



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y
Empresariales

Grado en FINANZAS, BANCA Y SEGUROS.

**ANÁLISIS Y VALORACIÓN DE LOS PLANES
DE PENSIONES DE APORTACIÓN DEFINIDA**

Presentado por:

Beatriz Conde Rodríguez

Tutelado por:

Francisco José Peláez Feroso

Valladolid, 07 de Diciembre de 2016

RESUMEN

En este trabajo se analizan los planes y fondos de pensiones como instrumento financiero de ahorro e inversión a largo plazo. En particular, se desarrolla un plan de pensiones del sistema de empleo de aportación definida y se fija la prestación objetivo que van a percibir los trabajadores a partir de su jubilación. Para ello, se analiza cuáles fueron las causas de su aparición en el mercado financiero español, sus características, modelos y métodos de valoración. Con la intención de hacer un análisis de sensibilidad del modelo, y partiendo de un escenario base, se plantean distintos escenarios posibles en los que se van a realizar pequeñas modificaciones en uno o varios parámetros del modelo. El objetivo de este trabajo es analizar cómo varían las aportaciones que el empresario tiene que realizar al plan de pensiones cuando se producen pequeñas desviaciones en los parámetros más relevantes del modelo.

Palabras clave: Planes de pensiones, sistema de empleo, prestación objetivo, aportación definida.

ABSTRACT

In this work, we analyse the pension plans and funds acting as a financial instrument for the long-term saving and investment. In particular, a defined contribution occupational pension plan is developed, and, a target benefit, which the employees are going to received after their retirement, is fixed. In order to do this, we analyse the reasons why they appeared in the Spanish financial system, their characteristics, models and valuation methods. With the aim of performing a sensitivity analysis of the model, we proposed several possible scenarios are proposed. These scenarios are built from one base scenario in which we introduce small modifications in one or several model's parameters. The purpose of this work is to analyse how the contributions to the pension plan, which the employer has to make, vary when small deviations of the most relevant model's parameter occur.

Key words: Pension plans, employment system, target benefit, defined contribution

Clasificación JEL: G22, G23, J26.

ÍNDICE

1. Introducción	5
2. Los planes y fondos de pensiones	7
2.1. Los planes de pensiones	9
2.2. Los fondos de pensiones	13
2.3. Órganos de gestión de los Planes y Fondos de Pensiones	14
3. Modelo de valoración de planes de pensiones de empleo de aportación definida	15
3.1. Variables y parámetros.....	16
3.2. Planes de aportación definida pura	21
3.3. Planes de aportación definida con prestación objetivo	25
4. Aplicación práctica	28
4.1. Colectivo de partícipes a favor de quienes se constituye el plan	28
4.2. Escenario base	29
4.3. Fijación de la prestación de jubilación	29
4.4. Determinación de las aportaciones al plan	30
5. Análisis de sensibilidad	31
5.1. Escenario 1	31
5.2. Escenario 2	33
5.3. Escenario 3	34
5.4. Escenario 4	35
6. Conclusiones	38
7. Bibliografía	39
8. Anexo 1	40
9. Anexo 2	43

ÍNDICE DE TABLAS, CUADROS Y GRÁFICOS

1. Cuadro 2.1: Contingencias susceptibles de cobertura	8
2. Cuadro 2.2: Modelos de Planes de Pensiones	10
3. Cuadro 2.3: Clasificación de los modelos de Planes de Pensiones	11
1. Tabla 4.1: Cálculo de la prestación de jubilación	30
2. Tabla 4.2: Cálculo de las aportaciones	30
3. Tabla 5.1: Determinación cuota de aportación según Escenario 1	32
4. Tabla 5.2: Determinación cuota de aportación según Escenario 2	33
5. Tabla 5.3: Determinación cuota de aportación según Escenario 3	34
6. Tabla 5.4: Determinación cuota de aportación según Escenario 4	35
7. Tabla 5.5: Comparación de las aportaciones según los escenarios	37
8. Tabla Anexo 1.1: Plan aportación definida con prestación objetivo (i=4%)	40
9. Tabla Anexo 1.2: Plan aportación definida con prestación objetivo (i=3%)	41
10. Tabla Anexo 1.3: Plan aportación definida con prestación objetivo (i=5%)	42
11. Tabla Anexo 2.1: Símbolos de conmutación GR-95 (i=4%)	43
12. Tabla Anexo 2.2: Símbolos de conmutación GR-95 (i=4%)	44
13. Tabla Anexo 2.3: Símbolos de conmutación GR-95 (i=3%)	45
14. Tabla Anexo 2.4: Símbolos de conmutación GR-95 (i=3%)	46
15. Tabla Anexo 2.5: Símbolos de conmutación GR-95 (i=5%).....	47
16. Tabla Anexo 2.6: Símbolos de conmutación GR-95 (i=5%)	48
1. Gráfico 5.1: Determinación cuota de aportación según Escenario 1	32
2. Gráfico 5.2: Determinación cuota de aportación según Escenario 2	33
3. Gráfico 5.3: Determinación cuota de aportación según Escenario 3	35
4. Gráfico 5.4: Determinación cuota de aportación según Escenario 4	36
5. Gráfico 5.5: Comparación de las aportaciones según los escenarios	37

1. INTRODUCCIÓN

En general, el concepto de previsión conlleva anticipar hechos o posibles acontecimientos futuros, de carácter ciertos o inciertos, con el fin de evitar, reducir o compensar sus efectos. En particular, la previsión social trata de prever y tomar medidas con el fin de atender las necesidades que ayuden a mejorar la condición social, económica y humana de los trabajadores. Como argumenta De la Peña (2000) *“Estas medidas con que poder atender a posibles necesidades futuras, generalmente de carácter económico, es el objeto de la llamada previsión social”*.

Las primeras cajas de pensiones de viudedad y jubilación nacieron de la iniciativa privada y varios siglos antes que los sistemas públicos. En el caso español, como apunta Maldonado (2001), *“... las primeras entidades gestoras de los seguros sociales eran personas de derecho privado...”*. Naturalmente, con la incorporación del Estado y la extensión del sistema público a la mayoría de la población, se produjo un desplazamiento de los sistemas privados de pensiones.

El origen de los sistemas de previsión social puede remontarse a la *Lex Falcida*, de la época romana en tiempos de Ulpiano que, como recoge De la Peña (2000), *“... puede considerarse como el primer plan de previsión social público para legionarios que se retiraban del servicio activo...”*. En ella, las prestaciones se efectuaban en especie mediante la asignación de propiedades a los retirados y no se aplicaba el sistema de equilibrio financiero-actuarial entre aportaciones y prestaciones, por lo que no se puede considerar como un auténtico plan de previsión social.

En la Edad Media surgieron las *Guildas*, asociaciones de defensa mutua contra la opresión de los señores feudales. Estas asociaciones surgen en Flandes hacia el siglo VIII y en Inglaterra a comienzos del siglo IX. Mientras, en España, surgieron la Cofradía y las Hermandades de Socorro, como cita Maldonado (2001), *“... con un idéntico matiz religioso que las Cofradías pero con una concepción más avanzada y perfecta de la previsión...”*.

Como se recoge en Fundación Inverco (2007), en Francia, a mediados del S. XVII, se dio otro paso más hacia el desarrollo de los sistemas de pensiones. Este paso se produjo por una propuesta que Lorenzo Tonti hizo al

Cardenal Mazarino consistente en la creación de una caja, llamada *tontina*, en la que los miembros adheridos ingresarían dinero a cambio de una renta vitalicia que iría aumentando cada año para los fallecidos. En 1693, se elaboró la primera tabla de mortalidad por parte del astrónomo Halley, consolidándose así un elemento esencial en la cuantificación de los riesgos biométricos y, en 1762, se introdujo el sistema de primas niveladas. Gollier (2000) señala que en 1858 la empresa siderúrgica alemana Krupp creó un fondo de pensiones, siguiéndola empresas como Siemens y BASF. En Bélgica tuvieron un gran impulso a partir de los años cuarenta.

Los primeros planes de pensiones privados modernos se establecieron en Gran Bretaña a principios del S. XX, pero fue a partir de 1959 cuando tuvieron un gran apoyo gubernamental al introducirse la concepción *contracting out*, significando un fuerte impulso para la previsión social privada. Por otra parte el sistema holandés de pensiones privadas es, después del de EE.UU y Gran Bretaña, el más extendido y desarrollado, logrando un gran equilibrio entre la financiación de jubilación mediante reparto y la de capitalización.

Sin embargo, los planes y fondos de pensiones como los conocemos hoy en día, nacieron en EE.UU en el año 1857 cuando se estableció un fondo de pensiones para el cuerpo de la policía de la ciudad de Nueva York y en 1875 la *American Express Co.* realizaba el primer plan de pensiones privado financiado sólo por ella, como se recoge en Fundación Inverco (2007).

En España, el primer fondo de pensiones se creó en Barcelona en 1904 por la Fundación de la Caja de Pensiones para la Vejez que tenía como objetivo constituir planes de pensiones para los trabajadores. Pero no es hasta 1987 cuando los planes y fondos de pensiones aparecen en el mercado financiero español con la promulgación de la Ley 8/1987, del 8 de junio, y el posterior Reglamento que la desarrolla, según el Real Decreto 1307/1988, de 30 de septiembre.

La decisión de legislar sobre este asunto por parte de la Administración guarda relación con la necesidad de regular sistemas privados de previsión complementarios a los básicos y, de este modo, crear un marco legal para la fiscalidad de las dotaciones de las empresas a favor de los empleados y la de los propios ciudadanos que lo demandaban. Con este fin se creó un producto

financiero que iba a reforzar la oferta de recursos en los mercados de capitales a medio y largo plazo. Como se recoge en Caser Seguros (2010) *“las empresas públicas que mantenían sistemas de previsión complementarios a los básicos públicos para sus trabajadores, pudieron transformarlos en planes y fondos de pensiones, eliminando la prohibición de su financiación.”* Esta transformación fue voluntaria al principio, pero la legislación la impuso como obligatoria a través del Real Decreto 16/2005, de 30 de diciembre.

Las normas fundamentales que regulan los Planes y Fondos de Pensiones en la actualidad están recogidas en el Texto Refundido de la Ley de Regulación de Planes y Fondos de Pensiones, aprobado por el Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre, que integra la ley originaria de 8 de junio de 1987 y sus posteriores modificaciones; y por el Reglamento de Planes y Fondos de Pensiones, aprobado por el Real Decreto 304/2004, de 20 de febrero, y modificado por el Real Decreto 681/2014, de 1 de agosto.

En este contexto, este trabajo fin de grado tiene como fin la descripción y el análisis de un plan de pensiones de empleo de aportación definida con prestación objetivo. Para ello se estructura de siguiente manera: realizada una breve introducción en la sección uno, en la sección dos se exponen las causas de aparición, modalidades y prestaciones que caracterizan a los planes y fondos de pensiones; en la sección tres se describen los modelos financiero-actuariales que se utilizan más habitualmente en la valoración de los planes de pensiones de aportación definida, sus variables y parámetros. En la sección cuatro se realiza una aplicación práctica de este tipo de plan de pensiones; en la sección cinco se realiza un análisis de sensibilidad de alguno de los parámetros más significativos del modelo utilizado considerando diferentes escenarios de posible realización. Finalmente, en la sección 6 se exponen las conclusiones deducidas de la realización de dicho trabajo, para terminar especificando las referencias bibliográficas utilizadas en su elaboración.

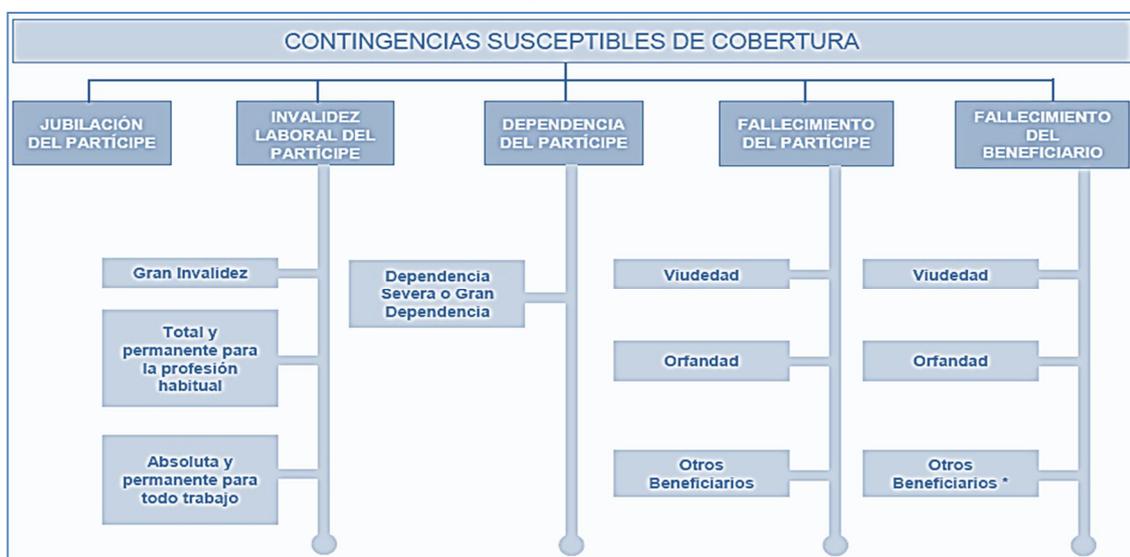
2. LOS PLANES Y FONDOS DE PENSIONES

Los planes de pensiones son instituciones privadas de previsión social, que se constituyen de modo voluntario, libre y de carácter complementario o no, pero en ningún caso sustitutivo, al sistema público de la Seguridad Social.

