**Universidad de Valladolid**

## Trabajo de Fin de Grado

## Grado en Economía

# PROBLEMAS DE BANCARROTA


Presentado por:

***Pablo Gilsanz Maderuelo***

Tutelado por:

***Luis Carlos Meneses Poncio***


*Valladolid, 16 de enero de 2017*

## ÍNDICE DE CONTENIDOS

## ÍNDICE DE TABLAS, GRÁFICOS E IMÁGENES

## RESUMEN

Los problemas de bancarrota surgen cuando el conjunto de las reclamaciones de los agentes involucrados supera el presupuesto disponible de un bien perfectamente divisible. Su estudio se enmarca dentro de la teoría de la Elección Social.

La resolución de tales problemas no es única, varía en función de la regla de reparto que se utilice. Este trabajo se centra en el estudio de las cuatro reglas clásicas de reparto y en la regla del orden de llegada. Cada una de ellas verifica ciertas propiedades de las reglas de reparto. A partir de un análisis matemático, gráfico e individualizado de dichas reglas, se determina la regla más adecuada para cada problema de bancarrota.

Con el fin de facilitar la elección de la regla de reparto, se ha llevado a cabo la simulación, mediante la elaboración de unas hojas de cálculo en Excel, de las asignaciones finales proporcionadas por las distintas reglas. Ahondar en dicho camino permitirá a jueces imparciales seleccionar la regla más idónea.

**Palabras clave:** *Problemas de bancarrota, presupuesto, Elección Social, reglas de reparto*

**Clasificación JEL:** *D71, G33, H61*

## ABSTRACT

The problems associated with bankruptcy arise when the set of claims of the involved agents overcome the available budget of a perfectly divisible good. This study is part of the theory of Social Choice.

The resolution of such problems is not unique, it varies according to division rules which are implemented. This work is based on the study of the four classic division rules and in the random arrival rule. Each rule verifies certain properties of the division rules. Based on a mathematical, graphical and individual analysis of these rules, the most suitable rule for each bankruptcy problem can be determined.

In order to facilitate the choice of which division rule to apply a simulation is carried out, through the use of Excel sheets, to provide the final distribution associated to the several rules. The continuous development of simulation studies will allow an impartial judge to select the most appropriate rule.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de bancarrota surgen por la escasez de recursos frente a las demandas existentes. La ciencia económica ha tratado de encontrar métodos que permitan una asignación lógica y ética de los recursos escasos. Por tanto, tal y como apuntó Robbins (1932), la asignación de recursos escasos instaura la esencia del quehacer económico.

Establecer el reparto de tales bienes no tiene una solución fácil. Son muchos los matices a tener en consideración tales como aspectos éticos, morales y económicos. Dentro de los económicos, Villar (2005) señaló que el coste de oportunidad, es decir, el valor de la mejor opción que rechazamos, es uno de los criterios clave a la hora de buscar una solución a los problemas de reparto. La humanidad lleva siglos enfrentándose a dicho problema, desde tiempos bíblicos (Talmud) hasta el día de hoy, en cualquier tipo de ámbito y situación.

No todos los recursos son igualmente fáciles de repartir. Luego cabe realizar la siguiente distinción entre bienes perfectamente divisibles como, por ejemplo, el dinero, y bienes que, por el contrario, no se pueden dividir infinitamente como los escaños. Dicha característica determina si nos encontramos ante un problema de bancarrota o no, ya que éste sólo se refiere a recursos perfectamente divisibles.

Según Guerrero, Hinojosa y Sánchez (2003), es posible abordar este problema desde dos enfoques. El primero, a través de la teoría de juegos, donde un problema de bancarrota es expresado como un juego de utilidad transferible o un problema de negociación. El segundo enfoque es el procedimiento axiomático, donde las reglas de reparto son caracterizadas en términos de propiedades. Este trabajo toma como partida este último enfoque.

El objetivo de este trabajo es analizar cinco reglas de reparto y determinar sus respectivas asignaciones ante cualquier problema de bancarrota con el fin de facilitar la elección de la regla.

La metodología empleada en este trabajo ha sido la búsqueda de fuentes de información tales como artículos, libros o páginas web; y la elaboración de unas hojas de cálculo que permitan simular los resultados proporcionados por las reglas de reparto ante variaciones en el presupuesto o en las reclamaciones de los agentes.

El trabajo está estructurado en nueve apartados. Tras la introducción, en el segundo apartado se define lo que es un problema de bancarrota y se expone tanto su planteamiento como su notación matemática. Más adelante, se explica brevemente cada una de las reglas de reparto, acompañando dicha explicación por un ejemplo práctico y una representación gráfica. En el cuarto apartado se estudian algunas propiedades de las reglas de reparto. A continuación, se relacionan los dos apartados anteriores al mostrar diferentes combinaciones de estas propiedades que caracterizan las reglas de reparto clásicas. En el sexto apartado se muestran las hojas de cálculo Excel realizadas en el trabajo con el fin de proporcionar de manera automática las asignaciones otorgadas por las cinco reglas de reparto. En el siguiente, se aplican las reglas de reparto introducidas anteriormente a un caso real de bancarrota como es el del reparto del agua en la cuenca hidrográfica del Segura. Finalmente, se exponen algunas conclusiones y las referencias bibliográficas utilizadas en la elaboración del trabajo.

## 2. PROBLEMAS DE BANCARROTA

El estudio de los problemas de bancarrota se enmarca dentro de la Teoría de la Elección Social. El origen de la palabra “bancarrota” proviene del italiano del siglo XVI. El significado literal es “banca rota” y se debe a la costumbre que imperaba por aquel entonces de romper las sillas de los prestamistas en quiebra.

El problema de bancarrota nace cuando un conjunto de agentes realiza reclamaciones sobre un bien del que se dispone una cantidad inferior a la suma de todas las reclamaciones. Cada agente demandará una cantidad que puede ser inferior, igual o superior al total de la cuantía a repartir.

El encargado de buscar una solución justa será la figura de un juez imparcial, quién determinará el reparto del bien empleando ciertos criterios éticos y procedimentales. "Lo que se busca es la regla de reparto que aplique criterios razonables, éticos y operativos" (Espinel, 2007, p.3). Dichos criterios dependerán de la naturaleza del problema que se aborda.

Los problemas de bancarrota no tienen naturaleza única, aparecen en casi todos los ámbitos cotidianos y afectan tanto a personas como a empresas o instituciones. Por ejemplo, a la hora de la comida un matrimonio y sus dos hijos demandan medio litro de agua cada uno para comer pero sólo tienen una botella de litro y medio de agua para todos. Aparece de esta forma un problema de bancarrota ya que la demanda total de agua supera a la cantidad disponible. Este es un pequeño ejemplo que nos permite ver que dicho problema está presente en todos los ámbitos sociales.

A continuación, se citan algunos problemas de bancarrota que se pueden dar en nuestra sociedad. Se consideran problemas de bancarrota ya que en todos estos casos existe un bien infinitamente divisible que se debe repartir, cuya cantidad es inferior a la suma del conjunto de las reclamaciones que se realizan sobre dicho bien.

- *Concurso de acreedores de empresas en quiebra:* es el caso más recurrente y el primero que nos viene a la cabeza cuando hablamos de problemas de bancarrota. Las principales causas que llevan a una empresa a la quiebra son la mala gestión de la compañía, la insuficiencia del capital, la ubicación, la falta de planificación, un crecimiento desmesurado y la falta de motivación de los empleados de la empresa. Las consecuencias más relevantes derivadas de la quiebra son la pérdida de capital, de empleo y de tejido productivo.
- *Recortes presupuestarios:* el Gobierno elabora anualmente los Presupuestos Generales del Estado. Cuando la recaudación del Estado

cae debido, por ejemplo, a una recesión económica, los presupuestos deben reducirse para cumplir los objetivos de déficit que se marcan desde la Unión Europea. Por tanto, se lleva a cabo un reparto de pérdidas (problema de bancarrota) entre sus distintos organismos como consecuencia de la reducción del presupuesto.

- *Distribución de recursos hídricos:* desafortunadamente, la demanda de agua es menor que la cantidad existente de dicho recurso. España se caracteriza, entre otros aspectos, por su diversidad climática. Es cierto que las Comunidades Autónomas norteñas, tales como Galicia, Asturias, Cantabria y el País Vasco, gozan de abundantes precipitaciones. Sin embargo, no compensan el déficit general del país provocado por el resto de Comunidades que adolecen la escasez de este bien. Por consiguiente, las Confederaciones Hidrográficas deben hacer frente a este problema de reparto de agua.
- *Herencias:* en este caso existe un problema de bancarrota cuando el testador fallece y la cantidad de los bienes a repartir tales como, hectáreas de tierra o dinero, es inferior a la cuantía de la suma de las reclamaciones de los herederos legítimos.
- *Subvenciones:* tanto personas como empresas o instituciones desean, por lo general, obtener este tipo de ayudas cuya cantidad suele ser bastante limitada. En este punto podemos considerar, entre otros, la concesión de becas a estudiantes o las ayudas a ganaderos y agricultores.

