Universidad de Valladolid

Facultad de Filosofía y Letras

Grado en Filosofía

Detrás de la noción de infinito. Sobre el problema de fundamentación de la matemática.

Verónica Gutiérrez Alejos

Tutor: Juan Barba Escribá

1ª Convocatoria: 20/06/2017

DETRÁS DE LA NOCIÓN DE INFINITO. SOBRE EL PROBLEMA DE FUNDAMENTACIÓN DE LA MATEMÁTICA.

Índice

1. INTRODUCCIÓN 2
2. CONTEXTO HISTÓRICO..5
3. LA OBRA DE GEORGE CANTOR. 8
    3.1 Ordinales y cardinales.. 10
    3.3 Teorema de Cantor e hipótesis del continuo....................................... 13
    3.4 Paradoja de Burali - Forti... 15
4. EL PROGRAMA FUNDACIONAL DE FREGE. 17
    4.1 El logicismo. 17
    4.2 La paradoja de Russell.. 18
    4.3 Las paradojas de la definibilidad 19
5. TEORÍA AXIOMÁTICA DE CONJUNTOS..23
    5.1 El programa axiomático de Zermelo 23
    5.2 Problemas y críticas 26
    5.3 Realismo y Anti-realismo 28
6. EL PROGRAMA DE HILBERT..32
    6.1 La reacción de Hilbert contra el intuicionismo.................................... 32
    6.2 Los enunciados finitistas... 32
    6.3 El programa finitista 33
7. LOS TEOREMAS DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL...........................36
    7.1 Los teoremas de Incompletitud.. 36
    7.4 Consecuencias.. 40
8. ¿CUÁL ES LA SITUACIÓN ACTUAL? CONCLUSIONES. 42
    8.1 La independencia de la hipótesis del Continuo.................................... 42
    8.2 Propuestas actuales... 44

BIBLIOGRAFÍA...47

1. INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es estudiar el origen y desarrollo de la cuestión relativa a la fundamentación de la matemática a partir de la segunda mitad del siglo XIX, atendiendo a las motivaciones principales que impulsaron las diferentes propuestas. Realizaremos un análisis de las mismas y veremos cómo cada una de ellas ha tenido que enfrentarse a las paradojas y cuestiones problemáticas que aparecían en sus predecesoras. Sin embargo, hay que tener presente que lo que aquí exponemos no pretende ser una reconstrucción histórica fidedigna. Hemos preferido dejar de lado las cuestiones de carácter histórico para centrarnos en las preocupaciones filosóficas que van dando lugar a las diferentes corrientes.

En el segundo capítulo veremos de una forma muy breve y general como a partir del siglo XIX comienza a incrementarse la preocupación por los fundamentos de la matemática. Aunque suele hablarse de una crisis de fundamentación que sumió a los matemáticos en una frenética búsqueda de certeza, eso parece más una leyenda que una realidad; los matemáticos nunca han dejado de hacer su trabajo. Es más adecuado decir que a partir de este momento la naturaleza de la matemática se torna también objeto de estudio y se incrementa la preocupación por su rigor. A pesar de que en la matemática siempre han aparecido cuestiones sorprendentes y aparentemente anti-intuitivas, e incluso paradojas, derivadas de los nuevos descubrimientos o de la introducción de elementos en sus teorías; en el siglo XIX se hace patente más que nunca la necesidad de dotar al estudio de la matemática de una rigurosidad específica.

En el siguiente capítulo nos acercaremos a la obra de George Cantor, quien en su estudio del continuo llevó a cabo una serie de descubrimientos que terminarían conformando, aunque no parece que esa fuese su principal motivación, lo que denominamos teoría de conjuntos.
En su obra “Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers” Cantor introduce la noción de agregado, lo que hoy denominamos conjunto, y la define como una colección de objetos que pueden considerarse como formando un todo. El número de elementos de un agregado determina su tamaño y esto es a lo que Cantor denominó potencia. Como veremos, con estas nociones Cantor demuestra, entre otras cosas relevantes, que el conjunto de los números reales es mayor (posee más elementos) que el de los números naturales. Teniendo en cuenta que ambos conjuntos son infinitos estamos ante algo así como ‘el descubrimiento de que existen infinitos de diferentes tamaños’, dicho en términos muy intuitivos.

El cuarto capítulo consiste en una introducción a la corriente filosófica de fundamentación de la matemática desarrollada por Frege y Russell: El logicismo. La característica principal de este enfoque es su pretensión de demostrar que la matemática está asentada sobre una base firme mediante una reducción de la misma a lógica. Con este objetivo, Frege desarrolló un sistema formal complejo que, sin embargo, resultó ser inconsistente.

Para comprender el problema con el que se encuentra debemos tener presente que para Frege la lógica consistía en una teoría de extensiones de conceptos.

Russell, tras encontrar el modo de derivar una contradicción del sistema formal de Frege retomó el proyecto fundacional, ahora con un doble objetivo: Reducir la matemática a la lógica y evitar la aparición de paradojas. Para ello, junto con Whitehead, elaboró lo que se conoce como la Teoría de Tipos, un sistema formal aún más riguroso que el de Frege basado en una construcción recursiva de niveles, donde cada uno de ellos sólo permitía predicar sobre los elementos de sus niveles inferiores. Esta teoría, sin embargo, nunca tuvo demasiado éxito, tal vez debido a su excesiva dificultad. Además, aunque es cierto que esta teoría sirve para evitar la aparición de ciertas paradojas, como la paradoja de Russell, hay otras, como las paradojas de la definibilidad, que pueden seguir reproduciéndose en este marco. Parece, pues, que lo que necesitamos para evitar paradojas y los elementos aparentemente contra-intuitivos que venimos viendo ya desde el siglo XVIII es un sistema axiomático que permita dar cuenta de nuestras intuiciones, pero de una forma lo suficientemente rigurosa como para evitar la aparición de contradicciones y consecuencias no deseadas.

En el capítulo quinto nos acercaremos, por este motivo, a la teoría axiomática de conjuntos conocida con las siglas ZF por ser la axiomatización que llevaron a cabo Zermelo y Fraenkel. Se necesitaba una teoría capaz de sistematizar los descubrimientos que se iban realizando, de encontrar unos axiomas de los que se pudiesen derivar todos los resultados relevantes que habían empezado a esbozarse ya en los trabajos de Cantor, al tiempo que se evitaba la aparición de paradojas. El punto de partida, a su vez, no podía ser la concepción de conjunto que encontramos en la obra de Frege, pues ya vimos que conducía a una contradicción. Para evitar problemas Zermelo va a afirmar que la teoría de conjuntos versa sobre un dominio $\mathfrak{B}$ de individuos u objetos, entre los cuales están los conjuntos.

Las diferentes corrientes dentro de la filosofía de la matemática se articulan en torno a dos polos opuestos: El realismo, y el anti-realismo. Lo que los primeros defienden es que los objetos y las verdades de la matemática existen, de forma independiente a nosotros; por lo que las teorías matemáticas deben entenderse como haciendo referencia a algo que en realidad existe. Para el anti-realismo, en cambio, esto no tiene sentido. Los objetos de la matemática son algo que construimos nosotros, al igual que las teorías matemáticas; motivo por el que nuestro proceder en la misma debe ser mucho más riguroso. A lo largo de este trabajo iremos considerando diversas corrientes de fundamentación de la matemática y veremos cuál es su posición con respecto a este eterno debate entre realismo y anti-realismo. Del mismo modo, veremos también cuáles son las consecuencias filosóficas derivadas de adoptar uno u otro punto de vista y como la conclusión a la que lleguemos, después de todo este recorrido a través de los diferentes intentos de fundamentación de la matemática, podrá variar en función de la perspectiva adoptada.

El sexto capítulo supone una introducción al programa fundacional de Hilbert: El programa finitista. Lo que Hilbert advirtió es que las paradojas que aparecían en la matemática no tenían su origen ni en la teoría de conjuntos como tal ni en sus axiomas, sino en el uso que se estaba haciendo de ellos. La fuente de las paradojas y lo que, por tanto, debía evitarse era el uso incorrecto de los axiomas en conjunción con una lógica problemática, una lógica que hacía un uso ilegítimo del infinito.

> […] so the modes of inference employing the infinite must be replaced generally by finite processes that have precisely the same results, that is, that permit us to carry out proofs along the same lines and to use the same methods of obtaining formulas and theorems. That, then, is the purpose of my theory.[1]

Clarificar la naturaleza del infinito, afirma, debe ser el punto de partida para poder elaborar una teoría que no dé lugar a paradojas y para elaborar un programa fundacional válido. El programa de Hilbert constaba de dos partes: Demostrar que la teoría de conjuntos, la aritmética y el análisis pueden formalizarse de forma precisa y demostrar que no puede derivarse ninguna falsedad finitista de ninguno de estos sistemas formales, de lo que deduce que estos deben ser consistentes.

Por último, en el capítulo séptimo, veremos como el descubrimiento de unos teoremas por parte de Gödel puso de manifiesto que la pretensión de Hilbert jamás podría llevarse a cabo. Muy a grandes rasgos, el primer teorema de la incompletitud demuestra que en todo sistema formal consistente con una cierta cantidad aritmética es posible encontrar una expresión indecidible; es decir, todo sistema formal de este tipo, si es consistente, será incompleto. El segundo teorema añade además que un sistema formal consistente no puede demostrar su propia consistencia.

Una vez demostrado que es imposible llevar a cabo la fundamentación que pretendía Hilbert, ¿Qué nos queda? Podemos pensar que la teoría que mejor parece dar cuenta de los aspectos más relevantes para la filosofía de la matemática es la teoría axiomática de conjuntos. Con unos axiomas adecuados el problema de las paradojas parece desaparecer y aunque no deja de haber dificultades en la misma, como por ejemplo el significado de la independencia de la hipótesis del continuo o del axioma de elección; estamos ante una teoría de gran utilidad y capacidad expresiva, más sencilla y prometedora que, por ejemplo, la teoría de tipos o el intuicionismo. Sin embargo, y a pesar de todo esto, nos queda un interrogante abierto: ¿Es consistente la teoría axiomática de conjuntos?

[1] D. Hilbert, "On the infinite" (1925), Traducción de Stefan Bauer- Mengelberg, Recogido en: (van Heijenoort, 1967) Pág. 370

2. CONTEXTO HISTÓRICO

Como adelantábamos en la introducción, el desarrollo matemático nunca estuvo falto de elementos sorprendentes. Por mucho que creamos tener una comprensión intuitiva de lo que hacemos cuando llevamos a cabo la actividad matemática, esto no siempre es así. A lo largo de la historia encontramos multitud de ejemplos que nos ponen de manifiesto como intuiciones que nos parecían muy claras son engañosas. Veamos algunos.

Cuando se introducen los números negativos en la actividad matemática se propone que las razones entre números enteros positivos y negativos se definan del siguiente modo: $^{-n}/_{n} = -1 = {}^{n}/_{-n}$. Tal modo de operar parecía funcionar, sin embargo, hacía emerger un problema: Si -n es un número menor que n, ¿Cómo vamos a poder afirmar que todas las partes de la igualdad son, en efecto, equivalentes? ¿Cómo va a ser la razón de una cantidad menor a una mayor lo mismo que la razón de esa cantidad mayor a la menor?
A este aparente conflicto se le conoce como la Paradoja de Arnauld y comienza a poner de relieve que no siempre podemos fiarnos de lo que intuitivamente nos parece estar claro. De cualquier modo, la solución a tal paradoja hoy nos resulta muy simple: Sólo tenemos que interpretar -n, no como una cantidad, sino como una cantidad inversa. El error estriba, por lo tanto, en la interpretación de $^{-n}/_{n}$ y ${}^{n}/_{-n}$ como denotando razones de cantidades.

Consideremos otro ejemplo relevante y muy discutido en el siglo XVIII: Pensemos en la serie infinita: 1 – 1 + 1 – 1 + 1 …
Veamos qué sucede si agrupamos los términos de la misma del siguiente modo: (1 – 1) + (1 – 1) + (1 – 1) … Obtenemos una suma de la que, pese a ser infinita, sí podemos saber el resultado: 0 + 0 + 0 + … = 0. Parece necesario afirmar que su resultado será 0.
Sin embargo, teniendo en cuenta que -1 + 1 = - (1 – 1), esa misma suma puede reescribirse también de modo que: 1 – (1 - 1) – (1 – 1) … En este caso, su resultado tendrá que ser 1 pues: 1 – 0 – 0 – 0 … = 1.
Lo que funcionaría si la suma inicial fuese finita da lugar a conclusiones sorprendentes y anti-intuitivas aplicado a un caso infinito. ¿Cómo puede una misma suma tener dos resultados diferentes? ¿Cuál diríamos qué es el "verdadero resultado"? En nuestros días diríamos que esta suma no posee ningún valor, puesto que las series, las sumas infinitas, no convergen, es decir, no tienen un límite finito. Sin embargo, esta noción no fue incorporada hasta el siglo XIX. De cualquier manera, lo que resulta relevante advertir aquí es que estamos ante otro ejemplo que nos hace patente la necesidad de un conjunto riguroso de reglas que nos indiquen cómo actuar, lo qué podemos hacer y lo que no más allá de lo que, aplicando una ingenua extrapolación de lo que sucede en el ámbito de lo finito, pueda parecer razonable.

Esta misma idea es la que subyace a las Paradojas de Zenón, las famosas demostraciones sobre la imposibilidad del movimiento. Recordemos, por ejemplo, el conocido argumento del estadio: Para recorrer la distancia que existe entre un punto A y un punto B, es necesario atravesar primero justo el punto intermedio entre ambos, A_1. Sin embargo, una

vez hayamos llegado a ese punto, tendremos que volver a recorrer la distancia que existe entre el punto en el que nos encontramos y el punto B, el final. Para ello recorreremos primero la mitad de ese intervalo, y nos situaremos en el punto A_2. Y así sucesivamente.
El problema es que siempre, y por mucho que avancemos, nos quedará por recorrer una mitad. Es decir, "Ningún número finito de pasos permitirá que el objeto alcance B: esto es, para todo entero positivo n, después de haber realizado los n primeros pasos y encontrarse en un punto A_n, todavía resta otro paso para llegar al punto A_{n+1}, en la mitad de A_n y B"[2].
Hoy sabemos que la conclusión de esta demostración es errónea porque, pese a que estamos ante una suma infinita, en este caso las sumas parciales convergen, se aproximan de forma indefinida a un valor sin llegar a rebasarlo; por ello, podemos afirmar que el resultado de esta suma sí que está definido, y es uno: $1/2 + 1/4 + 1/8 \ldots = 1$

En el siglo XIX, el descubrimiento del cálculo infinitesimal puede tomarse como otro ejemplo de cómo la matemática precisaba de reglas precisas, entre otras cosas, para el manejo del infinito. Para poder medir la velocidad de algún objeto, en un momento determinado, es necesario introducir en la física la noción de velocidad instantánea; noción que, sin embargo, comenzó siendo en si misma problemática. ¿Qué sentido tiene hablar de la velocidad en un instante determinado si un instante, al ser un punto en el tiempo, no posee duración alguna y para poder viajar a una distancia positiva se necesita una duración positiva?
Intuitivamente parece absurdo hablar de una división[3] entre una distancia que es cero y un tiempo que es cero también. La propuesta tanto de Newton como de Liebniz consistía en realizar este cálculo, en lugar de interpretando que la duración del instante es cero, como si se tratase de un momento infinitamente pequeño (una magnitud infinitamente pequeña). Aunque en la actualidad la velocidad instantánea no se comprenda de este modo, lo importante aquí es advertir como, una vez más, la matemática del momento comienza a poner de manifiesto, por un lado, las dificultades que lleva consigo la propia noción de infinito y, por otro, que nuestra intuición debe ponerse en cuestión.

