UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA GAUGE Y GRAVITACION.

TESIS DOCTORAL

José Fernando Pascual Sánchez

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

FACULTAD DE CIENCIAS (Sección Físicas)

TESIS DOCTORAL

Autor: José Fernando Pascual Sánchez

Título: TEORIA GAUGE Y GRAVITACION

Tribunal de Tesis

Presidente: Dr. D. DARIO MARAVALL CASESNOVES
Catedrático de Mecánica de la Escuela de Ingeniería Superior de Madrid

Vocales: Dr. D. JOSE MARTINEZ SALAS
Catedrático de Mecanica Teórica de la Universidad de Valladolid

Dr. D. JOSE MANUEL AROCA HERNANDEZ-ROS
Catedrático de Geometría de la Universidad de Valladolid

Dr. D. EMILIO SANTOS CORCHERO
Catedrático de Física Teórica de la Universidad de Santander

Secretario: Dr. D. JESUS MARTIN MARTIN
Catedrático de Física Matemática de la Universidad de Salamanca

Realizada la lectura de la Tesis el día 30 de Septiembre de 1983 fue calificada de SOBRESALIENTE "CUM LAUDE"

TEORIA GAUGE Y GRAVITACION

Memoria que presenta José-Fernando Pascual Sánchez para optar al grado de Doctor en Ciencias (Sección de Físicas).

INDICE

INTRODUCCION 1

CAPITULO A : RESUMEN CRITICO DE LAS TEORIAS METRICAS DE GRAVEDAD Y DE SU CUANTIFICACION

1) LA TEORIA DE EINSTEIN-HILBERT 4

i) Formulación Einsteiniana ó intuitiva

ii) Formulación de Hilbert ó Lagrangiana

2) TEORIAS DEL TIPO EDDINGTON-WEYL 12

3) RESUMEN DE LA "CUANTIFICACION" DE LAS TEORIAS METRICAS . 14

4) FUENTES CON MASA Y SPIN EN TEORIAS METRICAS 18

5) CONCLUSIONES DE ESTE CAPITULO 27

CAPITULO B : TEORIAS GRAVITATORIAS CON TORSION

1) INTRODUCCION 28

2) GEOMETRIA DE CARTAN 31

3) LA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN 38

4) TEORIAS CON TORSION DINAMICA 45

5) CUANTIFICACION COVARIANTE DE LAS TEORIAS CON TORSION .. 50

CAPITULO C : TEORIA GAUGE GENERAL

1) MOTIVACION 52

2) INTRODUCCION 54

3) EL NACIMIENTO DE LA IDEA GAUGE 55

4) ESTRUCTURA DEL METODO GAUGE 59

i) Invariancia gauge global

ii) Invariancia gauge local. Programa de Utiyama

5) RESUMEN DEL METODO GAUGE 83

CAPITULO D : TEORIA GAUGE DE GRAVITACION

1) INTRODUCCION 88

i) Propósito y filosofía

ii) Métodos y formalismos

2) DIFERENCIAS CON LAS TEORIAS INTERNAS USUALES 93

3) TRANSFORMACIONES INTERNAS Y EXTERNAS 94

4) LA TEORIA GAUGE DE T_4 97

i) El método

ii) Relatividad General como teoría T_4

iii) Ecuaciones de campo de la teoría gauge T_4

iv) Ejemplos de teorías gravitatorias

5) LA TEORIA GAUGE DE O(3,1,R) 111

i) El método

a) Introducción

b) Invariancia Lorentz Global

c) Invariancia Lorentz Local

ii) Invariancias de $L(h, \hat{D}h, \phi, \hat{D}\phi)$

a) Parte 1ª

b) Parte 2ª

iii) El Lagrangiano del campo exterior O(3,1,R)

iv) Ecuaciones de campo generales

v) Identidades Nöther

6) LA TEORIA GAUGE DE O(3,1,R) CON TORSION NULA 126

7) DISCUSION DE LAS TEORIAS GAUGE O(3,1,R) E IO(3,1,R) .. 131

i) O(3,1)

ii) IO(3,1)

iii) Criticas al esquema O(3,1)

8) LA TEORIA GAUGE POINCARE ROTA 139

i) Construcción

ii) Límites

iii) Ecuaciones de campo e identidades generales

9) LIMITES DE LA TEORIA POINCARE ROTA 149

i) Introducción

ii) Ligadura de torsión nula (V_4)

iii) Ligadura de curvatura Cartan nula (T_4)

10) LAGRANGIANOS GRAVITATORIOS 154

i) Lagrangiano gravitatorio general

ii) Diversos Lagrangianos específicos

11) CRITERIOS QUE DEBE VERIFICAR EL LAGRANGIANO GRAVITATORIO .162

i) Introducción

ii) Criterios experimentales

iii) Criterios teóricos

12) ECUACIONES DE CAMPO EXPLICITAS DEL LAGRANGIANO GENERAL ..176

13) VIABILIDAD DE LOS LAGRANGIANOS GRAVITATORIOS CON TORSION .183

i) Comparación con los tests

ii) Conclusión del apartado

Apéndice 1 : Notación en componentes y Geometrías métrico-afines 190

Apéndice 2 : Notación con formas diferenciales 205

Apéndice 3 : Formalismo general del cálculo variacional . 235

Apéndice 4 : Fibrados 247

CONCLUSIONES 258

REFERENCIAS 260

D. JOSE MARTINEZ SALAS CATEDRATICO DE MECANICA TEORICA Y DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

CERTIFICA : que la presente Memoria titulada "TEORIA GAUGE Y GRAVITACION" ha sido realizada bajo mi dirección, en el Departamento de Física Teórica de la Universidad de Valladolid, por D. JOSE FERNANDO PASCUAL SANCHEZ y que constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Físicas.

Y para que conste a los efectos oportunos, firmo la presente en Valladolid a 1 de Septiembre de 1983

Fdo. Prof. J. Martínez Salas.

AGRADECIMIENTOS

Deseo aquí expresar mi mas sincero y profundo agradecimiento al Prof J.Martínez Salas,Director del Departamento de Física Teórica, por la dirección del presente trabajo, así como por su apoyo moral.

Tambien quiero agradecer a todos mis compañeros de Departamento, la atmósfera de amistad que se ha respirado en él.En particular, agradezco conversaciones con el Prof M. Santander y el apoyo que siempre me ha ofrecido el Prof A Gómez Trapote.

Asimismo, deseo agradecer conversaciones con profesores de otros Departamentos y Universidades, en especial Prof J.Martin.

No quiero olvidarme tampoco de agradecer el ambiente cálido y afectuoso que viví en el 6º Curso de Cosmología y Gravitación de la Escuela de Erice,en Mayo de 1979 y en particular las conversaciones que allí mantuve con el Prof F W Hehl.

Gracias tambien a todas las personas con las que he mantenido correspondencia o que me han enviado sus trabajos.

Por último, quiero expresar mi reconocimiento a Sagrario Núñez, por la labor de mecanografiar esta memoria a partir de un manuscrito no siempre fácil.Por supuesto, de todas las posibles erratas (o errores) la responsabilidad es solo mía.

INTRODUCCION

Esta tesis esta dedicada fundamentalmente a la aplicación de la idea gauge a la gravedad y se estudian las diversas teorías a que da lugar. Siempre se ha considerado la ligadura de metricidad, i.e., que se verifique el teorema de Ricci.

En general, la aplicación de la idea gauge conduce a teorías alternativas macroscópicas a la teoría de Einstein-Hilbert y a posibles teorías microscópicas de gravedad.

Entre las razones que nos han llevado a estudiar este tipo de teorías se encuentran:

1) La primera y más obvia es que si en el futuro se encontrase que la teoría de Einstein-Hilbert está en desacuerdo con los experimentos, las nuevas teorías estrían preparadas para sustituirla.

2) En segundo lugar, las teorías alternativas pueden sugerir nuevas vías de "testar" a las teorías de gravedad.

3) En tercer lugar, aunque la teoría de Einstein-Hilbert es la más bella y sencilla, las teorías alternativas pueden proporcionar una unificación más estética con las teorías de las interacciones electromagnética, débil y fuerte, las cuales son descritas mediante la idea gauge.

4) Finalmente, las teorías alternativas pueden conducir a una unificación de la gravedad y de la mecánica cuántica, i.e., conducir a la teoría cuántica de gravedad.

Para ver las motivaciones que conducen al estudio de la teoría gauge de gravedad y para que la memoria fuese lo más completa posible, se ha considerado conveniente exponer en los capítulos A y B un resumen critico de las teorías métricas, y de las teorías con torsión gravitatorias y de su cuantificación covariante.

En el capítulo C se ha expuesto el método general de idea gauge usando el formalismo diferencial mediante formas diferenciales.

En el capítulo D se aplica el método gauge a gravedad usando el formalismo más parecido posible al aplicado a las interacciones internas (Yang-Mills) pero teniendo en cuenta las particularidades que presenta la gravitación.

La teoría de gravedad, con la ligadura de métricidad, debe ser construida imponiendo invariancia Lorentz Local y covariancia bajo difeomorfismos. Debe ser la teoría gauge del campo de Poincaré(ó de Sitter) rota, utilizando campos de "Higgs" a una teoría invariante local Lorentz.

Esto se ha realizado en la sección 8. usando el formalismo de fibrados. Considerando el formalismo variacional no ha sido posible introducir la condición de rompimiento.

Por este motivo y dado que se obtienen al final las mismas ecuaciones de campo e identidades, se ha expuesto el formalismo variacional de una teoría gauge del grupo de traslaciones en la sección 4, en la sección 5, se ha expuesto el formalismo variacional de la teoría gauge del grupo de Lorentz general y en la sección 6 la teoría gauge del grupo de Lorentz imponiendo la ligadura de torsión nula. En la sección 7 se discute la teoría obtenida en las secciones 5 y 6 y la teoría gauge del grupo de Poincaré(sin romper).

En la sección 9 se estudian los límites de la teoría del grupo de Poincaré roto.

En la sección 10 se estudia el Lagrangiano gravitatorio más general de la teoría gauge Poincaré rota, asi como diversos Lagrangianos específicos que han aparecido en la literatura.

Por último, en las secciones 11,12 y 13 se conectan este tipo de teorías con los tests teóricos y experimentales. Para ello, se expone un resumen de ellos en la sección 11, se explicitan en componentes las ecuaciones de campo obtenidas del Lagrangiano general en la sección 12 y por lo último en la sección 13 se estudia la viabilidad de diversos Lagrangianos comparandolos con los tests teóricos y experimentales.

Finalmente, para que la memoria sea lo más autocontenida posible se ha incluido cuatro apéndices. El primero versa sobre la notación en componentes que se ha utilizado en la memoria y un resumen de las geometrias métrico-afines, el segundo sobre la notación en formas diferenciales, el tercero es un resumen de cálculo variacional y el cuarto un resumen del formalismo de fibrados. Todos estos tópicos se han utilizado frecuentemente en la memoria.

CAPITULO A

RESUMEN CRITICO DE LAS TEORIAS METRICAS Y DE SU CUANTIFICACION

1) LA TEORIA DE EINSTEIN-HILBERT

i) Formulación Einsteniana o Intuitiva

Es bien conocido, que A. Einstein, originalmente, partiendo de los principios de equivalencia (débil y fuerte) y de covariancia general (aunque este último no tenga mucho contenido en su formulación habitual), generalizó la teoría de Newton de gravitación, no en su forma original, como teoría de partículas puntuales (aunque posteriormente generalizara a la ley de las geodésicas, la ley de movimiento newtoniana), sino en la formulación de Lagrange-Laplace-Poisson, i.e., como teoría de campo (cuando los cuerpos son extensos y no rígidos), basada en la ecuación de Poisson en la presencia de fuentes (masas) del campo gravitatorio.

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho \qquad \text{A1-(0)}$$

La generalización "intuitiva" al caso de campos gravitatorios fuertes, no estáticos y para materia relativista de esta ecuación, constituyó el trabajo fundamental de Einstein durante mas de ocho años.

En esta generalización de la teoría Newtoniana, el espacio-tiempo "curvo" Newtoniano, era reemplazado por el ET pseudoriemanniano. El único potencial gravitatorio newtoniano φ, era sustituido por el nuevo potencial tensorial g_{ij} (6

componentes no triviales) que a la vez era la métrica del ET pseudo-riemanniano $V_4=(M_4,g)$. Matematicamente, V_4 es una variedad diferenciable puramente métrica, es decir, esta, la métrica determina completamente la estructura afín, la conexión Christoffel-Levi-civita $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ y por tanto la curvatura Riemann-Christoffel $\tilde{R}^{i}{}_{jkl}$ y sus contracciones , el tensor de Ricci-Christoffel $\tilde{R}_{ij}$ y el escalar de curvatura Riemann-Chistoffel $\tilde{R}$.