Los anteriores problemas, aunque distan en su naturaleza, tienen un nexo en común y es que se pueden modelizar como un problema de bancarrota: en todos estos casos existe un bien a repartir cuya cantidad, que es limitada y divisible infinitamente, es inferior al conjunto de reclamaciones sobre el mismo.

## 2.1. PLANTEAMIENTO Y NOTACIÓN DE UN PROBLEMA DE BANCARROTA

Llamaremos $E$ al presupuesto o cantidad disponible de un bien perfectamente divisible que se debe repartir entre un conjunto de agentes $M = \{1,2,\dots,m\}$. El presupuesto siempre será positivo $E > 0$. Cada uno de los agentes implicados en el problema de bancarrota tiene derecho a reclamar una cierta cantidad del presupuesto. Denotaremos por $c_i$ a la reclamación del agente $i$-ésimo y por $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}_+^n$ al vector que recoge las reclamaciones de los $m$ agentes. La reclamación agregada, $C$, es igual a la suma de las reclamaciones de los agentes: $C = \sum_{i \in M} c_i$. Cuando la reclamación agregada es superior a la cantidad del bien a repartir, $C > E$, es cuando nos encontramos ante un problema de bancarrota. Por eso, un problema de bancarrota se representa por el par $(E, c)$. Definiremos como déficit a la diferencia entre la reclamación agregada y el presupuesto, $C - E > 0$.

La solución de un problema de bancarrota $(E, c)$ vendrá determinada por una regla de reparto $F$. De esta forma, cada regla de reparto asigna al agente $i$-ésimo una cantidad $x_i^*$ del bien a repartir en función del presupuesto disponible y de las reclamaciones de dichos agentes. Por último, para que se trate de una solución del problema de bancarrota, se debe cumplir que la suma de todas las asignaciones, recogidas en el vector $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) \in \mathbb{R}_+^n$, debe ser igual al presupuesto y que cada asignación sea positiva y no superior a su reclamación correspondiente.

De este modo, la regla de reparto es una función que proporciona a cada problema de bancarrota una asignación

$$x^* = (x_i^*)_{i \in M} = F(E, c) \in \mathbb{R}_+^n,$$

tal que $c_i \geq x_i^* \geq 0$ y $\sum_{i \in M} x_i^* = E$.

En la actualidad, la Teoría de la Elección Social estudia un amplio abanico de reglas de reparto y sus respectivas propiedades. La decisión de que regla de reparto utilizar depende de los criterios éticos utilizados por el juez imparcial. En los próximos apartados se analizarán las reglas más representativas y comunes.

## 3. REGLAS DE REPARTO

En este apartado se presentan las reglas de reparto proporcional, de igual ganancia, de igual pérdida, del Talmud y del orden de llegada. Las cuatro primeras son las denominadas “reglas clásicas de reparto”. A continuación, explicaremos cada una de ellas ilustrando la explicación con un ejemplo práctico. Asimismo, se realiza una representación gráfica donde se visiona como asigna a cada agente la regla de reparto en función del presupuesto disponible.

### 3.1. REGLA DE REPARTO PROPORCIONAL

Según Aumann y Maschler (1985), es la regla más frecuentemente utilizada. Distribuye el presupuesto de manera proporcional a las reclamaciones realizadas por cada agente.

En esta regla se define un coeficiente de proporcionalidad $\sigma$ dividiendo el presupuesto entre la suma de las reclamaciones. Este coeficiente multiplica cada una de las reclamaciones de los agentes para obtener sus asignaciones. Los valores que toma están comprendidos entre cero y uno debido a que la reclamación agregada no puede ser inferior al presupuesto.

De esta forma, la regla de reparto proporcional, $P$, vendrá definida de la siguiente manera:

$$P(E,c) = \sigma c,$$

donde $\sigma = E/C$.

Veamos el reparto que proporciona esta regla con un ejemplo. Supongamos que la constructora “Ladrillovaladrilloviene S.A” ha entrado en quiebra debido a la crisis económica del año 2008. En el momento de la liquidación, el valor de sus bienes es de 110 millones de euros ($E = 110$ M€), cantidad que es insuficiente para cubrir la totalidad de las deudas contraídas con los siguientes acreedores de la constructora:

- Una empresa de suministros eléctricos, 70 M€ ($c_1$).
- Una empresa de fontanería, 70 M€ ($c_2$).
- Una empresa de suministro de madera, 50 M€ ($c_3$).
- Una empresa de suministros sanitarios, 10 M€ ($c_4$).

Con estos datos, el vector de reclamaciones será $c = (70,70,50,10)$, por lo que la reclamación agregada, $C$, es igual a 200 millones de euros y el coeficiente de proporcionalidad es $\sigma = 0{,}55$ (110/200). De este modo, el problema de bancarrota vendrá definido por $(E, c) = (110, (70{,}70{,}50{,}10))$.

Aplicando la regla de reparto de proporcionalidad, la solución a este problema de bancarrota vendrá dada por:

$$P(E,c) = \frac{110}{200}(70{,}70{,}50{,}10) = 0{,}55(70{,}70{,}50{,}10) = \left(38'5, 38'5, 27'5, 5'5\right).$$

Por tanto, el reparto que proporciona esta regla es el siguiente: 38,5 millones de euros tanto para la empresa de suministros eléctricos como para la de fontanería, 27,5 millones de euros para la suministradora de madera, y 5,5 millones de euros para la empresa de suministros sanitarios.

### 3.2. REGLA DE REPARTO DE IGUAL GANANCIA

Los agentes involucrados en el problema de bancarrota obtienen la misma cantidad con la restricción de que ninguno de ellos puede recibir una cuantía superior a la reclamada, en cuyo caso percibirían el total de su reclamación.

De esta forma, la regla de reparto de igual ganancia, $IG$, vendrá definida de la siguiente manera:

$$IG_i(E,c) = min\{\lambda, c_i\},$$

siendo $\lambda$ solución de $\sum_{i \in M} min\{\lambda, c_i\} = E$.

En el ejemplo expuesto anteriormente, $\lambda$ es igual a $\frac{100}{3}$ y las asignaciones finales aplicando esta regla son las siguientes:

$$IG_1(E,c) = IG_2(E,c) = min\left\{\frac{100}{3}, 70\right\} = \frac{100}{3}.$$

$$IG_3(E,c) = min\left\{\frac{100}{3}, 50\right\} = \frac{100}{3}.$$

$$IG_4(E,c) = min\left\{\frac{100}{3}, 10\right\} = 10.$$

En el caso de se repartiese equitativamente el presupuesto entre los cuatro agentes, 27,5 millones de euros a cada, la empresa sanitaria obtendría más de lo reclamado y no se respetaría la restricción explicada anteriormente. Por tanto, se le otorga el cien por cien de su reclamación. Al resto de los acreedores se les asigna $\lambda$, cantidad que equivale a repartir el presupuesto sobrante (100M€) de manera igualitaria entre los 3 agentes restantes. De esta forma:

$$IG(E,c) = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}, 10\right).$$

### 3.3. REGLA DE REPARTO DE IGUAL PÉRDIDA

La regla a tratar en este apartado reparte el déficit por igual entre cada agente, bajo la restricción de que ningún agente pierda una cantidad superior a la reclamada.

De esta forma, la regla de reparto de igual pérdida, $IP$, vendrá definida de la siguiente manera:

$$IP_i(E,c) = max\{0, c_i - \mu\},$$

donde $\mu$ es la solución de $\sum_{i \in M} max\{0, c_i - \mu\} = E$.

Dado el mismo ejemplo que en apartados anteriores, $\mu$ es igual a $\frac{80}{3}$ y las soluciones del problema de bancarrota dadas por la regla de reparto de igual pérdida son las siguientes:

$$IP_1(E,c) = IP_2(E,c) = max\left\{0, 70 - \frac{80}{3}\right\} = 43{,}33.$$

$$IP_3(E,c) = max\left\{0, 50 - \frac{80}{3}\right\} = 23{,}33.$$

$$IP_4(E,c) = max\left\{0, 10 - \frac{80}{3}\right\} = 0.$$

En el caso de distribuir el déficit entre los cuatro acreedores por partes iguales (22,5 M€), la empresa de suministros sanitarios perdería una cantidad superior a la demandada y se incumpliría la restricción de la regla de igual pérdida. Por consiguiente, la empresa de recursos sanitarios no percibe nada y se le asigna 10 millones de déficit . Al resto de los acreedores se les distribuye un déficit $\mu$, cantidad que se obtiene al repartir el déficit sobrante (80M€) de manera igualitaria entre los 3 agentes restantes. Por tanto:

$$IP(E,c) = (43'33, 43'33, 23'33, 0).$$

### 3.4. REGLA DEL TALMUD O DEL BIEN DISPUTADO

De acuerdo con la tradición judía, el Talmud, que en hebreo significa "estudio" o "aprendizaje", hace referencia al compendio de dos tipos de escritos. El *Mishna* compendia las leyes de tradición oral mientras que el *Gerema* recoge la interpretación de las mismas. La regla del Talmud determina la solución de problemas prácticos, como puede ser el reparto de herencias, apoyándose en ambos textos. El reparto que propone esta regla se basa en criterios psicológicos que afirman que los agentes suelen fijarse en sus ganancias potenciales cuando el presupuesto es pequeño, y se preocupan por sus deudas cuando la cantidad a repartir es grande.