Son un instrumento de ahorro en el que los partícipes realizan aportaciones al plan de pensiones con el fin de obtener prestaciones económicas derivadas del acaecimiento de distintas contingencias como la jubilación, supervivencia, incapacidad permanente, dependencia o fallecimiento.

El artículo 1.1 del Texto Refundido de la Ley de Regulación de Planes y Fondos de Pensiones establece que *“los planes de pensiones definen el derecho de las personas a cuyo favor se constituyen a percibir rentas o capitales por jubilación, supervivencia, viudedad, orfandad o invalidez, las obligaciones de contribución a los mismos y, en la medida permitida por la presente Ley, las reglas de constitución y funcionamiento del patrimonio que al cumplimiento de los derechos que reconoce ha de afectarse”*.

Cuadro 2.1: Contingencias susceptibles de cobertura



Fuente: Caser Seguros (2010).

Los planes de pensiones utilizan el sistema de capitalización para constituir los fondos necesarios para hacer frente a las prestaciones económicas que cubran las diferentes contingencias establecidas por el plan en el momento en que se produzcan. Como indican Peláez y García (2004) *“los planes de pensiones han de instrumentarse mediante sistemas financieros y actuariales de capitalización, que permitan establecer la equivalencia financiera entre las aportaciones y las prestaciones futuras de los beneficiarios...”*.

2.1. LOS PLANES DE PENSIONES

Los planes de pensiones son un producto financiero de previsión y ahorro a largo plazo que han alcanzado una gran importancia en España en la actualidad. El desarrollo que han logrado se debe, por un lado, al beneficio fiscal que de ellos se deriva y, por otro, a la necesidad que tienen las personas de asegurarse un determinado nivel de renta a la jubilación, cubriéndose ante una posible insuficiencia del sistema de la Seguridad Social.

La principal causa de aparición de estas instituciones privadas se debe a la inestabilidad financiera del sistema público de la Seguridad Social, que se basa en un sistema de reparto caracterizado por la solidaridad. Esta inestabilidad está originada, entre otras causas, por el progresivo envejecimiento de la población; al aumento del número de desempleados que no aportan ingresos al sistema y además reciben prestaciones; y a la disminución de la natalidad. Esto se traduce en un aumento de los beneficiarios y una reducción de los cotizantes, lo que hace que la sociedad desconfíe de la estabilidad financiera del sistema de la Seguridad Social y busque en el mercado financiero otro instrumento de ahorro complementario a largo plazo.

2.1.1. Características

Los planes de pensiones deberán cumplir distintos principios, recogidos en el Texto Refundido de la Ley de Regulación de Planes y Fondos de Pensiones y entre los que sobresalen:

- No pueden ser discriminatorios, garantizando el acceso al plan de cualquier persona que reúna las condiciones exigidas en el contrato.
- Se instrumentarán mediante sistemas financieros y actuariales de capitalización. Por lo tanto, las prestaciones se ajustarán estrictamente al cálculo derivado de tales sistemas.
- Las aportaciones del promotor de los planes de pensiones tendrán el carácter de irrevocables.
- Las aportaciones de los partícipes determinarán sus derechos económicos.
- Los planes de pensiones obligatoriamente deberán estar integrados en el correspondiente fondo de pensiones.

2.1.2. Tipos y modalidades

Los planes de pensiones se pueden clasificar considerando distintos criterios, esto es:

a) En relación con las personas que integran el plan

- *Sistema de empleo.* Se crea por el promotor, que puede ser cualquier tipo de empresa, a favor de los trabajadores. Dentro de un plan de pensiones de este tipo se pueden establecer distintos subplanes pudiendo ser, a su vez:
 - Individuales. El promotor es cualquier empresa, sociedad, corporación o entidad y los partícipes sus empleados.
 - De promoción conjunta. Los promovidos por varias empresas, entidades o administraciones públicas.
- *Sistema asociado.* El promotor es una asociación y los partícipes sus afiliados. En este sistema el promotor no realiza aportaciones, por lo tanto, no caben los subplanes.
- *Sistema individual.* El promotor es una o varias entidades financieras y los partícipes son todas las personas físicas que lo deseen, excepto trabajadores y familiares de los mismos hasta el tercer grado inclusive.

Cuadro 2.2: Modalidades de planes de pensiones

Planes de Pensiones			Clase de Fondo
Modalidad	Promotor	Partícipes	
Sistema de Empleo	Empresa, sociedad, corporación o entidad	Empleados del promotor	Fondos de Pensiones de Empleo
Sistema Asociado	Asociación o sindicato	Asociados, miembros o afiliados	Fondos de Pensiones Personales
Sistema Individual	Entidad de carácter financiero	Personas físicas	

Fuente: Caser Seguros (2010).

b) En relación a las obligaciones estipuladas en el plan

- *Planes de prestación definida.* Definen, en primer lugar, la cuantía de las prestaciones que va a cubrir el plan y, a partir de ahí, se calcula actuarialmente la cuantía de las aportaciones que las financian. Estas prestaciones se pueden establecer:
 - En términos absolutos. La prestación será establecida como una cuantía constante.
 - En términos relativos. En función de alguna magnitud de referencia como salarios, antigüedad en la empresa o cualquier otra variable.
- *Planes de aportación definida.* En este caso lo que se fija es la cuantía de las contribuciones que van a realizar los promotores del plan y, en su caso, los partícipes. La cuantía de la prestación se determinará en el momento en que se produzca la contingencia mediante el sistema de capitalización individual. Estas aportaciones se pueden fijar:
 - En términos absolutos. La aportación a realizar al plan se establecerá como una cuantía fija.
 - En términos relativos. La aportación se fijará en función de alguna magnitud de referencia como salarios, antigüedad en la empresa, etc.
- *Planes mixtos.* En esta modalidad de planes de pensiones se define tanto las aportaciones como las prestaciones económicas que se van a percibir cuando ocurran las contingencias previstas por el plan. Estas cuantías se pueden establecer simultáneamente o separadamente según el tipo de contingencias que cubran.

Cuadro 2.3: Clasificación de los planes de pensiones

Modalidad de Planes de Pensiones	
Según las obligaciones estipuladas	Según los sujetos constituyentes
Aportación Definida, Prestación Definida y Planes Mixtos	Sistema de Empleo y Asociado
Aportación Definida	Sistema Individual

Fuente: Inverco (1994).

2.1.3. Prestaciones del plan

Las prestaciones económicas derivadas del acaecimiento de las contingencias susceptibles de cobertura en un plan de pensiones pueden percibirse en forma de capital (un único pago en el momento que se produzca la contingencia); en forma de renta, constante o variable, cierta o aleatoria, y que se percibirá en el momento de la jubilación; y en forma de capital-renta. Según el tipo de contingencias que cubren, las prestaciones pueden ser:

Prestación de jubilación. Se percibirá en el momento en que el participante acceda a la jubilación en el régimen de la Seguridad Social, pudiendo ser la edad normal de jubilación, anticipada o posterior a la misma.

Prestación de invalidez permanente. Se genera cuando el participante no puede realizar todas o las tareas más importantes de su profesión habitual, incapacidad de desempeñar cualquier oficio y por la incapacidad de realizar las tareas cotidianas necesitando la ayuda de terceras personas.

Prestación por fallecimiento. Se genera con la muerte del participante o del beneficiario generando prestaciones por viudedad, orfandad y a favor de otros familiares.

Prestación por rotación. Se produce cuando el participante del plan deja de trabajar en la empresa que lo ha promovido. La cuantía que se ha generado hasta el momento del cese en la actividad en la empresa se devengará en el momento de la jubilación del participante.

Prestación por dependencia. Cubre prestaciones por dependencia severa y por gran dependencia, estando reguladas en la Ley 39/2006, de 14 de diciembre, de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las Personas en situación de Dependencia.

2.1.4. Especificaciones de los Planes de Pensiones

Como recoge el artículo 18 del Reglamento de Planes y Fondos de Pensiones, según el Real Decreto 304/2004, de 20 de febrero, los planes de pensiones de aportación definida han de establecer obligatoriamente en su proyecto de constitución los siguientes aspectos:

- Determinación del ámbito personal y modalidad.

- Normas para la constitución y el funcionamiento de la comisión de control del plan.
- Sistema de financiación, con información de los aspectos financieros y actuariales del sistema de capitalización empleado.
- Adscripción al fondo de pensiones en el cual se integra el plan.
- Definición de las prestaciones y normas para determinar su cuantía, con indicación de si son o no revalorizables y, en su caso, la forma de revalorización.
- Grado de aseguramiento o de garantía de las prestaciones si se prevén prestaciones total o parcialmente aseguradas o garantizadas.
- Derechos y obligaciones de los partícipes y beneficiarios, contingencias cubiertas, edad y circunstancias que generan el derecho a las prestaciones, forma y condiciones de éstas.
- Causas y circunstancias que faculten a los partícipes a modificar o suspender los derechos y obligaciones en cada caso.
- Normas relativas a las altas y bajas de los partícipes y sobre la movilidad de los derechos consolidados.
- Requisitos para la modificación del plan, causas de terminación del plan y normas para su liquidación.

Del mismo modo, el artículo 16 apartado a) y el artículo 18 apartado e) del mismo Reglamento de Planes y Fondos de Pensiones, considera que si el plan garantiza a los beneficiarios prestaciones definidas para todas o algunas de las contingencias que cubra o prestaciones causadas, deberá incorporar, como anexo a las especificaciones del plan, una base técnica elaborada por un actuario con el contenido y requisitos que establezca el Ministerio de Economía y Competitividad.

2.2. LOS FONDOS DE PENSIONES

Los fondos de pensiones son patrimonios sin personalidad jurídica, creados para dar cumplimiento a los planes de pensiones. Canalizan tanto las aportaciones realizadas por los promotores y/o partícipes como los rendimientos obtenidos por la inversión de las aportaciones realizadas al plan.

2.2.1. Características

- Son patrimonios creados con el objetivo único de dar cumplimiento a los planes de pensiones y canalizar el ahorro.
- Los fondos de pensiones se constituyen en escritura pública, una vez hayan pedido la autorización previa en la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones (DGSFP).
- Deben inscribirse en el Registro Mercantil y en el Registro Especial Administrativo y han de ser gestionados por entidades financieras o aseguradoras.

2.2.2. Tipos y modalidades

Fondos de pensiones personales. Sólo podrán actuar en planes de pensiones del sistema asociado y/o individual.

Fondos de pensiones de empleo. Actuarán en planes de pensiones del sistema de Empleo.

Fondos de pensiones abiertos. Canalizan y desarrollan inversiones de otros fondos de pensiones y se suelen especializar en la gestión de activos financieros como opciones, futuros o inversiones en mercados extranjeros.

Fondos de pensiones cerrados. Instrumentan únicamente la inversión de los recursos del plan o planes de pensiones a ellos adscritos.

2.3. ÓRGANOS DE GESTIÓN DE LOS PLANES Y FONDOS DE PENSIONES

2.3.1. Comisión de Control del Plan de pensiones

La Comisión de Control del Plan de Pensiones es el órgano que supervisa el funcionamiento y su ejecución, así como el cumplimiento de sus cláusulas en todo lo referente a los derechos de los partícipes y beneficiarios.

2.3.2. Comisión de Control del Fondo de pensiones

La Comisión de Control del Fondo de Pensiones es un órgano administrativo que se encarga de controlar sus normas de funcionamiento y de

aprobar las solicitudes para la integración de nuevos planes de pensiones. Si el fondo de pensiones gestiona a la vez varios planes, la Comisión de Control ha de estar formada por representantes de todas las Comisiones de Control de los planes que integra. Si sólo integra un único plan, la Comisión de Control del Plan ejerce las funciones de la Comisión de Control del Fondo.

2.3.3. Entidad Gestora

Las Entidades Gestoras se crean con el fin de gestionar los fondos de pensiones donde se integran los correspondientes planes. Son sociedades anónimas y deberán dedicarse en exclusiva a la administración de los fondos de pensiones. Les compete llevar la contabilidad del fondo de pensiones, los derechos consolidados de cada partícipe y seleccionar los activos financieros donde se van a invertir los recursos del plan de pensiones.

