



**Universidad de Valladolid**

**MÁSTER EN PROFESOR  
DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA,  
BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL  
Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS**

TRABAJO FINAL DE MÁSTER JULIO 2017

**SIMETRÍA Y  
GRUPOS DE SIMETRÍA EN  
EL MOBILIARIO URBANO  
DE VALLADOLID**

ALUMNO

**Guillermo Sarabia Sánchez**

TUTOR

**A. Carmelo Prieto Colorado**



# Índice de contenidos

<b>Introducción</b> .....	<b>4</b>
<b>Ubicación en el currículo</b> .....	<b>7</b>
<b>Objetivos</b> .....	<b>9</b>
<b>Nociones teóricas</b> .....	<b>10</b>
Noción de simetría.....	10
Grupos de simetría.....	12
Grupos de simetría espacial unidimensionales.....	12
Grupos de simetría espacial bidimensionales.....	16
<b>Metodología</b> .....	<b>26</b>
Temporalización.....	26
Propuestas alternativas.....	29
Competencias.....	29
Evaluación.....	31
<b>Recorrido por los GSE-1D</b> .....	<b>32</b>
Grupo F11 (11).....	33
Grupo F12 (12).....	34
Grupo F1m (11m).....	36
Grupo Fm1 (1m1).....	38
Grupo Fmm (2mm).....	40
Grupo F1g (11g).....	41
Grupo Fmg (2mg).....	43
<b>Recorrido por los GSE-2D</b> .....	<b>44</b>
Grupo p1.....	45
Grupo pm.....	46
Grupo pg.....	47
Grupo cm.....	48
Grupo p2.....	50
Grupo pmm.....	52
Grupo pmg.....	53
Grupo pgg.....	54
Grupo cmm.....	55
Grupo p4.....	56
Grupo p4m.....	57
Grupo p4g.....	58
Grupo p3m1.....	59
Grupo p31m.....	60
Grupo p6m.....	61
Grupos no localizados en Valladolid.....	62
<b>Discusión</b> .....	<b>64</b>
<b>Bibliografía</b> .....	<b>65</b>



## Introducción

El 8 de noviembre de 1895, el ingeniero mecánico y físico alemán Wilhelm C. Röntgen descubre un tipo de radiación electromagnética, desconocida hasta entonces y que, no sabiendo cómo bautizarla, denominará “rayos X”<sup>1</sup>. Tras el descubrimiento, toda la sociedad occidental del siglo XIX y comienzos del XX quedará conmocionada frente a las innumerables aplicaciones de la nueva luz. En los cafés de Europa se organizan conferencias para mostrar al público los poderes, casi mágicos, de esta radiación para revelar lo invisible. Los mediums organizan sesiones de lo que después se conocería como el neo-ocultismo, se organizan espectáculos de magia en teatros, e incluso los centros comerciales organizan exposiciones para que todo el mundo conozca los rayos X y sus numerosas aplicaciones<sup>2</sup>.

Los médicos son los primeros y más directamente beneficiados, resultando una herramienta excepcional para el diagnóstico de enfermedades y traumatismos, al igual que como remedio para algunos males como la tuberculosis o ciertas infecciones parasíticas del cuero cabelludo, como la tiña, actuando los rayos X como depiladores y desinfectantes al mismo tiempo. Éste será el comienzo de la radioterapia.

Los servicios públicos también abogan por “la nueva luz” y la justicia, la armada, la policía y las aduanas pronto descubren las posibilidades ofrecidas por los rayos X. Se utilizan para registrar a posibles ladrones a la salida de los centros comerciales, así como cualquier maleta o paquete sospechoso que quiera traspasar una frontera.

El descubrimiento de Röntgen supuso una verdadera revolución. Cualquier persona podía hacerse fácilmente con un equipo generador de radiación, utilizándolo constantemente y para casi cualquier cosa imaginable. Se irradiaban los muros para encontrar problemas en el sistema eléctrico o en las tuberías. El acné, las “manchas de vino de Oporto”, las menstruaciones anormalmente abundantes, e incluso las depresiones posparto, se trataban satisfactoriamente irradiando la piel, el útero y los ovarios respectivamente. En los comienzos no se conocían los efectos nefastos de la radiación para las células vivas, de modo que todo el mundo quería probar “la nueva luz” y ver de qué era capaz. Se hacían fotografías de rayos X de cualquier cosa: plantas, animales, materiales inertes; por el simple interés de ver qué aparecía en la película fotográfica.

El físico alemán Max von Laue realizó experimentos de este tipo, bombardeando cristales de sulfato de cobre con rayos X<sup>3</sup>. La idea de Laue era investigar la naturaleza de esta radiación y descubrir si se trataba de ondas o partículas. La idea de que los cristales son una repetición periódica

---

<sup>1</sup> Vídeo-entrevista a Maurice de Broglie. “Les rayons X et l’histoire de leurs propriétés”. Institut National de l’Audiovisuel.

<sup>2</sup> Hagop Demirdjian. Culture Sciences Chimie. Ministère de l’Éducation Nationale. (2007). “La radiographie (I) – Histoire de la découverte des rayons X et de leur application en médecine”.

<sup>3</sup> Martin Martínez-Ripoll. Museo Virtual de la Ciencia del CSIC. Ministerio de Economía y Competitividad (2014). “Iluminando los cristales”.

de un grupo de moléculas ya se tenía y, aunque las distancias típicas entre los planos de la red cristalina se desconocían, se sabía que debían ser muy pequeñas comparadas con la longitud de onda de la luz visible. Max von Laue dedujo que si los rayos X estaban compuestos por ondas, deberían generar un patrón de difracción al atravesar los cristales. Efectivamente, llegó a desarrollar un método que permitía medir la longitud de onda de los rayos X utilizando los cristales de sulfato de cobre como retícula de difracción, llegando a demostrar que esta radiación era de naturaleza análoga a la luz, pero con una longitud de onda mucho menor, lo que la convertía en invisible para el ojo humano.

Laue descubrió la naturaleza de los rayos X, pero lo más interesante de sus experimentos, fueron precisamente los patrones de difracción reflejados en las películas fotográficas. El investigador alemán había creado, en 1912, una técnica experimental para el estudio de los materiales basada en el fenómeno de difracción de los rayos X al atravesar un sólido cristalino. Acababa de inventar la cristalografía de rayos X. Esta nueva técnica hizo posible un mejor estudio de la estructura de la materia cristalina. Muchos investigadores, físicos, geólogos y químicos, se unieron en este segundo gran descubrimiento. Durante todo el S. XX, se realizaron importantes mejoras metodológicas y se analizaron una gran cantidad de estructuras minerales. Más adelante, también pudieron analizarse cristales precipitados a partir de estructuras biológicas, como proteínas, permitiendo la cristalografía de rayos X el estudio estructural de moléculas orgánicas y abriendo una puerta hacia la biología y la medicina. De hecho, durante las décadas de los 60 y 70, la mayoría de los premios Nobel de medicina entregados, fueron por el descubrimiento de estructuras proteínicas importantes en los procesos fisiológicos<sup>4</sup>.

Todos los estudios y descubrimientos relacionados con la estructura de la materia, puso de manifiesto una cualidad fundamental, y es que las características físicas de la misma, no tenían tanta relación con su composición química como con la organización de los átomos, es decir, su estructura atómica. El siguiente paso, una vez entendido cómo se organizaba la materia y las características que adquiere ante unas estructuras y no otras, fue el de modificar dicha organización para crear nuevos materiales. Este campo de investigación ha sido absolutamente importante y revolucionario, permitiendo todo el avance tecnológico adquirido desde finales del S. XX y hasta la actualidad. Los plásticos, la nanotecnología, los componentes electrónicos y muchos medicamentos de nueva generación son el resultado de la investigación y el desarrollo de técnicas que nos permiten conocer y modificar la estructura de la materia, tanto orgánica como inorgánica<sup>5</sup>.

Dada la relación existente entre la estructura tridimensional de las moléculas y sus propiedades químicas y físicas, la cristalografía sigue siendo en la actualidad una técnica fundamental en numerosas disciplinas científicas

---

<sup>4</sup> Nobel Media A B 2014. Nobelprize.org. "The Nobel Prize in Physiology or Medicine".

<sup>5</sup> Martin Martinez-Ripoll. Centro Superior de Investigaciones Científicas (CSIC). (2017). "Crystallography – Cristalografía".

como la química, la medicina, la biología molecular, la geología, la física aplicada o la ciencia de los materiales, así como en áreas de aplicación industrial, como el desarrollo de fármacos o la mineralogía aplicada.

El presente trabajo sienta las bases conceptuales necesarias para comprender el ordenamiento de la materia cristalina y sus implicaciones en las características físicas de los cristales. Se explicarán los conceptos básicos relacionados con la simetría y se verán las formas finitas de ordenamiento que adoptan los átomos en los materiales cristalinos, de manera interactiva y didáctica, tomando ejemplos del arte arquitectónico presente en la ciudad de Valladolid.

Las explicaciones pormenorizadas de por qué existen una serie de agrupaciones, aparentemente muy reducidas, para crear todas las diferentes estructuras cristalinas, requiere de un conocimiento profundo de las teorías de grupos matemáticos que no entraremos a tratar en este trabajo.

Consideramos que el nivel de conocimientos necesarios para comprender en detalle estas cuestiones se escapa ampliamente de aquel que se les exige a los alumnos de la educación secundaria y el bachillerato, de modo que hemos intentado simplificar las explicaciones de manera que sean perfectamente comprensibles, aún sin faltar al rigor necesario para su estudio.

No obstante, si algún interesado quisiera profundizar más en los análisis matemáticos que permiten explicar los conceptos aquí tratados, con mayor detalle, encontrará al final del presente trabajo una bibliografía adecuada a tales objetivos.

## Ubicación en el currículo

Los aspectos que se pretenden trabajar con los alumnos a lo largo de este trabajo pueden incluirse en distintos cursos y en varias asignaturas.

La simetría y los grupos de simetría son conceptos que aparecen en asignaturas como la química, la biología, la geología o las matemáticas<sup>6</sup>. Si bien las materias nombradas presentan temas relacionados con el concepto de simetría en sus currículos para alguno de los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria o el Bachillerato, el concepto de simetría también puede aparecer en otras ramas no relacionadas con las ciencias, tal y como veremos más adelante, como pueden ser la literatura, el arte o la música.

Si bien, el siguiente trabajo, se presenta como una estrategia didáctica para ayudar en la comprensión de las nociones teóricas necesarias para entender adecuadamente los temas relacionados con la cristalografía dentro del currículo de Biología y Geología de E.S.O. y Bachillerato, así como el de Geología de Bachillerato, nos parece fundamental recalcar el hecho de que estos conceptos se pueden encontrar en un sinnúmero de materias muy dispares que debieran aparecer a lo largo de las explicaciones aportadas por el profesor con la finalidad de mostrar al alumnado la universalidad de ciertos conceptos y de las continuas relaciones que podemos establecer entre las diferentes ramas de estudio, ya sea en ciencias puras o tecnológicas, letras o artes.

Puesto que este trabajo ha sido propuesto desde la especialidad de Biología y Geología del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en este apartado nos referiremos únicamente a aquellas referencias que aparezcan en la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, así como en la ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y desarrollo del bachillerato en la misma comunidad, para las asignaturas que esté en disposición de impartir un profesor asociado al departamento de Biología y Geología dentro de cualquier instituto.

Según aquellas, dentro de la asignatura de Biología y Geología, presente en los cursos de 1º, 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria, y 1º de Bachillerato, podemos encontrar aspectos relacionados con la simetría y la estructura de la materia, en relación a la cristalografía y la mineralogía, dentro del currículo de los cursos de 1º de E.S.O. y de 1º de Bachillerato. En ambos cursos se podría utilizar el contenido y la metodología de este trabajo para trabajar los temas relacionados con la mineralogía. En efecto, los minerales y las rocas, sus propiedades, características y utilidades, se estudian tanto en 1º de Educación Secundaria Obligatoria, como en 1º de Bachillerato dentro de la asignatura de Biología y Geología.

---

<sup>6</sup> Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León (BOCyL). (2015). "ORDEN EDU/362/2015" y "ORDEN EDU/363/2015".

En 4º de E.S.O., aparecen dos asignaturas dentro de las cuales también se puede adaptar el presente contenido. Tanto en la materia de opción del bloque de asignaturas troncales: Ciencias Aplicadas a la Actividad Profesional, como en la materia del grupo de asignaturas específicas: Cultura Científica, se trabajan contenidos relacionados con los nuevos materiales. Consideramos que el estudio de los mismos, ha de hacerse desde el punto de vista de los avances realizados en el conocimiento y el análisis estructural de la materia, para lo cual, el presente trabajo puede resultar una herramienta de gran utilidad.

Por último, en 2º de Bachillerato, dentro del currículo de la asignatura troncal de opción de Geología, aparecen contenidos concretamente relacionados con la mineralogía y la cristalografía, haciendo hincapié en la estructura cristalina de los minerales y su relación con las propiedades físicas de los mismos.

El estudio de las simetrías y su aplicación para la comprensión de la organización de la materia cristalina, requiere de una capacidad de abstracción considerable por parte del alumnado. Se sabe que esta misma capacidad se desarrolla a lo largo de la adolescencia<sup>7</sup>, por lo que, personalmente, desaconsejamos el uso de este trabajo con los cursos más bajos de la educación secundaria. Creemos que los resultados de aprendizaje más óptimos se producirán a partir de 4º de la E.S.O., donde podremos considerar que todos los alumnos han adquirido un grado de abstracción mínimo aceptable. En cualquier caso, será tarea del profesor evaluar las capacidades de su alumnado y decidir el momento y curso adecuado para la implantación de esta propuesta didáctica.

Consideramos que el curso y la asignatura ideal para la impartición de esta propuesta didáctica sería la Geología de 2º de Bachillerato, vista la madurez del alumnado y la especificidad de los contenidos.

---

<sup>7</sup> Martín Bravo, C. Navarro Guzmán, J. I. Ed. Pirámide. "Psicología para el profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato".

## Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es:

- La creación de un recorrido a través de la ciudad de Valladolid que permita observar y comprender, de una manera más lúdica y didáctica, los siete grupos de simetría espacial monodimensional y los diecisiete grupos de simetría espacial bidimensional, que nos permitirán entender la organización de los átomos para dar forma a la materia cristalina.

Objetivos específicos de este trabajo son:

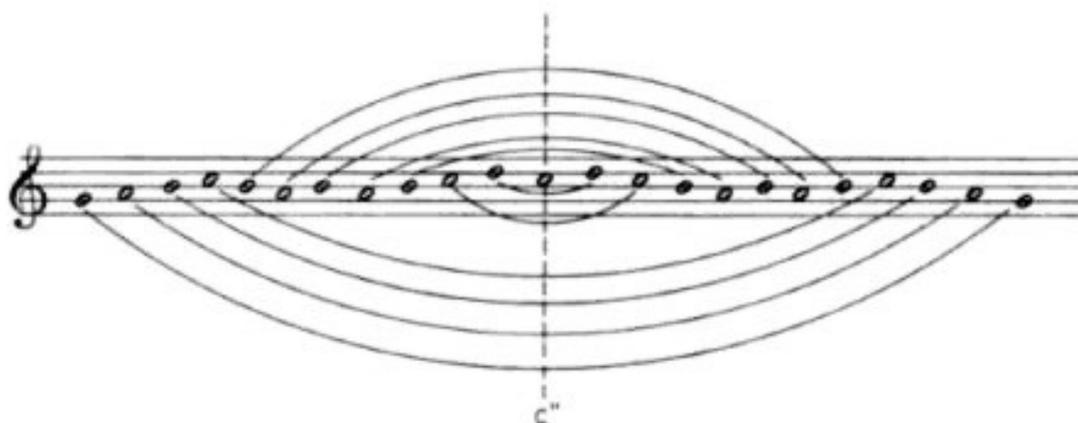
- Acercar a los alumnos, de forma más amena, conceptos complejos del estudio de la cristalografía, como son los grupos de simetría, la celdilla unidad, las isometrías, etc.
- Localizar, en el patrimonio arquitectónico de la ciudad de Valladolid, un ejemplo de cada grupo de simetría espacial monodimensional.
- Localizar, en el patrimonio arquitectónico de la ciudad de Valladolid, un ejemplo de cada grupo de simetría espacial bidimensional.
- Planificar un recorrido peatonal por la ciudad de Valladolid que permita observar y apreciar cada grupo de simetría espacial, ya sea mono o bidimensional.
- Realizar una propuesta alternativa para aquellos casos que no permitan la salida del recinto escolar por parte de los alumnos.
- Idear actividades interactivas para que los alumnos sean partícipes activos en su propio proceso de aprendizaje.
- Plantear un método de evaluación.

## Nociones teóricas

### Noción de simetría

La Real Academia Española define simetría como la “correspondencia exacta en la disposición regular de las partes o puntos de un cuerpo o figura con relación a un centro, un eje o un plano”. En condiciones formales, un objeto es simétrico en lo que concierne a una operación matemática dada si el resultado de aplicar esa operación o transformación al objeto, el resultado es un objeto indistinguible en su aspecto del objeto original. Estas operaciones matemáticas se denominan isometrías, y consisten en traslaciones, rotaciones, reflexiones y reflexiones que se deslizan.

Existen inmensidad de ejemplos de simetría, en muchos más ámbitos de los que creemos, y es que la simetría ocupa un puesto fundamental en nuestra percepción del mundo. La simetría es el orden frente al caos. El arte tiene numerosísimos ejemplos tanto en la pintura, como en la escultura, la arquitectura o incluso la música o la literatura (*Figuras 1 a 3*). Igualmente, la naturaleza está repleta de simetrías, pudiendo encontrarlas en los seres vivos, en los minerales y en las rocas (*Figuras 4*).



