UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales y de la Matemática

Comparativa histórica del examen de problemas en la prueba selectiva al cuerpo de profesores de secundaria en Castilla y León.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Rubén Rodríguez Ballesteros

Tutor: Fernando Sanz Sánchez

Valladolid, Junio 2017

Índice general

1. Introducción **2**

2. Clasificación de los problemas por temas **4**

3. Convocatoria del año 2015 **11**
3.1. Contexto legislativo de la prueba. 11
3.2. Examen del año 2015. 16
3.2.1. Enunciado año 2015 17
3.2.2. Resolución. 19

4. Convocatorias transitorias de 2010 y 2008 **29**
4.1. Contexto legislativo. 29

5. Primeras convocatorias ordinarias por la Junta de CyL **32**
5.1. Contexto legislativo. 33
5.2. Examen año 2006. 35
5.2.1. Resolución. 37
5.3. Examen año 2004. 44
5.3.1. Resolución 46
5.4. Examen año 2002. 54
5.4.1. Resolución 56
5.5. Examen año 2000. 65
5.5.1. Resolución 67

6. Conclusiones **74**
6.1. Comparativa de los problemas de oposición a lo largo del tiempo. 74
6.2. Conclusiones sobre el tópico. 75
6.2.1. ¿Son los exámenes de ahora más fáciles que los de antes? 76

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo titulado "Comparativa histórica del examen de problemas en la prueba selectiva al cuerpo de profesores de secundaria en Castilla y León." tiene dos objetivos estrechamente relacionados con la educación.

Nuestro primer propósito será responder a la necesidad por parte de los futuros opositores de prepararse para la prueba oposición de la mejor forma posible. El mayor obstáculo que encuentran estos en su camino es la parte de problemas de la primera prueba. Sin duda alguna en dicha parte es en donde realmente se decide quién consigue acceder a las plazas (como dato, menos del 2 % supera esta primera prueba). En consecuencia, el primer objetivo de nuestro trabajo será hallanar el camino al futuro opositor para preparar dicha parte. Dado que los problemas son siempre relativos al temario, con la intención de dar una idea aproximada sobre cuáles son los tipos de problemas que aparecen con mayor frecuencia, los hemos clasificado por temas. También presentamos los problemas de las últimas convocatorias hasta el año 2000 resueltos. Para la resolución de la mayoría de ellos nos hemos basado en los libros de la academia Deimos. En varias ocasiones hemos utilizado el programa de representación GeoGebra para ilustrar los razonamientos gráficamente. En los casos en los que hemos proporcionado una resolución adicional o simplemente no aparecían resueltos en la bibliografía aparece convenientemente aclarado.

El segundo objetivo es establecer una comparativa de los problemas a lo largo del tiempo para poder responder al tópico de que los exámenes son cada día más fáciles. Lo que haremos será analizar cualitativamente cada convocatoria hasta el año 2000, año en el que el Gobierno de España transfiere todas las competencias en educación a la Junta de Castilla y León. En dicho análisis tendremos en consideración el contexto social y legislativo en el que tuvo lugar la prueba especificado los cambios importantes que ha habido en cuanto a la regulación legal. Hemos decidido ordenar las convocatorias en orden cronológico inverso puesto que es como mejor se percibe el cambio. La conclusión a la que llegaremos es a que, efectivamente en cuanto a contenidos los exámenes son más fáciles, pero lo que realmente está sucediendo es un cambio de dirección a valorar otros aspectos más relacionados con aprender a pensar.

Capítulo 2

Clasificación de los problemas por temas

En este capítulo describiremos primero la prueba de la fase de concurso oposición, para después centrarnos en la parte de problemas con el objetivo de buscar un criterio para catalogar los problemas que han aparecido en las distintas convocatorias pasadas.

La fase de concurso oposición tiene dos pruebas, de carácter eliminatorio y a su vez con dos partes cada una:

A) <u>Primera prueba</u>: prueba de conocimientos específicos de la especialidad. Consta de dos partes valoradas conjuntamente.

  A.1) Parte práctica: resolución de problemas relativos a conceptos y procedimientos relacionados con el temario.

  A.2) Parte escrita: desarrollo por escrito de un tema elegido por cada aspirante de entre los extraídos al azar por el tribunal.

B) <u>Segunda prueba</u>: prueba de aptitud pedagógica. Consta de dos partes valoradas conjuntamente.

  B.1) Presentación y defensa de una programación didáctica personal y de acuerdo con el currículo vigente en Castilla y León en el momento de publicación de la convocatoria.

  B.2) Presentación y exposición oral de una unidad didáctica escogida por cada aspirante de entre las extraídas por el tribunal.

Como nota, nos hemos basado en la prueba de 2015 dado que, aunque no todas las convocatorias sean iguales, es esperable que la futura convocatoria de 2018 sea muy similar a la de 2015. No obstante entraremos en detalle con las particularidades del contexto legislativo de cada convocatoria en sus correspondientes capítulos.

Nuestro siguiente objetivo será catalogar los problemas de oposición que han aparecido hasta ahora por bloques temáticos. Lo haremos de la siguiente manera: aunque cada convocatoria tenga una regulación legal distinta, una constante a lo largo de todas ellas es que se especifica que los problemas serán siempre relativos al temario de la parte escrita. Aprovecharemos esto para clasificar cada problema a través de los temas con los que esté relacionado.

Toda la documentación legal referente al temario de oposición esta disponible en el portal de educación de la Junta de Castilla y León. Es destacable que el temario fue publicado en el B.O.E. de 21 de Septiembre de 1.993 y sigue vigente desde entonces. Hubo intentos de cambiarlo en el año 2012, pero la ley salió a tan sólo 6 meses de que se celebrara la prueba de oposición, además hubo cambio de gobierno y dicha ley quedó derogada. Los títulos de los 71 temas aparecen listados a continuación:

1. Números naturales. Sistemas de numeración.

2. Fundamentos y aplicaciones de la teoría de grafos. Diagramas en árbol.

3. Técnicas de recuento. Combinatoria.

4. Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia.

5. Números racionales.

6. Números reales. Topología de la recta real.

7. Aproximación de números. Errores. Notación científica.

8. Sucesiones. Término general y forma recurrente. Progresiones aritméticas y geométricas. Aplicaciones.

9. Números complejos. Aplicaciones geométricas.

10. Sucesivas ampliaciones del concepto de número. Evolución histórica y problemas que resuelve cada una.

11. Conceptos básicos de la teoría de conjuntos. Estructuras algebraicas.

12. Espacios vectoriales. Variedades lineales. Aplicaciones entre espacios vectoriales. Teorema de isomorfía.

13. Polinomios. Operaciones. Fórmula de Newton. Divisibilidad de poliniomios. Fracciones algebraicas.

14. Ecuaciones. Resolución de ecuaciones. Aproximación numérica de raíces.

15. Ecuaciones diofánticas.

16. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouche. Regla de Cramer. Método de Gauss-Jordan.

17. Programación lineal. Aplicaciones.

18. Matrices. Álgebra de matrices. Aplicaciones al campo de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza.

19. Determinantes. Propiedades. Aplicación al cálculo del rango de una matriz.

20. El lenguaje algebraico. Símbolos y números. Importancia de su desarrollo y problemas que resuelve. Evolución histórica del álgebra.

21. Funciones reales de variable real. Funciones elementales; situaciones reales en las que aparecen. Composición de funciones.

22. Funciones exponenciales y logarítmicas. Situaciones reales en las que aparecen.

23. Funciones circulares e hiperbólicas y sus recíprocas. Situaciones reales en las que aparecen.

24. Funciones dadas en forma de tabla. Interpolación polinómica. Interpolación y extrapolación de datos.

25. Límites de funciones. Continuidad y discontinuidades. Teorema de Bolzano. Ramas infinitas.

26. Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Aplicaciones.

27. Desarrollo de una función en serie de potencias. Teorema de Taylor. Aplicaciones al estudio local de funciones.

28. Estudio global de funciones. Aplicaciones a la representación gráfica de funciones.

29. El problema del cálculo del área. Integral definida.

30. Primitiva de una función. Cálculo de algunas primitivas. Aplicaciones de la integral al cálculo de magnitudes geométricas.

31. Integración numérica. Métodos y aplicaciones.

32. Aplicación del estudio de funciones a la interpretación y resolución de problemas de la Economía, las Ciencias Sociales y la Naturaleza.

33. Evolución histórica del cálculo diferencial.

34. Análisis y formalización de los conceptos geométricos intuitivos: incidencia, paralelismo, perpendicularidad, ángulo, etc.

35. Las magnitudes y su medida. Fundamentación de los conceptos relacionados con ellas.

36. Proporciones notables. La razón áurea. Aplicaciones.

37. La relación de semejanza en el plano. Consecuencias. Teorema de Thales. Razones trigonométricas.

38. Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones.

39. Geometría del triángulo.

40. Geometría de la circunferencia. Ángulos en la circunferencia. Potencia de un punto a una circunferencia.

41. Movimientos en el plano. Composición de movimientos. Aplicación al estudio de las teselaciones del plano. Frisos y mosaicos.

42. Homotecia y semejanza en el plano.

43. Proyecciones en el plano. Mapas. Planisferios terrestres: principales sistemas de representación.

44. Semejanza y movimientos en el espacio.

45. Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos.

46. Distintas coordenadas para describir el plano o el espacio. Ecuaciones de curvas y superficies.

47. Generación de curvas como envolventes.

48. Espirales y hélices. Presencia en la Naturaleza, en el Arte y en la Técnica.

49. Superficies de revolución. Cuádricas. Superficies regladas. Presencia en la Naturaleza, en el Arte y en la Técnica.

50. Introducción a las geometrías no euclideas. Geometría esférica.

51. Sistemas de referencia en el plano y en el espacio. Ecuaciones de la recta y del plano. Relaciones afines.

52. Producto escalar de vectores. Producto vectorial y producto mixto. Aplicaciones a la resolución de problemas físicos y geométricos.

53. Relaciones métricas: perpendicularidad, distancias, ángulos, áreas, volúmenes, etc...

54. Las cónicas como secciones planas de una superficie cónica. Estudio analítico. Presencia en la Naturaleza, el Arte y la Técnica.

55. La Geometría fractal. Nociones básicas.

56. Evolución histórica de la geometría.

57. Usos de la Estadística: Estadística descriptiva y Estadística inferencial. Métodos básicos y aplicaciones de cada una de ellas.

58. Población y muestra. Condiciones de representatividad de una muestra. Tipos de muestreo. Tamaño de una muestra.

59. Técnicas de obtención y representación de datos. Tablas y gráficas estadísticas. Tendenciosidad y errores más comunes.

60. Parámetros estadísticos. Cálculo, significado y propiedades.

61. Desigualdad de Tchebyschev. Coeficiente de variación. Variable normalizada. Aplicación al análisis, interpretación y comparación de datos estadísticos.

62. Series estadísticas bidimensionales. Coeficiente de variación. Variable normalizada. Aplicación al análisis, interpretación y comparación de datos estadísticos.

63. Frecuencia y probabilidad. Leyes del azar. Espacio probabilístico.

64. Probabilidad compuesta. Probabilidad condicionada. Probabilidad total. Teorema de Bayes.

65. Distribuciones de probabilidad de variables discreta. Características y tratamiento. Las distribuciones binomial y de Poisson. Aplicaciones.

66. Distribuciones de probabilidad de variable continua. Características y tratamiento. La distribución normal. Aplicaciones.

67. Inferencia estadística. Tests de hipótesis.

68. Aplicaciones de la Estadística y el Cálculo de Probabilidades del estudio y toma de decisiones en problemas de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza. Evolución histórica.

69. La resolución de problemas en Matemáticas. Estrategias. Importancia histórica.

70. Lógica proposicional. Ejemplos y aplicaciones al razonamiento matemático.

71. La controversia sobre los fundamentos de la Matemática. Las limitaciones internas de los sistemas formales.

Con vistas a clasificar los temas consideramos distribuirlos en cinco bloques temáticos: números y sucesiones, álgebra, cálculo infinitesimal y probabilidad. Consideraremos sólamente aquellos temas que tienen incidencia sobre los problemas que han aparecido hasta ahora. Dentro de cada bloque separaremos también los temas que son fundamentales y de uso constante de aquellos que aparecen en algun problema ocasionalmente.

- **Números y sucesiones.**

  Temas principales: divisivilidad (tema 4) y sucesiones (tema 8).

  Temas secundarios: 2, 3, 5 y 9.

- **Álgebra.**

  Temas principales: polinomios (tema 13).

  Temas secundarios: 12, 14, 15 y 18.

- **Cálculo infinitesimal.**

  Temas principales: derivada (tema 26), integral definida (tema 29)

  Temas secundarios: 21, 22, 25, 28 y 30.

- **Geometría.**

  Temas principales: coordenadas (tema 46) y cónicas (tema 54).

  Temas secundarios: 34, 37, 38, 39, 42, 46, 51 y 53.

- **Probabilidad.**

  Temas principales: leyes de probabilidad (tema 64).

  Temas secundarios: 60 y 63.

Vemos que los temas clasificados son asequibles desde el nivel de las matemáticas de primero o de segundo de cualquier carrera de ciencias. No obstante aunque en concreto los temas marcados como principales son todos relativos a conceptos que ya se ven en bachillerato, los problemas tienen un nivel mucho más elevado que los que se resuelven en secundaria.

La clasificación anterior nos será de utilidad para que el lector pueda coger una perspectiva global de cada convocatoria sin necesidad de entrar en todos los detalles de la resolución de cada uno de los cuatro problemas de la convocatoria. De hecho, lo que haremos será dar por un lado el enunciado de los problemas y su clasificación y, por el otro, en un apartado diferente la resolución a la convocatoria.
En cualquier caso lo anterior nos da una idea aproximada de cuáles son los temas más importantes, al menos de cara a poder resolver el tipo de problemas que suelen aparecer en la parte práctica.

Capítulo 3

Convocatoria del año 2015

La convocatoria del año 2015 fue muy numerosa. Durante estos años recientes, a causa de la crisis económica de la que España se ha visto afectada, el Estado no permitía más que la reposición del diez por ciento de los funcionarios jubilados. Para ilustrar la situación mediante datos estadísticos, no se han convocado oposiciones desde el año 2010 y se han ofertado sólamente 45 plazas totales en la especialidad de matemáticas. En contraste, en las últimas cuatro convocatorias antes que la de 2015 se abrían convocatorias cada dos años, con una oferta de aproximadamente entre 60 y 80 plazas.

Para dar una idea del nivel de demanda que hubo en el año 2015 con respecto, por ejemplo de 2010, podemos atender a la ratio de opositores - plaza en la especialidad de matemáticas: 32,02 opositores compitiendo por cada plaza frente a los 11,4 que hubo en 2010, casi el triple.
Como aclaración, en la ratio opositores-plaza del año 2015 se ha incluído el turno 2, (plazas reservadas para discapacitados) para evitar exageraciones innecesarias de los datos. No obstante, la diferencia no es demasiado significativa (34.68 frente a los 32.02 con los que se ha argumentado).

Los datos anteriores han sido extraídos de los servicios web que ofrecen los sindicatos ANPE y CSIF así como del Centro de Estudios CEDE (academia que ofrece clases de preparación para las oposiciones). Todos los enlaces aparecen convenientemente catalogados en la webgrafía.

3.1. Contexto legislativo de la prueba.

Se adjunta a continuación un compendio de extractos de los documentos oficiales que regulan el contexto legislativo del proceso selectivo así como las condiciones concretas del proceso. Todos los documentos han sido obtenidos del Portal de Educación de la Junta de Castilla y León y el enlace en el que aparecen publicados está disponible en la webgrafía.

Como anotación fundamentalmente aparecen los apartados y subapartados relacionados con nuestros propósitos, principalmente aquellos que regulan directamente la parte práctica de la primera prueba (los problemas). Teniendo presente que la nota en la primera prueba depende no sólo de la parte práctica, sino también de la parte escrita (la exposición del tema), también aparecen los apartados referentes a esta otra parte.

- **Convocatoria año 2015. BOCYL**

  La Resolución de 7 de abril de 2015, de la Viceconsejería de Función Pública y Modernización, por la que se convocan procedimientos selectivos de ingreso y acceso a los cuerpos de profesores de enseñanza secundaria.

  7.– *Sistemas de selección.*

  7.1.1. *Contenido genérico.* De conformidad con el artículo 18 del Real Decreto 276/2007, de 23 de febrero, la fase de oposición versará sobre la posesión de los conocimientos de la especialidad a la que se opta, la aptitud pedagógica y el dominio de las técnicas necesarias para el ejercicio de la docencia.