Al igual que el Talmud compila el *Mishna* y el *Gerema*, Herrero y Villar (2001) verificaron que la regla del Talmud es una mezcla de las reglas de reparto citadas anteriormente. Así pues, la regla del Talmud coincide con la regla de igual ganancia cuando $E < \frac{C}{2}$ y $\frac{E}{m} \leq \frac{min\{ci\}}{2}$, con la regla proporcional si $E = \frac{C}{2}$, y por último, con la regla de igual ganancia si $E > \frac{C}{2}$ y además $\frac{C-E}{m} \leq \frac{min\{ci\}}{2}$.

De esta forma, Aumann y Maschler (1985) definieron la regla del Talmud, $T$, de la siguiente manera:

$$T_i(E,c) = \begin{cases} min\left\{\frac{c_i}{2}, \lambda\right\} & si\ E \leq \frac{C}{2}, \\ max\left\{\frac{c_i}{2}, c_i - \mu\right\} & si\ E \geq \frac{C}{2}, \end{cases}$$

siendo $\lambda$ solución de $\sum_{i \in M} min\left\{\lambda, \frac{c_i}{2}\right\} = E$ y $\mu$ solución de $\sum_{i \in M} max\left\{\frac{c_i}{2}, c_i - \mu\right\} = E$.

En el ejemplo que se está analizando, el presupuesto es superior a la mitad de la deuda agregada. Por tanto, nos quedarán la siguiente asignaciones donde $\mu$ es igual a 30:

$$T_1(E,c) = T_2(E,c) = max\left\{\frac{70}{2}, 70 - 30\right\} = 40.$$

$$T_3(E,c) = max\left\{\frac{50}{2}, 50 - 30\right\} = 25.$$

$$T_4(E,c) = max\left\{\frac{10}{2}, 10 - 30\right\} = 5.$$

En primer lugar, el déficit a repartir entre los cuatro acreedores sería de 22,5 millones de euros a cada uno, pero la empresa sanitaria perdería más de la mitad de su demanda y, de este modo, se le asignará un déficit de 5 millones de euros, equivalentes a la mitad de su reclamación. En segundo lugar, se repartiría equitativamente el déficit sobrante entre los otros tres acreedores (85/3=28,33 M€), pero ahora, con la empresa de suministros de madera se genera el mismo problema que con la empresa sanitaria, por lo que se le asigna un déficit de 25 millones, igual a la mitad de su reclamación. Por lo tanto, el déficit a repartir $\mu$, se obtiene dividiendo los 60 millones de déficit restante entre los 2 acreedores restantes. De esta manera:

$$T(E, c) = (40, 40, 25, 5).$$

### 3.5. REGLA DEL ORDEN DE LLEGADA

Esta regla calcula las asignaciones que percibirían los agentes en función de todos los posibles órdenes de llegada. A continuación, calcula la media de las asignaciones que les hubieran correspondido y asigna dicha cantidad.

La regla, por tanto, tiene que contemplar todos los posibles órdenes de llegada de los agentes para establecer qué cantidad les sería otorgada y posteriormente, calcular la media. Por ejemplo, presumamos que disponemos de un presupuesto de 7€ a repartir entre dos agentes que se encuentran colocados en fila india según su orden de aparición, el primero demanda 10€ y el segundo 5€. Obviamente, en este caso sólo existirían dos posibles órdenes de llegada. Si el agente 1 aparece primero se le asignaría la totalidad del presupuesto disponible (7€) y al segundo agente nada (0€). Si, por el contrario, el agente 2 es el que llega primero, se le asignaría su demanda de forma integra (5€) y al agente 1 el resto del presupuesto (2€). Una vez establecidas las asignaciones en función de todos los posibles ordenes de llegada, se suman y se divide el total entre el número de permutaciones posibles. Por tanto, el agente uno recibiría 4,5€ ((7+2)/2) y el agente dos 2,5€ ((0+5)/2).

El objetivo de dicho proceder, es no beneficiar a aquellos que antes llegan cuando se ha declarado la bancarrota.

A continuación se muestra como se aplica la regla en el ejemplo de la constructora:

| ORDEN DE LLEGADA | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1234 | 70 | 40 | 0 | 0 |
| 1243 | 70 | 40 | 0 | 0 |
| 1324 | 70 | 0 | 40 | 0 |
| 1342 | 70 | 0 | 40 | 0 |
| 1423 | 70 | 30 | 0 | 10 |
| 1432 | 70 | 0 | 30 | 10 |
| 2134 | 40 | 70 | 0 | 0 |
| 2143 | 40 | 70 | 0 | 0 |
| 2314 | 0 | 70 | 40 | 0 |
| 2341 | 0 | 70 | 40 | 0 |
| 2413 | 30 | 70 | 0 | 10 |
| 2431 | 0 | 70 | 30 | 10 |
| 3124 | 60 | 0 | 50 | 0 |
| 3142 | 60 | 0 | 50 | 0 |
| 3214 | 0 | 60 | 50 | 0 |
| 3241 | 0 | 60 | 50 | 0 |
| 3412 | 50 | 0 | 50 | 10 |
| 3421 | 0 | 50 | 50 | 10 |
| 4123 | 70 | 30 | 0 | 10 |
| 4132 | 70 | 0 | 30 | 10 |
| 4213 | 30 | 70 | 0 | 10 |
| 4231 | 0 | 70 | 30 | 10 |
| 4312 | 50 | 0 | 50 | 10 |
| 4321 | 0 | 50 | 50 | 10 |
| SUMA | 920 | 920 | 680 | 120 |
| Asignación final | 38,33 | 38,33 | 28,33 | 5,00 |

*Tabla 3.1: Ejemplo de las asignaciones proporcionadas por la regla del orden de llegada según las posibles ordenaciones de los agentes.*

Denotando por $OL$ a esta regla, tendremos que:

$$OL(E,c) = (38'33, 38'33, 28'33, 5).$$

Por último, la Tabla 3.2 muestra las asignaciones proporcionadas por las distintas reglas de reparto al problema de bancarrota de la constructora "Ladrillovaladrilloviene S.A".

| | Regla proporcional | Regla de igual ganancia | Regla de igual pérdida | Regla del Talmud | Regla del orden de llegada |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1^*(c_1 = 70)$ | 38,5 | 33,33 | 43,33 | 40 | 38,33 |
| $x_2^*(c_2 = 70)$ | 38,5 | 33,33 | 43,33 | 40 | 38,33 |
| $x_3^*(c_3 = 50)$ | 27,5 | 33,33 | 23,33 | 25 | 28,33 |
| $x_4^*(c_4 = 10)$ | 5,5 | 10 | 0 | 5 | 5 |

*Tabla 3.2: Cuadro resumen de las asignaciones otorgadas por las reglas de reparto.*

## 3.6. RELACIÓN ENTRE ASIGNACIÓN OBTENIDA Y PRESUPUESTO DISPONIBLE

En este apartado se muestra gráficamente la relación que existe entre el porcentaje de las reclamaciones obtenidas por los agentes (eje de coordenadas) y el porcentaje de la reclamación agregada disponible para repartir (eje de abscisas).

En el caso de la regla de reparto proporcional, ambos porcentajes coinciden. Así, por ejemplo, si se dispone de un presupuesto de un 30% sobre la reclamación agregada, se asigna a cada agente el 30% de su reclamación. Pero esto no tiene porqué ocurrir con las otras reglas.

De este modo, de forma gráfica y tomando como base el ejemplo que hemos utilizado anteriormente, vamos a relacionar ambos porcentajes en las reglas de reparto consideradas. Esto es equivalente a comparar el reparto producido en cada una de ellas con el de la regla proporcional. Aunque los resultados obtenidos hacen referencia a un ejemplo concreto, el comportamiento de las reglas es similar cuando se toman vectores de reclamaciones diferentes.

### 3.6.1. Regla de reparto de igual ganancia: comportamiento gráfico

En el gráfico 3.1 se muestra la relación entre el porcentaje de las reclamaciones obtenidas por los agentes y el porcentaje de la reclamación agregada disponible para repartir cuando se considera la regla de igual ganancia.

Esta regla favorece a los agentes con las reclamaciones de menor cuantía, tales como $c_3$ y $c_4$, ya que dichos agentes siempre perciben un porcentaje mayor de sus respectivas reclamaciones que el que obtendrían de forma proporcional. Si la demanda de algún agente es muy pequeña puede ser compensada íntegramente, incluso cuando la cantidad del bien a repartir es ínfima. En el ejemplo se observa como la reclamación $c_4$ es abonada en su totalidad cuando el presupuesto representa el 10% de la reclamación agregada.

Los agentes demandantes de grandes cantidades son los perjudicados, al estar continuamente por debajo de la bisectriz marcada por la regla proporcional. Nunca percibirán la totalidad de sus reclamaciones como se puede ver con $c_1$ y $c_2$.