2.3.4. Entidad Depositaria

Las Entidades Depositarias han de estar domiciliadas en España y las corresponde la custodia y depósito de los valores mobiliarios y otros activos financieros en los que se invierten los recursos disponibles del fondo de pensiones. También está a su cargo la gestión de los cobros de las aportaciones, los pagos de las prestaciones, la compra-venta de valores y los rendimientos obtenidos de las inversiones del fondo de pensiones.

3. MODELO DE VALORACIÓN DE PLANES DE PENSIONES DE EMPLEO DE APORTACIÓN DEFINIDA

Los planes de pensiones de aportación definida, como reflejan López *et al* (2013), “...se caracterizan porque primero se fijan las aportaciones a realizar, mientras que la prestación sólo se calcula en el caso de que ocurra alguna de las contingencias cubiertas por el plan.” Se trata de una operación financiera cierta que tiene como fin tener constituido un capital en el momento del acaecimiento de las contingencias que cubra. Estos planes pueden ser de la modalidad del sistema de empleo, asociado o individual.

Si la forma de percibir la prestación es en forma de renta, los métodos que se utilizan para calcular los términos de la prestación son los de valoración actuarial. En el caso de que la prestación sea en forma de capital único, la aportación será igual al capital constituido.

Como consideran Peláez y García (2004), *“la característica principal de este tipo de planes es la disminución del componente de previsión que caracteriza a los planes de pensiones de prestación definida, que conllevan un carácter más especulativo a largo plazo”*. En esta clase de planes hay que tener en cuenta las aportaciones que realizan el partícipe y/o los promotores, la rentabilidad financiera y el nivel salarial de los trabajadores. Como señala De la Peña (2000), *“este espacio financiero no tiene en cuenta (...) la obligatoriedad de seguir o mantener unas provisiones matemáticas para financiar las pensiones de los partícipes que continúen en el plan de pensiones”*.

3.1. VARIABLES Y PARÁMETROS

A continuación se describen las variables y parámetros que intervienen en la valoración de los planes de pensiones de aportación definida.

3.1.1. Cuota de aportación

La cuota de aportación para cada partícipe de edad x , se denota por Q_x , para $e \leq x \leq r-1$, siendo x la edad alcanzada de cada partícipe en cada momento y r la edad de su jubilación. Representa el importe periódico que el promotor y/o los partícipes destinan al fondo de capitalización al comienzo o al final de cada periodo mientras el plan sea operativo. Estas aportaciones pueden ser constantes o variables, en función de una magnitud de referencia, y anuales o fraccionadas.

3.1.2. Fondo acumulado

El fondo acumulado o fondo de capitalización, es el montante constituido a favor del partícipe al principio de cada periodo de valoración del plan de pensiones ($t, t+1$). Para su determinación se tiene en cuenta las aportaciones realizadas periódicamente al plan y los intereses que producen sus inversiones.

Al inicio del periodo de valoración, el fondo acumulado a una edad alcanzada x del partícipe, se denota por F_t .

3.1.3. Prestación objetivo de jubilación

En el caso de que al alcanzar la edad de jubilación el partícipe del plan de pensiones no se desee percibir cualquier importe que se obtenga como resultado del proceso de capitalización de las aportaciones, siguiendo a De la Peña (2000), se puede fijar como objetivo una cantidad periódica que se devengue a su favor a partir de alcanzar la edad de jubilación. Para poder obtener esta prestación se deben de cumplir unos requisitos mínimos como alcanzar la edad de jubilación, ya sea la edad normal, anticipada o retrasada, y haberse adherido al plan de pensiones antes de alcanzar la edad máxima establecida para poder hacerlo. La prestación, por lo tanto, va a consistir en una renta y/o capital que se comenzará a percibir en el momento de la jubilación. Una forma de establecer esta prestación, por ejemplo, es reconociendo una parte por cada año de servicio en la empresa.

3.1.4. Tipo de interés técnico

Como señalan López *et al.* (2013) y De la Peña (2000), el tipo de interés técnico de valoración de un plan de pensiones, i_t , es el tipo de interés anual que se espera obtener de las inversiones de los recursos afectos al fondo del plan para el periodo t -ésimo.

3.1.5. Tanto de crecimiento de los salarios

El tanto anual de crecimiento salarial, s , se define teniendo en cuenta la evolución generalmente creciente de los salarios. Esta tasa puede fijarse considerando la tasa de productividad o la tasa de inflación existente y también los méritos, antigüedad y cualificación del trabajador.

3.1.6. Tanto de revalorización de las prestaciones

Lo habitual es establecer una tasa de revalorización anual de las prestaciones en función de la inflación prevista, β .

3.1.7. Rentas financieras y actuariales

3.1.7.1. Rentas financieras

López *et al.* (2013) definen la renta financiera “...como un conjunto de capitales financieros asociados a un intervalo de tiempo.” La renta financiera es una renta “cierta”, es decir, permite calcular el valor actual o final de un conjunto de capitales sin que intervenga el elemento biométrico que es lo que caracteriza a las operaciones actuariales. Siguiendo a Betzuen y Blanco (1989), las rentas financieras pueden ser:

Rentas constantes y perpetuas. Están constituidas por una serie indefinida de términos de la misma cuantía. El valor actual de una renta perpetua de términos pospagables viene dado por la siguiente expresión:

$$a_{\infty|i} = v + v^2 + v^3 + v^4 + \dots = \frac{1}{i}.$$

Cuando los términos son prepagables y $v^n = (1 + i)^{-n}$, se tiene:

$$\ddot{a}_{\infty|i} = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots = \frac{1+i}{i},$$

Rentas temporales. En este caso se puede calcular tanto el valor actual como valor final de la renta. Estas rentas se caracterizan porque el número de términos de que consta, n , es limitado.

Si la renta es pospagable, el valor actual viene dada por esta expresión:

$$a_{\overline{n}|i} = v + v^2 + \dots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}.$$

Si los términos son prepagables:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + v + \dots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{i} (1 + i) = a_{\overline{n}|i} (1 + i).$$

El valor final de una renta pospagable viene dado por la fórmula:

$$s_{\overline{n}|i} = u^{n-1} + u^{n-2} + \dots + 1 = \frac{u^n - 1}{i}.$$

Si los términos de la renta son prepagables y $u^n = (1 + i)^n$, se tiene:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = u^n + u^{n-1} + \dots + u = \frac{u^n - 1}{i} (1 + i) = s_{\overline{n}|i} (1 + i).$$

3.1.7.2. Rentas actuariales

Las rentas actuariales están asociadas a un suceso aleatorio que es la supervivencia de un individuo. Según la definición de López *et al.* (2013), la renta actuarial es “...una sucesión de pagos cuyo importe se satisface periódicamente, solamente si la persona sobre la que se calcula dicha renta permanece viva en cada uno de los períodos”. Siguiendo a Betzuen y Blanco (1989), De la Peña (2000) y Peláez y García (2004), las rentas actuariales pueden ser:

Rentas constantes, vitalicias y anuales. Estas rentas proporcionan el valor actual actuarial a la edad x de un individuo, de una unidad monetaria pagadera desde dicha edad hasta su fallecimiento. Su expresión es:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= 1 + v \cdot p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + \dots = \sum_{h=0}^{w-x} v^h \cdot {}_h p_x \\ &= 1 + E_x + {}_2E_x + \dots = \sum_{h=0}^{w-x} {}_h E_x = \sum_{h=0}^{w-x} \frac{D_{x+h}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x},\end{aligned}$$

donde w representa el infinito actuarial, es decir, la edad final de la tabla de mortalidad que se considere, siendo ${}_h E_x = \frac{D_{x+h}}{D_x}$.

Cuando la renta es pospagable la fórmula es:

$$a_x = v \cdot p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + \dots = \sum_{h=0}^{w-x} {}_h E_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

Rentas constantes, vitalicias y fraccionadas. En este tipo de rentas se produce una variación en el resultado como consecuencia del fraccionamiento de sus términos. Para ello se consideran las rentas anuales que se recogen en las tablas actuariales y un factor corrector. El valor actual actuarial de estas rentas, en símbolos de conmutación, viene dado por:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} = \frac{N_x^{(m)}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m}.$$

Rentas temporales. Estas rentas nos permiten evaluar, en un momento determinado, el conjunto de las aportaciones que se realizan por una persona durante un periodo temporal que transcurre desde la edad de entrada a un determinado colectivo y hasta su jubilación. Si se consideran diferentes causas

de salida susceptibles de acaecer sobre la persona que las contrata, las aportaciones se realizarán siempre y cuando sobreviva. Las aportaciones cesarán cuando se produzca el fallecimiento o cualquier otra causa de salida.

El valor actual actuarial de una renta temporal cuando las aportaciones son prepagables y se consideran de forma conjunta diferentes causas de salida en el colectivo, viene dada por la expresión:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(T)} = 1 + v \cdot p_x^{(T)} + v^2 \cdot {}_2p_x^{(T)} + \dots + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x^{(T)}.$$

Esta función, en símbolos de conmutación, se denota así:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(T)} = \sum_{h=0}^{n-1} {}_hE_x^{(T)} = \frac{N_x^{(T)} - N_{x+n}^{(T)}}{D_x^{(T)}}.$$

Si la renta fuera pospagable, resultaría:

$$a_{x:\overline{n}|}^{(T)} = v \cdot P_x^{(T)} + \dots + v^n \cdot {}_n P_x^{(T)} = \frac{N_{x+1}^{(T)} - N_{x+n+1}^{(T)}}{D_x^{(T)}}.$$

Si la renta es fraccionada, se tiene:

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = a_{x:\overline{n}|}^{(T)} - \frac{m-1}{2m} \cdot (1 - {}_n E_x^{(T)}).$$

Rentas diferidas. Este tipo de rentas se caracterizan porque el primer término se devenga con posterioridad al momento de concertar la operación, es decir, con un diferimiento de n períodos. Sus términos se devengan siempre y cuando el individuo sobreviva. Si los términos se devengan al comienzo o al final de cada período de forma anual y teniendo en cuenta también diferentes causas de salida, sus expresiones son, respectivamente:

$${}_n/\ddot{a}_x^{(T)} = \ddot{a}_{x+n} \cdot {}_n E_x^{(T)}; \quad {}_n/a_x^{(T)} = a_{x+n} \cdot {}_n E_x^{(T)}.$$

Si los términos se devengan de forma fraccionada, se tiene:

$${}_n/\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{x+n}^{(m)} \cdot {}_n E_x^{(T)} = {}_n/\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \cdot {}_n E_x^{(T)},$$

$${}_n/a_x^{(m)} = a_{x+n}^{(m)} \cdot {}_n E_x^{(T)} = {}_n/a_x - \frac{m-1}{2m} \cdot {}_n E_x^{(T)}.$$

Rentas variables. Se trata de rentas actuariales que crecen en progresión geométrica de razón q , con $q=1+s$, y que pueden ser vitalicias o temporales. En el caso de que la renta sea vitalicia y prepagable y que el primer término sea la unidad monetaria, su expresión es:

$$(V\ddot{a})_x = 1 + q \cdot v \cdot p_x + q^2 \cdot v^2 \cdot {}_2p_x + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} q^t \cdot {}_tE_x = \frac{VN_x}{VD_x}$$

Puesto que en la práctica la cuantía del primer término no va a ser la unidad monetaria sino M , el valor de esta renta es:

$$M(V\ddot{a})_x = M \frac{VN_x}{VD_x}$$

Para la renta variable, vitalicia y fraccionada, se utilizará la siguiente expresión:

$$M(V\ddot{a})_x^{(m)} = M \frac{VN_x^{(m)}}{VD_x}$$

Para una renta variable temporal unitaria, el valor actual actuarial a la edad x quedaría expresado de la siguiente forma:

$$(V\ddot{a})_x = 1 + q \cdot v \cdot p_x + \dots + q^{n-1} \cdot v^{n-1} \cdot {}_{n-1}P_x = \frac{VN_x - VN_{x+n}}{VD_x}$$

Renta salarial. Se trata de una renta actuarial que incluye la influencia de la evolución salarial. La cuantía de la aportación crece conforme lo hace el salario. Su expresión es:

$$(\ddot{S}\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(T)} = 1 \cdot \frac{S_x}{S_x} + E_x^{(T)} \frac{S_{x+1}}{S_x} + \dots + {}_{n-1}E_x^{(T)} \frac{S_{x+n-1}}{S_x} = \frac{SN_x^{(T)} - SN_{x+n}^{(T)}}{SD_x^{(T)}}$$

3.2. Planes de Aportación Definida Pura

En estas operaciones el partícipe abona la cuota de aportación y no conocerá el capital constituido hasta que no tenga lugar el hecho que cause la percepción de la prestación, en este caso, la edad normal de jubilación. El capital acumulado a la edad normal de jubilación lo puede percibir tanto en forma de renta financiera o actuarial, en forma de capital único, o en forma mixta de capital-renta. Para calcular el capital acumulado a la edad normal de jubilación, se tiene que conocer primeramente cómo se han realizado las aportaciones periódicas, ya que existen muchos submodelos de aportación definida. En este trabajo, siguiendo el desarrollo de Peláez y González (2004), se van a utilizar las siguientes:

- Con aportaciones anuales constantes.