Lo mismo sucede con la introducción de los números reales en la matemática. Cómo debemos comprender tales números, teniendo en cuenta que su descripción es esencialmente infinita, es una cuestión que ha dado lugar a múltiples enfoques y respuestas diferentes que no vamos a entrar a considerar aquí por no alejarnos de la cuestión principal[4]. Lo que debemos tener en cuenta ahora es cómo los matemáticos del momento se enfrascaron en el estudio del continuo, pues en este contexto es en el que George Cantor estableció las bases de su teoría de los ordinales transfinitos, teoría que, sin pretenderlo, sentó las bases de la teoría de conjuntos. Su objetivo principal era

---

[2] (Smullyan, 2000), Pág. 192
[3] Pues recordemos que la velocidad se obtiene mediante la fórmula v=e/t; el espacio dividido entre el tiempo.
[4] Sobre este tema véase: Suppes en: (Suppes, 1968), Cap. 6.

caracterizar el continuo, la línea de los números reales y lo que consiguió fue encontrar una extensión de los números naturales.
La idea básica que subyace a esta teoría, como veremos un poco más adelante, es la posibilidad de comenzar una nueva serie después de la secuencia infinita de los números naturales, una secuencia que, aunque infinita, puede darse en cierto sentido por terminada. Esta noción de infinito poco tenía que ver con la que desde la antigüedad se aceptaba unánimemente y suponía, por ello, todo un desafío para la intuición.

En definitiva, todas estas perplejidades que han ido apareciendo a lo largo de la historia de la matemática apuntaban a algo que comienza a tomarse en consideración con seriedad en el siglo XIX: La necesidad de dotar a la matemática de un conjunto riguroso de reglas que regulen lo que podemos hacer y lo que no, dejando de lado esa comprensión intuitiva que, como acabamos de ver, no siempre funciona. En última instancia, lo que se hace patente es la necesidad de establecer una axiomatización para la matemática.

3. LA OBRA DE GEORGE CANTOR.

En sus primeras obras, Cantor comienza hablando de multiplicidades, agregados de elementos que podemos denominar, en términos modernos, conjuntos. Lo importante es que, para él, la característica principal de estos conjuntos es que pueden considerarse como una unidad, como un todo. Si hacemos caso a Philip Jourdain[5] podemos considerar que hay dos conceptos clave en la obra de Cantor: Enumerabilidad y Potencia (o cardinalidad):

- Un conjunto enumerable es aquel que puede ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales. Cantor logró demostrar, como veremos más adelante, que los números reales no son enumerables.
- Por potencia Cantor entiende el tamaño de un conjunto, o lo que es lo mismo, el número de elementos que posee. Diremos, pues, que a y b son dos conjuntos equipotentes, o que tienen la misma potencia; cuando poseen exactamente el mismo número de miembros. Podemos comprobar si dos multiplicidades definidas poseen la misma potencia realizando una biyección entre ambas. Si existe tal correspondencia uno a uno entre ambas, es que poseen el mismo número de elementos. Es interesante advertir que, en los casos finitos, un conjunto posee siempre más elementos que una parte contenida en él; pero no sucede lo mismo en casos infinitos, lo que, de nuevo, resulta sorprendentemente contraintuitivo. Por ejemplo, los números pares y los números naturales son equipotentes, aunque podría parecer que los números pares, al ser una parte de los naturales, deberían ser menos que aquellos.

Utilizando estas nociones Cantor logra demostrar que:

- El conjunto de todos los números algebraicos (aquellos números reales que son una solución de una ecuación algebraica con la forma: $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$) es equipotente, posee el mismo número de elementos que el conjunto de los enteros positivos.
- El conjunto de los números reales entre 0 y 1, o en cualquier otro intervalo finito, posee una potencia mayor que el conjunto de los enteros positivos.
- El conjunto de los puntos de un segmento recto es equipotente con el conjunto de los puntos contenidos en un hipercubo[6] cualquiera.

La noción de infinito va a jugar un papel fundamental, y en su momento, como adelantábamos hace un momento, supuso toda una ruptura con la tradición, de herencia Aristotélica, y para la cual era imposible concebir una infinitud como formando una totalidad terminada.

---

[5] Philip E. B. Jourdain, es el traductor y el encargado de la introducción de la obra de G. Cantor "Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers", Dover Publications, New York, 1915.

[6] Un hipercubo es la figura análoga de n-dimensiones a un cuadrado (dos dimensiones) y un cubo (tres dimensiones).

En el libro III de la "Física", Aristóteles reflexiona acerca de la naturaleza del infinito y demuestra la imposibilidad de que este exista en acto. No es una sustancia, no está formado por partes, ni existe tampoco de forma física.
La única forma de existir del infinito es en potencia, como resultado de la adición y la división; podemos concebirlo, pero sólo como resultado de realizar operaciones. Por eso mientras que no podemos decir que los números sean infinitos en sí, podemos concebir "producir" algo infinito si añadimos números unos tras otros. Es necesario tener presente, sin embargo, que su existir en potencia tampoco es en el mismo sentido en el que las cosas son en potencia, pues nunca pasará a ser en acto. En la "Metafísica" leemos:

> "El infinito, por el contrario, no está en potencia en el sentido de que vaya a ser capaz ulteriormente de existencia actual separada, sino en el conocimiento. En efecto, el que la división no llegue a término comporta que tal acto exista potencialmente y no, al contrario, que exista separado."[7]

Lo relevante es advertir como, contra esta idea, Cantor defendió la actualidad del infinito matemático. Afirma Hilbert que, si queremos comprender bien esta nueva noción de infinito que introduce Cantor debemos tener presente que no se trata de la misma noción de infinito que manejamos para el análisis. En su artículo 'On the infinite' (1925) establece la siguiente división:
Tenemos, por un lado, el infinito que utilizamos para referir a algo infinitamente grande, o infinitamente pequeño. Se trata de la noción que usamos en el análisis, y actúa como límite. Podemos entenderlo también como un procedimiento que no alcanza el fin, que no puede darse por terminado porque no termina nunca. Por ejemplo, la secuencia de los números naturales así representada: 0, 1, 2, 3, 4… Encontramos valores cada vez más grandes, pero nunca terminamos. Se trata del infinito potencial, o el infinito en potencia. Es la única noción de infinito admitida por Aristóteles. Sin embargo, afirma Hilbert, este no es el verdadero infinito. Existe otra noción, la del infinito actual, o infinito en acto, que nos permite considerar una totalidad infinita, como por ejemplo la del conjunto de los números naturales, pero esta vez como como una entidad completa, como algo terminado. En este caso podemos dar por terminado el procedimiento infinito, y representar la serie infinita anterior como sigue: {0, 1, 2, 3, …}

> […] in analysis we deal with the infinitely large and the infinitely small only as limiting concepts, as something becoming, happening, i.e., with the potential infinite. But this is not the true infinite. We meet the true infinite when we regard the totality of numbers 1, 2, 3, 4, . . . itself as a completed unity, or when we regard the points of an interval as a totality of things which exists all at once. This kind of infinity is known as actual infinity.[8]

---

[7] (Aristóteles, 2014) 1048b. Libro IX, Capítulo VI.
[8] D. Hilbert, On the infinite, (1925) Traducción de Stefan Bauer- Mengelberg, Recogido en: (van Heijenoort, 1967) Pág. 373

3.1 Ordinales y cardinales

Como adelantábamos al principio, aparece en la obra de Cantor una prolongación de los números naturales: la teoría de los ordinales transfinitos.
Para facilitar la comprensión vamos a centrarnos en la notación y la interpretación propias de nuestros días, en lugar de acercarnos directamente al modo con el que Cantor introdujo estas ideas.
Los ordinales son números infinitos que sirven para ordenar procesos infinitos. La idea fundamental que subyace a esta teoría es, en términos intuitivos, que podemos dar por terminado un proceso infinito y tras él volver a comenzar otro proceso infinito.

Podemos identificar cada número natural n con un conjunto[9], un conjunto que posea exactamente n elementos de modo que el cero se represente mediante el conjunto vacío $\emptyset$, un conjunto con cero elementos; el uno mediante el conjunto $\{\emptyset\}$, un conjunto con un elemento (que es precisamente el anterior a él); el dos mediante el conjunto de sus dos elementos predecesores $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; y así sucesivamente. De este modo cada número natural es el conjunto de los números anteriores a él mismo:
$0 = \emptyset$; $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$; $2 = \{0,1\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$; etc.
Y como a partir de cada número puedo tener su siguiente, mediante este proceso infinito ($n+1 = n\cup\{n\}$) obtengo todos los números naturales. A pesar de que estemos ante un proceso infinito, podemos concebirlo como terminado; y pensar en el conjunto formado por todos los números naturales. Este se denomina ω, y se trata del primer ordinal infinito (Los números naturales serían los ordinales finitos). ω, como todos los ordinales, es un conjunto transitivo, cuyos elementos son, a su vez, transitivos y están bien ordenados[10].

Hemos dicho que ω es el primer ordinal infinito, pero no es el último. A partir de él podemos, mediante la reiterada aplicación de la regla anterior, obtener ordinales infinitos que lo sucedan. ω sería, pues, un ordinal límite. No es el siguiente de ningún otro número, pero nos inaugura una nueva serie infinita: $\omega+1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\} = \omega\cup\{\omega\}$;
$\omega+2 = \{0, 1, 2, 3, \dots \omega, \omega+1\} = \omega+1\cup\{\omega+1\}$; y así sucesivamente.
Del mismo modo que sucedía con los números naturales, cada ordinal es el siguiente del anterior; y por ese motivo a todos los siguientes de ω obtenidos de este modo se los denomina ordinales sucesores. De nuevo, después de la serie infinita que obtenemos mediante este proceso, podemos concebir el conjunto de todos los anteriores: ω2. Un nuevo ordinal límite, que no es el siguiente de ninguno, y que nos inaugura una nueva serie infinita: $\omega2+1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega2\} = \omega2\cup\{\omega2\}$; etc.
Este proceso continuaría del mismo modo de forma infinita.

---

[9] Sigo aquí la definición recursiva de los números naturales de von Neumman: $0 = \emptyset$; $n+1 = n\cup\{n\}$.

[10] Un conjunto C está bien ordenado mediante la relación < si y sólo si se trata de un ordenamiento estrictamente lineal de C, y para cada subconjunto no vacío de C existe un menor elemento.
ω, además de representar el conjunto de los números naturales, representa también su tipo de orden (se trata de un buen orden porque, aunque no hay un último elemento, sí tenemos un primero, el menor elemento, aquel sin un predecesor inmediato). Todos los ordinales representan el tipo de orden de una clase bien ordenada.

De este modo obtenemos:
$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega 2, \omega 2+1, \omega 2+2, \omega 2+3, \ldots, \omega 3, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots$
Además de los ordinales obtenidos mediante este procedimiento descrito, existen ordinales aún mayores. Ordinales que no podemos representar ni describir de forma alguna. Por ello necesitamos una definición general de ordinal que suponga una continuación de este proceso; que nos permita hacer referencia a todos los ordinales, incluso aquellos que no podemos describir. Podemos definir ordinal como un conjunto transitivo cuyos elementos son a su vez transitivos y que representa un tipo de buen orden.

Además de los ordinales, tenemos otro tipo de números transfinitos: Los cardinales, números transfinitos que sirven para indicar el tamaño, el número de elementos de un conjunto. Como ya hemos mencionado, dos conjuntos son equipotentes (poseen la misma cardinalidad) cuando puede establecerse una correspondencia uno a uno entre todos sus elementos, lo que indica que ambos poseen el mismo número de elementos. Los ordinales anteriormente representados (todos aquellos que, en términos intuitivos, se pueden 'visualizar') son, desde el punto de vista de su tamaño, igual de grandes. Esto significa que puede establecerse una biyección entre cada uno de ellos y ω, el que dijimos que era el primero de los ordinales infinitos. Por este motivo, ω se utiliza para representar el tamaño común a todos ellos y se les denomina ordinales enumerables (Pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales). Su tamaño se representa mediante $\aleph_0$ (*Aleph* 0), el primer cardinal infinito.

Además, a partir de este, existen más cardinales cada vez mayores al igual que existen ordinales más allá de los ordinales enumerables. Los cardinales son, dicho de una forma intuitiva, 'saltos de tamaño' en la serie de los ordinales. Cada uno de ellos nos da un tamaño mayor.
Volvamos a la serie de ordinales anteriormente descrita:
$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega 2, \omega 2+1, \omega 2+2, \omega 2+3, \ldots, \omega 3, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots$
Como hemos dicho, todos estos ordinales son equipotentes con ω, son de tamaño $\aleph_0$. Puede demostrarse, sin embargo, que existe un primer ordinal que ya no es equipotente con ω y este es el que representa el siguiente cardinal: $\aleph_1$.
Si $\alpha=\aleph_1$, después de él encontraríamos la serie infinita de ordinales $\alpha+1, \alpha+2, \ldots \alpha^{\alpha} \ldots$ De nuevo estamos ante un conjunto infinito de ordinales (todos ellos del mismo tamaño entre sí y mayores que los ordinales enumerables) que puede también concebirse como terminado. Tras él, una vez más, podemos "dar otro salto" y llegar a un nuevo cardinal: $\aleph_2$ que a su vez da lugar a otra serie infinita de ordinales entre ellos del mismo tamaño (y mayores que todos los anteriores). Y así sucesivamente. Los cardinales son, por lo tanto, ordinales que no poseen biyección con ninguno de los anteriores.
$0, 1, 2, 3, 4, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots \omega^{\omega} \ldots \underline{\boldsymbol{\alpha}}, \alpha+1, \alpha+2, \ldots \alpha^{\alpha} \ldots \underline{\boldsymbol{\beta}}, \beta+1, \beta+2, \ldots$
α sería así el primer cardinal de tamaño mayor que ω (el tamaño de $\mathbb{N}$), es decir $\aleph_1$. β sería el siguiente cardinal infinito, $\aleph_2$; etc. [11]

[11] A diferencia de los ordinales, de los cardinales no puede decirse que cada uno de ellos se obtenga como resultado del proceso $n+1=n\cup\{n\}$, pues la suma de cardinales posee, cuando al menos uno de los cardinales

Los procesos de construcción de ordinales y el de cardinales continúan de forma indefinida, jamás pueden darse por terminados. Son procesos infinitos en el sentido absoluto, no pueden concebirse de forma terminada. Por este motivo no puede existir ni el conjunto formado por todos los ordinales, ni tampoco un conjunto formado por todos cardinales. (De ambos hay la misma cantidad: Una cantidad infinita que no puede considerarse como un conjunto.)

Hemos dicho que el tamaño de $\mathbb{N}$ es $\aleph_0$, pero ¿Qué sucede con $\mathbb{R}$? Cantor demostró que los números reales no son enumerables, lo que suponía que su cardinalidad debía ser mayor que la de los números naturales. Esta demostración consistió en lo siguiente:
En primer lugar, tomó una parte de esa clase, la comprendida por los números entre 0 y 1, y demostró que los números reales dentro de ese intervalo no eran enumerables (de lo que se infiere que $\mathbb{R} > \mathbb{N}$). La demostración es una reducción al absurdo:

Supongamos que existe una enumeración de los números reales comprendidos entre 0 y 1 y que, por lo tanto, existe una función cualquiera, entre ω y ese intervalo, que asigna a cada número natural un número real entre 0 y 1. Podemos representar tal función de modo que:

$$1 \rightarrow 0,\ \mathbf{r_{1,1}}\quad r_{1,2}\quad r_{1,3}\ \ldots$$

$$2 \rightarrow 0,\ r_{2,1}\quad \mathbf{r_{2,2}}\quad r_{2,3}\ \ldots$$

$$3 \rightarrow 0,\ r_{3,1}\quad r_{3,2}\quad \mathbf{r_{3,3}}\ \ldots$$

Donde las cifras decimales de estos números reales entre 0 y 1 aparecen representadas de modo que: $r_{1,1}$ hace referencia a la primera cifra decimal del primer número que aparece en ese listado; $r_{1,2}$ a la segunda cifra decimal de ese mismo número que hemos puesto en primer lugar, etc. De igual modo, $r_{2,1}$ hace referencia al primer dígito del segundo número del listado; $r_{2,2}$ a la segunda cifra decimal de ese mismo número, y así sucesivamente.