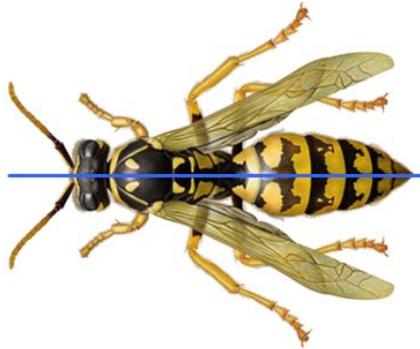
**Fig. 1.:** Ejemplo de simetría musical sobre la escala de Do Mayor.



**Fig. 2.:** M. C. Escher fue un artista neerlandés conocido por sus trabajos xilográficos, sus grabados al mezzotinto y sus dibujos, que consisten en teselados y mundos imaginarios basados en la simetría.

SATOR  
AREPO  
TENET  
OPERA  
ROTAS

**Fig. 3.:** Los palíndromos son estructuras literarias simétricas. En latín se conoce el palíndromo del “cuadrado Sator”: Sator arepo tenet opera rotas (“el sembrador Arepo guía con destreza las ruedas”), que tiene la particularidad de que puede escribirse como un cuadrado que se puede leer tanto horizontal como verticalmente y en ambos sentidos.



**Fig. 4.:** La mayor parte de los animales presentan simetría bilateral.

Si nos fijamos ahora en las figuras 1 y 4, veremos la isometría típica y en la que todos pensamos cuando nos referimos a que un objeto es simétrico: la reflexión. Efectivamente, tenemos tendencia a pensar en la simetría en términos de izquierda-derecha. Así, podemos decir que tanto la partitura como la abeja son simétricas ya que al dividirlos en dos mitades, la mitad derecha resulta ser la imagen especular de la mitad izquierda y viceversa.

Sin embargo, existen otras dos isometrías básicas: la traslación y la rotación. Al fijarnos en la figura 2, podemos encontrar un claro ejemplo de traslación. En efecto, podemos definir la traslación como aquella operación en la que un objeto se desplaza a lo largo de un eje. En el grabado de Escher, podemos observar cómo los triángulos se van transformando en aves, y después en peces, mientras se desplazan a lo largo de una línea horizontal imaginaria.

La última operación básica implicada en la simetría es la rotación. Si tomamos, por ejemplo, un copo de nieve (*Figura 5*), éste puede rotar en ángulos de  $60^\circ$  y seguir encajando en su misma posición inicial. A este efecto se le conoce como simetría rotacional, y al número de giros que debemos hacer para el objeto vuelva a encontrarse en su posición primera, orden de rotación. En el caso del copo de nieve, debemos realizar seis giros de  $60^\circ$  para lograr una rotación completa de  $360^\circ$ , por lo que la rotación del copo de nieve es de orden 6. Es cierto que una rotación de  $120^\circ$  o una de  $180^\circ$ , también giran el copo de nieve a una posición equivalente a la original y en la que cada punto individual ocupa una posición diferente, pero definimos los cuerpos por el grado de simetría rotacional de mayor orden.



Fig. 5.: Copo de nieve con simetría rotacional de orden 6.

## Grupos de simetría

Consideremos un conjunto de puntos del plano, al que llamaremos figura  $F$ , los puntos pueden ser, por ejemplo, los pertenecientes a un triángulo o cualquier otro polígono, si bien el conjunto de puntos puede ser tan complicado como podamos imaginar. Llamaremos grupo de simetría de la figura  $F$  al conjunto de movimientos del plano que dejan invariante la figura  $F$ .

Existen infinidad de estructuras y diseños simétricos. Sin embargo, tantos diseños diferentes pueden ser catalogados en un puñado de grupos de simetría distintos. En este trabajo nos centraremos en el estudio de aquellos que rellenan un plano de una y dos dimensiones, es decir, de los grupos de simetría espacial (GSE) mono y bidimensionales. Concretamente existen 7 GSE-1D y 17 GSE-2D<sup>8</sup>.

El estudio pormenorizado de por qué existe un número finito de grupos de simetría distintos requiere un análisis matemático mucho más extenso y profundo del que aquí podemos dar y por ello remitimos al lector interesado al excelente texto<sup>9</sup>.

## Grupos de simetría espacial monodimensionales (GSE-1D)

Cuando el conjunto de movimientos del plano se llevan a cabo a lo largo de un único eje de coordenadas, los grupos de simetría resultantes se denominan monodimensionales, es decir, que el motivo se repite en una única dimensión. A estos grupos de simetría se les conoce vulgarmente como frisos o cenefas.

Dentro de ese motivo que se repite en una sola dirección, las isometrías que aparezcan, deben presentar la condición de dejar invariante a la recta que

---

<sup>8</sup> Hahn, T. & International Union of Crystallography. (2005). "Space group symmetry".

<sup>9</sup> Armstrong, M. A. Springer – Verlag, Nueva York. (1988). "Groups and symmetry".

pasa por el centro del motivo o grupo del friso, por lo tanto los únicos movimientos que puede contener son de los tipos siguientes:

- La identidad (este movimiento siempre está presente en cualquier grupo de simetría) (**I**).
- Traslaciones en la misma dirección del eje de coordenadas (**t**).
- Rotaciones de orden 1 (**1**).
- Rotaciones de orden 2 (**2**).
- Reflexiones paralelas al eje de coordenadas (**m**).
- Reflexiones con deslizamiento en la misma dirección del eje de coordenadas (**g**).

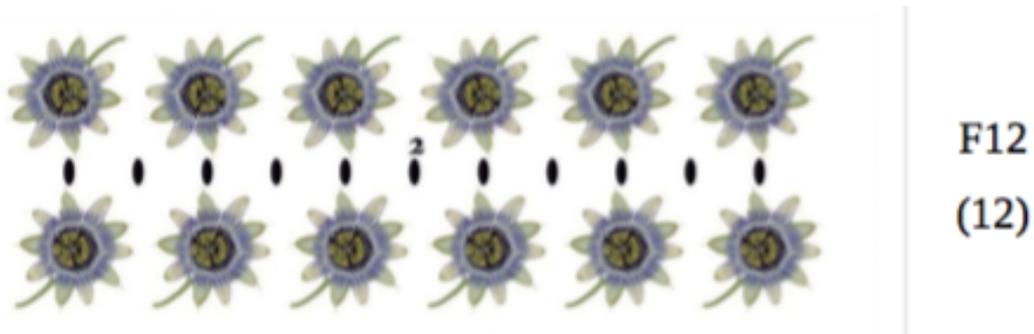
Teniendo en cuenta las combinaciones posibles de los elementos de simetría (1, 2, m y g) y compatibles con las traslaciones (t) a lo largo de un único eje de coordenadas, existen únicamente siete que posean estructura de grupo matemático respecto de la operación producto, dando lugar a los 7 Grupos Espaciales de Simetría Monodimensional (GSE-1D) (*Figuras 6 a 12*)<sup>10</sup>:

- **GSE-1D (11)**. Está formado por traslaciones y rotaciones de orden 1 (360°) en la dirección del eje de coordenadas (*Figura 6*).



**Fig. 6.:** Grupo de Simetría Espacial Monodimensional (11).

- **GSE-1D (12)**. Está formado por traslaciones y rotaciones de orden 2 (180°) a ambos lados del eje de coordenadas y en su misma dirección (*Figura 7*).



**Fig. 7.:** Grupo de Simetría Espacial Monodimensional (12)

<sup>10</sup> Las figuras para ejemplificar los GSE-1D han sido tomadas de Prieto, A. C. Universidad de Valladolid. "Síntesis y caracterización estructural de los materiales".

- **GSE-1D (11m)**. Está formado por traslaciones a ambos lados de un plano de reflexión que sigue la dirección del eje de coordenadas (*Figura 8*).

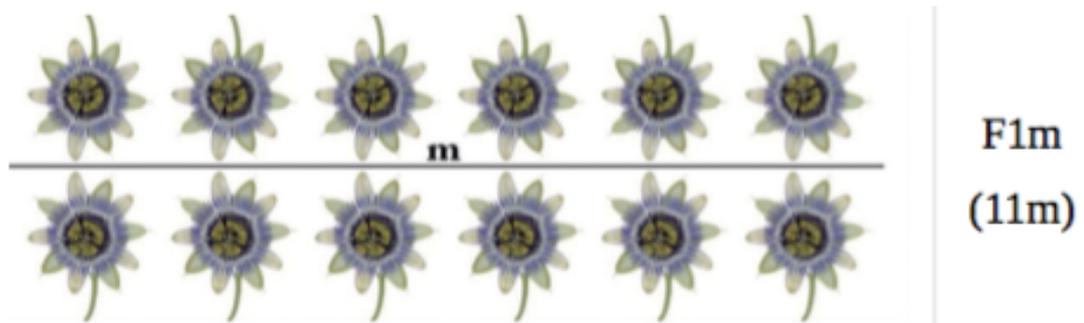


Fig. 8.: Grupo de Simetría Espacial Monodimensional (11m)

- **GSE-1D (1m1)**. Está formado por planos de reflexión intercalados perpendicularmente a la dirección del eje de coordenadas (*Figura 9*).

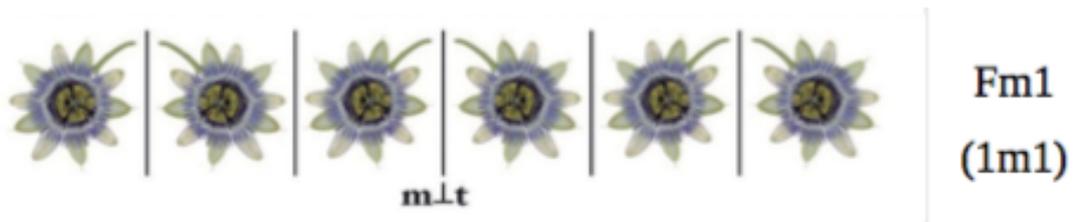


Fig. 9.: Grupo de Simetría Espacial Monodimensional (1m1).

- **GSE-1D (2mm)**. Está formado por un plano de reflexión que sigue la dirección del eje de coordenadas y sucesivos planos de reflexión perpendiculares a dicho eje. Además presenta giros de orden 2 cuyo eje de rotación se encuentra en

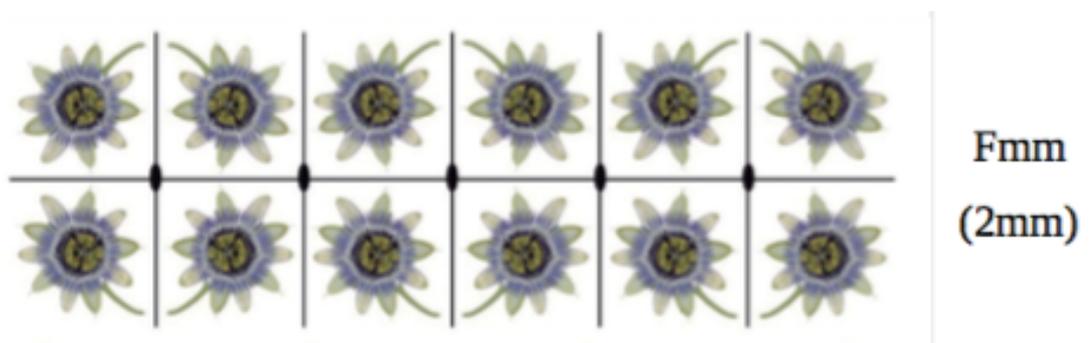
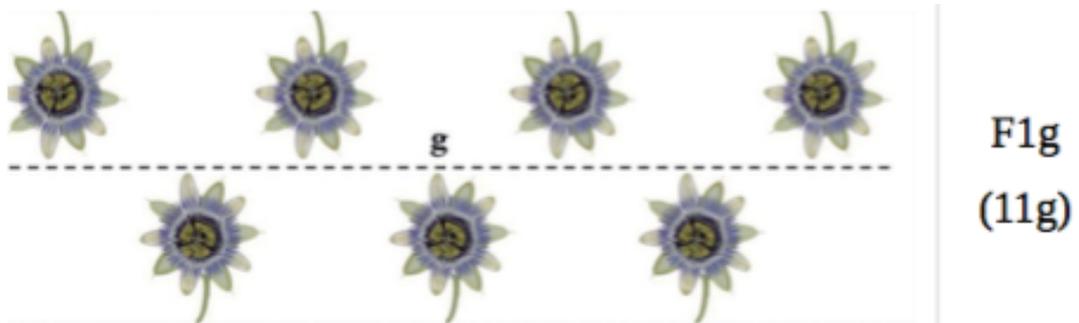


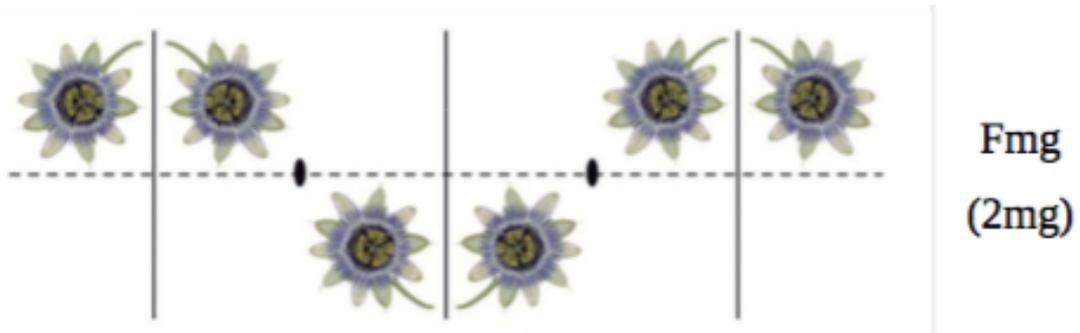
Fig. 10.: Grupo de Simetría Espacial Monodimensional (2mm).

- **GSE-1D (11g).** Está formado por un plano de reflexión con deslizamiento que sigue la dirección del eje de coordenadas. (*Figura 11*).



**Fig. 11.:** Grupo de Simetría Espacial Monodimensional (11g).

- **GSE-1D (2mg).** Está formado por un plano de reflexión con deslizamiento que sigue la dirección del eje de coordenadas y sucesivos planos de reflexión perpendiculares a la dirección del eje de coordenadas. Presenta también rotaciones de orden 2 cuyo eje de rotación se encuentra en el punto de intersección de los ejes de reflexión (*Figura 12*).



**Fig. 12.:** Grupo de Simetría Espacial Monodimensional (2mg).

Estos siete tipos distintos de frisos, los únicos posibles con estructura de grupo, han sido utilizados en incontables ocasiones en la ornamentación y decoración artística, creando un diseño ornamental y reproduciéndolo a lo largo de una línea recta. Grecas de cerámica, cenefas o alfombras son sólo algunos ejemplos de lugares en los que podemos encontrar fácilmente este tipo de grupos de simetría, con el objeto de dar al resultado final un aspecto más simétrico y armónico.

## Grupos de simetría espacial bidimensionales (GSE-2D)

Cuando al conjunto de movimientos del plano, que antes realizábamos sobre un único eje de coordenadas, le añadimos ahora un segundo eje, nos encontramos con que el motivo pasa a repetirse a lo largo de dos dimensiones. Los grupos de simetría resultantes se les denominará, por tanto, bidimensionales, o como se les conoce vulgarmente hablando, mosaicos.

Al añadir una segunda dimensión a los grupos de simetría anteriores, nos damos cuenta de que, por repeticiones sucesivas del motivo, podríamos llegar a crear una red infinita. En este punto y para ser prácticos, conviene definir el concepto de celda primitiva. Puesto que trabajar con toda una red infinita resulta inabarcable y excesivamente complejo, podemos dividir a la misma en porciones delimitadas, pero que dentro de las cuales, se aprecien las características generales de toda la retícula, de modo que, por simples traslaciones podamos recrear de nuevo toda la red. A esta porción mínima la llamamos celda primitiva.

Auguste Bravais fue un físico y geólogo francés, conocido por sus trabajos fundamentales en el área de la cristalografía. Fue el primero en definir matemáticamente todas las posibles celdas primitivas que podían formarse con estructura de grupo matemático, y a las que hoy en día se conocen como redes de Bravais.

Para los planos de dos dimensiones, existen 5 posibles redes de Bravais (*Figuras 13 a 17*)<sup>11</sup>:

- **Red oblicua.** Presenta una base en la que el módulo de los dos vectores que la forman es distinto. Además, el ángulo  $\varphi$  que forman es distinto de  $90^\circ$  (*Figura 13*).



Fig. 13.: Red de Bravais oblicua.

- **Red cuadrada.** La condición que cumplen es que los módulos de los vectores sea el mismo y que el ángulo que formen sea igual a  $90^\circ$ . Éste es el tipo de red más sencillo (*Figura 14*).

<sup>11</sup> Las imágenes de las redes de Bravais han sido tomadas de Wikimedia Commons.

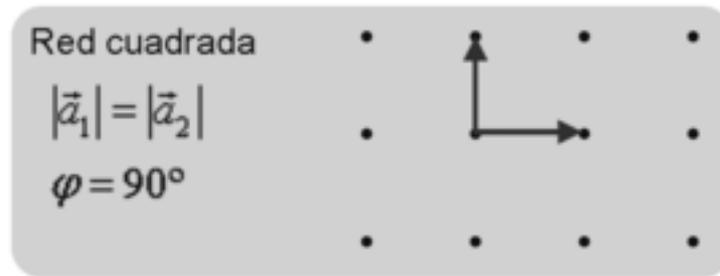


Fig. 14.: Red de Bravais cuadrada.

- **Red rectangular.** La red rectangular consiste en una pequeña modificación de la red cúbica. Si bien el ángulo que forman los vectores sigue siendo de  $90^\circ$ , en este caso, los módulos de los mismos son diferentes (*Figura 15*).



Fig. 15.: Red de Bravais rectangular.

- **Red rectangular centrada.** Es exactamente igual que la red rectangular, con los módulos de los vectores diferentes y un ángulo de  $90^\circ$ , pero con el añadido de contar con un punto extra en el centro del rectángulo (*Figura 16*).