Mientras que en la teoría newtoniana los efectos gravitacionales estaban determinados por una ley de fuerza de acción a distancia instantánea (en realidad el gradiente de la magnitud de la fuerza), en la teoría de Einstein lo era por la curvatura del ET, pseudoriemanniano. En resumen, en su cuarta comunicación de Noviembre de 1915 a la Academia Prusiana de Ciencias, el dia 25, Einstein generalizó la ecuación diferencial lineal de 2º orden en φ de Poisson , a las 10 ecuaciones diferenciales no-lineales de 2º orden en g_{ij}

$$\tilde{G}_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} \tilde{R} = \frac{8\pi \ell^2}{\hbar c} T_{ij}$$

ó

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{8\pi \ell^2}{\hbar c}\left(T_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} T\right). \qquad \text{(A1-(1)}$$

donde $\ell = \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{1/2}$ es la longitud de Planck y T_{ij} es el tensor de energía momento simétrico de la materia y de los campos no gravitatorios (radiación). Por ejemplo en el caso $T_{ij} = T_{ij}^{\text{materia}}$, estas 10 ecuaciones suplementadas con una ecuación de estado determinan las 10 incógnitas, 6 componentes de g_{ij} , tres componentes de la cuadrivelocidad de la materia ($u^i u_i = \pm 1$) y la presión de esta (o su densidad). Desde el punto de vista relativista general ortodoxo el universo comprende al espacio-tiempo (gravedad) geometrizado y por otra parte, a los campos materiales y (o) partículas. T_{ij} en la versión Einsteniana era definido fenomenologicamente, en sus palabras, era la parte de madera de las ecuaciones de campo, en contraposición con la parte de mármol que era la geometría. Recordemos que su significado es

$$T_{i\cdot}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} T_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} & T_{\alpha\cdot}^{\cdot 4} \\ T_{4\cdot}^{\cdot\beta} & T_{4\cdot}^{\cdot 4} \end{pmatrix} \qquad \text{(A1-(2)}$$

$i,j = 1,\dots,4.$
$\alpha,\beta = 1,2,3.$

$T_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$ = - densidad de flujo de momento
$T_{4\cdot}^{\cdot\beta}$ = densidad de flujo de energía $\times c$
$T_{\alpha\cdot}^{\cdot 4}$ = densidad de momento $/c$
$T_{4\cdot}^{\cdot 4}$ = - densidad de energía

Las ecuaciones Newtonianas de conservación de la masa y de Euler, son generalizadas a las "leyes de conservación" de energía-momento

$$\tilde{\nabla}_i T^{ij} = 0 \qquad \text{(A1-(3)}$$

Las cuales, son una consecuencia de las identidades de Bianchi, que implican que $\tilde{\nabla}_i \tilde{G}^{ij} = 0$ (A1-(4)

Consecuentemente se puede decir que la teoría de Einstein de 1915, posee "leyes de conservación Nöther", automaticamente.

Las 10 ecuaciones (1) debido a las identidades de Bianchi no determinan las 10 componentes de g_{ij} . Esto significaría que no solo obtendriamos la geometría sino que fija-

ría las coordenadas en las cuales la geometría se expresa. Son realmente 6 ecuaciones netas, las que determinan a la métrica g_{ij} , ya que esta tiene 4 grados de libertad correspondientes a realizar transformaciones generales de coordenadas.

En Relatividad General, el campo gravitatorio se identifica con la curvatura de Riemann-Christoffel, de 20 componentes debido a las propiedades de simetría

$$\tilde{R}_{[ij]kl} = \tilde{R}_{ij[kl]} = \tilde{R}_{ijkl} \qquad \text{A1-(5)}$$

$$\tilde{R}_{ijkl} = \tilde{R}_{klij} \qquad \text{A1-(6)}$$

$$\tilde{R}_{i[jkl]} = 0 \qquad \text{A1-(7)}$$

1) Si $\tilde{R}^{i}_{\cdot jkl} = 0$ (20 condiciones), el espacio-tiempo es "llano". Esta es la situación en ausencia de gravedad, i.e., a distancia infinita de todos los campos materiales masivos y de radiación.

2) Si $\tilde{R}_{ij} = 0$ (10 condiciones). Son las ecuaciones en una región "vacía", i.e., sin contener materia ó radiación pero "cerca" de estas formas de energía. En este caso las componentes de tensor de curvatura Riemann-Christoffel distintas de cero, constituyen el tensor de Weyl que debería ser identificado, por tanto, con el campo gravitatorio en el "vacio" (Recientemente Penrose (79) ha sugerido identificar su cuadrado con la entropía gravitatoria) y es precisamente la parte del tensor de Riemann responsable de las fuerzas de marea.

3) Si R= 0 (1 condición). Esta es la situación en una región donde no existen campos materiales masivos (energía ligada) pero conteniendo campos electromagneticos (energía libre) ó de color.

Hoy es bien conocido que el principio de covariancia general esta desprovisto del significado físico que Einstein creía que poseía una generalización del principio de relatividad (especial), y que la ecuación de Newton se puede formular tensorialmente como $R_{44} = 4\pi G\rho$. Sin embargo, las diferencias fundamentales entre las dos teorías son las siguientes

a) En teoría Newtoniana el espacio-tiempo "curvo" tiene una métrica que es degenerada ($g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^{\ k}$ no se verifica) y por tanto la conexión no se puede obtener a partir de ella (no es métrica), como ocurre en el espacio-tiempo pseudo-Riemanniano. Además, por tanto no se verifica la identidad de Bianchi y por tanto (6) debe ser introducido "a fortiori".

b) En teoría Newtoniana no existe radiación gravitacional, mientras que la teoría Einsteniana la predice.

ii) Formulación de Hilbert

Como es bien sabido, Einstein en el verano de 1915 comentó a David Hilbert las dificultades que poseía en aquel momento sobre la teoría de gravedad. Hilbert, que era de la opinión de que "la física es demasiado difícil para los físicos", obtuvo "axiomaticamente" a partir de el principio de mínima acción, tomando como "Lagrangiano" a la

curvatura escalar, las mismas ecuaciones, y su comunicación a la Academia de Ciencias de Göttingen fue en cinco dias anterior a la de Einstein.

En resumen la formulación Lagrangiana es la siguiente Partiendo de la integral de acción de gravedad y materia,

$$A(C) = \frac{1}{c}\int_{C\subset M^4} \left(\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M\right) d^4y \qquad \text{A1-(8)}$$

Donde C es una subvariedad compacta del espacio pseudoriemaniano y donde $\mathcal{L}_G$ y $\mathcal{L}_m$ son densidades escalares de peso 1 i.e., $\mathcal{L}_G = L_G\sqrt{-g}$ y tomando como L_G (Lagrangiano gravitatorio)

$$L_G(g,\partial g,\partial^2 g) = -s\,\frac{\hbar c}{16\pi l^2}\,\tilde{R} \qquad \text{A1-(9)}$$

i.e., el mas simple invariante escalar construido en V_4.

Imponiendo $\delta A(C)=0$ bajo variaciones de g_{ij}, se obtiene las ecuaciones de campo, (s es la signatura de la métrica).

$$\hbar=c=1,\ 8\pi l^2=1 \qquad s\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\,\tilde{E}^{ij} = \frac{\delta\mathcal{L}_G}{\delta g_{ij}} = -\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g_{ij}} = s\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\,T^{ij} \qquad \text{A1-(10)}$$

Como g_{ij} es simétrico tambien lo son E^{ij} y T^{ij}

$$\frac{1}{2}\tilde{E}^{ij} = \frac{\hbar c}{16\pi l^2}\,\tilde{G}^{ij} = \frac{1}{2}T^{ij} \qquad \text{(A1-11)}$$

Que son las mismas ecuaciones que Einstein obtuvo con su método intuitivo, la principal diferencia, (además del método) es que en la formulación de Hilbert, T_{ij} es definido a través del Lagrangiano de materia L_m . Por tanto si L_m es un escalar y si la ecuaciones de los campos materiales son satisfechas, entonces el "teorema de Nöther" implica

$$\tilde{\nabla}_i T^{ij} = 0 \qquad A1-(13)$$

Por tanto no es necesario tener en cuenta a las identidades de Bianchi, para obtener este resultado, como ocurría en la formulación Einsteniana. Es más, Hilbert no cayó en la cuenta de que esto se debía a las identidades de Bianchi. (quizás porque dando la vuelta a su famosa frase, las matemáticas eran demasiado difíciles para los matemáticos). Como es sabido Einstein al principio no tuvo demasiada simpatía hacia el método variacional, en sus palabras: "No me gusta la formulación de Hilbert. Es innecesariamente especializada y complicada. No es honesta (Gaussiana) en su proyecto y refleja la pretensión de un superman camuflándose bajo la técnica". Carta a Ehrenfest en Karl Seelig, A. Einstein.

Posteriormente la teoría de Einstein-Hilbert de 1915 fue modificada, en el contexto de teorías métricas, por muchos autores comenzando por el mismo Einstein (1917) y por A. Eddington (1924), reemplazando las ecuaciones de campo (1) por

$$\tilde{E}_{ij} = T_{ij} \qquad A1-(14)$$

Donde $\tilde{E}_{ij}$ es una función de la métrica g_{ij} y de sus derivadas hasta cierto orden y donde además $\tilde{E}_{ij}$ satisface la identidad

$$\tilde{\nabla}_i \tilde{E}^{ij} = 0 \qquad A1-(15)$$

Las ecuaciones de campo A1-(14) y la identidad A1-(15), implican automaticamente las leyes de conservación A1-(13).

Por ejemplo, Einstein (1917), con la introducción de la cte. cosmológica en su empeño de que el universo fuese estático

$$\tilde{G}_{ij} - s\Lambda g_{ij} = \frac{8\pi\ell^2}{\hbar c} T_{ij} \qquad A1-(16)$$

Ecuaciones que son de hecho, debido al teorema de Cartan-Lovelock, las ecuaciones de campo de 2º orden en g_{ij} mas generales. El Lagrangiano gravitatorio de (16) es

$$L_G = -\frac{\hbar c}{8\pi\ell^2}\Lambda - s\frac{\hbar c}{16\pi\ell^2}\tilde{R} \qquad A1-(17)$$

En cosmología, $\Lambda < 0$ significa atracción "cósmica" mientras que $\Lambda > 0$ significa repulsión cósmica.

Hay sugestiones por las que Λg_{ij} debe ser identificado con la energía momento debida a fluctuaciones cuánticas del vacío (Zel'dovich (1968).

La teoría de Einstein-Hilbert ha estado en la línea de fuego durante mas de 60 años y constituye la teoría más aceptada como teoría clásica de gravitación. Fundamentalmente han sido testadas las ecuaciones en el vacío, $\tilde{R}_{ij} = 0$ a partir de las cuales se obtienen diversas soluciones exactas entre ellas la solución exterior de Schwarzschild (1915), Weyl (1917), en el caso de simetria esférica y campo estático, apropiada para la descripción del campo gravitatorio solar donde los tests experimentales han sido en su mayoria realizados. El principal de ellos y que no estaba explicado mediante la teoría de Newton, es el corrimiento del perihelio del Mercurio predicho por Le Verrier. Este es el test mas importante de la teoría de Einstein-Hilbert, ya que en él se manifiestan los aspectos no-lineales de la teoría (el campo gravitatorio posee energía y es por tanto fuente de si mismo). Sin embargo, medidas recientes de Hill HA et al (1982) de la desviación respecto de la esfericidad del Sol, han puesto de manifiesto una discrepancia de la teoría de Einstein, con respecto a este test, del 1,7%. Por tanto, aunque a nivel clásico es la mejor teoría que todavía poseemos, otras alternativas, como la teoría de Moffat (1979), la cual sí está de acuerdo con este último experimento, merecen más estudio. La teoría de Brans-Dicke en la que además de g_{ij} existe otro potencial escalar φ, gravitatorio, tambien permite ajustando el parametro libre $\omega = 45{,}62$ explicar este dato, pero otro experimento el de atraso del tiempo, necesita $\omega > 500$. Por lo tanto tampoco da cuenta de este experimento la teoría de Brans-Dicke.

2) TEORIAS DEL TIPO EDDINGTON-WEYL

Tomando, asimismo, como arena geométrica un espacio de pseudo-Riemann, pero basándose en que el método variacional de Hilbert solo imponía que la densidad Lagrangiana fuera una densidad escalar, A. Eddington (1924) considera los Lagrangianos

$$L_G = \tilde{R}_{ij}\,\tilde{R}^{ij} \qquad \text{A2-(1)}$$

$$L_G = \tilde{R}_{ijkl}\,\tilde{R}^{ijkl} \qquad \text{A2-(2)}$$

y deriva a partir de ellos las correspondientes ecuaciones

de campo, que a diferencia de las de Hilbert-Einstein son de 4º orden en g_{ij}.

Mas tarde C. Lanczos (1938) y H.A. Buchdahl (1948) (y Weyl (1919), pero considerando un espacio-tiempo no-métrico de Weyl) toman esos Lagrangianos y ademas el siguiente

$$L_G = \tilde{R}\,\tilde{R} \qquad \text{A2-(3)}$$

El Lagrangiano más general cuadrático en curvatura Riemann será por tanto una combinación lineal de (1) (2) y (3). Pero Lanczos tambien demostró, que solamente dos entre estos tres escalares son independientes. Esto sigue como consecuencia necesaria del teorema de Euler-Gauß-Bonnet ya que

$$\int \varepsilon_{ijkl}\,\varepsilon^{mnpq}\,\tilde{R}^{ij}{}_{mn}\,\tilde{R}^{kl}{}_{pq}\sqrt{-g}\,d^4y =$$

$$= -4\int \left(\tilde{R}^2 - 4\tilde{R}_{ij}\tilde{R}^{ij} + \tilde{R}_{ijkl}\tilde{R}^{ijkl}\right)\sqrt{-g}\,d^4y \qquad \text{A2-(4)}$$

es un invariante topológico, relacionado con la característica de Euler-Poincaré.

Por lo tanto la acción mas general cuadrática en los tensores de curvatura Riemann es

$$L_G = \alpha\left(\tilde{R}_{ij}\tilde{R}^{ij} - \frac{1}{3}\tilde{R}^2\right) + \frac{b}{3}\tilde{R}^2 \qquad \text{A2-(5)}$$

Julve 1978 Nuovo Cim 46B (1978)/137

a la cual se la denomina acción Weyl-Eddington, mientras que el término que multiplica a α, es el Lagrangiano de Weyl y que es precisamente el tensor de Weyl al cuadrado.

P. Havas (1977), ha demostrado que cualquier solución con $T_{ij} = 0$ de las ecuaciones de Einstein-Hilbert es también una solución de las ecuaciones de Eddington ó Lanczos, sin embargo no verifican el teorema de Birkhoff y cuando $T_{ij} \neq 0$ no se obtiene la ecuación de Newton-Poisson en el limite no relativista y campo débil y estático. Este tipo de teorías a nivel clásico deben ser desechadas, si se admite la absoluta validez de la ley de Newton en el macrocosmos.