- Con aportaciones anuales variables en progresión geométrica.
- Con aportaciones fraccionadas.

3.2.1. Cuotas de aportación anuales constantes

Se considera que el participante realiza aportaciones al plan de pensiones (Q_t) siempre de la misma cuantía desde el momento de entrada al mismo (e) y hasta que alcanza la edad normal de jubilación (r), acumulando intereses a un tanto anual constante. Por lo tanto, el capital acumulado (F_x) a la edad de jubilación será el montante final de estas aportaciones más los intereses que hayan ido devengando.

3.2.1.1. Cuotas de aportación anuales pospagables

Las aportaciones constantes, Q , realizadas por el partícipe de edad x , se devengan al final de cada año (x), por lo que el fondo o capital acumulado a la edad x vendrá determinado por la capitalización de dichas aportaciones, para todo $e \leq x \leq r$:

$$\begin{aligned} F_x &= Q_{e+1} \cdot (1+i)^{x-(e+1)} + Q_{e+2} \cdot (1+i)^{x-(e+2)} + \dots + Q_{x-1} \cdot (1+i) \\ &= Q \cdot (1+i)^{x-(e+1)} + Q \cdot (1+i)^{x-(e+2)} + \dots + Q \cdot (1+i) \\ F_x &= Q \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^{x-(e+1)} - 1}{i} = Q \cdot \ddot{s}_{x-(e+1)|i} \end{aligned}$$

En general, el valor final financiero de una renta unitaria constante, prepagable de n términos anuales, viene dado por esta expresión:

$$\ddot{s}_{n|i} = \sum_{t=1}^n (1+i)^t = \sum_{t=1}^n u^t = \frac{u^n - 1}{i} (1+i).$$

3.2.1.2. Cuotas de aportación anuales prepagables

El participante realiza las aportaciones al principio de cada año, por lo que el capital acumulado a la edad x del partícipe vendrá determinado por la equivalencia financiera a dicha edad:

$$F_x = Q \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^{x-e} - 1}{i} = Q \cdot \ddot{s}_{x-e|i}.$$

3.2.2. Cuotas de aportación anuales variables

En este caso, se considera que las aportaciones que se realizan varían anualmente. Esta variación puede seguir una ley determinada o pueden variar sin ningún patrón que la defina.

3.2.2.1. Cuotas de aportación anuales pospagables en progresión geométrica

Cada cuota de aportación es variable y creciente al mismo tanto acumulativo anual, s , que se supone lo hacen los salarios. Las aportaciones se realizan al final de cada año. A la edad x , el fondo constituido es:

$$F_x = Q_{e+1} \cdot (1+i)^{x-e-1} + Q_{e+2} \cdot (1+i)^{x-e-2} + \dots + Q_{r-1} \cdot (1+i)$$

En función de la primera cuota de aportación, con $q = 1 + s$:

$$\begin{aligned} F_x &= Q_{e+1} \cdot (1+i)^{x-e-1} + Q_{e+1} \cdot (1+s) \cdot (1+i)^{x-e-2} + \dots + \\ &+ Q_{e+1} \cdot (1+s)^{x-e-1} \cdot (1+i) = Q_{e+1} \cdot \left(\frac{u^{x-e-1} - q^{x-e-1}}{u - q} \right) \cdot u \\ &= Q_{e+1} \cdot (V\ddot{s})_{\overline{x-e-1}|i} = \ddot{s}(Q_{e+1}; q)_{\overline{x-e-1}|i}. \end{aligned}$$

3.2.2.2. Cuotas de aportación anuales prepagables en progresión geométrica

En este caso las aportaciones se realizan al principio de cada año y el fondo acumulado a la edad x , es:

$$F_x = Q_e \cdot \left(\frac{u^{r-e} - q^{r-e}}{u - q} \right) \cdot u = Q_e \cdot (V\ddot{s})_{\overline{x-e}|i} = \ddot{s}(Q_e; q)_{\overline{x-e}|i}.$$

3.2.3. Cuotas de aportación fraccionadas constantes

En este caso, las cuotas de aportación se devengan por m -ésimos de año (meses, bimestres, trimestres, etc.) y generan intereses desde cada m -ésimo de año. Como las cuotas son constantes, se cumple la relación:

$$Q = m \cdot Q^{(m)}$$

3.2.3.1. Cuotas de aportación fraccionada pospagables

Al tratarse de cuotas pospagables, el partícipe cuando alcanza la edad normal de jubilación, no abona la cuantía en el último periodo del año. De este modo, el fondo de capitalización a la edad de jubilación es:

$$F_r = Q^{(m)} \cdot m \cdot s_{\overline{r-e}|i}^{(m)} - Q^{(m)} = Q \cdot s_{\overline{r-e}|i}^{(m)} - Q^{(m)},$$

pudiéndose expresar la renta financiera fraccionada por m -ésimos de año en función de la anual del siguiente modo:

$$s_{\overline{r-e}|i}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} \cdot s_{\overline{r-e}|i}.$$

3.2.3.2. Cuotas de aportación fraccionadas prepagables

En este caso las aportaciones se realizan al comienzo de cada periodo de pago, siendo el fondo acumulado a la edad de jubilación:

$$F_r = Q^{(m)} \cdot m \cdot \ddot{s}_{\overline{r-e}|i}^{(m)} = Q \cdot \ddot{s}_{\overline{r-e}|i}^{(m)},$$

pudiéndose expresar la renta financiera fraccionada por m -ésimos de año en función de la anual de la siguiente forma:

$$\ddot{s}_{\overline{r-e}|i}^{(m)} = (1+i)^{1/m} \cdot \frac{i}{i^{(m)}} \cdot s_{\overline{r-e}|i}.$$

3.2.4. Cuotas de aportación fraccionadas variables

3.2.4.1. Cuotas de aportación fraccionadas pospagables en progresión geométrica

Las aportaciones se realizan al final de cada m -ésimo de año y varían anualmente al tanto anual acumulativo, s . Por tanto, el fondo constituido a la edad de jubilación es:

$$\begin{aligned} F_r &= m \cdot Q_e^{(m)} \cdot \left[\left(\frac{1-v}{i} \right) \cdot \frac{i}{i^{(m)}} \cdot \left(\frac{u^{r-e} - q^{r-e}}{u-q} \right) \cdot u \right] - Q_r^{(m)} \\ &= Q_e \cdot \frac{i}{i^{(m)}} \cdot (Vs)_{\overline{r-e}|i} - Q_r^{(m)} = Q_e \cdot (Vs)_{\overline{r-e}|i}^{(m)} - Q_r^{(m)}. \end{aligned}$$

3.2.4.2. Cuotas de aportación fraccionadas prepagables en progresión geométrica

Las cuotas de aportación se devengan al inicio de cada m -ésimo de año y varían anualmente de forma creciente a un tanto anual acumulativo constante, s . Por tanto, el fondo constituido a la edad de jubilación es:

$$F_r = m \cdot Q_e^{(m)} \cdot \left[\left(\frac{1-v}{i} \right) \cdot \frac{i}{i^{(m)}} \cdot u^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\frac{u^{r-e} - q^{r-e}}{u - q} \right) \cdot u \right]$$

$$= Q_e \cdot \frac{i}{i^{(m)}} \cdot u^{\frac{1}{m}} \cdot (Vs)_{\overline{r-e}|i} = Q_e \cdot (V\ddot{s})_{\overline{r-e}|i}^{(m)}$$

3.3. Planes de Aportación Definida con Prestación Objetivo

En estos tipos de planes de pensiones se estima la prestación que el partícipe desearía percibir a partir de la edad normal de jubilación y, una vez estimada esta prestación, se fijan las aportaciones que debe realizar a partir de la entrada en el plan para poder alcanzar dicho objetivo.

El partícipe puede percibir el capital acumulado a la edad normal de jubilación en forma de capital único, en forma de renta financiera, actuarial o de forma mixta de capital-renta. Como argumenta De La Peña (2000), *“la forma de definir las prestaciones es muy variada y se pueden considerar casos que van desde pensiones constantes, porcentajes sobre el último salario, valores financieros o financiero-actuariales, hasta prestaciones complementarias a la pensión de jubilación de la Seguridad Social.”*

3.3.1. Cuotas de aportación constantes

3.3.1.1. Cuotas de aportación anuales pospagables

Las aportaciones que se realizan al final de cada año, son siempre constantes. Siguiendo a De la Peña (2000), estas se deducen de la ecuación de equivalencia financiera entre aportaciones y prestaciones:

$$Q \cdot \ddot{s}_{\overline{r-e-1}|i} = \phi = \ddot{a}(B_r; q')_{\overline{n}|i},$$

con n el número de períodos de devengo de las prestaciones, que puede ser ilimitado y entonces $n=\infty$ y $q' = 1 + \beta$, siendo β el tanto anual de revalorización de las prestaciones de jubilación.

De este modo, el fondo acumulado a la edad x del partcipe sería F_x .

$$F_x = Q \cdot \ddot{s}_{\overline{x-e-1}|i} = \frac{\phi}{s_{\overline{x-e-1}|i}} \cdot \ddot{s}_{\overline{x-e-1}|i}.$$

3.3.1.2. Cuotas de aportación anuales prepagables

Cuando las aportaciones se realizan al principio de cada año, se tiene,

$$Q \cdot \ddot{s}_{\overline{r-e}|i} = \phi = \ddot{a}(B_r; q')_{\overline{n}|i},$$

$$F_x = \frac{\phi}{\ddot{s}_{\overline{r-e}|i}} \cdot \ddot{s}_{\overline{x-e}|i}.$$

3.3.1.3. Cuotas de aportación fraccionadas pospagables

El proceso es prácticamente igual salvo que, en este caso, las aportaciones se realizan en periodos más cortos de tiempo:

$$Q \cdot s_{\overline{r-e-1}|i}^{(m)} = \phi = \ddot{a}(B_r; q')_{\overline{n}|i},$$

$$F_x = \frac{\phi}{s_{\overline{r-e-1}|i}^{(m)}} \cdot s_{\overline{x-e-1}|i}^{(m)}.$$

3.3.1.4. Cuotas de aportación fraccionadas prepagables

$$Q \cdot \ddot{s}_{\overline{r-e}|i}^{(m)} = \phi = \ddot{a}(B_r; q')_{\overline{n}|i},$$

$$F_x = \frac{\phi}{\ddot{s}_{\overline{r-e}|i}^{(m)}} \cdot \ddot{s}_{\overline{x-e}|i}^{(m)}.$$

3.3.2. Cuotas de aportación variables

3.3.2.1. Cuotas de aportación anuales pospagables

En este caso, la aportación se suele definir como un porcentaje constante del salario anual del partcipe:

$$s(Q_{e+1}; q)_{\overline{r-e-1}|i} = \phi = \ddot{a}(B_r; q')_{\overline{n}|i},$$

$$F_x = \phi \cdot \frac{(1+i)^{x-e-1} - (1+s)^{x-e-1}}{(1+i)^{r-e-1} - (1+s)^{r-e-1}},$$

siendo $q = 1 + s$, con s el tanto anual de crecimiento de los salarios.

3.3.2.2. Cuotas de aportación anuales prepagables

Por medio de la ecuación de equivalencia financiera entre aportaciones y el capital total acumulado, se obtiene la cuota de aportación:

$$\ddot{s}(Q_e; q)_{\overline{r-e}|i} = \phi = \ddot{a}(B_r; q')_{\overline{n}|i},$$

$$F_x = \phi \cdot \frac{(1+i)^{x-e} - (1+s)^{x-e}}{(1+i)^{r-e} - (1+s)^{r-e}}.$$

3.3.2.3. Cuotas de aportación fraccionadas pospagables

Las cuotas de aportación se devengan al final de cada m -ésimo de año:

$$s(Q_e; q)_{\overline{r-e}|i}^{(m)} - Q_{r-1}^{(m)} = \phi = \ddot{a}(B_r; q')_{\overline{n}|i},$$

$$Q_e^{(m)} = \frac{\phi}{\frac{(1+i)^{r-e} - (1+s)^{r-e}}{i-s} \cdot \frac{i}{i^{(m)}} - (1+s)^{r-e-1}}.$$

con $Q_e = m \cdot Q_e^{(m)}$. El fondo de capitalización a la edad x será:

$$F_x = \phi \cdot \frac{\frac{(1+i)^{x-e} - (1+s)^{x-e}}{i-s} \cdot \frac{i}{i^{(m)}} - (1+s)^{x-e-1}}{\frac{(1+i)^{r-e} - (1+s)^{r-e}}{i-s} \cdot \frac{i}{i^{(m)}} - (1+s)^{r-e-1}}.$$

3.3.2.4. Cuotas de aportación fraccionadas prepagables

Las cuotas de aportación se devengan al inicio de cada m -ésimo de año:

$$\ddot{s}(Q_e; q)_{\overline{r-e}|i}^{(m)} = \phi = a(B_r; q')_{\overline{n}|i},$$

$$Q_e^{(m)} = \frac{\phi}{\frac{(1+i)^{r-e} - (1+s)^{r-e}}{i-s} \cdot (1+i)^{1/m} \cdot \frac{i}{i^{(m)}}}.$$

En este caso, el fondo de capitalización a la edad x será:

$$F_x = \phi \cdot \frac{(1+s)^{x-e} - (1+s)^{x-e}}{(1+s)^{r-e} - (1+s)^{r-e}}.$$

4. APLICACION PRÁCTICA A UN PLAN DE PENSIONES DE APORTACIÓN DEFINIDA CON PRESTACIÓN OBJETIVO

En este apartado se desarrolla un ejemplo práctico de un Plan de Pensiones de Empleo y de Aportación Definida con Prestación Objetivo. Para ello, se describe a continuación el colectivo de partícipes que integra el plan de pensiones, la edad normal establecida para la jubilación, las hipótesis de partida y la forma de determinar las variables económicas que intervienen en su valoración financiero-actuarial.