Sean cuales sean los números reales que hayamos colocado aquí, lo importante es que siempre podemos encontrar un número real que no aparece en esta lista, un número con una serie de decimales diferentes a todos los anteriores. El método que nos da ese número (se denomina método diagonal) consiste en atender a la diagonal generada por las cifras arriba marcadas en negrita (Es decir, debemos fijar nuestra atención en la primera cifra del primer número de la lista, la segunda cifra del segundo, etc.) y, a continuación, escribir un número cuyas cifras decimales sean diferentes[12] a las que acabamos de subrayar en el paso anterior: $\mathbf{0,\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4}$, siendo $c_1 \neq r_{1,1}$; $c_2 \neq r_{2,2}$; $c_3 \neq r_{3,3}$; etc.

---

a sumar es infinito, una peculiaridad: El resultado de la misma equivale al mayor de los números que estamos sumando.

[12] Es conveniente evitar utilizar los números 0 y 9 para asegurarnos que la posibilidad de estar ante un número con dos expresiones queda excluida y garantizar así que el número que obtengamos no esté realmente en esa lista.

Encontramos de este modo un número real entre 0 y 1 no representado en la lista, lo que nos pone de manifiesto que no puede establecerse una biyección entre los números naturales y los números reales comprendidos entre 0 y 1. Cantor demostró también que había tantos números reales como números entre 0 y 1, con lo que quedaría demostrado que los números reales no son enumerables.

3.3 Teorema de Cantor e hipótesis del continuo

La demostración de que el conjunto potencia de cualquier conjunto es siempre mayor que el mismo es otro de los elementos claves en la obra de Cantor. La demostración de lo que se conoce como el Teorema de Cantor pone de manifiesto que es imposible establecer una biyección entre una clase M y la clase formada por las subclases de M, lo que se denomina su conjunto potencia ℘M. Que no podamos establecer una correlación de uno a uno entre M y su conjunto potencia nos lleva a pensar que el cardinal de ℘M es mayor al de M. De este modo, Cantor demostró que existían no sólo dos cardinales distintos, sino infinitos.

Supongamos, en primer lugar, que existe una biyección entre M y ℘M (la clase de todas las subclases de M):

Miembros de M	biyección	Subclases de M
a	↔	c(a)
b	↔	c(b)
c	↔	c(c)
…	…	…

Podemos visualizar una demostración diagonal si imaginamos colocar todos los miembros de M (estos necesariamente han de ser un conjunto enumerable para que la representación sea válida) en una fila y todos los miembros de ℘M en una columna.
Los 1 representan que existe la relación de pertenencia y los 0 que no es el caso. Es decir, un 0 en la primera casilla de la primera fila y la primera columna indica que a (el primer elemento de a que aparece en la lista) no pertenece a la subclase c(a) (la primera subclase que aparece en este listado). Si, por el contrario, apareciese un 1 en esa casilla tal elemento sí pertenecería a esa subclase. Lo mismo sucede con el resto de elementos representados.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*…*	*(elementos de M)*
c(a)	***0***	*1*	*1*	*0*	*1*	*…*	
c(b)	*1*	***1***	*0*	*1*	*1*	*…*	
c(c)	*1*	*0*	***1***	*1*	*1*	*…*	
c(d)	*0*	*0*	*0*	***0***	*0*		
…	*…*	*…*	*…*	*…*	*…*	*…*	
(Subclases de M. Los elementos de ℘m)							

Recordemos que esta representación es un esquema ilustrativo que no puede generalizarse (en casos no enumerables, por ejemplo, no sería válido) pero que resulta muy útil para visualizar con claridad porque se trata de una demostración diagonal.

Este método se denomina diagonalización, puesto que lo que debemos hacer es atender a la diagonal (sombreada en la tabla anterior). Lo que esta nos permite ver es qué elementos del conjunto M pertenecen a la subclase con la que los relacionamos al establecer la biyección. En el ejemplo de la tabla anterior vemos como sólo b y c cumplen esa condición (son aquellos en cuya casilla sombreada aparece un 1). La diagonal nos da, por lo tanto, una clase: la de todos aquellos elementos de M que pertenecen a las clases que les corresponden. Ahora nos interesa la clase formada por todos aquellos elementos que no pertenecen a su propia imagen. (Asumiendo que existe una biyección entre M y $\wp$M esta debería existir). Por este motivo lo que debemos hacer es quedarnos no con la clase que nos da la diagonal de la tabla sino con su complementaria, la clase que obtenemos como resultado de invertir los resultados obtenidos en la diagonal intercambiando los 1 por 0 y los 0 por 1. Por ejemplo, si en la tabla anterior la diagonal nos da la clase formada por los elementos de M b y c: Los elementos que pertenecen a su imagen; aquellos elementos que no pertenecen a su propia imagen serían, pues, a y d. A esta clase se la denomina la Clase de Cantor: $C = \{x: x \in M \wedge x \notin c(x)\}$.

Cantor generaliza lo que en este ejemplo vemos que sucede: Dado cualquier M y una supuesta biyección c de M a $\wp$M, definimos la clase de Cantor como $C = \{x: x \in M \wedge x \notin c(x)\}$. La clave de la demostración está en que, debido a la asunción de partida de que existe biyección entre M y $\wp$M, debería existir algún miembro m de M cuyo correlato c(m) sea la clase de Cantor. Sin embargo, esto es imposible. Si ese elemento m existiese tendríamos dos posibilidades:

- Por un lado, que m perteneciese a la clase c(m), su correlato. En este caso m estaría incumpliendo la condición necesaria para pertenecer a la clase C, que era, precisamente, no pertenecer a la clase con la que estuviese relacionado; luego $m \notin C$. Pero como, por definición, $C = c(m)$, llegamos a la siguiente conclusión: $m \in c(m) \rightarrow m \notin c(m)$.
- Si, por el contrario, $m \notin c(m)$, entonces m sí estaría cumpliendo la condición necesaria para pertenecer a la clase de Cantor, luego $m \in C$. Pero, como hemos dicho ya, por definición, $C = c(m)$. Llegamos así a la conclusión de que: $m \notin c(m) \rightarrow m \in c(m)$.

En conjunción estas afirmaciones dan lugar a una contradicción, lo que nos obliga a afirmar que el supuesto de partida es falso: No puede existir una biyección entre un conjunto, y su conjunto potencia; o lo que es lo mismo, M y $\wp$M no pueden ser equipotentes. (Este Teorema, y su demostración, ejercerán, como veremos, una influencia esencial en los descubrimientos de Russell.)

De este modo, podemos afirmar la existencia de clases con infinitos cardinales transfinitos, de tamaños crecientes, como resultado de la obtención sucesiva de conjuntos potencia: $\wp\mathbb{N}, \wp\wp\mathbb{N}, \ldots$

Como ya vimos, ℕ y todos los ordinales enumerables (todos aquellos que surgían como resultado del proceso que describimos: Un ordinal límite era el conjunto de todos sus anteriores y para todo n, n+1=n∪{n}) poseían el mismo tamaño: $\aleph_0$, el primer cardinal infinito. (Pues todos ellos podían ponerse en correspondencia de uno a uno con ω, el ordinal que representa el tamaño común a todos ellos). Demostrado que, tanto ℝ como $\wp\mathbb{N}$ son de tamaño mayor, ¿Qué ordinal les corresponde? Cantor formuló una hipótesis que afirmaba que mientras el tamaño ℕ es $\aleph_0$, el de ℝ, el continuo, debía ser $\aleph_1$ y que no existía ninguna cardinalidad intermedia. (En última instancia, lo que esto ponía de manifiesto es que no podía existir ningún subconjunto de ℝ mayor que ℕ, pero menor que ℝ). A esto se le denomina Hipótesis del continuo. Existe también una Hipótesis Generalizada del continuo que afirma además que la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto con cardinal $\aleph_\alpha$ es siempre $\aleph_{\alpha+1}$. De este modo tendríamos que, si el tamaño de ℕ es $\aleph_0$, el de $\wp\mathbb{N}$ sería $\aleph_1$, el de $\wp\wp\mathbb{N}$ sería, entonces, $\aleph_2$; etc.

Aunque Cantor dedicó mucho tiempo y esfuerzo intentando demostrar (y también refutar) la Hipótesis del continuo, jamás lo consiguió. Es más, hoy sabemos que la Hipótesis Generalizada del Continuo es independiente a la teoría de conjuntos, es decir, no puede demostrarse ni refutarse desde ella.

3.4 Paradoja de Burali - Forti

En su momento definimos ordinal como un conjunto transitivo, cuyos elementos son también transitivos, lo que hace necesario que tengamos en cuenta una matización importante: No puede existir un conjunto θ formado por todos los ordinales. Si así fuera este se trataría también de un ordinal, y por tanto sería un conjunto transitivo, cuyos elementos serían a su vez transitivos; y en consecuencia podríamos obtener, del mismo modo que obteníamos todos los ordinales, su siguiente: θ+1 (θ ∪ {θ}). Y del mismo modo, podríamos además obtener sucesivamente todos sus siguientes.

Es imposible que θ sea el conjunto de todos los ordinales y que a la vez existan ordinales mayores que él de lo que podemos deducir, por reducción al absurdo, que no existe el conjunto formado por todos los ordinales.

A esta contradicción se le denominó paradoja de Burali-Forti. Cantor para evitar problemas como este introdujo una clarificación sobre qué debemos considerar como formando un conjunto (Dicho en términos modernos pues en la obra de Cantor no aparece el término conjunto, sino que se habla de multiplicidades o de agregados).

Las aporías, advierte, surgen cuando la absolutamente infinita totalidad de los ordinales es tratada como un objeto del conocimiento matemático y, por ese motivo, en una carta a Dedekind (28 de Julio, 1899), Cantor estableció una nueva distinción en la que dividía a las multiplicidades infinitas en dos grupos:

Por un lado, las multiplicidades consistentes, y por otro las inconsistentes.[13] La diferencia entre ambas residiría en que las multiplicidades consistentes, a diferencia de las otras, pueden considerarse, sin dar lugar a contradicción alguna, como algo terminado, como un objeto.

> […] it's necessary, as I discovered, to distinguish two kinds of multiplicities […]. For a multiplicity can be such that the assumption that all of its elements 'are together' leads to a contradiction, so that it is impossible to conceive of the multiplicity as a unity, as 'one finished thing'. Such multiplicities I call absolutely infinite or inconsistent multiplicities. […] If on the other hand the totality of the elements of a multiplicity can be thought of without contradiction as 'being together' […], I call it a consistent multiplicity or a 'set'.[14]

Además, en esa misma carta, Cantor introduce una serie de consideraciones acerca de los conjuntos, entre las que resulta relevante tener en cuenta una: Dos multiplicidades equivalentes son o ambas conjuntos, o ambas inconsistentes, afirma. Lo significativo de esta afirmación es que puede verse como una formulación temprana de lo que será el axioma de reemplazo, axioma que Zermelo y Fraenkel introdujeron en 1922 en la teoría axiomática de conjuntos, como veremos más adelante.

Suele considerarse que todas estas ideas de Cantor pueden verse, aunque no fuese la intención de este, como configurando una primera teoría de conjuntos, aún ingenua y sin axiomatizar, y que puede atribuírsele a Frege una primera axiomatización de la misma. Sin embargo, es muy dudoso que históricamente esto fuese así, puesto que no estaba en la intención de ninguno de los dos dar lugar a lo que hoy llamamos teoría de conjuntos. Cada uno de ellos estaba más bien guiado por sus propios intereses. Como acabamos de ver lo que llevó a Cantor a realizar todos estos descubrimientos fue una investigación sobre la naturaleza de los números reales y el tamaño del Continuo. A Frege, sin embargo, como pasaremos a considerar a continuación, lo que le interesaba principalmente era crear un sistema formal que le permitiese fundar la aritmética en la lógica. Posteriormente ya podremos ver como todas estas nociones que aquí se van esbozando adquieren el carácter y el rigor propio de una teoría axiomática.

---

[13] Esta división supone el precedente de la distinción entre conjuntos y clases propias que establecerá von Neumann unos cuantos años más tarde.

[14] Carta de Cantor a Dedekind, Halle, 28 de Julio de 1899. Recogida en: (van Heijenoort, 1967). Pág. 114

4. EL PROGRAMA FUNDACIONAL DE FREGE.

4.1 El logicismo.

Se denomina logicismo a la corriente filosófica de fundamentación de las matemáticas desarrollada principalmente por Frege, Russell y Whitehead; y caracterizada por su defensa de que la matemática es esencialmente lógica. El punto de partida que adoptan es el presupuesto de que la lógica es objetiva y ocupa un lugar privilegiado en nuestro conocimiento y, por ese motivo, su objetivo es demostrar que la matemática[15] es reducible a la lógica. De este modo, defendían, quedaría fundamentada su validez.
Para demostrar que la aritmética es esencialmente lógica, Frege desarrolló un sistema formal que, aunque muy sofisticado y un gran avance en la lógica del momento, resultó ser, como Russell advirtió, inconsistente.
Antes de continuar es preciso que nos detengamos a considerar brevemente la noción de lógica que Frege estaba manejando, pues es la clave para comprender la aparición de una contradicción en su sistema. Para él la lógica consistía en una teoría de extensiones de conceptos[16], es decir, de las clases de cosas que satisfacen una determinada propiedad. La aritmética, por tanto, para poder cumplir su objetivo debía ser reducible a partir de leyes lógicas sobre extensiones de conceptos. La característica principal de estas extensiones era lo que recogía la Ley Básica V, ley sobre la identidad: Las extensiones de dos conceptos son en realidad la misma si, y sólo si, todo lo que caiga bajo la primera lo hace también bajo la segunda; es decir, si ambas extensiones poseen los mismos objetos es que son la misma clase: $\{x: F(x)\} = \{x: G(x)\} \leftrightarrow \forall x, F(x) \leftrightarrow G(x)$.

Adelantábamos hace un momento que fue Russell quién descubrió que el sistema de Frege era inconsistente. Pues bien, es en esta ley en dónde radica el problema; a partir de ella puede derivarse una paradoja, lo que conocemos hoy como la paradoja de Russell. Esta fue descubierta por Zermelo y también por Russel de forma independiente, con apenas un par de años de diferencia. La clave para comprender cómo aparece tal contradicción está en la noción de pertenencia que manejaba Frege y que está implícita en su Ley Básica V: Este partía del presupuesto de que, en un lenguaje lógicamente perfecto como el que él pretendía establecer, todo concepto posee una extensión. O lo que es lo mismo, en términos modernos para toda propiedad existe una clase formada por todos aquellos elementos que satisfacen esa propiedad. La conocida como Paradoja de Russell emerge cuando consideramos, en concreto, la existencia de un conjunto (R) formado por todos aquellos elementos que no son miembros de sí mismos.

[15] Russell retomará y continuará el programa fundacional de Frege, sin embargo, podemos resaltar una diferencia importante entre ambos: Lo que Frege pretendía reducir a la lógica no era la matemática al completo, sino exclusivamente la aritmética y el análisis. Russell y Whitehead, en cambio, fueron más ambiciosos y defendieron que toda la matemática podría reducirse a lógica, en la medida en que la matemática es, en su conjunto, esencialmente lógica.
[16] Un concepto es un predicado, una condición; mientras que la extensión de un concepto es el conjunto de todos los elementos que caen bajo esa condición, es decir, que la satisfacen.

4.2 La paradoja de Russell

En la carta en la que Russell comunicó a Frege el hallazgo de tal paradoja en su sistema podemos leer: "Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances, a definable collection does not form a totality."[17]

Esto nos pone sobre la pista de que no cualquier propiedad puede dar lugar a un conjunto sin restricciones. En este caso en particular el problema aparece cuando consideramos la clase de todos aquellos elementos que no son miembros de sí mismos, clase que en un principio no parecía ser problemática.