3) RESUMEN DE LA CUANTIFICACION DE LAS TEORIAS METRICAS

Ordinariamente las teorías físicas proporcionan una distinción clara entre los fenomenos físicos y la "arena" geométrica en la cual estos "tienen lugar". Por ejemplo, en electrodinámica, la arena es el espacio-tiempo de Minkowski y el fenómeno el campo de Maxwell-Faraday, en mecánica clásica la arena es el espacio fásico (o el de configuración) y el fenómeno las trayectorias dinámicas de las partículas. En Relatividad General esta distinción no tiene ya lugar, ya que, al mismo tiempo, la métrica de la arena pseudoriemanniana es el potencial gravitatorio. Esta fundamental diferencia, asi como la no-linealidad de la teoría, tienen como consecuencia que los métodos de cuantificación empleados usualmente, el canónico, el covariante, el de la integral de camino, el axiomático, tengan grandes dificultades al

intentarlos aplicar a la gravedad.

Además del método a elegir, existen diferentes opiniones en cuanto a cual es el comportamiento del campo gravitatorio a distancias del orden de la longitud de Planck $\ell = 10^{-33}$ cm, que es la dimensión natural asociada a la gravedad.

1) En primer lugar historicamente, Landau (1955) basándose en la idea de que los efectos de la interacción gravitatoria pueden superar a los efectos electromagneticos (posteriormente la idea se extendió a las interaciones débil y fuerte) a esa energía tan alta, pensó que quizás un cutoff alrededor de la masa de Planck haría que las integrales divergentes que aparecen en teoría cuántica de campos fuesen realmente finitas.

2) Mediante otro punto de vista las fluctuaciones cuánticas del campo gravitatorio están fuertemente acopladas a la escala de Planck y aumenta su acoplamiento a medida que aumente todavia mas la energía. A escalas más pequeñas que la longitud de Planck, las fluctuaciones cuánticas de la geometría son grandes y dominan completamente al resto de la física, además las fluctuaciones cuánticas de la topología del ET pueden ser importantes y la geometría del ET se hace mas y mas complicada a pequeñas distancias. Esta es la idea mantenida inicialmente por J.A. Wheeler (1974), con su construcción del superespacio (es el punto de vista del geómetra puro ya que solo el continuo espacio-temporal tiene una realidad independiente y las particulas son solo excitones geometrodinámicos), y cuyos directos herederos son el ET espuma

de S. Hawking (1979), ó el ET red de G. t'Hooft (1979).

En la aproximación de Hawking, que utiliza el método de la integral funcional, se supone que la acción de Einstein-Hilbert es la acción cuántica correcta a todas las escalas.

3) El tercer punto de vista supone que la dinámica de la geometría del ET es la más simple posible a distancias más pequeñas que la Planck, i.e., es invariante de escala (ó más aun, conforme). De esta forma la longitud de Planck no es ni un cutoff ni una escala en la cual las fluctuaciones cuánticas de la métrica se convierten en fuertes, como señalan los dos anteriores puntos de vista, sino que es un punto de separación entre la dinámica a grandes escalas, la cual esta descrita por la teoría de Einstein-Hilbert y la dinámica a distancias muy cortas, la cual sería invariante de escala (ó más aun, conforme) y la relación entre ambas sería análoga a la existente entre la teoría de Fermi de las interacciones débiles y la teoría de Weinberg-Salam. Este punto de vista se denomina gravedad inducida, S. Adler (1982), ya que la gravedad es inducida por las fluctuaciones de la materia cuantificada y es por tanto una puesta al día de las ideas de Sakharov (1968), para quien, gravedad, era una teoría de campo obtenida a partir de las interacciones de las partículas elementales (sin embargo, él introducía el cut-off). Sin embargo, hasta que no tengamos un método y una idea segura de la cuantificación de la gravedad, debemos conformarnos con los resultados obtenidos por los métodos usuales. Entre estos es el covariante el que más ha sido desarrollado, y un resumen

de los resultados obtenidos es el siguiente. (t'Hooft (1974)).

1) La teoría de Einstein-Hilbert tanto en caso de gravedad pura como el gravedad con materia respeta la unitariedad de la matriz S. El problema surge respecto de la renormalización ya que Relatividad General pura, i.e., $T_{ij} = 0$ y con $\Lambda = 0$ no es renormalizable a partir de 1 ciclo cerrado, con materia cualquiera que sea esta, la situación es peor, ya que ni siquiera es renormalizable a 1-Loop.

Considerando a $\Lambda \neq 0$ se empeora la renormalizabilidad, ya que el término Λg_{ij} actua como el tensor energía momento del vacío mecano-cuántico.

2) Modificando el Lagrangiano de Einstein-Hilbert, tomando además del término lineal en la curvatura escalar, términos cuadráticos del tipo Eddington-Weyl en un ET pseudo-riemanniano. K.S. Stelle (1977) intentó obtener una teoría cuántica unitaria y renormalizable. El resultado obtenido considerando el Lagrangiano gravitatorio

$$L_G = -s\frac{\hbar c}{16\pi \ell^2}\tilde{R} - \alpha \tilde{R}_{ij}\tilde{R}^{ij} + \beta \tilde{R}^2 \qquad \text{A3-(1)}$$

fue, que la correspondiente teoría cuántica era renormalizable pero no unitaria, ya que al ser las ecuaciones de campo de cuarto orden, en este caso aparecen polos fantasmas en los propagadores.

(Técnicamente la teoría es unitaria, si tiene polos de multiplicidad uno, con residuos positivos en las masas reales, de los propagadores sanwicheados entre fuentes, las cuales satisfacen solo las ligaduras que son consecuencia de las ecuaciones de campo).

Una vía posible de resolver el problema de la unitariedad y renormalizabilidad de la teoría cuántica de gravedad, es generalizar la estructura geométrica del ET incluyendo torsión, la cual tomará como fuente material al spín mecanocuántico. A esta idea están dedicados los capítulos siguientes.

En el resto de esta memoría adoptaremos el punto de vista más conservador de considerar clásico al campo gravitatorio, mientras que las fuentes son campos c-número. Es decir adoptaremos un punto de vista semiclásico, en el que la gravedad es tratada como un campo clásico externo, esta es la óptica favorecida por TWB. Kibble (1981) en DW. Sciama (1982), sin embargo creemos que este solo es un paso en el medio del camino, al revés que Kibble.

4) FUENTES CON MASA Y SPIN EN TEORIAS METRICAS

Despues de la discusión anterior, se puede pensar que la construcción de una teoría clásica de gravedad tal que su correspondiente teoría cuántica (utilizando el método covariante) sea unitaria y renormalizable, requiera la generalización geométrica a un espacio no-riemanniano. Además en presencia de campos masivos fermiónicos, la utilización del tensor energía-impulso métrico (y simétrico) puede ser ambigua y la identidad A 1-(3), puede ya no ser apropiada. En vez de ella, se pueden usar las "leyes de conservación" equivalentes de energía momento

$$\tilde{\nabla}_i t_{j\cdot}^{\ i} = \frac{1}{2} S^{k\ \ l}_{\ \cdot i \cdot} \tilde{R}^i_{\ kjl} \qquad \text{A4-(1)}$$

y de momento angular

$$\tilde{\nabla}_k S_{ij\cdot}^{\ \ k} = t_{ij} - t_{ji} \qquad \text{A4-(2)}$$

$t_{j\cdot}^{\ i}$ es el tensor de energía-impulso canónico (asimétrico) y $S_{ij\cdot}^{\ \ k}$ el tensor de spín canónico los cuales pueden ser definidos o bien fenomenologicamente ó en términos de la densidad Lagrangiana material. En el primer caso

$$S_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = \begin{pmatrix} S_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma} & S_{\alpha 4\cdot}^{\cdot\cdot\gamma} \\ S_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot 4} & S_{\alpha 4\cdot}^{\cdot\cdot 4} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} i,j,k = 1,..,4 \\ \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3 \\ \text{A4-(3)} \end{array}$$

$S_{\alpha\beta\cdot}^{\cdot\cdot\gamma}$ = densidad de flujo de spin
$S_{\alpha\beta\cdot}^{\ \ 4}$ = densidad de flujo de energía de momento dipolar/c
$S_{\alpha 4\cdot}^{\ \ \gamma}$ = densidad de spin x c
$S_{\alpha 4\cdot}^{\cdot\cdot 4}$ = densidad de energía de momento dipolar
y mediante el formalismo Lagrangiano, $\mathcal{L}_m = h L_m$

$$-s\, h\, t_{\alpha\cdot}^{\ i} = \left.\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^{\alpha}_{\cdot i}}\right|_{\{^{\alpha}_{\beta k}\}} \qquad \text{A4-(4)}$$

$$-s\, h \frac{1}{2} S^{\beta\cdot k}_{\ \alpha\cdot} = \left.\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \{^{\alpha}_{\beta k}\}}\right|_{h^{\alpha}_{\cdot i}} \qquad \text{A4-(5)}$$

donde los índices griegos denotan un sistema de referencia no coordenado (anholónomo) y los índices latinos un sistema coordenado como se venia haciendo. $h^{\alpha}_{\cdot i}$ es la tetrada definida como $g_{ij} = h_i^{\alpha} h_j^{\beta} \eta_{\alpha\beta}$. (Para campos fermiónicos la variable de gravedad es la tetrada en vez de la métrica). Las leyes de conservación A4(1) y A4-(2) son válidas solamente para teorías métricas. Integrando A4-(1) en un tubo de universo se obtiene la clásica ecuación de Mathisson-Papapetrou.

El tensor de energía-momento métrico puede ser expresado en término de $t_{i\cdot}^{\cdot j}$ y $S_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}$, por medio del método de Belinfante (1940), Rosenfeld (1940) de simetrización

$$T^{ij} = t^{ij} - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_k \left(S^{ijk} + S^{kij} + S^{kji}\right)$$
$$= t^{(ij)} - \tilde{\nabla}_k S^{k(ij)} \qquad \text{A4-(6)}$$

La identidad $\tilde{\nabla}_i T^{ij} = 0$, aunque en principio es válida en presencia de spin, no contiene tanta información como las ecuaciones A4-(1) y A4-(2). Por tanto, olvidando que T_{ij} aparece en la ecuaciones de Einstein-Hilbert y que por ello se le considera como el verdadero tensor de energía-momento, podemos pensar que es realmente t_{ij} el verdadero tensor energía-impulso ya que contiene más información.

En este caso ¿como habría que modificar a las ecuaciones de la RG para poder tener a t_{ij} como fuente material?.

Las nuevas ecuaciones serían del tipo

$$E_{ij} = t_{ij} \qquad \text{A4-(7)}$$

Donde E_{ij} sería una función de la métrica y de sus derivadas hasta un cierto orden. Naturalmente E_{ij} no puede ser simétrico ni tener divergencia nula. Lo primero implicaría que t_{ij} es simétrico lo cual, vía A4-(2) conduciría a una conservación separada del spin y del momento angular orbital. Lo segundo, vía A4-(1) impondría restricciones arbitrarias en la curvatura y la densidad de spin. El problema que existe con una ecuación como A4-(7), es que no hay forma de obtener "leyes de conservación" del tipo A4-(1) y A4-(2). Quizás, esto sería posible introduciendo "ad hoc" una segunda ecuación de campo en la que apareciese $S_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}$ como fuente, del tipo siguiente

$$C_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = S_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} \qquad \text{A4-(8)}$$

Donde, $C_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}$ sería una función de la métrica y de sus derivadas hasta cierto orden.

Requiriendo que E_i y C_{ij} satisfagan identidades de la forma

$$\tilde{\nabla}_i E_{j\cdot}^{\cdot i} = \frac{1}{2} C^{k\cdot\ell}_{\cdot i\cdot} \tilde{R}^{i}_{\cdot kj\ell} \qquad \text{A4-(9)}$$

$$\tilde{\nabla}_k C_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k} = E_{ij} - E_{ji} \qquad \text{A4-(10)}$$

entonces las ecuaciones de campo A4-(7) y A4-(8) implicarían directamente las leyes A4-(9) y A4-(10).

Definiendo por analogía con A4-(6)

$$\tilde{E}^{ij} = E^{(ij)} - \tilde{\nabla}_k C^{k(ij)} \qquad \text{A4-(11)}$$

Las ecuaciones 4-(6), 4-(11), 4-(7) y 4-(8) implicarían

$$\tilde{E}^{ij} = T^{ij} \qquad \text{A4-(12)}$$

Mientras que 4-(9) y 4-(10) implicarían la identidad

$$\tilde{\nabla}_i \tilde{E}^{ij} = 0 \qquad \text{A4-(13)}$$

Sin embargo ocurre otra vez que 4-(13) no contiene tanta información como las ecuaciones 4-(7) y 4-(8). Como antes, es fácil construir dos tensores $E_{j\cdot}^{\ i}$ y $C_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}$ satisfaciendo 4-(9) y 4-(10).

A partir de cualquier densidad Lagrangiana gravitatoria escalar con la dependencia funcional

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_G\left(h^\alpha{}_i, \{^\alpha{}_{\beta k}\}, \partial_\ell \{^\alpha{}_{\beta k}\}\right) \qquad \text{A4-(14)}$$

$E_i^{\ j}$ y $C_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}$ se definen como

$$sh\, E_\alpha^{\cdot i} = \left.\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta h^\alpha{}_i}\right|_{\{^\alpha{}_{\beta k}\}} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial h^\alpha{}_i} \qquad \text{A4-(15)}$$

$$sh\, \frac{1}{2} C^{\beta\cdot k}_{\cdot\alpha\cdot} = \left.\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta \{^\alpha{}_{\beta k}\}}\right|_{h^\alpha{}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \{^\alpha{}_{\beta k}\}} - \partial_\ell \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \partial_\ell \{^\alpha{}_{\beta k}\}} \qquad \text{A4-(16)}$$

Se puede demostrar facilmente que $E_{j\cdot}^{\ i}$ y $C_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}$ satisfacen las identidades 4-(9) y 4-(10) y por lo tanto las ecuaciones de campo 4-(7) y 4-(8) satisfacen las "leyes de conservación" 4-(1) y 4-(2) automaticamente.