  Asimismo, se valorará la exposición clara, ordenada y coherente de estos conocimientos, la precisión terminológica, la riqueza de léxico, la sintaxis fluida y sin incorrecciones, así como la debida corrección ortográfica en la escritura.

  7.1.2. *Pruebas de la fase de oposición.* La fase de oposición constará de dos pruebas que tendrán carácter eliminatorio. Cada una de ellas estará dividida en dos partes.

  a) Primera prueba: Prueba de conocimientos específicos de la especialidad. Esta primera prueba tendrá por objeto la demostración de conocimientos específicos de la especialidad a la que opta, necesarios para impartir la docencia y constará de dos partes que serán valoradas conjuntamente:
     - <u>Primera parte</u>: En todas las especialidades se incluirá una prueba práctica cuyas características y contenidos se ajusta-

rán a lo dispuesto en el Anexo XV y permitirán comprobar que los aspirantes poseen la formación científica y el dominio de las técnicas de trabajo precisas para impartir las áreas propias de la especialidad a la que opten.

– Segunda parte: Consistirá en el desarrollo por escrito de un tema elegido por el aspirante de entre un número de temas, extraídos al azar por el tribunal, proporcional al número total de temas del temario de cada especialidad.

b) Segunda prueba: Prueba de aptitud pedagógica.

El tiempo asignado para la realización de la prueba será establecido por la comisión de selección y puesto en conocimiento de los aspirantes por los respectivos tribunales.

Esta primera prueba se valorará de cero a diez puntos, con aproximación hasta diezmilésimas. La primera parte de la prueba se calificará con un máximo de cuatro puntos y la segunda con un máximo de seis.

Para la superación de esta prueba, los aspirantes deberán alcanzar una puntuación mínima en cada una de las partes, igual al 25 por 100 de la puntuación asignada a cada una de ellas y una puntuación total, resultado de sumar las puntuaciones correspondientes a las dos partes, igual o superior a cinco puntos.

- **Carácterísticas por especialidad: Anexo XV BOCYL.**

  CARACTERÍSTICAS DE LA PRUEBA PRÁCTICA.

  Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria Matemáticas: La prueba consistirá en la resolución de problemas y ejercicios en los que se planteen cuestiones relativas a la aplicación y utilización de los conceptos y los procedimientos relacionados con el temario, así como a la utilización de distintas estrategias para su resolución.

- **Criterios de evaluación.**

  Estos criterios de evaluación fueron publicados por la Dirección Provincial de salamanca, localidad en la que se celebró el concurso a oposición en torno a una semana antes de la prueba. Se adjuntan las consideraciones generales a todos los grupos y las específicas al turno libre, que es el turno de acceso estándar. Es destacable que es en la primera convocatoria en Castilla y León en la que dichos criterios se hacen de conocimiento público entre los opositores.

> ESPECIALIDAD MATEMÁTICAS. CONSIDERACIONES GENERALES.
>
> En aquellas pruebas que se deban realizar por escrito, las incorrecciones ortográficas restarán puntuación en la calificación que se obtenga según los siguientes criterios:
> 1-. Falta ortográficas
> 2-. Tildes sin colocar o mal colocadas.
> 3-. El uso arbitrario y/o ausencia de signos de puntuación.
>
> CRITERIOS EXPOSICIÓN ORAL DE UN TEMA DE LA ESPECIALIDAD. TURNO LIBRE.
>
> - Estructura: índice, justificación, introducción, desarrollo, conclusión.
> - Contenidos: adecuación al tema (desarrollo de todos los epígrafes del tema, relacionándolos entre sí y con un tratamiento equilibrado entre ellos), argumentos, grado de precisión y rigor científico, profundización y ejemplificación.
> - Expresión: fluidez en la redacción, uso de lenguaje técnico, sin divagaciones.
> - Presentación: letra legible, limpieza y claridad, formato.
>
> CRITERIOS DE LA PARTE PRÁCTICA.
>
> - Presentar los problemas con una estructura clara, organizada, secuenciada y coherente en el desarrollo teórico-práctico.
> - Desarrollar los problemas de forma rigurosa, con corrección en los cálculos, justificando convenientemente el proceso de resolución y argumentando la relación teórico - práctica.

- **Criterios de actuación**

De forma similar a los criterios de evaluación, por primera vez (al menos en Castilla y León) fueron publicados por la Dirección Provincial de Salamanca alrededor de una semana antes de la prueba.

CRITERIOS DE ACTUACIÓN ANTE LOS TRIBUNALES: PRIMERA PRUEBA-PARTE PRÁCTICA.

1-. Copiar o utilizar audífonos no terapéuticos, "pinganillos", etc., conlleva la exclusión inmediata del proceso selectivo.

2-. Entrar en contacto con otros aspirantes por cualquier medio una vez comenzada la prueba, conlleva la expulsión inmediata del proceso selectivo.

3-. Los móviles tienen que estar apagados (ni siquiera en modo silencio o vibración) y guardados, nunca encima de la mesa.

4-. No se permite llevar relojes Smartwatch.

5-. Se escribirá únicamente en color azul o negro. No typex ni tachaduras. Si hay que realizar enmiendas, éstas se acotan entre paréntesis y con raya horizontal sobre el escrito.

6-. Se permitirá el uso de CALCULADORAS NO PROGRAMABLES (que no admitan memoria para texto y representaciones gráficas).

7-. Se permite utilizar el siguiente material: lápiz, goma, regla, escuadra, cartabón, trasportador y compás.

8-. Solo se corregirán aquellas representaciones gráficas o dibujos que estén pasados a tinta.

9-. Los aspirantes podrán llevar agua, en envase de plástico y sin etiqueta.

10-. La retirada del opositor a instancias de los miembros del tribunal por no cumplir con los criterios publicados supone la exclusión del proceso selectivo.

3.2. Examen del año 2015.

Como se ha comentado al inicio de la sección, el nivel de demanda de las plazas ofertadas fue altamente elevado. Además, ésta era una situación evidentemente previsible por la administración, por lo que parece lógico pensar que fuera tenido en cuenta en la elaboración de las pruebas del proceso selectivo. De hecho, el grueso de la criba se produce en ésta primera prueba formada por la parte práctica (los problemas) y la parte escrita (el tema): de los 1422 candidatos iniciales resultaron seleccionados sólamente 57 para continuar con la segunda prueba (defensa de la programación y de la unidad didáctica). En conclusión parece esperable que la parte de problemas fuera difícil para permitir seleccionar entre un número tan alto de opositores.

Los problemas, que se presentan resueltos a continuación en esta misma sección, son asequibles uno por uno sin mayor preparación que los conocimientos que se adquieren completando el grado en matemáticas. No obstante, sin preparación específica me parece difícil ser capaz de resolver más de uno en un tiempo limitado de dos horas. Para hacernos a la idea de los resultados en la parte práctica, de las 57 personas que superaron la primera prueba obtuvieron los siguientes resultados:

- 33 exámenes entre el 5 y el 6
- 13 exámenes entre el 6 y el 7
- 6 exámenes entre el 7 y el 8
- 5 exámenes entre el 8 y el 9
- ningún examen por encima del 9

Como comentario final, en mi opinión los problemas son muy originales e interesantes. Me parece remarcable el hecho de que haga falta creatividad, imaginación y capacidad de interpretación para resolverlos. Además no son muy laboriosos en términos de cuentas. Como añadido cubren cuatro de las ramas más importantes de las matemáticas: álgebra, análisis matemático, geometría y probabilidad.

3.2.1. Enunciado año 2015

Adjuntamos el enunciado que se les entregó a los opositores junto con la clasificación del bloque al que pertenece y los temas con los que está relacionado.

Problema nº 1.

Sea T la transformación lineal del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones (referidas a la base canónica de $\mathbb{R}^3$):

- *La restricción de T al subespacio U definido por la ecuación $x+y-z=0$ es una homotecia de razón 4.*
- *T transforma el subespacio V definido por las ecuaciones implícitas*

$$V = \begin{cases} 3x+4y+3z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

  en sí mismo.
- *T(3,0,1)=(6,-6,8)*

Determine la matriz de la transformación T.

Clasificación.

Bloque temático: Álgebra
Temas relacionados:

- Aplicaciones entre espacios vectoriales. (Tema 12)
- Álgebra de Matrices. (Tema 18)

Problema nº 2.

Halle la parte entera de la suma

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}.$$

Clasificación.

Bloque temático: Cálculo infinitesimal
Temas relacionados:

- Integral definida. (Tema 29)
- Aplicaciones de la integral al cálculo de magnitudes geométricas. (Tema 30)

Problema nº 3.

En el espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^3$ *se consideran la circunferencia* C *y la recta* r *definidas por las siguientes ecuaciones*

$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad r = \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

- *Halle el lugar geométrico* S *que determinan las rectas que se apoyan en la circunferencia* C *y en la recta* r *y son paralelas al plano* $x = 0$*.*
- *Calcule el volumen del sólido que delimitan la superficie* S *del apartado anterior y el plano* $z = 0$*.*

Clasificación.

Bloque temático: Geometría.
Temas relacionados:

- Coordenadas para describir el espacio. (Tema 46)
- Aplicaciones de la integral al cálculo de magnitudes geométricas. (Tema 30)

Problema nº 4.

En una circunferencia se eligen 3 puntos al azar y de manera independiente. Calcule la probabilidad de que los 3 puntos estén situados en un mismo arco de menos de $\pi/2$ *radianes.*

Clasificación.

Bloque temático: Probabilidad
Temas relacionados:

- Leyes del azar. Espacio probabilístico. (Tema 63)
- Probabilidad compuesta. Probabilidad condicionada. (Tema 63)
- Aplicaciones de la integral al cálculo de magnitudes geométricas. (Tema 30)

3.2.2. Resolución.

A continuación se adjunta la resolución de la convocatoria. Los enunciados no son literales, se encuentran algo resumidos por comodidad.
Los procedimientos que se usan en las resoluciones son relativamente estándares (teorema del valor medio, integrales por secciones, cambios de coordenadas, etc). No obstante hay que tener los conceptos muy claros y están aplicados muchas veces de forma muy imaginativa. Como comentario, en los problemas 2 y 4 se propone a mayores una resolución diferente a la de la bibliografía

Problema nº 1.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal que cumple:

- *La restricción de T al subespacio $U : x + y - z = 0$ es una homotecia de razón 4.*
- *T transforma*
$$V = \begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$
en sí mismo.
- *T(3,0,1)=(6,-6,8)*

Determine la matriz de la transformación T.

Resolución. Usaremos dos de las tres condiciones para determinar las imágenes de tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ y así obtener la matriz en la base que forman dichos vectores. Posteriormente usaremos las fórmulas de cambio de base para obtener la matriz de T en la base canónica. Finalmente comprobaremos que la condición restante también se verifica.

El subespacio $U : x + y - z = 0$ queda generado por el conjunto de vectores $\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ y por la segunda condición sabemos que

$$T(-1, 1, 0) = (-4, 4, 0) \text{ y que } T(1, 0, 1) = (4, 0, 4).$$

Por la posiciones de los ceros vemos que el vector $(3, 0, -1)$ de la tercera condición será linealmente independiente con estos otros dos. Para cerciorarnos calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

En consecuencia sabemos que el conjunto B formado por estos tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$ y conocemos la matriz de la aplicación T con base de partida B y base de llegada la canónica. La llamamos M_T
:

$$M_T = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Lo único que nos queda es multiplicar a M_T por la derecha por la matriz de cambio C de la base canónica a la base B. Dicha matriz C es la solución al sistema matricial

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot C$$

Para hallar la matriz C calculamos la inversa de la amtriz anterior

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente nos queda que la matriz M de la aplicación T en la base canónica es

$$M = M_T \cdot C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

No obstante nos damos cuenta de que el enunciado del problema tiene un poco de trampa porque nos han dado dos condiciones que determinan totalmente el endomorfismo. Tenemos pues que comprobar que el endomorfismo asociado a la matriz T que hemos obtenido también verifica la segunda condición. Obtenemos las ecuaciones paramétricas de V resolviendo (por reducción) el sistema:

$$V = \begin{cases} ,3x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Vemos que se trata del subespacio engendrado por el vector $\vec{v} = (1, 1, -2)$ y, dado que

$$T(1, 1, -2) = (-2, -2, 4) = 2\vec{v},$$

concluímos que también se cumple la condición segunda.

Problema nº 2.
Halle la parte entera de la suma

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}.$$

Resolución. Probaremos primero la siguiente desigualdad, válida para cada $k \in \mathbb{N}$, con vistas a acotar cada sumando:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}} \tag{3.1}$$

Aplicamos el teorema de los incrementos finitos de Lagrange a la función $f(x) = 2\sqrt{x}$ en cada intervalo $[k, k+1]$ con $k \in \mathbb{N}$. Deducimos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un $c_k \in (k, k+1)$ tal que

$$f(k+1) - (k) = f'(c_k)$$

es decir

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{c_k}}.$$

Como para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $k < c_k < k+1$ y la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ es monótona estrictamente decreciente concluímos la cadena de desigualdades 3.1 que buscábamos.

Sea pues $n = 10^6$. Vemos que hemos escogido el término de en medio de la desigualdad 3.1 de forma que cuando sumemos término a término la suma sea telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right).$$

Por lo que deducimos que la suma S del problema cumple que $S < 2\sqrt{n} - 1$. A continuación hacemos lo similar con la parte derecha de la desigualdad inicial y obtenemos que:

$$2\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

De esto deducimos que $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < S$. Unimos las dos desigualdades que hemos obtenido y se deduce que

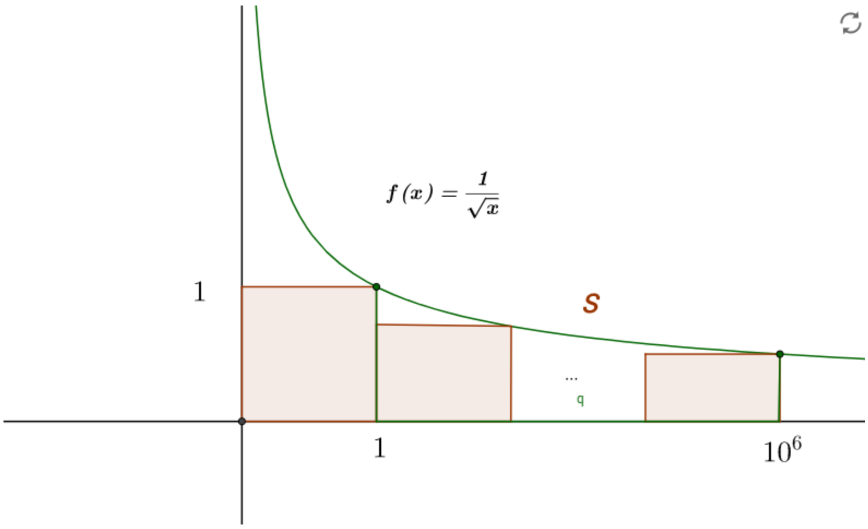
$$2\sqrt{n+1}-2 < S < 2\sqrt{n}-1.$$

Con lo que, teniendo en cuenta que $n = 10^6$, vemos que la parte entera de la suma S es 1998 puesto que $1998 < S < 1999$.

Resolución. Otra posible forma de resolverlo diferente a la planteada en la bibliografía utilizando la definición de integral de la función f definida como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

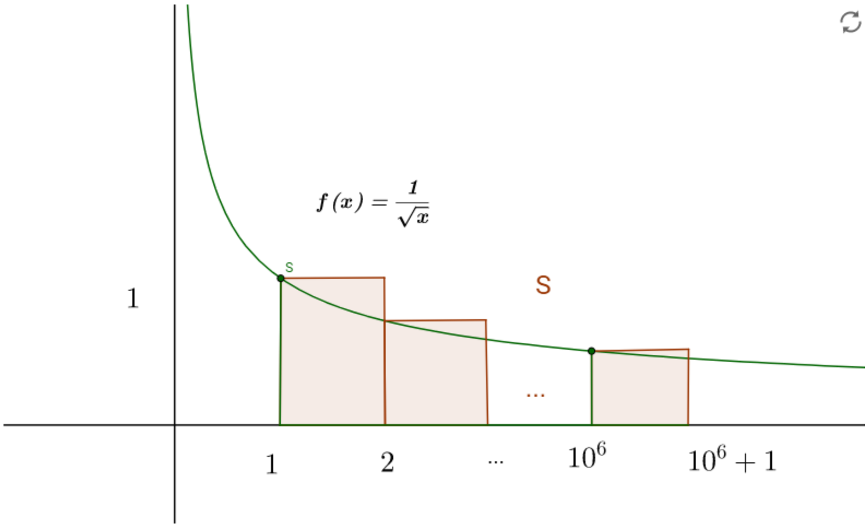
Consideramos primero la integral de Riemann de la función f entre 1 y 10^6 y su suma inferior en la partición $P = \left\{x_0 = 1, 2, \ldots, 10^6\right\}$, que es precisamente $S - 1$.