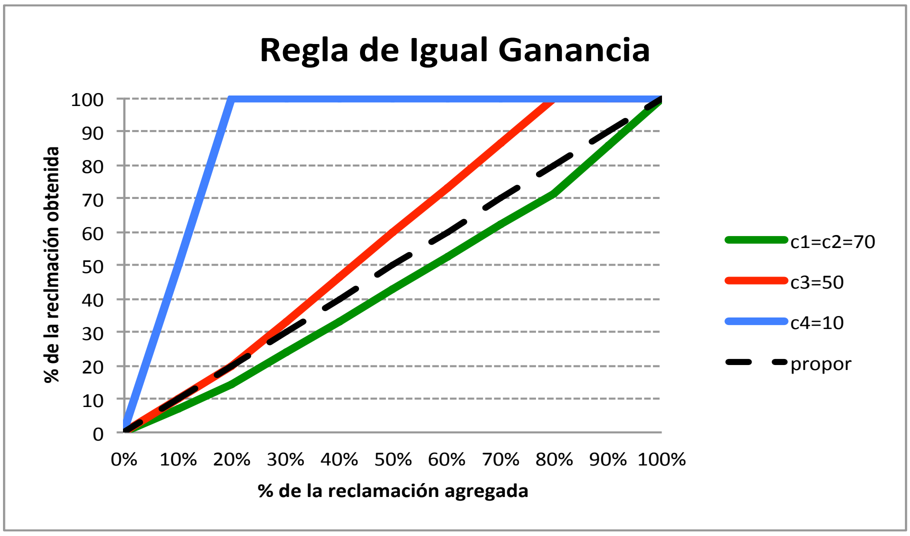



*Gráfico 3.1: Regla de reparto de igual ganancia. Comportamiento del porcentaje de las reclamaciones obtenidas ante la variación del porcentaje de la reclamación agregada.*

### 3.6.2. Regla de reparto de igual pérdida: comportamiento gráfico

El Gráfico 3.2 muestra la relación existente entre el porcentaje de las reclamaciones obtenidas por los agentes y el porcentaje de la reclamación agregada disponible para repartir cuando se considera la regla de igual pérdida.

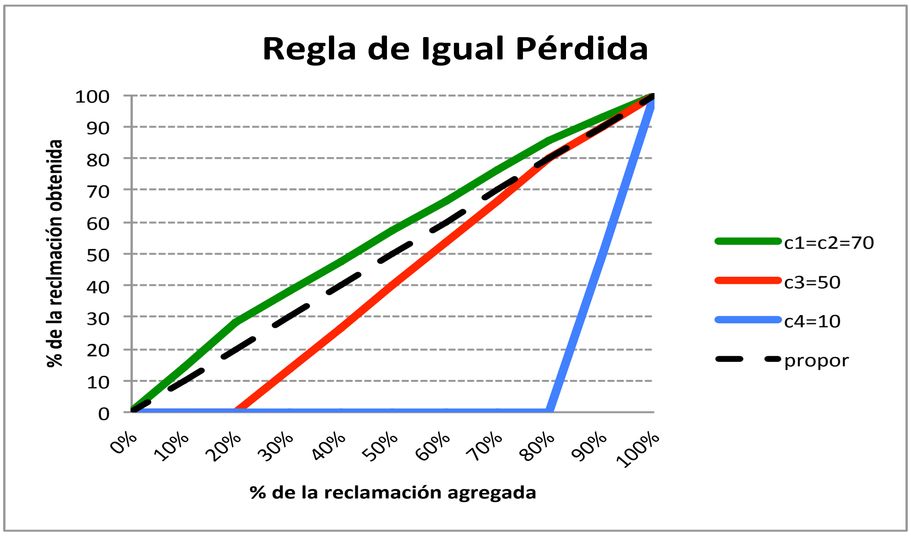



*Gráfico 3.2: Regla de reparto de igual pérdida. Comportamiento del porcentaje de las reclamaciones obtenidas ante la variación del porcentaje de la reclamación agregada.*

Esta regla se comporta de manera dual a como lo hace la regla de igual ganancia. Favorece a las reclamaciones de mayor cuantía y perjudica a las demandas menores ante cualquier presupuesto disponible. Si alguna reclamación es muy pequeña, dicho agente puede no recibir nada. En el gráfico se observa como el agente 4 no comienza a percibir nada de su reclamación $c_4$ hasta que el presupuesto no representa el 80%.

### 3.6.3. Regla del Talmud: comportamiento gráfico

A continuación, en el Gráfico 3.3 se muestra la relación entre el porcentaje de las reclamaciones obtenidas por los agentes y el porcentaje de la reclamación agregada disponible para repartir cuando se considera la regla del Talmud.

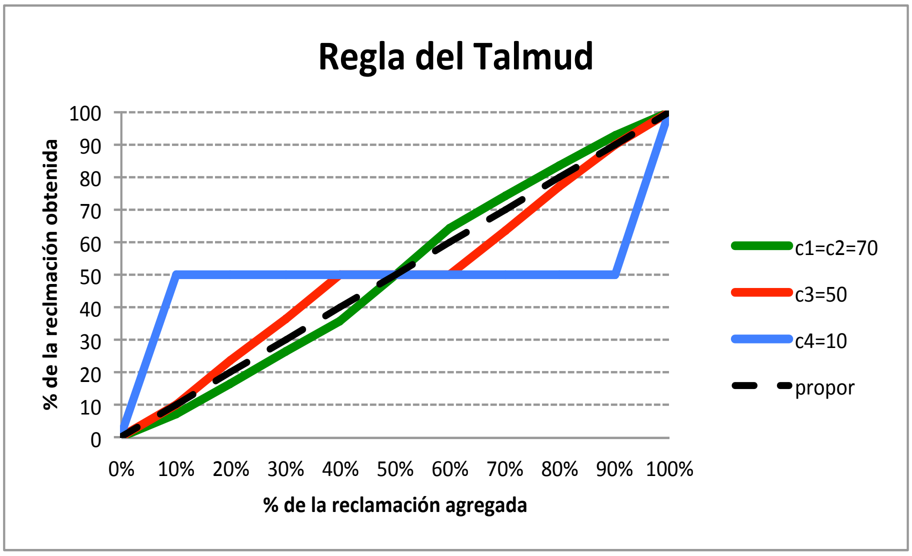



*Gráfico 3.3: Regla de reparto del Talmud. Comportamiento del porcentaje de las reclamaciones obtenidas ante la variación del porcentaje de la reclamación agregada.*

La regla del Talmud es una mezcla de las dos reglas de reparto anteriores. Gráficamente se podría representar cortando por la mitad las gráficas de las dos reglas anteriores y juntando la parte inferior de la regla de igual ganancia con la parte superior de la regla de igual pérdida.

De este modo, en el caso de que el presupuesto represente menos del 50% de la reclamación agregada, las reclamaciones menores son las que se ven beneficiadas, con la restricción de que ningún agente obtenga más del 50% de su reclamación. Por el contrario, cuando el presupuesto supera el 50% de la reclamación agregada, las demandas más grandes son las favorecidas. Lo que la diferencia de la regla de igual pérdida, es que ningún agente perderá más de la mitad de su reclamación.

### 3.6.4. Método de orden de llegada: comportamiento gráfico

Por último, el Gráfico 3.4 muestra la relación entre el porcentaje de las reclamaciones obtenidas por los agentes y el porcentaje de la reclamación agregada disponible para repartir cuando se considera la regla del orden de llegada.

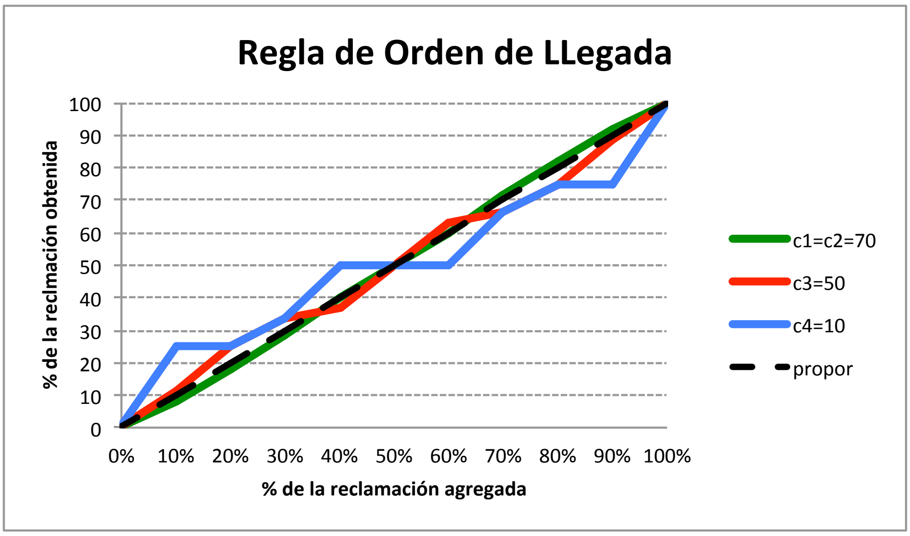



*Gráfico 3.4: Método de orden de llegada. Comportamiento del porcentaje de las reclamaciones obtenidas ante la variación del porcentaje de la reclamación agregada.*

En este caso, la regla del orden de llegada tiene un comportamiento idéntico a:

- La regla del Talmud y a la regla de Igual ganancia cuando el porcentaje de la reclamación agregada es inferior al 5%.
- La regla del Talmud y a la regla proporcional cuando dicho porcentaje es igual al 50%.
- La regla del Talmud y a la regla de Igual pérdida cuando el porcentaje de la reclamación agregada disponible es superior o igual al 95%.