Sin embargo, desgraciadamente todavía existe un problema con las ecuaciones de campo 4-(7) y 4-(8), el problema es fundamental ya que no pueden ser derivadas a partir de un principio variacional métrico . E-ste sería del tipo atribuido erroneamente a Palatini y en realidad debido a Einstein (1925), al que denominaremos de aquí en adelante de primer orden (ya que se varian independientemente la tetrada y la conexión) ó de tipo Einstein-Palatini. La demostración de esta aserción es sencilla. Las ecuaciones 4-(7) y 4-(8) no pueden ser derivadas a partir de

$$\delta A(C) = \delta \frac{1}{c} \int_{C \subset M^4} (L_G + L_m)\, h\, d^4y = 0 \qquad \text{A4-(17)}$$

con

$$L_G = L_G\left(h^\alpha{}_i, \{^\alpha{}_{\beta k}\}, \partial_\ell \{^\alpha{}_{\beta k}\}\right) \quad \text{y} \qquad \text{A4-(18)}$$

$$L_m = L_m\left(h_i{}^\alpha, \{^\alpha{}_{\beta k}\}, \Phi, \partial\Phi\right) \qquad \text{A4-(19)}$$

bajo variaciones independientes de $h^{\alpha}{}_{i}$ y $\{^{\alpha}{}_{\beta k}\}$ puesto que

$$\{^{\alpha}{}_{\beta k}\} = \tfrac{1}{2} h^{\gamma}{}_{k}\, g^{\alpha\delta}(G_{\beta\delta\gamma} + G_{\gamma\delta\beta} - G_{\delta\beta\gamma}) \qquad \text{A4-(20)}$$

Donde

$$G^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta\gamma} = h_{\beta}{}^{j}_{\cdot}\, h_{\gamma}{}^{k}_{\cdot}\,(\partial_k h^{\alpha}_{\cdot j} - \partial_j h_{k}{}^{\alpha}_{\cdot}) \qquad \text{A4-(21)}$$

La conexión mixta $\{^{\alpha}{}_{\beta k}\}$ se expresa por tanto en términos de la tetrada y de sus derivadas y por lo tanto su variación no es independiente de la variación de $h_{\alpha}^{\cdot i}$ y por consiguiente las ecuaciones de campo no pueden ser obtenidas.

Por lo tanto, para teorias métricas el principio variacional de Einstein-Palatini no es viable, cuando se consideran fuentes cuyo Lagrangiano depende de la conexión (mixta), ya que esta es dependiente de la métrica.

La dependencia del Lagrangiano material en la conexión es una caracteristica de los campos masivos fermiónicos (con spin semimpar) . Para este tipo de fuentes hay por tanto dos alternativas.

1) Considerar válidas las ecuaciones de Einstein-Hilbert y olvidarnos de las ecuaciones 4-(7) y 4-(8). Esto significa tomar como válido para estos campos el principio variacional de Hilbert (de segundo orden) y que la geometría es pseudoriemanniana.

2) Tomar como válidos para este tipo de campos las ecuaciones 4-(7) y 4-(8) y adoptar por tanto el principio variacional de Palatini-Einstein. En este caso la teoría gravitatoria ya no es de tipo métrico sino de tipo métrico-afín, i.e., la tetrada y la conexión (mixta) son en principio independientes. Este punto de vista implica generalizar la estructura geométrica del ET permitiendo que sea no-riemanniana. Ejemplos de este tipo son las geometrias de Weyl y de Cartan. Los autores que proponen este segundo punto de vista toman como arena geométrica la geometría de Cartan y relacionan la torsión (la segunda curvatura de este espacio) con el spin $S_{ij}^{\cdot\cdot k}{}_{\cdot}$

En el capítulo siguiente se analizarán las teorías de tipo metrico-afín Cartan, aqui solamente cabe señalar que J. Kijowski (1978), ha demostrado la equivalencia entre este tipo de teorias métrico-afín y las teorías de tipo puramente afín, en las que la única variable independiente gravitatoria es la conexión y la tetrada (ó la métrica para materia bosónica) es una variable derivada.

Finalmente, exponemos más explicitamente la aserción anterior de que la tetrada es la variable gravitatoria natural para campos fermiónicos y no la métrica (que lo es solo para campos bosónicos).

Tomemos como ejemplo de campo material fermiónico, al electrón. La ecuación de Dirac en presencia de gravedad es

$$i\gamma^{i} D_{i}\Psi + m\Psi = 0 \qquad \text{A4-(22)}$$

donde $D_i\Psi = \partial_i\Psi - \Gamma_i\Psi$ y Γ_i la conexión mixta, $\gamma^{i} = h^{i}{}_{\cdot\alpha}\gamma^{\alpha}$, γ^{α} son las matrices de Dirac usuales en un sistema localmente Lorentziano, que dan lugar al álgebra de Clifford.

El Lagrangiano material del electrón es

$$\mathcal{L}_m^e = h\left(i\bar{\Psi}\gamma^i D_i \Psi + m\bar{\Psi}\Psi\right) \qquad \text{A4-(23)}$$

donde $\bar{\Psi}$ es el adjunto de Dirac.

En este caso y suponiendo que es aplicable el principio variacional de Hilbert, i.e., Γ_i es dependiente de la tetrada, no de la métrica. Por tanto la definición usual del tensor energía momento simétrico y métrico (ver A1-(10)) no es apropiada.

$$\int \delta\mathcal{L}_m^e \, d^4y = -\frac{s}{2}\int h\, T^{ij}\, \delta g_{ij}\, d^4y \qquad \text{A4-(24)}$$

ya que $\mathcal{L}_m^e$ no es un funcional de la métrica (10 componentes) sino de la tetrada (16 componentes). Con lo que sino se impone simetría a esta (debido a las transformaciones de Lorentz locales) las ecuaciones de campo son 16 y no 10 como en la teoría de Einstein-Hilbert.

5) CONCLUSIONES DE ESTE CAPITULO

RG, la teoría gravitatoria de Einstein-Hilbert es, por ahora, (pese al discutido experimento de Hill et al (1982) la mejor teoría clásica que poseemos. Su cuantificación todavia no se ha logrado, pese a los diferentes métodos que se utilizan en este problema.

Es más a nivel semiclásico, cuando se considera al campo gravitatorio como un campo externo clásico, pero las fuentes son campos c-número. Cuando estos son campos fermiónicos, la teoría se puede formular en un espacio métrico-afín, en particular de tipo Cartan, cuando se adopta el principio variacional de Einstein-Palatini.

Si se adopta este punto de vista, es la presencia de spin la que obliga a conceder más grados de libertad a la geometría, permitiendo que la conexión tenga torsión. En el próximo capítulo se expondrá un resumen crítico de este tipo de teorías.

Finalmente, hay que señalar que lo que esta fuera de duda, es que en el caso de fuentes fermiónicas la variables gravitatorias son la tetrada y la conexión (mixta), bien independientes ó no, pero que la métrica g_{ij} no es la variable gravitatoria correspondiente a campos fermiónicos.

CAPITULO B

TEORIAS GRAVITATORIAS CON TORSION

1) INTRODUCCION

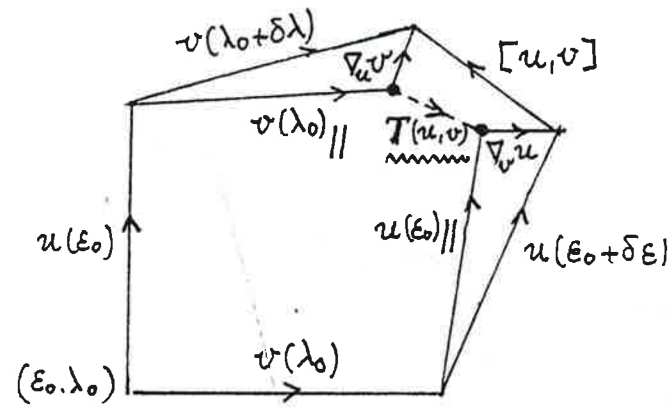
Historicamente, Cartan (1922), fué el primero en introducir la noción geométrica de torsión. Este enriquecimiento de la estructura geométrica fue utilizado posteriormente, intentando describir el electromagnetismo, en las "viejas" teorias unitarias, (ver Tonnelat), cuando las únicas interacciones conocidas eran la gravitatoria y la electromagnética. Incluso el mismo Einstein trabajó en esta línea fracasada. Posteriormente, Sciama y Kibble, JMP (1961) trabajando en la formulación mediante teoría gauge de la gravedad, intentando considerar como grupo gauge al grupo de Poincaré, volvieron a resucitar a la torsión, relacionándola con el spín entrínseco de las particulas elementales. Es decir, la teoría es puramente gravitatoria, mediante el último punto de vista.

Mientras que la curvatura esta ligada a la rotación que experimenta un vector al ser transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada o de un paralelogramo. La noción de torsión esta ligada a la traslación, o dicho de otra forma, al rompimiento del paralelogramo formado (cuando solo existe curvatura) por dos vectores y por sus transladados paralelamente.

Si consideramos a la torsión como un operador actuando en dos vectores u y v, i.e.,

$$T(u,v)=\nabla_u v-\nabla_v u-[u,v] \qquad \text{B1-(1)}$$

Donde $[u,v]$ es el corchete de Lie, visualmente



Nótese que incluso aunque los vectores u y v conmuten, el paralelogramo esta roto, i.e., la torsión es distinta de cero.

Posteriormente a Kibble y Seiama, A. Trautman y col. y F. Hehl (1973-74) y col., desarrollaron el formalismo geométrico clásico, i.e., usando sistemas de referencia coordenados con cálculos en formas o en componentes tensoriales, respectivamente, de la teoría de Einstein-Cartan. La idea riginal, tomando el como Lagrangiano la curvatura escalar Cartan, de relacionar al spin con la torsión, provenía del siguiente argumento heurístico, Trautman (1973): "En relatividad Especial el grupo de isometrías del espacio-tiempo Minkowskiano es el grupo cinemático de Poincaré (la parte conexa ortocrona propia). El álgebra de Lie de este grupo posee dos invariantes los cuales son interpretados como la masa y el spín de las partículas elementales. El grupo de Poincaré tiene la estructura $I^{+}_{\uparrow}O(3,1)=O^{+}_{\uparrow}(3,1)\odot T_4$, i.e., es el producto semidirecto del grupo de Lorentz y del grupo de traslaciones. La masa surge por tanto como el invariante relacionado con la parte traslacional y el spín con la parte rotacional Lorentz".

En teoría clásica de campos, la masa se corresponde con el tensor energía-momento canónico mientras que el spín corresponde al tensor de spin canónico. En la teoría de Einstein-Hilbert ocurre que existe una relación dinámica entre el tensor energía-momento y tensor de curvatura (a través del tensor de Einstein). Luego, si la teoría de gravedad es considerada como una generalización de la Relatividad Especial, tendrá que existir asimismo una relación dinámica entre el tensor de spin y alguna entidad geométrica. Si consideramos a esta como la torsión, tenemos la posibilidad de acoplar la torsión con el tensor de spin canónico.

Nótese, que con el anterior argumento, que está en la base de la teoría de Einstein-Cartan, se están acoplando las fuentes a la geometría justamente al contrario de como debería ser, es decir, el spín que esta relacionado en términos clásicos con la rotación se acopla a la torsión que como hemos visto denota una traslación, cuando en realidad debe estar acoplado a la curvatura (aunque no Riemann como veremos), ya que esta, está relacionada con la rotación, al hacer "girar" a un vector trasladado paralelamente.

Todo esto será discutido más ampliamente al tratar la gravedad mediante teoría gauge.

Por ahora, efectuaremos un resumen de la teoría de Einstein-Cartan en su aspecto clásico.

2) GEOMETRIA DE CARTAN

La teoría de Einstein-Cartan, como se ha dicho, necesita una geometría no-Riemanniana del tipo Cartan, toma igual que GR como modelo de espacio-tiempo el par constituido por una variedad diferenciable M_4 dimensional, de clase C^∞, conexa y Hausdorff, junto con una métrica Lorentziana g (de signatura ± 2); i.e., el par (M,g). La condición de separabilidad junto con la existencia de una métrica Lorentz, implica que M es paracompacta.

Sin embargo, en el momento que tratamos de comparar objetos geométricos dados en dos puntos diferentes de una variedad, estamos requiriendo más información que la que puede dar por si sola la estructura métrica de una variedad. Necesitamos conocer la estructura afín, i.e., debemos saber como transportar paralelamente, por ejemplo un vector, a lo largo de alguna curva en la variedad de base. Esto es equivalente a definir el operador derivada covariante ∇ (que se supone lineal), i.e., una conexión, el cual actua sobre un objeto goemétrico A de la siguiente forma. Sea $P(\lambda)$ una curva parametrizada por λ y u un vector tangente a ella en el punto $P_0 = P(\lambda_0)$. Entonces

$$\nabla_u A = \langle \nabla A, u \rangle = \frac{DA}{d\lambda}\Big|_{\text{a lo largo de } P(\lambda)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{A(\lambda_0+\varepsilon)_{\text{transp. paralelam. a } \lambda_0} - A(\lambda_0)}{\varepsilon} \right\} \qquad B2\text{-}(1).$$

Los componentes de la conexión ∇ , son los coeficientes de la conexión, que, en una base coordenada, se definen como

$$\nabla_{\partial_k}\partial_j = \Gamma^i{}_{jk}\,\partial_i \qquad \text{B2-(2)}$$

ó bien las 1-formas de conexión

$$\nabla\partial_j = \omega^i{}_j\,\partial_i \qquad \text{B2-(3)}$$

En la geometría de Riemann $\Gamma^i{}_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\}$ son los símbolos de Christoffel-Levi-Civita

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{il}\left(\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}\right) \qquad \text{B2-(4)}$$

que son obtenidos totalmente a través de derivadas primeras de la métrica y son simétricos, es decir, son 40 componentes. Esto es una consecuencia necesaria y suficiente de que:

i) La conexión sea métrica, i.e., se verifique el teorema de Ricci ó condición de metricidad

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \qquad \text{B2-(5)}$$

y ii) La conexión sea simétrica, i.e., la torsión sea cero.