Se obtiene la siguiente desigualdad:

$$S < 1 + \int_1^{10^6} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Por otro lado consideramos la integral de Riemann de f entre 1 y 10^6 y la suma superior en la partición $P = \left\{x_0 = 1, 2, \ldots, 10^6 + 1\right\}$, que es justamente S.



Se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\int_1^{10^6} \frac{1}{\sqrt{x}} < S.$$

Operando, conjuntamente de las dos acotaciones se deduce que

$$2000 - 2 < S < 2000 - 1$$

y, efectivamente, la parte entera de S es 1998.

Problema nº 3.

En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran:

$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad r = \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

- *Halle el lugar geométrico S que determinan las rectas que se apoyan en la circunferencia C y en la recta r y son paralelas al plano $x = 0$.*
- *Calcule el volumen del sólido que delimitan la superficie S del apartado anterior y el plano $z = 0$.*

Resolución. Plantearemos el problema parametrizando el lugar geométrico S que se nos pide y utilizando el concepto de integral para calcular el volumen que se nos pide.

- La superficie S pedida en el primer apartado es la unión de las rectas $r(s,t)$ que pasan por un punto genérico $P(s)$ de la recta r y por un punto genérico $Q(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0)$ de la circunferencia C. En consecuencia el vector director $\vec{v}(s,t)$ de cada recta $r(s,t)$ deberá cumplir ser de la forma

  $$\vec{v}(s,t) = (\cos(t) - s, \operatorname{sen}(t), -1).$$

  Además, al tener que ser paralelo al plano OYZ deberá ser perpendicula al vector normal del plano, el $(1,0,0)$ por lo que su producto escalar tiene que ser nulo:

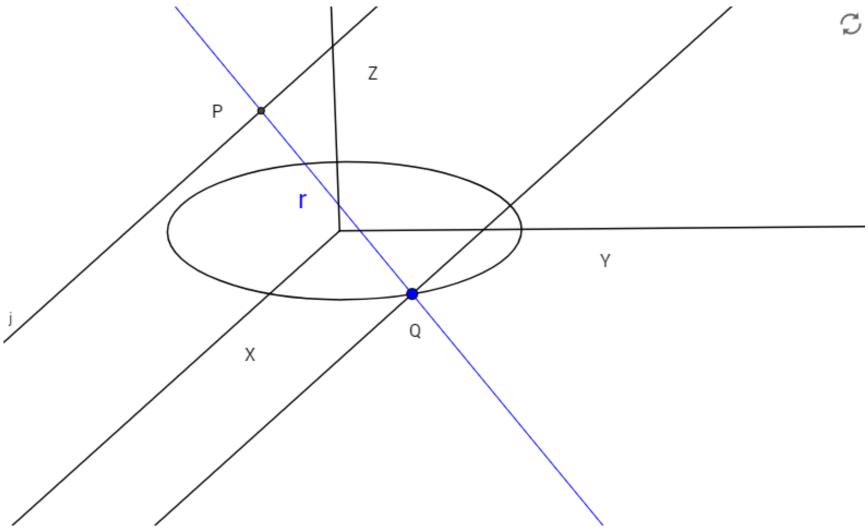
  $$0 = (\cos(t) - s, \operatorname{sen}(t), -1) \cdot (1,0,0) = \cos(t) - s.$$

  Recopilando tenemos que el vector director de cada recta dependerá sólamente de t y será de la forma

  $$\vec{v}(s,t) = \vec{v}(t) = (0, \operatorname{sen}(t), -1).$$

  La recta genérica $r(t)$ pasará además por el punto $P(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0)$. En consecuencia, para $t \in [0, 2\pi]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ la superficie S queda definida por las ecuaciones paramétricas

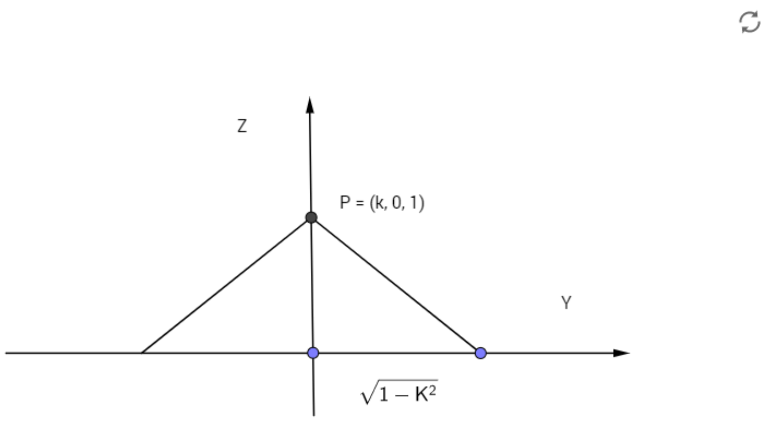
  $$S = \begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= (1+\alpha)\operatorname{sen}(t) \\ z &= -\alpha \end{cases}$$



Como observación, puesto que por lugar geométrico usualmente solemos esperar las ecuaciones implícitas, si queremos dar una solución más completa al ejercicio podemos eliminar los parámetros α y t para llegar a la siguientes ecuación:

$$S : y^2 = (1-z)^2(1-x^2).$$

- Para el segundo apartado vemos que, seccionando para un $x = k$ nos quedan triángulos de altura 1 y cuya base es perpendicular al eje $0X$ y apoya en la circunferencia contenida en el plano $X0Y$ de radio 1 y centrada en el origen. Por lo tanto la base de dichos triángulos medirá $2\sqrt{1-k^2}$.



En consecuencia el volumen V pedido es la integral

$$V = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-k^2}dk.$$

Con el cambio de variable $k = \cos(t)$ y usando la fórmula del ángulo doble nos queda que

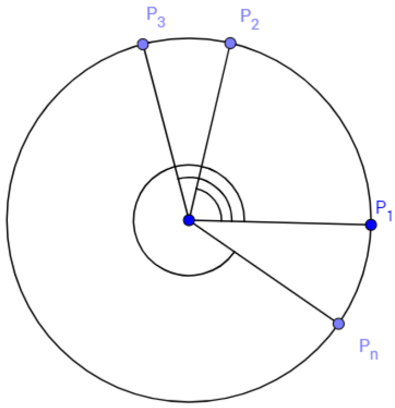
$$V = \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(t)^2 dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Problema nº 4.

En una circunferencia se eligen 3 *puntos al azar y de manera independiente. Calcule la probabilidad de que los* 3 *puntos estén situados en un mismo arco de menos de* $\pi/2$ *radianes.*

Resolución. Una de las formas de resoverlo en la bibliografía, muy imaginativa y que de hecho responde al problema más general en el que se eligen n puntos al azar y se pregunta por la probabilidad P de que los puntos estén situados en un arco de menos de α radianes es la siguiente:

Denominaremos como $P_1, P_2, \ldots, P_n$ a los n puntos, identificados por su arco respecto de un punto que tomamos como arco cero. Los ordenaremos en sentido antihorario. Primero nos damos cuenta de que si consideramos uno de ellos, por ejemplo el P_1, como el inicio del arco de α radianes la probabilidad p_1 de que los otros $n-1$ restantes estén en dicho arco es equivalente a la intersección de los sucesos $0 < P_2 - P_1 < \alpha, \ldots, 0 < P_n - P_1 < \alpha$.



Dado que dichos sucesos son independientes y equiprobables la probabilidad de la intersección, p_1 se calculará como el producto de las probabilidades anteriores, que es $\alpha/2\pi$:

$$p_1 = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{n-1}.$$

Ahora bien, definimos como $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a las probabilidades de que los n puntos elegidos puedan situarse en un mismo arco de α radianes empezando por el punto $P_1, P_2, \ldots, P_n$ respectivamente. Entonces la probabilidad pedida por el enunciado será la suma de dichas probabilidades:

$$P = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

No obstante todas estás probabilidades valen lo mismo y consecuentemente tenemos que

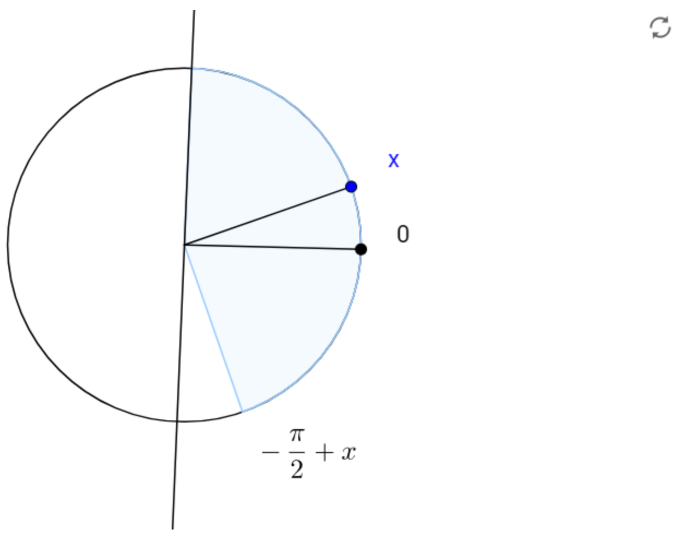
$$P = n\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{n-1}.$$

Resolución. Se propone la siguiente solución alternativa a la bibliografía que no usa prácticamente nada más que la regla de Laplace, casos favorables divido por el número de casos totales. La idea será identificar los casos totales con la medida de toda la circunferencia (2π), elevada al cubo y los favorables con la medida del subconjunto de los puntos que están situados en el conjunto descrito por el enunciado.

Primero nos damos cuenta de que es indiferente cual sea el primer punto elegido y podemos considerarlo como el punto 0. En consecuencia los casos totales tendrán un área asociada de $4\pi^2$. De forma similar identificaremos el segundo punto elegido por la medida del arco que lo separa del primer punto, entre $-\pi$ y π, asignándole signo positivo si está por encima del punto 0 y negativo si está por debajo.

Calculemos pues el área asociada a los casos favorables. Supongamos que el segundo punto es $x \in [0, \pi/2]$, es decir es favorable y además está por encima del 0.. En este caso (en el que el segundo punto x es positivo) la medida del área asociada a los casos favorables es:

$$\int_0^{\pi/2} \pi - x dx = \frac{3}{8}\pi^2.$$



El caso de que el segundo punto caiga por debajo del punto 0 es simétrico y tiene la misma probabilidad. En consecuencia la medida asociada a los casos favorables es

$$\frac{3}{4}\pi^2.$$

Como el total de los casos tiene un área de $4\pi^2$ nos queda que la probabilidad es

$$P = \frac{\frac{3}{4}\pi^2}{4\pi^2} = \frac{3}{16}.$$

Capítulo 4

Convocatorias transitorias de 2010 y 2008

Durante estos años se produjo una orden de convocatoria transitoria, con intención de facilitar el acceso al funcionariado para personal docente interino. Como consecuencia las condiciones del examen fueron menos exigentes. En lo que respecta a nuestros intereses no hubo parte práctica y se dio la facilidad de elegir entre 5 temas cuando hasta entonces se podía elegir sólamente entre 2 temas.

4.1. Contexto legislativo.

De igual forma que en la convocatoria de 2015, se adjuntan los extractos de la normativa correspondiente a estos años.

- **Convocatoria año 2010. BOCYL**

  Orden ADM/501/2010, de 21 de abril, por la que se convocan procedimientos selectivos de ingreso y acceso a los cuerpos de profesores de enseñanza secundaria, así como procedimientos para la adquisición de nuevas especialidades por los funcionarios de los mencionados cuerpos.

  Séptima.- Sistemas de selección.

  7.1. *Fase de oposición en los procedimientos selectivos de ingreso libre y reserva de discapacidad acreditada.*

  7.1.1. De conformidad con el artículo 58 del Real Decreto 276/2007, de 23 de febrero, la fase de oposición versará sobre los contenidos de la especialidad correspondiente, la aptitud pedagógica y el dominio de las técnicas necesarias para el ejercicio de la docencia.

7.1.2. *Prueba de la fase de oposición.* La valoración de estos conocimientos se llevará a cabo a través de la realización por el aspirante ante el Tribunal de una única prueba estructurada en dos partes, que no tendrán carácter eliminatorio, ajustándose a lo que se indica a continuación:

> Parte A): Tendrá por objeto la demostración de conocimientos específicos necesarios para impartir la docencia. Consistirá en el desarrollo por escrito de un tema elegido por el aspirante, de entre un número de temas extraídos al azar por el Tribunal, proporcional al número total de temas del temario de cada especialidad, atendiendo a los siguientes criterios:
>
> - En aquellas especialidades que tengan un número superior a 50 temas, deberá elegirse entre cinco temas.
>
> Para la realización de esta parte A de la prueba, los aspirantes dispondrán de dos horas.
>
> Parte B): Tendrá por objeto la comprobación de la aptitud pedagógica del aspirante y su dominio de las técnicas necesarias para el ejercicio docente.
>
> B.1) Presentación de una programación didáctica.
> B.2) Preparación y exposición de una unidad didáctica.

- **Real Decreto 276/2007. Artículo 58**

Real Decreto 276/2007, de 23 de febrero, por el que se aprueba el Reglamento de ingreso, accesos y adquisición de nuevas especialidades en los cuerpos docentes a que se refiere la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, y se regula el régimen transitorio de ingreso a que se refiere la disposición transitoria decimoséptima de la citada ley.

Artículo 58. Sistema selectivo.

Durante los años de implantación de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, que conforme a la disposición adicional primera será de cinco años, el ingreso a la función publica docente se realizará mediante un procedimiento selectivo en el que, en la fase de concurso se valorarán la formación académica y, de forma preferente, la experiencia docente previa en los centros públicos de la misma etapa educativa, hasta los límites legales permitidos. La fase de oposición, que tendrá una sola prueba, versará sobre los contenidos de la especialidad que corresponda, la aptitud pedagógica y el dominio de las técnicas necesarias para el ejercicio de la docencia.

Capítulo 5

Primeras convocatorias ordinarias por la Junta de CyL

En el año 2000 el Gobierno de España transfiere todas las competencias en educación a la Junta de Castilla y León. Hasta entonces dichas competencias corrían a cargo del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). En particular la Junta pasa a ser la responsable del proceso de selección de personal docente. Durante estos años hubo cierta normalidad y estabilidad, convocatorias cada dos años y con una oferta de plazas buena, especialmente en las dos últimas convocatorias. Como reseña, en el año 2004 el número de plazas ofertadas es notablemente alto, año en el que la convocatoria a oposición coincide aproximadamente con las elecciones generales.

Se adjuntan a continuación los números concretos, que pueden ser encontrados en la web del Centro de estudios CeDe:

- Convocatoria del año 2006 oferta de 59 plazas
- Convocatoria del año 2004 oferta de 82 plazas
- Convocatoria del año 2002 oferta de 11 plazas
- Convocatoria del año 2000 oferta de 24 plazas

Respecto a la dificultad de los problemas de la parte práctica a lo largo de estos años es similar a la de los que vimos en el año 2015, en mi opinión la cuestión fundamental es la limitación del tiempo. No obstante, como veremos a continuación en las secciones de resolución de cada una de las convocatorias, sí que se percibe cierta diferencia en la naturaleza de los problemas a lo largo del tiempo. En esto entraremos en más detalle en el capítulo de conclusiones.

5.1. Contexto legislativo.

Las ordenes que regulan los procedimientos selectivos de estos años son prácticamente idénticas entre sí y muy parecidas a la del año 2015. Para que no resulte repetitivo se adjunta sólamente la de 2006. En este caso, al ser una orden más antigua no se encuentra en la web de la Junta, está extraída del historial comleto del BOCYL.

- **Convocatoria año 2006. BOCYL**

  ORDEN PAT/519/2006, de 29 de marzo, por la que se convocan procedimientos selectivos de ingreso y accesos a los Cuerpos de Profesores de Enseñanza Secundaria.