Resulta evidente que existe una semejanza entre esta demostración y la del Teorema de Cantor que consideramos anteriormente. Es más, el propio Russell afirmó haber encontrado esta forma de formular la paradoja mientras analizaba el Teorema de Cantor. Lo que en esa demostración llamábamos C, la clase de todos los miembros de M que no estaban en la subclase con la que estaban correlacionados, es análogo a lo que en la demostración de Russell podemos llamar clase R: $\{x: x \notin x\}$.

Veamos con un poco más de detalle como emerge la paradoja:

- Si R es un miembro de sí mismo eso significa que posee la propiedad necesaria para pertenecer a ese conjunto R, esto es, no se pertenece a sí mismo. De este modo vemos que: Si R es un miembro de sí mismo, entonces R no es un miembro de sí mismo.
- Si, por el contrario, R no se pertenece a sí mismo, entonces satisface la condición necesaria para pertenecer al conjunto R; luego, R es miembro del conjunto R, de sí mismo. Obtenemos así que: Si R no es un miembro de sí mismo, entonces R es un miembro de sí mismo.

Es la conjunción de estas dos afirmaciones la que da lugar a la contradicción, la Paradoja de Russell.

La respuesta de Frege a la citada carta que recibió de Russell no es menos importante: "Your Discovery of the contradiction […] has shaken the basis on which I intended to build arithmetic. […] with the loss of my Rule V, not only the foundations of my arithmetic, but also the sole possible foundations of arithmetic, seems to vanish."[18]

Parece que el propio Frege ya era consciente de la enorme importancia de tal descubrimiento, y de la posibilidad de que su programa fundacional se desmoronarse por completo. Finalmente, y debido a esa paradoja, se vio obligado a renunciar a la creencia de que la matemática es reducible a la lógica y a abandonar su pretensión de fundamentar la matemática en ella.[19]

---

[17] Russell, Carta a Frege, Hill, 16/06/1902, traducción de Beverly Woodward, en: (van Heijenoort, 1967), pág.125

[18] Frege, Carta a Russell, Jena, 22/071902, traducción de Beverly Woodward, en: (van Heijenoort, 1967), pág. 127

[19] El hecho de que, como podemos leer en el fragmento citado de la carta de Russell, no toda propiedad pueda dar lugar a un conjunto, como Frege creía, es problemático para el propio logicismo. Si añadimos a la teoría de Frege algo así como una matización sobre qué expresiones pueden dar lugar a un conjunto y cuáles no estamos añadiendo algo a la teoría que ya no es propiamente lógica, lo que resulta ser inconsistente con el objetivo logicista.

Pese a todo esto la teoría de Frege fue retomada por Russell y Whitehead, quienes trataron de solventar los problemas que a este le surgían desarrollando un sistema lógico mucho más complejo. Sus motivaciones principales fueron dos: En primer lugar, reducir, no sólo la aritmética, sino toda la matemática, a lógica, y, en segundo lugar, evitar la paradoja que surgía en el sistema de Frege. El sistema formal que ellos desarrollan para cumplir estos propósitos se conoce como la Teoría de tipos y se trata de un sistema muy estricto de niveles en el que sólo es posible predicar acerca de los niveles inferiores. Se trata de una construcción recursiva, en la que cada de expresión se enmarca dentro de un tipo que nos limita sobre qué elementos puede predicarse. De este modo se prohibía generar conjuntos como R, el conjunto formado por todos aquellos que no se pertenecen a sí mismos y que daba lugar a la paradoja de Russell.

La teoría de tipos que Russell y Whitehead desarrollan se trata, por lo tanto, de una teoría formal muy expresiva y que permite, en efecto, fundar la mayor parte de las matemáticas. Sin embargo, no por esto dejan de aparecer dificultades[20]. Además del exceso de rigor, que se traducía en una complejidad difícil de abarcar podemos afirmar que las principales objeciones que se dirigen a esta teoría son tres: En primer lugar, esta teoría no permite demostrar que los números naturales son un conjunto infinito, mientras que la de Frege sí que era capaz de ello; en segundo lugar, se ha criticado también, del sistema de Russell y Whitehead, el axioma de reductibilidad. Este axioma se introdujo para explicar que los números naturales pueden aparecer en los distintos niveles de la jerarquía de tipos, sin dejar de ser los mismos. El axioma garantiza que existen copias exactas de los números en cada nivel y el problema que plantea es que parece ser algo incluido por conveniencia, ad hoc, y no un principio matemático. Por último, podemos afirmar que el intento de estos filósofos de reducir la matemática a la lógica no es exitoso debido a que lo que demuestran es que aquella es reducible a teoría de tipos, y la teoría de tipos es en realidad una teoría matemática.

4.3 Las paradojas de la definibilidad

De cualquier manera, existen más objeciones y dificultades con respecto a esta teoría. No está muy claro que la teoría de tipos de Russell lograse solucionar esas paradojas relacionadas con las clases que habían aparecido con anterioridad, pero aun en el caso de que así fuera existen otro tipo de paradojas que la teoría de tipos no consigue solventar; las paradojas de la definibilidad.[21] Muy a grandes rasgos podemos considerar tres:

La paradoja del último ordinal indefinible: En todo lenguaje semánticamente cerrado existe un ordinal que es, al mismo tiempo, definible y no definible dentro de ese mismo lenguaje. Por lenguaje semánticamente cerrado entendemos aquel lenguaje L que permite expresar su propia definibilidad desde dentro de él mismo. Alfred Tarski dice de estos que son aquellos lenguajes que contienen además de expresiones, términos semánticos que pueden aplicarse sobre los enunciados de ese mismo lenguaje.

[20] En lo sucesivo, sigo a Michèle Friend en: (Friend, 2007)
[21] Siguiendo a Marcus Guiaquinto en: (Giaquinto, 2002)

Es importante tener presente que cuando estos autores hablan de lenguajes semánticamente cerrados están haciendo referencia a lenguajes formales. Sin embargo, que los lenguajes formales puedan ser semánticamente cerrados es una cuestión que no está del todo clara y que suscita algunos problemas: Si un lenguaje formal pudiese hablar de su propia verdad podría dar lugar a la paradoja del mentiroso. Mientras que en el caso de los lenguajes naturales podría ser más fácil hablar de lenguajes semánticamente cerrados no está nada claro que esto sea posible en los lenguajes formales (así como tampoco está claro que todo lenguaje natural pueda tratarse como uno formal). No voy a entrar más en detalle aquí sobre este tema para evitar extenderme demasiado y alejarme del tema principal. Por el momento y para poder entender estas paradojas y la solución que posteriormente ofrecerá Russell vamos a aceptar el presupuesto de que podría ser posible concebir un lenguaje formal semánticamente cerrado.
La paradoja del último ordinal definible emerge, entonces, cuando consideramos el número total, z, de todas las expresiones definidas[22] de L. Como no puede decirse que existan un conjunto de ordinales no puede considerarse tampoco que exista un número total de ellos y, en consecuencia, existen más de z ordinales. Lo que esto nos pone de manifiesto es que hay ordinales que no son definibles en L. Al mismo tiempo, como los ordinales están bien ordenados, es necesario que haya algún ordinal que sea el menor de los ordinales no definibles. Podríamos, debido a que L es un lenguaje semánticamente cerrado, definir en L este ordinal como “El menor de los ordinales no definibles en L”. De este modo llegamos a la contradicción: Estamos ante un ordinal que es, al mismo tiempo, definible y no definible en L.

La paradoja de Berry: En castellano sólo hay un número finito de expresiones que pueden construirse con n palabras, y enteros positivos hay un número infinito, por lo que habrá números que no puedan definirse en esa lengua en menos de catorce palabras. Entre estos números tendrá que haber alguno que sea el menor de todos ellos, y podríamos definirlo como “el menor entero positivo no definible en castellano con menos de catorce palabras”. Esta expresión tiene sólo trece palabras, por lo que este número es, al mismo tiempo, definible y no definible en castellano en menos de catorce palabras.

La paradoja de Richard: Esta paradoja consiste en una adaptación de la demostración diagonal de Cantor de que la clase de lo números contenidos en el intervalo entre 0 y 1 no es enumerable. Consideremos un lenguaje L, con un conjunto enumerable de expresiones, y con los recursos suficientes para expresar esa demostración de Cantor. De este modo sí podemos enumerar la clase de los números reales entre 0 y 1 que son definibles en L. La clave de esta paradoja es que podemos encontrar un número real entre 0 y 1 diferente a todos los que aparecen en la clase de esos enumerables, y que es tanto definible como no definible en L.

[22] Por expresión definida nos referimos a una descripción verdadera sólo para una entidad.

Lo que nos interesa ahora de todas estas paradojas es que ninguna de ellas es evitada por la teoría de tipos establecida por Russell; y él mismo fue consciente de ello, lo que le obligó a buscar una solución.
Russell creía que lo que subyacía a todas estas paradojas era un mismo error: todas ellas son resultado de un cierto tipo de círculo vicioso. En general siempre que una entidad sólo puede definirse en términos de la clase a la que pertenece (definiciones que denomina impredicativas), se produce una violación del principio del círculo vicioso.
Lo que este principio establece, es, pues, que deben evitarse las definiciones impredicativas siempre que sean la única definición posible para una entidad dada. De este modo, aunque las paradojas llamadas de la definibilidad no son solventadas por la teoría de tipos, Russell considera que dejan de ser problemáticas si advertimos que todas ellas son causadas por círculos viciosos de tipo muy similar y evitamos las definiciones impredicativas.

Afirma Gödel que el principio del círculo vicioso, entendido de este modo, al prohibir las definiciones impredicativas, supone el fin de los intentos, tanto de Frege, como de la mayor parte de la matemática clásica en general, de derivación de la matemática a partir de la lógica.

> Se puede demostrar que el formalismo de la matemática clásica no satisface el principio del círculo vicioso (…) pues los axiomas implican la existencia de números reales que sólo son definibles en este formalismo por referencia a todos los números reales. (…) Prefiero considerar esto como una prueba de que el principio del circulo vicioso es falso que como una prueba de que la matemática clásica es falsa (…) [23]

Él personalmente se opone a aceptar el principio del círculo vicioso. En ese mismo artículo añade que no hay motivo alguno para admitir que hacer referencia a una totalidad sea equivalente a hablar de una conjunción infinita y que, aunque así fuera, el principio del circulo vicioso necesita para tener pleno sentido que adoptemos una postura fuertemente constructivista; es decir, que partamos del presupuesto de que las entidades matemáticas en juego sean algo creado por nosotros y no algo que descubramos. "Si, sin embargo, se trata de un problema de objetos que existen independientemente de nuestras construcciones, entonces no hay nada absurdo en la existencia de totalidades que contengan miembros que puedan ser descritos (…) sólo por referencia a esa totalidad."[24]
Si partimos de un punto de vista realista no emerge problema alguno al considerar entidades sólo definibles en términos de la totalidad a la que pertenecen. En este enfoque se sitúa Gödel y defiende que las clases y los conceptos son objetos reales cuya existencia, independiente a nosotros, es tan legítima como la de cualquier objeto físico. Más adelante consideraremos el debate que surge entre las posturas realistas y las constructivistas, debate que, aunque ya presente desde la antigüedad, adquiere una vitalidad especial a principios del siglo XX.

---

[23] (Gödel, La lógica matemática de Russell (1944), 2006), pág. 324
[24] (Gödel, La lógica matemática de Russell (1944), 2006), pág. 325

Dejando de lado la solución de Russell, solución que no parece del todo satisfactoria, podemos afirmar que la causa principal de todas las paradojas que hemos ido viendo es la asunción de que dada cualquier propiedad existe el conjunto formado por todos aquellos elementos que poseen tal propiedad. No podemos, sin caer en contradicción, considerar el conjunto de todos los elementos que no son miembros de sí mismos; por lo que no todo predicado puede dar lugar a un conjunto de esta forma tan irrestricta.
Como ya apuntábamos al principio de este trabajo, todo esto nos pone de manifiesto la necesidad de un conjunto de reglas que especifiquen lo que podemos hacer de forma lícita y lo que no; una axiomatización que, de forma rigurosa, de forma a las ideas que, en cierto sentido, ya comenzamos a ver esbozadas en la obra de Cantor.

5. TEORÍA AXIOMÁTICA DE CONJUNTOS

5.1 El programa axiomático de Zermelo

La axiomatización de la teoría de conjuntos[25] puede verse como un intento de sistematizar y dotar de rigor a los procedimientos y principios matemáticos; un intento de establecer unos axiomas de los que puedan derivarse todos los resultados relevantes.
Vamos a centrarnos en la axiomatización de Zermelo, quien ofreció un sistema de axiomas que Fraenkel posteriormente revisa y modifica ligeramente. Por este motivo a la teoría estándar se la conoce como Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, o ZF abreviado. Sin embargo, esta propuesta fundacional no es la única. Una alternativa la constituye la teoría axiomática de conjuntos propuesta por Von Neumann, Bernays y Gödel, conocida como NBG. Las diferencias entre ambas son escasas, baste aquí con mencionar brevemente dos aspectos en los que existe divergencia entre estas teorías: La teoría NBG puede axiomatizarse de forma finita y en esta teoría se distinguen clases y conjuntos. Todo conjunto es una clase, pero no a la inversa. Las clases propias son aquellas colecciones de elementos que no pueden verse como formando un conjunto pues darían lugar a una paradoja, como sucedía, por ejemplo, con el conjunto de todos los conjuntos y el conjunto de todos los ordinales, y paradojas como la de Burali-Forti, o la de Cantor. Vamos a considerar aquí la primera, la de Zermelo-Frankel.

Aunque la intención del programa de Frege era aportar una fundamentación de la aritmética, a partir de la lógica, su sistema formal ha pasado a considerarse históricamente como un primer intento de axiomatización de la teoría de conjuntos. Sin embargo, como ya hemos visto, ese sistema formal contenía una contradicción que no podemos pasar por alto: La paradoja de Russell. Motivado por la misma, y a la par que Russell y Whitehead trabajaban en su teoría de tipos, Zermelo dedicó su tiempo en la formulación de axiomas para la teoría de conjuntos que había iniciado Cantor. El punto de partida debía ser una concepción de conjunto diferente a la de Frege, en la que este no se entendiese como extensión de un concepto. Además, los conjuntos tampoco pueden continuar considerándose como meros agregados de cosas, sino que deben satisfacer una serie de condiciones axiomáticas.

El programa de Zermelo constaba de dos fases: La primera tarea consistía en formalizar axiomas capaces de desarrollar la aritmética y el análisis desde la teoría de conjuntos, con la misma pretensión fundacional presente en la teoría de conjuntos, pero lo suficientemente estrictos como para impedir la aparición de paradojas. Su segundo objetivo era demostrar que esos axiomas propuestos no permitían reproducir las paradojas anteriores, ni daban lugar a ninguna otra nueva.

[25] Cf. Mary Tiles. (Tiles, 1989)

> "Now, in the present paper I intended to show how the entire theory created by Cantor and Dedekind can be reduced to a few definitions and seven principles, or axioms, which appear to be mutually independent. […] I have not yet even been able to prove rigorously that my axioms are consistent, though this is certainly very essential; instead I have had to confine myself to pointing out now and then that the antinomies discovered so far vanish one and all if the principles here proposed are adopted as a basis."[26]

Antes de presentar los axiomas, Zermelo ofrece una serie de definiciones y aclaraciones para delimitar el campo de estudio. Como lo que se pretende caracterizar es la noción misma de conjunto, la definición no puede partir del mismo; por ese motivo, la teoría de conjuntos, afirma, versa sobre un dominio $\mathfrak{B}$ de individuos u objetos, entre los cuales están los conjuntos. Otra característica propia de su enfoque es el reducido número de nociones primitivas. En esta teoría sólo encontramos un predicado monádico (x es un conjunto) y uno binario ($x \in y$, o lo que es lo mismo, x es un miembro de y).
Los axiomas propuestos[27] por Zermelo, y que constituyen la teoría axiomática de conjuntos, son los siguientes:

El axioma de extensionalidad: Si dos conjuntos poseen los mismos elementos, entonces, son el mismo conjunto. Formalmente podemos representarlo como sigue:$\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$

El axioma de los conjuntos elementales: Este axioma consta de dos partes:

> Por un lado, la afirmación de la existencia del conjunto vacío, $\emptyset$, un conjunto que no contiene ningún elemento. $\exists x\, \forall y\, \neg(y \in x)$. (Axioma del conjunto vacío).
>
> Por otro lado, la afirmación de que, si a es cualquier objeto del dominio, entonces existe un conjunto $\{a\}$ cuyo único miembro es el conjunto a. Del mismo modo, si existen a y b, y ambos son elementos del dominio, existirá también el conjunto $\{a, b\}$ cuyos únicos miembros serán a y b. $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall w\, (w \in z \leftrightarrow w = x \lor w = y)$. (Axioma del par).

