soporte multimedia y del apoyo educativo mediante aplicaciones de dispositivos móviles y tabletas.
- Se prohíbe cualquier sesgo o valoración etnocultural, religioso, regional, así como cualquier situación que provoque discriminación. Lejos de apuntar diferencias, el material educativo ha de presentar más de un punto de vista, no estando la labor restringida al saber matemático occidental. Se han observado, por ejemplo, que se puede abordar las matemáticas en algunas actividades, tal como lo haría un aborígen o un poblador indio, con sus medios y herramientas.
- Las actividades del libro también están estratificadas por niveles de dificultad, brindando la oportunidad de que los alumnos con más aptitudes para las matemáticas puedan afrontar problemas de solución abierta. Se valora la expresividad del alumno a la hora de comunicarse de forma matemática.

Del mismo modo que hemos visto en Polonia, existen recursos educativos gratuitos como libros de texto en formato electrónico. En la provincia de Columbia Británica tenemos la iniciativa de apoyo gubernamental *Open Education*, con una extensa biblioteca.

This substitution in the equation $y = f(x)$ results in $-y = f(-x)$. Solving the latter equation for y gives $y = -f(-x)$. In order for this equation to be equivalent to the original equation $y = f(x)$ we need $-f(-x) = f(x)$, or, equivalently, $f(-x) = -f(x)$. These results are summarized below.

Testing the Graph of a Function for Symmetry

The graph of a function f is symmetric

- about the y -axis if and only if $f(-x) = f(x)$ for all x in the domain of f .
- about the origin if and only if $f(-x) = -f(x)$ for all x in the domain of f .

For reasons which won't become clear until we study polynomials, we call a function **even** if its graph is symmetric about the y -axis or **odd** if its graph is symmetric about the origin. Apart from a very specialized family of functions which are both even and odd,³ functions fall into one of three distinct categories: even, odd, or neither even nor odd.

Example 1.6.3. Determine analytically if the following functions are even, odd, or neither even nor odd. Verify your result with a graphing calculator.

$$1. f(x) = \frac{5}{2-x^2}$$

$$2. g(x) = \frac{5x}{2-x^2}$$

$$3. h(x) = \frac{5x}{2-x^3}$$

$$4. i(x) = \frac{5x}{2x-x^3}$$

$$5. j(x) = x^2 - \frac{x}{100} - 1$$

$$6. p(x) = \begin{cases} x+3 & \text{if } x < 0 \\ -x+3, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

Ilustración 12: Introducción sobre simetría de funciones y primeros ejercicios. Open textbook precalculus (Stitz, 2013, p. 95)

Metodología y evaluación en Canadá

Se promueve la evaluación, en múltiples situaciones y propósitos. En su vertiente formativa ha demostrado tener un peso importante en la educación matemática. Si nos ceñimos a la práctica de la enseñanza en Ontario:

- No sólo indica lo que el alumno debe aprender sino cómo debe hacerlo.
- No sólo se basa en el conocimiento y en las habilidades, sino también en los logros obtenidos.
- Se adapta a todos los estudiantes, incluyendo los que tengan necesidades específicas en la educación.
- Se fomenta la autoevaluación del propio aprendizaje y la mejora personal, en las metas específicas que se marca el alumno.
- Las herramientas de evaluación son concisas, y el estudiante es informado en todo momento.

En cuanto a metodología, el binomio matemáticas computacionales-resolución de problemas parecen ser un eje vertebrador de las actividades matemáticas en el aula de Secundaria. La adquisición de una correcta actitud investigadora ya se produce a partir del tercer curso de Primaria, y se va ampliando a medida que avanzan los conceptos. Se suele seguir un esquema similar en el aula, sea en lo individual o cuando se establecen agrupamientos.

El alumno primero investiga y explora el problema identificando las preguntas adecuadas para resolver el problema, distinguiendo enunciado, datos de suposiciones o de cuestiones. Después sigue una parte estratégica, en la que el alumno relaciona este problema con problemas anteriores y establece paralelismos. Esta fase hace uso de la comunicación: ¿Cómo comunicarlo? ¿Cómo transmitirlo al resto del equipo en una actividad grupal?

La tercera fase en la resolución de problemas es llevar a cabo la estrategia, y enfrentarse a los cálculos, o a imprevistos que pudieran ponerse por delante. Como ayuda, el alumno puede usar todo tipo de esquemas, símbolos, grafos, revisiones y también se hace lícito ayudarse de la tecnología, tanteando posibles resultados, realizando cálculos numéricos previos.

La cuarta fase es justificar la coherencia del resultado. No basta con el cálculo si éste no se amolda a la situación analizada.

En la Columbia Británica, enseñanza secundaria superior, se ha incorporado una enseñanza de las matemáticas a través de la cultura aborígen. Como se avanzará más adelante con las etnomatemáticas, se ha introducido esta perspectiva en países que han sido punto de encuentro de

varias culturas. Esta región de Canadá estuvo poblada por indios americanos, antes de la llegada del hombre blanco.

Innovación docente y formación continua del profesorado de matemáticas en Canadá

Nos centraremos en la provincia de Ontario. Su Federación de Profesores ofrece multitud de información, manuales, seminarios, talleres y cursos para el profesor de matemáticas que desee innovar y explorar nuevas formas de enseñanza.

- Enseñanza diferenciada según la psicología o la situación del alumno. Organizadores gráficos que mejoran el rendimiento de las matemáticas, utilización adecuada de materiales didácticos y cuáles son los más apropiados en las lecciones de geometría, aritmética, etc.
- Vídeos y documentos ilustrativos sobre las diferentes formas de resolver un problema, como determinar el área de un cuadrado a partir de su diagonal. Representación adecuada de medias y medianas, resolución de ecuaciones, mosaicos coloreados, etc.
- Facilidades para que el docente que quiera investigar sobre la educación matemática pueda recopilar información valiosa, reflexionar sobre su docencia, cambiar algunos aspectos de su forma de enseñar, obtener mejores resultados y compartir su experiencia.
- La tecnología y las matemáticas van de la mano en muchos proyectos que se proponen y de esta forma la educación se hace transversal, además de consolidar dos aspectos primordiales del enfoque STEM que potencia la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas. Se crean coches de carreras propulsados por una ampolla de CO₂ y compiten en una pista. Las consideraciones tecnológicas son claras: Elegir bien los materiales, las dimensiones, hacer buenos acabados de los vehículos. Las consideraciones matemáticas, pueden ser muy diversas:
 - En el curso 12º los alumnos exploran y comprender el concepto de correlación.
 - En el curso 10º, o en la enseñanza técnica (vocacional) los alumnos aprenden medidas y técnicas de estimación de valores.
 - También se contemplan aspectos geométricos, y económicos: Mejor aerodinámica, diámetro de las ruedas, optimización de los gastos en material, etc.

3.5. Otros países con los mejores resultados

Igual que hemos hecho con los países europeos, existen particularidades en otros países con excelentes rendimientos en matemáticas. Dos de ellos son asiáticos: China y Japón; y otro es europeo: Estonia.

China

Trataremos en este apartado a China como el mismo país, a pesar de que sus regiones están diferenciadas en las valoraciones PISA; y señalaremos algunas de sus particularidades. Además del bloque continental Pekín-Shangai-Jiangsu-Guangdong, también han obtenido excelentes calificaciones en matemáticas Taipei, Macao y la antigua colonia británica reincorporada a China: Hong-Kong.

La educación elemental o primaria abarca los seis primeros años, y la educación secundaria son otros seis años, en la cual tenemos la secundaria equivalente a nuestra secundaria obligatoria, de tres años, y la educación secundaria superior no obligatoria, de otros tres años. También hay enseñanza profesional o vocacional, con un gran número de alumnos y de centros.

La educación matemática china no incorporó la notación occidental hasta 1894, con los símbolos, la numeración arábiga y la escritura en horizontal. Hasta nuestros días la filosofía de Confucio influye en la enseñanza china, estableciendo tres máximas: Apreciar la verdad, aprender de forma continua y siempre procurar enseñar a los demás. Esta tradición otorga al maestro, al profesor, un rol social fundamental y muy respetado en el país.

Los profesores se suelen guiar por tres fuentes: El conocimiento y sabiduría histórica, recopilada y transmitida; la comunicación con otros profesores; y las investigaciones en educación. Las aulas están masificadas, y suele haber un ratio aceptable de profesores, pues cada profesor de matemáticas está al cargo de unas pocas clases, en comparación con lo que ocurre en otros países; sin embargo, debido a la enorme cantidad de alumnos por profesor, la tarea de éste consiste, en cuanto a tiempo (un tercio del total), a corregir todas las tareas y exámenes, y también a preparar las clases. El otro tercio lo hace enseñando en el aula, y el último tercio, que no es menos importante, lo dedica a intercambiar aspectos de la educación matemática con otros compañeros.

China además, por tradición cultural, es un país en el que hay que probar lo aprendido. El alumno ha de dar todo su potencial, tanto al finalizar la enseñanza secundaria obligatoria, como cuando finaliza el instituto. Se suele aceptar el sacrificio del presente para conseguir la felicidad del futuro y en este aspecto no difiere mucho de otros países orientales industrializados.

A pesar de la masificación, al menos en los cursos superiores, se suele repartir las clases de matemáticas, entre una primera parte que es claramente expositiva, y una segunda parte en la que cada alumno adquiere protagonismo, con una diversidad de tareas. Por ejemplo, en un instituto de Pekín, se propone utilizar cuerdas para rodear rectángulos y realizar determinadas tareas.

En Hong-Kong, las matemáticas son una asignatura fundamental, obligatoria para entrar en la universidad, tras realizar el examen de diploma en secundaria; ésta está presente en la enseñanza media, y los alumnos tienen la posibilidad de escoger matemáticas extendidas, en las que profundizar o especializarse, por ejemplo en alguna carrera tecnológica. Los cambios curriculares han sido significativos los últimos años y las matemáticas se han adaptado para resolver multitud de problemas, prestándose especial atención a que el alumno tenga la debida confianza, a la hora de realizar una tarea matemática.

Estonia

No fue fácil el tránsito de Estonia tras la caída del Muro de Berlín y la desintegración de la Unión Soviética; sin embargo, en educación matemática es un país que nos puede mostrar cosas realmente interesantes. Las últimas evaluaciones PISA (2015) muestra un país con un rendimiento matemático superior al de Finlandia, y en la novena posición mundial. Según el informe de la OCDE, éstas pueden ser las claves de éxito:

- Tradicionalmente, al igual que ocurre en Finlandia, la educación está muy bien valorada, y así ha sido durante décadas, estando la población mayor, con educación básica, más preparada.
- La escuela se ha hecho integradora, y está basada en la igualdad de oportunidades, sin importar su procedencia o estrato social. Al contrario que en las escuelas orientales que hemos ido viendo, no está basada en resultados.
- Se valora la autonomía y la libertad de cátedra del profesor, sin que por ello se prescindiera de la correcta evaluación de las instituciones de los procesos de enseñanza.
- Se ha aumentado el gasto gubernamental en educación, todo ello a pesar de la recesión económica que ha azotado al país. En los últimos cinco años, el salario medio del profesor se ha visto incrementado un 40%. La similitud con Portugal en este punto es evidente.

Un éxito de la escuela inclusiva ha sido anular la diferencia de rendimiento en matemáticas entre chicos y chicas, y entre clases sociales. Esto se ha experimentado, gracias a los cambios, a partir de un estudio, que se hizo cuando aún existía una estratificación de la educación, la cual fue

contraproducente en los alumnos, tanto de alto rendimiento, como los de bajo rendimiento, que no lograban progresar.