  Séptima.– Sistemas de selección.

  7.1. Fase de oposición en los procedimientos selectivos de ingreso libre y reserva de personas con discapacidad.

  7.1.1. La valoración de las pruebas a que se refiere el artículo 21 del Real Decreto 334/2004, de 27 de febrero, por el que se aprueba el Reglamento de ingreso, accesos y adquisición de nuevas especialidades en los Cuerpos Docentes que imparten las enseñanzas escolares del sistema educativo y en el Cuerpo de Inspectores de Educación, versará sobre los conocimientos específicos de los candidatos, necesarios para impartir docencia, su aptitud pedagógica y su dominio de las técnicas para el ejercicio docente.

  7.1.2. La valoración de estos conocimientos se llevará a cabo a través de la realización por el aspirante ante el Tribunal de las siguientes pruebas.

  a) *La primera prueba.*– Prueba de conocimientos específicos.

     Esta primera prueba tendrá por objeto la demostración de conocimientos específicos necesarios para impartir la docencia y constará de dos partes que serán valoradas conjuntamente:

     - *Primera parte*: en todas las especialidades, se incluirá una prueba práctica consistente en la realización de una serie de ejercicios que ajustándose a lo dispuesto en el Anexo VI a) y

b), permitan comprobar que los candidatos poseen una formación científica y un dominio de las técnicas de trabajo precisas para impartir las áreas, asignaturas o módulos propios de la especialidad a la que opten.
El tiempo asignado para la realización de la prueba será establecido por la Comisión de Selección, en aquellos casos en los que no venga determinado en la convocatoria y puesto en conocimiento de los aspirantes por los respectivos Tribunales.

- *Segunda parte*: consistirá en el desarrollo por escrito de un tema elegido por el aspirante de entre dos extraídos al azar por el Tribunal de los correspondientes al temario de la especialidad. Los aspirantes dispondrán de dos horas para la realización de esta segunda parte.

Esta primera prueba se valorará de cero a diez puntos, con aproximación hasta diezmilésimas. Para el resto de especialidades, (nota: matemáticas se incluye aqui) de la primera parte de la prueba se calificará con un máximo de cuatro puntos y la segunda con un máximo de seis.
Para la superación de esta prueba, los aspirantes deberán alcanzar una puntuación mínima en cada una de las partes, igual al 25 por 100 de la puntuación asignada a cada una de ellas y una puntuación total, resultado de sumar las puntuaciones correspondientes a las dos partes, igual o superior a cinco puntos.

b) *Segunda prueba.*– Prueba de Aptitud Pedagógica.
   A) La programación didáctica de carácter personal
   B) La unidad didáctica.

- **ANEXO VI b)**

CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

Características de la prueba práctica

Matemáticas.
Resolución de problemas en los que se planteen cuestiones relativas a la aplicación y utilización de los conceptos y procedimientos correspondientes y a la utilización de distintas estrategias para su resolución.

5.2. Examen año 2006.

Como comentarios, la temática de los problemas es bastante variada. No obstante, excepto el 1 que tiene algun detalle bastante ingenioso, en general los problemas son bastante técnicos y la dificultad principal reside en las manipulaciones y cuentas. Especialmente los problemas 2 y 3.

Problema nº 1.

Sean p y q dos números naturales tales que:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Demuestre que p es divisible por 1979.

Clasificación.

Bloque temático: Números y sucesiones.
Temas relacionados:

- Números enteros. Divisibilidad. (Tema 4)
- Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas. (Tema 8)

Problema nº 2.

Responda razonadamente a las siguientes cuestiones independientes.

- *Determine el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes trazadas por el punto $P = (-6, 0)$ a las elipses centradas en el origen y que tienen por semiejes a variable y $b = 3$.*
- *Resuelva la ecuación $2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 0$ sabiendo que admite una solución compleja de módulo 5.*

Clasificación.

Bloque temático: Geometría y álgebra.
Temas relacionados:

- Ecuaciones de curvas y superficies. (Tema 46)
- Divisibilidad de polinomios. (Tema 13)
- Números complejos. (Tema 9)

Problema nº 3.

Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones dada por:

$$f_n = \frac{nx - 1}{(1 + x\log(n))\,(1 + nx^2\log(n))}, \text{ para } x \in [0, 1].$$

Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \;\; y \;\; \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$$

explicando la aparente contradicción del resultado.

Clasificación.

Bloque temático: Cálculo infinitesimal.
Temas relacionados:

- Cálculo de primitivas. (Tema 30)
- Límites de funciones. (Tema 25)

Problema nº 4.

Un aficionado utiliza el siguiente sistema para pronosticar el tiempo atmosférico. Clasifica cada día como seco o mojado y supone que la probabilidad de que el tiempo atmosférico de cualquier día sea igual al precedente está dada por p, siendo $0 < p < 1$. Representamos por P_1 la probabilidad de que el tiempo sea seco durante el 1 de enero de 1900 y por P_n la probabilidad de que sea seco el n - ésimo día.

- *Exprese P_n en función de P_1 y de p.*
- *Calcule $\lim_{n\to\infty} P_n$ e interprete el resultado.*

Clasificación.

Bloque temático: Probabilidad.
Temas relacionados:

- Frecuencia y probabilidad. Espacio probabilístico. (Tema 63)
- Probabilidad compuesta. Probabilidad condicionada. Probabilidad total. (Tema 64)

5.2.1. Resolución.

Como comentario, excepto el problema 1 que requiere de bastante ingenio, la dificultad principal del resto son las manipulaciones. En concreto para el problema 2 hace falta conocer (o deducir en el momento) la ecuacion de las tangentes a una elipse por un punto exterior y para el 3 es necesario calcular una primitiva bastante rara. Como comentario adicional, el problema 3 no se encontraba resuelto en la bibliografía.

Problema nº 1.

Sean p y q dos números naturales tales que:

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

Demuestre que p es divisible por 1979.

Resolución. Lo primero que hacemos es agrupar los sumandos positivos juntos por un lado y los negativos por otro, viendo que podemos sacar factor común $1/2$:

$$\frac{p}{q}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659}\right).$$

Vemos que, de acuerdo con la manipulación anterior, será de utilidad sumar y restar la siguiente expresión

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659}\right).$$

Como es de suponer, le sumamos dicha cantidad a los términos positivos y se la restamos a los negativos para poder agrupar. Nos queda que:

$$\frac{p}{q}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-\frac{2}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659}\right),$$

cancelamos ahora los términos iguales para obtener que

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

A continuación nos damos cuenta de que el la suma del denominador del primer término con el del último es igual a la suma del denominador del segundo con el del penúltimo y así sucesivamente. Agrupando con paréntesis:

$$\frac{p}{q}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right).$$

Podemos juntar a denominador común, buscando hacer algo similar a cuando se prueba la fórmula de la suma de progresiones aritméticas:

$$\frac{p}{q} = \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} + \cdots + \frac{1979}{989 \cdot 990}.$$

En resumen obtenemos que:

$$\frac{p}{q} = \frac{1979n}{660 \cdot 661 \cdots 1319}.$$

Para deducir que, efectivamente, p es múltiplo de 1979 vemos que

$$1979 \cdot n \cdot q = 660 \cdot 661 \cdots 1319 \cdot p$$

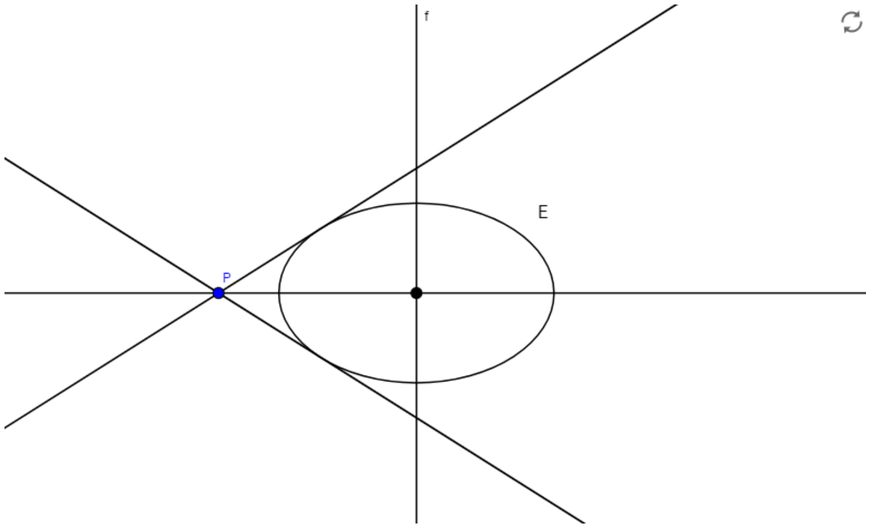
y se cumple que $\sqrt{1979} < 90 < 660$, por lo que ninguno de los números de la derecha puede ser divisor de 1979.

Problema nº 2.

- *Determine el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes trazaadas por el punto* $P = (-6, 0)$ *a las elipses centradas en el origen y que tienen por semiejes a variable y* $b = 3$.
- *Resuelva la ecuación* $2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 0$ *sabiendo que admite una solución compleja de módulo 5.*

Resolución. Este segundo problema tiene bastante carga de manipulación de fórmulas. Se darán las líneas generales sin entrar en demasiado detalle en las cuentas, sobre todo para el primer apartado.

- Utilizaremos la ecuación de las rectas tangentes a una elipse por un punto. No presentaremos el razonamiento de dicha ecuación, es parte del tema de teoría correspondiente y excede nuestros propósitos.



Sea la elipse E dada por las ecuaciones

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y sea un punto exterior $P = (x_0, y_0)$ entonces la ecuación conjunta de las dos tangentes a la elipse E por el punto P es:

$$\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} t - 1 \right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right).$$

Teniendo esto presente, para el caso particular en el que $P = (-6, 0)$ las elipses de semieje $b = 3$, la ecuación conjunta de las tangentes queda, dependiendo de a:

$$\left(\frac{-6x}{a^2} - 1 \right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} - 1 \right) \left(\frac{36}{a^2} - 1 \right).$$

Manipulando y agrupando términos convenientemente, no queda la siguiente ecuación

$$9 (x+6)^2 = \left(36 - a^2\right) y^2.$$

A continuación debemos calcular los puntos de contacto de las rectas tangentes con cada elipse, dependiendo de a. Para ello simplemente tenemos que intersecar sus ecuaciones. Por ejemplo despejando y^2 en la ecuación conjunta de las rectas y sustituyéndolo en la ecuación de la elipse. Queda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{9 (x+6)^2}{b^2 (36 - a^2)} = 1, \text{ recordamos que } 0 < a < 6.$$

Simplificando obtenemos que $a^2 = -6x$. Finalmente, para hallar la ecuación del lugar geométrico pedido, tenemos que sustituir a^2 por $-6x$ en la ecuación de la elipse (que recordemos que originalmente dependía de a):

$$\frac{x^2}{-6x} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Nos damos cuenta de que la ecuación resultante corresponde a una parábola. En consecuencia, recordando que $0 < a < 6$ y que $-6x = a$ vemos que el lugar geométrico pedido no es toda la parábola sino sólamente los $x \in [-6, 0)$. Es decir

$$y^2 = \frac{3}{2}(x+6), \text{ para } x \in [-6, 0).$$

- Nuestro único dato es que el siguiente polinomio de coeficientes reales tiene al menos un cero de módulo 5

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 32x + 75.$$

Lo primero que se puede hacer es comprobar si los valores $x = 5$ y $x = -5$ son dicho cero. No se da tal situación y en consecuencia las raíces de módulo 5 del polinomio $P(x)$ tendrán que ser complejas. Por ser $P(x)$ de grado tres sabemos que por el teorema fundamental del álgebra que $P(x)$ tendrá tres raíces y por ser todos sus coeficientes reales, dos tendrán que ser conjugadas y la tercera raíz tendrá que ser real.

Sean pues las raíces de la forma $a+bi, a-bi, c$ cumpliendo que $|a+bi| = |a-bi| = 5$, es decir que $a^2 + b^2 = 25$. Por la fórmula de Cardano correspondiente al término independiente tenemos que

$$(a+bi)(a-bi)c = \frac{-75}{2} \implies c = \frac{-75}{2(a^2+b^2)}.$$

Con lo que $c = -3/2$. Por otro lado, por la fórmula de Cardano correspondiente al término x^3 tenemos que

$$(a+bi) + (a-bi) + c = \frac{9}{2} \implies 2a + c = \frac{9}{2}.$$

De las dos fórmulas de Cardano y del hecho que $a^2 + b^2 = 25$ conjuntamente se obtiene un sistema del cual fácilmente deducimos que $c = -3/2$, $a = 3$ y $b = \pm 4$. Consecuentemente las soluciones a la ecuación son el conjunto:

$$\left\{ x = \frac{3}{2}, x = 3 \pm 4i \right\}.$$

Problema nº 3.

Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones dada por:

$$f_n = \frac{nx - 1}{(1 + x\log(n))\,(1 + nx^2\log(n))},\ \textit{para } x \in [0,1].$$

Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \ \ y \ \ \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$$

explicando la aparente contradicción del resultado.

Resolución. La resolución de este problema tiene cuentas bastante largas, sobre todo en el cálculo de una primitiva de la función f. Se darán las pautas y los pasos clave para hacer dichas cuentas sin entrar en mayor detalle.

Vemos primero que las funciones f_n son continuas dado que para $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, los factores del denominador no se anulan. En consecuencia las f_n son integrables y podremos hacer uso del teorema fundamental del Cálculo Integral para poder calcular

$$\int_0^1 f_n.$$

Para calcular una primitiva de f_n hacemos el cambio de variable $u = 1/(\log(x) + 1)$ obteniendo que

$$\int f_n = \frac{-1}{\log(n)} \int \frac{u(-n - \log(n)) + n}{\log(n)u^2 + n(u-1)^2} du.$$

En la integral anterior el numerador es igual a la derivada del denominador, salvo factor constante y finalmente obtenemos que para $n \in \mathbb{N}$ y para $x \in [0,1]$ se cumple que:

$$\int f_n = \frac{1}{2\log(n)} \log\left(\frac{x^2 n\log(n) + 1}{(x\log(n) + 1)^2}\right) + C.$$

Calculemos pues el límite usando las propiedades básicas de los logaritmos y la comparación habitual de infinitudes:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\log(n)}\log\left(\frac{n\log(n)+1}{(\log(n)+1)^2}\right)-0\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log(n)}{2\log(n)}+\frac{\log(\log(n))}{2\log(n)}-\frac{2\log(\log(n))}{2\log(n)}\right] \tag{5.1}$$

$$=\frac{1}{2}+0-0$$

Calculemos ahora la integral del límite. Para ello calculamos primero el límite puntual de la sucesión de funciones f_n. Vemos que, para cada $x \in (0,1]$ se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n\log(n)^2 x^2} = 0.$$

Para calcular la integral del límite un punto no va a tener relevancia pero vemos que el $x = 0$ sucede que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \frac{-1}{1} = -1.$$

En conclusión vemos que

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

Por tanto la contradicción aparente es que la integral del límite no coincide con el límite de las integrales aun habiendo convergencia puntual. No obstante esto no debería realmente extrañar puesto que la condición necesaria para que ambas coincidan es la convergencia uniforme, condición mucho más fuerte que la mera convergencia puntual.

Problema nº 4.

Un aficionado clasifica cada día como seco o mojado y supone que la probabilidad de que el tiempo atmosférico de cualquier día sea igual al precedente está dada por p, siendo $0 < p < 1$. Representamos por P_1 la probabilidad de que el tiempo sea seco un día y por P_n la probabilidad de que sea seco el n - ésimo día.

- *Exprese P_n en función de P_1 y de p*
- *Calcule* $\lim_{n\to\infty} P_n$ *e interprete el resultado.*

Resolución. Llamamos A_n al suceso: hace seco el n - ésimo día. Consecuentemente $\bar{A}_n$ es el suceso: hizo mojado el n - ésimo día. Del enunciado se desprende que tendremos que expresar mediante una ley de recurrencia la probabilidad $P(A_n)$, teniendo en cuenta el dato de que conocemos la probabilidad del tiempo de un día, condicionada por el tiempo del día anterior.