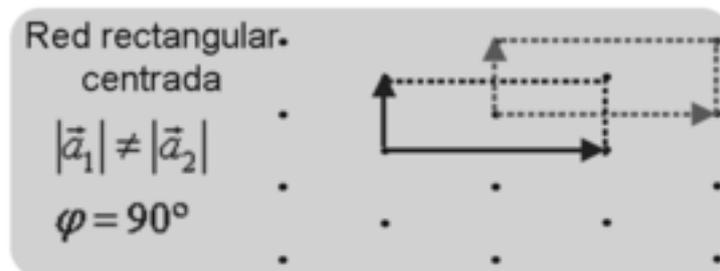


Fig. 16.: Red de Bravais rectangular centrada.

- **Red hexagonal.** La red hexagonal cuenta con una estructura de hexágonos, por lo que no tiene un ángulo recto, sino que el ángulo entre los vectores es siempre de  $120^\circ$ . Además, los módulos de éstos, deben ser iguales (*Figura 17*). Esta red también se puede ver como una red rectangular centrada en la que los módulos de los vectores son distintos.

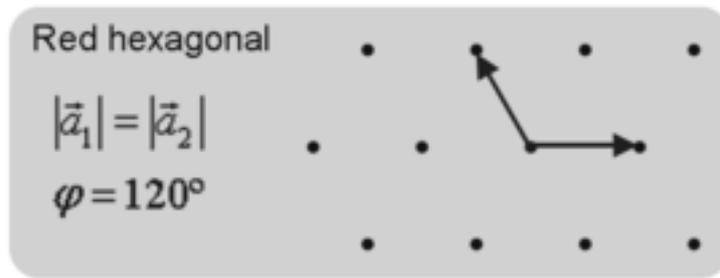


Fig. 17.: Red de Bravais hexagonal.

A todas estas redes se les denomina redes primitivas (p), a excepción de la red rectangular centrada, que llamamos red centrada (c). Esta notación de (p) y (c), aparecerá más adelante, cuando veamos la numeración de los distintos grupos de simetría especial bidimensionales.

Cuando observábamos los GSE-1D, veíamos que sólo podían darse rotaciones de orden 1 ó 2. En el caso de los grupos de simetría bidimensionales, las posibilidades de rotación aumentan, pudiendo aparecer elementos de rotación de orden 1, 2, 3, 4 ó 6. Si, además, combinamos estos elementos con la operación de reflexión (m), obtendremos los 10 posibles grupos de simetría puntual (GSP) (Figura 18)<sup>12</sup>, así denominados por dejar invariante un punto del espacio, aquel que se corresponde con el eje de rotación.

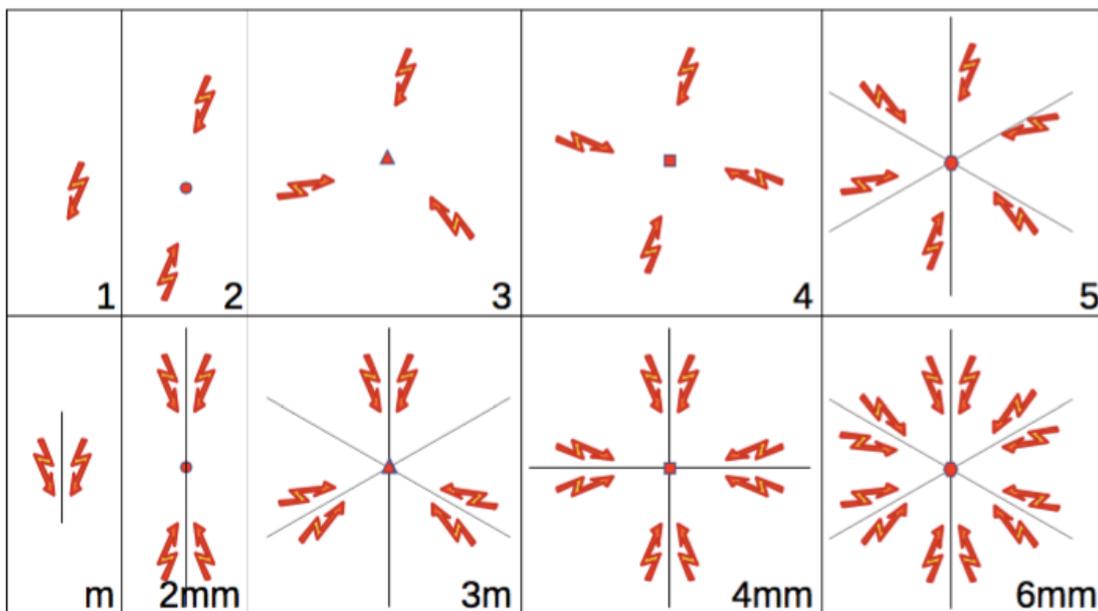


Fig. 18.: Grupos de simetría puntual (GSP).

Cuando combinamos los grupos de simetría puntual, las redes de Bravais y las traslaciones fraccionarias (líneas especulares de deslizamiento, obtenemos los grupos de simetría espacial bidimensionales (GSE-2D). Al final existen un total de 17 grupos de simetría distintos.

<sup>12</sup> Imagen tomada de Romo García, A. Universidad de Valladolid. "Paseo por los grupos de simetría mono y bidimensionales en el urbanismo decorativo de Valladolid".

El primero en demostrarlo fue el cristalógrafo ruso Evgraf S. Fedorov en 1891, y más tarde, el matemático húngaro George Pólya y el cristalógrafo suizo Paul Niggli, en 1924.

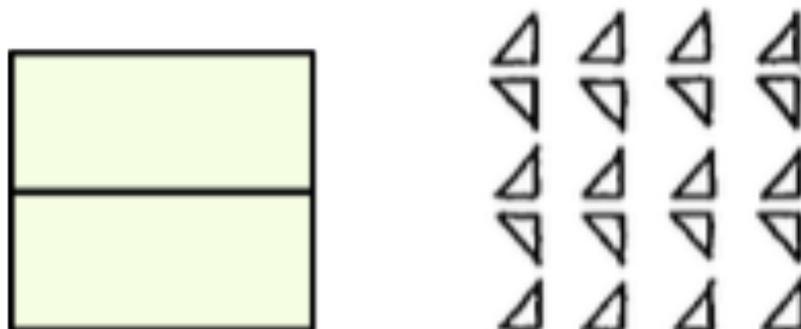
Existen muy variadas notaciones para denominar los grupos de simetría. Nosotros utilizaremos la notación internacional abreviada, según la cual, los 17 grupos de simetría espacial bidimensionales serían (*Figuras 19 a 34*)<sup>13</sup>:

- **GSE-2D (p1)**. Es el grupo más sencillo de todos los grupos de simetría, contando únicamente con traslaciones determinadas por dos lados contiguos de la tesela. No presenta ni rotaciones, ni reflexiones, ni reflexiones con deslizamiento. Su red de Bravais es de tipo oblicuo (*Figura 19*).



**Fig. 19.:** Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p1.

- **GSE-2D (pm)**. Este grupo presenta traslaciones por dos lados contiguos de la tesela y reflexiones de ejes paralelos a dos de los lados de la tesela. Su red de Bravais es de tipo rectangular (*Figura 20*).



**Fig. 20.:** Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo pm.

<sup>13</sup> Las figuras han sido tomadas de Wikimedia Commons (diagramas de la izquierda) y Bérczi, Sz. "Symmetry and technology in ornamental art of old hungarians and acar-onogurians from the archeological finds of the carpathian basin, seventh to tenth century A.D." (figuras de la derecha).

- **GSE-2D (pg).** Además de las traslaciones marcadas por dos lados contiguos de la tesela, presenta reflexiones deslizantes de ejes paralelos a una de las líneas de dirección de las traslaciones. No contiene ni rotaciones ni reflexiones. Su red de Bravais es de tipo rectangular (Figura 21).



Fig. 21.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo pg.

- **GSE-2D (cm).** Contiene traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela, además de reflexiones paralelas al centro de la tesela y reflexiones deslizantes. No presenta giros y su red de Bravais es de tipo rectangular centrada (Figura 22).



Fig. 22.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo cm.

- **GSE-2D (p2).** Presenta las traslaciones determinadas por dos lados contiguos de la tesela y rotaciones de orden 2. No contiene ni reflexiones, ni reflexiones deslizantes. Su red de Bravais es de tipo oblicuo (Figura 23).

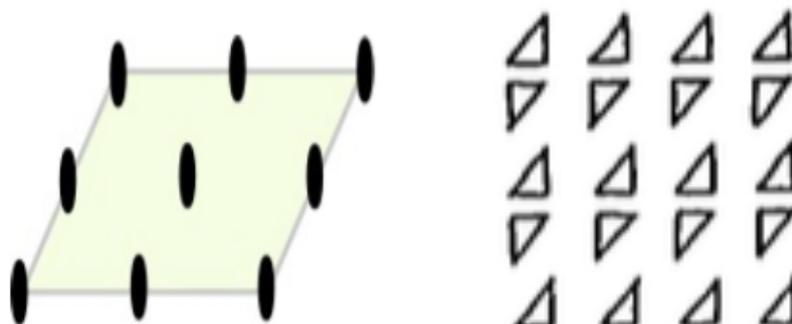


Fig. 23.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p2.

- **GSE-2D (pmm)**. Además de las traslaciones, este grupo presenta rotaciones de orden 2 y planos de reflexión. No contiene reflexiones deslizantes y su red de Bravais es de tipo rectangular (*Figura 24*).

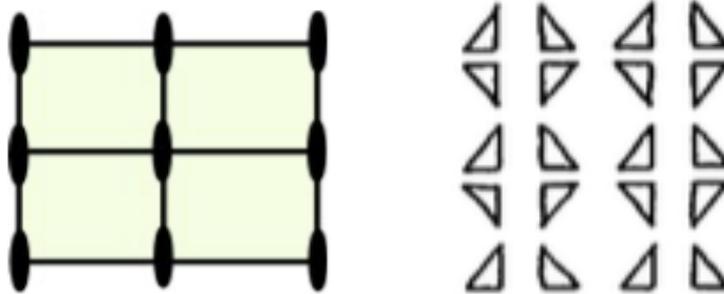


Fig. 24.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p2mm.

- **GSE-2D (pmg)**. Junto con las traslaciones determinadas por dos lados contiguos de la tesela, este grupo presenta, además, rotaciones de orden 2, planos de reflexión y reflexiones deslizantes. Su red de Bravais es de tipo rectangular (*Figura 25*).

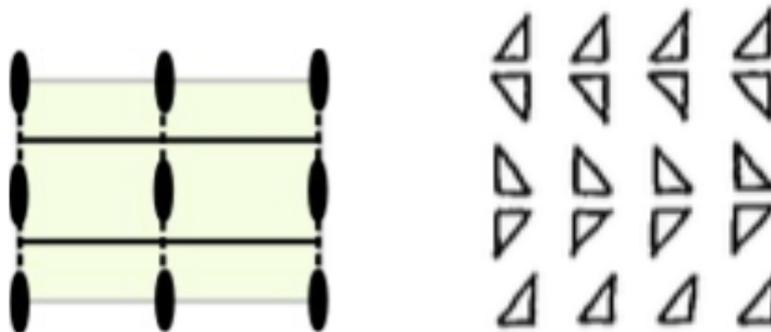


Fig. 25.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p2mg.

- **GSE-2D (pgg)**. Además de las traslaciones, presenta rotaciones de orden 2 y reflexiones deslizantes con ejes de direcciones perpendiculares. No contiene reflexiones y su red de Bravais se corresponde con una de tipo rectangular (*Figura 25*).

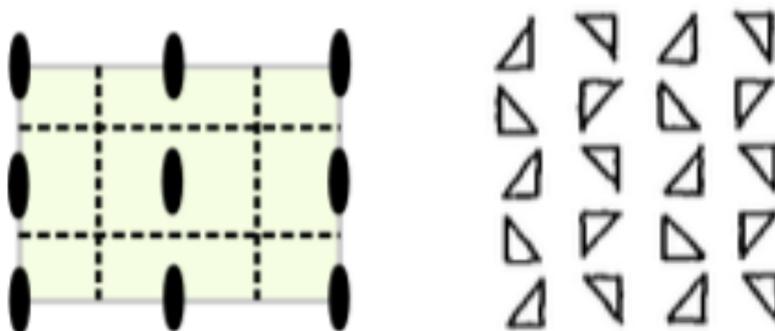


Fig. 26.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p2gg.

- **GSE-2D (cmm)**. Presenta traslaciones determinadas por dos lados contiguos de la tesela, rotaciones de orden dos, planos de reflexión y reflexiones deslizantes. Su red de Bravais es de tipo rómbico (*Figura 26*).

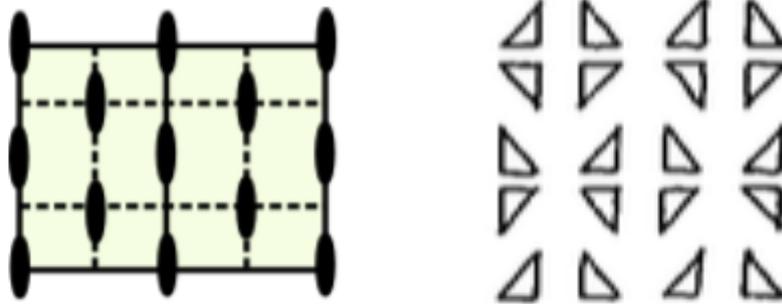


Fig. 27.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo c2mm.

- **GSE-2D (p4)**. Contiene las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela y rotaciones de orden 4. También contiene rotaciones de orden 2. No presenta ni reflexiones, ni reflexiones con deslizamiento. Su red de Bravais es de tipo cuadrado (*Figura 27*).

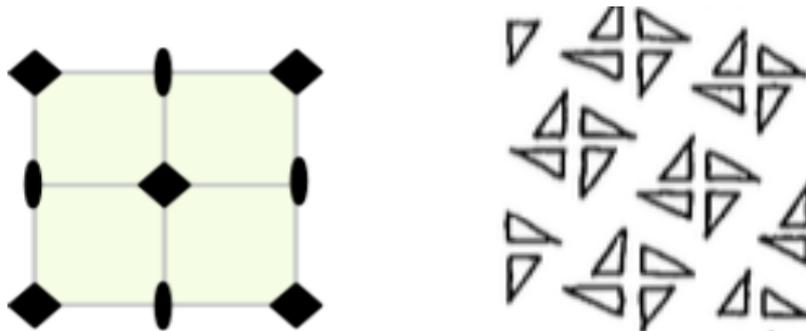


Fig. 27.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p4.

- **GSE-2D (p4m)**. Presenta traslaciones, rotaciones de orden 4, planos de reflexión y reflexiones deslizantes. También presenta rotaciones de orden 2. Su red de Bravais es de tipo cuadrado (*Figura 28*).

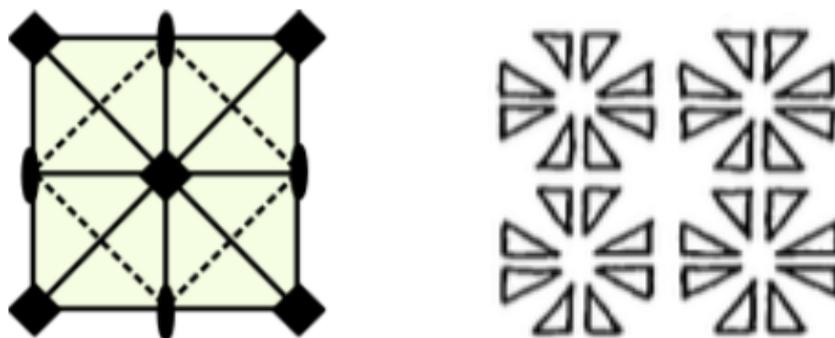


Fig. 28.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p4mm.

- **GSE-2D (p4g).** Contiene las traslaciones determinadas por dos lados concurrentes de la tesela, rotaciones de orden 4 y 2, planos de reflexión y reflexiones deslizantes. Su red de Bravais es de tipo cuadrado (*Figura 29*).

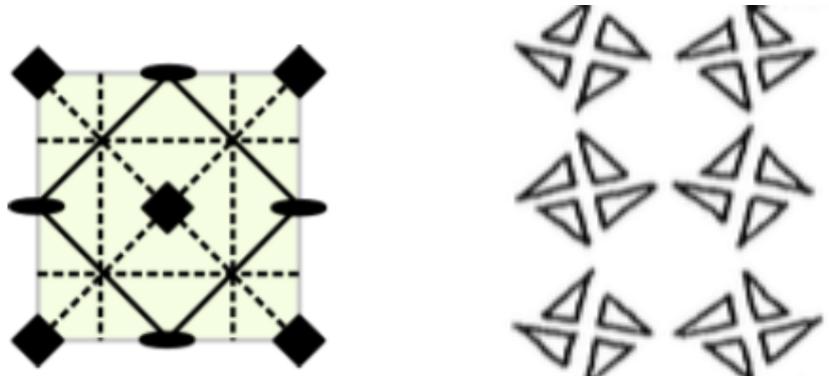


Fig. 29.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p4mg.

- **GSE-2D (p3).** Contiene las traslaciones determinadas por los lados contiguos de la tesela y rotaciones de orden 3. No presenta ni reflexiones, ni reflexiones con deslizamiento. Su red de Bravais es de tipo hexagonal. (*Figura 30*).

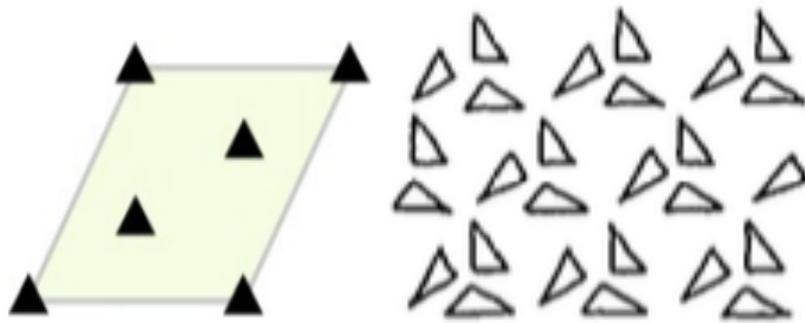


Fig. 30.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p3.