El sistema educativo tiene nueve años de enseñanza obligatoria, y aproximadamente las dos terceras partes de los alumnos pasan a secundaria superior, el resto por lo general termina en un instituto de formación profesional. Las matemáticas son obligatorias en todas las especialidades de la secundaria superior, ocupando un 12% del tiempo de estudio. Las evaluaciones también tienen en cuenta el nivel de matemáticas en las diferentes ramas de la formación profesional. No se han visto diferencias en contenido relevantes con respecto al contenido de matemáticas que hay en España.

En cuanto al uso de libros de texto, la costumbre del profesor estonio ha sido evitar todo lo posible el libro y tener sus propios recursos disponibles. Las TIC han progresado mucho, pero en las actividades matemáticas se utilizan toda clase de materiales manipulables.

Japón

La Ley Fundamental de Educación que modernizó la enseñanza en Japón fue redactada en 1945 y entró en vigor en 1947. Fue objeto de enmiendas en el 2006. Esta ley establece que la educación en Japón es obligatoria hasta los 15 años y ha de favorecer la igualdad de oportunidades. Al igual que Corea del Sur, el país ha tenido una fuerte influencia estadounidense, en cuanto a estilos educativos, pero a la vez ha sabido conservar su visión tradicional de las matemáticas y ha obtenido buenos resultados tras revisar qué tipo de actividades eran más convenientes para los estudiantes de matemáticas. Finalmente ha sabido encontrar su propio camino.

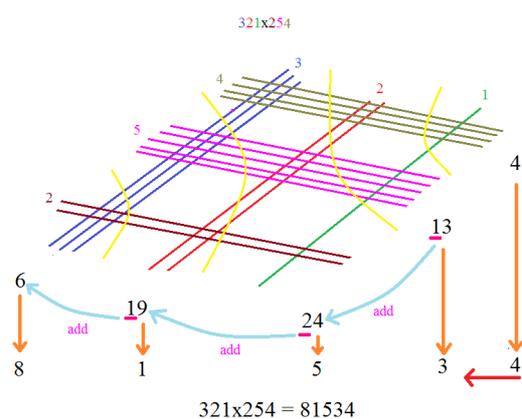


Ilustración 13: Método japonés de multiplicación. *Japanese Multiplication simulation - is a program actually capable of improving calculation speed? (Software Engineering, 2014)*

Debido a la demanda del país, debido a su peso industrial, principalmente en la manufacturera y en la electrónica de consumo, los alumnos alcanzan un alto grado, tanto en lo educativo como en su especialización académica o profesional. El 98% de alumnos acceden a la enseñanza secundaria superior, y más de la mitad continúan los estudios universitarios. La enseñanza secundaria superior está dividida en una parte común, y en una parte especializada, que equivale a la especialización profesional: Negocios, procesado del pescado, enfermería, tecnologías de la información, etc. Los contenidos en cuanto a matemáticas académicas o aplicadas son similares a los de los otros países ya tratados.

Las actividades en la matemática japonesa tienen particularidades y se utiliza intensivamente la resolución de problemas desde un principio. Un vínculo con el contenido son las denominadas *hatsumon*, que básicamente son preguntas y cuestiones hacia conceptos de las matemáticas, las cuales, realizadas adecuadamente hacen que el alumno relacione lo que estudia con la vida real.

La preparación del profesorado es continua, y se hace uso del *jugyokenkyu* o estudio de una lección. El profesor enseña a los alumnos delante de otros profesores y al menos un profesor de universidad, que le indicarán objetivamente, tras la sesión, aspectos de su forma de enseñar.

En el marco teórico de la pedagogía, el modelo japonés utiliza el constructivismo, como un eje fundamental en la educación matemática, en el que se reintroducen conceptos ya sabidos para lograr integrar los nuevos. El currículo indica que el docente ha de proporcionar oportunidades de aprendizaje de las matemáticas en las cuales el alumno aprenda, con actividades amenas. Potenciar las estrategias, identificar los problemas a solucionar se hace necesario, pero a la vez el alumno ha de tener la oportunidad de compartir sus logros con otros compañeros, así como reflejar sus actividades convenientemente. Otro eje fundamental es el metodológico y se indica preferentemente el aprendizaje basado en proyectos, donde integrar todos los conocimientos adquiridos.

4. ASPECTOS DE LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA INTERNACIONAL

A pesar de que nuestro entorno inmediato es Europa, con organizaciones e instituciones que velan por mejorar la calidad de la enseñanza matemática; y tras haber conocido todos los aspectos educativos en países europeos y en los países de alto rendimiento, tenemos aún una visión incompleta y se hace necesario recabar datos interesantes.

Por una parte, la actitud que se tiene hacia las matemáticas en los países latinoamericanos, y en los países en desarrollo. Los nuevos estilos educativos no pueden prescindir de una característica decisiva como es el entorno sociocultural, teniéndose que adaptar la escuela al entorno y no al contrario. Las matemáticas, como veremos, no pierde protagonismo, como conocimiento universal, y necesario en todas las civilizaciones. Quizá podamos aprender un poco de cómo afrontan las matemáticas algunos países, y para ello tomaremos como referencia el subcontinente indio, que no ha permanecido ajeno a las matemáticas, sino que ha tenido una influencia relevante que perdura en el presente.

No faltan tampoco los aspectos en el Oriente Medio. Para finalizar este recorrido por la enseñanza matemática conoceremos en qué consisten las etnomatemáticas.

4.1. Latinoamérica

Hemos visto en Europa cómo la situación socioeconómica del continente pone los cimientos de una educación de la matemática. Esta educación emana ya no sólo del contexto de cada país, sino dentro de un marco común como es la Unión Europea. Los países con mejores resultados convergen hacia un entendimiento integral de las matemáticas que como hemos visto en el caso de Corea del Sur, China o Japón, sirve como base que favorece su competitividad, por ser países que demandan mano de obra especializada o cualificada.

La situación en Latinoamérica es bien distinta, y a partir de esta diferencia es como debemos entender su enseñanza de las matemáticas. Su sistema educativo está muy a menudo expuesto a problemas pendientes de subsanar, déficit de infraestructuras y presupuestarios, en los cuales se realizan frecuentes reformas legislativas.

Por otra parte, la docencia que se ejerce en un país latinoamericano es diferente, pues cualquier profesor tiene una excesiva carga de trabajo que muy a menudo no se ve recompensada con un salario decente o una posibilidad de promoción. Esto malogra otra parte importante en la educación de las matemáticas como es la cualificación, la formación continua del docente, que

proporcione una innovación y excelencia en la enseñanza de las matemáticas. Añadido a los problemas de infraestructuras, se frena la renovación hacia la metodología basada en las TIC.

Un puente con Europa para la cooperación en la enseñanza de las matemáticas

En esta situación, se ha hecho necesario recurrir a una investigación previa, en la que se recaban los datos que muestran la problemática y que cristaliza en proyectos educativos concretos. No podemos olvidar que esta cooperación tiene un doble sentido, pues la convivencia de varias culturas, como así ocurre en América, y la actitud que tiene cada una con respecto a las matemáticas, ha creado una forma de ver las matemáticas y que fue acuñada por el matemático y educador brasileño Ubiratan D' Ambrosio como Etnomatemáticas.

En la parte europea, se han establecido políticas comunes, desde el Tratado de Maastricht, en 1992, y que marca el inicio de una legislación acorde de cooperación entre estados europeos. Sigue otra fase que es la convergencia de los sistemas educativos, y la puesta en marcha de políticas de investigación y de mejora en la enseñanza matemática.

Cuando se han establecido los lazos bilaterales entre Europa y Latinoamérica se ha puesto mucho cuidado en compartir las experiencias de ambos continentes. La principal evidencia de que tiene que haber un cambio en el aspecto de la educación es la desigualdad y la falta de cohesión, ya no sólo entre países, sino entre regiones de un mismo país.

En el caso que nos compete, se han estudiado las condiciones en las que se enseñan y aprenden las matemáticas, así como las posibilidades de realizar mejoras. Un máster internacional de didáctica de las matemáticas podría tener beneficiosas repercusiones y favorecer la cohesión social. Destacamos algunos programas que tienden el puente entre Europa y América Latina:

- El programa ALFA (América Latina-Formación Académica), que es un programa de cooperación entre instituciones superiores de educación entre ambos continentes. También colaboran los centros de educación de adultos, los centros de formación continua, las asociaciones sin ánimo de lucro y algunas empresas privadas.
- El programa ALBAN, de becas para estudiantes y profesionales de América Latina, y que podrán beneficiarse del prestigio de la enseñanza superior en Europa, y de su perspectiva en cuanto a educación matemática.
- *Erasmus Mundus*, cuyo objetivo es el entendimiento intercultural entre países y en el que los estudiantes podrán hacer un recorrido por varias universidades.

Especialización de Didáctica de las Matemáticas en Venezuela

Habíamos apuntado como un obstáculo en la educación latinoamericana la insuficiente formación del profesorado de matemáticas. Venezuela parece haber encontrado una solución que puede paliar la carencia, y que sería muy provechosa en sus aulas de secundaria (educación media diversificada y profesional, como se llama en el país).

El programa de especialización en didáctica de las matemáticas tiene ya no sólo como objetivo actualizar el conocimiento del contenido de los docentes; también potencia el aspecto pedagógico y didáctico. El cambio y adaptación de las matemáticas al mundo actual y sus necesidades -como hemos ido viendo en capítulos anteriores- se hace inevitable y esto también repercute en el método en las aulas, así como en el uso de las tecnologías, como elemento de apoyo fundamental en la enseñanza. Los objetivos del programa son, por tanto:

- Desarrollar una propuesta educativa de las matemáticas en la enseñanza secundaria y que engloba todo el trabajo profesional del futuro docente.
- Estimular el análisis y la aplicación de las nuevas corrientes didácticas en las matemáticas.
- Actualizar el conocimiento matemático, potenciando aspectos en todas las áreas de la enseñanza secundaria, principalmente en geometría, análisis, álgebra, probabilidad y estadística.
- Promover y potenciar el trabajo de aula y su análisis, principalmente en experiencias educativas y propuestas innovadoras.

Este programa, tiene tres secciones bien diferenciadas: la primera sección se centra en los sistemas educativos y los cambios sociales; la segunda conforma las estrategias del docente así como la actualización científica, e incluye metodología, evaluación, nuevas tecnologías y profundización del contenido matemático en secundaria. La tercera sección se centra en la investigación y la innovación docente.

El programa es extrapolable a otros países y regiones de Latinoamérica, que necesiten una profesionalización del profesorado de matemáticas, que éste sea capaz de modular los cambios inminentes del sistema educativo en los países latinoamericanos y que a la vez sepa aprovechar la cooperación entre centros docentes.

Se han apuntado las carencias que tiene la formación del profesorado, pues éste, una vez está ejercitando sus funciones, tiende al procedimiento y algoritmo, en detrimento de la creatividad y la particularidad de cada alumno; se llega a la instrumentalización de la asignatura, al tratamiento dogmático de su contenido, visto como una verdad absoluta que niega una visión crítica; un

currículo formado por componentes estancos e independientes que no se complementan ni armonizan y que son tratados de forma independiente; y unos métodos basados en ejercicios, exposiciones, o uso de la memoria, que son incompatibles con una enseñanza efectiva de las matemáticas.