Primero, como $P(A) = P(A)P(B) + P(A)P(\bar{B})$, por la ley de la probabilidad total, vemos que se cumple la siguiente igualdad:

$$P(A_n) = P(A_{n-1})P\left(A_n/A_{n-1}\right) + P(\bar{A}_{n-1})P\left(A_n/\bar{A}_{n-1}\right).$$

Ahora, como decíamos al principio, en el enunciado nos dicen que

$$P\left(A_n/A_{n-1}\right) = p \quad \text{y} \quad P\left(A_n/\bar{A}_{n-1}\right) = 1 - p,$$

con lo que nos queda que

$$P_n = P(A_n) = P(A_{n-1})p + \left(1 - P(A_{n-1})\right)(1 - p) = (2p-1)P_{n-1} + 1 - p.$$

Así pues:

$$\begin{aligned} &P_2 = (2p-1)P_1 + 1 - p \\ &P_3 = (2p-1)P_2 + 1 - p = (2p-1)^2P_1 + (2p-1)(1-p) + 1 - p \\ &P_4 = (2p-1)P_3 + 1 - p = (2p-1)^3P_1 + (2p-1)^2(1-p) \\ &\quad + (2p-1)(1-p) + 1 - p \end{aligned} \tag{5.2}$$

De este modo vemos que la expresión que se pide para el primer apartado es:

$$P_n = (2p-1)^{n-1}P_1 + (1-p)\left[((2p-1)^{n-2} + (2p-1)^{n-3} + \cdots + (2p-1) + 1\right].$$

Para la segunda parte del ejercicio simplemente basta observar que $0 < 2p - 1 < 1$, por lo que el primer sumando $\lim_{n\to\infty}(2p-1)^{n-1}P_1 = 0$. El resto de sumandos forman parte de una progresión geométrica de razón con módulo menor que 1 cuya suma conocemos. Nos queda pues

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 0 + (1-p)\frac{1}{1-(2p-1)} = (1-p)\frac{1}{2(1-p)} = \frac{1}{2}.$$

5.3. Examen año 2004.

Como comentario, el examen es muy completo: toca todas las ramas y tiene problemas de todo tipo: problemas complicados en cuanto a las manipulaciones, problemas que requieren de capacidad de interpretación e ingenio y problemas relativos a cuestiones habituales de matemáticas de universidad.

Problema nº 1.

Encontrar todos los números naturales x, y, z mayores que cero que cumplen

$$1 + 2^x 3^y = z^2.$$

Clasificación.

Bloque temático: Números y sucesiones.
Temas relacionados:

- Números enteros. Divisibilidad. (Tema 4).

Problema nº 2.

En el plano nos dan una recta r y tres circunferencias tangentes a r y exteriormente tangentes entre sí (cada una de ellas tangente a las otras dos). Probar que el triángulo que tiene por vértices los centros de las circunferencias es obtusángulo.

Clasificación.

Bloque temático: Geometría.
Temas relacionados:

- Trigonometría plana. (Tema 38)

- Resolución de triángulos. Aplicaciones. (Tema 39)

Problema nº 3.

Resuelva las siguientes cuestiones independientes entre sí:

- *Hallar el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left[\frac{2^1}{1^0}+\frac{3^2}{2^1}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right].$$

- *Demostrar que si todas las normales a una curva suficientemente regular pasan por un punto fijo, dicha curva está contenida (como conjunto de puntos) en una circunferencia.*

Clasificación.

Bloque temático: Cálculo infinitesimal y geometría.
Temas relacionados:

- Límites de funciones. (Tema 25)
- Ecuaciones de curvas y superficies (Tema 46)

Problema nº 4.

Tres personas A, B y C lanzan sucesivamente y en ese orden un dado. Gana el primeo que saque un seis.

- *¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?*
- *Calcular la probabilidad de que el juego termine en el décimo lanzamiento y la persona C saque siempre la suma de lo que acaban de sacar los jugadores A y B en las tiradas anteriores.*

Clasificación.

Bloque temático: Probabilidad.
Temas relacionados:

- Frecuencia y probabilidad. Espacio probabilístico. (Tema 63)
- Probabilidad compuesta. Probabilidad condicionada. Probabilidad total. (Tema 64)

5.3.1. Resolución

El problema 1 requiere cierto ingenio e imaginación. El segundo problema es complicado en cuanto a las manipulaciones de fórmulas (muchas y largas). El tercer y cuarto problema son bastante tipo, aunque es necesario conocer el criterio de Stolz para cierto apartado.

Problema nº 1.

Encontrar todos los naturales x, y, z no nulos que cumplen

$$1 + 2^x 3^y = z^2.$$

Resolución. Manipulamos para obtener una resta de cuadrados:

$$2^x 3^y = z^2 - 1 = (z-1)(z+1).$$

Como el enunciado dice que $x > 0$, se deduce que $(z-1)(z+1)$ es par y por lo tanto ambos factores lo son. En consecuencia $z - 1 = 2k$ y $z + 1 = 2k + 2$ para algun $k \in \mathbb{N}$. Despejando, de esto se deduce que

$$2^{x-2} 3^y = k(k+1).$$

Los números k y $k+1$ son primos entre sí por ser consecutivos por lo que hay dos opciones posibles

- $k = 3^y$ y $k + 1 = 2^{x-2}$. En este caso vemos que se tiene que cumplir la siguiente relación

  $$3^y = k = 2^{x-2} - 1 = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{x-3}.$$

  Como las condiciones del problema estableces que $y > 0$ vemos que $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{x-3}$ tiene que ser múltiplo de 3 y consecuentemente $x - 3$ tiene que ser impar ya que $2 \equiv -1 \mod 3$

  $$3^y \equiv 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{x-3} \mod 3.$$

  Como consecuencia de lo anterior, $x - 2$ es par y será de la forma $x - 2 = 2n$ y obteniéndose nuevamente una diferencia de cuadrados:

  $$3^y = k = 2^{2n} - 1 = (2^n + 1)(2^n - 1).$$

  Dado que las únicas dos potencias de 3 que difieren sólamente en 2 unidades son $(2^n + 1) = 3$ y $(2^n - 1) = 1$ vemos que, para esta primera opción, necesariamente $y = 1$. Recordamos que

  $$3^y = 2^{x-2} - 1.$$

  Por lo que $x = 4$ en esta opción y, finalmente sustituyendo en la expresión del enunciado $z^2 = 1 + 2^4 \cdot 3 = 49$ vemos que $z = 7$. Por lo tanto nos queda la solución

  $$x = 4 \quad y = 1 \quad z = 7.$$

- $k = 2^{x-2}$ y $k+1 = 3^y$. La relación que se tiene que cumplir en este otro caso es

$$2^{x-2} = k = 3^y - 1 = 2(1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{y-1}).$$

Necesariamente se tiene que cumplir que $x > 2$ puesto que $k(k+1)$ es par y se tiene que

$$2^{x-2} \cdot 3^y = k(k+1).$$

En consecuencia vemos que para el segundo caso se tiene que $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{y-1}$ es una potencia no negativa de 2. Si resulta que es 2^0, es decir, $x = 3$ entonces $y = 1$ y $z^2 = 1 + 2^3 \cdot 3 = 25$ con lo que $z = 5$. Con lo que otra posible solución es

$$x = 3 \quad y = 1 \quad z = 5.$$

Finalmente, en el caso en que por el contrario $x > 3$ entonces el número $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{y-1}$ es par. Al ser dicho número una suma de y potencias de 3 (impares) necesariamente y tendra que ser par, es decir, de la forma $y = 2m$. Nuevamente volvemos a conseguir una diferencia de cuadrados:

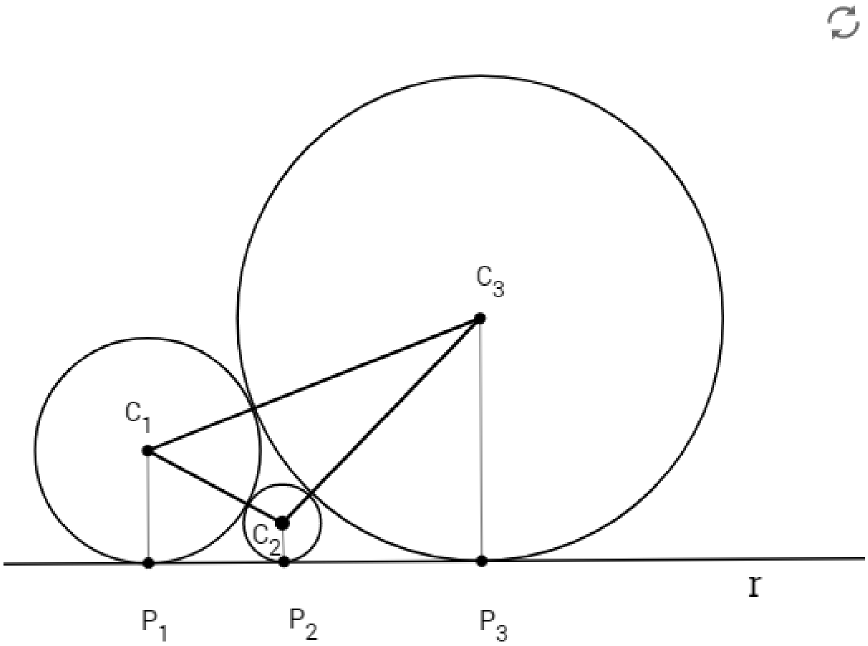
$$2^{x-2} = 3^y - 1 = 3^{2m} - 1 = (3^m + 1)(3^m - 1).$$

De forma similar al primer caso, las únicas dos potencias de 2 que difieren en dos unidades son $(3^m + 1) = 4$ y $(3^m - 1) = 2$. Inmediatamente se deduce que $y = 2$ y que $z = 17$ dado que $z^2 = 1 + 2^5 3^2 = 289$. Nos queda pues la tercera posible solución

$$x = 5 \quad y = 2 \quad z = 17.$$

Problema nº 2.

En el plano nos dan una recta r y tres circunferencias tangentes a r y exteriormente tangentes entre sí (cada una de ellas tangente a las otras dos). Probar que el triángulo que tiene por vértices los centros de las circunferencias es obtusángulo.



Resolución. La resolución contiene manipulaciones bastante largas, en las que no se entrará en detalle. Lo que haremos será probar que el ángulo asociado a la circunferencia pequeña C_2, al que llamaremos α, es obtuso. Si llamamos también r_1, r_2 y r_3 a los radios de cada una de las circunferencias, por el teorema del coseno nos queda que

$$(r_1 + r_3)^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_2 + r_3)^2 - 2(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)\cos(\alpha).$$

Al desrrollar y cancelar términos queda que

$$r_1 r_3 (1 + \cos(\alpha)) = r_2 (r_1 + r_2 + r_3)(1 - \cos(\alpha)).$$

Dado que $\alpha \in [0, \pi]$ (puesto que es el ángulo de un triángulo), equivalentemente podemos probar que $\cos(\alpha) < 0$. Gracias a la igualdad anterior, en la que todos los factores son positivos porque $|\cos(\alpha)| < 1$, vemos que bastará con probar que

$$r_1 r_3 > r_2(r_1 + r_2 + r_3).$$

Ahora bien, vemos que si P_1, P_2 y P_3 son respectivamente los puntos de tangencia entre las circunferencias C_1, C_2 y C_3 con la recta r, se cumple la siguiente igualdad

$$P_1P_2 + P_2P_3 = P_1P_3.$$

Pues bien la manipulación consiste en expresar dicha igualdad mediante el teorema de pitágoras en términos de los radios y elevándola posteriormente al cuadrado se llega a que

$$r_2(r_1 + r_3 + 2\sqrt{r_1 r_3}) = r_1 r_3.$$

De esto se deduce que la desigualdad que queremos probar para resolver el problema es equivalente a la siguiente

$$r_2(r_1 + r_3 + 2\sqrt{r_1 r_3}) > r_2(r_1 + r_2 + r_3).$$

Dividiendo por r_2 y restando $r_1 + r_3$ a ambos lados nos queda que basta con probar que

$$2\sqrt{r_1 r_3} > r_2.$$

Lo cual es cierto puesto que basta multiplicar entre sí las desigualdades $0 < \sqrt{r_2} < \sqrt{r_1}$ y $0 < \sqrt{r_2} < \sqrt{r_3}$.

Problema nº 3.

- *Hallar el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left[\frac{2^1}{1^0}+\frac{3^2}{2^1}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right].$$

- *Demostrar que si todas las normales a una curva suficientemente regular pasan por un punto fijo, dicha curva está contenida en una circunferencia.*

Resolución. Las dos cuestiones son totalmente independientes y las resolveremos por separado.

- Por la apariencia del límite del enunciado, al que llamamos L (suponiendo que existe, en un abuso de la notación) es esperable que vayamos a poder simplificarlo bastante con el criterio de Stolz, cuyo criterio adjuntamos a continuación:

Criterio de Stolz: Sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$ dos sucesiones de números reales. Sea la segunda estrictamente monónota y divergente y sean ambas tales que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

Dado que la sucesión de término general $1/n^2$ es estrictamente monótona divergente hacia $+\infty$, calculamos el límite del criterio de Stolz. Todos los términos del numerador excepto uno van a simplificarse:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2-n^2}\left[\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1}\left[\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right].$$

Ahora bien, nos damos cuenta de que el límite de la expresión entre corchetes es en realidad el número e:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

Como el límite del producto es igual al producto de los límites cuando ambos existen gracias al criterio de Stolz podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left[\frac{2^1}{1^0}+\frac{3^2}{2^1}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right]=\frac{e}{2}.$$

- Para la segunda cuestión, sea $I=[0,1]$ y sea $\alpha : I\to\mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ una parametrización de una curva que cumple las condiciones del enunciado. Sea $P=(a,b)$ el punto fijo en el que confluyen las normales. Entonces se cumple que los vectores $\alpha'(t)$ y $\alpha(t)-P$ son perpendiculares para todo $t\in I$. Consecuentemente su producto escalar es nulo:

$$0=(x'(t),y'(t))\cdot(x(t)-a,y(t)-b)=x'(t)(x(t)-a)+y'(t)(y(t)-b).$$

Operando los paréntesis y multiplicando toda la igualdad por 2 nos queda que

$$0=2x'(t)x(t)-2x'(t)a+y'(t)y(t)-y'(t)b=0 \text{ para cada } t\in I.$$

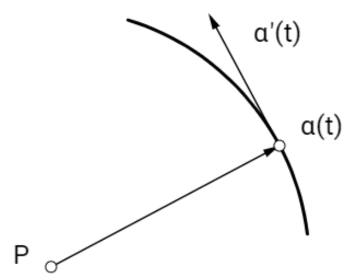
Integramos (una de las condiciones que nos dan es que la curva es suficientemente regular) y resulta que

$$0=x^2(t)+y^2(t)-2ax(t)-2by(t).$$

Completando cuadrados hemos obtenido que

$$a^2+b^2=(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2.$$

Efectivamente todos los puntos de la curva satisfacen estar en la circunferencia con centro en P y radio a^2+b^2.



Problema nº 4.

Tres personas A, B y C lanzan sucesivamente y en ese orden un dado. Gana el primeo que saque un seis.

- *¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?*
- *Calcular la probabilidad de que el juego termine en el décimo lanzamiento y la persona C saque siempre la suma de lo que acaban de sacar los jugadores A y B en las tiradas anteriores.*

Resolución. Interpretaremos el enunciado como un espacio probabilístico para calcular lo que se con pide en cada apartado

- Empecemos por la probabilidad de que gane el jugador A.

  Denotamos como P_A a la probabilidad de que gane A.

  Denotamos por A_n al suceso: gana el jugador A en la tirada n - ésima.

  Sabemos que A sólo puede ganar en las tiradas que son de la forma $3n+1$, puesto que es el primero en tirar. Además podemos calcular fácilmente la probabilidad de que A gane en una de dichas tiradas, puesto que cada tirada es un suceso independiente:

  $$P(A_{3n+1}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \cdot \frac{1}{6}$$

  Consecuentemente

  $$P_A = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_{3n+1}) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-(5/6)^3} = \frac{36}{91}.$$

  De forma completamente paralela y con la misma notación calculamos P_B. En este caso habrá que sumar las probabilidades de los sucesos B_{3n+2} puesto que B sólo puede ganar en las tiradas de la forma $3n+2$. Nos queda que

  $$P_B = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n+1} = \frac{5}{6} \cdot P_A = \frac{30}{91}.$$

  Por útimo la probabilidad de que gane el jugardor C será $P_C = 1 - P_A - P_B$ puesto que la probabilidad de que no gane ninguno es cero.