Cartan generalizó la geometría de Riemann introduciendo la torsión, i.e., no imponiendo la simetría de la conexión. En este caso la conexión Cartan asimétrica se puede descomponer en una parte simétrica y otra antisimétrica

$$\hat{\Gamma}^i{}_{jk} = \hat{\Gamma}^i{}_{(jk)} + \hat{\Gamma}^i{}_{[jk]} \qquad \text{B2-(6)}$$

$$\hat{\Gamma}^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}^{i\cdot\cdot}{}_{jk} + \hat{\Gamma}^{i\cdot\cdot}{}_{kj}\right) + \frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}^{i\cdot\cdot}{}_{jk} - \hat{\Gamma}^{i}{}_{kj}\right) \qquad \text{B2-(7)}$$

La parte antisimétrica es precisamente la torsión (salvo el $\frac{1}{2}$ en nuestra notación).

$$Q^i{}_{[kj]} = Q^{i\cdot\cdot}{}_{kj} = \hat{\Gamma}^i{}_{jk} - \hat{\Gamma}^i{}_{kj} \qquad \text{B2-(8)}$$

Tensor que debido a la antisimetría en los dos últimos índices tiene 24 componentes. La conexión Cartan $\hat{\Gamma}^i{}_{jk}$, puede ser expresada a través de la conexión Christoffel-Levi-Civita y del tensor de contorsión siendo este último una combinación lineal del tensor de torsión. Deduzcamos esta relación. La conexión Cartan exhibe por tanto 64 componentes.

El teorema de Ricci en un espacio de Cartan nos dice, trabajando en componentes y en una base coordenada, que

$$\hat{\nabla}_i\, g_{jk} = 0 \qquad \text{B2-(9)}$$

donde

$$\hat{\nabla}_i\, g_{jk} = \partial_i g_{jk} - \hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}{}_{ji}\, g_{lk} - \hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}{}_{ki}\, g_{jl} \qquad \text{B2-(10)}$$

Donde ahora, al contrario que en un espacio de Riemann el orden de índices en $\hat{\Gamma}^i{}_{jk}$ es importante. Tomamos la convención de que el índice de diferenciación sea el último.

Permutando índices tendremos

$$\hat{\nabla}_k\, g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}{}_{ik}\, g_{lj} - \hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}{}_{jk}\, g_{il} = 0 \qquad \text{B2-(11)}$$

y $$\hat{\nabla}_j g_{ki} = \partial_j g_{ki} - \hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{kj}\, g_{li} - \hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{ij}\, g_{kl} = 0 \qquad \text{B2-(12)}$$

B2-(10) + B2-(11) − B2-(12) implica

$$(\partial_i g_{jk} + \partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ki}) - (\hat{\Gamma}^{l}{}_{ik} + \hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{ki})\, g_{jl} + (\hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{kj} - \hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{jk})\, g_{il} + (\hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{ij} - \hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{ji})\, g_{lk} = 0 \qquad \text{B2-(13)}$$

multiplicando por $\frac{1}{2} g^{mj}$ a toda la expresión, obtenemos

$$\frac{1}{2} g^{mj}(\partial_i g_{jk} + \partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ki}) - \frac{1}{2}(\hat{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{ik} + \hat{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{ki}) + \frac{1}{2}(\hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{kj} - \hat{\Gamma}^{l}{}_{jk})\, g^{mj} g_{il} + \frac{1}{2}(\hat{\Gamma}^{l\cdot\cdot}_{ij} - \hat{\Gamma}^{l}{}_{ji})\, g^{mj} g_{lk} = 0 \qquad \text{B2-(14)}$$

Usando la definición B2-(4) de los componentes coordenados de la conexión Christoffel-Levi-Civita, y de la torsión B2-(8) obtendremos a partir de B2-(14) que

$$\left\{ {m \atop ik} \right\} - \frac{1}{2}(\hat{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{ik} + \hat{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{ki}) + \frac{1}{2} Q^{l\cdot\cdot}_{jk}\, g^{mj} g_{il} + \frac{1}{2} Q^{l\cdot\cdot}_{ji}\, g^{mj} g_{lk} = 0 \qquad \text{B2-(15)}$$

Teniendo en cuenta por B2-(7) y B2-(8) que

$$\frac{1}{2}(\hat{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{ik} + \hat{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{ki}) = \hat{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{ik} - \frac{1}{2} Q^{m\cdot\cdot}_{ki} \qquad \text{B2-(16)}$$

sustituyendo B2-(16) en B2-(15), obtenemos finalmente

$$\hat{\Gamma}^{m\cdot\cdot}_{ik} = \left\{ {m \atop ik} \right\} + \frac{1}{2}(Q^{m\cdot\cdot}_{ki} + Q_{i\cdot k}^{\cdot m \cdot} + Q_{k\cdot i}^{\cdot m\cdot}) \qquad \text{B2-(17)}$$

La desviación de una conexión no-Riemanniana respecto a la conexión Christoffel-Levi-Civita define un nuevo tensor, el tensor de defecto, que en un espacio de Cartan es del tipo

$$D^{i\cdot\cdot}_{jk} = \hat{\Gamma}^{i}{}_{jk} - \tilde{\Gamma}^{i}{}_{jk} = \hat{\Gamma}^{i}{}_{jk} - \left\{ {i \atop jk} \right\} = D^{[i}{}_{j]k} \qquad \text{B2-(18)}$$

Al contrario que el tensor de torsión es antisimétrico en los dos primeros índices.

En la literatura es costumbre, instaurada por Schouten (1954), considerar el tensor de contorsión $K^{i}{}_{jk}$ que es el negativo de tensor de defecto aquí considerado

$$K^{m\cdot\cdot}_{ik} = \frac{1}{2}(Q^{m\cdot\cdot}_{\cdot ik} + Q_{ik}^{\cdot\cdot m} + Q_{ki}^{\cdot\cdot m}) \qquad \text{B2-(19)}$$

Por tanto

$$\Gamma^{m}{}_{ik} = \left\{ {m \atop ik} \right\} - K^{m\cdot\cdot}_{ik} = \left\{ {m \atop ik} \right\} + D^{m\cdot\cdot}_{ik} \qquad \text{B2-(20)}$$

En este punto hay que hacer notar que debido a la antisimetría del tensor de cortorsión en el primer par de índices se obtiene la relación

$$\hat{\Gamma}^{i}{}_{(jk)} = \left\{ {i \atop jk} \right\} - K^{i}{}_{(jk)} \qquad \text{B2-(21)}$$

Por tanto

$$\hat{\Gamma}^{i}{}_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} - K^{i}{}_{(jk)} + \frac{1}{2} Q^{i\cdot\cdot}{}_{jk} \qquad \text{B2-(22)}$$

Notese asimismo, que debido a que la conexión Cartan es asymétrica, las componentes del tensor de Curvatura Cartan definido en una base coordenada son

$$\hat{R}^{i}{}_{jkl} = 2\,\partial_{[k}\hat{\Gamma}^{i}{}_{|j|l]} + 2\,\hat{\Gamma}^{i}{}_{m[k}\hat{\Gamma}^{m}{}_{|j|l]} \qquad \text{B2-(23)}$$

tendrán menos simetrías que los componentes de la curvatura Riemann, para ser específico, debido a la condición de metricidad seguirán siendo antisimétricos en el primer par de índices, i.e., no existe curvatura de homotecia, $\hat{R}^{i\cdot\cdot\cdot}{}_{ijk} = 0$, pero ya no simétricos, bajo el cambio del primer par de índices por el segundo, debido a que la conexión posee torsión. Además, el tensor de Ricci-Cartan será asimétrico, así como el tensor de Einstein-Cartan, $\hat{G}_{ij} = \hat{R}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}\hat{R}$.

La única contracción esencial de $\hat{R}^{i\cdot\cdot\cdot}{}_{jkl}$ seguirá siendo, como en el caso Riemanniano, el tensor de Ricci $\hat{R}_{ij} = \hat{R}^{k\cdot\cdot\cdot}{}_{ikj}$ pero ahora es asimétrico (16 componentes).

Si se desarrolla la expresión B2-(23), empleando la notación

$$\tilde{\Gamma}^{i}{}_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\}$$

$$\begin{aligned}\hat{R}^{i\cdot\cdot\cdot}{}_{jkl} = {} & \partial_k\left(\tilde{\Gamma}^{i}{}_{jl} - K^{i}{}_{jl}\right) - \partial_l\left(\tilde{\Gamma}^{i}{}_{jk} - K^{i\cdot\cdot}{}_{jk}\right) + \\ & + \left(\tilde{\Gamma}^{i\cdot\cdot}{}_{mk} - K^{i\cdot\cdot}{}_{mk}\right)\left(\tilde{\Gamma}^{m}{}_{jl} - K^{m}{}_{jl}\right) - \\ & - \left(\tilde{\Gamma}^{i\cdot\cdot}{}_{ml} - K^{i\cdot\cdot}{}_{ml}\right)\left(\tilde{\Gamma}^{m}{}_{jk} - K^{m\cdot\cdot}{}_{jk}\right)\end{aligned} \qquad \text{B2-(24)}$$

Agrupando términos se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{R}^{i\cdot\cdot\cdot}{}_{jkl} = {} & \tilde{R}^{i\cdot\cdot\cdot}{}_{jkl} - \partial_k K^{i}{}_{jl} + \partial_l K^{i}{}_{jk} - \\ & - K^{i\cdot\cdot}{}_{mk}\tilde{\Gamma}^{m}{}_{jl} - \tilde{\Gamma}^{i}{}_{mk}K^{m\cdot\cdot}{}_{jl} + K^{i\cdot\cdot}{}_{mk}K^{m\cdot\cdot}{}_{jl} \\ & + \tilde{\Gamma}^{i}{}_{ml}K^{m\cdot\cdot}{}_{jk} + K^{i\cdot\cdot}{}_{ml}\tilde{\Gamma}^{m}{}_{jk} - K^{i\cdot\cdot}{}_{ml}K^{m\cdot\cdot}{}_{jk}\end{aligned} \qquad \text{B2-(25)}$$

En un sistema de coordenadas geodésicas, localmente en un punto $\tilde{\Gamma}^{i}{}_{jk} = 0$ y por tanto

$$\begin{aligned}\hat{R}^{i\cdot\cdot\cdot}{}_{jkl} = {} & \tilde{R}^{i\cdot\cdot\cdot}{}_{jkl} - \partial_k K^{i\cdot\cdot}{}_{jl} + \partial_l K^{i\cdot\cdot}{}_{jk} + \\ & + K^{i\cdot\cdot}{}_{mk}K^{m\cdot\cdot}{}_{jl} - K^{i\cdot\cdot}{}_{ml}K^{m\cdot\cdot}{}_{jk}\end{aligned} \qquad \text{B2-(26)}$$

El tensor de Ricci-Cartan

$$\hat{R}^{i\cdot\cdot\cdot}_{jil} = \hat{R}_{jl} = \tilde{R}_{jl} - \partial_i K^{i\cdot\cdot}_{jl} + \partial_l K^{i\cdot\cdot}_{ji} + \\ + K^{i\cdot\cdot}_{mi} K^{m\cdot\cdot}_{jl} - K^{i\cdot\cdot}_{ml} K^{m\cdot\cdot}_{ji}$$

B2-(27)

La curvatura escalar Cartan

$$\hat{R} = g^{jl}\hat{R}_{jl} = \tilde{R} - g^{jl}\partial_i K^{i\cdot\cdot}_{jl} + \partial^j K^{i\cdot\cdot}_{ji} + \\ + K^{i\cdot\cdot}_{mi} K^{m\cdot j}_{\cdot j\cdot} - K^{i\cdot j}_{\cdot m\cdot} K^{m\cdot\cdot}_{ji}$$

B2-(28)

Notese a partir de B2-(26) por ejemplo, que la identidad cíclica de un espacio de Riemann , $\tilde{R}^{i}{}_{[jkl]} = 0$ ya que no se verifica en un espacio de Cartan y las identidades de Bianchi son asimismo modificadas. No abundamos más acerca de la geometría de Cartan . Lo hasta ahora expuesto es suficiente para discutir la teoría de Einstein-Cartan de gravedad: (ver tambien apéndice 1).

3) LA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

Para una exposición más detallada, ver Hehl (1976) y A. Trautman (1975), el primero usa fundamentalmente cálculos en componentes coordenados como estoy usando hasta ahora, pero con diferentes convenciones que las que yo estoy usando, el segundo usa parcialmente formas diferenciales.

Hehl, Trautman y colaboradores, toman como densidad Lagrangiana gravitatoria, en analogía con la teoría de Einstein-Hilbert, la densidad curvatura escalar Cartan, mientras que para el Lagrangiano material partiendo de Lagrangiano de relatividad especial $L_m(\Phi, \partial\Phi, \eta)$ aplicando "acoplamiento mínimo" pero con la conexión Cartan i.e.,

$$\eta \to g \quad ; \quad \partial \to \hat{\nabla}$$

obtienen $L_m(\Phi, \hat{\nabla}\Phi, g)$. Según Hehl y col. este acoplamiento mínimo debería ser aplicado a todos los campos materiales, para ellos, no importa que Φ sea un campo material tensorial o spinorial (i.e., bosónico o fermiónico). Sin embargo, no debe ser aplicado a campos gauge, es decir, estos "no sienten" la torsión. Intentos de hacerlo con el campo de Maxwell o de Yang-Mills conducirán a inconsistencias como veremos.

En mi opinión solo materia fermiónica puede necesitar a la torsión y además requiere la formulación en sistemas no coordenados (no holónomos) localmente lorentzianos.

Notese que la teoría de Einstein-Cartan es una teoría semi-semiclásica , es decir, en ella se consideran como fuentes, campo materiales c-número. Es pues, en principio, una teoría microscópica que considera entre las fuentes la densidad spín de las partículas elementales.