- **GSE-2D (p3m1).** Presenta traslaciones, rotaciones de orden 3, reflexiones y reflexiones con deslizamiento. Su red de Bravais es de tipo hexagonal. (*Figura 31*).

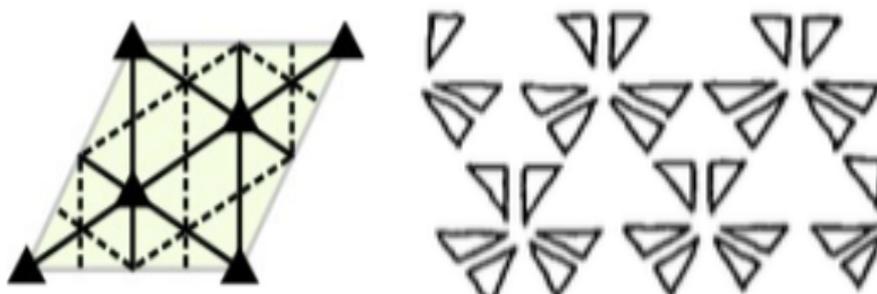


Fig. 31.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p3m1.

- **GSE-2D (p31m).** Contiene las traslaciones determinadas por los lados contiguos de la tesela, además de rotaciones de orden 3, planos de reflexión y planos de reflexión con deslizamiento. Su red de Bravais es de tipo hexagonal (*Figura 32*).

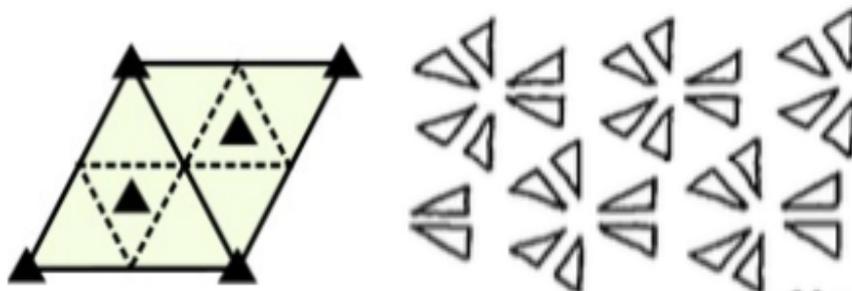


Fig. 32.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p31m.

- **GSE-2D (p6).** Presenta traslaciones y rotaciones de orden 6. No contiene ni planos de reflexión, ni reflexiones con deslizamiento. Su red de Bravais se corresponde con una de tipo hexagonal (*Figura 33*).

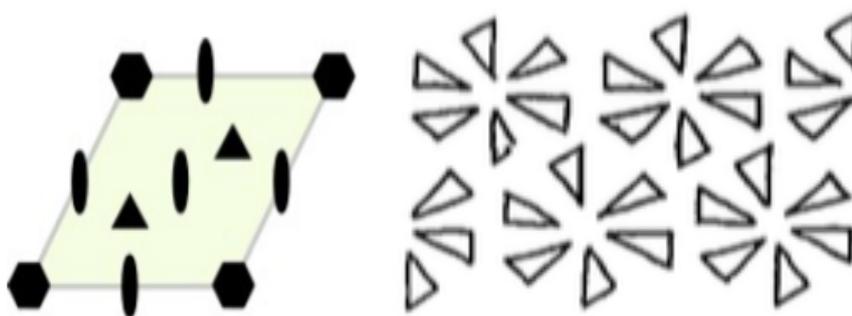


Fig. 33.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p6.

- **GSE-2D (p6m).** Presenta las traslaciones determinadas por los lados contiguos de la tesela, rotaciones de orden 6, planos de reflexión y planos de reflexión con deslizamiento. Su red de Bravais es de tipo hexagonal (*Figura 34*).

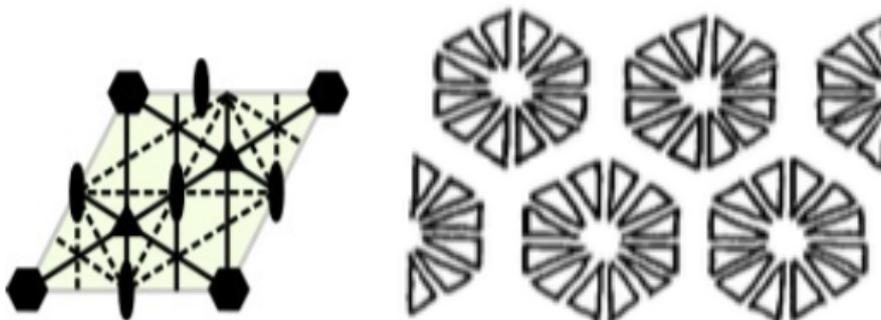


Fig. 34.: Red de Bravais y ejemplo de mosaico de tipo p6mm.

Resulta asombroso que en los adornos del antiguo Egipto, se han encontrado ejemplos de estos 17 grupos de simetría, así como en la Alhambra de Granada, poniendo de manifiesto que tanto los egipcios, como los artesanos nazaríes, fueron capaces de crear, mediante imaginación geométrica e intuición, un legado cuya relevancia ha sido destacada por matemáticos y cristalógrafos varios siglos después.

Concretamente, la Alhambra, además de su extraordinaria belleza, tiene el mérito de ser una valiosa enciclopedia de la geometría y de los grupos matemáticos, pues es el único conjunto arquitectónico del mundo que compendia todos los tipos de los distintos grupos de simetría. Un privilegio que España debe saber apreciar y salvaguardar<sup>14</sup>.

---

<sup>14</sup> Pérez Gómez, R. *Comp. and Math. with Appls.* (1987). "The four regular mosaics missing in the Alhambra".

## **Metodología**

Este trabajo presenta una propuesta didáctica para el estudio y comprensión de la organización de la materia cristalina, a través de los grupos de simetría más básicos, como son los mono y bidimensionales, y tomando ejemplos del patrimonio arquitectónico de la ciudad de Valladolid.

Si bien el objetivo fundamental de este Trabajo Final de Máster es la creación de un recorrido por la ciudad que muestre los distintos grupos de simetría espacial mono y bidimensionales, consideramos que antes de la realización de este paseo, se deben emplear una serie de métodos educativos para que el alumnado llegue a comprender en profundidad los conceptos básicos que le permitirán apreciar y aprovechar en mayor medida la actividad final.

El desarrollo de esta propuesta didáctica durará, al menos, cuatro sesiones lectivas. A lo largo de las mismas, los alumnos tendrán la oportunidad de acercarse al estudio de la cristalografía y las simetrías, de la mano del profesor, manipular estructuras mediante juegos manuales e informatizados con la finalidad de afianzar los conocimientos aprendidos y desarrollar sus propios motivos, realizar sendos recorridos por Valladolid para observar ejemplos de los distintos grupos de simetría mono y bidimensionales, así como apreciar el patrimonio histórico-arquitectónico de la ciudad. Esta propuesta concluirá con una evaluación que permitirá a los alumnos darse cuenta de su nivel de conocimientos y comprensión de tema estudiado.

A continuación pasamos a detallar la temporalización de la propuesta, detallando los pasos a seguir por el profesor para, según nuestro criterio y experiencia, optimizar el proceso de aprendizaje del alumnado.

## **Temporalización**

Somos conscientes de la cantidad, a menudo abusiva, de contenidos impuestos por el currículo en secundaria y bachiller, y conocemos las estrecheces que han de soportar los profesores en materia de tiempo. No obstante, consideramos que el número de sesiones mínimo para el correcto desarrollo de la actividad y la optimización del aprendizaje por parte de los alumnos, ha de ser de cinco, con la duración habitual de una clase, 55min, a excepción de los días en que se realicen los recorridos por la ciudad, donde se contará con al menos el tiempo de dos clases, 1h50min.

La primera sesión se dividirá en dos partes. Durante la primera parte, de aproximadamente 40min, el profesor introducirá el tema que se va a trabajar, exponiendo y explicando los conceptos básicos, como son la diferencia entre materia cristalina y materia amorfa, los hechos históricos que dieron paso al desarrollo de la cristalografía y todos aquellos conceptos relacionados con el ordenamiento simétrico de la materia (traslaciones, reflexiones, rotaciones, etc.). Se buscará mantener la atención e incrementar el interés de los alumnos poniendo ejemplos que estén a su alcance y que utilicen en su vida

diaria, y se hablará de la “locura” social que supuso el descubrimiento de los rayos X y su influencia a nuestros días.

Para la segunda parte de la sesión, los alumnos podrán experimentar con sus propias manos los conceptos enseñados por el profesor.

Geomag es un juego de barras y bolas de metal imantado creado por la compañía suiza Geomagworld S.A. y con el que los alumnos experimentarán los conceptos de rotación, reflexión y simetría creando estructuras que sigan las leyes de ordenamiento de la materia con sus propias manos. Los alumnos utilizarán Geomag de manera totalmente autónoma y sin instrucciones precisas por parte del profesor. La única consigna será la de trabajar los conceptos anteriormente explicados: que observen el producto de una rotación de orden 2, 3, que realicen reflexiones de figuras, que creen una estructura tridimensional, ya sea simétrica o asimétrica; todo ello con total libertad en cuanto a la complejidad, diseño, etc.

El objetivo fundamental de esta segunda parte de la sesión, la cual se realizará durante los últimos 15min de la clase, será la de favorecer la comprensión del alumnado, permitiendo que visualicen ellos mismo los conceptos anteriormente explicados. Además, el hecho de realizar este juego didáctico durante un periodo corto al final de la clase, permitirá mantener la motivación de los chicos y chicas de cara a la siguiente sesión.

Durante la segunda sesión, se les explicará rápidamente a los alumnos las diferencias entre frisos y mosaicos, hablándoles sobre los diferentes grupos posibles tanto de unos como de otros. Esta explicación será breve, de una duración de unos 15min. Durante el resto de la clase, se retomará el trabajo con el juego Geomag. En este caso, los alumnos deberán crear, mediante un proceso de indagación por grupos de máximo 4 alumnos, un friso y un mosaico. Deberán investigar más en profundidad las isometrías que presenten los grupos de simetría que quieran reproducir y se tendrá en cuenta su capacidad creativa y el grado de complejidad de sus estructuras, animando a los alumnos a que sean originales y no se conformen con crear el friso o mosaico más simples. Los últimos 10min se reservarán para que los grupos expongan su trabajo al resto de alumnos, explicando las simetrías formadas y las isometrías realizadas para crear los distintos grupos de simetría espacial mono y bidimensionales.

Las dos sesiones siguientes, se corresponderán con los recorridos por la ciudad de Valladolid. Para cada una de estas sesiones, se contará con, al menos, el tiempo de dos clases enteras, 1h50min aproximadamente.

El primer recorrido a realizar será el paseo para descubrir los grupos de simetría monodimensionales de la ciudad. Puesto que este primer recorrido es considerablemente más corto que el segundo (solamente hay 7 grupos de simetría monodimensional, frente a los 17 grupos bidimensionales), la evaluación de la actividad se realizará el mismo día y también en la calle, en un ambiente distendido y que permita a los alumnos encontrarse a gusto.

El segundo recorrido, con el objetivo de observar y conocer los grupos de simetría bidimensionales que podemos encontrar caminando por las calles de Valladolid, se realizará en la sesión siguiente. Este segundo paseo será considerablemente más largo, por lo que la evaluación del mismo se realizará en la siguiente y última sesión, en el aula.

Si bien la temporalización será la misma, tanto para los alumnos de 4º de E.S.O. como para los de 1º y 2º de Bachillerato, la metodología empleada en los recorridos para los alumnos de secundaria y los de bachiller, no será exactamente igual:

- **Metodología para alumnos de 4º de E.S.O.:** se propone un paseo más dirigido, en el que el profesor guiará el recorrido realizado con los alumnos y explicará en cada caso, los grupos de simetría que se pretenden ver, así como sus características fundamentales, etc. El profesor no se limitará a presentar los distintos frisos y mosaicos, sino que aprovechará, además, para hablar de las peculiaridades históricas o curiosidades que puedan caracterizar al edificio portador, si las hubiere.
- **Metodología para alumnos de 1º y 2º de Bachillerato:** en este caso se propone una metodología más autónoma. Se dividirá a los alumnos en grupos, aportándoles un mapa de la ciudad, marcados los lugares en los que encontrarán los distintos grupos de simetría. Los alumnos deberán ir a los distintos lugares, localizar el grupo de simetría, dibujarlo y buscar alguna información que pueda resultar curiosa sobre el edificio que lo contenga, preferentemente de la mano de algún ciudadano o persona encargada de la recepción del lugar. Los alumnos decidirán y notificarán el orden en el que visitarán los distintos lugares al profesor para que éste sea consciente. Además, cada grupo contará con un móvil con el número del responsable de la actividad en su memoria, para que, en caso de emergencia, puedan contactar y resolver cualquier incidencia. El profesor, por su parte, sabiendo los recorridos que realizará cada grupo, se preocupará de visitarlos a todos en distintas ocasiones, para resolver las dudas que hayan podido surgir y ver que no han ocurrido incidencias.

Para la correcta puesta en marcha de esta última metodología, se precisa de un alto grado de confianza y madurez por parte del alumnado. Si no fuese el caso, el profesor optaría por implementar la metodología dirigida, igual que la propuesta para el curso de 4º de E.S.O. Del mismo modo, si considerase que los alumnos de este último curso, fuesen lo bastante maduros y capaces de realizar la actividad en autonomía, creemos que ésta sería mucho más motivante y enriquecedora para ellos, de modo que animamos a los profesores a optar por el trabajo en autonomía, fomentando el autoaprendizaje, la exploración y las relaciones interpersonales del alumnado.

Una vez realizados sendos recorridos, seleccionando una u otra metodología para el desarrollo de los mismos, la última sesión se corresponderá con la

evaluación del paseo por los grupos de simetría espacial bidimensionales. Esta evaluación se realizará en el aula e idealmente no llegará a tomar los 55min de una clase ordinaria, de modo que el profesor aprovechará el tiempo restante para realizar un repaso global de todo lo aprendido con los alumnos, proporcionándoles una visión de conjunto y refrescando aquellos conceptos que se hubiesen visto al comienzo de la propuesta y hubiesen podido ser olvidados por el alumnado.

## **Propuestas alternativas**

Siendo conscientes del nivel de recursos que necesitaría la puesta en marcha de esta propuesta didáctica, tal y como la hemos presentado hasta ahora, a continuación proponemos una serie de modificaciones para aquellos centros de enseñanza que no cuenten con las posibilidades requeridas o bien, que presenten alumnos con incapacidades físicas que les impidan realizar la actividad tal y como ha sido propuesta.

Pensando en el trabajo con el juego Geomag, lo ideal sería contar con al menos 2 ó 3 juegos de 120 piezas, valorados en unos 70€ cada uno. Si el presupuesto no lo permitiese, existe una aplicación web, utilizable desde cualquier ordenador, tablet o teléfono móvil, llamada Geogebra, que permite realizar el mismo trabajo desde un dispositivo que cuente con una conexión a internet.

En cuanto a los recorridos, si el instituto no dispusiese de tiempo para la realización de la salida por la ciudad o algún alumno tuviese algún tipo de incapacidad física que le impidiese llevar a cabo la actividad, también se podrían utilizar dispositivos informáticos que nos permitiesen viajar desde el ordenador. Existen diferentes plataformas web que permiten la visualización de las calles de cualquier ciudad mediante sistema GPS, como puede ser la función *Street view* de Google Maps. Este sistema nos permitiría realizar el paseo sin salir del aula de informática, sabiendo que además, la búsqueda de información sobre los edificios que pudiesen contener los grupos de simetría señalados, sería mucho más sencilla gracias a internet. Además, mediante otros sistemas, como Google Earth o Marble, se podrían buscar patrones de simetría en la planta de edificios, parques o ciudades, ampliando así la actividad y pudiendo introducirse aspectos relacionados con la evolución del urbanismo y la concepción de la organización de una ciudad a lo largo de la historia.

## **Competencias**

El desarrollo de esta actividad resulta de gran interés, no solo por la capacidad intrínseca que presenta para motivar a los alumnos hacia un tema que no se aprecia en la medida en que se debería, sino además, la gran cantidad de materias y centros de interés que puede abarcar. Efectivamente, dentro de esta propuesta, además de las materias obviamente representadas, como son la cristalografía, la mineralogía, la física o las matemáticas, también es muy posible incluir otras asignaturas diametralmente distintas y que aportan, así, una gran diversidad de

contenidos que podrán llegar más fácilmente a interesar a todos los alumnos, como son la historia, el arte o la arquitectura.

Esta gran diversidad de contenidos permite además el desarrollo de un gran número de competencias:

<b>COMPETENCIA</b>	<b>JUSTIFICACIÓN</b>
Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.	Quizá la más obvia de todas. Todos los contenidos curriculares de la actividad están basado en el trabajo de esta competencia.
Comunicación lingüística	Durante el desarrollo de la actividad, se les pedirá a los alumnos que expongan y se expresen delante de sus compañeros. Además, durante las evaluaciones, los alumnos deberán plasmar por escrito sus conocimientos, trabajando sus capacidades comunicativas, tanto orales como escritas.
Competencia Digital	Si se optase por el uso de las nuevas tecnologías, tal y como se ha propuesto de manera alternativa, los alumnos tendrán también la oportunidad de trabajar sus competencias digitales.
Aprender a aprender	Toda la metodología está firmemente apoyada en el aprendizaje por indagación, fomentando el trabajo autónomo del alumnado y su capacidad para aprender por ellos mismos.
Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.	En las diferentes actividades, los alumnos tendrán numerosos momentos de libertad en el que deberán tomar sus propias decisiones y defenderlas después frente al resto, Este tipo de acciones pretende fomentar esta competencia.
Competencias sociales y cívicas.	Gracias a las salidas por la ciudad, así como al hecho de deber preguntar a los ciudadanos o responsables de los edificios por su historia, los alumnos podrán poner a prueba sus habilidades sociales y cívicas.
Conciencia y expresiones culturales.	Consideramos que el presente trabajo no debe limitarse a los aspectos matemáticos y cristalográficos de los contenidos tratados, sino que ha de optar por una visión más global en la que puedan entrar en juego otras materias, especialmente la historia y el arte arquitectónico de la ciudad de Valladolid.