Para el resto de porcentajes, la regla del orden de llegada se comporta de la siguiente forma: reclamaciones inferiores (superiores) como $c_4$ ($c_1$ y $c_2$) se ven beneficiadas (perjudicadas) cuando el porcentaje de la reclamación agregada es inferior al 50%, y perjudicadas (beneficiadas) cuando dicho porcentaje es superior. Las demandas como $c_3$, cuya cantidad reclamada se encuentra entre medias de los extremos, tienen un comportamiento atípico, ya que varia continuamente su posición con respecto a la regla proporcional.

# 4. PROPIEDADES DE LAS REGLAS DE REPARTO

En este apartado se explican nueve propiedades de las reglas de reparto. Aunque existan más, estas nueve son las más comunes y por lo tanto, las que estudiaremos a continuación. Se sigue a Villar (2005) en la forma de analizar las propiedades.

## 4.1 TRATAMIENTO IGUALITARIO (TI)

Es un criterio ético, ya que garantiza que todos los agentes son tratados por igual, ninguno goza de privilegios. Según esta propiedad, reclamaciones idénticas realizadas por distintos agentes obtienen idénticas asignaciones. Formalmente:

$$c_i = c_j \Longrightarrow F_i(E, c) = F_j(E, c).$$

## 4.2. INDEPENDENCIA DE ESCALA (IE)

El cumplimiento de esta propiedad asegura que las asignaciones son independientes de la unidad de medida. Por consiguiente factores como, por ejemplo, el tipo de divisa, no afectan al resultado del reparto del problema de bancarrota, es decir, son irrelevantes. Matemáticamente:

$$F(\lambda E, \lambda c) = \lambda F(E, c),$$

para cualquier $\lambda > 0$.

Cuando se verifica esta propiedad, la función que define a la regla de reparto es homogénea de grado uno.

## 4.3. COMPOSICIÓN HACIA ARRIBA (CAR)

Ante una variación al alza del presupuesto inicial disponible $E$, las asignaciones proporcionadas por la regla de reparto a los agentes serán las mismas tanto si se reparte el nuevo presupuesto $E'$ directamente, como si se reparte primero el presupuesto inicial y más tarde la variación $E'$-$E$. Formalmente:

$$E < E' \Rightarrow F(E', c) = F(E, c) + F\big(E' - E, c - F(E, c)\big).$$

Las asignaciones no varían si el reparto se realiza de una vez o secuencialmente. De este modo, según Villar (2005), cualquier problema de bancarrota se puede solucionar como la suma de dos sub-problemas. El primero, atañe al reparto de una parte del presupuesto con respecto a las demandas de los agentes. El segundo, correspondiente a la asignación del presupuesto sobrante.

## 4.4. COMPOSICIÓN HACIA ABAJO (CAB)

Esta propiedad hace referencia, contrariamente a la propiedad anterior, a una disminución del presupuesto inicial. En este caso, cada agente percibirá lo mismo ante el nuevo presupuesto $E'$, tanto si mantiene su reclamación inicial, como si reclama la cantidad que se le habría asignado con el presupuesto antiguo $E$. Matemáticamente:

$$E > E' \Rightarrow F(E', c) = F\big(E', F(E, c)\big).$$

Según Villar (2005), este criterio viene a decir que aunque la propuesta realizada pueda definir un nuevo statu quo, ello no debe afectar a la resolución final del problema.

## 4.5. CONSISTENCIA (CO)

Supongamos un presupuesto $E$ a repartir entre un grupo de $m$ agentes cuyo vector de reclamaciones es $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}_+^n$. Las asignaciones proporcionadas por la regla de reparto serán las recogidas por el vector $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) \in \mathbb{R}_+^n$. Ahora, presumamos que un subgrupo $s$ de los $m$ agentes ($s < m$) unen sus asignaciones para formar un “nuevo” presupuesto ( $x_1^* + x_2^* + \dots + x_s^* = E'$ ) y que lo reparten entre ellos sin alterar sus reclamaciones iniciales $(c_1, c_2, \dots, c_s)$. La propiedad de consistencia se verifica cuando las asignaciones otorgadas a dichos agentes son idénticas tanto en el nuevo problema de bancarrota $(E', (c_1, c_2, \dots, c_s))$ como en el inicial $(E, c)$.

Según Villar (2005), la cantidad repartida a cada uno de los agentes de un subgrupo del grupo total de agentes debe ser idéntica a la que lograrían si se efectúa un nuevo reparto para dicho subgrupo, con las mismas demandas iniciales, y donde, la suma de las asignaciones que recibirían en el reparto global es considerada como cantidad disponible. Por tanto, la propiedad de consistencia asegura que ningún agente tendrá incentivos en unir su reclamación con las demandas de otros agentes ya que las asignaciones finales no cambiarán ante dicha reclamación agregada. Formalmente:

$$S \subseteq M \Longrightarrow F_i(M, E, c) = F_i\left(S, \sum_{i \in S} F_i(M, E, c), (c_i)_{i \in S}\right),$$

siendo $(M, E, c)$ un problema con $m$ agentes.

## 4.6. AUTODUALIDAD (AD)

Un problema de bancarrota puede ser abordado como un problema de reparto de pérdidas, asignando el déficit entre todos los agentes.

La autodualidad es una propiedad de simetría. Ésta propiedad determina que las asignaciones finales serán las mismas tanto como si se reparte la cantidad disponible del bien, como si se distribuye el déficit entre los agentes. Por consiguiente:

$$c - F(C - E, c) = F(E, c).$$

Las siguientes tres propiedades compensan a los agentes en función de la cuantía de sus demandas y el presupuesto disponible.

## 4.7. EXENCIÓN (EXE)

La propiedad de exención determina que los agentes cuyas reclamaciones sean inferiores a una cierta cantidad $(\alpha)$ serán otorgadas de forma íntegra. Formalmente:

$$c_i \leq \alpha \Longrightarrow F_i(E, c) = c_i.$$

Las reglas utilizadas para solucionar las bancarrotas de las entidades financieras deben cumplir dicha propiedad, ya que el Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito recogido en el Real Decreto-ley 16/2011, del 14 de octubre, tiene por objeto garantizar los depósitos de hasta 100.000 euros a los inversores de una entidad de crédito.

### 4.8. EXCLUSIÓN (EXC)

La propiedad de exclusión, por el contrario, establece que los agentes cuyas reclamaciones sean inferiores a una cierta cantidad $(\alpha)$ serán ignoradas. Matemáticamente:

$$c_i \leq \alpha \Longrightarrow F_i(E, c) = 0.$$

Esta propiedad se tiene en cuenta, por ejemplo, en rondas de financiación de Startup, donde en ocasiones se exige un mínimo de inversión o facturación para poder optar a dicha financiación.

### 4.9. ASEGURAMIENTO (AS)

Finalmente, la propiedad de aseguramiento certifica que todos los agentes recibirán una cierta cantidad de sus respectivas reclamaciones, con independencia de las demandas de los otros agentes. La asignación mínima de cada agente dependerá de tres factores: su reclamación, el número de agentes y el presupuesto. Obviamente, son infinitas las posibles cantidades que se pueden asegurar a cada agente. Por ejemplo, Villar (2005), propone que si la reclamación individual es inferior al presupuesto, dicho agente percibirá, como mínimo, el valor de su reclamación dividido entre el número de agentes. Si, por el contrario, la demanda es superior al presupuesto, dicho agente recibirá, como mínimo, el valor del presupuesto dividido entre el número de agentes. Formalmente:

$$F_i(E, c) \geq \frac{1}{m} min\{c_i, E\}.$$

# 5. CARACTERIZACIONES DE LAS REGLAS CLÁSICAS DE REPARTO

El conocimiento de las caracterizaciones de las reglas clásicas de reparto facilitará la labor del juez imparcial a la hora de elegir que regla aplicar. La Tabla 5.1 muestra el cumplimiento de las propiedades de las cuatro reglas de reparto clásicas. Por ejemplo, si el juez considera que las propiedades prioritarias que deben ser acatadas a la hora de repartir el presupuesto son AD y CAB, la regla de reparto proporcional será la elegida.

| | Proporcional | Igual Ganancia | Igual Pérdida | Talmud |
|---|---|---|---|---|
| Tratamiento igualitario | *SI* | *SI* | *SI* | *SI* |
| Independencia de escala | *SI* | *SI* | *SI* | *SI* |
| Composición hacia arriba | *SI* | *SI* | *SI* | |
| Composición hacia abajo | *SI* | *SI* | *SI* | |
| Consistencia | *SI* | *SI* | *SI* | *SI* |
| Autodualidad | *SI* | | | *SI* |
| Exención | | *SI* | | |
| Exclusión | | | *SI* | |
| Aseguramiento | | *SI* | | *SI* |

*Tabla 5.1: Relación entre las reglas clásicas y las propiedades de las reglas de reparto. Fuente: Martínez y Meneses (2011).*

A lo largo de las últimas décadas, diversos autores han demostrado que diferentes combinaciones de las nueve propiedades caracterizan ciertas reglas clásicas de reparto.