El desafío cubano

La educación matemática en Cuba ha cambiado en tres ocasiones, como también ha cambiado en cuanto a preparación de docentes. Distinguimos tres etapas:

- La etapa en la que Cuba era una colonia española y por tanto compartía el mismo sistema educativo que España.
- La etapa que siguió a la Guerra Hispanoamericana y que finaliza con la revolución, en la cual Cuba adoptó el estilo educativo de los Estados Unidos.
- Finalmente, la etapa socialista, que a su vez puede dividirse en una primera etapa, donde la educación matemática cubana adoptó los estrictos métodos de la República Democrática Alemana (RDA), combinándose con características de la psicología soviética; y una segunda etapa post soviética, en la que el país tuvo que seguir su propio rumbo en educación.

Históricamente, el país no ha tenido una especialización docente en matemáticas propiamente dicha, en secundaria. En cambio, para la escuela elemental se contaba con una especialización, con maestros formados en la etapa terciaria no universitaria, en las denominadas *Escuelas Normales de Maestros*.

A partir de la revolución cubana, en 1959, se adoptaron planes que garantizarían la enseñanza universal en el país, y tras un período, se fundaron los *Institutos Pedagógicos*, mientras los profesores se formaban en sus materias de especialización, llegando a un culmen en la década de los 80, cuando se considera como una parte importante no sólo los conocimientos científicos, sino también la didáctica de las matemáticas.

Estos institutos se fueron multiplicando, a medida que aumentaba la demanda para ejercer la docencia, sin embargo la caída de la Unión Soviética provocó una crisis y un reajuste del sistema educativo. Se perdieron las especializaciones en secundaria, especialmente las de física y matemáticas. Las nuevas circunstancias sociales demandaban un docente preparado para afrontar diversas materias y transversalidades. La falta de preparación y el escaso tiempo de prácticas, así como la demanda de un docente a tiempo completo que apenas podía aprender los fundamentos teóricos no fueron beneficiosos.

Ha sido necesaria, por tanto, otra reorganización, recuperar las especializaciones. En ese aspecto, la educación matemática cubana ha vuelto a recobrar un nuevo impulso.

- Se pueden aprovechar las estructuras creadas, que vinculan estrechamente y con gran facilidad la docencia con la investigación, así como la formación docente con los centros escolares. En ese sentido la centralización de la educación en el país puede ser beneficiosa.
- Sin embargo ha caído la motivación para ser docente, hay poca orientación laboral, a la vez que los salarios no están a la altura, y por eso se suelen escoger otros sectores con mejores retribuciones como el turístico o el sanitario. También hay insuficiencia de medios, y poco manejo de las nuevas tecnologías, necesarias en la formación continua, o para cooperar en la investigación internacional.

Se pretende compensar carencias de tiempos pasados, dotando al futuro profesor de una cultura matemática y de unas herramientas pedagógicas que se adapten a las peculiaridades de la región donde ejerza. También es importante conseguir docentes motivados, con un reconocimiento no sólo salarial, sino social. La identidad profesional docente tiene un papel importante en este sentido.

4.2. India

Las grandes contribuciones matemáticas de la India parece que han caído en el olvido porque actualmente el país atraviesa por grandes dificultades en educación. Recordemos que ésta es la tierra del matemático Brahmarupta que incorporó el cero como cifra en las matemáticas, con un significado numérico y además posicional. También contribuyó en los avances de la trigonometría y es el lugar donde se elaboró la primera tabla del seno, que tuvo una gran repercusión en la ciencia astronómica.

Sin embargo, todos estos logros parece que se han quedado en nada, y se debe principalmente a que el país tiene una pobreza endémica, unida a una sobrepoblación y a una bajísima calidad de vida. La universalización de la educación se ha convertido en un auténtico desafío en un país regido por un sistema de castas. En un año tan reciente como el 2010 se aprobó una ley de educación obligatoria, desde los seis a los catorce años.

Estructura del sistema educativo hindú

Territorialmente, el país tiene tres niveles de gobernación: El gobierno central en Nueva Delhi, de donde emanan las leyes generales; los gobiernos estatales y las instituciones locales. La educación matemática está influenciada por el currículo y los consejos pedagógicos, centros de formación, además de centros en prácticas, regulados por el gobierno central y estatal.

El ámbito estatal (o regional) en la educación es muy importante, al estar el país muy diversificado culturalmente. Esto a su vez también promueve una gran diversidad en la enseñanza matemática, que diferirá de un estado a otro significativamente.

Mientras que la educación elemental u obligatoria abarca de los seis a los catorce años, la enseñanza Secundaria sólo es de dos años; y finalmente, la enseñanza Secundaria superior, hasta los dieciocho, abarca otros dos años.

La política nacional de educación, afirmó en el año 1986 que las matemáticas son un vehículo que habituará al niño a pensar, analizar, razonar y relacionar, de una forma lógica. La implementación en la enseñanza secundaria de diversas materias matemáticas ha sido relativamente tardía. Por ejemplo, hace treinta años, el cálculo solamente se estudiaba en la universidad.

Problemas y esperanzas en la enseñanza matemática hindú

Según algunos estudiosos, el mayor desafío es conseguir llegar a la tríada cantidad, calidad e igualdad, que resume los graves problemas sociales y económicos del país.

- Poca preparación y motivación del profesorado. Sólo un 43% del profesorado de la educación elemental tiene un título o grado que le habilita para la docencia. La correcta enseñanza de las matemáticas también está en entredicho. A esto hay que unir la falta de motivación, por las condiciones duras y muchas veces ingratas que tiene la docencia en la India.
- Instalaciones inadecuadas. Muchas escuelas, como por ejemplo, en los poblados del estado de Andhra Pradesh, carecen de recursos y no sirven para educar a todos. Una característica de las escuelas de los lugares pobres de la India es que sólo tienen un aula.
- Desigualdad. El sistema de castas, célebre en el país sólo está rivalizado por una diversidad de tribus, en zonas rurales, que complican aún más la convivencia y no crean un clima conveniente para desarrollar las actividades matemáticas. Se tiene la creencia, muy arraigada de que las matemáticas no son para las chicas, ignorando los mejores resultados que tienen éstas con respecto a los chicos, cuando se realizan los exámenes nacionales.

Todos estos aspectos pueden haber hecho que la educación en la India no avance como debería, pero a pesar de las dificultades, las matemáticas han conseguido abrirse paso poco a poco y aún puede haber una esperanza.

- Contra todo pronóstico, y aunque muchas comunidades del territorio indio no aprenden unas matemáticas adecuadas, cada vez más alumnos y profesores están motivados y

concienciados de la importancia que tienen las matemáticas en el país. Esto, a lo largo y ancho de la India, tiene un peso significativo, aunque aún porcentualmente bajo.

- Las barreras sociales son grandes, y la pobreza está presente, pero las matemáticas son la disciplina del pensamiento, sin que por ello haya que acompañarse por libros de texto, que en muchos casos no se pueden adquirir. Tampoco son necesarios laboratorios ni artefactos caros o sofisticados. Toda actividad matemática se puede acompañar de objetos sencillos e incluso cotidianos (bolas, cuerdas, piedras, utensilios, tablillas, etc.).
- El sur de la India está experimentando un avance en la enseñanza de las matemáticas gracias al uso de las nuevas tecnologías y la computación. El prestigio que tienen los ordenadores entre la gente de la región sirve de catalizador que aumenta el interés por las matemáticas. El escenario, además, tiene mejor aspecto si en este tipo de experiencias participan cada vez más chicos y chicas de las clases desfavorecidas.
- Las reformas educativas han sido favorables. La universalidad de la educación elemental ha ido acompañada de medidas que influyen en la enseñanza de una forma directa, y que incluso podrían cambiar las actitudes que se tiene hacia el aprendizaje. De todos modos, esta influencia ha de sostenerse en el tiempo, pues los cambios en el sistema no suelen tener efectos inmediatos y es muy pronto para sacar conclusiones.
- La tecnología en general, ya no sólo como apoyo en las actividades de las matemáticas, sino para fomentar el sostenimiento de las aldeas o mejorar las escuelas, también influye positivamente.

La lógica hindú nyaya y la argumentación matemática

Nuestra cultura occidental está dominada por la escuela griega, concretamente la lógica aristotélica o megárico-estoica. En la India, el estudio de la lógica ha seguido por otros derroteros y por tanto se han de tener en cuenta a la hora de enseñar o diseñar problemas y actividades.

La lógica nyaya es fuertemente empírica y perfectamente reproducible por determinados alumnos que aprenden a razonar, sea cual sea su contexto cultural. Su escuela, que se desmarcó de las tesis lógicas budistas, afirmaba que dominan cuatro medios de conocimiento:

- Testimonio. Todo lo que es digno de fe, incuestionable; ya sea transmitido oralmente o por escrito.
- Analogía. Se define un objeto a partir de sus semejanzas con otros objetos. Cada objeto tiene una categoría o una clase de analogías. Este medio tiene una conexión muy potente con los

conceptos actuales de la matemática, con los elementos geométricos, e incluso con las definiciones analíticas, conjuntos cociente y relaciones de equivalencia.

- Percepción. Relación entre lo visible (lo real) y su imagen (o proyección). Es otra característica que desmarca a la lógica nyaya del budismo, pues éste último sólo concibe la imagen mental pura.
- Inferencia. Que representa el momento culmen en el proceso.

También están los silogismos nyaya, utilizando con precaución el término “silogismo”, procedente de la escuela aristotélica, que quizá es similar en algunos aspectos. La diferencia es que el silogismo nyaya tiene cinco enunciados, mientras que el silogismo aristotélico que conocemos tiene sólo tres.

En nyaya se parte de una afirmación principal que es lo que debemos demostrar. A partir de ahí sigue una razón; después sigue una proposición o enunciado con ejemplo; después se hace una aplicación también llamada segunda afirmación; y tras todo esto, se establece una conclusión.

4.3. Oriente Medio

Al igual que hemos justificado el papel relevante que tuvieron algunos matemáticos indios, no se puede ignorar la tradición matemática de esta parte del mundo y sus contribuciones más notables. El matemático árabe Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi ya incorporó en su obra los numerales indios, realizando el primer compendio sobre álgebra. También se realizaron grandes avances en trigonometría y el exquisito manejo de la geometría o de las proporciones queda reflejada en edificios como la Alhambra.

Veamos cómo están enfocando la enseñanza matemática de Secundaria en diversos países de Oriente Medio

República Islámica de Irán

Para ponernos en contexto, Irán es un país multiétnico con contrastes muy marcados. De este hecho no puede permanecer ajeno su legislación, que establece una educación universal, obligatoria y gratuita.

- Una etapa de educación general y obligatoria, hasta el octavo curso, dividida en dos subetapas de cinco y tres años.
- Otra etapa, de enseñanza secundaria, con especialización en matemáticas y física, en ciencias naturales, humanidades y arte. Curso 9º, 10º y 11º.

- Finalmente, un curso pre-universitario a la misma usanza que el antiguo COU español (Curso 12°).

Los exámenes de evaluación externa son consecutivos, al terminar Secundaria y el curso preuniversitario.

El primero y segundo curso de secundaria, que equivale a nuestro 3° ESO y 4° ESO, tienen las matemáticas comunes en todas las especializaciones (matemáticas I y II). En cursos siguientes, permanecen las matemáticas sea cual sea el itinerario, variando su nivel, siendo las matemáticas para la especialización en matemáticas y física las tratadas con más profundidad.

Es interesante que nos detengamos en los contenidos, pues las matemáticas son divididas en cursos, o módulos específicos, según los itinerarios escogidos.