El axioma de la unión: Para cualquier conjunto c, existe un conjunto $\cup c$ (el conjunto unión de c), cuyos elementos son exactamente todos los miembros de los elementos de c. $\forall x\, \exists y\, \forall z\, [z \in y \leftrightarrow \exists w\, (w \in c \land z \in w)]$. Este axioma, junto con los anteriores, nos permite generar conjuntos con cada vez más elementos, pero siempre conjuntos finitos. Para poder afirmar la existencia del al menos un conjunto infinito necesitamos el siguiente axioma.

[26] "Investigations in the foundations of set theory", Ernest Zermelo, 1908. Traducción de Stefan Bauer-Mengelberg. Recogido en: (van Heijenoort, 1967), págs. 200-201
[27] Aquí los voy a presentar de la forma con la que se entienden y utilizan en nuestros días, a pesar que Zermelo no los introdujese exactamente en estos términos.

El axioma del infinito: Existe al menos un conjunto z que tiene por miembro al conjunto vacío y que está constituido de modo tal que, para todo elemento x, si x es miembro de z, $x \cup \{x\}$ también lo es. $\exists x\, [\emptyset \in x \wedge \forall y\, (y \in x \rightarrow \exists z\, (z \in x \wedge \forall w\, (w \in z \leftrightarrow w \in y \vee w = y)))]$

El axioma de separación: Dados cualquier conjunto c, y cualquier propiedad P definida para c[28], existe un subconjunto m de c cuyos elementos poseen la propiedad P. Este axioma se trata de una versión mucho más restringida del principio de comprensión, y lo que nos permite es separar, a partir de un conjunto dado, los elementos del mismo que satisfacen una determinada condición, para considerarlos como formando un conjunto a su vez. De este modo resulta imposible afirmar la existencia del conjunto de todos los conjuntos, y se evitan las paradojas de las clases.

El axioma del conjunto potencia: Para todo conjunto m, existe el conjunto $\wp(m)$, el conjunto potencia de m, cuyos miembros son exactamente los subconjuntos de m. $\forall x\, \exists y\, \forall z\, [z \in y \leftrightarrow \forall w\, (w \in z \rightarrow w \in x)]$

El axioma de elección: Para todo conjunto T, formado por otros conjuntos no vacíos y disjuntos, existe un subconjunto S_1 de $\cup$ T; tal que, para todo conjunto p en T, S_1 posee exactamente un miembro en común con p. Es decir, para todo conjunto T existe un subconjunto de $\cup$ T que posee un elemento en común con cada uno de los conjuntos de T. "We can also express this axiom by saying that is always possible to choose a single element from each element M, N, R, … of T and to combine all the chosen elements, m, n, r, … into a set S_1"[29].
Se trata del axioma más polémico y no es aceptado por todos los matemáticos por igual. Es más, algunos autores prefieren indicar cuando al realizar una demostración han hecho uso de este axioma. Por este motivo en algunas ocasiones se hace referencia a la teoría de conjuntos de Zermelo – Fraenkel, en lugar de simplemente con las siglas ZF, como ZFC (donde la C indica que se está utilizando el axioma de elección, 'Axiom of Choice' en inglés.)

El axioma de reemplazo: Este axioma fue propuesto por Fraenkel (al mismo tiempo también por Skolem de forma independiente) sobre 1922 para solventar una deficiencia que había advertido en la axiomatización de Zermelo: Mediante sus axiomas, todos los conjuntos existentes poseerían una cardinalidad menor a $\aleph_\omega$.

[28] Se dice que una propiedad P está definida para un conjunto c cuando todos los miembros de c satisfacen una de estas dos condiciones: O bien ese elemento posee P, o bien ese elemento no posee la propiedad P. No existe ningún otro caso posible. Veremos, sin embargo, como esta noción es problemática.
[29] Ernest Zermelo, "Investigations in the foundations of set theory", 1908. Traducción de Stefan Bauer-Mengelberg. Recogido en: (van Heijenoort, 1967), pág. 204

Una formulación del mismo es la siguiente: Dado cualquier conjunto m y cualquier relación funcional F[30] cuyo dominio sea m; existe un conjunto F[m] (la imagen de m bajo la función F) cuyos miembros son los objetos que F le asigna a los miembros de m.
Esta afirmación equivale a la afirmación de que si existe una correlación de 1 a 1 entre un conjunto A y una multiplicidad B entonces esta última es también un conjunto. (Intuitivamente, si existe esta relación funcional o ambas son conjuntos o ambas son, en términos de Cantor, multiplicidades absolutamente infinitas.)
Este axioma también es necesario para poder afirmar que todo conjunto bien ordenado es isomórfico a un único ordinal. (De hecho, sin este axioma la teoría de los números transfinitos desarrollada por Cantor no puede deducirse a partir de los axiomas anteriores). A partir del axioma de reemplazo podemos afirmar que $\aleph_\alpha$es un conjunto para todo ordinal α.

5.2 Problemas y críticas

Uno de los elementos más criticados de la axiomatización de Zermelo es la noción de propiedad definida para un conjunto que encontramos en el axioma de separación.
Weyl en “Sobre las definiciones de los conceptos matemáticos fundamentales”, una conferencia dada en 1910[31], afirmó, tras parafrasear el enunciado del axioma de separación tal y como lo propuso Zermelo, que se necesita una definición mucho más precisa y más estrecha de lo que significa ser una propiedad bien definida. Sin embargo, él mismo no llega a aportar tal definición.
La definición de Zermelo a la que se hace referencia es la siguiente: “A question or assertion t is said to be definite if the fundamental relations of the domain, by means of the axioms and the universally valid laws of logic, determine without arbitrariness whether it holds or not.”[32] El hecho de que Zermelo apele a las leyes de la lógica, y que estas no sean especificadas en ningún momento hace que la noción de propiedad definida se haya considerado como vaga y ambigua.
Una forma de entender esta noción sería considerando que una propiedad P está bien definida para un conjunto m cuando para todo miembro x de m podemos, mediante los axiomas, demostrar si ese elemento x satisface o no tal propiedad. Sin embargo, podemos pensar[33] que si lo entendemos de este modo estaríamos incurriendo en un círculo vicioso, pues lo que se puede demostrar a partir de unos axiomas depende ya de la noción de propiedad definida que adoptemos para este axioma.

En los años veinte surgieron dos propuestas diferentes orientadas a solventar este problema:

---

[30] Entendemos por relación funcional una relación binaria F (x, y) que asigna a cada elemento de su dominio x un objeto y, y sólo uno.
[31] Cf. R. Torreti. (Torretti, 1998)
[32] Ernest Zermelo, “Investigations in the foundations of set theory”, 1908. Traducción de Stefan Bauer-Mengelberg. Recogido en: (van Heijenoort, 1967), pág. 201
[33] En lo sucesivo, sigo a M. Guiaquinto en: (Giaquinto, 2002)

Lo que von Neumann propuso fue recuperar la distinción de Cantor entre multiplicidades consistentes e inconsistentes e introducirla en la teoría axiomática de conjuntos de modo tal que, además de conjuntos, existiesen lo que después se denominó clases propias. Estas últimas poseen las mismas características que las multiplicidades inconsistentes de Cantor y, por lo tanto, no pueden concebirse como una unidad ni como siendo miembros de ninguna otra cosa. De este modo podríamos reescribir el axioma de reemplazo de forma que las dificultades quedasen fuera del mismo: Dados cualquier conjunto m, y cualquier clase B, todos los elementos que pertenecen tanto a m, como a B (es decir, la intersección de ambos) forman un conjunto.
De este modo se disuelve el problema de tener que especificar en qué consiste la noción de propiedad definida, pero emerge de nuevo un problema con el que ya se encontró Cantor; la dificultad de marcar un criterio válido para diferenciar conjuntos y clases propias y que tal distinción no parezca algo improvisado y poco confiable. Cantor no supo encontrar una respuesta a tal pregunta, y la que ofrece von Neumann no deja de parecer demasiado vaga. Lo que este último propone es establecer la diferencia sobre el hecho de que las clases propias son demasiado numerosas, demasiado grandes, como para ser consideradas elementos, o miembros de otros conjuntos. “That is, sets are the sets that (in the early terminology) are ‘not too big’, and ‘classes’ are all totalities irrespective of their ‘size’.”[34] Esta solución, aunque en términos intuitivos parezca ser válida, no es del todo satisfactoria, pues sigue planteando dudas, como por ejemplo el de cómo saber cuándo un conjunto es demasiado grande para ser considerado tal.

La propuesta de Skolem parte del postulado de que el lenguaje formal de la teoría de conjuntos debía reformularse para evitar ambigüedades y, por ese motivo, propuso sustituir las sentencias abiertas que expresan propiedades o relaciones por esquemas cuya instanciación sería lo que aportase los axiomas a la teoría.
De este modo, el axioma de separación de Zermelo quedaría reformulado como sigue: Para todo conjunto m, existe otro conjunto cuyos miembros son exactamente los elementos x de m tal que $\psi(x)$. Aquí debemos entender $\psi(x)$ como una forma esquemática para todas las sentencias abiertas del lenguaje formal de la teoría de conjuntos con una única variable libre. Cualquier instanciación de este esquema sería un axioma para la teoría, lo que nos daría infinitos axiomas. (Esto, no obstante, no supone ningún problema pues este esquema nos permite decidir, para toda sentencia dada, si se trata o no de un axioma de la teoría.)

De cualquier manera, ahora no nos interesa considerar en detalle ni la propuesta de Skolem, ni ninguna otra en concreto. Más bien conviene tener presente que, aunque a la teoría de conjuntos ZF se le puedan atribuir debilidades parece que, mediante las propuestas adicionales de otros autores, no es excesivamente difícil solventarlas.

---

[34] John von Neumann, An axiomatization of set theory (1925), traducción de Stefan Bauer-Mengelberg y Dagfinn Follesdal; recogido en (van Heijenoort, 1967), pág. 403

De este modo podemos afirmar que la axiomatización de la teoría de conjuntos cumple con éxito su objetivo, en la medida en que permite conservar los descubrimientos más valiosos: La teoría de los números transfinitos de Cantor, la representación conjuntista de la aritmética de los números naturales y de los números reales, etc.
Se trata de una teoría poderosa y fiable y que además parece ajustarse mejor a nuestras intuiciones pre-teóricas que la teoría de tipos; lo que, sin embargo, no significa que esté exenta de problemas. Queda abierto un interrogante fundamental: ¿Es consistente esta teoría?

5.3 Realismo y Anti-realismo

En un artículo titulado "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?" (1947) Gödel afirma que lo relevante de tal conjetura es que intentemos averiguar si la misma es o no deducible a partir de los axiomas de la teoría axiomática de conjuntos. Si suponemos la consistencia de esos axiomas, continúa, las posibilidades en un principio son tres: O bien la hipótesis es refutable, o bien es demostrable, o se trata de algo indecidible. Hoy sabemos, y ha quedado demostrado, que se trata de algo independiente, es decir, que la hipótesis del continuo no es ni refutable ni demostrable a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos en el que caso de que esta sea consistente.
A pesar de ello y si adoptamos, como él mismo hace, un punto de realista el hecho de que no podamos ni demostrar ni refutar la conjetura de Cantor continúa siendo problemático. Sin embargo, nos encontramos ante una problematicidad de un tipo particular. En ese mismo artículo, Gödel continúa afirmando:

> "[…] los conceptos y teoremas de la teoría de conjuntos describirían alguna realidad bien determinada en la cual la conjetura de Cantor debería ser cierta o falsa. Por ello su indecidibilidad a partir de los axiomas que hoy día aceptamos sólo puede significar que estos axiomas no entrañan una descripción completa de esta realidad."[35]

Gödel demostró a la par la independencia de la hipótesis del continuo y del axioma de elección, otro elemento propio de la teoría axiomática de conjuntos cuya aceptación nunca dejó de causar reticencias, demostrando que si la teoría es consistente sin ninguno de esos dos elementos seguirá siéndolo una vez que los hayamos incorporado. Lo que aquí se nos pone de manifiesto es que si admitimos que los objetos y las verdades de la matemática poseen una existencia real al margen de nosotros; la afirmación de Cantor, al estar referida a algo que de hecho existe, debe ser verdadera o falsa independientemente de nuestra incapacidad de demostrarlo. Es esta visión de la realidad la que lleva a Gödel a afirmar que, si nuestros axiomas no nos permiten tener conocimiento alguno al respecto, lo más seguro es que sea debido a que esos axiomas no permiten describir la realidad con la rigurosidad necesaria. Por este motivo, termina afirmando, queda abierta la posibilidad de encontrar otros axiomas que finalmente nos permitan saber con exactitud si la hipótesis del continuo es o no verdadera. "Creo que, resumiendo todo lo dicho, hay buenas razones

[35] (Gödel, ¿Qué es el problema del continuo de Cantor? (1947), 2006), pág. 362

para sospechar que el papel del problema del continuo en la teoría de conjuntos consistirá en conducir al descubrimiento de nuevos axiomas que permitan refutar la conjetura de Cantor."[36]

A grandes rasgos, existen dos puntos de vista diametralmente opuestos desde los que puede afrontarse la filosofía de las matemáticas: El realismo, o platonismo matemático, y el antirealismo, donde la corriente filosófica orientada a la matemática es el constructivismo.

La gran mayoría de las posturas que existen en el campo de la filosofía de las matemáticas se articulan en torno a estos dos polos e incluso algunas, como el logicismo[37], pueden abordarse desde uno u otro punto de vista.

Como acabamos de ver, Gödel adopta una postura profundamente realista. La característica principal de este tipo de enfoque es la defensa de la existencia atemporal de los objetos matemáticos que describen nuestras teorías. Dentro del realismo hay multitud de posturas diferentes pero lo importante es que todas ellas poseen en común la afirmación de que los objetos matemáticos no son una herramienta humana, sino que existen en algún sentido y que, por tanto, las verdades de la matemática no son algo construido. Cómo tenemos acceso a ese tipo de objetos abstractos es una cuestión problemática para el realismo y a lo que generalmente se apunta es a algún tipo de intuición. La naturaleza de la misma, cómo se origina, o en qué consiste exactamente son cuestiones que aún no han encontrado respuesta y que están el centro de toda crítica hacia este tipo de posturas.

Por el contrario, el anti-realismo considera que los objetos abstractos no existen como tal, sino que son un constructo humano. La matemática desde este punto de vista se convierte en una algo altamente dependiente de nosotros lo que exige una mayor rigurosidad en todo proceder. Por ejemplo, como vimos cuando consideramos las paradojas de la definibilidad, para Gödel el principio del círculo vicioso no resultaba problemático, ni constituía ningún problema hablar de clases en términos de la totalidad a la que pertenecen. Russell, en cambio, veía en este proceder un grave error pues para él las clases no existen al margen de nosotros, sino que somos nosotros quienes las creamos y por ello es de vital importancia evitar introducir cualquier tipo de circularidad en las definiciones. De cualquier forma, esto no significa que Russell pretendiera cambiar la lógica, ni eliminar por completo las definiciones impredicativas. Su intención era restringirlas de forma que, en términos intuitivos, para poder hablar de algún elemento de un conjunto sea necesario tener previamente ese conjunto ya formado. Tiene que ser posible que tanto ese elemento como el conjunto estén bien definidos antes de predicar algo de los mismos.