Young (1998) demostró que la única regla que cumple las propiedades CAR y AD es la regla proporcional.

Dos años más tarde, Moulin (2000) probó que la regla proporcional, la regla de igual ganancia y la regla de igual pérdida, son las únicas que verifican simultáneamente las propiedades TI, IS, CAR, CAB, y CO.

Al año siguiente, Herrero y Villar (2001) demostraron que la regla de igual ganancia es la única que cumple CAB, CO y EXE, mientras que la regla de igual pérdida es la única que verifica CAB, CO y EXC.

Thompson (2003) demostró una caracterización semejante a la expuesta por Young en 1998, verificando que la regla proporcional es también la única regla que cumple CAB y AD.

Por último, un año más tarde, Moreno-Ternero y Villar (2004) probaron que la regla del Talmud es la única que cumple las propiedades CO, AD y AS.

Respecto de la regla del orden de llegada, vemos que propiedades no se verifican con una serie de contraejemplos. Supongamos los siguientes casos:

1. $OL\big(100,(70{,}50{,}3)\big) = (59{,}39{,}2)$.
2. $OL\big(110,(70{,}50{,}3)\big) = (64{,}44{,}2)$.
3. $OL\big(10,(70{,}50{,}3)\big) = (4'5, 4'5, 1)$.
4. $OL\big(70,(70{,}50{,}3)\big) = (43'5, 25, 1'5)$.
5. $OL\big(70,(59{,}39{,}2)\big) = (44'33, 24'33, 1'33)$.
6. $OL\big(41,(50{,}3)\big) = (39'5, 1'5)$.

Los casos 1, 2 y 3 muestran el incumplimiento de la propiedad CAR ya que las asignaciones del caso 2 no son iguales a la suma de las asignaciones de los casos 1 y 3 $(59 + 4'5 \neq 64)$.

Los casos 1,4 y 5 muestran el incumplimiento de la propiedad CAB ya que las asignaciones de los casos 4 y 5 no son iguales.

Los casos 1 y 6 muestran el incumplimiento de la propiedad CO ya que las asignaciones de los dos últimos agentes no son iguales en ambos casos.

Todos los casos muestran que la propiedad EXC no se cumple ya que el agente que sólo reclama 3 euros obtiene una cantidad positiva y por lo tanto, no es excluido del reparto.

# 6. OBTENCIÓN DE LAS ASIGNACIONES UTILIZANDO HOJAS DE CÁLCULO "EXCEL"

El objetivo de realizar hojas de cálculo es proporcionar de manera automática las asignaciones otorgadas por las cinco reglas de reparto consideradas ante cualquier problema de bancarrota con un número máximo de seis agentes, excepto para la regla de orden de llegada donde el máximo será de cuatro agentes.

El libro de Excel se adjunta al trabajo en un CD en el cual es posible ver las hojas de cálculo utilizadas al detalle. A continuación se explica de forma breve el contenido de las mismas.

En la Imagen 6.1 se observa la hoja denominada "resumen" y en ella se muestran las asignaciones finales proporcionadas a cada agente por las reglas de reparto consideradas. En esta hoja de cálculo es donde se introducen los datos concernientes a las reclamaciones de los $m$ agentes y el presupuesto disponible $E$, que servirán para el resto de hojas.

| | |
|---|---|
| PRESUPUESTO | 110 |
| DEFICIT | 90 |

| | c | Proprorcional | IG | IP | Talmud | Orden de llegada |
|---|---|---|---|---|---|---|
| AGENTE 1 | 70 | 38,50 | 33,33 | 43,33 | 40,00 | 38,33 |
| AGENTE 2 | 70 | 38,50 | 33,33 | 43,33 | 40,00 | 38,33 |
| AGENTE 3 | 50 | 27,50 | 33,33 | 23,33 | 25,00 | 28,33 |
| AGENTE 4 | 10 | 5,50 | 10,00 | - | 5,00 | 5,00 |
| AGENTE 5 | 0 | - | - | - | - | - |
| AGENTE 6 | 0 | - | - | - | - | - |
| TOTAL | 200 | 110,00 | 110,00 | 110,00 | 110,00 | 110,00 |

*Imagen 6.1: Hoja de cálculo "resumen".*

La Imagen 6.2 hace referencia a la hoja apodada "Regla Proporcional", en la cual se muestran las asignaciones proporcionadas por dicha regla. A partir de los datos introducidos en la hoja "resumen" se define el coeficiente de proporcionalidad que permite obtener las asignaciones.

| | |
|---|---|
| E | 110 |

| | Reclamaciones | Asignaciones |
|---|---|---|
| Agente 1 | 70 | 38,5 |
| Agente 2 | 70 | 38,5 |
| Agente 3 | 50 | 27,5 |
| Agente 4 | 10 | 5,5 |
| Agente 5 | 0 | 0 |
| Agente 6 | 0 | 0 |
| C | 200 | |
| σ | 0,55 | |

*Imagen 6.2: Hoja de cálculo "Regla Proporcional".*

En la Imagen 6.3 se observa la hoja llamada “Igual ganancia” y en ella se muestra el procedimiento llevado a cabo para obtener las asignaciones proporcionadas por dicha regla. El proceso es el siguiente: se elaboran cinco rondas, cada una de ellas verifica que las reclamaciones cumplen la restricción de que ningún agente perciba más de lo reclamado. En el caso de algún agente no cumpla dicha restricción, se le otorgará su reclamación de forma integra y no se le tiene en cuenta en las rondas siguientes. Las asignaciones finales serán igual a la suma de las asignaciones obtenidas a lo largo de las cinco rondas. El número de rondas debe ser igual al número de agentes menos uno. Esto se debe a que el incumplimiento de la restricción por alguno de los agentes implicados puede darse hasta la ronda $(m-1)$.

| Ronda 1 | | | Ronda 2 | | | … | Ronda 5 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cumple restricción | Asignacion 1 | beneficiados | Cumple restricción | Asignación 2 | beneficiados | | Cumple restricción | Asignación 5 | Beneficiados | ASIGNACIONES FINALES |
| VERDADERO | 0 | 0 | VERDADERO | 0 | 0 | | VERDADERO | 0 | 0 | 33,33 |
| VERDADERO | 0 | 0 | VERDADERO | 0 | 0 | | VERDADERO | 0 | 0 | 33,33 |
| VERDADERO | 0 | 0 | VERDADERO | 0 | 0 | | VERDADERO | 0 | 0 | 33,33 |
| FALSO | 10 | 1 | FALSO | 0 | 0 | | FALSO | 0 | 0 | 10 |
| FALSO | 0 | 0 | FALSO | 0 | 0 | | FALSO | 0 | 0 | 0 |
| FALSO | 0 | 0 | FALSO | 0 | 0 | | FALSO | 0 | 0 | 0 |
| Total ronda 1 | 10 | 1 | Total ronda 2 | 0 | 0 | | Total ronda 5 | 0 | 0 | 110 |

| | |
|---|---|
| E-1ºronda | 100 |
| m-1º ronda | 3 |
| λ | 33,33 |

| | |
|---|---|
| E-2ºronda | 100 |
| m-2º ronda | 3 |
| λ | 33,33 |

| | Reclamaciones | Asignaciones |
|---|---|---|
| Agente 1 | 70 | 33,33 |
| Agente 2 | 70 | 33,33 |
| Agente 3 | 50 | 33,33 |
| Agente 4 | 10 | 10 |
| Agente 5 | 0 | 0 |
| Agente 6 | 0 | 0 |

*Imagen 6.3: Hoja de cálculo “Igual ganancia”.*

La Imagen 6.4 hace referencia a la hoja denominada “Igual pérdida”, en la cual se muestra el procedimiento llevado a cabo para obtener las asignaciones proporcionadas por dicha regla. El proceso es el mismo que el de la hoja anterior, pero bajo la restricción de que a ningún agente se le asigne un déficit superior a la cuantía de su reclamación.

| Ronda 1 | | | Ronda 2 | | | … | Ronda 5 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cumple restricción | Asignacion 1 | beneficiados | Cumple restricción | Asignación 2 | beneficiados | | Cumple restricción | Asignación 5 | Beneficiados | ASIGNACIONES FINALES |
| VERDADERO | 0 | 0 | VERDADERO | 0 | 0 | | VERDADERO | 0 | 0 | 26,67 |
| VERDADERO | 0 | 0 | VERDADERO | 0 | 0 | | VERDADERO | 0 | 0 | 26,67 |
| VERDADERO | 0 | 0 | VERDADERO | 0 | 0 | | VERDADERO | 0 | 0 | 26,67 |
| FALSO | 10 | 1 | FALSO | 0 | 0 | | FALSO | 0 | 0 | 10 |
| FALSO | 0 | 0 | FALSO | 0 | 0 | | FALSO | 0 | 0 | 0 |
| FALSO | 0 | 0 | FALSO | 0 | 0 | | FALSO | 0 | 0 | 0 |
| Total ronda 1 | 10 | 1 | Total ronda 2 | 0 | 0 | | Total ronda 5 | 0 | 0 | 90 |

| | |
|---|---|
| Def-1ºronda | 80 |
| m-1º ronda | 3 |
| µ | 26,67 |

| | |
|---|---|
| Def-2ºronda | 80 |
| m-2º ronda | 3 |
| µ | 26,67 |

| | Reclmaciones | Asignacion de deficit | Asignaciones |
|---|---|---|---|
| Agente 1 | 70 | 26,67 | 43,33 |
| Agente 2 | 70 | 26,67 | 43,33 |
| Agente 3 | 50 | 26,67 | 23,33 |
| Agente 4 | 10 | 10 | 0 |
| Agente 5 | 0 | 0 | 0 |
| Agente 6 | 0 | 0 | 0 |
| TOTAL | 200 | 90 | 110 |