- En matemáticas y física, el décimo curso, además de las matemáticas del tronco común, (Matemáticas II), se estudia geometría, estadística y modelado. En el undécimo curso, las matemáticas se hacen totalmente específicas y se estudia álgebra, probabilidad, geometría y cálculo. El curso preuniversitario incorpora el álgebra lineal, el cálculo avanzado y la matemática discreta (teoría de grafos, teoría de números, combinatoria, etc.).
- En ciencias naturales, además de las matemáticas II los estudiantes tienen contacto con la geometría. En el curso 11° estudian cálculo para las ciencias naturales, estadística y modelado. En el curso preuniversitario, finalizan las matemáticas de secundaria con cálculo avanzado.
- En humanidades, el décimo curso incluye, además de las Matemáticas II, el modelado y la estadística. En cursos posteriores, se estudian matemáticas de las humanidades y matemáticas básicas.

Los educadores de matemáticas en Secundaria suelen ser por lo general graduados en matemáticas o ingeniería y el problema principal que existe es que compaginan su docencia pública, con la docencia privada, restando efectividad a su labor docente.

En cuanto a preparación, el profesorado competente ha de realizar un curso de especialización que incluye psicología del desarrollo, diseño curricular, filosofía de la educación, medida, economía y administración en la enseñanza, resolución de conflictos, revisión de libros de texto y tecnología educativa.

Los contenidos de matemáticas en la preparación docente son: Cálculo, fundamentos de las matemáticas, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, álgebra, análisis, teoría de números, teoría de grafos, matemáticas discretas, estadística y probabilidad, procesos estocásticos y geometría.

En los últimos años se ha incrementado la ayuda al docente, que facilita su día a día y además su formación continua. Se proporcionan materiales, se convocan talleres y sesiones de formación. Desde el año 1996 se convoca una conferencia anual que suele rondar los 1200 participantes, además de conferencias regionales. Existen publicaciones de educación matemática y didáctica para los docentes de todos los niveles.

Irán es uno de los países que más producen textos científicos, y además su participación en las olimpiadas matemáticas internacionales suele tener muy buenos resultados, con relación al resto de países islámicos.

¿Por qué los alumnos de secundaria en Israel obtienen un rendimiento tan bajo en matemáticas?

Causa sorpresa que Israel esté en un puesto bastante por debajo de la media de la OCDE en las evaluaciones PISA. Israel es un país con un buen nivel de vida, y que ha apostado por la educación, siendo además punto neurálgico de empresas tecnológicas, y por tanto un país que demanda trabajadores cualificados, así que es lógico pensar que la educación matemática en las aulas debería ser la adecuada.

Otro factor que desconcierta es que los padres de los alumnos suelen tener estudios y estos valoran la importancia de la educación. Recordemos que es muy importante esta influencia, porque repercute en el rendimiento matemático en el alumno. Los padres con estudios probablemente ayudarán a sus hijos en las tareas matemáticas cuando están en casa. Israel está por encima de la media de la OCDE en cuanto a educación de la madre, que también tiene una gran influencia en sus hijos, y además otorga expectativas muy favorables para la educación matemática en sus hijas.

El poco rendimiento en matemáticas se agrava con una situación de desigualdad social, pues en el país conviven dos grandes comunidades: la comunidad judía y la árabe. La comunidad judía, en comparativa, saca mejores notas en matemáticas que la comunidad árabe. Se tiende a la segregación, pues los padres de cierto nivel educativo y económico tienden a agrupar a sus hijos en los mismos centros, creando áreas de alto y bajo rendimiento académico, según la zona.

Dos factores más pueden estar malogrando la educación matemática en Israel:

- Aulas indisciplinadas. El sistema educativo está bien estructurado, pero es débil a la hora de conseguir que el alumno sea disciplinado. Los padres no ayudan, pues tienden a sobreproteger a los hijos. Israel tiene una posición muy elevada en cuanto a impuntualidad y absentismo escolar. Esto produce un efecto contagio y si bien un mal alumno puede terminar siendo disciplinado, su comportamiento negativo ha influido en el resto de la

clase. Esta falta de disciplina parece iniciarse en Infantil y Primaria, y supone un problema grave también en otros ámbitos como la universidad, el ejército y el trabajo.

- Fácil acceso al sistema educativo de profesores poco capacitados. Mientras que en Finlandia sólo un 10% de los candidatos consiguen impartir clases de matemáticas, tras pasar una meticulosa selección y tras ser revisados sus expedientes académicos, sus conocimientos y sus habilidades didácticas, en Israel los estudiantes con malos resultados en secundaria suelen optar por seguir una carrera docente.

Por lo general, los emprendedores de empresas de alta tecnología en Israel proceden de buenas escuelas que cuidaron sus métodos de enseñanza o fomentaron una disciplina. Los alumnos de procedencia extranjera también tienen una tendencia a la segregación, estando por ejemplo los estudiantes de procedencia estadounidense en ciudades tranquilas y buenos centros, en contacto con sus compatriotas.

Está claro que existe una falta de entendimiento en la tríada sistema educativo-padres-alumnos y esto podría afectar al futuro económico del país, debido a la poca preparación que reciben los alumnos, en ciencias y matemáticas.

4.4. Las etnomatemáticas

El término “etnomatemáticas” fue acuñado por el matemático y educador brasileño Ubiratan D'Ambrosio y hacen alusión al sentido étnico o contexto sociocultural, en el que se incluye lengua, costumbres, mitos y códigos de conducta, y que influye de forma importante en conceptos matemáticos relevantes como la numeración, la proporción o la clasificación.

¿Son las matemáticas ajenas a la cultura?

En un principio podríamos decir que las matemáticas han concluido un largo proceso, en el cual, podemos tener la certeza de comunicarnos matemáticamente con cualquier otra persona sin lugar a equívocos, gracias a una normalización y a una estandarización en la comunicación matemática. Es, por tanto, un conocimiento universal. Sin embargo, también tenemos presente que nuestra educación en las matemáticas está influida por la mentalidad de occidente, en la cual, las matemáticas son un compendio de conocimientos, realidades, teoremas y axiomas independientes de la realidad cultural con la que las matemáticas han sido caracterizadas en muchos momentos de su historia hasta consolidarse como lo que son ahora. Por ejemplo, la lógica nyaya, ya tratada en la India, ha seguido su propio camino.

Hay momentos en los que las matemáticas dependen del entorno, y de la cultura de sus gentes. Esta dependencia cultural, lejos de dividir, enriquece las matemáticas.

Por lo general, se ha asociado la geometría con los griegos, que se consagraron de una forma asombrosa en este campo, dando lugar a importantes teoremas y conceptos como los sólidos platónicos, razón aurea, Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, Postulados de Euclides. Sin embargo, en todas las épocas y civilizaciones, alrededor del globo, existieron personas creativas que contribuyeron a las matemáticas: Babilónicos, egipcios, mayas, persas, indios, árabes, incas, chinos, etc.

Brasil: Las matemáticas de la calle

Existen buenas razones para pensar que hay un tipo de matemáticas fuera de las escuelas, y es así como se inició a mediados de los años ochenta, un estudio en la ciudad brasileña de Recife (Carragher, T. et al., 1985). Ya no sólo es el tipo de matemáticas que hay en la calle sino la condición en la que se encuentran las personas que día a día hacen uso de ellas en sus actividades cotidianas. La ciudad ha recibido mucha inmigración de otras ciudades y regiones del país, que de alguna forma quiere prosperar, tener buenos trabajos.

Se identificaron cuatro necesidades en el día a día de Recife, en las cuales estas personas utilizan las matemáticas: Buscar una casa, arreglar los papeles para trabajar, buscar un trabajo, y adquirir bienes necesarios como, por ejemplo, comida.

En el estudio, se escogieron varios chicos en edad escolar, en sus respectivos puestos de trabajo, ya fuese comprando o ayudando a trabajar a sus padres, y se les pidió realizar una serie de cálculos. Por lo general los cálculos aritméticos son aprendidos en la escuela y son aprendidos como algoritmos y procedimientos, sin embargo cuando una persona sin conocimientos académicos se acostumbra a tratar en el comercio, crea sus propios algoritmos de cálculo.

Un cliente quiere comprar doce limones a un precio de cinco reales cada uno, y el chico realiza el cálculo en voz alta: Diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta mientras separa dos limones en cada cuenta. Tiene su propia forma de calcular.

Las conclusiones que se obtienen son realmente interesantes, y obligan a una reflexión, en cuanto a enseñanza matemática. Las conclusiones son que:

- Las escuelas han de ser más flexibles y permitir que los alumnos creen o escojan sus propias formas de hacer cálculos aritméticos.
- Se sobrevalora el cálculo escrito, en detrimento del cálculo mental.
- El entorno puede ser fundamental para catalizar las actividades matemáticas. Los problemas emanan directamente de las necesidades de ese entorno.

Etnomatemáticas en Nepal



Fig: Shanai

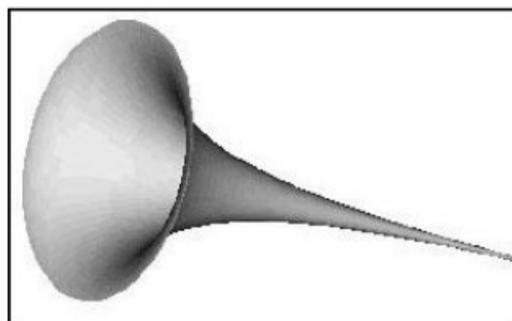


Fig: Pseudo-sphere.

Ilustración 14: Shanai comparado con una pseudoesfera o tractriz de revolución. Temples in Nepal (Neopaney, K.N., Shrestha, N., 2006, p. 2)

Nepal es un país del Himalaya con una profunda conexión con el mundo religioso y las tradiciones ancestrales. Por tanto, las matemáticas no permanecen ajenas a esta realidad, diseñándose actividades que muestren tal conexión, facilitando el aprendizaje de diversos conceptos importantes en Secundaria.

Aunque el modelado de un Shanai (trompeta ceremonial famosa en el país) se aproxima a una pseudoesfera, que es un concepto geométrico avanzada para lo que es el nivel de secundaria, sí puede permitir a un alumno de secundaria explorar conceptos como los sólidos o figuras de revolución, que se generan girando una figura plana alrededor de un eje.

También puede servir, en el contexto de las etnomatemáticas, para explicar lo que es una asíntota.

Etnomatemáticas en Sudáfrica

Antes de centrarnos en Sudáfrica, hay que decir que la situación de las etnomatemáticas se hace particularmente intensa en el continente africano. Durante el siglo XX, fruto de la descolonización, la mayoría de naciones del continente obtuvieron su independencia. Las identidades nacionales que emergían tenían un fuerte carácter emancipatorio. Pretendían acabar con el sometimiento cultural que habían creado sus antiguas metrópolis occidentales.

Esto influye en la enseñanza, y particularmente en la enseñanza de las matemáticas, pues aparecen elementos como el conflicto y el diálogo, y de nuevo hemos de situarnos en el marco sociocultural del constructivismo para cubrir las necesidades educativas, principalmente en entornos con un gran sentido de la comunidad, pero que demandan una educación de calidad. No solamente puede imponerse el conocimiento por sí mismo, sin tener presente aspectos sociales y afectivos, influenciados fuertemente por las culturas locales, que en muchos aspectos son únicas en el continente africano.

En Sudáfrica, el régimen del apartheid no ayudó precisamente al enfoque etnomatemático, pues la cultura se identificaba con la raza, y esto hacía que el término *etnomatemáticas* se asociase a la división y a la tensión racial, como fuente del problema, y no como parte de la solución.



Ilustración 15: Mural. Ndebele house painting – South Africa (Myartistslist, 2015)

Esto supuso una adaptación a la hora de crear actividades matemáticas en las escuelas del país. Se utilizaron juegos y objetos que no tuvieran una asociación directa con aspectos culturales de una etnia en particular, sin embargo, los cambios políticos de las últimas décadas han hecho abandonar muchos de estos prejuicios.