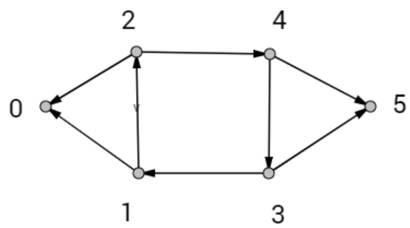
- Sea S el suceso descrito por el enunciado. Nos damos cuenta de que el resultado en las primeras 9 tiradas son sucesos que están condicionados en tres grupos de tres, siendo los grupos independientes entre sí. Además el resultado de la última tirada es independiente de las demás. Como los tres grupos son equiprobables simplemente usaremos las reglas de la probabilidad condicionada para calcular la probabilidad de que, por ejemplo el primer grupo, cumpla las condiciones del suceso S y lo elevaremos al cubo. Denotaremos por T_A, T_B y T_C al resultado de cada una de las tres tiradas del primer grupo.
  Primero, para que se pueda cumplir que $T_A + T_B = T_C$, vemos que necesariamente
  $$T_A \in \{1, 2, 3, 4\}.$$
  Ahora, una vez fijado T_A los valores que puede tomar T_B para que se cumplan las condiciones dadas por el enunciado sólo son admisibles los $5 - T_A$ resultados cuya suma es menor que 6, es decir,
  $$T_B \in \{1, 2 \ldots, 5 - T_A\}.$$
  Finalmente T_C sólo admite un resultado posible, $T_A + T_B$.
  En consecuencia la probabilidad de uno de estos grupos de tres pertenezca a S será
  $$\sum_{k=1}^{4} [P(T_A = k) \cdot P(T_B \in \{1, 2 \ldots, 5 - k\}) \cdot P(T_C = T_A + T_B)].$$
  Como se supone que el dado no está trucado la probabilidad anterior queda como la siguiente
  $$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{6} \cdot \frac{5-k}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{108}$$
  Por lo tanto, teniendo en cuenta que en la décima tirada la probabilidad de que el jugador saque un seis es $1/6$ nos queda finalmente que
  $$P(S) = \frac{5^3}{108^3} \frac{1}{6}$$

5.4. Examen año 2002.

Como comentario general el examen está redactado de una forma un tanto intrincada y confusa. Los problemas tienen una dificultad muy dispar. Nuevamente se tocan todos los bloques temáticos y cabe destacar que el tercer problema está ambientado en la mecánica clásica.

Problema nº 1.

El grafo de la figura representa el juego siguiente: Las apuestas se hacen sobre el lanzamiento de una moneda de Laplace. Inicio con un millón de euros y apuesto, si no acierto tengo cero euros y paro de jugar, si acierto tengo dos millones y sigo jugando. Apuesto, si no acierto tengo cero euros y dejo de jugar, si acierto tengo cuatro millones y sigo jugando. Apuesto, si acierto tengo cinco millones gano y finaliza el juego, si no acierto tengo tres millones y sigo jugando. Apuesto, si no acierto tengo un millón y sigo jugando y si acierto tengo cinco millones, gano y finaliza el juego. Cada posible transcurso del juego corresponde a un camino que conmienza en 1 y termina en el borde $\{0, 5\}$.



Calcular la probabilidad de ganar los cinco millones, la esperanza y la varianza de la variable N que da la duración del juego (número de apuestas).

<u>Clasificación.</u>

Bloque temático: Probabilidad.
Temas relacionados:

- Distribuciones de probabilidad de variables discreta. (Tema 65)
- Técnicas de recuento. Combinatoria. (Tema 3)

Problema nº 2.

Sea f la función real de variable real dada mediante

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}.$$

Estudiar las asíntotas y la monotonía de f y dibujar aproximadamente su gráfica.

Clasificación.

Bloque temático: Cálculo infinitesimal.
Temas relacionados:

- Estudio global de funciones. Aplicaciones a la representación gráfica de funciones (Tema 28)
- Primitiva de una función. Cálculo de algunas primitivas. (Tema 30)
- Funciones reales de variable real. (Tema 21)

Problema nº 3.

Un disco de radio r rueda sin deslizamiento sobre la recta $y = 0$ dando una vuelta completa. Inicialmente su centro está en $O = (0, -r)$, y el punto $P = (0, 0)$ genera una curva C. Admitiendo que al dejar caer una bola situada en un punto de la superficie de un cuenco cuya sección tiene la forma de C, rueda sobre ella y se rige por la ley de caída libre $v^2 = 2gh$, donde g es la aceleración de la gravedad y v es la velocidad de la bola en el punto que se encuentra a una diferencia de altura h respecto del punto de donde se soltó, hallar el tiempo que tarda la bola en llegar al fondo del cuenco.

Clasificación.

Bloque temático: Cálculo infinitesimal y geometría.
Temas relacionados:

- Límites de funciones. (Tema 25)
- Ecuaciones de curvas y superficies (Tema 46)
- Aplicación del estudio de funciones a la resolución de problemas de la Naturaleza. (Tema 32)

Problema nº 4.

Demostrar que si tres números x, y y z cumplen que

$$(xy + yz + xz)^3 = xyz(x + y + z)^3,$$

entonces están en progresión geométrica.

<u>Clasificación.</u>

Bloque temático: Números y álgebra.
Temas relacionados:

- Polinomios. Operaciones. Divisibilidad de poliniomios. (Tema 13)

- Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas. (Tema 8)

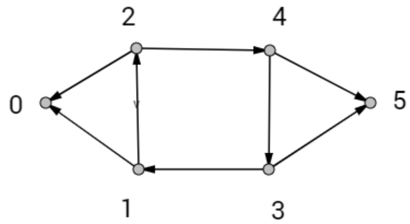
5.4.1. Resolución

Como comentarios, los dos primeros problemas son claramente más sencillos y relativos a cuestiones habituales de la probabilidad y la representación de funciones. Los dos últimos, sin embargo son bastante duros, cargados de detalles técnicos manipulaciones poco evidentes o requieren de "idea feliz". Como última observación para el problema 4 se aportan dos posibles resoluciones, una más rudimentaria y la otra un poco más imaginativa. En ambos casos es necesario conocer cierta caracterización de las progresiones geométricas.

Problema nº 1.

El grafo de la figura representa un juego de apuestas. Cada número representa los millones de euros que tengo. Gano o pierdo según una moneda de Laplace. Empiezo en el 1 y sólamente puedo acabar en el borde $\{0, 5\}$.

Calcular la probabilidad de ganar los cinco millones, la esperanza y la varianza de la variable N que da el número de apuestas que dura el juego.



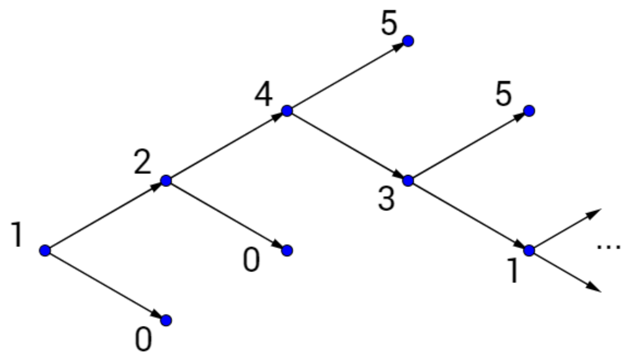
Resolución. Lo primero en lo que nos fijamos es en que si el apostante en la cuarta apuesta el juego todavía no ha acabado, el juego está exactamente en la misma situación que antes de comenzar. En consecuencia vemos que el juego puede ser ganado sólamente en alguna de las apuestas de la forma $4n-1$ o $4n$. Si denotamos por G_n al suceso: el apostante gana el juego en la n - ésima apuesta, la probabilidad p de que el jugador gane los cinco millones es:

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p(G_{4n-1}) + p(G_{4n}) \right].$$

Además conocemos dichas probabilidades porque la moneda es de Laplace (y se supone que es justa):

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}^{4n-1} + \frac{1}{2}^{4n} \right] = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{4n-1} = \frac{1}{5}.$$

Sea N la variable que indica el número de apuestas que suceden hasta que termina el juego. El juego podemos representarlo de forma gráfica de la siguiente manera:



Vemos que puede acabar (ganando o perdiendo el apostante, es indiferente) en cualquier turno y que

$$p(N = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia la esperanza será:

$$E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pese a que es una serie aritmético geométrica y conocemos su suma, podemos calcularla con métodos analíticos. Aprovechamos que conocemos la suma de la serie cuyo término general es x^n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Como es derivable dentro de su radio de convergencia, $|x| < 1$, derivando ambos términos y multiplicando por x deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

En resumidas cuentas podemos calcular la esperanza

$$E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p(N = n) = 2.$$

Como es habitual, para calcular la varianza calculamos primero $E(N^2)$. Derivando otra vez en la expresión anterior:

$$E(N^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p(N = n) = x\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Usando este cálculo previo podemos calcular la varianza:

$$\sigma(N) = E(N^2) - E(N)^2 = \frac{1/2(1+1/2}{(1-1/2)^3} - 4 = 2.$$

Problema nº 2.

Estudiar las asíntotas y la monotonía de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y dibujar aproximadamente su gráfica.

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

Resolución. Por comodidad, sea $g(t)$ la función bajo el signo integral:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

Al ser $x^4+t^2+1 > 0$, tenemos que $g(x)$ es continua y en particular integrable en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$. Como consecuencia $f(x)$ está bien definida y es continua. Para facilitar el estudio de las asíntotas y de la monotonía veremos primero que f es una función impar, tiene simetría respecto del origen de coordenadas.

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = \int_{-x}^{-2x} \frac{-du}{\sqrt{u^4+u^2+1}} = -f(x).$$

Donde para efectuar los cálculos no hemos hecho nada más que el cambio de variable $u = -x$. En particular $f(0) = 0$ y hemos reducido el problema al intervalo $[0, \infty]$.

Para el estudio de las asíntotas (ya hemos visto que no hay asíntotas verticales puesto que f es continua) se hace la siguiente acotación:

$$0 \leq f(x) < \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4}} = -\frac{1}{t}\Big]_x^{2x} = \frac{1}{2x}.$$

Tomando límites nos queda que

$$0 \leq \lim_{x\to\infty} f(x) \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

De modo que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $\pm\infty$.

Para el estudio de la monotonía el teorema fundamental del cálculo integral nos garantiza que, por ser la función integrando g continua, nuestra función f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}} - \frac{2}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

Nos interesan los x en los que $f'(x) = 0$. Para esto juntamos las fracciones de la expresión anterior y nos fijamos en el numerador:

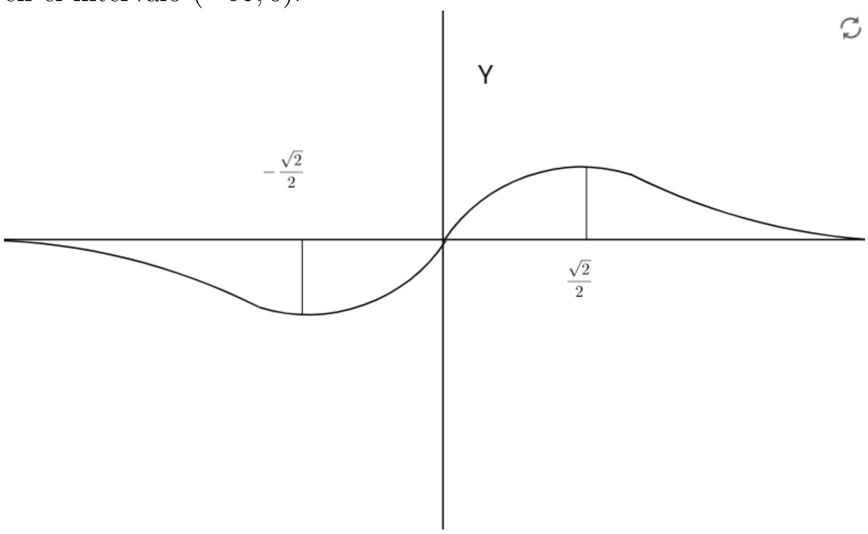
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow -12x^4 + 3 = 0.$$

Donde en la última equivalencia no hemos hecho más que multiplicar por el conjugado de la diferencia de raíces para simplificarlo y operar. Dado que el denominador será el producto de dos factores positivos el signo de $f'(x)$ vendrá determinado por el signo de $-12x^4 + 3 = 3(1 - 4x^4)$. Nos queda

$$f'(x) > 0 \text{ para } 0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}, f \text{ es creciente en } \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$f'(x) < 0 \text{ para } x > \frac{\sqrt{2}}{2}, f \text{ es decreciente en } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right).$$

La simetría respecto del origen nos da inmediatamente el comportamiento en el intervalo $(-\infty, 0)$.



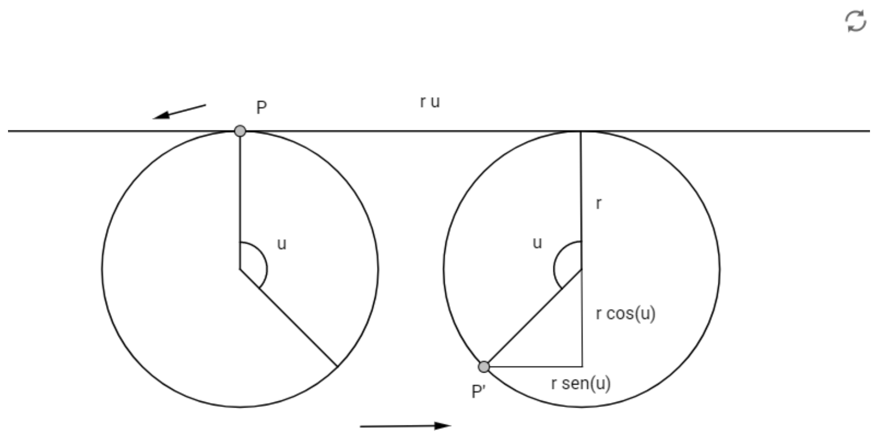
Problema nº 3.

Consideremos el cicloide C cuyo punto inicial es el $P = (0, 0)$ y cuya circunferencia de giro tiene centro en $O = (0, -r)$. Dejamos caer una bola en un cuenco cuya sección tiene la forma de C. Consideramos que se rige por la ley de caída libre $v^2 = 2gh$ (sin deslizamiento) donde v es la velocidad de la bola en el punto que se encuentra a una diferencia de altura h respecto del punto de donde se soltó. Hallar el tiempo que tarda la bola en llegar al fondo del cuenco.

Resolución. Lo que se nos está diciendo en la primera oración es que la curva C es un cicloide. En el caso particular en que el punto inicial es el $P = (0, 0)$ y la circunferencia de radio r se desplaza por debajo de la recta $y = 0$, la parametrización más habitual es la siguiente:

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, u \mapsto r(u - \operatorname{sen}(u), \cos(u) - 1).$$

Para entender dicha parametrización nos damos cuenta de que simplemente se trata de interpretar de forma adecuada. Partimos del punto P y desplazamos la circunferencia en un ángulo de u radianes dejando dicho punto transformado en el P'.
Veamos las coordenadas: el centro avanzará $r \cdot u$ unidades de distancia hacia la derecha. En consecuencia la coordenada de la x para P' será $r \cdot u - r \operatorname{sen}(u)$ (puesto que el punto P gira con la circunferencia). Por otro lado la coordenada de la y será $\cos(u) - r$.