4.1. Colectivo de partícipes a favor de quienes se constituye el plan

Se ha considerado una empresa de 1250 trabajadores con edades de entrada (e) al plan de pensiones comprendidas entre los 25 y los 52 años. Estos partícipes se han separado en intervalos de 3 años, de tal manera que cada intervalo de edad este formado por 125 empleados.

4.2. Escenario base

4.2.1. Hipótesis de valoración

Para poder realizar un análisis de la viabilidad financiera del plan de pensiones que se desarrolla en este apartado, se establece, en primer lugar, hipótesis sobre los parámetros y magnitudes económicas que intervienen en la valoración financiero-actuarial del plan. En este escenario, además de otras hipótesis que se describen a continuación, se supone también que las aportaciones realizadas por el empresario y las prestaciones a percibir por los beneficiarios del plan de pensiones van a ser constantes.

Tasas demográficas

Se va a suponer que los partícipes solo pueden dejar de pertenecer al plan de pensiones debido al fallecimiento. En consecuencia, para determinar la evolución del colectivo de partícipes afectos al plan de pensiones y poder así proceder a valorar actuarialmente el mismo, se van a utilizar las Tablas de Mortalidad/Supervivencia GRMF-95, publicadas en IAE (1996).

Tipo de interés técnico de valoración

Considerando las tablas demográficas disponibles, se ha optado por utilizar en la valoración financiero-actuarial del plan de pensiones un tipo de interés técnico del 4%.

Tanto de revalorización de las prestaciones de jubilación

Como se considera que la prestación de jubilación de cada beneficiario va a permanecer constante a partir de su jubilación, en este escenario base el tanto de revalorización de estas prestaciones se considera nulo.

Tanto de crecimiento de los salarios

Como hipótesis de partida no se considera crecimiento anual de los salarios percibidos por los partícipes durante su actividad laboral.

Edad establecida para la jubilación

Se ha fijado como edad normal de jubilación los 65 años para todos los partícipes del plan de pensiones. No obstante, se ha de tener en cuenta para este aspecto lo establecido en la normativa del sistema público de la Seguridad Social en cada momento.

4.3 Fijación de la prestación de jubilación

Cuando se desea obtener un determinado importe para la prestación de jubilación, se fija la prestación de jubilación objetivo a percibir por los beneficiarios del plan a partir del cese en su actividad laboral. En este caso, esta prestación se establece como un porcentaje constante por año trabajado del salario previo a la edad de retiro o jubilación del partícipe. En el caso práctico que se plantea, la prestación de jubilación objetivo se fija en un 2% del salario previo a la edad de su jubilación por cada año trabajado por el partícipe. En este caso, el salario a la edad de jubilación se ha establecido en 40.000 euros anuales para cada partícipe.

Tabla 4.1: Cálculo de la prestación de jubilación

e	n_e	$K = \alpha \cdot (r - e)$ $B_r = k \cdot S_{r-1}$
25	125	32.000
28	125	29.600
31	125	27.200
34	125	24.800
37	125	22.400
40	125	20.000
43	125	17.600
46	125	15.200
49	125	12.800
52	125	10.400

Fuente: Elaboración propia.

4.4 Determinación de las aportaciones al plan

Fijada la prestación objetivo de jubilación a percibir por los beneficiarios del plan de pensiones se determina, a partir de la ecuación que establece el equilibrio financiero-actuarial entre aportaciones y prestaciones, la cuantía de las aportaciones a realizar al plan durante la actividad laboral de cada partícipe.

Tabla 4.2: Cálculo de las aportaciones

e	$\Phi = B_r \cdot \ddot{a}_r^{(m)}$	$\ddot{S}_{r-e i}$	Q
25	420.161,16	97,07	4.328,34
28	388.649,07	83,46	4.656,61
31	357.136,98	71,36	5.004,55
34	325.624,90	60,61	5.372,81
37	294.112,81	51,04	5.761,98
40	262.600,72	42,54	6.172,62
43	231.088,64	34,99	6.605,26
46	199.576,55	28,27	7.060,36
49	168.064,46	22,29	7.538,36
52	136.552,38	16,98	8.039,62

Fuente: Elaboración propia.

Para ello y, en primer lugar, se calculan las aportaciones de cuantía constante que se devengarán a favor de cada trabajador hasta su edad de jubilación con el fin de obtener una prestación, también constante, hasta su fallecimiento. Como se puede observar en la tabla 4.2, el capital constituido a la

edad de jubilación¹ o valor actualizado a dicha edad de las prestaciones, disminuye a medida que aumenta la edad del trabajador que entra a formar parte del plan. Sin embargo, las aportaciones anuales a realizar por el empresario por el trabajador, para alcanzar la prestación objetivo, son mayores.

Por ejemplo, la aportación que realizará el empresario por un empleado que contrata con 25 años es de 4328,34€ anuales con el fin de tener a la edad de jubilación un capital constituido de 420161,16€ y realizar una aportación anual de 32000€. Mientras que para un trabajador de 52 años tendrá que aportar 8039,62€ anuales y recibirá una prestación de 10400€ anuales. El trabajador va a entrar a formar parte del plan de pensiones en el momento en que es contratado por la empresa, y va a permanecer en él hasta su fallecimiento. Por lo tanto, debido a que la prestación va a ser función de los años trabajados en dicha empresa, la prestación objetivo para cada grupo de trabajadores decrece cuanto mayor es la edad del trabajador (ver tabla 4.1).

5. ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Los resultados obtenidos anteriormente pueden variar de forma muy significativa al cambiar uno o varios parámetros al considerar diferentes escenarios de posible realización. Esto nos indica que dichos resultados están influenciados por las hipótesis actuariales fijadas inicialmente. Entre los parámetros que más afectan a la valoración financiero-actuarial del plan de pensiones, cabe destacar el tipo de interés técnico.

5.1. Escenario 1

En este escenario se va a modificar el tipo de interés técnico, caeteris paribus, con el fin de observar las desviaciones que se producen en las cuotas de aportación ante variaciones de este parámetro. De esta forma, se comprueba los resultados que se obtienen si en lugar de utilizar un tipo de interés técnico de valoración del plan del 4%, se toma el 3% o el 5%.

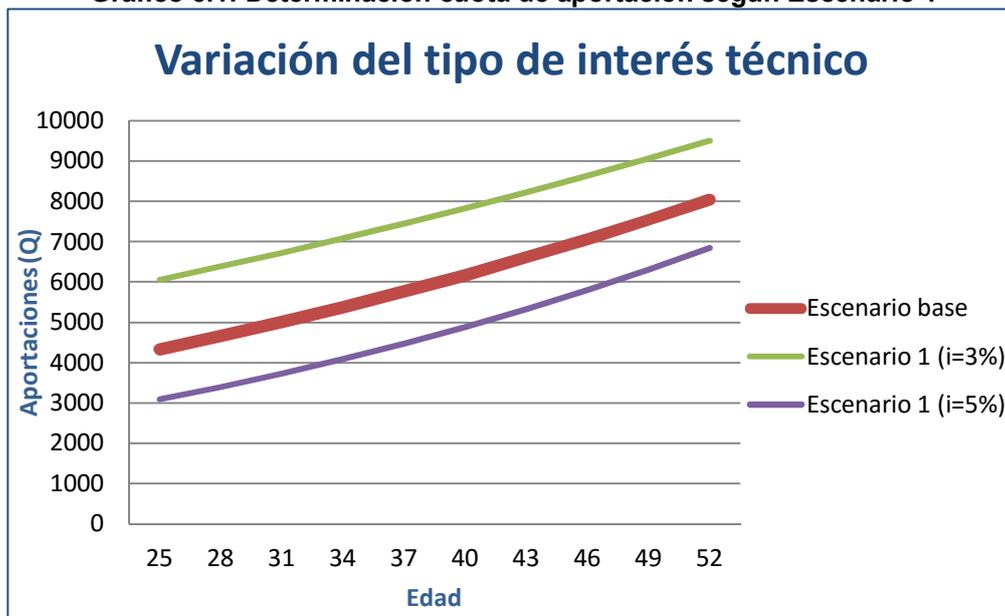
¹ Para el cálculo del capital acumulado a la edad de jubilación de cada partícipe, se han utilizado, con el fin de simplificar el modelo, las Tablas de Mortalidad/Supervivencia GRM-95.

Tabla 5.1: Determinación cuota de aportación según Escenario 1

e	i=3%			i=5%		
	$\dot{C} = B_r \cdot \ddot{a}_r^{(m)}$	$\ddot{s}_{r-\epsilon i}$	Q	$\dot{C} = B_r \cdot \ddot{a}_r^{(m)}$	$\ddot{s}_{r-\epsilon i}$	Q
25	464.092,21	76,62	6.056,98	383.010,80	124,05	3.087,63
28	429.285,29	67,24	6.383,93	354.284,99	104,36	3.394,83
31	394.478,38	58,66	6.724,36	325.559,18	87,35	3.726,91
34	359.671,46	50,81	7.078,54	296.833,37	72,66	4.085,07
37	324.864,55	43,62	7.446,68	268.107,56	59,97	4.470,51
40	290.057,63	37,05	7.829,02	239.381,75	49,01	4.884,34
43	255.250,71	31,03	8.225,73	210.655,94	39,54	5.327,63
46	220.443,80	25,52	8.637,01	181.930,13	31,36	5.801,36
49	185.636,88	20,48	9.063,00	153.204,32	24,29	6.306,41
52	150.829,97	15,87	9.503,83	124.478,51	18,19	6.843,56

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 5.1: Determinación cuota de aportación según Escenario 1



Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico 5.1 se puede observar que las cuantías de las aportaciones al plan de pensiones que tiene que realizar el empresario a favor de los trabajadores, son más sensibles a una disminución del 1% en el tipo de interés técnico de valoración que a una subida del mismo porcentaje.

5.2. Escenario 2

En este escenario el parámetro que va a modificarse, caeteris paribus, es el tanto de revalorización de las prestaciones de jubilación. El fin es el

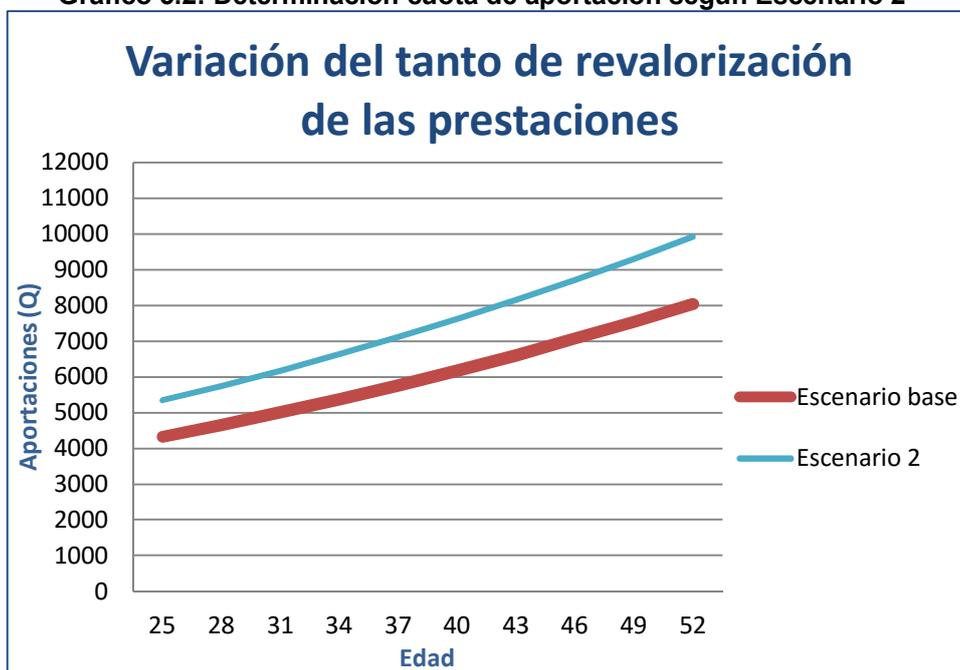
mismo, se trata de ver las variaciones que se producen en las cuotas de aportación ante tal modificación. En este caso, se desea constatar los resultados que se obtienen si en vez de mantenerse constante la prestación de jubilación, se estima que esta crece a un tanto anual acumulativo del 2%.