## Evaluación

Si bien se realizará una evaluación continua a lo largo de todas las sesiones, en la que se evaluará la capacidad de atención y de trabajo, el grado de interés y la actitud general de cada alumno, también se les realizarán dos pruebas escritas con la finalidad de evaluar los conocimientos adquiridos y el nivel de asimilación de los mismos. La primera prueba se realizará en torno a los grupos de simetría espacial monodimensionales, mientras que la segunda versará sobre los grupos de simetría espacial bidimensionales.

Durante la tercera sesión, una vez finalizado el recorrido para observar los distintos grupos de simetría monodimensionales, se les pedirá a los alumnos que, de forma individual, tomen una hoja de papel en blanco y elaboren, en torno a los márgenes del folio, un friso que rodee toda la superficie. El motivo del friso se dejará a la elección del alumno, así como las isometrías que quisieran añadir, sabiendo que se valorará tanto la originalidad del motivo, como la complejidad estructural del friso. Una vez dibujado, se les pedirá que marquen en un color llamativo la que sería la celdilla unidad, así como la celda primitiva. Si fuesen capaces de encontrar más de una opción y pudiesen marcarlas, sería, del mismo modo, algo a tener en cuenta. Por último, en el espacio interior, delimitado por la cenefa, los alumnos deberán escribir una descripción del grupo de simetría utilizado, así como el nombre del mismo, seguido de una anécdota o la historia del edificio en el que podríamos haber encontrado el mismo GSE-1D en la ciudad de Valladolid.

En la última sesión, se realizaría la evaluación del recorrido sobre los grupos de simetría espacial bidimensionales. El proceso sería similar al del caso anterior. Los alumnos deberán dibujar un mosaico que rellene el centro de un folio en blanco, marcando en el interior las posibles celdillas unidades y celdas primitivas. Al pie de esa misma cara, deberán señalar el grupo de simetría espacial al que pertenece el mosaico realizado, y por la parte de atrás, deberán incluir una descripción del mismo, así como una anécdota histórica del edificio que contuviese un mosaico del mismo tipo en Valladolid. Igual que en el caso anterior, se valorará tanto la originalidad del motivo utilizado para la creación del mosaico, como la complejidad de este último.

## Recorrido por los GSE-1D

Barandas de balcones del centro de la ciudad, adornos en los pies de las estatuas, puertas y fachadas de iglesias, bocas de alcantarilla, adoquinado de calles peatonales, coronas y dibujos en las farolas del casco histórico. Existen infinidad de lugares en los que podemos encontrar bellos frisos, ejemplos de grupos de simetría monodimensionales, en la ciudad de Valladolid. No obstante, para la realización de este recorrido, hemos querido centrarnos en aquellos lugares del centro que presenten, además, un cierto interés histórico. No siempre ha sido posible, pero nos hemos esforzado por que así sea, de forma que los alumnos puedan, no solamente apreciar e interiorizar los distintos grupos de simetría, sino también conocer y aprender la historia de ésta, nuestra ciudad. De este modo hemos querido poner de manifiesto las posibilidades de esta actividad para aunar diferentes materias como son las matemáticas, la geología, la historia o el arte.

A continuación presentamos el mapa del centro de la ciudad conteniendo los lugares en los que deberán encontrar y analizar los distintos GSE-1D (*Figura 35*).

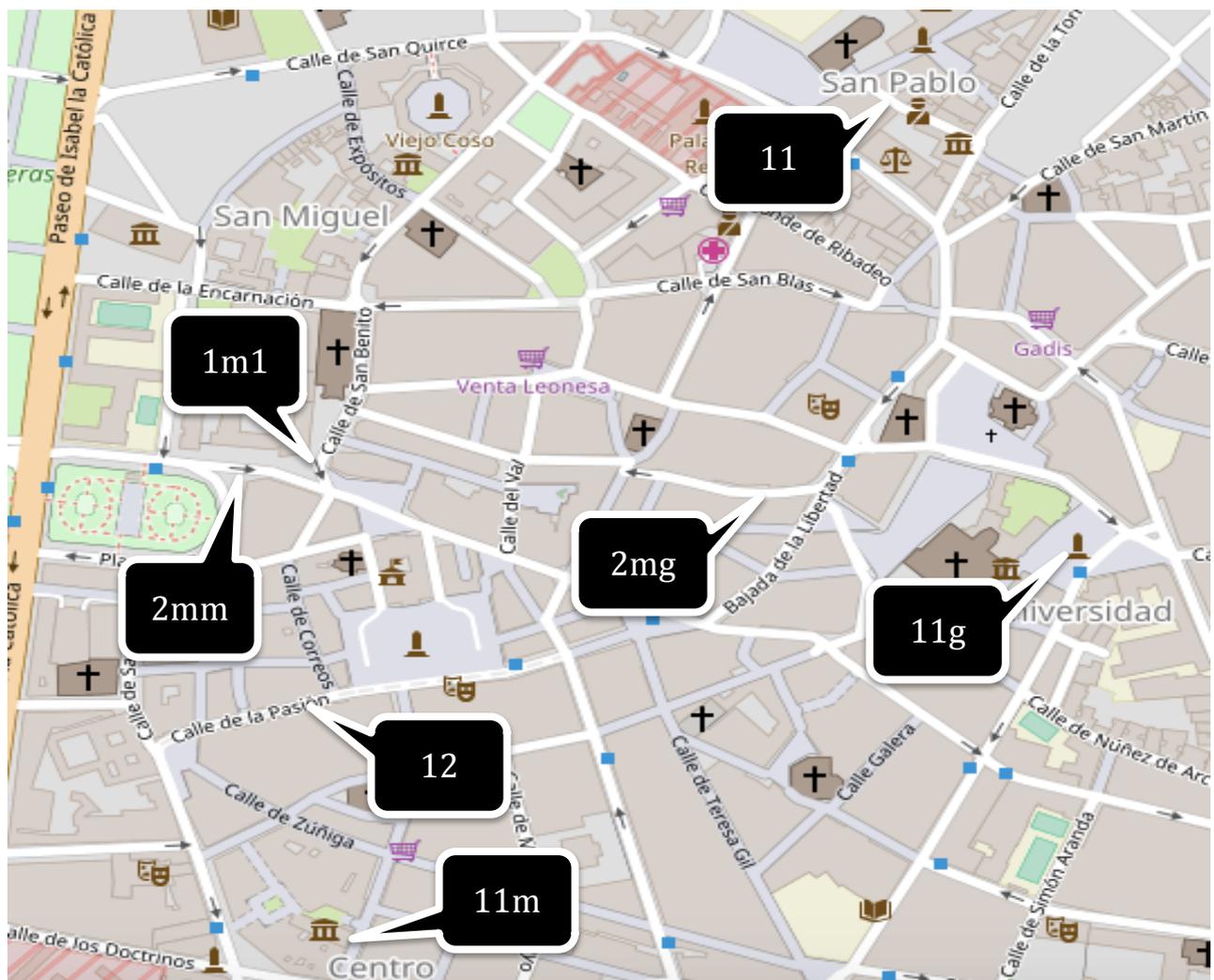


Fig. 35.: Recorte del plano del centro de Valladolid con ejemplos de GSE-1D marcados.

## Grupo F11 (11)

Se trata del tipo de frisos más simple, compuesto únicamente por un motivo que se traslada a lo largo de una línea imaginaria en una sola dirección.

El ejemplo que presentamos (*Figura 36*) presenta un bonito motivo en forma de ola y que enmarca los mosaicos que se encuentran en el vestíbulo de la entrada al Palacio de Pimentel (*Figura 37*).



Fig. 36.: Ejemplo de grupo F11 enmarcando la parte inferior de las imágenes que muestran la historia del palacio y la parte superior del mosaico inferior que tapiza los muros del vestíbulo. El marco señala la celdilla unidad del friso.



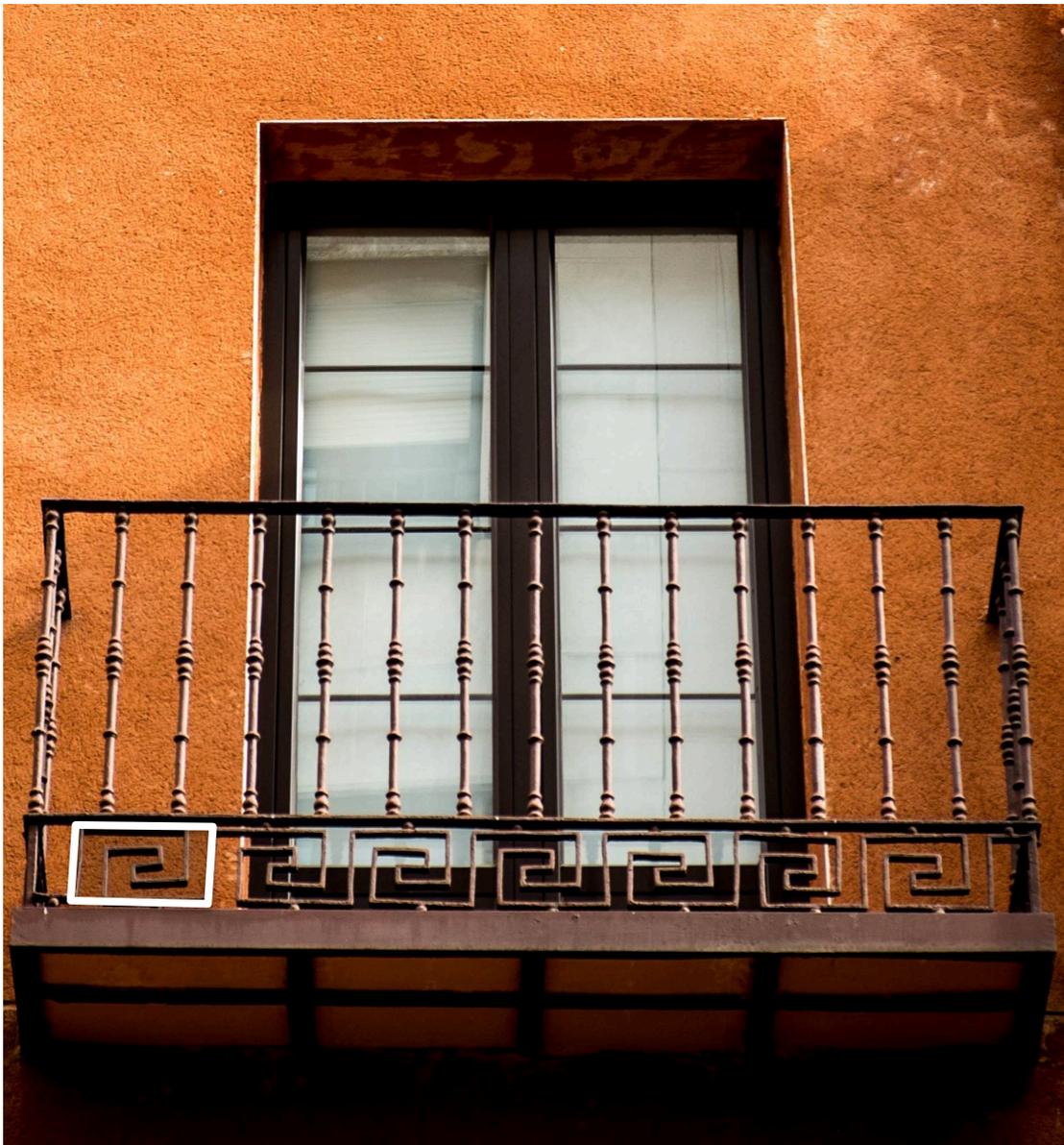
Fig. 37.: Imagen del vestíbulo del Palacio de Pimentel con las imágenes y mosaicos que cubren los muros de la sala. Las flechas marcan el lugar en el que encontramos el friso que hemos tomado como ejemplo para el grupo F11.

Con este ejemplo, los alumnos no solo descubrirán el primer tipo de friso y el más sencillo, sino que también podrán aprender la historia del palacio y el

nacimiento de Felipe II, así como la anécdota de su bautizo en la iglesia de S. Pablo, situada a la izquierda del palacio, y cómo la comitiva del bautizo debió salir a escondidas por una ventana que debieron romper y donde hoy en día se conserva, a modo de recordatorio del suceso, una cadena para cerrar aquella fenestra que quedó inutilizada.

### Grupo F12 (12)

El ejemplo para este grupo, que presenta ya rotaciones de  $180^\circ$ , o de orden 2, lo encontramos en la fachada del nº6 de la Calle de la Pasión (*Figura 39*). Si observamos las barandillas de los balcones del segundo piso, encontraremos, en la parte más baja de las mismas, este bonito friso perteneciente al grupo F12 (*Figura 38*).



**Fig. 38.:** Ejemplo de grupo F12 en la parte baja de la barandilla de uno de los balcones del segundo piso del nº6 de la Calle de la Pasión. Se ha encuadrado la celdilla unidad sobre la que se realizan las rotaciones y traslaciones que darán lugar a esta cenefa.



**Fig. 39.:** Imagen del edificio en el que encontramos los balcones cuyas balastradas contienen los frisos del grupo F12 que hemos tomado como ejemplo.

Si bien el edificio en sí no presenta ningún otro interés, aparte del de portar el ejemplo que hemos seleccionado para el grupo de simetría F12, a 50m hacia la izquierda, nos encontraremos con la iglesia de la Pasión, ahora reconvertida en una sala de exposiciones municipal. Este segundo edificio, casi contiguo al que presenta el friso que los alumnos deberán analizar, sí tiene un mayor interés, no solamente histórico, sino también artístico, ya que además de presentar una muy bella fachada de estilo barroco churrigüesco, en su interior se realizan exposiciones de pintura, numerosas y muy variadas.

### Grupo F1m (11m)

En la iglesia del Convento de las Francesas (*Figura 41*), también conocido como Convento de las Comendadoras de Sta. Cruz o Convento de las Dominicas Franciscanas, podemos encontrar el ejemplo que aquí presentamos para el grupo F1m, presentando un eje de reflexión longitudinal a la dirección de traslación (*Figura 40*).



**Fig. 40.:** Ejemplo de grupo F1m que encontramos sobre la virgen de la fachada de la iglesia del Convento de las Francesas. Se ha encuadrado la celdilla unidad que tomamos para la creación del friso.



**Fig. 41.:** Imagen de la fachada de la iglesia del Convento de las Francesas, ahora convertida en una sala municipal de exposiciones. Se ha señalado con una flecha el lugar en el que encontramos el friso del grupo F1m tomado como ejemplo.

Con este ejemplo, además de ver el primer grupo de simetría que empieza a presentar ejes de reflexión, los alumnos podrán investigar sobre la interesante historia de esta iglesia y, sobre todo, de su convento. Cómo fue creado por dos hermanas de la ciudad de Valladolid y a quiénes les era permitida la entrada. Cómo fue pasando de unas manos a otras, hasta llegar a ser un colegio regentado por la comunidad de las Dominicas Francesas, de quien se quedó el nombre, y cómo finalmente fue transformado en centro comercial, donde ya solo encontramos el claustro y esta bella fachada de la iglesia, ahora transformada en una sala de exposiciones.

### Grupo Fm1 (1m1)

Para ejemplificar este grupo de simetría hemos sacado un gracioso ejemplo (*Figura 42*) de las farolas que encontramos en el centro histórico de la ciudad. Ésta concretamente, la encontramos en la esquina que hace la plaza de S. Benito con la Calle Plaza de la Rinconada (*Figura 43*). Si bien la farola en sí no tiene ningún interés histórico, sí que lo tiene la iglesia de S. Benito, una de las más emblemáticas de la ciudad, construida en el S. XV y que ha sufrido algún cambio importante a lo largo de su historia que los alumnos deberán descubrir. Además, en la misma esquina en la que encontramos nuestra farola, aparece también la entrada a una sala de exposiciones dedicada exclusivamente a la fotografía, con muestras muy interesantes, que creemos que los jóvenes deben conocer.



**Fig. 42.:** Ejemplo de grupo Fm1 encontrado en los adornos que coronan las farolas del centro de la ciudad de Valladolid. Se ha encuadrado la celdilla unidad que se repite para la formación de este bonito friso.



**Fig. 43.:** Imagen de la farola seleccionada, en la esquina que hace la plaza de S. Benito con la Calle Plaza de la Rinconada.

## Grupo Fmm (2mm)

Para este grupo, ya más complejo que los anteriores, hemos seleccionado como ejemplo las barandillas que rodean a la estatua sentada de Rosa Chacel (*Figura 45*), la célebre escritora vallisoletana de la Generación del 27. Estas mismas barandas se encuentran también contornando la plaza del Poniente (*Figura 44*), justo al lado. Sin embargo, hemos creído más oportuno señalar aquellas próximas a la estatua de Chacel, ya que de este modo, los alumnos podrán además interesarse por la vida y obra de esta gran escritora.



**Fig. 44.:** Ejemplo del grupo Fmm que encontramos en las barandillas que rodean la estatua de Rosa Chacel y, como en este caso, la plaza del Poniente. Encuadrada aparece la celdilla unidad cuyas rotaciones, reflexiones y traslaciones crea este patrón de simetría.