Aplicando el "principio de Einstein-Palatini" generalizado, a la acción

$$A(C) = \frac{1}{c}\int_{C\subset M_4} (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_m)\, d^4y$$

con la dependencia funcional

$$\mathcal{L}_G = -5\frac{\hbar c}{16\pi \ell^2}\hat{R}\sqrt{-g} = \mathcal{L}_G(g,\partial g, Q, \partial Q) \qquad \text{B3-(0)}$$

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g,\partial g, Q, \Phi, \partial\Phi)$$

Variando la acción respecto de g y $\hat{\Gamma}$ independientemente (método de Trautmann) ó respecto de g y K ó mejor ya que K= K(g,Q), respecto de g y Q (método de Hehl) se obtienen las ecuaciones de Einstein-Cartan variando Φ se obtienen las ecuaciones de movimiento de la materia: $\delta\mathcal{L}_m/\delta\Phi = 0$
El método de Trautmann no es apropiado ya que $\hat{\Gamma}$ no es independiente totalmente de la métrica y debe ser variada dentro del subconjunto de conexiones que son compatibles con la métrica, sin embargo, considerando (g,K) ó mejor g y Q como variables gravitatorias este problema es obviado.

Variando la métrica,(ver por ejemplo Hehl et al (1976)) se obtiene la ecuación de "Einstein",

$$\hat{G}_{ij} = \frac{8\pi\ell^2}{\hbar c} t_{ij} \qquad \text{B3-(1)}$$

Donde $\hat{G}_{ij}$ es el tensor de Einstein-Cartan y t_{ij} el tensor de energía momento canónico.

Variando la torsión, se obtiene la ecuación de "Cartan",

$$T^{k..}_{ij} = \frac{8\pi\ell^2}{\hbar c} S^{k..}_{ij} \qquad \text{B3-(2)}$$

Donde $T^{k..}_{ij} = Q^{k..}_{ij} + 2\,\delta^k_{[i} Q^{\ell}_{.j]\ell}$ y $S^{k..}_{ij}$ el tensor de spin canónico.

Hay que hacer notar que el spin se acopla a la contorsión $K^{k..}_{ij}$ y no a la torsión $Q^{k}_{.ij}$, es decir,

$$\sqrt{-g}\, S_i{}^{kj}{}_{..} = \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta K_{jk}{}^{i}} \qquad \text{B3-(3)}$$

Otro punto importante para señalar, es que la ecuación de Cartan B3-(2) es trivial en el sentido de que $S^{k..}_{ij}=0 \Rightarrow Q^{k..}_{ij}=0$
La torsión está, por tanto, conectada algebraicamente con sus fuentes no diferencialmente, es decir la torsión no se propaga en el vacío de spin, no es dinámica. En este caso se obtiene como límite Relatividad general ya que el tensor canónico de energía momento t_{ij} coincide con T_{ij} el simétrico si $S^{i}_{\ jk} = 0$.

Debido a la trivialidad de la torsión, podemos dar la vuelta a la ecuación B3-(2) obteniendo

$$Q^{i..}_{jk} = \frac{8\pi\ell^2}{\hbar c}\left(S^{i..}_{jk} + \delta^{i}_{[j} S_{k]}\right) \quad \text{con } S_k = S^{\ell..}_{k\ell} \qquad \text{B3-(4)}$$

Sustituyendo esta expresión de la torsión en la de las componentes de la conexión Cartan B2-(17) obtendremos

$$\hat{\Gamma}^{i..}_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} - \frac{4\pi\ell^2}{\hbar c}\Big(S^{i..}_{jk} + S_{kj}{}^{.i} + S_{jk}{}^{..i} - \delta^{i}_{k} S_j + g_{jk} S^{i}\Big) \qquad \text{B3-(5)}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación B3-(1), tras un cálculo laborioso se obtiene

$$\tilde{R}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \tilde{R} = \frac{8\pi l^2}{\hbar c} t_{ij} + \\ + \overset{*}{\nabla}_k \left(S_{ij}{}^{\cdot\cdot k} + S^{k\cdot\cdot}{}_{ij} + S_{ji}{}^{\cdot\cdot k} \right) + \\ + \left(\frac{4\pi l^2}{\hbar c} \right)^2 \Big[2 S_{ilk} S^{lk\cdot}{}_{\cdot\cdot j} + \\ + 2 S_{ikj} S^k + S_{ikl} S_j{}^{lk}{}_{\cdot\cdot} + \\ + g_{ij} \big(S_{klm} S^{lmk} + S_k S^k \\ + \frac{1}{2} S_{klm} S^{kml} \big) \Big]$$

con

$$\overset{*}{\nabla}_i = \nabla_i + Q^{k\cdot\cdot}{}_{ki} \qquad \text{B3-(6)} \quad \text{B3-(7)}$$

Recordando la fórmula A4-(6) del procedimiento de Belinfante-Rosenfeld de simetrización y generalizándola al caso de torsión obtenemos

$$\tilde{R}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \tilde{R} = \frac{8\pi l^2}{\hbar c} T_{ij} + \qquad \text{B3-(8)} \\ + \left(\frac{4\pi l^2}{\hbar c} \right)^2 \Big[\big(2 S_{ilk} S^{lk}{}_{\cdot\cdot j} + 2 S_{ikj} S^k \\ + S_{ikl} S_j{}^{lk}{}_{\cdot\cdot} \big) + \\ + g_{ij} \big(S_{klm} S^{lmk} + S_k S^k + \frac{1}{2} S_{klm} S^{kml} \big) \Big]$$

Donde T_{ij} es el tensor energía momento simétrico, fuente en la teoría de Einstein-Hilbert. Se observa que las ecuaciones

de Einstein-Cartan corresponden a la ecuación de Einstein-Hilbert con la fuente modificada por los efectos del spín de las partículas elementales. De esta forma la métrica del espacio-tiempo de Cartan depende no solo de la distribución de energía momento, sino también, de la distribución del spín. Dicho de otra forma, no solo existe la interacción gravitatoria masa-masa atractiva de la teoría de Einstein-Hilbert sino también una interacción gravitatoria spin-spin que es atractiva en el caso de spines paralelos, como en el experimento de Happer (1977).

Aparte de la "equivalencia" ingenua entre las teorías de Einstein-Hilbert y de Einstein-Cartan que se ha efectuado anteriormente es posible demostrar con toda generalidad, JM. Nester (1977), su equivalencia.

Hay que tener en cuenta que las teorías de Einstein-Hilbert y de Einstein-Cartan son <u>experimentalmente indistinguibles a nivel macroscópico</u>, ya que los efectos de los spines, cuando se consideran muchas partículas, se cancelan entre si, mientras que el efecto gravitatorio de la masa es aditivo.

En cuanto a la <u>cosmología</u> basada en la teoría de Einstein-Cartan quiza merezca la pena resaltar que en los primeros trabajos, A. Trautman (1973), B. Kuchowicz (1976) se consiguieron modelos de universo del tipo Friedmann-Robertson-Walker cerrados (tipo Bianchi IX), sin singularidad inicial, ya que se viola la 3ª condición de los teoremas de Hawking-Penrose (la condición energética) al sustituir en ella el tensor T_{ij}, por el tensor que aparece en r.h.s. de B3-(8), debido al caracter repulsivo de la interacción spin-spin (antiparalelos). Pero en otras ocasiones, como en los modelos de tipo Bianchi V (abiertos) la torsión "aumentaba" la singularidad. (ver JM. Nester y J.

Isenberg (1977)).

Las leyes de conservación de la teoría de Einstein-Hilbert son generalizadas .(Los índices con $\sim$ ($\wedge$)son derivados con la conexión Christoffel (Cartan) respectivamente)

$$\tilde{\nabla}_j t^{\hat{i}\tilde{j}} = \frac{1}{2} S^{\ell k j} \hat{R}_{k\ell \cdot j}^{\cdot\cdot i \cdot} + t^{kj} Q_{k \cdot j}^{\cdot i \cdot} \qquad B3-(9)$$

$$\tilde{\nabla}_j S^{\hat{k}\hat{\ell}\tilde{j}} = 2\, t^{[k\ell]} = t^{k\ell} - t^{\ell k} \qquad B3-(10)$$

Ver A. Trautman (1972) y P.Yasskin y W. Stoeger (1980).

Lo que hay que señalar respecto de B3-(9) , es que, originalmente, Cartan imponía erroneamente

$$\tilde{\nabla}_j t^{\hat{i}\tilde{j}} = 0$$

Lo que conduce a una ligadura algebraica entre la curvatura y la torsión. En la Teoría de Einstein-Cartan esto se corrige a través de la fórmula B3-(9) . El primer término en la ecuación B3-(9) da lugar a las ecuaciones de movimiento análogas a las de Mathisson-Papapetrou , salvo que la curvatura es Cartan, mientras que el último término es especifico de la teoría de Einstein-Cartan.

Para concluir, la diferencia fundamental entre la teoría de Einstein-Hilbert y la de EC se puede observar a partir de la ecuación quasi-Einsteniana de EC B3-(8) , en forma concisa

$$\tilde{G} = t + \mathrm{div}\, S + S^2 = T + S^2 \qquad B3-(11)$$

Es decir el término S^2 es la única diferencia entre las dos teorías y este término solo es relevante cuando

densidad de energía $\sim$ (densidad de spin)^2

Por tanto solo para densidades de materia muy altas como las posibles en el universo primitivo del orden de $\rho = 10^{54}\, gr/cm^3$ (ver FW. Hehl, Evon der Heyde, D. Kerlick (1974)), Kerlick (1973) (1975), las predicciones de la teoría de EC y de EH serán diferentes, mientras que en situaciones más "normales" como estrellas de neutrones etc. los efectos del spin de las partículas elementales constituyentes, es completamente despreciable . Según la teoría EC los efectos del spin a través de la torsión solo son apreciables "dentro" de la materia, fuera la teoría de Einstein sería válida.

4) TEORIAS CON TORSION DINAMICA

Como se ha dicho en la teoría EC la torsión no es dinámica ya que está ligada algebraicamente con su fuente, la densidad de spín. Esto es debido a escoger como Lagrangiano gravitatorio la curvatura escalar Cartan , fórmula B2-(28) ya que esta no posee términos cuadráticos en ∂K , Los términos lineales que aparecen constituyen una diferencial exacta que no influye en las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Extendiendo este Lagrangiano B3-(0) , podríamos añadir a los escalares cuadráticos en contorsión que aparecen en él ,a los que denominaremos K_1 y K_2.

$$K_1 = K^{mi\cdot}_{\cdot\cdot i}\, K^{mj\cdot}_{\cdot\cdot j} \; ; \; K_2 = K^{mi\cdot}_{\cdot\cdot j}\, K^{mj\cdot}_{\cdot\cdot i} \qquad B4-(0)$$

otro posible escalar K_3

$$K_3 = K^{mi\cdot}_{\cdot\cdot j}\, K_{mi}{}^{j} \qquad \text{B4-(1)}$$

Además, dado que ya no se verifica la identidad cíclica $\tilde{R}^{i}{}_{[jkl]} = 0$ que implica $\varepsilon^{ijkl}\, \tilde{R}_{ijkl} = 0$ en un espacio Riemann. En un espacio de Cartan el pseudo-escalar

$$P_1 = \varepsilon^{ijkl}\, \hat{R}_{ijkl} \neq 0 \qquad \text{B4-(2)}$$

Donde ε^{ijkl} es la densidad pseudotensorial de Levi-Civita-Kronecker. Inclusión de este término en el Lagrangiano conduce a una teoría (ver R. Hojman y col. (1980)) cuyos efectos violan la paridad a nivel gravitatorio y no, ó no totalmente, a nivel de interacción débil, (efecto Cronin), como usualmente son explicados. El Lagrangiano B4-(2) se descompone empleando la expresión de la curvatura Cartan en

$$\varepsilon^{ijkl}\, \hat{R}_{ijkl} = -2\,\varepsilon^{ijkl}\left(K_{iml}^{\cdot\cdot\cdot}\, K^{m\cdot\cdot}_{\ jk} + \partial_k K_{ijl}\right)$$

$$= -2\,\varepsilon^{ijkl}\, K_{iml}\, K^{m\cdot\cdot}_{\ jk} + \partial_k\left(\varepsilon^{ijkl} K_{ijl}\right) \qquad \text{B4-(3)}$$

El último término es una divergencia pura otra vez, y por lo tanto no contribuye a las ecuaciones de campo (ignorando los efectos de superficie que pueden surgir al aplicar el principio variacional en una subvariedad compacta). Además del que aparece en B4-(3), T_1

$$T_1 = \varepsilon^{ijkl}\, K_{iml}\, K^{m\cdot\cdot}_{\ jk} \qquad \text{B4-(4)}$$

Existen otras tres posibilidades

$$T_2 = \varepsilon^{ijkl}\, K_{l\cdot m}^{\cdot m\cdot}\, K_{ijk} \qquad \text{B4-(5)}$$

$$T_3 = \varepsilon^{ijkl}\, K_{klm}^{\cdot\cdot\cdot}\, K^{m\cdot\cdot}_{\cdot ij} \qquad \text{B4-(6)}$$

$$T_4 = \varepsilon^{ijkl}\, K_{klm}\, K_{ij}{}^{m} \qquad \text{B4-(7)}$$

Sin embargo, existen las siguientes relaciones entre ellos

$$4T_1 + 4T_2 + T_3 = 0 \qquad \text{B4-(8)}$$

$$2T_1 + T_2 + T_4 = 0 \qquad \text{B4-(9)}$$

Esto hace que solo 2 entre los T_i sean independientes, que junto con los tres K_i hacen el total de 5 escalares que se podrían añadir al Lagrangiano lineal de Einstein-Cartan.

Sin embargo, respecto de la trivialidad de la torsión, nada cambiaría con este Lagrangiano general de 5 parámetros, ya que las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas bajo variaciones de la contorsión, en el vacio se obtendría

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta K_i{}^{jk}} = 0 \qquad \text{B4-(10)}$$

Es decir, una ecuación algebraica para K. Por tanto <u>la única forma de hacer</u> la contorsión ó lo que es lo mismo <u>la torsión dinámica</u> es incluir en el Lagrangiano gravitatorio términos cuadráticos en derivadas de la contorsión (o torsión), el número total posible de ellos sería <u>dieciseis</u>, como puede obtenerse a partir del trabajo de M. Horak y D. Krupka (1978). Permitiendo intervenir a ε^{ijkl}, todavía (aun más) se incrementaría el número de posibles términos en el Lagrangiano (ver A.J. Pucell (1978)), y cada uno en principio con una diferente constante de acoplamiento.