Sudáfrica, debido a su industrialización, también ha cambiado la forma de enseñar las matemáticas, y en determinadas escuelas, principalmente urbanas, hay una predilección por el aspecto formativo que se complementa con pruebas y tests, como parte de un proceso educativo que finaliza en los grados superiores y la enseñanza técnica. Los docentes, al igual que sus iguales occidentales o asiáticos, prestan mucha atención al aspecto propedéutico de las pruebas de acceso y validación de los estudios de enseñanza media.

Sin embargo, Sudáfrica es un país de muchos contrastes, y la enseñanza matemática no escatima en recursos. Nos vamos a centrar, por la particularidad de pueblos y poblados, en actividades que, como ocurre en otros casos, son fruto directo del contexto cultural, así como del sentido de comunidad, existente en muchas partes de África:

- Malepa o el juego de las figuras hechas con cuerda. Hay infinidad de combinaciones y anudamientos de una cuerda que podemos hacer con los dedos: redes, mallas, etc. Estas configuraciones, además de necesitar una exploración previa, y de una habilidad manejando la cuerda, son el inicio adecuado para una lección de geometría.
 - Triángulos, cuadriláteros (específicamente, cuadrados y rectángulos). Se muestran y se identifican. También se pueden identificar congruencias entre ellos.

- Relación entre las figuras mostradas en la cuerda y generalizaciones. Por ejemplo, si con la cuerda obtenemos una serie de triángulos y una serie de cuadriláteros, se puede demostrar, por ejemplo que siendo “x” los cuadriláteros e “y” los triángulos, entonces $y=2x+2$.
- Simetría. Con la cuerda se puede mostrar qué es una simetría axial, qué es una simetría central, toda clase de reflexiones, traslaciones con repetición o frisos.

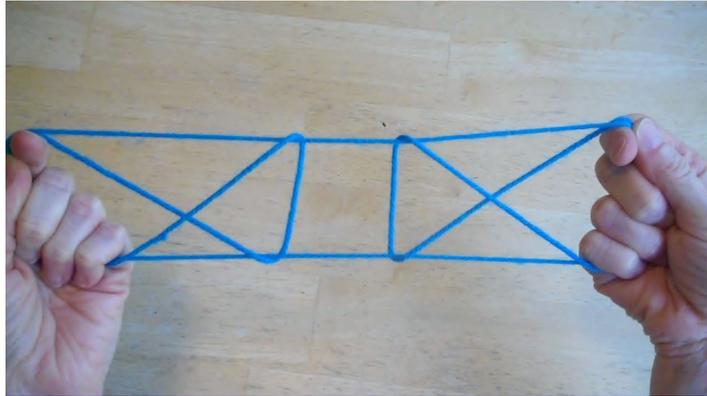


Ilustración 16: Figuras hechas con cuerda para enseñar geometría. Open the Gate string figure - step by step EASY! (MomsMinivan, 2014)

- Arquitectura, lugares, juegos e iconos nacionales. Son otro tipo de actividades, que no necesitan la manipulación de objetos, y que han demostrado ser didácticas.
 - Murales de Ndebede. Se trata de una localización que impresiona por los murales que adornan sus casas y edificios. Es también interesante en cualquier actividad de geometría, pues estos murales están repletos de figuras con combinaciones sorprendentes.
 - Combinatoria y estrategias con la Morabaraba, que es un juego de tablero, y piezas.
- Proyectos con los coches hechos de alambre. Otra actividad muy popular entre los jóvenes sudafricanos, en muchos poblados, es confeccionar coches de alambre. Además de tener que crear formas convenientes con los alambres -usando herramientas si fuera preciso- el grupo que crea el coche no ha de descuidar los aspectos matemáticos de su proyecto.
 - ¿Cuánto alambre tenemos que usar? Según las partes del coche, su geometría, el alumno relaciona área que abarca el hilo de alambre con su perímetro. Además, al ser el coche simétrico con respecto a un plano perpendicular al suelo, se contemplan aspectos muy didácticos como la simetría. Los alumnos crean sus coches y debaten

sobre la conveniencia de usar una forma geométrica u otra; de qué forma se puede armonizar el conjunto, ahorrar material, peso, etc.

- También se tiene en cuenta la tracción de estos vehículos, utilizando ruedas de latón, procedentes de cualquier lata. Se exploran cualidades de la circunferencia, de los ángulos, relacionando giro con desplazamiento lineal. Por ejemplo: ¿Cuántas vueltas darían las vueltas si el vehículo recorre 10 metros y las ruedas son de 6 centímetros de diámetro?

Microproyectos para la educación intercultural en Europa

Tal como se ha visto en varios países, tanto europeos como del resto del mundo, existe cada vez más diversidad en las aulas. Europa, en los países occidentales, por la llegada de inmigrantes; y en los países del este por ser lugares de convivencia durante siglos, no puede prescindir de las situaciones interculturales en la escuela.

Los objetivos educativos no se satisfacen si un docente opta por transmitir las matemáticas de una forma monolítica, estandarizada. Se tiene que atender a la diversidad.

El enfoque en microproyectos se hace interesante para el aprendizaje de las matemáticas. Un microproyecto es un plan de trabajo, dinamizado por el docente, elaborado por pequeños grupos de alumnos. Estos microproyectos son transversales, culturalmente relevantes, con potencial en el descubrimiento científico, y que desarrollan la competencia matemática.

El proyecto IDMAMIM (Innovación en Didáctica de las Matemáticas con apoyo tecnológico para aulas con alumnos inmigrantes) trata de demostrar la eficacia de de estos microproyectos, involucrando a profesores, alumnos e investigadores. Este proyecto se marca dos objetivos:

- Poner en relevancia las necesidades de los profesores de matemáticas que trabajan en contextos multiculturales.
- Satisfacer dichas necesidades, aportando material y apoyo didáctico, en soporte digital.

Implementar la educación matemática intercultural en España

Desde hace tiempo, las aulas en España se han vuelto heterogéneas, y los alumnos tienen diferentes orígenes culturales. Si queremos ejercer una buena labor educativa en matemáticas hemos de tener en consideración algunos aspectos:

- Favorecer la introducción de elementos fuera de la escuela, y así brindar a los alumnos que no están familiarizados con la cultura escolar la posibilidad de aprender matemáticas, como los demás.

- Conocer las matemáticas desde el punto de vista de las otras culturas; cómo razonar, cómo realizar operaciones. También hay que escoger los modelos matemáticos adecuados.
- Finalmente, el docente ha de lograr gestionar correctamente el aula, sus conflictos, sus diferentes opiniones, para conseguir un aprendizaje provechoso de las matemáticas, a la vez que garantiza la compatibilidad cultural.

El currículo tiene una naturaleza conservadora y resiste los cambios, así como las contingencias que se pueden dar en el aula. A pesar de que cada alumno desarrolla un nivel de competencia matemática distinta, es el conflicto entre los significados, influidos por la cultura de cada alumno, lo que afecta al rendimiento de cada uno y del conjunto en total.

En ese sentido se podría facilitar la enseñanza de las matemáticas otorgando importancia a lo que carece de significado, como son los procedimientos; pero entonces no estaríamos enseñando matemáticas.

Tomemos como ejemplo un grupo de alumnos que provienen de un entorno rural, y otro que proviene de un ambiente urbano. En una actividad sobre orientación utilizando brújula, un sistema de referencia, o un mapa en coordenadas, probablemente cada grupo reaccionará de manera distinta.

Las ideas matemáticas pueden dotarse de diferentes significados y cada cultura tiene los suyos propios. El profesor de matemáticas tiene que aprovechar esta diferencia de significados para conseguir que sus alumnos desarrollen sus competencias y aprendan eficazmente. La participación y la aportación de cada alumno es primordial en las metodologías adoptadas. En todas las culturas existen actividades matemáticas comunes y éstas son contar, orientarse, medir, diseñar, jugar y explicar. Un eje vertebrador sería la resolución de problemas. Estos problemas serían variados, para que de esta forma se garantice que cada alumno pueda aportar, y por supuesto, aprender.

5. CONCLUSIONES

5.1. Conclusiones sobre la enseñanza matemática en Europa

Según el informe de la comisión Europea (Eurydice, 2011), las matemáticas son consideradas una materia fundamental, tanto en la escuela como en la sociedad en general. Se hace, por tanto, necesario cuidar y potenciar numerosos aspectos de la educación matemática. Los retos a los que nos enfrentamos son muy variados.

Por una parte, el continente está adaptándose, al igual que el resto del mundo, al empleo de la tecnología, de la cooperación multidisciplinar que cambia el orden social y económico; por otra, Europa vive una época de mayor apertura, favoreciendo escuelas integradoras, que respetan las diferentes corrientes y culturas, dentro y fuera del continente.

Objetivos Eurydice

1) Trasladar el nuevo currículo de las matemáticas a la práctica de aula. Todos los países han actualizado sus currículos y la enseñanza, de estar orientada a objetivos, ha pasado a estar orientada a competencias, que son elementos integrales, presentes en todos los aspectos de la enseñanza, incluyendo las matemáticas. Se cuida más el aspecto pedagógico que tiene en cuenta el resultado del proceso de aprendizaje, evidenciando su flexibilidad como gran aspecto positivo. Sin embargo, a pesar de que todos los países europeos en los que hemos basado nuestro estudio ya han consolidado el aspecto competencial, todavía no se dejan notar con excesivo impacto en las aulas, necesitando el profesorado un apoyo que provenga de organización e instituciones, respetando a la vez su autonomía pedagógica.

2) Aplicar diversos enfoques didácticos para dar respuesta a las necesidades de todos los alumnos. El marco teórico establece que las matemáticas pueden ser transmitidas correctamente si nos centramos en contextos concretos y no en metodologías concretas. Se ha visto en el caso de Kosovo, que las matemáticas estaban lejos de satisfacer las demandas del alumnado, produciéndose un desencanto por la asignatura, debido principalmente a su desconexión con la vida real. Un peso muy importante lo tiene la riqueza metodológica, y los currículos nacionales revisados tienen generalmente en cuenta esto. En el caso de Francia, en la norma también se propone una diversidad de actividades que sepan satisfacer estas necesidades, permitiendo un aprovechamiento de las inteligencias múltiples. La clave sería armonizar el aprendizaje del contenido matemático y el desarrollo de las actividades matemáticas.

Aunque el uso de las TIC, calculadoras y elementos auxiliares es cada vez más frecuente, no se ha establecido del todo su eficacia, principalmente por causa metodológica, pues su empleo no es tan frecuente como para aprovechar su potencial.

3) Uso eficaz de las herramientas de evaluación. Estamos ante uno de los puntos más relevantes en la educación matemática, como se ha ido constatando en múltiples ocasiones. Estas herramientas son más necesarias que nunca, principalmente en un nuevo enfoque competencial, de riqueza metodológica y de atención a la diversidad. La evaluación, en muchas ocasiones influye en lo que se enseña, y un claro ejemplo está en las pruebas finales, que continúan teniendo una presencia casi decisiva en los aprendizajes de aula o autónomos, como es el caso de Italia, y de gran parte de los países europeos.

Sin embargo, hay un aspecto de la evaluación que está inacabado o que no se suele llevar del todo a la práctica en la mayoría de países: la mejora de las herramientas de evaluación, información para el alumno sobre sus resultados, así como aumentar las pautas y directrices evaluadoras que aseguren el éxito del proceso educativo.