Tabla 5.2: Determinación cuota de aportación según Escenario 2

e	$\zeta = B_r \cdot \ddot{a}(1; q')_r^{(m)}$	$\ddot{s}_{r-e i}$	Q
25	518.750,32	97,07	5.343,97
28	479.844,05	83,46	5.749,26
31	440.937,77	71,36	6.178,85
34	402.031,50	60,61	6.633,52
37	363.125,23	51,04	7.114,00
40	324.218,95	42,54	7.621,00
43	285.312,68	34,99	8.155,15
46	246.406,40	28,27	8.717,05
49	207.500,13	22,29	9.307,21
52	168.593,85	16,98	9.926,09

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 5.2: Determinación cuota de aportación según Escenario 2



Fuente: Elaboración propia.

En este caso, las cuantías de las aportaciones aumentan cuando se establece una revalorización de las prestaciones de un 2%, pero no crece del mismo modo para todos los grupos de trabajadores. Se puede observar en la tabla 5.2 que para los trabajadores que van a permanecer menos tiempo en

activo en la empresa, las aportaciones van a crecer en una proporción mayor que como lo hacen la de los trabajadores más jóvenes.

5.3. Escenario 3

En este escenario lo que se modifica es el tanto de crecimiento de los salarios suponiendo que pasan de mantenerse constantes a crecer de forma anual en un 2% considerando una etapa expansiva de la economía. Esta modificación repercute en el crecimiento de las aportaciones, ya que estas son variables y, en este caso, crecen como lo hacen los salarios.

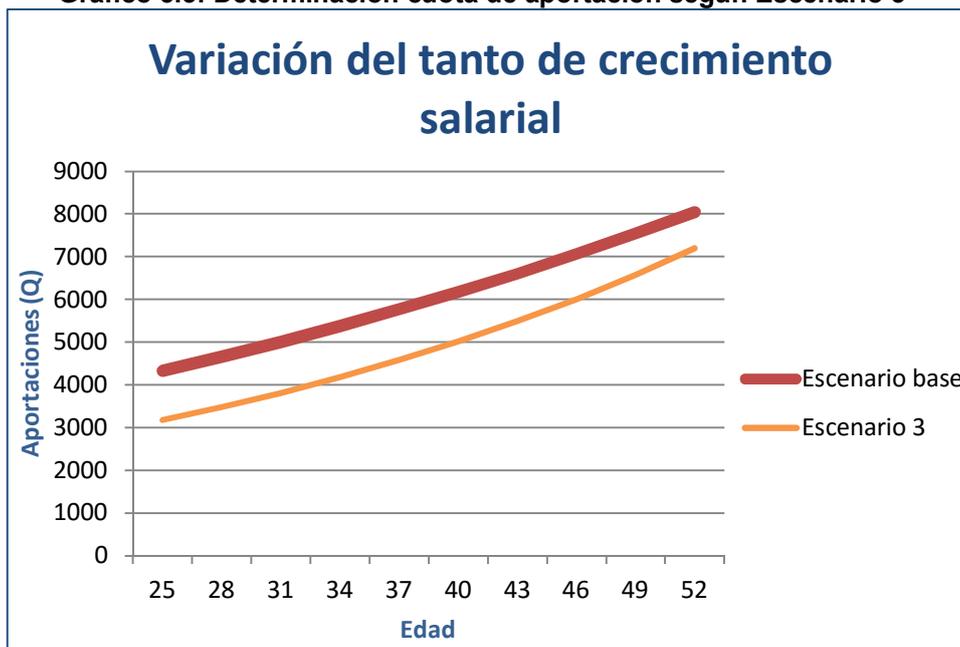
Tabla 5.3: Determinación cuota de aportación según Escenario 3

e	$\zeta = B_r \cdot \ddot{a}_r^{(m)}$	${}^s\ddot{S}_{\overline{r-e} i}$	sQ
25	420.161,16	132,44	3.172,43
28	388.649,07	111,73	3.478,60
31	357.136,98	93,66	3.813,26
34	325.624,90	77,92	4.178,96
37	294.112,81	64,24	4.578,47
40	262.600,72	52,37	5.014,76
43	231.088,64	42,08	5.491,10
46	199.576,55	33,20	6.011,00
49	168.064,46	25,55	6.578,28
52	136.552,38	18,97	7.197,06

Fuente: Elaboración propia.

Cuando se establece un crecimiento salarial del 2% anual, las aportaciones van a ser inferiores a las que serían cuando los salarios se mantienen constantes pero, como en el caso anterior, no disminuyen igual para todos los trabajadores. Para los trabajadores que entran a formar parte de la empresa con 25 años, las aportaciones van a disminuir en más de 1100€, mientras que para los trabajadores que entran a la empresa con 52 años estas aportaciones disminuyen en algo más de 800€.

Gráfico 5.3: Determinación cuota de aportación según Escenario 3



Fuente: Elaboración propia.

5.1. Escenario 4

En este escenario se supone que se van a modificar a la vez distintos parámetros como el tipo de interés técnico, el tanto de crecimiento de los salarios y el tanto de revalorización de las prestaciones. De esta manera, se comprueba las desviaciones que se producen en la cuota de aportación si hay una variación de $\pm 1\%$ en el tipo de interés técnico y un tanto de crecimiento salarial y una revalorización de la prestación de jubilación del 2% anual.

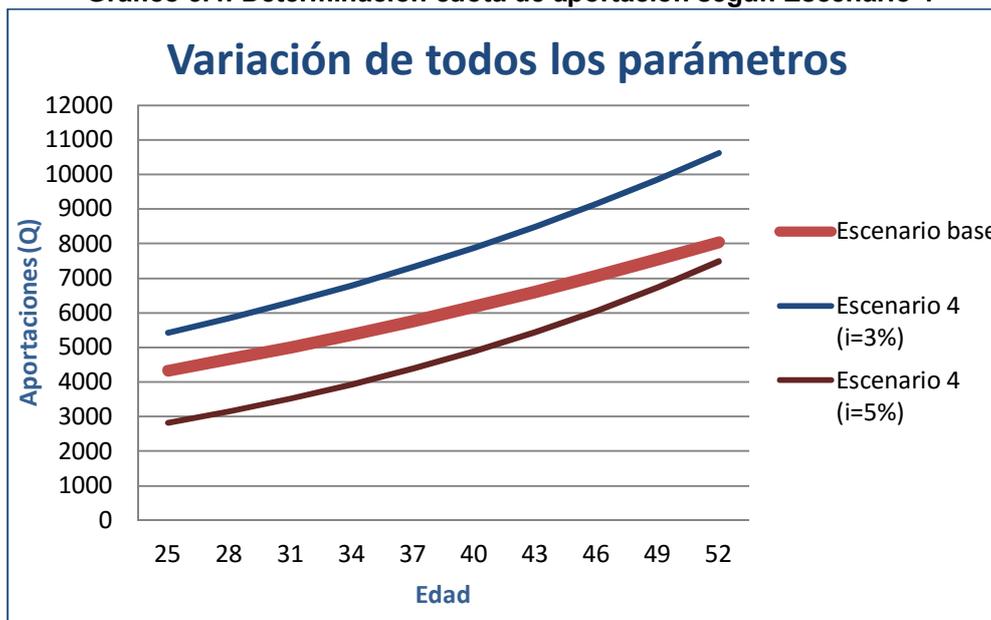
Tabla 5.4: Determinación cuota de aportación según Escenario 4

e	i=3%			i=5%		
	${}^s\phi = B_r \cdot \ddot{a}(1; q')_r^{(m)}$	${}^s\ddot{s}_{r-e i}$	sQ	${}^s\phi = B_r \cdot \ddot{a}(1; q')_r^{(m)}$	${}^s\ddot{s}_{r-e i}$	sQ
25	580.949,00	107,10	5.424,12	466.921,86	165,39	2.823,08
28	537.377,83	91,92	5.846,31	431.902,72	136,94	3.153,90
31	493.806,65	78,37	6.300,92	396.883,58	112,71	3.521,40
34	450.235,48	66,30	6.790,40	361.864,44	92,09	3.929,36
37	406.664,30	55,57	7.317,39	326.845,30	74,59	4.381,93
40	363.093,13	46,05	7.884,71	291.826,16	59,76	4.883,64
43	319.521,95	37,61	8.495,41	256.807,02	47,21	5.439,45
46	275.950,78	30,15	9.152,77	221.787,88	36,63	6.054,78
49	232.379,60	23,57	9.860,28	186.768,74	27,73	6.735,54
52	188.808,43	17,78	10.621,73	151.749,60	20,26	7.488,17

Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico 5.4 se observa qué es lo que ocurre con las aportaciones al plan de pensiones en el escenario que hemos descrito anteriormente. Al introducir el tanto de crecimiento salarial y la revalorización de las prestaciones pero con una disminución del 1% del tipo de interés técnico de valoración, las aportaciones aumentan en mayor medida de lo que disminuyen cuando el tipo de interés aumenta en la misma proporción.

Gráfico 5.4: Determinación cuota de aportación según Escenario 4



Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, si consideramos una disminución del 1% en el tipo de interés técnico, para los trabajadores más jóvenes el aumento de las aportaciones son muy inferiores al crecimiento de las mismas para los trabajadores de mayor edad, aumentando en un poco más de 1000€ para los trabajadores de 25 años y en más de 2600€ para los trabajadores de 52 años. En el caso de que el tipo de interés de valoración aumente en un 1%, las aportaciones para todos los trabajadores serían inferiores a las del escenario base, pero disminuyen en mayor medida para los trabajadores que van a permanecer más tiempo en la empresa que para los que empiezan a trabajar con mayor edad. En este último caso, para los trabajadores de 25 años disminuye en más de 1500€ y para los trabajadores de 52 años en unos 550€.

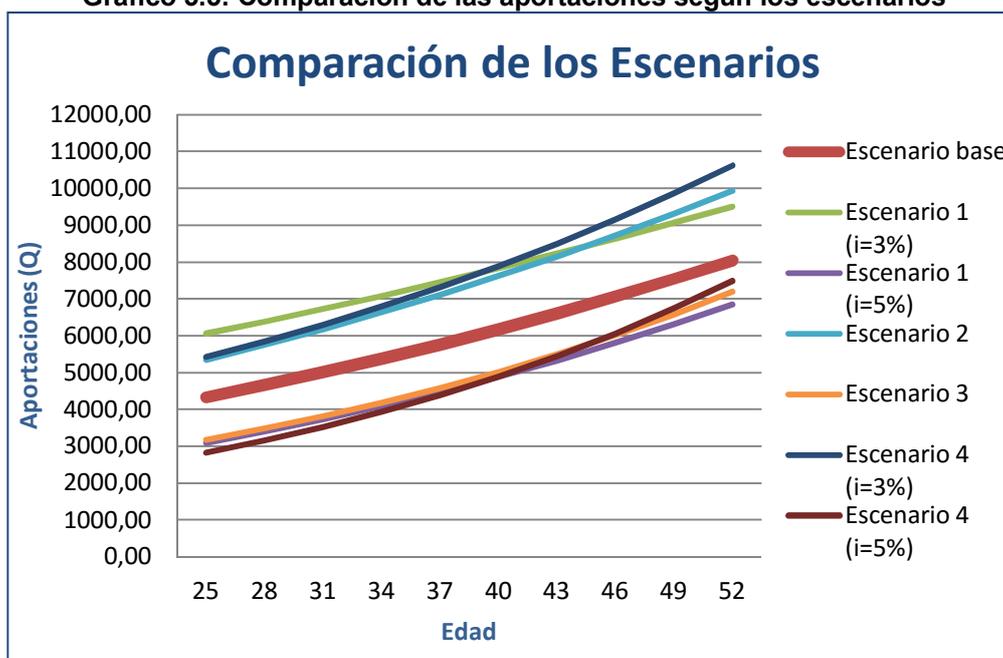
Comparación de los Escenarios

Tabla 5.5: Comparación de las aportaciones según los escenarios

e	Escenario base	Escenario 1		Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4	
	Q (i=4%); s=β=0%	Q (i=3%); s=β=0%	Q (i=5%); s=β=0%	Q (i=4%); s=0%; β=2%	Q (i=4%); s=2%; β=0%	Q (i=3%); s=β=2%	Q (i=5%); s=β=2%
25	4.328,34	6.056,98	3.087,63	5.343,97	3.172,43	5.424,12	2.823,08
28	4.656,61	6.383,93	3.394,83	5.749,26	3.478,60	5.846,31	3.153,90
31	5.004,55	6.724,36	3.726,91	6.178,85	3.813,26	6.300,92	3.521,40
34	5.372,81	7.078,54	4.085,07	6.633,52	4.178,96	6.790,40	3.929,36
37	5.761,98	7.446,68	4.470,51	7.114,00	4.578,47	7.317,39	4.381,93
40	6.172,62	7.829,02	4.884,34	7.621,00	5.014,76	7.884,71	4.883,64
43	6.605,26	8.225,73	5.327,63	8.155,15	5.491,10	8.495,41	5.439,45
46	7.060,36	8.637,01	5.801,36	8.717,05	6.011,00	9.152,77	6.054,78
49	7.538,36	9.062,99	6.306,41	9.307,21	6.578,28	9.860,28	6.735,54
52	8.039,62	9.503,83	6.843,56	9.926,09	7.197,06	10.621,73	7.488,17

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 5.5: Comparación de las aportaciones según los escenarios



Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico 5.5 se puede ver con facilidad cómo se comportan las aportaciones en cada uno de los escenarios que se han planteado en relación al escenario de partida o escenario base. A simple vista y sin analizar detalladamente, se puede observar que no a todos los trabajadores les afecta de la misma manera las variaciones en los parámetros. Si nos fijamos en los datos de la tabla 5.5, los trabajadores más jóvenes son más sensibles a una bajada de los tipos de interés, cuando no hay ni crecimiento salarial ni

revalorización de las prestaciones, y menos sensibles a la implantación de la tasa de crecimiento salarial del 2%. Sin embargo, los trabajadores que entran a formar parte del plan con edades más próximas a la jubilación son más sensibles a una bajada del tipo de interés y menos sensibles al aumento del tipo de interés, en ambos casos cuando hay crecimiento salarial y revalorización de las prestaciones del 2%. El parámetro que afecta en menor medida a las aportaciones y de forma más proporcional para todos los trabajadores, es la consideración de un tanto de crecimiento salarial por año trabajado (escenario 3), reflejándose este incremento en una disminución de las aportaciones.