Vemos que la dificultad principal del problema reside en que en $v^2 = 2gh$ lo que nos dice es que si $s(t)$ el es espacio recorrido en función del tiempo tenemos que

$$s'(t)^2 = 2gh(t).$$

Necesitamos relacionar la altura $h(t)$ con el espacio recorrido $s(t)$ para obtener una ecuación diferencial con la que podamos trabajar. Para esto usamos la parametrización que tenemos. La altura $h(u)$ que tiene el móvil en el punto $\alpha(u)$ es

$$h(u) = r(1 - \cos(u)) = 2r\left(1 - \cos\left(\frac{u}{2}\right)^2\right).$$

Por otro lado, haciendo los cálculos pertinentes, la distancia $s(u)$ recorrida por el móvil en el punto $\alpha(u)$ es

$$s(u) = \int_0^u \left|\alpha'(k)\right| dk = 2r\int_0^u \operatorname{sen}\left(\frac{k}{2}\right) dk = 4r\left(1 - \cos\left(\frac{k}{2}\right)\right).$$

De las dos igualdades conjuntamente obtenemos que

$$h(u) = s(u) - \frac{s(u)^2}{8r}.$$

Nos damos cuenta de que, aunque hemos utilizado la parametrización en radianes, la igualdad obtenida relaciona la altura que el móvil tiene en un punto con la distancia que lleva recorrida hasta ese punto. En consecuencia nos queda que

$$s'(t)^2 = 2g\left(s(t) - \frac{s(t)^2}{8r}\right).$$

Con vistas a obtener una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden derivamos a ambos lados y dividimos por $2s'(t)$ (podemos porque la velocidad no se anula). La ecuación resultante es

$$s''(t) + \frac{g}{4r}s(t) = g.$$

La solución para las condiciones iniciales $s(0) = s'(0) = 0$ es

$$s(t) = 4r\left(1 - \cos\sqrt{\frac{g}{4r}}\right).$$

La expresión anterior nos relaciona el espacio que lleva recorrido el móvil, con el tiempo transcurrido t. Como lo que nos piden es el tiempo que tarda el móvil en llegar al fondo del cuenco lo que haremos es calcular el espacio recorrido en dicho momento. Recordamos que que la parametrización del cicloide era

$$\alpha(u) = r(u - \operatorname{sen}(u), \cos(u) - 1),$$

con lo que la segunda componente tiene un mínimo en $u = \pi$ (que será el fondo del cuenco). Consecuentemente el espacio recorrido en dicho momento será $s(\pi) = 4r$ y obtenemos que el tiempo T en el que el móvil llega al fondo del cuenco cumple

$$4r = 4r\left(1 - \cos\sqrt{\frac{g}{4r}}\right).$$

Finalmente, despejando concluímos que la bola tarda un tiempo $T = \pi\sqrt{r/g}$ en llegar al fondo del cuenco.

Problema nº 4.

Demostrar que si tres números x, y y z cumplen que

$$(xy + yz + xz)^3 = xyz(x + y + z)^3,$$

entonces están en progresión geométrica.

Resolución. Nos damos cuenta de que los factores de la expresión son precisamente los coeficientes de las fórmulas de Cardano. Apartemos primero un caso trivial: si alguno de los tres números x, y o z fuera nulo entonces se tendría que

$$xy + yz + xz = 0.$$

En dicho caso al menos dos de los tres números serán nulos y tendremos que x, y y z están en progresión geométrica de razón 0.

Vayamos con el caso general en el que x, y y z son no nulos: por comodidad con la notación usual de las fórmulas de Cardano llamamos

$$a = x + y + z, \qquad b = xy + yz + xz, \qquad c = xyz.$$

Con esta nueva notación la hipótesis queda reescrita como que $b^3 = ca^3$ y además notamos que x, y, z son las raíces del polinomio

$$P(t) = t^3 - at^2 + bt - c.$$

Analicemos primero el caso en el que $a = 0$. Vemos que por lo primero $b = 0$ y en consecuencia se tiene que

$$0 = P(y) = y^2 - c = y(y^2 - xz).$$

Como hemos supuesto que x, y, z son no nulos obtenemos que $y^2 = xz$. Despejando $z = y \cdot y/x$ y vemos que tenemos la progresión

$$x, \qquad y = x \cdot \frac{y}{x}, \qquad z = y \cdot \frac{y}{x},$$

de razón y/x.

Para el segundo caso, cuando $a \neq 0$ vemos primero que si

$$b^3 = ca^3, \text{ es decir } c = \left(\frac{b}{a}\right)^3.$$

Manipulando convenientemente en la expresión de $P(t)$ nos queda que

$$P(t) = t^3 - at^2 + bt - \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(t - \frac{b}{a}\right)\left(t^2 + \frac{b}{a}t + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - at\right).$$

Teniendo en cuenta que x, y, z son las raíces de $P(t)$, vemos que necesariamente una de ellas será b/a. Supongamos que es y (para los otros dos casos el razonamiento sería idéntico), entoncess $xyz = c = (b/a)^3$ y por lo tanto:

$$xz = \frac{xyz}{y} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = y^2.$$

De nuevo por el razonamiento del caso primero, esto significa que están en progresión geométrica de razón y/x.

Resolución. Otra posible forma de resolverlo es usar el siguiente resultado:

Tres números x, y y z están en progresión geométrica si, y sólo si, se da alguna de estas tres igualdades:

$$x^2 - yz = 0 \quad y^2 - xz = 0 \quad z^2 - xy = 0,$$

es decir, el producto de dos de ellos coincide con el cuadrado del tercero.

Notamos además que esta segunda condición podemos expresarla como que

$$(x^2 - yz)(y^2 - xz)(z^2 - xy) = 0.$$

De este modo si consideramos los polinomios

$$F(x, y, z) = (x^2 - yz)(y^2 - xz)(z^2 - xy)$$

$$G(x, y, z) = (xy + yz + xz)^3 = xyz(x + y + z)^3$$

el problema trata de comprobar que si una terna (x, y, z) cumple que $F(x, y, z) = 0$ entonces también se sigue que $G(x, y, z) = 0$. Se puede hacer de varias formas, la más rudimentaria siendo simplemente operar y ver que, de hecho, ambos polinomios coinciden.

5.5. Examen año 2000.

Para esta convocatoria nuevamente aparecen problemas de todo tipo: algunos habituales, otros bastante ingeniosos o realmente duros. Como comentario, el enunciado de este examen es bastante conciso y con bastante carga del bloque de álgebra (dos problemas enteros).

Problema nº 1.

Dos jugadores A y B juegan, alternativamente, partidas. Gana el juego el primer jugador que consigue ganar una partida. La probabilidad de que gane A sus partidas es p_1, y la probabilidad de que B gane las suyas es p_2, con $p_2 > p_1$. Para compensar su ventaja, B deja que A juegue la primera partida. ¿Qué relación deben cumplir p_1 y p_2 para que el juego sea justo, esto es, para que A y B tengan la misma probabilidad de ganar el juego?

Clasificación.

Bloque temático: Probabilidad.
Temas relacionados:

- Distribuciones de probabilidad de variables discreta. (Tema 65)
- Técnicas de recuento. Combinatoria. (Tema 3)
- Funciones reales de variable real. (Tema 21)

Problema nº 2.

Hallar las condiciones que tienen que cumplir los coeficientes de las ecuaciones

$$z^3 + p_1 z + q_1 = 0, \qquad z^3 + p_2 z + q_2 = 0$$

para que los afijos de las soluciones de cada una de dichas ecuaciones formen triángulos semejantes.

Clasificación.

Bloque temático: Álgebra y geometría.
Temas relacionados:

- Polinomios. (Tema 13)
- Homotecia y semejanza en el plano. (Tema 42)
- Números complejos. Aplicaciones geométricas. (Tema 9)

Problema nº 3.

Partiendo de un valor cualquiera $x_0 \in \mathbb{R}$, se construye la suceción (x_n) mediante la fórmula

$$x_n = c\,\mathrm{sen}(x_{n-1}) + k$$

donde $0 < c < 1$ y k es una constante real cualquiera. Demostrar que la sucesión (x_n) es convergente.

Clasificación.

Bloque temático: Cálculo infinitesimal.
Temas relacionados:

- Funciones reales de variable real. (Tema 21)

- Límites de funciones. (Tema 25)

Problema nº 4.

Se dan un foco F y dos puntos de una hipérbola. Se pide el lugar geométrico del segundo foco de las hipérbolas que tienen comunes tres puntos dados.

Clasificación.

Bloque temático: Álgebra.
Temas relacionados:

- Ecuaciones. Resolución de ecuaciones. (Tema 14)

- Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas. (Tema 8)

5.5.1. Resolución

Nuevamente la resolución de los problemas 1 y 3 es bastante tipo con procedimientos habituales de la probabilidad y del cálculo (en concreto las sucesiones de Cauchy). Sin embargo el problema número 2 es muy duro, con bastantes detalles técnicos y realmente largo. El último problema requiere ingenio y buena capacidad de interpretación, no obstante si se encauza bien no resulta demasiado complicado.

Problema nº 1.

Dos jugadores A y B juegan, alternativamente, partidas. Gana el juego el primer jugador que consigue ganar una partida. La probabilidad de que gane A sus partidas es p_1, y la probabilidad de que B gane las suyas es p_2, con $p_2 > p_1$. Para compensar su ventaja, B deja que A juegue la primera partida. ¿Qué relación deben cumplir p_1 y p_2 para que el juego sea justo, esto es, para que A y B tengan la misma probabilidad de ganar el juego?

Resolución. Denotamos por P_A y por P_B a las probabilidades que tienen respectivamente A y B de ganar el juego (no una partida concreta). Para que el juego sea justo tiene que cumplirse que $P_A = P_B$. Para calcular P_A y P_B se tendrá en cuenta la siguiente consideración: si A y B juegan una partida sin haber ganado ninguno de ellos, volvemos a estar en la situación inicial en la que no se había jugado todavía ninguna partida.

Calculemos pues la probabilidad P_A. El jugador A gana: en la primera tirada con probabilidad p_1 o, en el caso en que pierde y también pierde B en su primera partida, con la probabilidad que tenía inicialmente. Esto es

$$P_A = p_1 + (1-p_1)(1-p_2)P_A,$$

que despejando queda

$$P_A = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1p_2}.$$

Para calcular la probabilidad P_B procedemos de forma similar. El jugador B gana: cuando A ha perdido en la primera partida, con probabilidad p_2 o cuando ninguno de los dos gana en la primera partida, con la misma probabilidad que tenia inicialmente. Queda

$$P_B = (1-p_1)\left[p_2 + (1-p_2)P_B\right],$$

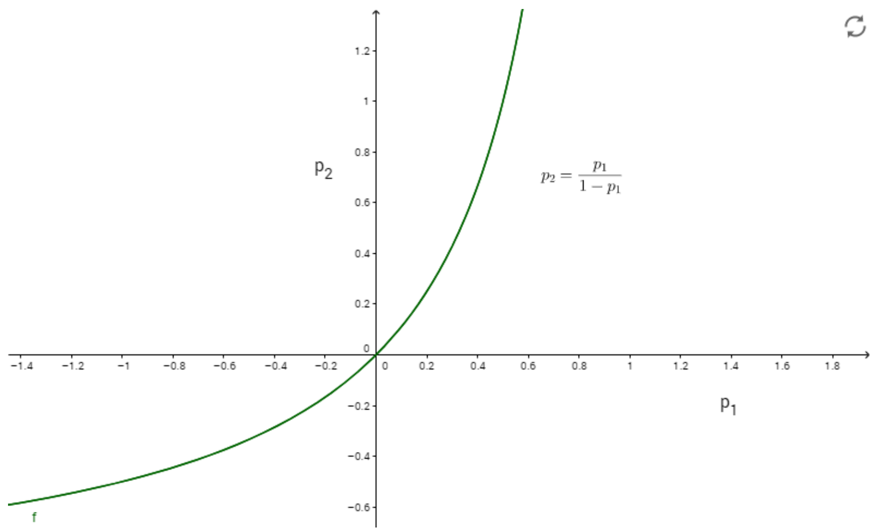
que, tras despejar queda que

$$P_B = \frac{(1-p_1)p_2}{p_1 + p_2 - p_1p_2}.$$

Nos queda pues igualar las expresiones de P_A y de P_B para determinar la relación que tiene que haber para que el juego sea justo. Nos queda que

$$p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}.$$

Se adjunta la función anterior representando p_1 en el eje de abscisas y p_2 en el de ordenadas. Vemos que, como era de suponer y como nos decía el enunciado, efectivamente siempre se tiene que $p_2 > p_1$.



Problema nº 2.

Hallar las condiciones que tienen que cumplir los coeficientes de las ecuaciones

$$z^3 + p_1 z + q_1 = 0, \qquad z^3 + p_2 z + q_2 = 0$$

para que los afijos de las soluciones de cada una de dichas ecuaciones formen triángulos semejantes.

Resolución. La resolución de este problema es bastante larga porque primero hay que indagar sobre una condición necesaria y luego probar que dicha condición es, de hecho suficiente. Además resulta algo técnica porque ambas partes requieren del siguiente resultado:

Las soluciones de los afijos de la ecuación compleja $z^3+pz+q=0$, siendo $p, q \in \mathbb{C}$ están alineados si, y sólo si

$$q = 0 \quad \text{o} \quad \left[\frac{p^3}{q^2} \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \frac{p^3}{q^2} \leq -\frac{27}{4}\right].$$

Nos vamos a ceñir estrictamente a lo que pide el problema, que es dar una condición necesaria. Con esto en mente nos interesa sólo probar el recíproco del resultado anterior.
La implicación de izquierda a derecha sería útil para obtener la condición necesaria.

Supongamos pues que se cumple lo anterior. Primero si $q = 0$ entonces la ecuación nos queda

$$z^3 + pz = z(z^2 + p) = 0$$

cuyas soluciones son $z = 0$ y dos números complejos $z = \pm\sqrt{p}$, que son opuestos. En consecuencia los afijos están alineados. Sino, es decir, en el caso de que

$$q \neq 0 \quad \text{y} \quad \left[\frac{p^3}{q^2} \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \frac{p^3}{q^2} \leq -\frac{27}{4}\right].$$

Lo que haremos será transformar la ecuación $z^3 + pz + q = 0$ por una semejanza $Z = az$, obteniendo la ecuación equivalente $z^3 + pa^2z + qa^3 = 0$, siendo $a = p/q$ (recordemos que el caso $q = 0$ ya estaba tratado). Como vemos la ecuación semejante será de coeficientes reales

$$pa^2 = qa^3 = \frac{p^3}{q^2} \in \mathbb{R}$$

y gracias a la otra hipótesis su discriminante es

$$\Delta = 4(pa^2)^3 + 27(qa^3)^2 = \left(4\frac{p^3}{q^2} + 27\right)(qa^3)^2 \leq 0.$$

Por lo tanto la ecuación semejante tiene soluciones reales, por tanto alineadas y, en consecuencia, también estarán alineadas las soluciones de la ecuación original.

Volviendo con el problema que nos preocupa: la condición suficiente que buscamos es

$$q_1q_2 \neq 0 \quad \text{y} \quad \left[\frac{p_1^3}{q_1^2} = \frac{p_2^3}{q_2^2} \notin \mathbb{R} \quad \text{o} \quad \frac{p_1^3}{q_1^2} = \frac{p_2^3}{q_2^2} > -\frac{27}{4}\right].$$

Como nota, para indagar sobre ella como condición necesaria lo que haríamos sería darnos cuenta de que ambas ecuaciones tienen nulo el coeficiente del término cuadrático y por tanto las ecuaciones de Cardano nos dicen que la suma de los afijos de las soluciones es 0. Por tanto ambos triángulos tienen por baricentro al $(0, 0)$ y, de ser semejantes, la semejanza será de hecho una homotecia.

Veamos pues que dicha condición es suficiente. Lo primero es que por el resultado del principio los afijos no están alineados, podemos suponer que al menos forman dos triángulos. Para la demostración distinguiremos los dos siguientes casos

- Cuando p_1 o p_2 es cero. En realidad vemos que por la condición, serán nulos ambos. Las ecuaciones quedan reducidas a

  $$z^3 + q_1 = 0, \qquad z^3 + q_2 = ,0$$

  Como $q_1, q_2 \neq 0$ los afijos correspondientes a sus raíces cúbicas forman triángulos equilatéros, es decir, equivalentes.

- Cuando ni p_1 ni p_2 son cero. En este caso veremos que las ecuaciones son semejantes por la homotecia

  $$w = az, \text{ siendo } a = \frac{p_1 \cdot q_2}{p_2 \cdot q_1}.$$

  Una vez normalizada, la primera ecuación queda transformada en

  $$w^3 + p_1 a^2 w + q_1 a^3 = 0.$$

  Por como hemos escogido a y por la hipótesis $p_1^3/q_1^2 = p_2^3/q_2^2$ vemos que dicha ecuación es de hecho igual a la segunda $z^3 + p_2 z + q_2 = 0$:

  $$p_1 a^2 = \frac{p_1^3 \cdot q_2^2}{p_2^2 \cdot q_1^2} = \frac{p_2^3 \cdot q_1^2}{p_2^2 \cdot q_1^2} = p_2, \qquad qa^3 = \frac{p_1^3 \cdot q_2^3}{p_2^3 \cdot q_1^2} = \frac{p_1^3 \cdot q_2^3}{p_1^3 \cdot q_2^2} = q_2.$$

  En conclusión los triángulos que forman los afijos son semejantes porque podemos transformar una ecuación en la otra por una homotecia.

Problema nº 3.