4) Luchar contra el bajo rendimiento, el fracaso escolar, potenciar los programas de apoyo. En muchos países de Europa hay una alarmante situación de bajo rendimiento que se ha agravado principalmente por las desigualdades sociales, ya sea por efecto de la economía o por la inmigración. Esta desigualdad se perpetúa ya no sólo por aspectos de la docencia o por la configuración del aula, sino que emana de las mismas familias, como pueden ser padres que no ayudan a sus hijos a hacer los deberes en casa. Como se ha dicho, también el docente influye, y para abordar situaciones de bajo rendimiento se necesita una cierta cualificación.

Claro ejemplo es la solución propuesta por Irlanda, con su plan DEIS para la recuperación de las matemáticas en alumnos que tengan bajo rendimiento y desmotivación. Una clave fundamental es establecer unas bases en el aprendizaje de las matemáticas desde la educación infantil y primaria, como así se ha demostrado en Singapur, pero sigue siendo insuficiente la orientación del profesorado, a nivel europeo, para llevar a cabo este tipo de programas de mejora del rendimiento.

5) Mejorar la motivación y la implicación de los alumnos a través de iniciativas específicas. Muchos resultados en las evaluaciones externas, así como los obtenidos en investigaciones independientes señalan una influencia importante de la motivación, actitud y confianza en uno mismo, como clave de éxito para el rendimiento matemático. Hay iniciativas serias al respecto en Finlandia y Austria. Por lo general son los alumnos con talento los que suelen acompañar las matemáticas de actividades extraescolares específicas y quizá no se tienen las matemáticas tanto en cuenta cuando se quiere proporcionar enfoques más innovadores e interesantes de la enseñanza

como es el aprendizaje basado en proyectos, que permiten una mayor conexión de los alumnos con los contenidos de la materia y su utilidad dentro de un contexto más amplio.

Otro aspecto social que ha afectado mucho a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la brecha entre géneros, debida principalmente a la actitud que se tiene hacia éstas, pues tradicionalmente las matemáticas han sido apartadas de la mujer. Sin embargo, según las investigaciones, no hay diferencias de rendimiento en matemáticas en hombres y mujeres. Es por eso que se han lanzado campañas motivadoras, y que aseguren una autoconfianza en las alumnas durante su tránsito educativo, así como campañas a nivel nacional e internacional, dirigidas a toda la población.

6) Ampliar el repertorio didáctico del profesorado. Esto también incluye la flexibilidad. Una gran parte del éxito educativo de las matemáticas en Finlandia es la autonomía que se concede al profesor, así como su enriquecimiento pedagógico y didáctico que evite que cualquier alumno se quede descolgado. Un buen docente tiene que saber motivar a todos los alumnos, incluso a quienes tienen el menor rendimiento. La cualificación del docente de primaria es crucial en el proceso de enseñanza, para que germinen unas buenas matemáticas así como una adecuada actitud en el alumno hacia ellas.

Sin embargo, las nuevas metodologías y las nuevas posibilidades profesionales, que harán uso de las tecnologías como nunca se ha hecho, obliga a una formación continua del profesorado. En el caso de Portugal, la armónica implementación de las nuevas tecnologías, junto con la preparación del profesorado que incluye toda clase de orientación y herramientas de evaluación, ha conseguido resultados muy positivos en la enseñanza de las matemáticas. También se ha incrementado la cooperación y la creación de portales con información y recursos que permitan una enseñanza de calidad.

7) Promover políticas basadas en la evidencia. Aunque determinados escenarios de enseñanza y aprendizaje están aún lejos de implementarse en muchas aulas de nuestro país, no significa que éstas no existan, y que no se haya demostrado que funcionan. Hay prácticas docentes de éxito que han sido recogidas y analizadas. Es responsabilidad de quien tiene buenas prácticas docentes, hacerlas propias, perfeccionarlas y difundirlas. Los centros de formación del profesorado son los lugares más adecuados para discutirlos, aunque no hay que menospreciar la formación continua, especialmente en los docentes con más experiencia.

Los futuros retos del profesor de matemáticas en Europa

Existen varios problemas de base, y uno de ellos es no lograr adaptarse adecuadamente a las nuevas metodologías, ya sea por propia iniciativa docente, o por no haber recursos suficientes.

Sin embargo, hemos visto que la falta de recursos no es un impedimento a la hora de hacer matemáticas, por ser ésta una de las materias menos exigentes en lo material; además, su posición central en el currículo, estimula su empleo junto a otras disciplinas, por ejemplo en proyectos interdisciplinares.

A pesar de que el apoyo educativo por medio de recursos tecnológicos ha aumentado de una forma notable, la educación matemática europea sigue apoyándose en la buena práctica de la docencia, como una garantía de éxito.

- El docente ha de disponer de una gran cantidad de recursos a su alcance, que se logran con una formación completa, principalmente en cuanto a evaluación, así como una práctica adecuada, con una correcta tutela y orientación. Esta característica es común en los países que han alcanzado un éxito educativo.
- En las matemáticas es muy importante el conocimiento del contenido, requiriendo una cuidadosa preparación, pero su didáctica ha de adaptarse a los nuevos escenarios que se contemplan, y uno de ellos es la resolución de problemas, como motor de las actividades matemáticas, ya presente en gran cantidad de países.
- No puede faltar la dimensión social del docente, que ya no puede prescindir de otras opiniones, que evalúen su labor, de igual a igual. La implicación en actividades multidisciplinares, y también la convivencia de varias culturas y puntos de vista no hace para nada desdeñable la figura de un docente comunicativo, honesto y conciliador.

Matemáticas en ambientes de diversidad social y étnica

Algunos escenarios son positivos y otros son prometedores. Portugal en el aspecto social ha conseguido reducir la desigualdad educativa, y esto repercute en una mejora de la enseñanza de las matemáticas. Otros países protegen la diversidad, e incluso se sobreponen de conflictos étnicos como así ha sido en Kosovo.

Los diferentes puntos de vista que tienen las culturas en cuanto a matemáticas no crean división, sino que crean más fuerza; grandes posibilidades didácticas. Se ha constatado la necesidad de que las matemáticas se articulen con una diversidad de actividades.

En las matemáticas no sólo están los conceptos, sino también están los significados, y su universalidad las hace familiares para cualquier alumno de cualquier procedencia cultural. Esto es de gran ayuda para la labor docente, que debe saber aprovechar las nuevas circunstancias para enseñar buenas matemáticas.

5.2. Conclusiones sobre la enseñanza matemática en los países con mejores resultados

Todos los países que hemos abordado en el capítulo de alto rendimiento en educación matemática tienen aspectos en común y que parecen convenientes para que las matemáticas sean eficaces en el aula; sin embargo, esta interpretación necesita una cuidada lectura, porque el contexto, ya sea social o cultural, no es extrapolable.

En cuanto a contenido matemático, los alumnos tienen acceso a unas matemáticas, tanto vocacionales como académicas, acorde con sus preferencias y mejor desempeño. No sólo es un factor decisivo el poder de elección; también está la correcta orientación y tutela que se le debe dar al alumno. Se ha comprobado que se valora mucho la enseñanza universitaria, y que las matemáticas, lejos de entorpecer, complementan esta formación previa, según el camino escogido por el alumno.

En lo metodológico, queda claro que la resolución de problemas es una constante en los países con mejores resultados que proporciona actividades matemáticas interesantes. Se le da una dimensión empírica a una asignatura considerada tradicionalmente como puramente teórica y se otorga un lugar a la comprobación, a la experimentación, a la reformulación, que forman parte del método científico.

El libro de texto sigue siendo un elemento principal en las clases de matemáticas, pero no llega a ser determinante, en el sentido estricto de la palabra, pues en Corea del Sur no profundizan en los problemas matemáticos, aunque esté muy valorado como elemento cultural primordial asociado a la sabiduría e infalible. Aún así, el profesor de secundaria sabe sacar partido de las actividades del libro, y como se ha visto en Finlandia, se estimula la creatividad del docente para que cree sus propias actividades.

No sólo en Secundaria se activa la capacidad investigadora del alumno, sino que también se puede habituar al alumno a despertar su curiosidad por la materia, como así ocurre en Canadá. Hemos aprendido de Singapur que se puede ir más allá, cuando se está dotando lo puramente aritmético y algebraico de un sentido visual que es muy acertado y que hace madurar conceptos tan importantes como cantidad y relación en edades muy tempranas, y que prepara el camino para actividades de demanda creciente, decisivas en el desarrollo de la competencia matemática de la mayoría de alumnos.

En cuanto a evaluación, vemos que sólo se consigue el éxito en la educación matemática cuando el docente dispone de herramientas e información, tanto en lo sumativo, como en lo formativo; o para fines de diagnóstico. La evaluación es un núcleo muy importante en el currículo

y se tiene que hacer convenientemente, de una forma continua, armónica, según circunstancias del alumno en particular o del aula (y su actividad) en general. Esa abundancia de herramientas garantiza el aprendizaje del alumno. También hay posibilidades de autoevaluación de los alumnos, como se ha comprobado en Corea del Sur y Canadá.

Sin embargo, también hemos de tener en cuenta que los alumnos, especialmente los procedentes de países orientales, son habituados a las pruebas y a los tests formales, ya desde muy pequeños y que están inmersos en sociedades industrializadas de alta competencia. En este sentido, tenemos que hacer la reflexión de si esto realmente puede ser conveniente importarlo en nuestras aulas.

La preparación del profesor de matemáticas en los países de alto rendimiento está acorde con los resultados. La alta cualificación y la profundidad de los conocimientos no solo bastan para alcanzar la excelencia, sino que también se cuida mucho la figura del profesor en prácticas. No sólo el profesor es evaluado, y no sólo responde a las contingencias que se le cruzan por dificultades e inexperiencia; también está en contacto directo con el resto de la comunidad docente, y dispone de numerosos apoyos.

Corea del Sur es un país muy valorado en los informes PISA y TIMSS, y su sistema educativo, así como el tratamiento que se hace de las matemáticas en sus aulas es motivo de estudio por parte de muchos investigadores y organizaciones. Una de las claves podría ser la responsabilidad que tiene el alumno en los últimos cursos, al estar sometido a una presión, y por encontrarse inmerso en una sociedad de alta competencia, todo ello unido a una flexibilidad de las matemáticas que, como se ha visto en su currículo, permite una extensiva especialización del alumno, dotándole de conocimientos de matemática discreta para las carreras tecnológicas, de matemáticas orientadas a la estadística para las carreras de economía o ciencias sociales, o de una profundización del cálculo diferencial, que sería idónea para las carreras de ciencias e ingeniería, de alta demanda en el mercado laboral del país.

Las consideraciones metodológicas, aunque se están procurando mejorar, gracias a la innovación docente, no tienen tanto peso como deberían, aunque sí es cierto que el profesorado ha de tener vocación y una formación por encima de la media. La realidad social y económica del país podría ser decisiva en los excelentes resultados que arroja Corea en cuanto a resultados.

Otra faceta positiva en la educación coreana es el papel que tienen los alumnos para valorar su propia educación, la enseñanza de sus profesores, y la marcha del centro. Este detalle de la evaluación es la que más peso tiene, en los países de la OCDE.

5.3. ¿Qué podemos hacer nosotros?

Según hemos ido comprobando en la lectura de este documento, la educación matemática en secundaria se ha vuelto muy importante, y en algunos casos, se ha vuelto incluso vital para el sustento de algunos países.

La cultura y el contexto donde se ubica el aula tiene un peso muy importante, pero también se tiene en cuenta que las aulas han cambiado y, por ser la educación inclusiva, también se han hecho más heterogéneas. El docente no sólo enseña, sino que adapta su enseñanza atendiendo a la diversidad; desde alumnos con necesidades educativas especiales, pasando por alumnos que requieren un apoyo educativo, como podrían ser alumnos con altas capacidades; y también alumnos que manifiestan aspectos de otras culturas, por ser inmigrantes o tener padres inmigrantes.