Una vía todavía más complicada para hacer propagar la torsión, es la usada por F.A. Kaempffer (1978), introduciendo un tensor antisimetrico Φ_{ij} y haciendo

$$\text{i)}\quad K_{ijk} = \hat{\nabla}_k \Phi_{ij} \qquad \text{B4-(11)}$$

$$\text{ii)}\quad K_{ij}{}^{k} = \hat{\nabla}_j \Phi^{k}{}_{i} - \hat{\nabla}_i \Phi^{k}{}_{j} \qquad \text{B4-(12)}$$

$$\text{iii)}\quad K_{ijk} = \hat{\nabla}_k \Phi_{ij} + \varepsilon_{ijlm} \hat{\nabla}_k \left(\eta^{ln} \varepsilon^{m}{}_{n}\right) \qquad \text{B4-(13)}$$

Otra posibilidad consiste en introducir de un potencial escalar, "el taplon", que aparece en la parte vectorial de la torsión S. Hojman et al (1978-79), al que denotamos como φ.

$$Q^{i}{}_{jk} = \left(\delta^{i}{}_{k} \varphi_{,j} - \delta^{i}{}_{j} \varphi_{,k}\right) \qquad \text{B4-(14)}$$

$$\varphi_{,j} = -\frac{1}{6} Q^{i}{}_{ij} \qquad \text{B4-(15)}.$$

Mediante esta forma específica de la torsión, es posible acoplar el campo electromagnético (y cualquier campo gauge) a la conexión Cartan sin romper su invariancia gauge. Sin embargo, las teorías del tipo taplon, están en contradicción con el experimento de Eötvos-Dicke-Braginsky del principio de equivalencia débil, como ha demostrado W.T. Ni (1979).

Otros intentos en esta vía, pero tomando a la torsión solo como su parte vector-axial

$$Q^{kij} = \frac{1}{2} \eta^{ijkl} \partial_l \varphi \qquad \text{B4-(16)}$$

como han hecho V. de Sabbata y M. Gasperini (1981-a) (1981-b), lo que lleva consigo una modificación de las ecuaciones de

Maxwell, en presencia de esa torsión específica, que parece que no esta en desacuerdo con el experimento de Eötvos. Sin embargo, es una idea demasiado complicada.

Mi opinión es que no se debe acoplar la torsión a los campos gauge y la forma más correcta de hacer la torsión dinámica y a la vez la más sencilla, es tomando Lagrangianos cuadráticos en curvatura Cartan y sus contracciones. Es decir, considerar una generalización de tipo Eddington-Lanczos-Weyl, pero esta vez de la teoría de Einstein-Cartan.

Además, veremos que está en la base de la teoría gauge, tomar ese tipo de Lagrangianos para otros campos (electromagnético, fuerte).

En principio, el Lagrangiano con torsión dinámica más general es, teniendo en cuenta las simetrías de la curvatura Cartan,

$$L_G = \frac{\hbar c}{16\pi\alpha_G}\Big(c_1 \hat{R}^2 + c_2 \hat{R}_{ij}\hat{R}^{ij} + c_3 \hat{R}_{ij}\hat{R}^{ji} + c_4 \hat{R}_{ijkl}\hat{R}^{ijkl} + c_5 \hat{R}_{ijkl}\hat{R}^{klij} + c_6 \hat{R}_{ijkl}\hat{R}^{ikjl}\Big) \qquad \text{B4-(17)}$$

Debido a la generalización del teorema de Gauß-Bonnet (ver Nieh JMP. (1982) a la geometria de Cartan.

El escalar

$$E = \varepsilon_{ij\alpha\beta}\, \varepsilon^{kl\gamma\delta}\, \hat{R}^{ij}{}_{kl}\, \hat{R}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = -4\left(\hat{R}^2 - 4\hat{R}_{ij}\hat{R}^{ji} + \hat{R}^{ij}{}_{kl}\hat{R}^{kl}{}_{ij}\right) \qquad \text{B4-(18)}$$

tiene una integral

$$\int E \sqrt{-g}\, d^4y . \qquad 84-(19)$$

que es un invariante topológico relacionado con la caracteristica de Euler-Poincaré en espacios de Cartan. (Nótese el orden de los índices).

Por tanto, como invariante topológico que es, esta integral (que fisicamente sería la acción) es invariante bajo variaciones de la métrica y de la conexión y por tanto cualquier múltiplo de E, no tiene influencia sobre las ecuaciones de Euler-Lagrange. Luego al menos uno de los parámetros C_1, C_3, C_5 es arbitrario. De esta forma, el Lagrangiano más general con torsión dinámica es de 5 parámetros, que comparado con el análisis anterior, 16 parámetros (sin considerar E) es ya una gran simplificación. (Más adelante todavía será más simplificado).

5) CUANTIFICACION COVARIANTE DE LAS TEORIAS CON TORSION

En primer lugar, existe una gran diferencia entre la teoría de Einstein-Cartan y las teorías en las que la torsión es dinámica. En la primera, la torsión es cero en el vacío de spin y en la que, por tanto, los pequeños efectos del spin solamente se demuestran dentro de la materia, mientras que en las segundas, la ecuación donde aparece la torsión es una ecuación diferencial, no algebraica como en el primer caso y por tanto, la torsión se puede propagar en el vacío.

El comportamiento de la teoría EC bajo cuantificación perturbativa es exactamente el mismo que para RG, la teoría es unitaría pero no renormalizable, y ni siquiera la matriz S es finita en la capa, es decir, cuando se imponen las ecuaciones

de movimiento de los campos materiales, más allá de 1-ciclo cerrado. El comportamiento cuántico de teorías métricas con torsión dinámica es mejor.

Este tema ha sido tratado fundamentalmente por D.E. Neville (1978) (1980-a) (1980-b).

D.E. Neville, usando teorías con torsión dinámica, ha demostrado que existen Lagrangianos particulares que dan lugar a teorías unitarias pero no renormalizables contando potencias y a la inversa.

En los últimos artículos publicados sobre el tema por E. Sezgin y P. Nieuwenhuizen (1980), E. Sezgin (1981), se consideran casos más generales con diversas teorías que son unitarias pero no renormalizables, sin embargo su comportamiento ultravioleta puede ser mejor, ya que no existe un teorema análogo al de Grisaru-Zak, para la teoría de EH ó de EC y por tanto la matriz S puede ser finita a cualquier orden en la teoría pertur-bativa. Por lo tanto, esto al menos abre la puerta a considerar como mejores, las teorías micróscopicas con torsión dinámica, respecto de las teorias EH ó EC.

(El teorema de Grisaru-Zak (1980) demuestra que, en la teoría de Einstein-Hilbert (EH) la helicidad no se conserva. Anteriormente, Grisaru, van Nieuwenhuizen y Wu (1975), habían demostrado que, si la teoría EH conservase la helicidad, entonces la matriz S sería finita a niveles de ciclos elevados.)

CAPITULO C

TEORIA GAUGE GENERAL

1) MOTIVACION

En los próximos capítulos se presenta la formulación mediante teoría gauge de las interacciones internas y su aplicación (y generalización) a gravedad. Pero antes, hay que explicar cual es el motivo de intentar conseguir una formulación mediante teoría gauge de la gravedad. Aparte de la motivación estética de que toda la física se pueda construir mediante el mismo formalismo, la motivación especifica hay que encontrarla en lo ya parcialmente reseñado sobre los intentos de cuantificación covariante de la gravedad. Estos intentos conducen al "desastre " de que la teoría de Einstein-Hilbert (linealizada) no puede dar lugar a una teoría cuántica unitaria y renormalizable como vimos.

Las posibles respuestas a este desastre son como ya se ha visto parcialmente, las siguientes

1) El tratamiento semiclásico (Kibble 1981) es el único posible. La teoría de gravedad cuántica no es posible.

2) Modifíquese el Lagrangiano pero no la geometría pseudo-riemanniana.

a) Añadiendo "ad hoc" a $\tilde{R}$, términos cuadráticos en curvatura, Stelle(1977), Havas(1977).

b) Gravedad inducida. Sakharov(1968), Zee (1979) y Adler (1982). Sin embargo, la teoría es renormalizable pero no unitaria.

3) Modifíquese la geometría (introduciendo torsión) pero no el Lagrangiano. Esta es la teoría de-Einstein Cartan. Sin embargo, la teoría cuántica covariante es del mismo tipo que la de RG.

4) Adóptese la Idea Gauge para describir a la gravedad. Estamos en buena compañía, ya que el electromagnetismo se describe mediante teoría gauge basada en el grupo $U(1)$, la interacción fuerte basada en $SU(3)$, la unificación debil-electromagnetica está construida como la teoría gauge (más rompimiento espontáneo de la simetria) del grupo $SU(2)\otimes U(1)$, los modelos de unificación electro-débil-fuerte están formulados como teoría gauge (más rompimiento espontáneo de la simetría) de los grupos $SU(5)$, $SO(10)$, E_6, dependiendo del modelo. Y todas estas teorías formuladas primitivamente como teorías semiclásicas, admiten una buena cuantificación covariante. En general este procedimiento conducirá a modificar la Acción y la geometría.

5) Supersimetría mas idea gauge igual[a] Supergravedad. Las teorías supergravitatorias poseen, incluso sin modificar a la geometría, mejor comportamiento ultravioleta en general.

La conclusión de lo anteriormente reseñado es que si se insiste en formular la teoría de gravedad cuántica, quedan al menos cuatro posibilidades:

a) Desarróllese otro formalismo diferente del covariante. Por ejemplo, el canónico.

b) Acóplese la teoría de Einstein-Hilbert de gravedad pura, al conjunto campos materiales correctos. Sin embargo, este procedimiento no puede realizarse de otra forma que por tanteo y hasta ahora no ha dado resultado.

c) Acoplese la teoría de Einstein-Hilbert de gravedad pura (no renormalizable) no a materia descrita por buenas teorías cuánticas (QED, QCD, etc) sino a materia descrita por teorías a su vez, no renormalizables (por ejemplo el modelo σ -no lineal, Duff-Goldthorpe (1981)).

d) Adoptese el punto de vista 4 anterior y construyase la teoría gauge de gravedad (ó bien de supergravedad).

Aquí adoptaremos este cuarto punto de vista, aunque como se verá el procedimiento no es únivoco y decir cual es la teoría gauge de gravedad es bastante difícil, ya que existirán diversas posibilidades.

2) INTRODUCCION

La teoría de campo gauge es un apelativo que en mi opinión no es muy afortunado, (la traducción castellana de la palabra inglesa es, medida, norma, escala, la sudamericana, aforo. La "traducción" castellana del término ruso, gradiente, es, contraste (vease Teoría Clásica de Campos (1973) Ed. Reverté). Las razones históricas de tal nombre tienen las raices en la palabra Eich-Invarianz que H. Weyl empleó primero en su teoría unitaria de la gravitación y del electromagnétismo y que despues no cambió cuando en 1929 demostró que el electromagnetismo Maxwelliano se puede obtener mediante teoría gauge.

Hoy, el mejor apelativo sería el de teoría de campos de conexión ó de fase.

La teoría de campo gauge, es dicho en pocas palabras, un método para obtener las ecuaciones de campo clásicas (las cuales son sometidas posteriormente a cuantificación) de una interacción, a partir del caso libre. El método es directo en el caso de interacciones de infinito alcance mediadas por partículas virtuales no masivas, (electromagnetismo) y añadiendo al método gauge algún mecanismo que permita dar masa a las partículas mediadoras, bien, el mecanismo de Higgs, bien, correcciones

radiativas, bien, rompimiento dinámico de simetria, obtener la teoría de unificación débil-electromagnética, Weinberg-Salam, por ejemplo. Es más, permiten obtener teorías de unificación electro-débil-nuclear.

El tema fundamental de este trabajo es la descripción de la interacción gravitatoría aplicando la idea gauge, bien en su forma "ortodoxa", i.e., como son descritas el resto de interacciones, bien con modificaciones específicas del esquema gauge para dar cuentas de las especiales características de la gravedad. Esto será tratado en el siguiente capítulo. En este se expone el esquema gauge "ortodoxo" del tipo Yang-Mills. ¿Pero, que significa teoría gauge?.

El fin último de cualquier teoría física es hacer predicciones sobre magnitudes observables. Ciertas teorías, poseen ambigüedades estructurales consistentes en que las funciones que describen los estados de un determinado sistema físico, no están univocamente determinados. Si los observables predichos por un sistema físico dado, son invariantes bajo cambios ó transformaciones permitidos por la estructura de la teoría, entonces esos cambios son fisicamente irrelevantes. En este caso se dice que la teoría física tiene "libertad de gauge".

3) EL NACIMIENTO DE LA IDEA GAUGE

H. Weyl en (1918) (vease Space-Time-Matter, Dover(1950) en su intento de teoría unitaría de la gravitación y del electromagnetismo, introdujo el concepto de cambio de escala. La longitud de un vector era modificada cuando era desplazado paralelamente. No solo, pues, variaba su dirección como es propio en un espacio de Riemann, sino también su magnitud.

Antes de Einstein, la labor del físico seguía la siguiente línea metodológica: experimentos $\Rightarrow$ ecuaciones de la interacción $\Rightarrow$ simetría (invariancia). Despues de Einstein este esquema fue invertido, es pues la "simetría la que dicta la interacción". Con esta idea, Weyl pensó que, ya que según Einstein la "invariancia bajo transformaciones generales de coordenadas" daba lugar a las ecuaciones de la gravedad, entonces una nueva invariancia geométrica añadida, daría lugar a la descripción "unificada" del electromagnetismo, su propuesta era la "invariancia de escala" ("Eich Invarianz"). En resumen (vease C.N. Yang (1971))

C3-(0)

escala	1	$1+\varphi_i\,dx^i$
campo material	$\Phi(x^i)$	$\Phi(x^i)+\partial_\mu\Phi\,dx^i$
campo material escalado	$1\cdot\Phi(x^i)$	$\Phi+(\partial_i+\varphi_i)\Phi\,dx^i$

El intento de Weyl se cifraba considerar que el potencial electromagnético era el vector φ_i. Sin embargo, el intento no prosperó por la obje-ción de Einstein (1923), de que la teoría de Weyl en el caso del campo electróstatico conducía a que los átomos de hidrógeno no tendrían un espectro característico. Esta obje-ción hoy, no tiene tanta importancia ya que la física atómica es descrita mediante teoría cuántica y el intento de Weyl era puramente clásico. Más objecciones pueden ser encontradas en la correspondencia Einstein-Besso, Ed. Hermann, (1979).