[36] (Gödel, ¿Qué es el problema del continuo de Cantor? (1947), 2006), pág. 368

[37] El logicismo de Frege, por ejemplo, filosofía que comentamos anteriormente, adopta una dimensión marcadamente realista. Él defendía la existencia de las verdades matemáticas independientemente a nosotros. En cambio, Russell, su sucesor, retoma el proyecto desde un punto de vista anti-realista y defiende que somos nosotros quienes construimos las verdades de la matemática.

En las vertientes más extremas del constructivismo, en cambio, si encontramos esa pretensión de revisión y reforma de la matemática clásica que supone el rechazo de una gran parte de la misma. La noción de verdad y la de conocimiento están, para estos, estrechamente vinculadas; de modo que no cabe la posibilidad de que existan verdades que no podamos conocer.

El constructivismo vio afianzada su legitimidad con la aparición de las paradojas en la teoría de conjuntos a principios del siglo XX.

Se extendió entonces la creencia de que la base misma de la matemática reposaba sobre una contradicción por lo que era necesario una completa reconstrucción de la misma. La noción de infinito en acto que, como vimos, está en el centro de la teoría de conjuntos comienza a ponerse en entredicho; motivo que lleva a los constructivistas a rechazar la existencia de conjuntos infinitos. Es más, el constructivismo más radical rechaza incluso todas las demostraciones no constructivistas.

La principal objeción que se realiza al constructivismo es que rechaza demasiados elementos de la matemática. La pretensión de reformular las matemáticas en una base constructivista no ha encontrado demasiado apoyo, precisamente por el hecho de que parece demasiado extremo rechazar lo que se ha ido logrando durante siglos, y conceptos de gran utilidad, como el de infinito. A su favor el constructivista argumenta que, si la matemática se funda de un modo correcto, lo único que se perdería con respecto a la tradición anterior serían incoherencias.

Si volvemos al tema que nos interesa, la validez y la consistencia de la teoría de conjuntos, parece necesario advertir que la conclusión a la que lleguemos dependerá en gran medida del punto de vista adoptado. Como hemos ido viendo, para un realista como Gödel no supone ningún problema la existencia en una teoría de cosas que no podemos construir paso a paso como los conjuntos que nos da el axioma de elección, las entidades definidas de forma impredicativa, ni la noción de infinito en acto. En este sentido, para él no existe tampoco razón alguna para dudar de la validez de la teoría axiomática de conjuntos.

> Para quien considere que los objetos matemáticos existen independientemente de nuestras construcciones y de que tengamos individualmente una intuición de ellos […] existe, creo, una fundamentación satisfactoria de la teoría de conjuntos de Cantor en toda su amplitud y significado originales, a saber, la teoría axiomática de conjuntos interpretada al modo esbozado más adelante. Podría pensarse en un primer momento que las paradojas de la teoría de conjuntos condenarían a una empresa de este tipo al fracaso, pero un examen más detenido muestra que no producen ninguna dificultad.[38]

Ni el realismo, ni el optimismo de Gödel son, sin embargo, unánimes. Para una corriente anti-realista la teoría axiomática de conjuntos no puede considerarse como fundamentada con tal facilidad. Brouwer, por ejemplo, mostró una fuerte oposición a esos axiomas planteados por Zermelo cuestionando que sirviesen realmente para fundamentar la

[38] (Gödel, ¿Qué es el problema del continuo de Cantor? (1947), 2006), pág. 360

matemática y desarrolló una corriente denominada Intuicionismo: Las verdades matemáticas, defendía, no se descubren, sino que se crean por lo que es especialmente importante ser rigurosos con el proceder matemático. No todo vale y por ello todas las demostraciones no realizadas de forma constructivista deben ser rechazadas. La ley del tercero excluido, por ejemplo, fue una de las características de la lógica clásica a las que el intuicionismo se opuso ferozmente (Lo que este principio nos dice es que o bien A, o bien $\neg$A. Cualquier otra opción queda excluida.)
Del mismo modo, la lógica intuicionista rechazaba también la posibilidad de eliminar una doble negación (en lógica clásica: $\neg\neg A \leftrightarrow A$) y de realizar demostraciones por reducción al absurdo. Otra característica es que sólo es válido aquello que podemos construir paso a paso, de forma finita. Considerar algo infinito como terminado, afirman, no sólo es un error, sino que da lugar a multitud de paradojas y resultados indeseables. El infinito solo puede tratarse de forma potencial. De este modo eliminan la posibilidad de que exista algún conjunto infinito.
El problema que supone este enfoque es la necesidad de dejar de lado nociones tan importantes y útiles en matemática como es la de infinito. Aunque para Brouwer la matemática estuviese ganando claridad, su propuesta no tuvo demasiado éxito debido a la oposición tan extrema que suponía a una gran parte de la matemática clásica.

6. EL PROGRAMA DE HILBERT

6.1 La reacción de Hilbert contra el intuicionismo.

Aunque, a diferencia de Gödel, Hilbert estaba lejos de considerar que la teoría axiomática de conjuntos se encontraba satisfactoriamente fundada, la reconstrucción de la matemática que pretendía llevar a cabo Brouwer le parecía algo desproporcionado. En oposición al intuicionismo, Hilbert va a adoptar una posición formalista. Esta, aunque también es de carácter constructivista, adquiere un matiz diferente: La matemática consiste en un sistema formal, de símbolos carentes de significado por sí mismos, pero consistentes bajo la luz de unas ciertas reglas. El principal punto de divergencia con el intuicionismo tiene que ver con el rechazo de este último al infinito en acto. A pesar de que Hilbert compartía la creencia de que la matemática necesita revisarse y constreñirse a limitaciones para evitar paradojas, se oponía a rechazar la teoría de los transfinitos de Cantor.

También con el objetivo de fundar la matemática propuso lo que se denomina el Programa Finitista, o Programa de Hilbert.
Defiende que no puede permitirse que en la matemática aparezcan paradojas, pero para él la fuente de las mismas estaba en el uso de unos axiomas determinados en conjunción con una lógica (entendiendo lógica como un conjunto de leyes lógicas y reglas de inferencia) que no es adecuada. Por este motivo, Hilbert defiende que para que podamos considerar una lógica como válida, esta debe cumplir una serie de condiciones; una de ellas consiste en que se debe analizar y limitar la noción de infinito. La teoría de los transfinitos de Cantor es muy útil para la matemática y no hay necesidad alguna de prescindir de ella, siempre que se clarifique la noción de infinito y se utilice con las restricciones pertinentes. (Y teniendo en cuenta, además, que los objetos matemáticos a los que se refiere no poseen una existencia propia e independiente.)

> But in clarifying the notion of the infinite we must still take into consideration a more general aspect of the question. If we pay close attention, we find that the literature of mathematics is replete with absurdities and inanities, which can usually be blamed on the infinite. So, for example, some stress the stipulation, as a kind of restrictive condition, that, if mathematics is to be rigorous, only a finite number of inferences is admissible in a proof—as if anyone had ever succeeded in carrying out an infinite number of them![39]

6.2 Los enunciados finitistas

Hilbert estableció una división entre, por un lado, lo que denominó proposiciones ideales, aquellas con alguna referencia al infinito y que poseen cuantificadores sin ligar o referidos a números no finitos; y por otro, proposiciones reales, enunciados cuyo contenido es finitario. Estas podían ser, a su vez, de dos tipos:

[39] D. Hilbert, On the infinite, (1925) Traducción de Stefan Bauer- Mengelberg, Recogido en: (van Heijenoort, 1967), pág. 370

Los enunciados estrictamente finitarios son aquellos que satisfacen una serie de condiciones: Los términos singulares deben denotar de forma finita, y la denotación de los términos complejos debe ser calculable a partir de sus partes componentes en un número finito de pasos. Además, los conectores y los operadores deben ser veritativo-funcionales, esto es, el valor de verdad de toda sentencia compuesta a partir de sentencias simples debe ser calculable en un número finito de pasos a partir del valor de verdad de sus partes componentes. Este tipo de enunciados son los propios de la aritmética elemental sin cuantificación. Por ejemplo 356 – 248 = 108. Podemos comprobar su verdad o falsedad en un número finito de pasos.

Los enunciados finitarios generales son aquellos que incorporan fórmulas generales, pero finitariamente decidibles. Su contenido parece apelar a una totalidad infinita, pero no se los considera ideales porque tenemos un procedimiento finito para demostrar sus instanciaciones. Además, su comprensión no exige apelar a ninguna totalidad ni objeto infinito. Las variables pueden sustituirse por un número finito sin ningún problema. Un ejemplo de este tipo de enunciados sería: $5 + x = x + 5$. Sabemos que esta expresión es verdadera pero no porque hayamos comprobado uno por uno los diferentes casos existentes (estaríamos ante una comprobación infinita), sino porque el cuantificador implícito está bien delimitado, aparece ligado a los números naturales finitos.

La aritmética, el análisis, y la teoría de conjuntos poseen enunciados tanto ideales como reales. Podríamos pensar, por ello, que el finitismo rechaza igual que el intuicionismo la matemática clásica; en la medida en que los teoremas de las partes no finitarias de la matemática son proposiciones ideales y, por lo tanto, no pueden ser verdades. Sin embargo, esto no fue lo que defendió Hilbert.

Para poder mantener la validez de las proposiciones ideales en su programa finitista Hilbert apeló a un motivo práctico. Consideró la teoría de Cantor como un sistema que, aunque no esté compuesto de verdades como tal, es un instrumento muy útil para alcanzar verdades finitistas. De este modo los elementos ideales, siempre que se añadan a la teoría de forma legítima y junto con las proposiciones reales, permiten preservar la verdad de la lógica clásica.

6.3 El programa finitista

En su intento de fundamentación de la matemática por métodos finitistas los razonamientos y reglas de inferencia están diseñados, y restringidos, de tal forma que se obtenga el mayor grado de seguridad posible sin que se elimine la posibilidad de demostrar verdades generales.

La meta del programa, además, debía ser más modesta que la de Frege y Russell; por ello Hilbert no pretende ya establecer la verdad más allá de toda duda de las teorías de la aritmética, el análisis, y la teoría de conjuntos, sino que se limita a buscar establecer su fiabilidad finitaria.

Podemos afirmar, pues, que el objetivo de Hilbert era demostrar que mediante los enunciados ideales[40] de la aritmética, el análisis y la teoría de conjuntos; y las leyes simplificadas de la lógica clásica no se podía alcanzar ninguna conclusión falsa.
Su programa constaba de dos partes: Demostrar que la teoría de conjuntos, la aritmética y el análisis son sistemas formales precisos y después demostrar que no puede derivarse ninguna falsedad finitista de ninguno de ellos.

La formalización de teorías es un proceso más complicado que la axiomatización de las mismas. Un sistema formal no consiste sólo en axiomas y reglas de inferencia; se necesita también un lenguaje formal específico (es decir, una lista de símbolos primitivos y una lista finita de formación de reglas, especificadas de modo que haya un modo fiable de decidir si dada cualquier ristra de símbolos estos constituyen o no una fórmula bien formada), y algún procedimiento formal que nos permita generar teoremas.

La segunda parte de su programa consistía en demostrar que esos sistemas formales no poseían consecuencias finitarias falsas, es decir, que no podía derivarse de ellos ninguna falsedad finitaria y que, además, cada una de ellos es consistente.
Vayamos por partes:

En primer lugar, veamos, a grandes rasgos, la base de la demostración de que no hay ninguna fórmula finitaria falsa que se siga de ninguna de estas teorías formales. Pongamos ahora la aritmética como ejemplo. Siendo esta el sistema formal T, S su parte finitaria y φ cualquier falsedad finitaria de T tenemos dos opciones (presuponiendo que T es consistente):

- Que φ sea un enunciado estrictamente finitario, en cuyo caso $\neg\varphi$ sería una verdad estrictamente finitaria de la aritmética y por lo tanto estará en S. Como todas las verdades de S son teoremas de T, $\neg\varphi$ es derivable en T.

Por reducción al absurdo podemos afirmar que si φ fuese derivable en T, entonces $\varphi \wedge \neg\varphi$ también lo sería. Como se trata de una contradicción podemos afirmar que φ no es derivable en T.

- Que φ sea un enunciado finitario general, en cuyo caso poseerá una instanciación falsa: χ, cuya negación es una verdad finitaria de la aritmética luego $\neg\chi$ estará en S, la parte finitaria de T. Como los miembros de S son teoremas de T, $\neg\chi$ será un teorema de T y será derivable del mismo. Si φ fuese derivable de T, entonces χ también lo sería (Por el principio de instanciación universal: si una fórmula general con una variable libre es derivable en T, entonces cualquier instanciación numeral de la misma lo será también). Y si χ fuese derivable en T, entonces también lo sería la conjunción $\chi \wedge \neg\chi$.

De nuevo, estamos ante una contradicción, así que por reducción al absurdo podemos afirmar que φ no es derivable en T. La conclusión a esta demostración es, pues, que no existe ninguna fórmula finitaria falsa que se derive del sistema formal T.

[40] Los elementos no finitistas quedaban justificados demostrando, de forma finitista, que estaban basados en enunciados finitistas verdaderos.

Ahora bien, en estos sistemas formales, la imposibilidad de derivar una falsedad finitaria equivale a la afirmación de la consistencia de los mismos. Un sistema formal es consistente si y sólo si no hay en el lenguaje de ese sistema formal ninguna fórmula tal que tanto ella como su negación son derivables del mismo.
Si este programa hubiese tenido éxito, habría, en efecto, aportado una justificación para la matemática clásica sin la necesidad de restricciones tan severas como las intuicionistas. Sin embargo, en 1931 un trabajo de Gödel acabó por completo con tal posibilidad.

7. LOS TEOREMAS DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL

7.1 Los teoremas de Incompletitud

Hilbert estaba convencido de que todos los problemas aritméticos se llegarían a solventar con el esfuerzo y el tiempo necesarios y de que además lo harían mediante un número finito de procesos lógicos. Los teoremas de Gödel, sin embargo, acabaron con ese optimismo de forma radical. El artículo de 1931, titulado "Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines" comienza afirmando que los dos sistemas formales más completos y exhaustivos hasta la fecha son la teoría de tipos de Russell y Whitehead y la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo – Fraenkel,

> Estos dos sistemas son tan amplios que todos los métodos usados hoy en la matemática pueden ser formalizados en ellos, es decir, pueden ser reducidos a unos pocos axiomas y reglas de inferencia. Resulta por tanto natural la conjetura de que estos axiomas y reglas basten para decidir todas las cuestiones matemáticas que puedan ser formuladas en dichos sistemas. En lo que sigue se muestra que esto no es así, sino que, por el contrario, en ambos sistemas hay problemas relativamente simples de la teoría de los números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas (y reglas). [41]

Lejos de ser sistemas completos, lo que Gödel demuestra, a través de sus teoremas, es que podemos encontrar en estos sistemas formales[42] (y en todo sistema formal que posea una cierta cantidad de aritmética[43]) una expresión indecidible, es decir, que no es ni demostrable, ni refutable en el propio sistema. Veremos más adelante con un poco más de detalle una aproximación a esta demostración.

Se conoce como el Teorema de Gödel, o los Teoremas de la Incompletitud, a los dos teoremas desarrollados en detalle por Gödel en el artículo anteriormente citado. A grandes rasgos:

El primer teorema establece que cualquier sistema formal S con una cierta cantidad de aritmética elemental si es consistente, será también incompleto; esto es, hay en el mismo algún elemento indecidible, algún enunciado que no puede ni demostrarse ni refutarse en S. (Además, independientemente de cuántos axiomas añadamos a este sistema, el mismo no dejará nunca de ser incompleto siempre que sea consistente.) Es preciso no olvidar que el ser demostrable es una propiedad relativa a algún sistema.