*Imagen 6.4: Hoja de cálculo “Igual pérdida”.*

Las siguientes dos hojas llamadas “Igual ganancia Talmud” e “Igual pérdida Talmud”, muestran el procedimiento llevado a cabo para obtener las asignaciones proporcionadas por la regla del Talmud. Cuando el presupuesto es superior (inferior) a la mitad de la reclamación agregada las asignaciones expuestas en la hoja “resumen”, serán las otorgadas por la hoja “Igual pérdida Talmud” (“Igual ganancia Talmud”). En el ejemplo de la constructora, el presupuesto es superior, luego las soluciones coinciden con las de la hoja “Igual pérdida Talmud”. Por tanto, se repite el procedimiento de la hoja anterior con la restricción de que ningún agente reciba un déficit superior a la mitad de su reclamación.

| Ronda 1 | | | Ronda 2 | | | … | Ronda 5 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cumple restricción | Asignacion 1 | beneficiados | Cumple restricción | Asignación 2 | beneficiados | | Cumple restricción | Asignación 5 | Beneficiados | ASIGNACIONES FINALES |
| VERDADERO | 0 | 0 | VERDADERO | 0 | 0 | | VERDADERO | 0 | 0 | 30 |
| VERDADERO | 0 | 0 | VERDADERO | 0 | 0 | | VERDADERO | 0 | 0 | 30 |
| VERDADERO | 0 | 0 | FALSO | 25 | 1 | | FALSO | 0 | 0 | 25 |
| FALSO | 5 | 1 | FALSO | 0 | 0 | | FALSO | 0 | 0 | 5 |
| FALSO | 0 | 0 | FALSO | 0 | 0 | | FALSO | 0 | 0 | 0 |
| FALSO | 0 | 0 | FALSO | 0 | 0 | | FALSO | 0 | 0 | 0 |
| Total ronda 1 | 5 | 1 | Total ronda 2 | 25 | 1 | | Total ronda 5 | 0 | 0 | 90 |

| | |
|---|---|
| Def-1ºronda | 85 |
| m-1º ronda | 3 |
| µ | 28,33333333 |

| | |
|---|---|
| Def-2ºronda | 60 |
| m-2º ronda | 2 |
| µ | 30 |

| | Reclmaciones | Asignacion de deficit | Asignaciones |
|---|---|---|---|
| Agente 1 | 70 | 30 | 40 |
| Agente 2 | 70 | 30 | 40 |
| Agente 3 | 50 | 25 | 25 |
| Agente 4 | 10 | 5 | 5 |
| Agente 5 | 0 | 0 | 0 |
| Agente 6 | 0 | 0 | 0 |
| TOTAL | 200 | 90 | 110 |

*Imagen 6.5: Hoja de cálculo “Igual pérdida Talmud”.*

La séptima hoja, que lleva el nombre de “orden de llegada”, muestra el procedimiento llevado a cabo para obtener las asignaciones proporcionadas por esta regla. La tabla realizada en Excel para obtener las asignaciones de dicha regla corresponde a la Tabla 3.5 del trabajo.

Finalmente, en la Imagen 6.6 se observa la última hoja de cálculo denominada “gráficas” y en ella se encuentran los datos que originan las gráficas del apartado 3 del trabajo.

| Igual Ganancia | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0% | 10% | 20% | 30% | 40% | 50% | 60% | 70% | 80% | 90% | 100% |
| c1=c2=70 | 0 | 7,14 | 14,28 | 23,81 | 33,33 | 42,85 | 52,38 | 61,9 | 71,42 | 85,71 | 100 |
| c3=50 | 0 | 10 | 20 | 33,33 | 46,66 | 60 | 73,33 | 86,66 | 100 | 100 | 100 |
| c4=10 | 0 | 50 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| propor | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

| Igual Pérdida | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0% | 10% | 20% | 30% | 40% | 50% | 60% | 70% | 80% | 90% | 100% |
| c1=c2=70 | 0 | 14,28 | 28,57 | 38,09 | 47,62 | 57,14 | 66,66 | 76,19 | 85,71 | 92,85 | 100 |
| c3=50 | 0 | 0 | 0 | 13,33 | 26,66 | 40 | 53,33 | 66,66 | 80 | 90 | 100 |
| c4=10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 | 100 |
| propor | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

| Talmud | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0% | 10% | 20% | 30% | 40% | 50% | 60% | 70% | 80% | 90% | 100% |
| c1=c2=70 | 0 | 7,14 | 16,66 | 26,19 | 35,71 | 50 | 64,28 | 73,81 | 83,33 | 92,85 | 100 |
| c3=50 | 0 | 10 | 23,33 | 36,66 | 50 | 50 | 50 | 63,33 | 76,66 | 90 | 100 |
| c4=10 | 0 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 100 |
| propor | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

| Orden de llegada | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0% | 10% | 20% | 30% | 40% | 50% | 60% | 70% | 80% | 90% | 100% |
| c1=c2=70 | 0 | 8,33 | 17,85 | 28,57 | 40,47 | 50 | 59,52 | 71,42 | 82,14 | 91,66 | 100 |
| c3=50 | 0 | 11,66 | 25 | 33,33 | 36,66 | 50 | 63,33 | 66,66 | 75 | 88,33 | 100 |
| c4=10 | 0 | 25 | 25 | 33,33 | 50 | 50 | 50 | 66,66 | 75 | 75 | 100 |
| propor | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

*Imagen 6.6: Hoja de cálculo “gráficas”.*

# 7. APLICACIÓN DE LAS REGLAS DE REPARTO: CONFEDERACIÓN HIDROGRÁFICA DEL SEGURA

En la cuenca hidrográfica del Segura, situada en la Región de Murcia, los recursos hídricos disponibles son inferiores a las demandas hídricas de la zona. Por tanto, su reparto se puede interpretar como un problema de bancarrota.

## 7.1. RECURSOS HÍDRICOS DE LA CUENCA DEL SEGURA: PRESUPUESTO

Los recursos hídricos de la cuenca del Segura representan el presupuesto del problema de bancarrota a tratar. Según la Confederación Hidrográfica del Segura (2016), el Libro Digital del Agua (2007), el Libro blanco del agua en España (2000) y Embalses.net (2016), los factores que componen dicho presupuesto son los siguientes:

- La escorrentía: supone casi un 70% del presupuesto. Las precipitaciones son su principal causa y por consiguiente, en épocas de sequia, el volumen del presupuesto se verá significativamente afectado de manera negativa.
- Embalses que constituyen la cuenca del Segura: representan el segundo factor más relevante de los recursos hídricos de la zona. Algunos embalses de la zona son Fuensanta, Talave, Cenajo, Camarillas y La Pedrera entre otros.
- El trasvase: procede de los embalses de Buendía y Entrepeñas, ubicados en la cuenca del Tajo. La cantidad de agua trasvasada varía en función del volumen de estos dos embalses.
- Reutilización y desalación: ambos representan nuevos métodos de obtención de agua dulce y por lo tanto, aumentan el volumen de los recursos hídricos.

El dato correspondiente a la escorrentía total hace referencia al volumen medio del periodo comprendido entre 1940/41 y 2009/2010. El resto de datos corresponden a finales de agosto de 2016. De esta forma, el presupuesto que consideraremos viene recogido en la siguiente tabla.

| | Volumen ($Hm^3$/año) | % presupuesto |
|---|---|---|
| [1]**Escorrentía total** | 1005 | 67,58 |
| **Embalses** | 210 | 14,12 |
| **Trasvase** | 36 | 2,42 |
| **Reutilización** | 70,08 | 4,71 |
| **Desalación** | 165,96 | 11,16 |
| **TOTAL** | 1487,04 | 100 |

*Tabla 7.1: Composición del presupuesto.*
*Fuentes: Confederación Hidrográfica del Segura, Libro Digital del Agua, Libro blanco del agua en España y Embalses.net, año 2016.*

[1] [1] *"La escorrentía total es la suma de la escorrentía superficial que se genera directamente a partir de la precipitación y la escorrentía subterránea, equivale al recurso hídrico por unidad de superficie (o aportación específica total)." (http://servicios2.marm.es/sia/visualizacion/lda/recursos/superficiales_escorrentia.jsp, 31/10/2016).*

## 7.2. DEMANDA DE LA CONFEDERACIÓN HIDROGRÁFICA DEL SEGURA

Según el Libro Digital del Agua (2007), la Tabla 7.2 muestra una síntesis de los análisis de la demanda hídrica en España recogidos en el Libro Blanco del Agua en España (2000). En nuestro caso, se exponen las reclamaciones correspondientes a la cuenca del Segura.