6. CONCLUSIONES

La previsión social ha estado presente en la vida de las personas desde hace siglos, surgiendo por diferentes causas, afectando a distintos colectivos y evolucionando hasta los sistemas que conocemos en la actualidad.

Existen diferentes tipos y modalidades de Planes de Pensiones dependiendo de quién sea el promotor y las obligaciones estipuladas del plan, así como diferentes métodos de naturaleza financiera y actuarial utilizados en la valoración sistemática que deberá realizarse periódicamente en dichos planes. En concreto, en este trabajo se analiza un plan de pensiones de empleo de aportación definida con prestación objetivo.

Al analizar el caso práctico para un plan de pensiones de este tipo, se realiza un análisis de sensibilidad de los principales parámetros que intervienen en su valoración considerando diferentes escenarios. Se observa que los escenarios que más favorecen al empresario, teniendo en cuenta que la prestación para los trabajadores no se va a ver alterada en ningún caso, son aquellos en los que el tipo de interés técnico de valoración aumenta un 1% con respecto al escenario base y el que incorpora un crecimiento salarial del 2% (escenario 3), ya que las aportaciones que tendría que realizar el empresario son menores a las del escenario de partida o escenario base. Además, se ve que en estos escenarios, las aportaciones disminuyen en mayor proporción para los trabajadores más jóvenes pero, sin embargo, para estos trabajadores, el empresario va a estar aportando dinero durante más tiempo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Betzuen Zalbidegoita, A. y Blanco Ibarra, F. (1989): *Planes y Fondos de Pensiones. Su Cálculo y Valoración*. Ediciones Deusto, Bilbao.
- Caser Seguros (2010): *Manual de Planes de Pensiones 2010*. Disponible en: <https://www.caser.es/seguros/particulares/ahorro-inversion/planes-pensiones/manual/como>, [consulta: 04/08/2015]
- De la Peña Esteban, J. I. (2000): *Planes de Previsión Social*. Editorial Pirámide, Madrid.
- El País (2013): *El IPC sube hasta el 0,2% en noviembre y aleja el fantasma de la deflación*. Disponible en: http://economia.elpais.com/economia/2013/11/28/actualidad/1385626449_917353.html, [consulta: 28/11/2013].
- Fundación Inverco (2007): *La Ley de Planes y Fondos de Pensiones; 20 años después*. Disponible en: http://www.fundacioninverco.es/documentos/publicaciones/9996_LEY%20DE%20PLANES%20Y%20FONDOS%20DE%20PENSIONES-20%20ANYOS%20DESPUES/C1_CAPITULO%201-Evolucion.pdf, [consulta: 24/02/2015]
- Gollier, J. J. (2000): *Private Pension Systems en OECD Private Pension Systems and Policy Issues*. Organization for Economic Cooperation and Development, París.
- Instituto de Actuarios Españoles (1996): *Probabilidades de Supervivencia y Mortalidad de las Tablas GRMF-95, GKMF-95 y EVK-90*. Actuarios, 13, Madrid.
- Inverco (1994): *Modalidades de Planes y Fondos de Pensiones*. Disponible en: <http://www.inverco.es/28/0/94> [consulta: 05/08/2015]
- López Corrales, F., Mareque Álvarez-Santullano, M., Varela Escaloni, S., Charro Panero, J.J. y López Sanguos, D. (2013): *Cálculo Financiero y Actuarial*. Garceta grupo editorial, Madrid.
- Maldonado Molina, F. J. (2001): *Las Mutualidades de Previsión Social como Entidades Aseguradoras*. Comares, Granada.
- Peláez Feroso, F. J. y García González, A. (2004): *Los Planes y Fondos de Pensiones. Un Análisis Financiero-Actuarial*. Universidad de Valladolid, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial, Valladolid.
- Ministerio de Economía (2002): *Real Decreto 304/2004, de 20 de febrero, por el que se aprueba el Reglamento de Planes y Fondos de Pensiones*. B.O.E. 48, de 25 de febrero, Madrid. Disponible en: <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2004-3453>, [consulta: 20/11/2015]
- Ministerio de Economía (2004): *Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones*. B.O.E. 298, de 13 de diciembre, Madrid. Disponible en: http://noticias.juridicas.com/base_datos/Laboral/rdleg1-2002.html#a37, [consulta: 05/08/2015]

ANEXO 1

Tabla Anexo 1.1

PLAN APORTACIÓN DEFINIDA CON PRESTACIÓN OBJETIVO (i=4%)											
e	n _e	$\ddot{a}_r^{(m)}$	$\ddot{a}(1; q')_r^{(m)}$	$K=\alpha \cdot (r-e)$ $B_r=k \cdot S_{r-1}$	$\phi=B_r \cdot \ddot{a}_r^{(m)}$	${}^s\phi=B_r \cdot \ddot{a}(1; q')_r^{(m)}$	$\ddot{S}_{r-e i}$	${}^s\ddot{S}_{r-e i}$	Q	Q (q'=1,02)	Q (s=2%)
25	125	13,13	16,21	32.000	420.161,16	518.750,32	97,07	132,44	4.328,34	5.343,97	3.172,43
28	125	13,13	16,21	29.600	388.649,07	479.844,05	83,46	111,73	4.656,61	5.749,26	3.478,60
31	125	13,13	16,21	27.200	357.136,98	440.937,77	71,36	93,66	5.004,55	6.178,85	3.813,26
34	125	13,13	16,21	24.800	325.624,90	402.031,50	60,61	77,92	5.372,81	6.633,52	4.178,96
37	125	13,13	16,21	22.400	294.112,81	363.125,23	51,04	64,24	5.761,98	7.114,00	4.578,47
40	125	13,13	16,21	20.000	262.600,72	324.218,95	42,54	52,37	6.172,62	7.621,00	5.014,76
43	125	13,13	16,21	17.600	231.088,64	285.312,68	34,99	42,08	6.605,26	8.155,15	5.491,10
46	125	13,13	16,21	15.200	199.576,55	246.406,40	28,27	33,20	7.060,36	8.717,05	6.011,00
49	125	13,13	16,21	12.800	168.064,46	207.500,13	22,29	25,55	7.538,36	9.307,21	6.578,28
52	125	13,13	16,21	10.400	136.552,38	168.593,85	16,98	18,97	8.039,62	9.926,09	7.197,06

Fuente: Elaboración propia

Tabla Anexo 1.2

PLAN APORTACIÓN DEFINIDA CON PRESTACIÓN OBJETIVO (i=3%)						
e	n _e	$\ddot{a}(1; q')_r^{(m)}$	$K=\alpha \cdot (r-e)$ $B_r=k \cdot S_{r-1}$	${}^s\Phi=B_r \cdot \ddot{a}(1; q')_r^{(m)}$	${}^s\ddot{S}_{r-e i}$	sQ
25	125	18,15	32.000	580.949,00	107,10	5.424,12
28	125	18,15	29.600	537.377,83	91,92	5.846,31
31	125	18,15	27.200	493.806,65	78,37	6.300,92
34	125	18,15	24.800	450.235,48	66,30	6.790,40
37	125	18,15	22.400	406.664,30	55,58	7.317,39
40	125	18,15	20.000	363.093,13	46,05	7.884,71
43	125	18,15	17.600	319.521,95	37,61	8.495,41
46	125	18,15	15.200	275.950,78	30,15	9.152,77
49	125	18,15	12.800	232.379,60	23,57	9.860,28
52	125	18,15	10.400	188.808,43	17,78	10.621,73

Fuente: Elaboración propia

Tabla Anexo 1.3

PLAN APORTACIÓN DEFINIDA CON PRESTACIÓN OBJETIVO (i=5%)						
e	n _e	$\ddot{a}(1; q')_r^{(m)}$	$K=\alpha \cdot (r-e)$ $B_r=k \cdot S_{r-1}$	${}^s\Phi=B_r \cdot \ddot{a}(1; q')_r^{(m)}$	${}^s\ddot{S}_{r-e i}$	sQ
25	125	14,59	32.000	466.921,86	165,39	2.823,08
28	125	14,59	29.600	431.902,72	136,94	3.153,90
31	125	14,59	27.200	396.883,58	112,71	3.521,40
34	125	14,59	24.800	361.864,44	92,09	3.929,36
37	125	14,59	22.400	326.845,30	74,59	4.381,93
40	125	14,59	20.000	291.826,16	59,76	4.883,64
43	125	14,59	17.600	256.807,02	47,21	5.439,45
46	125	14,59	15.200	221.787,88	36,63	6.054,78
49	125	14,59	12.800	186.768,74	27,73	6.735,54
52	125	14,59	10.400	151.749,60	20,27	7.488,17

Fuente: Elaboración propia

ANEXO 2

Tabla Anexo 2.1

Símbolos de conmutación GR-95 (i=4%)					
e	$\beta=1,000$		e	$\beta=1,000$	
	D _e	N _e		D _e	N _e
25	370.295	8.289.904	63	72.442	1.028.966
26	355.590	7.910.609	64	68.823	956.524
27	341.469	7.564.019	65	65.328	887.701
28	327.908	7.222.550	66	61.955	822.373
29	314.886	6.894.642	67	58.700	760.419
30	302.380	6.579.757	68	55.556	701.719
31	290.370	6.277.377	69	52.517	646.163
32	278.835	5.987.007	70	49.570	593.645
33	267.753	5.708.172	71	46.720	544.071
34	257.101	5.440.418	72	43.946	497.351
35	246.871	5.183.313	73	41.246	453.405
36	237.033	4.936.442	74	38.617	412.159
37	227.575	4.699.408	75	36.058	373.542
38	218.478	4.471.834	76	33.571	337.484
39	209.728	4.253.356	77	31.158	303.913
40	201.308	4.043.628	78	28.823	272.755
41	193.205	3.842.320	79	26.570	243.932
42	185.405	3.649.115	80	24.409	217.361
43	177.893	3.463.710	81	22.340	192.952
44	170.658	3.285.817	82	20.369	170.612
45	163.686	3.115.159	83	18.501	150.243
46	156.966	2.951.473	84	16.739	131.742
47	150.485	2.794.507	85	15.085	115.003
48	144.231	2.644.022	86	13.540	99.918
49	138.194	2.499.791	87	12.106	86.378
50	132.364	2.361.597	88	10.780	74.272
51	126.736	2.229.233	89	9.556	63.492
52	121.304	2.102.496	90	8.437	53.933
53	160.060	1.981.192	91	7.408	45.495
54	110.998	1.865.132	92	6.465	38.087
55	106.110	1.754.134	93	5.602	31.623
56	101.389	1.648.024	94	4.814	26.021
57	96.828	1.546.635	95	4.099	21.207
58	92.420	1.449.807	96	3.455	17.108
59	88.158	1.357.387	97	2.882	13.653
60	84.035	1.269.229	98	2.376	10.761
61	80.045	1.185.195	99	1.936	8.394
62	76.183	1.105.149	100	1.557	6.458

Fuente: Datos extraídos de Peláez y García (2004)