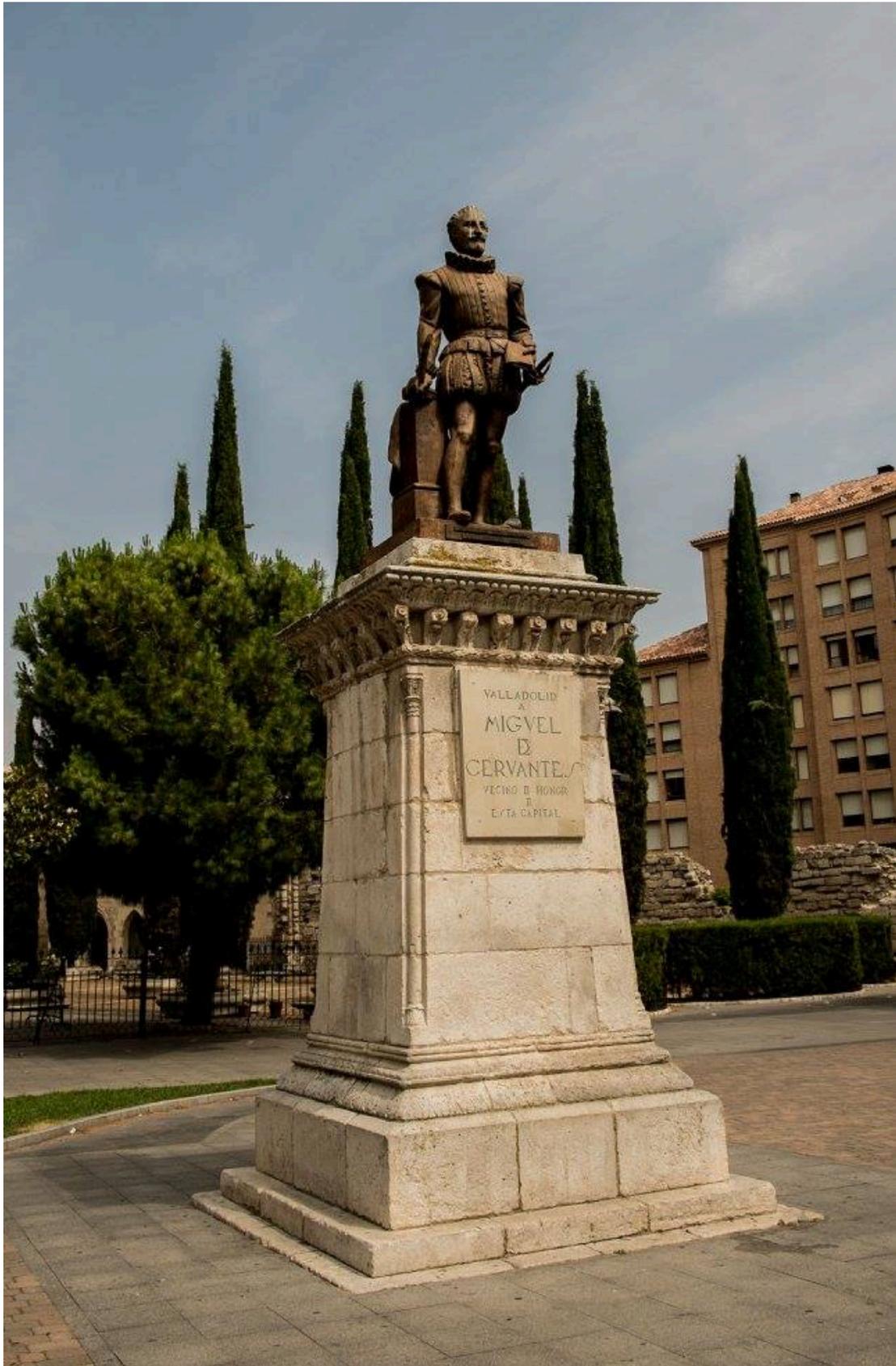
**Fig. 45.:** Imagen de la plazoleta en la que encontramos la estatua de la escritora vallisoletana, Rosa Chacel, sentada sobre uno de los bancos y rodeada por las barandas que forman el friso que hemos tomado como ejemplo para el grupo Fmm.

## Grupo F1g (11g)

El ejemplo que se propone a continuación es uno de los más bonitos y curiosos a nuestro parecer. Se trata de la gorguera (*Figura 46*) que presenta la estatua de Miguel de Cervantes en la plaza de la Universidad (*Figura 47*). Esta gorguera, llamada gorguera de cuello rizado o escarolado, se puso muy de moda en el S.XVI y sus pliegues son ejemplo del grupo de simetría F1g. Con este ejemplo, los alumnos podrán, no solo visualizar este patrón de simetría, sino también investigar sobre la vida del considerado como la máxima figura de la literatura española y universalmente conocido por haber escrito “El ingenioso hidalgo don Quijote de la Mancha”. Además, podrán darse cuenta de lo fácil que resulta colocar a los distintos personajes históricos en sus respectivas épocas gracias a su vestimenta, algo que puede resultar de mucha utilidad a la hora de memorizar las fechas durante las clases de historia.



**Fig. 46.:** Ejemplo de grupo F1g creado por cada uno de los pliegues de la gorguera que, como vemos, se reflejan y desplazan con respecto al anterior. Uno de esos pliegues queda enmarcado para señalar lo que conformaría la celdilla unidad del friso.



**Fig. 47.:** Imagen de la estatua del soldado, novelista, poeta y dramaturgo español Miguel de Cervantes Saavedra, erigida en la plaza de la Universidad de Valladolid.

## Grupo Fmg (2mg)

El último de los grupos de simetría espacial monodimensionales lo ejemplifica el tragaluz del nº 16 de la Calle Macías Picavea (*Figura 49*), donde encontramos un muy bonito motivo con rotaciones y reflexiones deslizantes que dan lugar a este friso del grupo Fmg.

Si bien el edificio en sí no presenta ningún otro aspecto a destacar, sí consideramos bueno recordar al escritor, periodista y pensador Ricardo Macías Picavea, nacido en Santoña, pero que pasó su vida en Valladolid, donde luchó por el desarrollo y la educación de las gentes de la ciudad y contra el caciquismo político de la época; luchas que por desgracia aún han de llevarse a cabo hoy en día.



**Fig. 48.:** Imagen de la fachada del nº16 de la Calle Macías Picavea, donde se aprecia su tragaluz portando el ejemplo de friso F2mg. Se ha marcado la celdilla unidad.

## Recorrido por los GSE-2D

Como ya hemos visto, comúnmente llamamos a los grupos de simetría espacial bidimensionales: mosaicos. En la ciudad de Valladolid, existen numerosos ejemplos de mosaicos geométricos en el tímpano y la fachada de muchas iglesias, en el interior de muchos edificios públicos: facultades, delegaciones del gobierno, colegios e institutos; adornando puertas y verjas, bajo los balcones de algunas fachadas. El propio adoquinado de las calles es siempre el más visible ejemplo de mosaico en el mobiliario urbano de cualquier ciudad. No obstante y a nuestro pesar, existen dos GSE-2D que no hemos llegado siquiera a encontrar, ni en el patrimonio histórico, ni en el urbano de Valladolid, a saber los grupos p3 y p31m.

A continuación presentamos el mapa del recorrido propuesto, con todos los GSE-2D que se han podido encontrar, a excepción del mosaico p1, que por su lejanía del resto de puntos, no aparece en el mapa (*Figura 49*). Igual que en el recorrido anterior, se ha puesto especial interés en que los distintos mosaicos aparezcan en edificios o lugares de interés histórico.



**Fig. 49.:** Mapa que señala los puntos en los que se encuentran los ejemplos de los distintos GSE-2D.

## Grupo p1

Para este primer grupo de simetría, el más sencillo, en el que solamente nos encontramos con traslaciones a lo largo de dos direcciones de un mismo motivo, hemos elegido la fachada de El Corte Inglés del Paseo Zorrilla (*Figura 50 y 51*). Si fuésemos ciegos al efecto tridimensional creado por las sombras que presentan los triángulos y los tomásemos como objetos completamente planos, estaríamos en presencia de un GSE-2D p2mg.



**Fig. 50.:** Fachada del edificio de El Corte Inglés donde encontramos nuestro ejemplo de mosaico más sencillo, el GSE-2D p1.

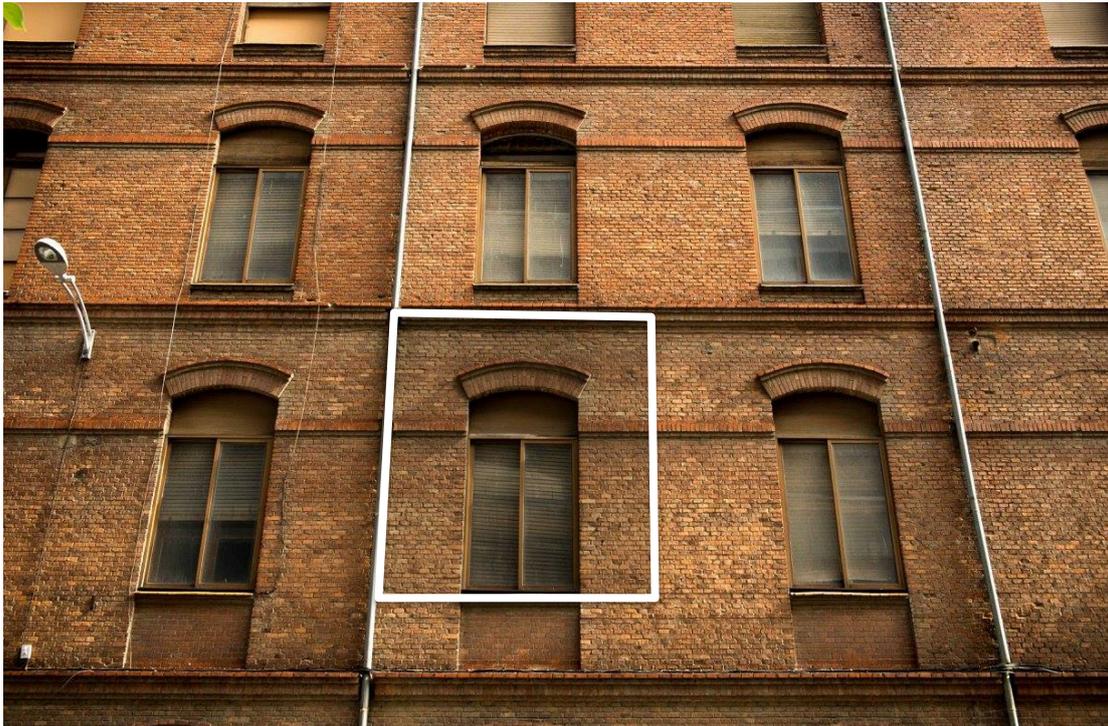


**Fig. 51.:** Detalle de la fachada donde se aprecian los triángulos de efecto tridimensional que nos proporcionan este ejemplo de mosaico de tipo p1. Se ha marcado la celda unidad.

## Grupo pm

En este segundo grupo, además de traslaciones, contamos con la aparición de un plano de reflexión para crear la celdilla primitiva que se repetirá a lo largo de dos dimensiones para dar lugar este mosaico. Para ejemplificarlo, hemos elegido el lateral del edificio que hace esquina en la Calle Veinte de Febrero con el Paseo de Isabel la Católica.

Este edificio no tiene especial interés histórico, pero sus ventanales (*Figura 52*) muestran de manera clara cómo se forma un mosaico de tipo pm. No obstante, puede resultar curioso que los alumnos descubran el por qué de un nombre tan curioso para esta calle.



**Fig. 52.:** Ventanales del nº 8 de la Calle Veinte de Febrero, ejemplo de mosaico pm. Se ha marcado la celdilla unidad.

## Grupo pg

Para este tipo de mosaicos hemos tomado como ejemplo una boca de alcantarilla (Figura 53). Existen muchas bocas del alcantarillado con el mismo diseño distribuidas por el centro de la ciudad. No obstante, la aquí fotografiada se encuentra en la Calle de San Ignacio, junto al Viejo Coso (Figura 54).

Las isometrías del mosaico presente en este tipo de alcantarillas resulta bastante fácil de ver e interiorizar, pero además, a los alumnos les resultará curioso ver la plaza del Viejo Coso, la primera plaza de toros de Valladolid, reconvertida ahora en pisos de viviendas, con un precioso patio interior, abierto al público, que ocuparía el espacio de la arena antaño.



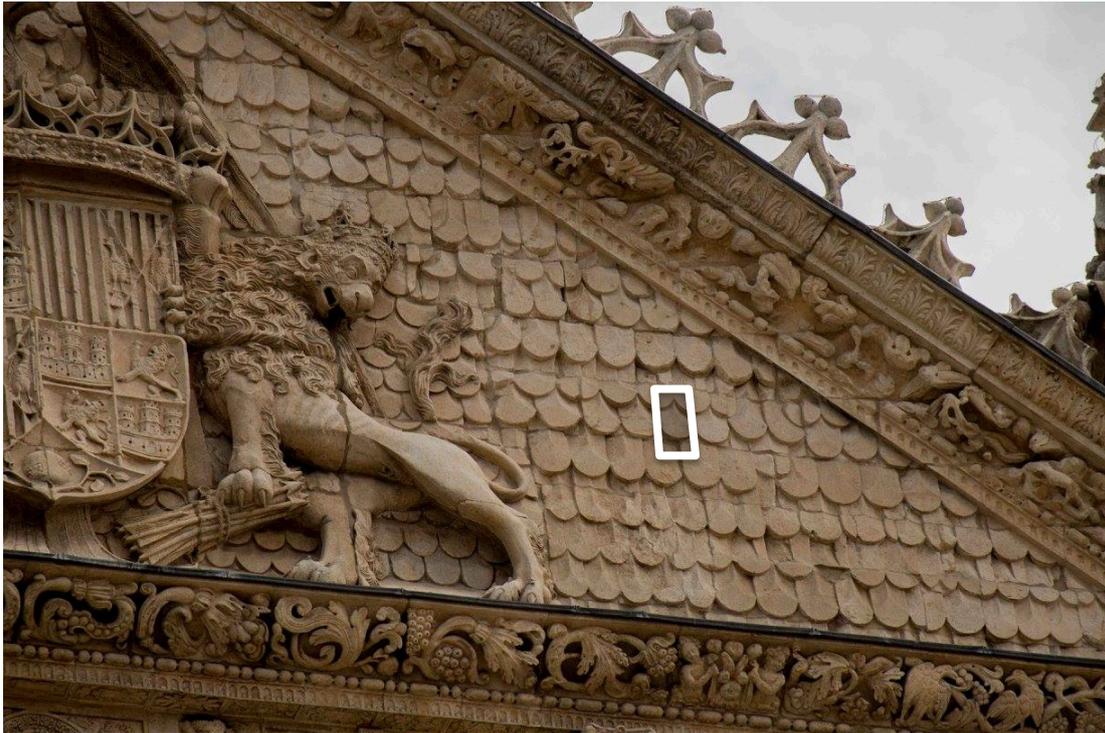
**Fig. 53.:** Imagen de la alcantarilla donde se aprecia el mosaico de tipo pg. Se ha marcado la celdilla unidad que dará lugar a este mosaico mediante traslaciones y planos de reflexión deslizante.



**Fig. 54.:** Vista aérea de la plaza interior del Viejo Coso, la primera plaza de toros construida en Valladolid y reconvertida ahora en pisos de viviendas.

## Grupo cm

Para ejemplificar este grupo de simetría bidimensional, hemos escogido un mosaico aparente en lo alto de la fachada de la iglesia de S. Pablo (*Figura 55*). Esta iglesia (*Figura 56*), una de las más bonitas de Valladolid, de estilo gótico isabelino (estilo típico en Castilla) y preferida de reyes para realizar sus ceremonias más queridas, brindará a los alumnos la oportunidad de apreciar su arte y descubrir su historia, al tiempo que dilucidan las isometrías presentes en este mosaico de tipo cm.



**Fig. 55.:** Imagen del mosaico que rellena el triángulo superior de la fachada de la iglesia de S. Pablo, de tipo cm. Se ha marcado la celda unidad.



**Fig. 56.:** Imagen de la plaza de S. Pablo y la fachada de su iglesia. Se ha marcado con una flecha el lugar en el que se encuentra el mosaico elegido como ejemplo para el GSE-2D cm.

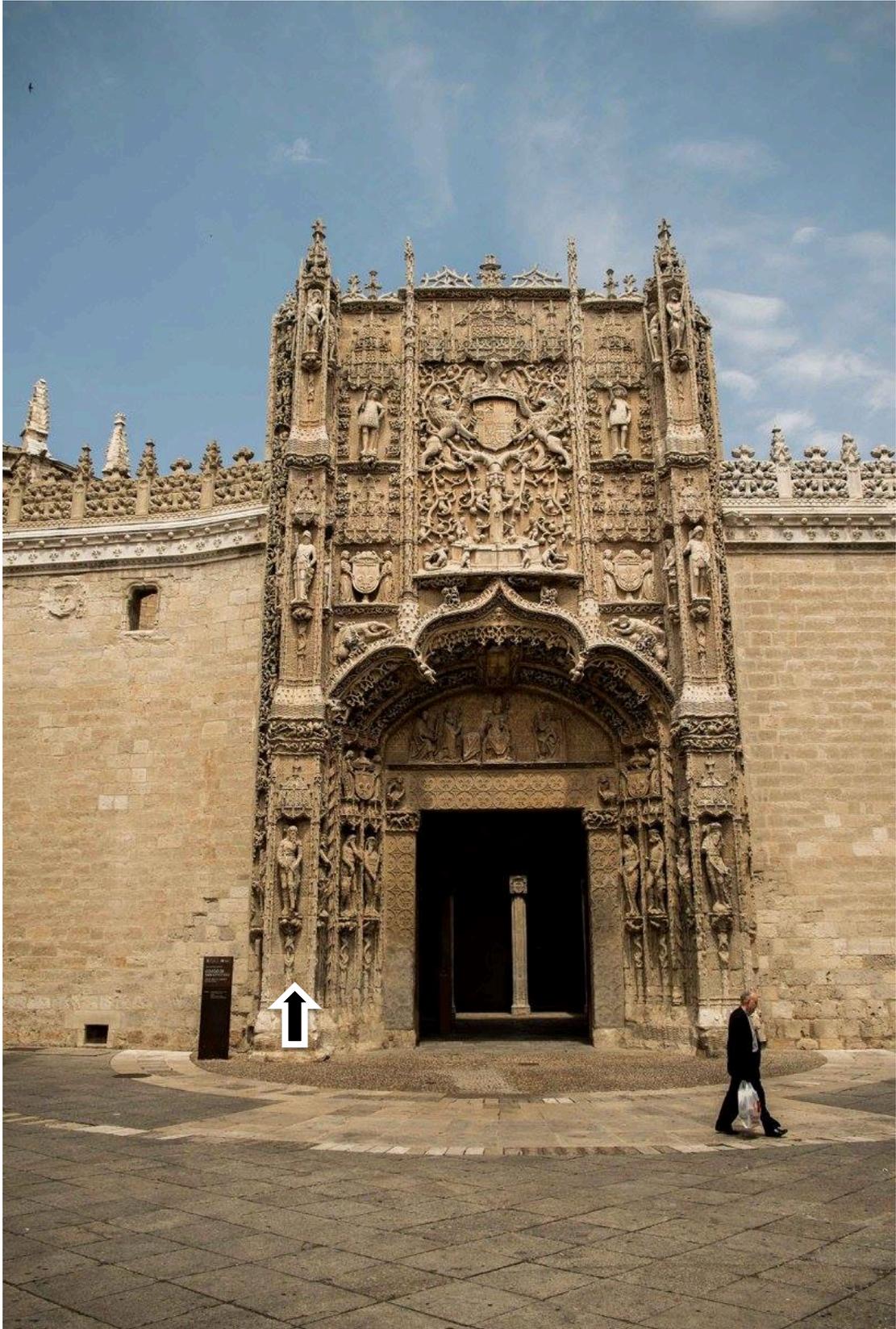
## Grupo p2

Para este grupo de simetría hemos tomado un ejemplo sacado de la fachada del Colegio de San Gregorio (*Figura 58*), sede principal del Museo Nacional de Escultura. El mosaico elegido, concretamente, se encuentra formando el fondo de las columnas exteriores de la fachada (*Figura 57*).