| | Volumen ($Hm^3$/año) |
|---|---|
| **Demanda urbana** | 172 |
| **Demanda industrial** | 23 |
| **Demanda agrícola** | 1639 |
| ***Total*** | *1834* |

*Tabla 7.2: Reclamaciones de la Región de Murcia.*
*Fuente: Libro Digital del Agua (2007).*

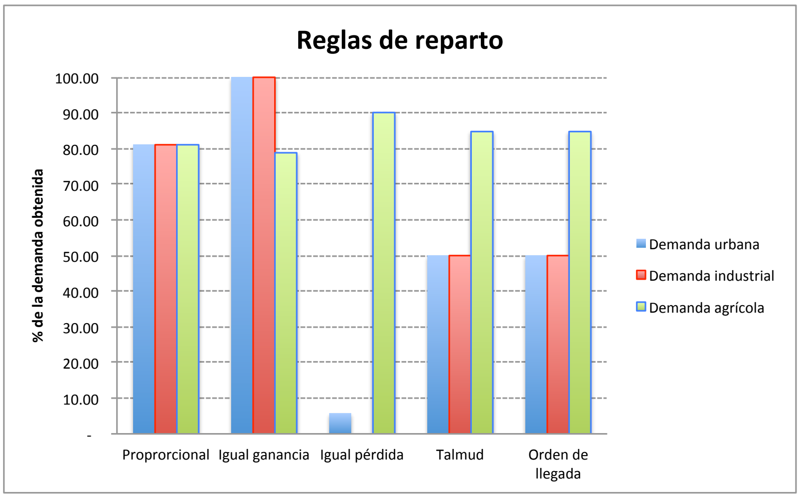
La Región de Murcia es una de las mayores productoras de frutas, verduras y flores de toda Europa, de ahí que la demanda hídrica del sector agrícola suponga el 90% de la demanda agregada.

## 7.3. RESOLUCIÓN DEL CASO PRÁCTICO

En la Tabla 7.3 y en la Gráfica 7.1 se muestran las soluciones proporcionadas por las reglas de reparto analizadas en este trabajo ante dicho problema de bancarrota donde el presupuesto es de 1487,04 $hm^3$ (80% de la demanda agregada).

| | Reclamaciones | Proporcional | Igual ganancia | Igual pérdida | Talmud | Orden de llegada |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Demanda urbana** | 172 | 139,46 | 172 | 10,02 | 86 | 86 |
| **Demanda industrial** | 23 | 18,65 | 23 | 0 | 11,5 | 11,5 |
| **Demanda agrícola** | 1639 | 1328,93 | 1292,04 | 1477,02 | 1389,54 | 1389,54 |
| **TOTAL** | 1834 | 1487,04 | 1487,04 | 1487,04 | 1487,04 | 1487,04 |

*Tabla 7.3: Soluciones de las reglas de reparto al problema de bancarrota.*




*Gráfica 7.1: Porcentaje de las demandas obtenidas con las distintas reglas de reparto.*

La regla de reparto proporcional otorgaría el 80% de las reclamaciones a sus respectivos agentes. A primera vista, puede parecer un reparto justo ya que se les otorga el mismo porcentaje a cada agente. No obstante, asignar un 80% de la demanda de agua urbana supondría que algunas familias tuvieran serias dificultades para cubrir sus necesidades hídricas básicas.

La regla de reparto de igual pérdida desatendería por completo la demanda industrial de la zona y asignaría menos del 10% a la demanda urbana, para poder satisfacer completamente la demanda agrícola. Aunque la región de Murcia dependa mayoritariamente del sector agrícola, este reparto acabaría con la industria de la región y lo que es peor, dejaría sin agua a muchas familias.

Las reglas del Talmud y del orden de llegada funcionan igual en este caso. Mientras que las demandas urbana e industrial perciben la mitad de sus reclamaciones, el sector agrícola recibe más del 80% de su demanda. El problema de este reparto es el mismo que en las reglas anteriores.

La regla de igual ganancia asigna el 100% de la demanda urbana e industrial y menos del 80% de la demanda agrícola. Por tanto, la regla por la que optaríamos en el problema de bancarrota de la cuenca hidrográfica del Segura sería la regla de igual ganancia. Los criterios que nos llevan a tomar esta decisión son los siguientes:

- La demanda hídrica urbana es una necesidad básica y debe de ser cubierta en su totalidad.
- Los recursos hídricos son muy volátiles por lo que la regla elegida conviene que verifique las propiedades CAR, CAB y AS.
- La cantidad de agua trasvasada también es voluble, depende del volumen de agua embalsado en los embalses de Buendía y Entrepeñas, y por lo tanto, la propiedad CO debe cumplirse para evitar posibles intereses políticos en modificar dicho volumen de agua trasvasado.

Esta solución se ha adoptado en función de las reglas contempladas, pudiendo variar si se tuvieran en cuenta otras reglas.

## 8. CONCLUSIONES

Los problemas de bancarrota están presentes en nuestra sociedad. Su naturaleza es muy diversa ya que aparecen en cualquier situación que cumpla las siguientes condiciones: que la demanda agregada es superior a la cantidad del bien a repartir; y que el bien a repartir sea perfectamente divisible.

Las reglas de reparto son las herramientas necesarias para resolver los problemas de bancarrota. El conocimiento detallado de las reglas facilita la elección de qué herramienta se debe utilizar en cada ocasión.

Las reglas clásicas de reparto son las más utilizadas y estudiadas hasta la fecha. Diversos autores han demostrado que ciertas combinaciones de las nueve propiedades caracterizan a las reglas clásicas de reparto.

En lo referente a la regla del método de orden de llegada, aunque se desconocen las propiedades que caracterizan esta regla, se ha comprobado el incumplimiento de las propiedades CAR, CAB, CO y EXC,

Dependiendo del presupuesto inicial y la reclamación agregada, las asignaciones proporcionadas por ciertas reglas coinciden en algunos casos. Así pues, la regla del Talmud se comporta igual que la regla de igual ganancia cuando el presupuesto es pequeño, como la regla proporcional cuando el presupuesto es igual a la mitad de la reclamación agregada y como la regla de igual pérdida cuando el presupuesto es grande.

Un juez, conocedor de las reglas de reparto disponibles y de las repercusiones de las mismas, es el encargado de elegir la regla más "justa" para cada ocasión. Herramientas que ayuden a simular los repartos en función de las diferentes reglas facilitan la labor del juez imparcial. Las hojas de cálculo elaboradas pueden ser un ejemplo de cómo ayudar a tomar decisiones de un modo más fácil y ágil.

## 9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:


Agencia Estatal (2011): "Real Decreto-ley 16/2011, de 14 de octubre, por el que se crea el Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito". *Boletín Oficial del Estado*, 249, pp.107985-107993.

Aumann, R.J. y Maschler, M. (1985): "Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud". *Journal of Economic Theory*, 26, pp. 195- 213.

Embalses.net (2016): Disponible en http://www.embalses.net/cuenca-1-segura.html. (consulta:16/10/2016).

Espinel, M.C. (2007): "El reparto de lo escaso". UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 10, pp. 95-108.

Guerrero, M. Hinojosa, M.A. y Sánchez, F.J. (2003): "Teoría de juegos aplicada a problemas de bancarrota". *Rect@* 11(1):55, pp.1-10.

Herrero, C. y Villar, A. (2001): "The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy poblems". *Mathematical Social Sciences*, 42, pp. 307-328.

Martínez, M. y Meneses, L.C. (2011): "Propuesta para seleccionar una solución en un problema de bancarrota". *Anales de Asepuma* 19, 0113, pp. 1-25.

Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente (2016): "Libro digital del agua". Disponible en http://servicios2.marm.es/sia/visualizacion/lda/ (consulta:16/10/2016).

Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente (2016): "Libro blanco del agua en España". Disponible en http://www.mapama.gob.es/es/agua/temas/planificacion-hidrologica/sintesis_tcm7-28955.pdf (consulta:16/10/2016).

Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente (2016): "Confederación hidrográfica del Segura". Disponible en https://www.chsegura.es/chs/index.html (consulta:16/10/2016).

Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente (2016): "Libro digital del agua". Disponible en http://servicios2.marm.es/sia/visualizacion/lda/recursos/superficiales_escorrentia.jsp (consulta:31/10/2016).

Moreno-Ternero, J. y Villar, A. (2004): "The Talmud Rule and the Securement of Agents' Awards". Mathematical Social Sciences, 47, pp. 255-257.

Moulin, H. (2000): "Priority Rules and Other Asymmetric Rationing Methods". *Econometrica*, 68 (3), pp. 643-684.

Robbins, L. (1932): *Ensayo sobre la Naturaleza y Significación de la Ciencia Económica*. Fondo de Cultura Económica, México.

Thomson, W. (2003): "Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey". *Mathematical Social Sciences*, 45, pp. 249-297.

Villar, A. (2005): "Cómo repartir cuando no hay bastante". *Lecturas de Economía*, 62, pp. 11-34.

Young, H.P. (1988): "Distributive Justice in Taxation". *Journal of Economic Theory*, 45, pp. 321-332.