Tabla Anexo 2.2

Símbolos de conmutación GR-95 (i=4%)					
e	$\beta=1,020$		e	$\beta=1,020$	
	D _e	N _e		D _e	N _e
25	607.508	20.392.484	63	252.233	4.441.460
26	595.051	19.784.976	64	244.424	4.189.226
27	582.849	19.189.925	65	236.651	3.944.802
28	570.896	18.607.077	66	228.921	3.708.151
29	559.188	18.036.181	67	221.232	3.479.230
30	547.719	17.476.993	68	213.573	3.257.998
31	536.485	16.929.274	69	205.927	3.044.426
32	525.476	16.392.789	70	198.276	2.838.498
33	514.684	15.867.313	71	190.596	2.640.223
34	504.100	15.352.629	72	182.865	2.449.627
35	493.715	14.848.530	73	175.064	2.266.762
36	483.522	14.354.814	74	167.184	2.091.699
37	473.511	13.871.293	75	159.228	1.924.515
38	463.676	13.397.782	76	151.208	1.765.288
39	454.007	129.341.606	77	143.145	1.614.080
40	444.497	12.480.099	78	135.068	1.470.934
41	435.137	12.035.603	79	127.008	1.335.867
42	425.920	11.600.466	80	119.004	1.208.858
43	416.837	11.174.546	81	111.095	1.089.854
44	407.881	10.757.708	82	103.320	978.759
45	399.043	10.349.827	83	95.721	875.439
46	390.313	9.950.784	84	88.336	779.717
47	381.681	9.560.471	85	81.199	691.382
48	373.136	9.178.790	86	74.344	610.182
49	364.667	8.805.653	87	67.798	535.838
50	356.270	8.440.986	88	61.580	468.041
51	347.945	8.084.716	89	55.698	406.460
52	339.691	7.736.771	90	50.144	350.763
53	331.507	7.397.080	91	44.907	300.619
54	323.388	7.065.573	92	39.973	255.711
55	315.330	6.742.184	93	35.330	215.738
56	307.327	6.426.854	94	30.969	180.408
57	299.372	6.119.527	95	26.895	149.440
58	291.457	5.820.155	96	23.126	122.544
59	283.576	5.528.698	97	19.675	99.418
60	275.721	5.245.121	98	16.548	79.743
61	267.884	4.969.400	99	13.751	63.195
62	260.057	4.701.516	100	11.279	49.445

Fuente: Datos extraídos de Peláez y García (2004)

Tabla Anexo 2.3

Símbolos de conmutación GR-95 (i=3%)					
e	$\beta=1,000$		e	$\beta=1,000$	
	D _e	N _e		D _e	N _e
25	471.466	12.694.805	63	133.152	2.092.401
26	457.139	12.223.339	64	127.728	1.959.249
27	443.247	11.766.200	65	122.418	1.831.522
28	429.777	11.322.953	66	117.224	1.709.104
29	416.716	10.893.176	67	112.144	1.591.879
30	404.051	10.476.460	68	107.169	1.479.736
31	391.470	10.072.409	69	102.290	1.372.566
32	379.860	9.680.639	70	97.496	1.270.276
33	368.304	9.300.779	71	92.774	1.172.781
34	357.091	8.932.475	72	88.113	1.080.007
35	346.206	8.575.384	73	83.503	991.894
36	335.637	8.229.178	74	78.939	908.392
37	325.372	7.893.541	75	74.424	829.452
38	315.399	7.568.169	76	69.963	755.028
39	305.706	7.252.770	77	65.564	685.066
40	296.283	6.947.064	78	61.240	619.502
41	287.117	6.650.782	79	57.005	558.262
42	278.200	6.363.664	80	52.873	501.257
43	269.521	6.085.464	81	48.861	448.383
44	261.069	5.815.943	82	44.984	399.522
45	252.835	5.554.874	83	41.255	354.539
46	244.809	5.302.039	84	37.287	315.284
47	236.979	5.057.231	85	34.293	275.597
48	229.336	4.820.251	86	31.081	241.303
49	221.870	4.590.915	87	28.058	210.222
50	214.570	4.369.045	88	25.228	182.164
51	207.445	4.154.472	89	22.588	156.936
52	200.481	3.947.027	90	20.130	134.348
53	193.677	3.746.545	91	17.846	114.217
54	187.027	3.552.869	92	15.725	96.371
55	180.527	3.665.841	93	13.758	80.646
56	174.170	3.185.314	94	11.938	66.888
57	167.950	3.011.144	95	10.263	54.949
58	161.860	2.843.194	96	8.736	44.686
59	155.894	2.681.334	97	7.357	35.950
60	150.047	2.525.439	98	6.126	28.593
61	144.311	2.375.393	99	5.039	22.467
62	138.681	2.231.082	100	4.091	17.428

Fuente: Datos extraídos de Peláez y García (2004)

Tabla Anexo 2.4

Símbolos de conmutación GR-95 (i=3%)					
e	$\beta=1,020$		e	$\beta=1,020$	
	D _e	N _e		D _e	N _e
25	773.490	32.970.807	63	463.615	9.171.373
26	764.985	32.197.317	64	453.624	8.707.758
27	756.573	31.432.332	65	443.461	8.254.135
28	748.552	30.675.759	66	433.141	7.810.673
29	740.023	29.927.507	67	422.656	7.377.532
30	731.882	29.187.484	68	411.985	6.954.876
31	723.830	28.455.602	69	401.094	6.542.891
32	715.861	27.731.771	70	389.940	6.141.798
33	707.966	27.015.511	71	378.475	5.751.858
34	700.139	26.307.945	72	366.649	5.373.383
35	692.374	25.607.805	73	354.415	5.006.734
36	684.462	24.915.432	74	341.748	4.652.319
37	676.997	24.230.770	75	328.645	4.310.571
38	669.370	23.553.774	76	315.122	3.981.926
39	661.776	22.884.403	77	301.216	3.666.804
40	654.204	22.222.627	78	286.978	3.365.588
41	646.646	21.568.424	79	272.474	3.078.610
42	639.094	20.921.777	80	257.781	2.806.136
43	631.538	20.282.683	81	242.985	2.548.354
44	623.969	19.651.145	82	228.175	2.305.370
45	616.375	19.027.177	83	213.445	2.077.195
46	608.744	18.410.801	84	198.889	1.863.749
47	601.060	17.802.058	85	184.596	1.664.861
48	593.309	17.200.997	86	170.652	1.480.265
49	585.473	16.607.688	87	157.136	1.309.613
50	577.544	16.022.216	88	144.112	1.152.477
51	569.524	15.446.672	89	131.611	1.008.365
52	561.413	14.875.148	90	119.638	876.753
53	553.206	14.313.735	91	108.183	757.115
54	544.897	13.760.529	92	97.232	648.932
55	536.478	13.215.631	93	86.772	551.700
56	527.938	12.679.153	94	76.800	464.927
57	519.265	12.151.215	95	63.346	388.128
58	510.446	11.631.950	96	58.470	320.782
59	501.465	11.121.504	97	50.226	262.312
60	492.308	10.620.038	98	42.655	212.086
61	482.958	10.127.730	99	35.788	169.431
62	473.399	9.644.772	100	29.640	133.643

Fuente: Datos extraídos de Peláez y García (2004)

Tabla Anexo 2.5

Símbolos de conmutación GR-95 (i=5%)					
e	$\beta=1,000$		e	$\beta=1,000$	
	D _e	N _e		D _e	N _e
25	291.506,65	5.552.060,90	63	39.642,93	512.800,39
26	277.264,69	5.260.554,25	64	37.303,70	473.157,46
27	263.718,22	4.983.289,56	65	35.071,94	435.853,76
28	250.833,33	4.719.571,34	66	32.944,35	400.781,81
29	238.577,70	4.468.738,02	67	30.916,24	367.837,46
30	226.920,62	4.230.160,31	68	28.982,02	336.921,22
31	215.832,69	4.003.239,70	69	27.135,69	307.939,20
32	205.284,72	3.787.407,01	70	25.371,16	280.803,51
33	195.248,74	3.582.122,28	71	23.682,50	255.432,35
34	185.698,36	3.386.873,54	72	22.064,21	231.749,85
35	176.608,61	3.201.175,18	73	20.511,53	209.685,64
36	167.955,86	3.024.566,57	74	19.021,30	189.174,10
37	159.717,80	2.856.610,71	75	17.591,73	170.152,81
38	151.873,22	2.696.892,91	76	16.222,15	152.561,08
39	144.402,00	2.545.019,68	77	14.912,66	136.338,92
40	137.285,03	2.400.617,68	78	13.663,86	121.426,27
41	130.504,24	2.263.332,65	79	12.476,64	107.762,41
42	124.042,46	2.132.828,41	80	11.351,98	95.285,76
43	117.883,48	2.008.785,95	81	10.290,75	83.933,78
44	112.011,87	1.890.902,47	82	9.293,59	73.643,03
45	106.412,83	1.778.890,59	83	8.360,84	64.349,44
46	101.072,08	1.672.477,76	84	7.492,41	55.988,60
47	95.975,99	1.571.405,69	85	6.687,77	48.496,19
48	91.111,49	1.475.429,70	86	5.945,91	41.808,42
49	86.466,21	1.384.318,20	87	5.265,39	35.862,51
50	82.029,96	1.297.851,99	88	4.644,11	30.597,12
51	77.794,28	1.215.822,03	89	4.078,90	25.953,00
52	73.750,62	1.138.027,75	90	3.565,89	21.874,11
53	69.890,47	1.064.277,13	91	3.101,03	18.308,22
54	66.205,41	994.386,66	92	2.680,42	15.207,18
55	62.687,16	928.181,25	93	2.300,50	12.526,76
56	59.327,67	865.494,10	94	1.958,16	10.226,26
57	56.119,17	806.166,42	95	1.651,38	8.268,10
58	53.054,16	750.047,25	96	1.378,86	6.616,73
59	50.125,46	696.993,10	97	1.139,09	5.237,87
60	47.326,26	646.867,64	98	930,36	4.098,77
61	44.650,10	599.541,38	99	750,69	3.168,42
62	42.090,89	554.891,28	100	597,94	2.417,72

Fuente: Datos extraídos de De la Peña (2000)

Tabla Anexo 2.6

Símbolos de conmutación GR-95 (i=5%)					
e	$\beta=1,020$		e	$\beta=1,020$	
	D _e	N _e		D _e	N _e
25	478.247,55	13.028.410,52	63	138.030,99	2.182.555,51
26	463.979,75	12.550.162,97	64	132.483,84	2.044.524,52
27	450.137,07	12.086.183,22	65	127.048,92	1.912.040,68
28	436.706,89	11.636.046,15	66	121.728,52	1.784.991,76
29	423.676,95	11.199.339,26	67	116.519,37	1.663.263,24
30	411.035,29	10.775.662,31	68	111.414,15	1.546.743,87
31	398.770,07	10.364.627,02	69	106.402,73	1.435.329,72
32	386.867,39	9.965.856,96	70	101.473,44	1.328.926,99
33	375.313,27	9.578.989,56	71	96.613,94	1.227.453,55
34	364.094,33	9.203.676,30	72	91.812,26	1.130.839,62
35	353.197,71	8.839.581,97	73	87.058,40	1.039.027,35
36	342.611,04	8.486.384,26	74	82.347,96	951.968,95
37	332.322,45	8.143.773,23	75	77.682,19	869.621,00
38	322.320,36	7.811.450,78	76	73.067,04	791.938,81
39	312.593,48	7.489.130,42	77	68.512,26	718.871,77
40	303.130,80	7.176.536,94	78	64.030,48	650.359,51
41	293.921,70	6.873.406,14	79	59.636,39	586.329,02
42	284.955,96	6.579.484,44	80	55.345,90	526.690,63
43	276.223,32	6.294.528,58	81	51.175,35	471.346,73
44	267.714,33	6.018.305,26	82	47.140,89	420.171,38
45	256.418,96	5.750.590,93	83	43.257,78	373.030,49
46	251.326,97	5.491.171,97	84	39.539,94	329.772,70
47	243.428,07	5.239.844,99	85	35.999,44	290.232,76
48	235.711,85	4.996.416,92	86	32.646,26	254.233,33
49	228.168,06	4.760.705,07	87	29.488,01	221.587,07
50	220.790,86	4.532.537,01	88	26.528,81	192.099,06
51	213.577,95	4.311.746,15	89	23.766,11	165.570,25
52	206.525,94	4.098.168,20	90	21.192,55	141.804,14
53	199.630,58	3.891.642,26	91	18.798,44	120.611,59
54	192.886,90	3.692.011,67	92	16.573,69	101.813,14
55	186.289,34	3.499.124,78	93	14.509,04	85.239,45
56	179.831,99	3.312.835,43	94	12.596,90	70.730,41
57	173.508,61	3.133.003,45	95	10.835,83	58.133,51
58	167.312,88	2.959.494,84	96	9.228,60	47.297,68
59	161.238,41	2.792.181,96	97	7.776,36	38.069,08
60	155.278,91	2.630.943,55	98	6.478,39	30.292,72
61	149.428,31	2.485.664,64	99	5.331,87	28.814,33
62	143.680,81	2.326.236,32	100	4.331,87	18.482,46

Fuente: Datos extraídos de De la Peña (2000)