---

[41] K. Gödel, (Gödel, Sobre las sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines (1931), 2006) pág. 54

[42] Estos teoremas son teoremas matemáticos y se refieren exclusivamente a sistemas formales (sistemas formados por un lenguaje formal, un conjunto de axiomas en ese lenguaje y unas reglas formales de inferencia.) como la teoría axiomática de la aritmética de Peano o la teoría axiomática de conjuntos ZF.

[43] La forma actual de entender los teoremas de Gödel es generalizándolos para todo sistema formal (que contenga un cierto componente aritmético, veremos más adelante qué significa esto). Esto no es posible hasta 1963, por este motivo Gödel se refiere en concreto al sistema formal que consiste en la lógica de la teoría de tipos que Russell desarrolla en los Principia Mathematica en conjunción con los axiomas de la aritmética de Peano, a sistema formal lo denomina PM.

Lo que el teorema nos dice es que hay algo indecidible en ese sistema, no que existan verdades matemáticas que no puedan demostrarse de forma absoluta.
El segundo teorema afirma que para todo sistema formal S con una cierta cantidad de aritmética, si S es consistente, entonces esa consistencia no es demostrable dentro de S.

Para llevar a cabo estas demostraciones Gödel ideó un método que le permitía asignar números naturales a los elementos del sistema formal, de modo que lograba hacer referencia a los objetos sintácticos y a sus propiedades formales utilizando códigos numéricos y propiedades aritméticas, respectivamente. Lo relevante es que de esta forma podemos representar formalmente dentro de la aritmética conceptos meta-matemáticos como la derivabilidad y crear sentencias que bajo la interpretación determinada pueden leerse como hablando acerca de la derivabilidad de los objetos del sistema. (Estas sentencias, por un lado, atribuyen ciertas propiedades aritméticas a ciertos números; pero, por otro lado, pueden entenderse también como afirmando propiedades meta-matemáticas de ciertos objetos del sistema, en función de a qué elementos correspondan esos números).

> Los conceptos (o enunciados) metamatemáticos se convierten así en conceptos (respectivamente, enunciados) sobre números naturales o sucesiones de números naturales y por tanto pueden ser (al menos en parte) expresados con los símbolos del sistema PM. En particular se puede mostrar que los conceptos «fórmula», «deducción» y «fórmula deducible» son definibles en el interior del sistema PM[44]

Así, ciertas sentencias además de referirse a propiedades aritméticas, hacen referencia a propiedades sintácticas. Dando un paso más, Gödel consiguió también crear sentencias que se atribuían esas propiedades sintácticas a sí mismas; de nuevo, leídas bajo la interpretación correspondiente. Veremos esto más adelante.

Lo primero que necesitamos saber es cómo especificar una enumeración para los objetos sintácticos de cualquier sistema formal S. Cada objeto sintáctico debe poseer asignado un único código numérico de forma que: Dado cualquier objeto sintáctico podamos siempre calcular y obtener su código numérico, y dado cualquier número podamos saber si codifica o no un objeto sintáctico y si es así, de cuál se trata. A esto se le denomina Numeración de Gödel. A continuación[45], podemos ya representar en términos de predicados aritméticos las propiedades formales que nos interesan. Para cada propiedad relevante Gödel mostró cómo encontrar un predicado aritmético que sea verdadero exactamente para aquellos números cuyo código se refiere a objetos sintácticos que poseen esa propiedad:
Siendo T una teoría aritmética, que incluye PRA, y F una propiedad formal de S;
F se representa en T mediante el predicado (del lenguaje de T) $\varphi(x)$ syss para todo numeral n en ese lenguaje de T se cumple que:

Si n codifica un objeto que posee la propiedad F, $\varphi(n)$ es derivable en T.
Si n no codifica un objeto con F, $\neg\varphi(n)$ es derivable en T.

[44] (Gödel, Sobre las sentencias formalmente indecidibles (1931), 2006), pág. 55
[45] En lo sucesivo, sigo a M. Guiaquinto en: (Giaquinto, 2002)

Esta misma definición se aplica también a las relaciones formales.
De esto se sigue que, asumiendo que si α representa un objeto sintáctico, entonces [α] representa el número de Gödel que denota el código de α; para todo predicado φ que representa la propiedad F en T, α cumple F syss $\varphi([\alpha])$ es verdadero. De este modo pueden definirse en el sistema nociones como ser una deducción, ser demostrable, etc. Además, como decíamos, dada cualquier propiedad aritmetizable con una variable libre, existe siempre un predicado que predica esa propiedad de sí mismo, de su propio número de Gödel.

Para lograr la autorreferencia en este lenguaje aritmético se utiliza el Lema Diagonal.
Supongamos que T es una teoría formal verdadera de la aritmética del sistema formal S y que φ(x) es una fórmula del lenguaje de S con sólo una variable libre. La clave de este procedimiento estriba en que podemos demostrar en T que, para todo predicado monádico (para toda propiedad) φ de T, hay una sentencia α en ese mismo lenguaje que equivale a φ([α]); es decir, una sentencia que dice que ella misma, su número de Gödel, satisface esa propiedad. Veamos con un poco más de detenimiento cómo funciona esto:
La función diagonal es una función recursiva **d**, tal que **d** $([\varphi_n]) = \varphi_n([\varphi_n])$; es decir, se trata de una función que aplicada a todo código de un predicado monádico nos da el número de Gödel que codifica la sentencia que afirma que él mismo satisface ese predicado.
Por lo tanto, si [φ(y)] es el código de un predicado monádico cualquiera del lenguaje de S, su diagonalización (el resultado de aplicarle la función diagonal) se consigue reemplazando la variable libre por **d**(x), obteniendo así φ([**d**(x)]).
En lo sucesivo, para facilitar la comprensión, voy a hablar de propiedad en lugar de predicado monádico.
Entonces:

1. Como decía, si aplicamos la función diagonal a φ[(y)], es decir, sustituimos las variables libres por **d**(x), obtenemos φ([**d**(x)]), lo que vamos a denominar m. Es decir, en términos intuitivos lo que la diagonalización de φ[(y)] nos da es el número de Gödel de aquel predicado que dice de sí mismo que satisface la propiedad φ, es decir, m

2. Si a este mismo predicado le aplicamos la función diagonal obtenemos α, el número de Gödel de la sentencia que afirma que la diagonalización del predicado anterior (m) posee la propiedad φ. Lo relevante es que aplicar la función diagonal a m da lugar al número de Gödel de una sentencia autorreferente.

   Vayamos por partes, para obtener **d**(m) lo que debemos hacer es sustituir todas las variables libres en la fórmula que obtenemos en el paso 1 (es decir, lo que hemos llamado m) por la misma m. Obtenemos así: $\varphi(\mathbf{d}[\varphi(\mathbf{d}(\mathbf{x}))])$ o lo que es lo mismo $\varphi(\mathbf{d}[(\mathrm{m})])$. Podemos llamar a esto α, y es el número de Gödel de la sentencia que afirma que la diagonalización de m posee la propiedad φ.

3. Lo relevante es que esa diagonalización a la que se hace referencia en el punto anterior tiene como resultado la sentencia cuyo número de Gödel es α, podemos llamarla Aα. Por este motivo podemos afirmar que se trata de una sentencia autorreferente: La sentencia cuyo número de Gödel es α, Aα, afirma que la sentencia cuyo número de Gödel es α posee la propiedad φ. En última instancia, lo que afirma es que ella misma posee la propiedad φ.

Hemos dicho que este procedimiento es válido para todo predicado monádico de T, por lo que podemos crear sentencias que, bajo su interpretación aritmética, sean verdaderas si y sólo poseen la propiedad que afirman tener. En concreto nos interesa la sentencia que dice de sí misma no ser demostrable en T. A esta se le denomina fórmula G o la fórmula de Gödel para T y se trata de aquella fórmula que, según el Primer Teorema, es indecidible en todo sistema formal del tipo de los que estamos considerando.

Este tipo de autorreferencia es la que encontramos también en la paradoja del mentiroso. No hay, sin embargo, motivo alguno por el que desconfiar.[46] El lema diagonal no conduce a contradicciones porque no puede aritmetizarse la propiedad "ser verdadero en T".
Tarski demostró lo que se conoce como el Teorema de la no definibilidad de la verdad: Sea L un lenguaje formal de la aritmética, decimos que una determinada propiedad P de las sentencias de ese lenguaje es definible en el mismo cuando existe un predicado unitario aritmético φ tal que, para todo número, φ(n) es una verdad de la aritmética si y sólo si n es el código de una sentencia de L que posee P.

La demostración de Tarski de que ser verdadero no es un predicado válido en L se trata de una reducción al absurdo:

Supongamos que esa propiedad (ser una verdad aritmética) fuese aritméticamente definible. Entonces, habrá en L un predicado aritmético verdadero Tr(x) para exactamente aquellos números que codifican sentencias en L que son verdaderas, bajo su interpretación aritmética estándar. Tenemos, pues, que para toda sentencia χ de L, χ es verdadero syss Tr([χ]) es verdadero: $\chi \leftrightarrow Tr([\chi])$.
Además, si esta propiedad existe también lo hará su negación, aquella que indica que algo no es una verdad aritmética ¬Tr(x) y, por el lema diagonal, existirá a su vez en L una sentencia β que afirme que ella misma no es una verdad aritmética. De este modo, $\beta \leftrightarrow \neg Tr([\beta])$: Ha de existir una sentencia β que sea verdadera si y sólo si no es verdadera.
Sin embargo, habíamos afirmado ya que $\chi \leftrightarrow Tr(\chi)$ se cumple para toda sentencia de L, luego deberá ser verdadera también en el caso de β: $\beta \leftrightarrow Tr([\beta])$.
Dos afirmaciones equivalentes a una tercera son equivalentes entre sí, lo que nos permite afirmar: $Tr([\beta]) \leftrightarrow \neg Tr([\beta])$. Esto es, sin embargo, una contradicción. Podemos afirmar, pues, que la propiedad de ser una verdad aritmética no es aritméticamente definible. No puede haber un predicado aritmético que exprese la verdad.

[46] Cf. Marcus Guiaquinto en: (Giaquinto, 2002)

7.4 Consecuencias

Una consecuencia fundamental de los teoremas de Gödel es que un sistema formal de la matemática no puede ser totalmente comprensivo; por lo que la meta de lograr un conjunto formal abarcador de todos los principios de la matemática ha quedado totalmente abandonada. Lo que Gödel mostró es que existe una fórmula, la fórmula G, que no es demostrable en T, si esta es consistente. Además, si T es lo que Gödel denominó ω-consistente entonces tampoco puede demostrarse en T la fórmula ¬G (Y es en este sentido que se dice que se trata de una fórmula indecidible).[47]

En términos intuitivos, una teoría es ω-consistente si no permite deducir al mismo tiempo una fórmula existencial ∃xPx y las infinitas fórmulas ¬Pn, para todo número natural n; es decir, no permite deducir que existe algún n que cumple la propiedad P y a la vez que cada uno de esos n no posee tal propiedad.

Si recordamos la jerarquía de las afirmaciones aritméticas:

Las de tipo Π_0 y Σ_0 (ambas son dos formas de expresar lo mismo) son aquellas que no poseen cuantificadores o están acotados. Su verdad o falsedad puede comprobarse en un número finito de casos, mediante cálculos aritméticos. Se tratan de las afirmaciones aritméticas más simples y deben ser demostrables por cualquier teoría aritmética, por básica que esta sea.

Las afirmaciones de tipo Π_1 son aquellas formadas por una serie de cuantificadores universales y una fórmula de tipo Σ_0. Si son verdaderas jamás podremos comprobarlo mediante un número finito de casos, pero si son falsas sí, su comprobación será finita. De este tipo es la negación de la fórmula G, la fórmula G.

Las afirmaciones de tipo Σ_1 son aquellas constituidas por cuantificadores existenciales sucesivos y una fórmula de tipo Π_0. Lo interesante es que si estas son verdaderas podremos demostrarlo en un número finito de casos realizando una comprobación individual, comprobando uno a uno cada elemento. Sin embargo, si una afirmación de este tipo fuese falsa no podríamos saberlo mediante una comprobación finita. La fórmula ¬G es de este tipo.

En definitiva, estamos ante una definición recursiva en la que: Π_{n+1} = Una serie de cuantificadores universales y, al final, una sentencia de tipo Σ_n y Σ_{n+1} = Una lista de cuantificadores existenciales y una sentencia de tipo Π_n.

Para poder demostrar el teorema de Gödel es necesario que los axiomas sean capaces de demostrar todas las verdades aritméticas de tipo Σ_0 / Π_0. Y si estas son demostrables, las de tipo Σ_1 también lo serán, pues recordemos que son aquellas que precedidas de cuantificadores existenciales y si podemos demostrar todas las afirmaciones de tipo Pn no resulta difícil advertir que podamos demostrar también que ∃xPx. (Cualquier teoría aritmética, por básica que sea, demuestra estos tipos de afirmaciones aritméticas.)

[47] Posteriormente Rosser demostró que la condición de la ω-consistencia podía sustituirse por la de consistencia. Reformuló el teorema de forma que, ahora sí, podemos afirmar que: Todo sistema formal que contenga PRA, si consistente, es incompleto. A este primer teorema se le denomina en ocasiones, por este motivo, El teorema de Gödel-Rosser.

Lo que no podemos demostrar a partir de todos los casos Pn (P_0, P_1, P_3, ...) es que $\forall x Px$. La fórmula G es de este tipo, una afirmación aritmética de tipo Π_1. Resulta interesante tener en cuenta que la incompletitud de la que da cuenta Gödel comienza en el nivel más bajo posible, de hecho, es el tipo de afirmación más simple que se debería poder demostrar. Se trata de una afirmación aritmética que afirma que todos los elementos poseen una propiedad P y esto no puede demostrarse a pesar de que sí podamos mostrar como cada uno de esos elementos, de forma individual, cumplen P.
De este modo lo que el Primer Teorema de Gödel afirmaría, sin la aportación de Rosser, es que para toda teoría aritmética ω-consistente capaz de representar todas las afirmaciones aritméticas de tipo Σ_1 existe una fórmula indecidible: la fórmula G (ni ella ni su negación son deducibles de T). Con los Teoremas de Gödel queda demostrado, pues, que la pretensión de axiomatizar por completo la aritmética, de encontrar un conjunto de axiomas sobre los cuales derivar todas las verdades (y evidentemente sólo las verdades) de esa teoría, es una tarea imposible de llevar a cabo. Si a esto le añadimos el segundo teorema, la demostración de que ningún sistema formal puede demostrar su propia consistencia, podemos comprender por qué motivo se considera que los teoremas de Gödel suponen el fin del programa fundacional de Hilbert, quien, como ya vimos, pretendía demostrar que, de la teoría de conjuntos, la aritmética y el análisis (una vez formalizados de forma adecuada) no se seguía ninguna consecuencia finitaria falsa y que, por ello, esos sistemas formales eran consistentes.

Por último, hay una consideración[48] que debemos tener en cuenta. El segundo Teorema de Gödel (en el que no vamos a entrar más en detalle por su complejidad y porque aun en la actualidad no están del todo claros su significado e implicaciones) a grandes rasgos nos dice que, si un sistema formal S es consistente entonces su propia consistencia no podrá demostrarse en S; es decir, exclusivamente mediante los métodos y principios contenidos en ese mismo sistema. Sin embargo, esto no impide que la consistencia de S no sea demostrable en otros sistemas formales. Esto tampoco significa que la consistencia de un sistema formal S sólo pueda demostrarse en un sistema formal más fuerte que S, un sistema formal que permite demostrar lo mismo que S y algunas cosas más. Lo que el Segundo Teorema nos parece indicar es, únicamente, que la consistencia de S no puede demostrarse desde el propio S. De cualquier modo, y aunque Gödel no nos hubiese demostrado esto, sería extraño, podemos pensar, demostrar la consistencia de un sistema desde el propio sistema, en la medida que si lo que está puesto en duda es la validez de un sistema, ¿Por qué habríamos de aceptar una prueba de consistencia ofrecida desde el mismo?

[48] Cf. Torkel Franzén en: (Franzén, 2005)

8. ¿CUÁL ES LA SITUACIÓN ACTUAL? CONCLUSIONES.