Los territorios y la desigualdad social

España es un país de contrastes, por ejemplo, entre el norte y el sur. Somos un país multicultural, en el que cada región o autonomía tiene una idiosincrasia. Aunque la educación ha seguido un camino común, acordándose una legislación nacional, reglada e influida por las corrientes en la educación matemática, en el ámbito europeo e internacional, se justifica una descentralización que pueda atender algunos aspectos regionales, y proporcionar una visión de las matemáticas más integral.

Aunque estos aspectos regionales e incluso locales son muy valiosos, fomentando una escuela que está en sintonía con el entorno, hemos de recordar que la desigualdad en un país no conduce a nada bueno. Italia, por ejemplo, tiene grandes diferencias entre el norte y el sur; y -peor aún- Israel ha alcanzado resultados mucho peores en educación matemática debido a la segregación, por clases sociales, y los diferentes estilos educativos entre la población árabe y judía; aunque también se ha apuntado a falta de disciplina que provoca desmotivación y malogra la capacidad de autoaprendizaje en los alumnos.

En cambio, hay países multiétnicos que han sabido aprovechar sus particularidades regionales para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, como así ha sido en Canadá, o en Sudáfrica. Una correcta evaluación de los centros, una educación que tiene en cuenta múltiples puntos de vista, y un currículo justo y equilibrado, que no tiene en consideración el origen sociocultural del alumno, parece ser una clave para conseguir buenos resultados.

Según lo constatado en Portugal y en Finlandia, el presupuesto educativo sí incide en la calidad de la enseñanza, porque permite alcanzar la necesaria igualdad que haga progresar los resultados educativos.

La gran extensión y diversidad del conocimiento matemático es una ventaja y no un inconveniente

La matemática es un conocimiento extenso, que se ha ido recopilando, que ha sido objeto de investigación y que se ha formalizado, desde los albores de la humanidad, en cualquier parte del globo. Es también un conocimiento que ha servido para comprender el mundo, tanto en lo físico como en lo social, siendo parte activa en toda clase de actividades de investigación. Sirve de herramienta tanto en las situaciones cotidianas más insignificantes, como en los grandes proyectos de ingeniería espacial.

Muchos países, han hecho que los alumnos estén altamente motivados desde la educación primaria, haciendo de las matemáticas algo creativo e incluso divertido. Un gran defecto que se ha observado en el aprendizaje clásico de las matemáticas ha sido pretender relegarlas a un montón de compartimentos estancos, con procedimientos específicos de cálculo, convirtiéndolas en una materia rutinaria, larga y tediosa; ignorando su potencial para comprender lo que nos rodea desde el primer momento.

Hemos visto, en algunos currículos, que se ha apostado por especializar las matemáticas en secundaria superior, como una preparación para los cursos universitarios, que la dotan de una dimensión práctica y mejor especialización; pero esto no es suficiente si el alumno no adquiere una actitud positiva con las matemáticas en el primer ciclo de secundaria, como conocimiento que construye y también que resuelve problemas. En no pocos países las matemáticas también son un eje fundamental para los alumnos que escogen humanidades.

Riqueza metodológica y buenas herramientas de evaluación

Cada vez se ponen más actividades en marcha. Hemos visto en Singapur cómo la resolución de problemas es el eje vertebrador en el que construir las matemáticas. Es un punto en común que comparten más países como Canadá, Francia, Corea del Sur, etc.

También, como hemos visto en Canadá, se puede incluir las matemáticas en proyectos que podrían dar excelentes resultados.

Se afirma que una correcta evaluación, así como el conocimiento que tiene el docente de las herramientas evaluadoras, son beneficiosos ya no sólo a corto plazo en el entorno de aula, sino también a largo plazo, pudiendo aprender el sistema de enseñanza de sus propios errores.

¿Las reformas educativas sirven de algo? Sí, cuando son respaldadas

Portugal, a pesar del mal de sus constantes reformas educativas, al igual que padece España, y de haber tenido unos años de dura crisis económica (2011-2014) ha experimentado un milagro en

los resultados de sus alumnos, especialmente en Lengua y Matemáticas, todo gracias a una mayor inversión en las instalaciones, una mayor disciplina en las aulas, una mayor atención a los alumnos que pudieran tener un problema en el aprendizaje.

Los profesores cobran menos salario y padecen la misma precariedad que en el caso español, pero en general son más respetados, y el país continúa su ascenso en las evaluaciones PISA. Los alumnos de décimo año (secundaria en Portugal), por sí solos, sin contar con un promedio con el resto de cursos, serían los segundos del mundo, en Ciencias, tras Singapur.

Una amplia comunidad educativa y un apoyo de los medios

Las matemáticas no sólo se enseñan en el aula, se enseñan durante toda la vida. Tenemos en todo momento un contacto con las matemáticas que nos hacen tomar decisiones basadas en medidas, o estimaciones. El profesor de matemáticas hace una labor muy importante, pero si las matemáticas no salen del aula, de poco sirve.

Gracias a las nuevas tecnologías el *blended learning* o enseñanza semipresencial, da una capacidad de autonomía en el alumno. En algunos países se ha adoptado para las matemáticas, reservándose las actividades de mayor demanda cognitiva para el aula. Una conveniente red educativa, y sobre todo una buena comunicación entre instituciones y docentes, puede ser muy beneficioso.

Los medios de comunicación, y ahora lo que son las redes sociales, juegan un papel importante para la difusión de las matemáticas. Hemos visto cómo en varios países se cuida el aspecto divulgativo. En Portugal, Rogério Martins presenta una serie amena sobre las matemáticas, explicando sus conceptos más básicos y avanzados, de una forma muy didáctica y con toques de humor. Esta serie ha recibido premios de prestigio y se emite en varios países. En el Reino Unido, la parrilla televisiva está repleta de series y documentales sobre matemáticas.

Incluso en Argentina, con la serie *Alterados por Pi*, se ha procurado que las matemáticas, con entrevistas, juegos numéricos, planteamiento de problemas, etc. sean atractivas para el público, y de hecho así se ha logrado, tras años de emisión.

Aunque en nuestro país existan multitud de programas de contenido matemático, parece que aún se están dando pasos muy tímidos. El reconocimiento de las matemáticas, como un conocimiento popular y ameno, digno de difundirse y generalizarse, sigue siendo una asignatura pendiente.

Bibliografía

- Agencia Ejecutiva en el ámbito Educativo, Audiovisual y Cultural Eurydice (2011). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales* [pdf]. Recuperado de https://webgate.ec.europa.eu/fpfis/mwikis/eurydice/index.php/Publications:Mathematics_Education_in_Europe:_Common_Challenges_and_National_Policies el 23 de junio de 2017. ISBN 978-92-9201-287-8
- Beltramone J, Brun, V., Claude, F., Misset, L., Talamoni, C. (2006). *Déclic Maths - Terminale S Enseignement obligatoire et de spécialité - Livre de l'élève - Ed. 2006* [Libro de Texto]. Vanves, France: Hachette Education. ISBN 978-20-1135-432-7.
- British Columbia Ministry of Advanced Education (2017). *BC's New Curriculum* [Recurso Electrónico]. Consultado en <https://curriculum.gov.bc.ca/curriculum-info> el 24 de junio 2017.
- British Columbia Ministry of Advanced Education (2017). *BCCampus, OpenEd* [Recurso Electrónico]. Consultado en <https://open.bccampus.ca> el 24 de junio 2017.
- Broadcast For Schools (2017). *Mathematics Programmes* [Recurso Electrónico]. Consultado en <http://www.broadcastforschools.co.uk/site/Subject:Mathematics> el 25 de junio 2017.
- Bruno D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (nyaya). *Uno, revista de didáctica de las matemáticas* [Versión electrónica] 38. ISSN 1133-9853.
- Cambridge Assesment (2017). *Mathematics education, Estonia style* [Recurso electrónico]. Consultado en <http://www.cambridgeassessment.org.uk/insights/mathematics-education-estonia-style/> el 23 de junio 2017.

- Carraher, T., Carraher D.W., Dias, A. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, 3(1) pp. 21-29. e-ISSN 2044-835X.
- Cheong, Y.K. (2002). The Model Method in Singapore. *The Mathematics Educator*, 6(2) pp. 47-64. ISSN 0218-9100.
- Conceição, A., Almeida, M. (2017). Matematicamente Falando 8 – 8º Ano [Libro de texto]. Oporto, Portugal: Porto Editora. ISBN 978-989-647-899-5.
- D' Ambrosio, U. (2001). *What is ethnomathematics, and how can it help children in schools?* National Council of Teachers of Mathematics.
- Da Ponte, J.P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39 pp. 419–430.
- Dymel, J., Gałązka, K., Kordos, M. et al. (2012). *Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki* [pdf]. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji ORE. Consultado en http://static.scholaris.pl/89/20150505_5548aeb2217a5/jak_pracowac_z_uczniem_zdolnym_poradnik_nauczyciela_matematyki_red_m_mikolajczyk.pdf el 16 de junio de 2017. ISBN 978-83-62360-03-1.
- European Mathematical Society (2000). *Reference levels in School Mathematics. Education in Europe. National Presentation Society: POLAND* [pdf]. Consultado en https://www.emis.de/data/projects/reference-levels/EMS_POLAND.pdf el 12 de junio de 2017.
- Finish National Board Of Education (2003). *National Core Curriculum for upper secondary schools* [pdf]. Consultado en http://www.oph.fi/download/47678_core_curricula_upper_secondary_education.pdf el 15 de junio de 2017. ISBN 978-952-13-3347-7.

- Foundation for the Development of the Education System, Polish Eurydice Unit (2014) *The system of education in Poland* [pdf]. Warsaw, Poland: Foundation for the Development of the Education System, Mokotowska. Consultado en http://www.fss.org.pl/sites/fss.org.pl/files/the-system_2014_www_0.pdf el 12 de junio de 2017. ISBN 978-83-64032-38-7.
- Gardner, W. (17 de octubre 2016). Why Japanese Students excel at mathematics. *The Japan Times* [Diario Electrónico]. Consultado en <http://www.japantimes.co.jp/opinion/2016/10/17/commentary/world-commentary/japanese-students-excel-mathematics/> el 11 de junio 2017.
- Gómez-Chacón, I., Garbin, S., Planchar, E. (2005). La formación del profesorado en educación matemática. Cooperación entre Europa y América Latina. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas* [Versión electrónica] 38. ISSN 1133-9853.
- Gooya, Z (2007). *Mathematics Education and Teacher Education in Iran* [ppt]. Sahid Beheshty University of Tehran. Consultado en <https://kenanaonline.com/files/0047/47641/%25D8%25A7%25D9%258A%25D8%25B1%25D8%25A7%25D9%2586.ppt> el 16 de junio de 2017.
- Gripenberg, M., Lizarte E.J. (2012). El sistema educativo de Finlandia y su éxito en la prueba PISA. *Journal for Educators, Teachers and Trainers*, 3 pp. 14-24. ISSN 1989 – 9572.
- Hagemann, M., Piroška Hugyecz, P. (10 de marzo, 2016). Poland Is Pioneering the World's First National Open Textbook Program. *Open Society Foundations* [Diario electrónico]. Consultado en <https://www.opensocietyfoundations.org/voices/poland-pioneering-worlds-first-national-open-textbook-program> el 12 de junio de 2017.
- Haggarty, L (2002). *Teaching Mathematics in Secondary Schools: A Reader*. London, United Kingdom: Psychology Press. ISBN 978-04-15260-69-5.