Por otro lado, la historia de este colegio puede resultar interesante para los alumnos. Destinado a colegio e Teología para frailes dominicos, adquirió una notable autoridad doctrinal y actuó como un semillero espiritual y político de la España renacentista y barroca. Además, resulta importante que conozcan el edificio como sede del Museo Nacional de Escultura y que puedan admirar la que es la colección más grande de tallas en madera policromada de España y una de las más importantes de Europa.



**Fig. 57.:** Ejemplo de GSE-2D de tipo p2 presente en la fachada del Colegio de San Gregorio. Se ha marcado la celdilla unidad.

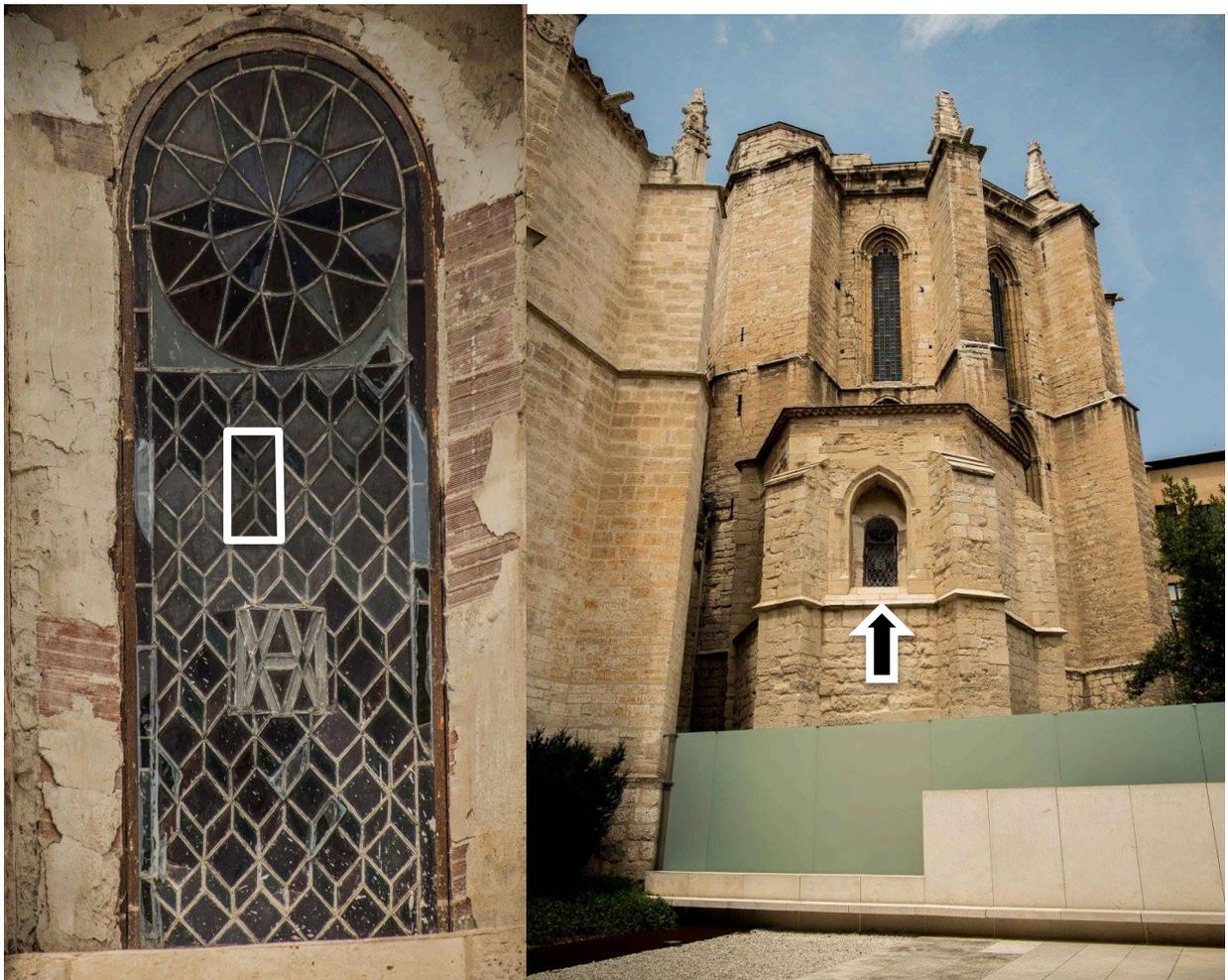


**Fig. 58.:** Imagen de la fachada del Colegio de San Gregorio. Se ha marcado con una flecha el lugar donde se puede encontrar el GSE-2D de tipo p2.

## Grupo pmm

Cuando atravesamos las puertas del Colegio de San Gregorio, si giramos hacia nuestra izquierda, accederemos a un pequeño patio interior, con una cafetería y el acceso a la capilla del colegio. Es precisamente, en una de las cristaleras de la capilla, vista desde este patio, donde nos encontramos con un curioso mosaico del tipo pmm (*Figura 59*).

La capilla es sencilla y puede ser visitada. Puede ser interesante para los alumnos visitar la tumba de Alonso de Burgos, “fray Mortero”, y descubrir la vida del fundador y promotor del Colegio de San Gregorio, una figura clave en la corte de los Reyes Católicos.



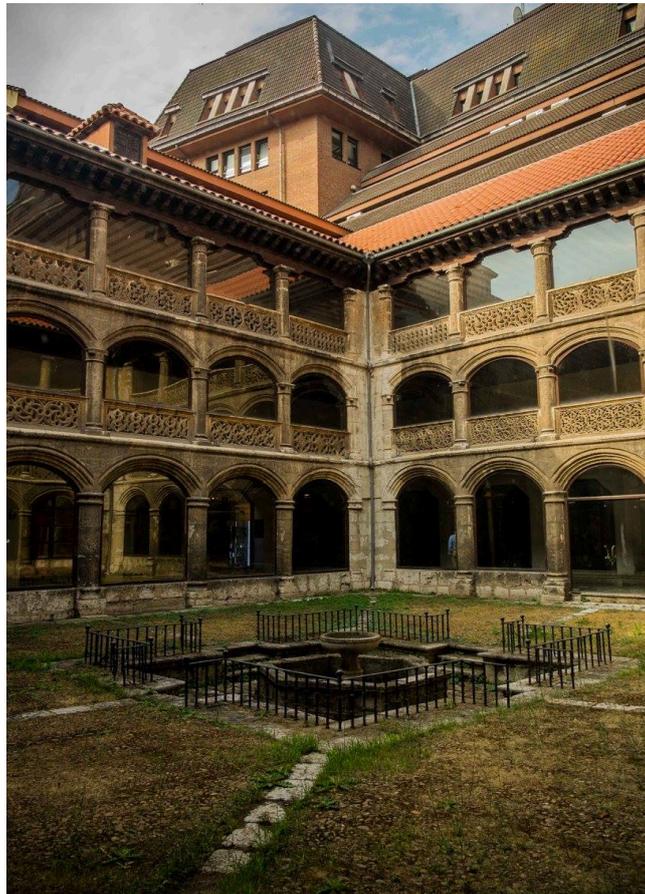
**Fig. 59.:** Imagen de la capilla (derecha) y de la cristalera que contiene el mosaico (izquierda). Se ha señalado con la cristalera sobre la capilla y la celdilla unidad sobre la cristalera.

## Grupo pmg

Para encontrar un mosaico del tipo pmg, volveremos al Centro Comercial de las Francesas. No obstante, esta vez, en lugar de fijarnos en la que fue la iglesia del convento, bajaremos al que fuera el claustro (*Figura 61*). Efectivamente, en los balcones de piedra del primer piso, nos encontraremos en verdad con un friso dibujado (*Figura 60*). No obstante, si ese mismo dibujo se prolongase también hacia arriba, se convertiría en un mosaico que sería, precisamente, un GSE-2D de tipo pmg.



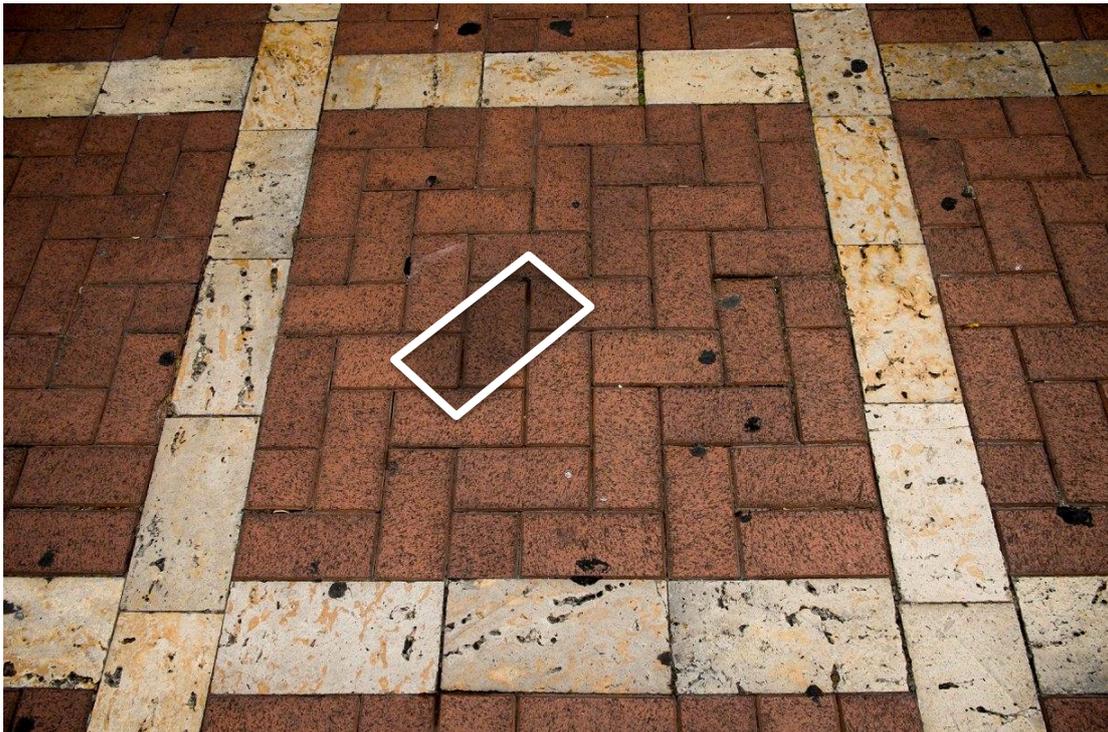
**Fig. 60.:** Baranda en piedra del primer piso del claustro del Convento de las Francesas y que resulta ser un GSE-2D de tipo pmg. Se ha marcado la celdilla unidad.



**Fig. 61.:** Fotografía del patio del claustro, en el interior del C.C. de las Francesas.

## Grupo pgg

Para este grupo nos desplazamos a la popularmente llamada Plaza de Coca, si bien su nombre real es Plaza de Martí y Monsó. Precisamente, resulta curiosa la historia de por qué ningún vallisoletano conoce la plaza por el nombre del pintor, dibujante y director de la Escuela de Bellas Artes de la ciudad, de 1871 a 1912, Don José Martí y Monsó. ¿De dónde viene el nombre de “Coca” entonces? ¿Quién se lo puso y por qué? Son preguntas que avivarán el interés de los alumnos por la ciudad de Valladolid y su historia, al tiempo que descubren un nuevo mosaico, esta vez tapizando el suelo de toda la plaza (*Figura 62*).



**Fig. 62.:** Adoquinado que forma el GSE-2D de tipo pgg y que cubre todo el suelo de la Plaza de Martí y Monsó, también llamada Plaza de Coca. Se ha marcado la celda unidad.

## Grupo cmm

Este tipo de mosaicos podemos encontrarlo a menudo en las puertas de las iglesias, como un bonito dibujo de cruces intrincadas. En este caso, la puerta elegida, la encontramos a ambos lados del vestíbulo de una de las entradas laterales de la Catedral de Valladolid (*Figura 63*).

El diseño de este mosaico ejemplifica claramente a los GSE-2D cmm, siendo un ejemplo perfecto para los alumnos. Además, el hecho de encontrarse en la Catedral de Nuestra Señora de la Asunción de Valladolid (nombre completo del templo), les permitirá descubrir los detalles históricos sobre la construcción de la que iba a ser la catedral más grande de Europa.



**Fig. 63.:** Una de las puertas colocadas a los lados del vestíbulo de una entrada lateral de la Catedral de Valladolid. El dibujo de las cruces coincide con un GSE-2D de tipo cmm. Se ha marcado la celdilla unidad.

## Grupo p4

Para representar este grupo de simetría, hemos tomado un ejemplo precioso de la fachada de un edificio en la Calle S. Martín (*Figura 65*). Sobre cada balcón, aparece un mosaico de tipo p4 con un diseño especialmente bonito (*Figura 64*).



**Fig. 64.:** Mosaico sobre los balcones del nº 3 de la Calle San Martín, ejemplo del grupo p4. Se ha señalado la celdilla unidad.



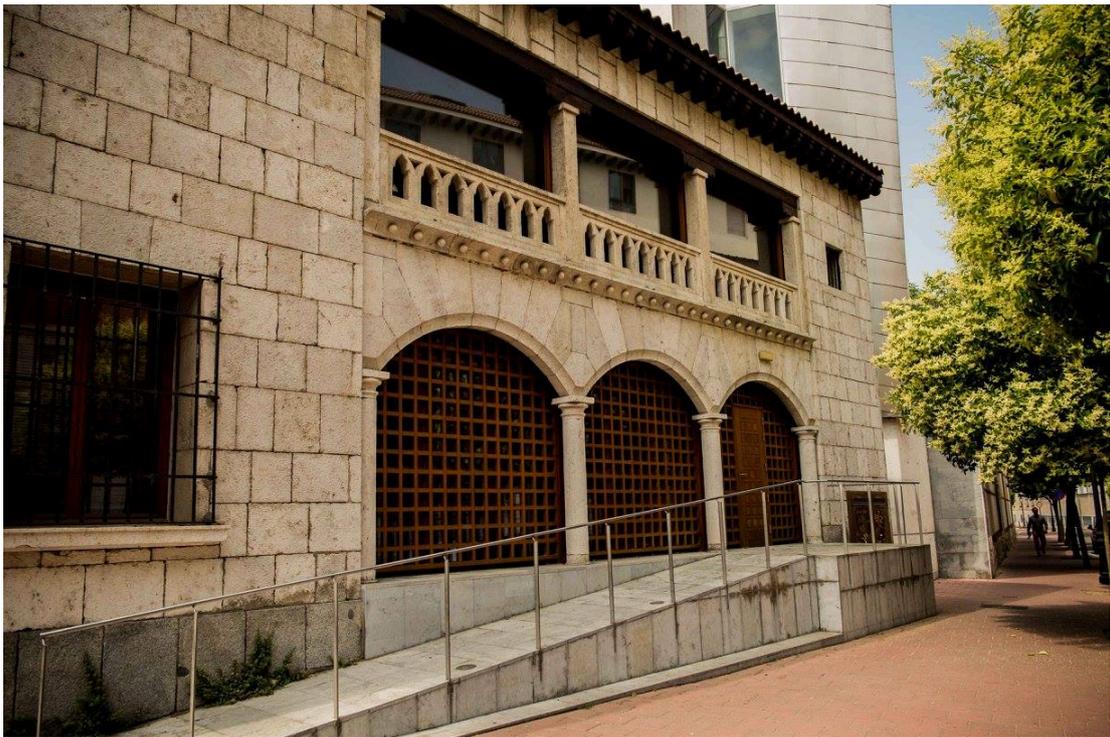
**Fig. 65.:** Imagen de la fachada del nº 3 de la Calle San Martín. Se ha señalado con una flecha los mosaicos sobre los balcones.

## Grupo p4m

Para el siguiente mosaico, ejemplo de GSE-2D de tipo p4m, hemos elegido el enrejado de madera (*Figura 50*), que protege los laterales de la Casa Museo de Colón (*Figura 51*), en la Calle de la Facultad de Medicina.



**Fig. 50.:** Enrejado sobre uno de los ventanales del lateral de la Casa Museo de Colón. Se ha marcado la celdilla unidad sobre la que se producen las traslaciones que dan lugar a este sencillo mosaico de tipo p1.