8.1 La independencia de la hipótesis del Continuo.

Como ya vimos, Hilbert defendía en su artículo "On the infinite" la necesidad de clarificar la noción de infinito y de dotar a la matemática de un método lo suficientemente riguroso para evitar las paradojas, pero que a su vez no supusiese un rechazo de la tradición.

> If we pay close attention, we find that the literature of mathematics is replete with absurdities and inanities, which can usually be blamed on the infinite. […] But there is a completely satisfactory way of escaping the paradoxes without committing treason against our science. […] No one shall be able to drive us from the paradise that Cantor created for us.[49]

Ahora que sabemos que la pretensión de Hilbert jamás podrá llevarse a cabo, ¿En qué lugar quedan la teoría de conjuntos y la teoría de los transfinitos de Cantor?
Unas páginas más atrás vimos también como para un realista como Gödel la teoría axiomática de conjuntos estaba perfectamente fundamentada y como la cuestión se torna mucho más problemática si no estamos dispuestos a asumir un compromiso ontológico de tal calibre. Si no queremos admitir la existencia de los objetos y las verdades de la matemática independiente a nosotros y nos situamos en una posición de tipo anti-realista que considere que las matemáticas son una creación humana la rigurosidad del proceder matemático se torna aún más exigente.
Además de las objeciones y críticas que se le dirigen comúnmente al realismo[50] existe otro motivo por el cual una confianza tan optimista en la teoría axiomática de conjuntos fue acogida con muchas reticencias: La independencia de la hipótesis del continuo de Cantor con respecto a los axiomas de la teoría.

En 1938 Gödel demostró que, si la teoría axiomática de conjuntos de primer orden era consistente lo seguiría siendo si se añadiese a sus axiomas la Hipótesis del Continuo (HC). Además, Cohen logró demostrar también que lo mismo sucedía si, en lugar de incorporar a la teoría la hipótesis del continuo, le añadíamos su negación. A partir de estos dos resultados podemos afirmar que HC es deductivamente independiente de los axiomas de ZF. La cuestión es que este descubrimiento potenció la creencia anti-realista de que la teoría de los transfinitos de Cantor, e incluso los conjuntos infinitos, no son sino un mero formalismo, algo vacío y de lo que ni siquiera tiene sentido preguntarse si es verdadero o falso.

---

[49] D. Hilbert, "On the infinite", recogido en: (van Heijenoort, 1967), págs. 370, 375, 376

[50] Como ya vimos, estas se dirigen principalmente a la cuestión de dónde y de qué forma existen los objetos o verdades de la matemática, si aceptamos su existencia real; y cómo somos nosotros capaces de acceder a ese dominio cuya existencia es, de alguna forma, independiente a nosotros.

Robinson afirma en un artículo titulado "From a formalist's point of view"[51] que no tiene sentido hablar de conjuntos, en la medida en que estos son algo que carece de significado. No obstante, oponiéndose también a un enfoque puramente constructivista adopta una postura intermedia entre este y el realismo y defiende que, a pesar de que no existan las totalidades infinitas, no hay ningún problema en desarrollar la matemática de la forma clásica, utilizando la noción de infinito y tratando los conjuntos infinitos 'como si existieran'.

Lo que no tiene sentido, especialmente después de descubrimientos como la mencionada independencia de HC o el descubrimiento de que existen varios axiomas del infinito, es creer que aquello que la matemática está estudiando existe realmente y por tanto debe ser verdadero o falso independientemente de que seamos o no capaces de saberlo:

> As long as it appeared that the accepted axiomatic systems of set theory such as the system of Zermelo-Fraenkel were able to cope with all set theoretical problems which are of interest to the working mathematician, belief in the existence of a unique « universe of sets » was almost unanimous. However, this simple view of the situation has been severely shaken in recent years by two distinct developments. One of these was sparked by Paul Cohen's proof of the independence of the continuum hypothesis […] Nevertheless, the orthodox platonist believes that in the real world such an axiom must be either true or false […].[52]

La independencia de la HC[53] tuvo un tan poderoso efecto debido a que no se trató de algo aislado, sino que junto a ella se realizaron una serie de descubrimientos de vital relevancia: Además de demostrar su independencia con respecto a ZF se puso también de manifiesto que la hipótesis del continuo seguiría siendo independiente con respecto a la teoría de conjuntos incluso aunque a esta se le añadiese un número cualquiera de axiomas del infinito cada vez más poderosos; axiomas que afirmarían la existencia de cardinales inaccesibles de tamaño cada vez mayor.

Otro descubrimiento relevante y relacionado fue la constatación de que existe un amplio rango de hipótesis rivales sobre la cardinalidad del continuo que son consistentes con la teoría de conjuntos, bajo el supuesto de que esta también lo es.

Es por estas razones que, entre algunos autores, triunfó la creencia de que la cuestión acerca de la cardinalidad del continuo (recordemos que fue este el punto de partida de las investigaciones de Cantor y lo que le llevó a realizar multitud de descubrimientos de gran relevancia) no tiene sentido por tratarse este último de un mero artefacto teórico. De igual manera, la teoría de los cardinales infinitos no sería más que una ilusión.

Ante esto podemos responder que, en realidad, estas conclusiones poseen la misma validez que las contrarias, aquellas que afirman que la teoría axiomática de conjuntos es una teoría en la que podemos confiar y que no supone ningún problema que existan cuestiones, como la hipótesis del continuo, cuya verdad o falsedad permanece

---

[51] (Robinson, 1969)

[52] Robinson, A. (1969). "From a formalist's point of view". Dialectica, 23(1), 45-49. (Obtenido de http://www.jstor.org/stable/42968450), pág. 46

[53] En lo sucesivo, sigo a Marcus Guiaquinto en: (Giaquinto, 2002)

indeterminada; pues, en última instancia, remiten a algo que existe y que debe ser de un modo u otro. Esta última argumentación es válida exclusivamente si adoptamos un punto de vista muy determinado, pero lo mismo sucede con la anterior.

Para que sea aceptable considerar que las ideas de Cantor no poseen realidad alguna y son una mera elaboración teórica o una posición como la de Robinson es preciso adoptar, de forma explícita, una postura anti-realista.
Lo importante es advertir como tomar posición en una cuestión como esta exige tomar partido por uno u otro modo de comprensión de la realidad. A su vez, ambos enfoques parten de unos supuestos igual de fuertes (a saber, que no hay verdades matemáticas no cognoscibles o que las verdades matemáticas existen al margen de nuestra capacidad de comprenderlas) lo que parece justificarlos (o no) a ambos en la misma medida.
De cualquier forma, si hay algo que podamos afirmar sin dudar es que la hipótesis del continuo y el axioma de elección son aspectos independientes a la teoría de conjuntos y que, por lo tanto, su verdad o falsedad no suponen, al menos en principio, ninguna amenaza para la validez de la misma. Además, los axiomas implícitos en la concepción iterativa[54], junto con los principios de extensionalidad y de elección arbitraria, nos permiten capturar todo lo que en la práctica se utiliza y tiene interés de la teoría de conjuntos lo que hace poco plausible la idea de que estemos ante un mero conglomerado de afirmaciones establecidas simplemente para evitar la aparición de paradojas.

8.2 Propuestas actuales

Sería un error considerar que con los teoremas de Gödel se terminaron las propuestas fundacionales. Desde entonces ha habido varios programas, si bien es cierto que ninguno tan ambicioso como los anteriores.[55] Simplemente por citar alguno podemos mencionar, por ejemplo, a S. Simpson o H. Friedman. No nos interesa ahora entrar en detalle en la obra de estos autores, baste con tener que presente que su programa (Lo que se conoce como‘Reverse mathematics’) puede verse como una realización parcial del programa de Hilbert.

> We therefore formulate our Main Question as follows: Which set existence axioms are needed to prove the theorems of ordinary, non-set-theoretic mathematics? In any investigation of the Main Question, there arises the problem of choosing an appropriate language and appropriate set existence axioms. Since in ordinary mathematics the objects studied are almost always countable or separable, it would seem appropriate to consider a language in which countable objects occupy center stage. For this reason, we study the Main Question in the context of the language of second order arithmetic.[56]

---

[54] La concepción iterativa es la articulación teórica atribuida a Zermelo de los axiomas de ZF. El universo conjuntista es visto como una jerarquía acumulativa de etapas cuyos elementos son los conjuntos.
[55] Cf. Marcus Guiaquinto en: (Giaquinto, 2002)
[56] (Simpson, 2006), Pág. 2

El objetivo principal de este enfoque es encontrar aquellos axiomas que son realmente necesarios para la demostración de teoremas matemáticos y para tal estudio se sirven de la aritmética de segundo orden, cuyo sistema formal denominan Z_2. Además, por un subsistema de Z_2 entienden un sistema formal cuyos axiomas son teoremas de Z_2.

De este modo, lo que demuestran es que para la mayoría de los teoremas τ relevantes del análisis existe un subsistema de Z_2 en el que τ es derivable.
Simpson apela a cinco grandes subsistemas de la aritmética de segundo orden. Como decía, no vamos a considerar estas ideas[57] pero veamos, muy a grandes rasgos en qué sentido podemos considerar este enfoque de la matemática como continuador de la obra de Hilbert: Uno de esos subsistemas de Z_2, el denominado WKL_0, es establecido en términos finitistas y lo relevante es que puede derivarse en él una gran parte de la matemática clásica no finitista. De este modo, consideran estos autores, un amplio número de elementos de la matemática más utilizada queda establecido como fiable, como algo seguro y no susceptible de derrumbarse.

Dejando de lado el finitismo existen también propuestas fundacionales posteriores a los teoremas de Gödel. Feferman[58], por ejemplo, desarrolló un programa predicativista en el que desarrolló una teoría formal de tipos a la que denominó W cuya base era $\mathbb{N}$ y que prohibía las definiciones impredicativas para no contradecir el principio del Círculo Vicioso. En esta teoría, advirtió Feferman, podía derivarse una gran parte del análisis; y por ello postuló que toda la matemática necesaria para las ciencias naturales podía desarrollarse en W.

Estos y muchos otros enfoques nos ponen sobre la pista de que podemos considerar como justificadas muchas partes de la matemática clásica y de que, aunque no exista ni pueda existir una axiomatización completa de la misma, podemos confiar en su fiabilidad.
De cualquier modo, puede ser interesante también mencionar que no todos los autores comparten estas opiniones. El debate continúa abierto aún en nuestros días y, evidentemente, la cuestión es mucho más compleja de lo que la hemos expuesto aquí. No descartamos, por ello, realizar en el futuro un nuevo acercamiento más riguroso y pausado a estas y otras propuestas recientes que podrá ser de gran ayuda además a la hora de clarificar en qué consiste la práctica matemática y qué papel juega la lógica en ella.

Sería relevante considerar, ya para finalizar, la obra de J. Hintikka quien no comparte la misma confianza en la teoría axiomática de conjuntos que el resto de autores mencionados. Afirma en "Language, truth and mathematics" que es un error considerar la teoría axiomática de conjuntos como la forma más adecuada de enfrentarse a la fundamentación de la matemática.

[57] Para más información: (Simpson, 2006)
[58] Cf. Guiaquinto en: (Giaquinto, 2002)

> It suffices to point out that it is by no means obvious that all mathematics should be approached via set theory. Not only are there serious alternatives to the status of first-order axiomatic set theory (…) I shall in fact try to show on another occasion that, independently of the claims of such rivals, set theory is not the natural foundation of mathematical theories.[59]

Su propuesta es adoptar lo que denomina 'Independence friendly logic', (Lógica IF[60]) una extensión de la lógica de primer orden en la que puede expresarse una mayor variedad de independencia y dependencia de los cuantificadores. Para Hintikka la clave para que los teoremas de Gödel no supongan ningún problema en la búsqueda de fundamentación reside en comprender la lógica de una forma novedosa y más expresiva. De este modo, afirma, podemos escapar al derrotismo que triunfó tras los Teoremas de la Incompletitud y volver a emprender una búsqueda de fundamentación para la matemática desde una perspectiva diferente.

> My work here represents an attempt to return to some of the classical foundational problems in a new way. I propose to rethink the role of logic in the foundation of mathematics and thereby to gain a novel perspective on some of the classical problems. […] There are much better prospects for getting a grip of the classical problems in the foundations of mathematics by means of the tools of modern logic than most recent observers have realized. In order to make use of these possibilities, however, we must take a fresh view of logic itself and its role in mathematics. What can logic do for mathematics? [61]

No vamos a profundizar más en las características de la lógica IF, ni de la obra de Hintikka en este trabajo. Como decía, basta con advertir que no todas las propuestas existentes consideran la teoría axiomática de conjuntos como la mejor forma de fundamentar la matemática y que en la actualidad el debate acerca del tema que hemos estado considerando aún permanece abierto.

---

59 (Hintikka, 1998), pág.2

60 Como características propias de esta lógica podemos un par de aspectos llamativos: que no es axiomatizable y que viola el principio de composicionalidad y en consecuencia admite la noción de verdad de Tarski.

61 (Hintikka, Is there Completeness in Mathematics after Gödel?, 1998), Págs. 63-64

BIBLIOGRAFÍA

ARISTÓTELES. *Metafísica,* Madrid, Gredos, 2014

CANTOR, George. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers,* United States, New York Dover Publications, 1915

CANTOR, George. *Letter to Dedekind*, 1899, En: (van Heijenoort, 1967), págs. 113-117

FRANZÉN, Torkel. *Gödel's Theorem. An incomplete Guide to it Use and Abuse*, United States, A K Peters Ltd, 2005

FREGE, Gottlob. *Letter to Russell,* 1902, En (van Heijenoort, 1967), págs. 126-128

FRIEND, Michèle. *Introducing philosophy of mathematics*, Stocksfield, Acumen Publishing Ltd, 2007

GIAQUINTO, Marcus. *The search for Certainty*, United States, Oxford university press, 2002

GÖDEL, Kurt. *¿Qué es el problema del continuo de Cantor?*, 1947, En: En GÖDEL, Kurt. *Obras completas*. Madrid, Alianza editorial, 2006, págs. 345 - 370

GÖDEL, Kurt. *La lógica matemática de Russell*, 1944, En: En GÖDEL, Kurt. *Obras completas*. Madrid, Alianza editorial, 2006, págs. 313-343

GÖDEL, Kurt. *Sobre las sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines*, 1931, En: En GÖDEL, Kurt. *Obras completas*. Madrid, Alianza editorial, 2006, págs. 53-87

HILBERT, David. *On the infinite*, 1925, En: (van Heijenoort, 1967), págs. 367-392

HINTIKKA, Jaakko. Is there Completeness in Mathematics after Gödel?. En Hintikka, Jaakko, *Language, Truth and Logic in Mathematics*, págs. 62-83, Dordrecht, Springer Science & Business Media, 1998

HINTIKKA, Jaakko. What Is Elementary Logic? Independence-Friendly Logic as the True. En J. Hintikka, *Language, truth and logic in mathematics,* págs. 1-26, Dordrecht, Springer Science & Business Media, 1998

ROBINSON, Abraham. From a formalist's point of view, 1969, *Dialectica, Vol. 23, No. 1*, 45 - 49. Obtenido de www.jstor.org/stable/42968450

RUSSELL, Bertrand. *Letter to Frege*, 1902, En págs. 124-125.

SIMPSON, Stephen G. *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Cambridge, Perspectives in Logic, 2006

SMULLYAN, Raymond. *Satán, Cantor y el Infinito,* Barcelona, Gedisa editorial, 2000

SUPPES, Patrick. *Teoría axiomática de conjuntos,* colombia, Editorial norma, 1968

TILES, Mary. *The philosophy if set theory. An historial introduction to Cantor's Paradise,* Mineola, Dover publications, 1989

TORRETTI, Roberto. *El paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía matemática,* Santiago de Chile, Editorial universitaria, 1998

VAN HEIJENOORT, Jean. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879 - 1931,* United states, Harvard University Press, 1967