- Hodgen, J., Pepper, D., Sturman, L., Ruddock, G (2010). *An international comparison of upper secondary mathematics education. An international comparison of upper secondary mathematics education. 24 country profiles*. London, United Kingdom: Nuffield Foundation. Consultado en http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Country_profiles_outlier_NuffieldFoundation.pdf el 27 de junio 2017. ISBN 978-0-904956-81-8.
- Hong, D.S., Choi, K.M. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics* [Versión Electrónica] 85(2) pp. 241–263. e-ISSN 1573-0816.
- International Study Center, Lynch School of Education, Boston College, and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (2015). *TIMSS 2015 Encyclopedia* [Recurso electrónico]. Consultado en <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/encyclopedia/> el 20 de junio de 2017.
- Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa INDIRE (2016). *PON Matematica (m@t.abel)* [Recurso electrónico]. Consultado en <http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/> el 23 de junio de 2017.
- Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione INVALSI (2017). Consultado en <http://www.invalsi.it/>
- Krzywacki, H., Pehkonen, L., Laine, A. (2014). *Promoting mathematical thinking in finnish mathematics education*. University Of Helsinki. ISBN 978-94-6300-776-4.
- Kwon, O. N. (2002). *Mathematics Teacher Education in Korea* [pdf]. Seoul National University. Consultado en <http://matrix.skku.ac.kr/For-ICME-11/ICME/cp9.pdf> el 23 de junio de 2017.
- Lamberti, L., Mereu, L., Nanni, A. (2008). *Lezione di Matematica 1 per il triennio* [Libro de texto]. Ostiglia, Italia: Rizzoli Education. ISBN 978-88-4514-470-7.

- Laridon, P., Mosimege, M., & Mogari, D. (2005). Ethnomathematics research in South Africa. In R. Vithal, J. Adler & C. Keitel (Eds.), *Researching mathematics education in South Africa* pp. 133–164. Pretoria, South Africa: Human Sciences and Research Council.
- Lew, H. (2004). *Mathematics Education in Korea after TIMSS* [pdf]. Korea National University of Education. Consultado en <http://matrix.skku.ac.kr/For-ICME-11/ICME/cp1.pdf> el 23 de junio de 2017.
- Liceo Statale Ischia (2015). *Programmi Disciplinari a.s. 2015-2016* [Recurso electrónico]. Consultado en http://www.liceoischia.gov.it/index.php?option=com_content&view=article&id=786&Itemid=1422 el 24 de junio 2017.
- Liping, M. (2013). A Critique of the Structure of U.S. Elementary School Mathematics. *American Mathematical Society*, 60(10) [Revista electrónica]. Consultado en <http://www.ams.org/notices/201310/fea-ma.pdf> el 24 de junio 2017. ISSN 0002-9920.
- Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et de la Vie associative, République Française (2011). *Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011. Annexe: Classe terminale de la série scientifique. Classe terminale de la série économique et sociale et de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série littéraire* [pdf]. Consultado en <https://culturemath.ens.fr/sites/default/files/imagecache/286X266/terminale-ES-L-2012.pdf> el 24 de junio 2017.
- Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, République Française (2015). *Programmes pour les cycles 2,3,4* [pdf]. Consultado en http://cache.media.education.gouv.fr/file/48/62/7/collegeprogramme-24-12-2015_517627.pdf el 24 de junio 2017.
- Ministério da Educação, Governo De Portugal (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática A. Ensino Secundário, Cursos Científico-Humanísticos, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas* [pdf]. Consultado en

http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_a_secundario.pdf el 23 de junio de 2017.

Ministério da Educação, Governo De Portugal (2013). *Programa e Metas Curriculares*

Matemática, Ensino Básico [pdf]. Consultado en

http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf el 23 de junio de 2017.

Ministério da Educação, Governo De Portugal (2017). *Portal das escolas* [Recurso electrónico].

Consultado en <https://www.portaldasescolas.pt/> el 23 de junio de 2017.

Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca (2010). *Indicazioni nazionali riguardanti*

gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi

nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del

decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2,

commi 1 e 3, del medesimo regolamento [pdf]. Consultado en

http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf el 28 de mayo de 2017.

Ministry of Education and Research, Republic of Estonia (2016). *Estonia Results PISA 2016* [pdf].

Consultado en https://www.hm.ee/sites/default/files/pisa_2016_booklet_eng.pdf el 23 de junio 2017.

Ministry of Education, Singapore (2016). *Mathematics Syllabus Pre-University H1 Mathematics*

Implementation starting with 2016 Pre-University One Cohort [pdf]. Consultado en

<https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/pre-university-h1-mathematics.pdf> el 25 de junio 2017.

Ministry of Education, Singapore (2017). *Syllabuses. Sciences* [Recurso Electrónico]. Consultado

en <https://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences> el 23 de junio 2017.

- Ministry Of Education. Ontario, Canada (2005). *The Ontario Curriculum Grades 1-8, Mathematics* [pdf]. Consultado en <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math18curr.pdf> el 24 de junio 2017. ISBN 0-7794-8122-4.
- Ministry Of Education. Ontario, Canada (2008). *Guidelines for Approval of Textbooks* [pdf]. Consultado en http://www.trilliumlist.ca/files/Textbook_Guide_English_2008.pdf el 25 de junio de 2017. ISBN 978-1-4249-8531-9.
- MomsMinivan (2014). *Open the Gate string figure - step by step EASY!* [youtube]. Consultado en <https://www.youtube.com/watch?v=11omMUvluwQ> el 25 de junio 2017.
- Myartistslist (2015). *Ndebele house painting – South Africa* [jpg]. Consultado en <http://myartistslist.com/ndebele-house-painting-south-africa/> el 25 de junio 2017.
- National Research Council (2010). *Comparisons Between Mathematics Education in China and the United States* [Recurso electrónico]. Washington, DC: The National Academies Press. Consultado en <https://www.nap.edu/read/12874/chapter/2> el 24 de junio 2017.
- Neopaney, K.N., Shrestha, N. (2006). *Temples in Nepal* [pdf]. Kathmandu University. Consultado en <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbm9rdW1hdGh0cmFpbHxneDo0Y2Q1NDIyNWRkMmIxODZh> el 23 de junio 2017
- Núñez, A (2005). Experiencias en un centro educativo del Reino Unido. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas* [Versión electrónica] 38. ISSN 1133-9853.
- Olimpiada Internacional de Matemáticas (2017). *Resultados de la República Islámica de Irán 1985-2016* [Recurso electrónico]. Consultado en https://www.imo-official.org/country_team_r.aspx?code=IRN el 17 de junio de 2017.

- Oliveras, M.L (2005). Microproyectos para la educación intercultural en Europa. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas* [Versión electrónica] 38.
- Ontario Teachers' Federation (2017). *Useful links for mathematics* [Recurso electrónico]. Consultado en <https://www.otffeo.on.ca/en/resources/useful-links/mathematics/> el 25 de junio 2017.
- Ośrodek Rozwoju Edukacji ORE (2017). *Scholaris, Portal wiedzy dla nauczycieli* [Recurso Electrónico]. Consultado en <http://www.scholaris.pl> el 18 de junio de 2017.
- Paik, S. (2002). *Mathematics Curriculum in Korea* [pdf]. Seoul National University of Education. Consultado en <http://matrix.skku.ac.kr/For-ICME-11/ICME/cp2.pdf> el 23 de junio de 2017.
- Pang, J. (2002). *Design and Implementation of Korean Mathematics Textbooks* [pdf]. Korea National University of Education. Consultado en <http://matrix.skku.ac.kr/For-ICME-11/ICME/cp4.pdf> el 23 de junio 2017.
- Park, K.M. (1997). School Mathematics Curriculum in Korea. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 1(1) pp. 43–59. e-ISSN 2234-3008.
- Planas, N. (1997). Etnomatemáticas. Consultado en http://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/etnomatematicas_PROTEGIDO.pdf el 26 de junio 2017.
- Pepin, B., Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(5) pp. 158-175. e-ISSN 1863-9704.
- Población, A.J. (2015). Cine y matemáticas: Matemáticas en televisión. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas* [Versión electrónica] 69, pp. 100-101. ISSN 1133-9853.

- R. Ramanujam (2012). *Mathematics education in India– An overview* [pdf]. Chennai, India: Institute of Mathematical Sciences. Consultado en http://nime.hbcse.tifr.res.in/articles/01_Ramanujam.pdf el 22 de junio de 2017.
- Rezat, S. (2006). The structures of German mathematics textbooks. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 38 (6). e-ISSN 1863-9704.
- Rosa, M. & Orey, D. C. (2011). Ethnomathematics: the cultural aspects of mathematics. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 4(2) pp. 32-54. e-ISSN 2011-5474.
- Sánchez, C. (2016). Informe sobre la preparación en Cuba de docentes en matemáticas. Costa Rica: *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, 11(15) pp. 431-442. Consultado en <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/23950/24106> el 25 de junio 2017. ISSN: 1659-2573
- Sasso, L. (2012). *Nuova Matematica a colori 5* [Libro de texto]. Editorial Petrini. ISBN 978-8849417067.
- Singapore Math Inc. (2017). *Workbooks. Miscellaneous Exercise 1* [gif]. Consultado en https://www.singaporemath.com/v/vspfiles/assets/images/sp_nemt2_2.gif el 25 de junio 2017.
- Śliwowski, K., Grodecka, K (2013). *Open Educational Resources in Poland, Challenges and Opportunities*. Institute for Information Technologies in Education, UNESCO. ISBN 978-5-905385-12-4.
- Sociedade Portuguesa de Matemática (2017). *Isto é Matemática* [Recurso electrónico]. Consultado en <http://www.spm.pt/istoematematica/> el 25 de junio de 2017.
- Software Engineering (2014). *Japanese Multiplication simulation - is a program actually capable of improving calculation speed?* [png]. Consultado en

- <https://softwareengineering.stackexchange.com/questions/240404/japanese-multiplication-simulation-is-a-program-actually-capable-of-improving> el 25 de junio 2017
- Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas*. Barcelona, España: Crítica. ISBN 978-84-8432-369-3.
- Stitz, C., Zeager, J. (2013). *Precalculus version $[\pi] = 3$, Corrected Edition* [Libro de texto][pdf]. BCCampus, OpenEd. Consultado en <http://solr.bccampus.ca:8001/bcc/file/2fdb8a19-9f31-40fe-80e9-0a4d2dd4cc7a/1/szprecalculus.pdf> el 24 de junio 2017.
- Takahashi, A., Watanabe, T., Yoshida, M. (2008). *English Translation of the Japanese Mathematics Curricula in the Course of Study* [pdf]. Grades 1-9. Madison, NJ, USA: Global Education Resources L.L.C. Consultado en http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/Japanese_COS2008Math.pdf el 23 de junio 2017.
- Thaqi, X. (2005). El desarrollo de la educación en Kosovo. Algunos temas referentes a las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas* [Versión electrónica] 38 pp. 15-30. ISSN 1133-9853.
- The Ministry of Education Bureau for European Affairs and International Relations (1999). *The Portuguese Education System: The System Today and Plans for the Future* [pdf]. Consultado en http://www.ibe.unesco.org/International/ICE/natrap/Portugal_1.pdf el 23 de junio de 2017.
- Wang-Iverson, P., Myers, P., & WK, E. L. (2009). Beyond Singapore's mathematics textbooks. *American Educator*, 28-38 [Revista electrónica]. Consultado en <https://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/wang-iverson.pdf> el 24 de junio 2017.
- Weinglass, S. (2 de febrero 2017). Why Yoni and Yael can't do math. *The Times Of Israel* [Diario electrónico]. Consultado en <http://www.timesofisrael.com/why-yni-and-yael-cant-do-math/> el 18 de junio de 2017.