Partiendo de un valor cualquiera $x_0 \in \mathbb{R}$, se construye la suceción (x_n) mediante la fórmula

$$x_n = c\operatorname{sen}(x_{n-1}) + k$$

donde $0 < c < 1$ y k es una constante real cualquiera. Demostrar que la sucesión (x_n) es convergente.

Resolución. No podemos indagar sobre ningún punto fijo porque no sabemos despejar en

$$x = c\operatorname{sen}(x) + k.$$

En consecuencia lo que haremos será utilizar la convergencia de Cauchy. Empezamos por acotar la distancia entre dos términos consecutivos

$$|x_{n-1} - x_n| = c|\operatorname{sen}(x_n) - \operatorname{sen}(x_{n-1})|.$$

Como es de proceder habitual en este tipo de situaciones, usamos el teorema del valor medio aplicado al intervalo de extremos x_n y x_{n-1} para obtener que

$$|\operatorname{sen}(x_n) - \operatorname{sen}(x_{n-1})| = |\cos(\psi_n)||x_n - x_{n-1}|,$$

para cierto valor ψ_n perteneciente al interior de dicho intervalo. Realmente el valor ψ_n no nos importa, lo único importante es que $|\cos(\psi_n)| \leq 1$ y, en consecuencia,

$$|x_{n-1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|.$$

Podemos reiterar el razonamiento anterior sucesivamente en los intervalos que tienen por extremos x_i y x_{i-1} con $i = 1, 2 \ldots, n-1$ para llegar a la conclusión de que

$$|x_{n-1} - x_n| \leq c^n|x_1 - x_0|.$$

De esta forma hemos acotado la distancia de dos términos consecutivos cualesquiera x_n, x_{n+1} en términos de la distancia entre los dos primeros x_0 y x_1. Nos falta acotar la distancia entre dos términos cualesquiera x_n y x_{n+k}. Primero vemos que

$$|x_{n+k} - x_n| \leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|.$$

Usando la acotación anterior nos queda que

$$|x_{n+k} - x_n| \leq (c^{n+p-1} + c^{n+p-2} + \cdots + c^n)|x_1 - x_0|.$$

Para finalizar vemos que tenemos la suma de unos cuantos términos que están en progresión geométrica de razón $0 < c < 1$. Podemos acotar considerando la suma de la sucesión completa, puesto que todos sus términos son positivos. Nos queda que

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{c^n}{1-c}|x_1 - x_0| \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Por lo tanto la sucesión (x_n) es convergente por ser de Cauchy.

Problema nº 4.

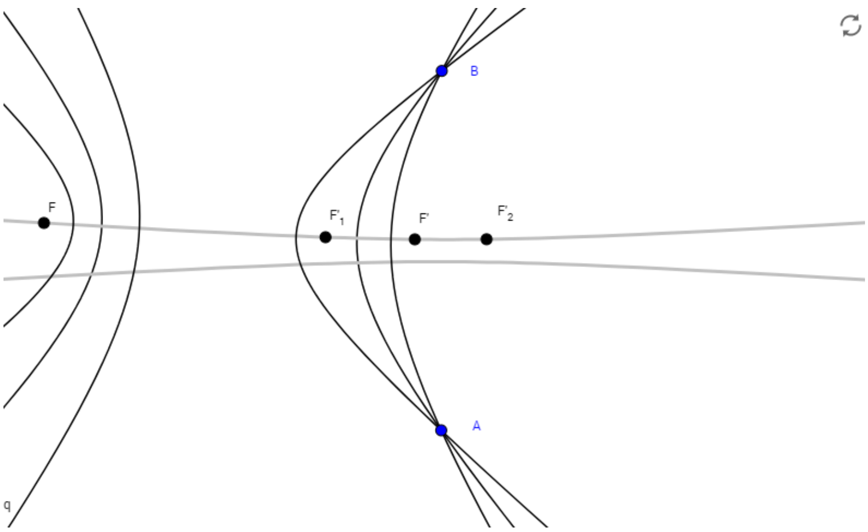
Se dan un foco F y dos puntos de una hipérbola. Se pide el lugar geométrico del segundo foco de las hipérbolas que tienen comunes tres puntos dados.

Resolución. Sean A y B los dos puntos de la hipérbola y sea F' el segundo foco de la misma. Sabemos que se verificará que

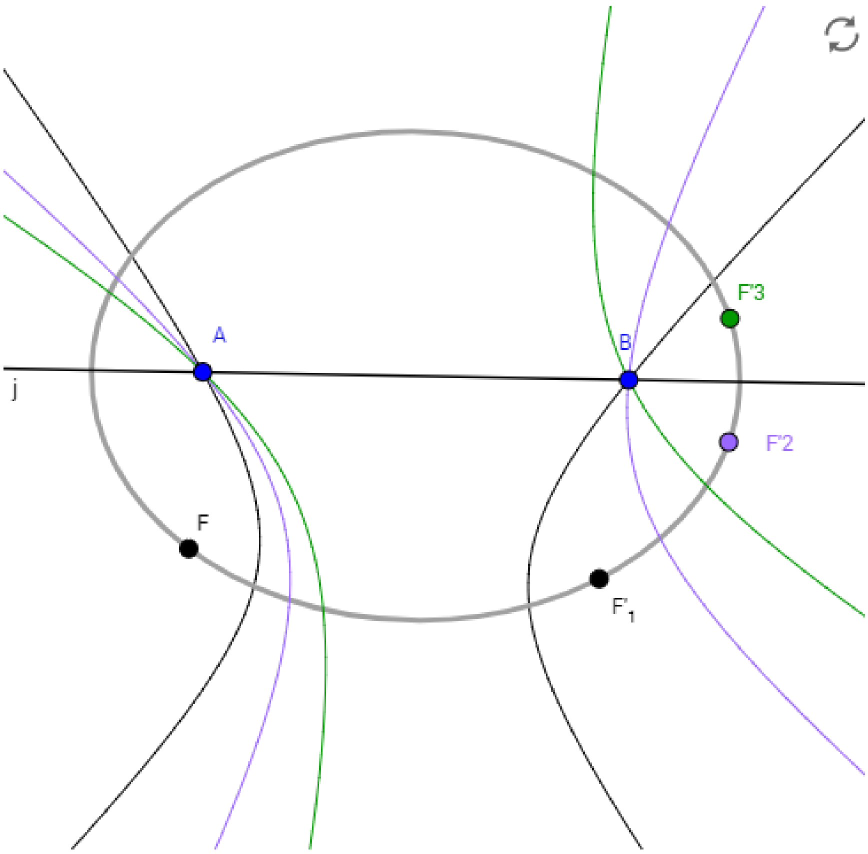
$$|FB - F'B| = |FA - F'A| = k.$$

Separaremos en los dos siguientes casos posibles que resultan al deshacernos del valor absoluto:

- El caso en el que A y B están situadas en la misma rama. Tenemos que
$$FA - F'A = FB - F'B = \pm k.$$
Manipulando nos queda que
$$F'A - F'B = FA - FB.$$
En consecuencia F' recorre una rama de hipérbola cuyos focos son A y B y constante $|FA - FB|$.



- El caso en el que A y B están situadas en ramas diferentes. Tenemos que
$$FA - F'A = -(FB - F'B) = \pm k.$$
Manipulando nos queda que
$$F'A + F'B = FA + FB.$$
En consecuencia F' recorre una elipse cuyos focos son A y B y constante $|FA + FB|$.



Capítulo 6

Conclusiones

Un tópico muy extendido, con orígenes muy antiguos y muy presente en la actualidad es si el nivel de la enseñanza y los estudios han decaído con respecto a la generación anterior o no. Dicho tópico está especialmente presente en las pruebas de oposición, ¿son o no más difíciles que las de hace 20 años? La conclusión que aquí presentamos para ambos casos es que, aunque el nivel de conocimientos haya decaído, es fruto de un cambio de dirección y también se ha mejorado en otros aspectos. Para argumentarlo, primero estableceremos la comparativa entre los problemas de las primeras convocatorias tras la salida del MEC con los de las convocatorias más recientes. Segundo, presentaremos fragmentos de un extenso e interesante artículo de periódico publicado en el Mundo que habla sobre el tópico, en concreto particularizado a las pruebas de acceso a la universidad.

6.1. Comparativa de los problemas de oposición a lo largo del tiempo.

Dado que la única convocatoria realmente reciente es la de 2015, el estudio quedará un poco sesgado a esos cuatro problemas pero, en mi opinión es suficiente para ilustrar el tema.

La tendencia que se percibe es una preferencia por problemas en los que hace falta dominar la comprensión significativa del temario. Hace falta comprender los temas como teoría que estudia cómo se relacionan unos conceptos, en vez de comprenderlos como conjunto de resultados y procedimientos que han de ser aplicados de forma más o menos enrevesada.

Como ejemplo claro tenemos el problema 1 de 2015, en el que lo que se busca es ver si el opositor comprende y maneja el concepto de base y de espacio vectorial y si tiene clara la relación existente entre matrices y aplicaciones lineales. En contraposición con las convocatorias más antiguas, como el problema 2 de 2006, en el que hay que saberse la ecuación de las tangentes a una elipse por un punto exterior (o deducirla a mano) y trabajar con ella, o como el segundo apartado del 3 del año 2004, en el que hay que recordar el criterio de Stolz y hacer ciertas manipulaciones para buscar el número e.

En mi opinión en la convocatoria de 2015 también prima más la capacidad de interpretación geométrica y la visión espacial. Esto lo vemos comparando el problema 3 del año 2015 con, por ejemplo, el 3 del año 2006. En el primero hay que ser capaz de interpretar en términos de coordenadas las propiedades geométricas de las que habla el enunciado. También es necesario visualizar la figura del enunciado para poder escoger bien las secciones con las que calcular el volumen.

En contraposición en el 3 del año 2006 la mayor dificultad reside en calcular una primitiva mediante un cambio de variable bastante rebuscado y conocer el resultado que nos dice cuándo se pueden conmutar la integral con el límite de una sucesión de funciones.

Finalmente, otro aspecto clave es el ingenio y la creatividad, claramente mayor en la última convocatoria. Lo vemos en los problemas 2 y 4 de esta última convocatoria. Son problemas cuya dificultad reside en encontrar un marco teórico con el que describir matemáticamente la realidad del problema, sin apenas carga de manipulaciones o cuentas. Dichos problemas admiten varias soluciones, de hecho, para ambos se han dado dos resoluciones diferentes. Además el marco teórico es simple: conceptos como el de integral definida, teorema del valor medio y regla de Laplace.

De forma totalmente opuesta a muchos de los problemas de las convocatorias antiguas, como el 4 de 2002 en el que es necesario saberse una caracterización algo avanzada de las progresiones geométricas o el problema 2 de los años 2004, 2002 y 2000 en los que la dificultad principal reside en la gran cantidad de manipulaciones y cuentas que hay que desenvolver.

6.2. Conclusiones sobre el tópico.

La conclusión que presentamos es que, efectivamente, el nivel de contenidos de los problemas ha bajado, el examen es menos duro. No obstante, esta visión no describe la realidad de la situación por completo. Los problemas de la última convocatoria cubren estas otras cualidades ya mencionadas: capacidad de interpretación, creatividad y comprensión significativa o global de los temas. Mientras que el opositor de hace 20 años lo que tenía que hacer era memorizar los temas y hacer problemas extensivamente, el opositor del día de hoy tiene que centrarse más en comprender y reflexionar sobre los temas, al menos aquellos que tienen una relación más directa con la resolución de los problemas.

6.2.1. ¿Son los exámenes de ahora más fáciles que los de antes?

En un artículo de periódico de tirada nacional publicado en El Mundo a fecha de 31/05/2016 por la periodista Olga R. Sanmartín expone la siguiente reflexión:

“ *Un padre de 48 años ve cómo su hija de 18 prepara la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU). La chica es lista, aprende con facilidad. Sin embargo, el padre no puede dejar de reflexionar sobre las cosas que sabía él a su edad. ¿Las capitales de Europa? ¿Los ríos de España? ¿Los nombres en latín de todos los árboles? A cambio, ella sabe mucho más inglés. Y se maneja con naturalidad con las nuevas tecnologías. Y siempre trata de averiguar el porqué de las cosas...*
El padre recuerda cómo era él a la misma edad y se plantea: ¿ha bajado o ha subido el nivel? Esa sensación le ha acompañado durante todo el proceso de formación de su hija. La pregunta se la hacen, también, muchas familias que estos días preparan la PAU. ¿Es menos exigente la educación de nuestros hijos que la de nuestros padres? ”

A continuación en el artículo se reflexiona extensamente sobre el tema. Muchas de estas reflexiones resultan extremadamente interesantes con el objetivo de argumentar la conclusión de que aunque a día de hoy el nivel de conocimientos sea menor que el de antes, la calidad del aprendizaje es mejor porque éste es mucho más significativo. Además la prueba de acceso a la universidad tiene un contexto muy paralelo a la prueba oposición y nos servirá para finalizar la conclusión del trabajo.

En general, los profesores opinan que los exámenes de ahora son «más sencillos». No obstante estudios recientes estiman que el nivel de escolarización de la población en España se ha duplicado en tan sólo medio siglo. Esto es muy importante: la educación de hace décadas era más selectiva y probablemente más selecta, pero sólo unos pocos podían acceder a ella. El nuevo modelo busca integrar a todos y es difícil mantener esa excelencia que antes disfrutaba una minoría reducida.

Es de especial interés la opinión que tienen los editores de libros de texto al respecto: «Es difícil comparar» porque antes los manuales eran más «enciclopédicos» y «memorísticos» y ahora su propósito es «enseñar a pensar».

Por último, otro posible punto de vista es el mantenido por la maestra de Primaria Carmen Guaita: En los últimos años ha habido un cambio tecnológico enorme que ha impactado en la vida de la gente. Hace 20 años, un universitario situaba perfectamente en el mapa las capitales de Europa y a lo mejor ahora no. A lo mejor el nivel de conocimientos memorizados es menor, pero el acceso al conocimiento es mayor. ¿Cómo podemos decir que un estudiante tiene peor nivel que antes si conocen los sistemas de comunicación e información mucho mejor que su profesor?».

Como vemos todas las reflexiones sacadas del artículo están estrechamente relacionadas con las conclusiones a las que habíamos llegado nosotros. La idea esencial que hay detrás es la misma, lo que está sucediendo en la actualidad es un cambio de dirección hacia un aprendizaje más significativo.

Bibliografía

[1] Aroca, José M. *Álgebra lineal y geometría.*

[2] BOCYL. Orden PAT/519/2006, de 29 de marzo, por la que se convocan pro- cedimientos selectivos de ingreso y accesos a los Cuerpos de Profesores de Enseñanza Secundaria.

[3] BOCYL. Orden ADM/501/2010, de 21 de abril, por la que se convocan procedimientos selectivos de ingreso y acceso a los cuerpos de profesores de enseñanza secundaria, así como procedimientos para la adquisición de nuevas especialidades por los funcionarios de los mencionados cuerpos.

[4] BOCYL. La Resolución de 7 de abril de 2015, de la Viceconsejería de Función Pública y Modernización, por la que se convocan procedimientos selectivos de ingreso y acceso a los cuerpos de profesores de enseñanza secundaria.

[5] B.O.E. del 21 de Septiembre de 1993. Temario de profesores de enseñanza secundaria matemáticas.
http://www.educa.jcyl.es/profesorado/es/oposiciones/oposiciones-secundaria-cuerpos/temarios-oposiciones-pes/profesores-ensenanza-secundaria

[6] Burgos, Juan de. *Análisis matemático.*

[7] Centro de Estudios CeDe. Plazas al cuerpo de profesores de secundaria por año y por especialidad en Castilla y León.
http://www.cede.es/plazas-comunidades/secundaria/castilla-leon.php

[8] Educacyl Portal de Educación. Oposiciones 2015 cuerpo P.E.S matemáticas. Criterios de evaluación y de actuación ante los tribunales.
http://www.educa.jcyl.es/dpsalamanca/es/informacion-especifica-dp-salamanca/personal-docente-laboral/oposiciones-pes-cuerpos-2015/oposiciones-2015-cuerpo-p-s-matematicas

[9] Sanmartín, Olga R. "¿Son los exámenes de ahora más fáciles que los de antes?". El Mundo 31 de mayo de 2016.
http://www.elmundo.es/sociedad/2016/05/31/574d70bcca474170388b4578.html

[10] VVAA *Problemas de oposiciones matemáticas.* Editorial Deimos (8 tomos).