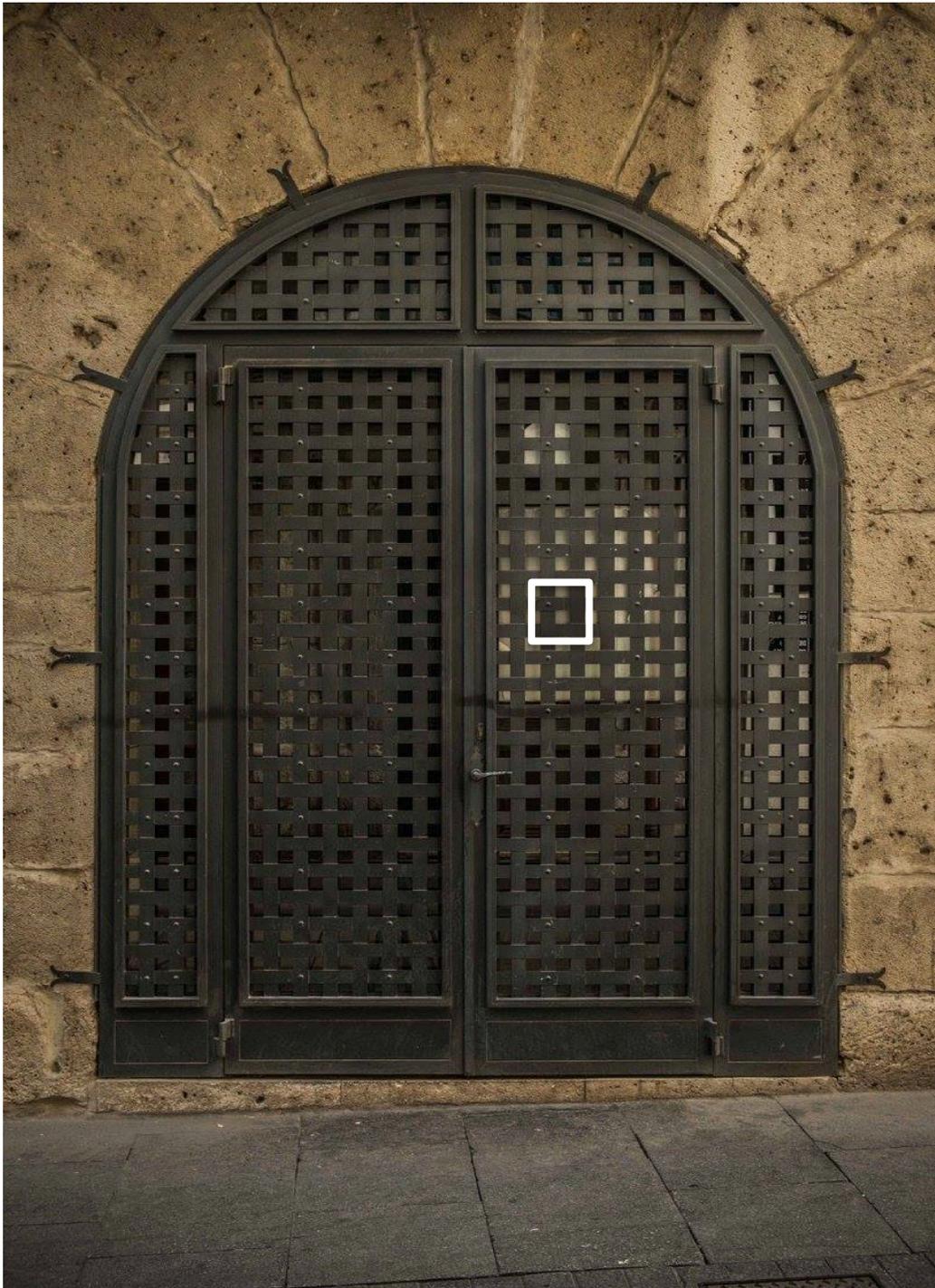
**Fig. 51.:** Lateral de la Casa Museo de Colón, donde se aprecia el enrejado de madera que protege los ventanales del piso a pie de calle.

En la Casa Museo de Colón, un homenaje al descubrimiento de América y la vida de Cristóbal Colón, los alumnos podrán descubrir este primer mosaico, en extremo sencillo, que les introducirá en un segundo recorrido más complejo e interesante. Además, por supuesto, no deberán dejar de visitar el interior del museo, donde gracias a documentos, testimonios, esculturas y

material audiovisual, se transportarán cinco siglos atrás para acompañar a Cristóbal Colón en su aventura hacia las Américas.

### Grupo p4g

La puerta de metal del restaurante Casa de los Gallo (*Figura 68*), nos sirve como ejemplo para el GSE-2D de tipo p4g. Este restaurante se encuentra en la Calle Correo, haciendo esquina con la Calle del Peso.



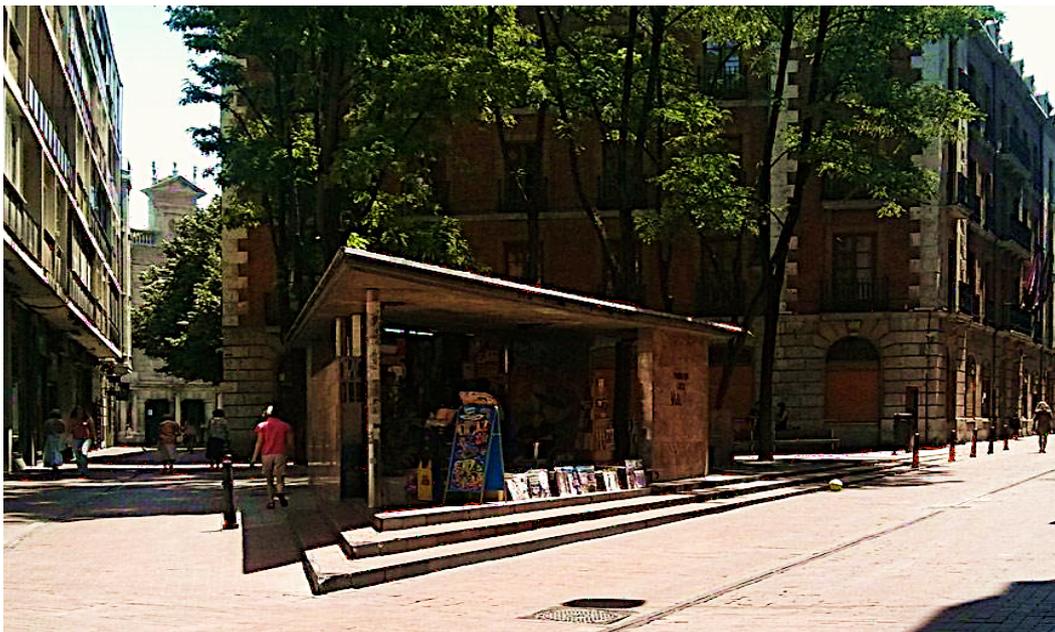
**Fig. 68.:** Imagen de la puerta exterior del restaurante Casa de los Gallo. Su enrejado metálico conforma un mosaico p4g. Se ha señalado la celdilla unidad.

## Grupo p3m1

Si bien no hemos podido encontrar un mosaico de tipo p3, sí hemos podido obtener un ejemplo de tipo p3m1. Para verlo, debemos caminar hasta la plazoleta triangular que forman la intersección de las calles Teresa Gil y San Felipe (*Figura 70*). En el adoquinado de esa plaza podremos encontrar nuestro mosaico, el único encontrado de tipo p3m1 (*Figura 69*).



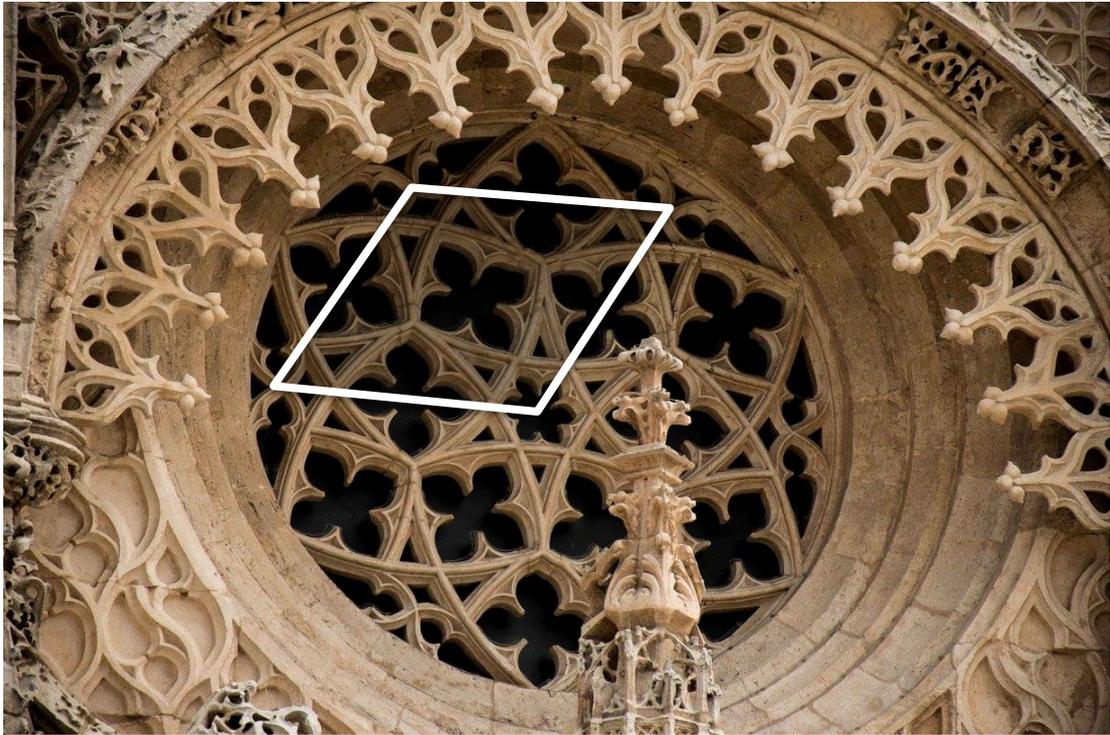
**Fig. 69.:** Imagen del adoquinado de la plazoleta de la Calle Teresa Gil con Calle San Felipe, que forma el mosaico p3m1. Se ha marcado la celda unidad.



**Fig. 70.:** Plazoleta que forman las calles Teresa Gil y San Felipe. Subiendo las escaleras encontramos el adoquinado que forma el mosaico p3m1.

## Grupo p6

Para encontrar un mosaico del tipo p6, debemos regresar a la fachada de la iglesia de San Pablo (*Figura 56*). En este caso, en cambio, nos fijaremos en el gran rosetón que aparece hacia el centro de la fachada. Es ahí, precisamente, donde nos encontramos con un precioso mosaico p6 (*Figura 71*).



**Fig. 71.:** Detalle del rosetón situado en el centro de la fachada de la iglesia de San Pablo, donde se puede apreciar el mosaico de tipo p6. Se ha remarcado la celdilla unidad.

## Grupo p6m

El ejemplo para este grupo de simetría lo encontramos en la fachada de El Corte Inglés de la Calle de la Constitución (*Figura 72*). Efectivamente, los hexágonos regulares que recubren los muros exteriores del centro comercial, conforman el motivo más sencillo para un GSE-2D de tipo p6m.



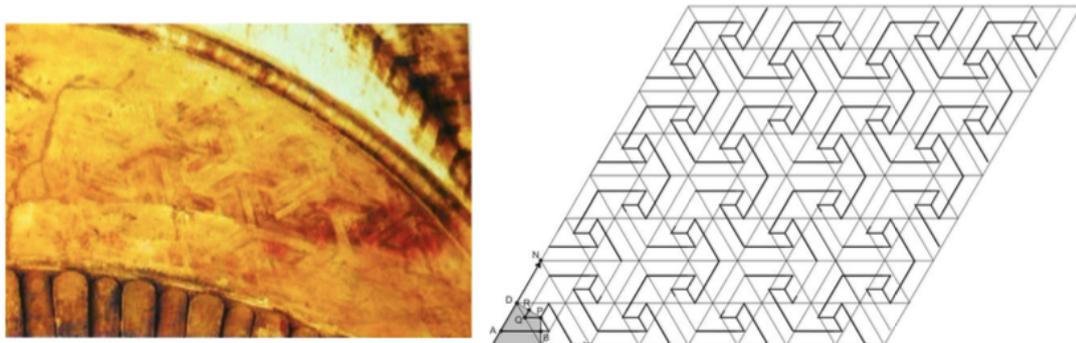
**Fig. 72.:** Imagen de la fachada de El Corte Inglés de la Calle de la Constitución. Se ha marcado la celdilla unidad.

## Grupos no localizados en Valladolid

Como el lector atento habrá podido comprobar, de los 17 grupos de simetría bidimensional que describimos en las nociones teóricas, tan sólo hemos plasmado 15 con ejemplos del mobiliario urbano de la ciudad de Valladolid. Efectivamente, y a nuestro pesar, no hemos podido localizar los dos GSE-2D restantes, a saber el tipo p3 (Figura 73) y el tipo p31m (Figura 74 y 75).



**Fig. 73.:** Paño de la zona central del muro de la Parroquieta. Ejemplo de mosaico de tipo p3 en la ciudad de Zaragoza.



**Fig. 74 y 75.:** Ejemplo de mosaico de tipo p31m en la puerta del vino, en la Alhambra de Granada.

Si bien es una pena no poder contar con todos los tipos de GSE-2D, este hecho no supone un gran perjuicio para los alumnos. El objetivo fundamental de este trabajo es el acercamiento a la comprensión de aspectos relacionados con la simetría y la organización de la materia cristalina, relevantes en mineralogía y cristalografía, así como en matemáticas o física, mediante un recorrido por la ciudad de Valladolid que permitiese al alumnado, al mismo tiempo, disfrutar y aprender sobre la historia de la ciudad y sus monumentos. Creemos que este objetivo queda ampliamente satisfecho, aún sin la presencia de ejemplos para los grupos de simetría ya nombrados.

## Discusión

El presente trabajo final de máster aporta una propuesta didáctica dirigida a la enseñanza de aquellos temas de la Biología y Geología, así como de la Geología, relacionados con la cristalografía, la mineralogía y los nuevos materiales.

Se proponen dos recorridos que muestran conceptos básicos en materia de simetrías, grupos de simetría y organización de la materia, fundamentales para comprender e interiorizar los temas anteriormente nombrados. Además, los recorridos buscan llevar a los alumnos hacia sitios de la ciudad con un destacado interés histórico, arquitectónico o artístico, de modo que puedan disfrutar de otros aspectos y asignaturas que de las relacionadas con la geología.

Si bien consideramos que lo ideal sería salir con los alumnos a la ciudad, ya sea mediante una actividad guiada como mediante un desarrollo más autónomo por parte de los alumnos, se proponen actividades suplementarias que no requieran salir del aula, mediante el uso de las nuevas tecnologías y fomentando así las competencias en materia digital del alumnado. Así mismo se proponen actividades previas a la realización de los paseos que permitirán al alumno adentrarse en la materia, ganar interés por el tema y aprovechar al máximo la actividad principal de este trabajo.

Por último, se plantea una metodología de evaluación acorde con la actividad y el trabajo realizado por los alumnos.

## Bibliografía

Demirdjian, H. Culture Sciences Chimie. Ministère de l'Éducation Nationale. (2007). "La radiographie (I) – Histoire de la découverte des rayons X et de leur application en médecine".

Bonnassies, A., da Silva, M., de la Rochefoucauld, U. "Les rayons X. Comment les rayons X ont-ils révolutionné le diagnostic médical".

Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN). Vidéo – Documental. "Histoires de radioactivité. Les rayons X: Et l'homme devient transparent".

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO). International Union of Crystallography (IUCr). (2014). "¡La cristalografía sí importa! Año Internacional de la Cristalografía 2014".

Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León (BOCyL). (2015). "ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León".

Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León (BOCyL). (2015). "ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y desarrollo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León".

Martín Bravo, C. Navarro Guzmán, J.I. Ed. Pirámide. "Psicología para el profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato".

Martinez – Ripoll, M. Departamento de Cristalografía y Biología Estructural. Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC). (2017). "Crystallography – Cristalografía".

Martinez-Ripoll, M. Museo Virtual de la Ciencia del CSIC. Ministerio de Economía y Competitividad (2014). "Iluminando los cristales".

Rousseau, J.J., Gibaud, A. Ed. Dunod, Paris. (2007). "Cristallographie géométrique et radiocristallographie. Cours et exercices corrigés".

Hahn, T. & International Union of Crystallography. (2005). "Space group symmetry".

Armstrong, M.A. Springer – Verlag, Nueva York. (1988). "Groups and symmetry".

Corminboeuf, C. Laboratory for Computational Molecular Design (2011). "Symétrie et théorie des groupes".

Prieto, A.C., Nieto, S., del Valle, A., Romero, F., Sanz, C., de Pablo, R., Górriz, C. (2014). "Estudio de las sintaxis compositivas simétricas en cerámicas con decoración "a peine" vacceas procedentes del yacimiento arqueológico de Pintia (Padilla de Duero/Peñaflor, Valladolid)".

Glisanz Mayor, M.A., Martínez Serrano, M.F. E.U. Arquitectura Técnica. Universidad Politécnica de Madrid. (2007). "Grupos de simetría en el esgrafiado segoviano".

Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Thales. "Capítulo 4: Mosaicos".

Romo García, A., Prieto, A.C. Trabajo Final de Máster. Universidad de Valladolid. (2015). "Paseo por los grupos de simetría mono y bidimensionales en el urbanismo decorativo de Valladolid".

Rull, F. Universidad de Valladolid. Instituto de Ciencias de la Educación, Valladolid. (1987). "Estudio de las propiedades de simetría de los bordados y encajes en la región de Castilla y León".

Delgado, J., Medina, J. Documentos del XII simposio sobre enseñanza de la geología, 91-96. Universidad de Alicante-AEPET. "Propiedades de simetría de figuras uni y bidimensionales en los esgrafiados de los monumentos de Segovia: Aplicación didáctica".

Fenoll Hach-Alí, P. Universidad de Granada, 70 pp. "Simetría de la alhambra. Ciencia, belleza e intuición".