Pese a que la teoría física había fracasado, Weyl había conseguido describir una generalización geométrica del espacio de Riemann, el espacio de Weyl. En este, la conexión es simétrica pero no métrica y la no metricidad es específica

$$\nabla_k g_{ij} = \varphi_k g_{ij} \qquad \text{C3-(1)}$$

En 1925 la estructura de la mecánica cuántica se empieza a construir y en ella el cuadri-momento clásico de una partícula libre p_i es considerado como el operador $-i\hbar\partial_i$, y para una partícula cargada la prescripción es (A_i el potencial e.m.)

$$p_i - \frac{e}{c}A_i \longrightarrow -i\hbar\left(\partial_i + \frac{ie}{\hbar c}A_i\right) \qquad \text{C3-(2)}$$

V. Fock (1927). Meses después, London F. (1927) resaltó la similitud de esta expresión, con la obtenida por Weyl en su teoría unitaria. En efecto comparando C3-(0) y C3-(1), la identificación de Weyl, $\varphi_i \rightarrow A_i$, no es correcta, sino que la que lo es

$$\partial_i + \varphi_i \rightarrow \partial_i + \frac{ie}{\hbar c}A_i \qquad \text{C3-(3)}$$

Lo importante es que aparece la "i". Es decir que en vez del cambio de <u>escala</u> de Weyl

$$\exp(\varphi_i\,dx^i) \sim 1 + \varphi_i\,dx^i \qquad \text{C3-(4)}$$

se considera un cambio de <u>fase</u> de

$$\exp\frac{ie}{\hbar c}A_i\,dx^i \sim 1 + \frac{ie}{\hbar c}A_i\,dx^i \qquad \text{C3-(5)}$$

En 1929, Weyl estudió la invariancia bajo este cambio de fase, esto conduce a construir la teoria de Maxwell. En electrodinámica existen dos transformaciones de gauge, i.e., que las ecuaciones del EM, son invariantes cuando se efectuan esos cambios

$$e=\hbar=c=1 \qquad \Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = e^{i\lambda}\,\Phi(x) \qquad \text{C3-(6)}$$
$$\lambda = cte\,!$$

siendo Φ el campo escalar complejo correspondiente al electrón (considerando la electrodinámica escalar).

y

$$A_i(x) \longrightarrow A'_i(x) = A_i(x) - \partial_i\tau(x) \qquad \text{C3-(7)}$$

Siendo $\tau(x)$ una función escalar.

Las transformaciones (3-(6) constituyen el grupo uniparamétrico $U(1)$ abeliano

$$g = e^{i\lambda} = e^{i\theta q} \in U(1)$$

Normalizando, q= 1, y θ es un parámetro constante. La ecuación (3-(6) es una transformación global ya que $\theta = cte$. Como el observable físico no es la fase sino , que es la densidad local de probabilidad, Weyl observó que era posible hacer esta transformación localmente, $\theta = \theta(x)$.
La elección arbitraria de la fase del electrón en cada punto del espacio-tiempo era permitida por la estructura de la mecánica cuántica. Es más, en este caso $\theta(x) = \tau(x)$,es decir, se producía un acoplamiento de Φ con A_i , una interacción entre el electrón y el campo fotónico.

Mediante el método Lagrangiano, (ya que este es un escalar Poincaré, en vez del Hamiltoniano que no lo es), es posible obtener mediante un método preciso partiendo de electrón libre descrito por el Lagrangiano relativista especial $L_m(\Phi, \partial\Phi)$, obtener las ecuaciones del campo electromagnético. La generalización al caso de transformaciones de fase realizadas por grupos no abelianos fue sugerida por O. Klein (1938) y fue construida por Yang-Mills (1954) y por R. Shaw (1955).

El esquema general de la teoría gauge fue realizado por R. Utiyama (1956). Siendo la idea gauge, en mi opinión, la idea más fructífera de la física teórica en las últimas décadas, el hacer un resumen de su aplicación a campos internos, está fuera de este trabajo por razones de espacio-tiempo. En la literatura citada al final se encuentra una selección de la bibliografía.

4) ESTRUCTURA DEL METODO GAUGE

En esta sección solo se expondrá un resumen del método general de la idea gauge. Este método puede ser realizado utilizando tres formalismos :

1) El diferencial, utilizando como base al potencial vector A.

2) El integral, tomando como base al factor de fase, $\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_P^Q A_i\, dy^i\right)$. Wu, Yang (1975) , y realizando la teoría "a la Mandelstam" (1962).

3) El global, usando como herramienta matemática el lenguaje de fibrados. De esta forma la teoría gauge tiene una perfecta y sencilla formulación geométrica (ver apéndice 3).

En este trabajo se utilizará preferentemente el formalismo diferencial, usando componentes (como es usual en la literatura física) y usando formas diferenciales (ver apéndice 2), lo cual es innovador.

i) Invarianza Gauge Global

Dado un campo libre $\Phi \in F_p(M^4, E)$ como una $p \leq 4$ forma sobre el espacio-tiempo de Minkowski M^4 y con valores en un espacio vectorial E ó spinorial S .
El campo libre Φ describe un determinado sistema físico sin interacción.

Para obtener las ecuaciones de campo, i.e., de movimiento de este campo libre, se construye, como es usual en teoría de campos el Lagrangiano 4-forma $L(\Phi, d\Phi) \in F_4(M^4, R)$, con valores en R y con dependencia funcional como es usual en física en Φ y su derivada exterior primera $d\Phi$, ya que de esta forma las ecuaciones de campo son de segundo orden, obtenidas a partir del principio variacional a través de la integral de Acción

$$A(C) = \int_{C \subseteq M^4} L(\Phi, d\Phi) \qquad C4-(0)$$

Siendo $C \subseteq M$ una subvariedad compacta de Minkowski. Una variación de los campos $\Phi \to \Phi' = \Phi + \delta\Phi$, tal que, $\delta\Phi|_{\partial C} = 0$, bajo la acción de un grupo de Lie G, conduce a una variación del Lagragiano y por lo tanto de la acción siguiente

$$\delta A(C) = \int_C L(\Phi + \delta\Phi, d\Phi + d\delta\Phi) - L(\Phi, d\Phi) = \int_C \delta L \qquad C4-(1)$$

Por tanto, si el Lagrangiano del campo Φ libre es invariante en C bajo la acción del grupo de Lie G, tambien lo será la acción y reciprocamente

$$\delta L = 0 \text{ en } C \subset M^4 \Leftrightarrow \delta A(C) = 0 \qquad C4-(2)$$

Las expresiones anteriores son formulaciones equivalentes del principio de minima acción.

Desarrollando $\delta A(C) = 0$ obtenemos

$$\delta A(C) = \int_C \delta L = \int_C \left[\delta\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial \Phi} + \delta d\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi} \right] \qquad C4-(3)$$

Donde "$\wedge$" es el producto exterior o cuña (wedge) y "d" la derivada exterior, (ver apéndice 2).

Aplicando la fórmula (ver apéndice 2)

$$d(\Phi \wedge \Psi) = d\Phi \wedge \Psi + (-1)^p \Phi \wedge d\Psi \qquad C4-(4)$$

ya que, $\delta d = d\delta$ por ser las variaciones internas, obtenemos la siguiente expresión

$$d\left(\delta\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi}\right) = \delta d\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi} + (-1)^p \delta\Phi \wedge d\frac{\partial L}{\partial d\Phi} \qquad C4-(5)$$

Despejando de esta fórmula el primer término del lado derecho y sustituyendo la expresión resultante en $C4-(3)$, obtendremos

$$\delta A(C) = \int_C \delta\Phi \wedge \left[\frac{\partial L}{\partial \Phi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\Phi} \right] + d\left(\delta\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi}\right) \qquad C4-(6)$$

El último término del lado derecho, al ser una derivada exterior puede ser integrado aplicando el teorema de Stokes, obtenemos

$$\int_C d\left(\delta\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi}\right) = \int_{\partial C} \delta\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi} \qquad C4-(7)$$

obtenemos a través de $C4-(7)$ la conservación <u>global</u> de la corriente asociada al campo Φ libre

$$\int_{\partial C} {}^*j = \int_{\partial C} \delta\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi} = 0 \qquad C4-(8)$$

A partir de $C4-(6)$ se obtiene por consiguiente

$$\delta A(C) = \int_C \delta\Phi \wedge \left[\frac{\partial L}{\partial \Phi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\Phi} \right] \qquad C4-(9)$$

Si la acción es estacionaria bajo las variaciones $\delta\Phi$

$$\delta A(C) = 0 \Rightarrow {}^*EL = 0 \qquad C4-(10)$$

siendo $^*EL$ las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange del campo Φ

$$^*EL = \frac{\partial L}{\partial \Phi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\Phi} = 0 \qquad C4-(11)$$

La ecuación C4-(6) con esta definición se puede expresar en la forma equivalente

$$\delta A(C) = \int_{C\subseteq M^4} \left[\delta\Phi \wedge {}^*EL + d{}^*j\right] = 0 \qquad C4\text{-}(12)$$

que implica

$$d{}^*j = -\delta\Phi \wedge {}^*EL \qquad C4\text{-}(13)$$

Módulo las ecuaciones del campo Φ, ${}^*EL=0$, obtenemos la conservación local de la corriente

$$d{}^*j = 0 \qquad C4\text{-}(14)$$

EJEMPLOS

1) Campo de Maxwell libre ó campo de Proca (spin=1)

Con $dx \in F_1(M^4, R^4)$ base coordenada ortonormal y $A \in F_1(M^4, ALU(1) \approx R)$ (nótese que se absorbe la i), el potencial electromagnético. El Lagrangiano del campo de Maxwell libre es la 4-forma $L_M(dx, dA) = \frac{1}{2} dA \wedge {}^*dA = \frac{1}{2} F \wedge {}^*F$

y el de Proca $L_P(dx, A, dA) = \frac{1}{2} dA \wedge {}^*dA + m^2 A \wedge {}^*A$ C4-(15)

donde $F = dA \in F_2(M^4, R)$, es la intensidad de campo.

La variación del Lagrangiano de Maxwell libre es

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{1}{2}\delta F \wedge {}^*F + \frac{1}{2} F \wedge \delta {}^*F = \\ &= \delta F \wedge {}^*F = \delta dA \wedge {}^*F = \\ &= d(\delta A \wedge {}^*F) + \delta A \wedge d{}^*F \qquad C4\text{-}(16)\end{aligned}$$

por tanto siguiendo los pasos de la exposición general anterior

$${}^*EL = \frac{\delta L}{\delta A} = d{}^*F \qquad C4\text{-}(17)$$

verificandose que $\partial L/\partial A = 0$ y que $\partial L/\partial dA = {}^*F$. De forma similar se efectua para el campo de Proca.

2) Campo escalar neutral masivo (espín 0)

$$\Phi \in F_0(M^4, R) \qquad C4\text{-}(18)$$

El Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}\left(d\Phi \wedge {}^*d\Phi + m^2 \Phi \wedge {}^*\Phi\right) \qquad C4\text{-}(19)$$

La variación de este, será

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta d\Phi \wedge {}^*d\Phi + m^2 \delta\Phi \wedge {}^*\Phi \\ &= d\left[\delta\Phi \wedge {}^*d\Phi\right] - \delta\Phi \wedge \left[d{}^*d\Phi - m^2 {}^*\Phi\right] \qquad C4\text{-}(20)\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange serán

$${}^*EL = \frac{\delta L}{\delta \Phi} = m^2 {}^*\Phi - d{}^*d\Phi \qquad C4\text{-}(21)$$

verificándose $\partial L/\partial \Phi = m^2 {}^*\Phi$ y $\partial L/\partial d\Phi = {}^*d\Phi$

3) Campo de Dirac del electrón (espín 1/2)

$\Psi \in F_0(M^4, S)$, donde S es un espacio espinorial

El Lagrangiano es

$$\begin{aligned}L(dx, \Psi, d\Psi) &= \frac{i}{2}\left(\bar\Psi\, {}^*\gamma \wedge d\Psi + d\bar\Psi \wedge {}^*\gamma\Psi\right) \\ &+ m\bar\Psi \wedge {}^*\Psi \qquad C4\text{-}(22)\end{aligned}$$

donde $\gamma = \gamma_i e^i$, e_i es una base y son las matrices de Dirac usuales i= 1,2,3,4. , $\bar\Psi$ señala el adjunto de Dirac como es usual.

La variación del Lagrangiano conduce por un procedimiento análogo a los dos casos anteriores a que las ecuaciones de Euler-

Lagrange son

$$*EL = \frac{\delta L}{\delta \psi} = i\, d\bar{\psi} \wedge *\gamma + m*\bar{\psi} \qquad C4\text{-}(23)$$

$$*\overline{EL} = \frac{\delta L}{\delta \bar{\psi}} = i *\gamma \wedge d\psi + m*\psi \qquad C4(24)$$

en componentes

$$EL = i\bar{\psi}_{,i}\gamma^{i} + m\bar{\psi} \qquad C4\text{-}(25)$$

$$\overline{EL} = -i\gamma^{i}\psi_{,i} + m\psi \qquad C4(26)$$

y verificándose que

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{i}{2}\, d\bar{\psi} \wedge *\gamma + m*\bar{\psi} \qquad C4\text{-}(27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial d\psi} = -\frac{i}{2}\bar{\psi} \wedge *\gamma \qquad C4\text{-}(28)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} *\gamma \wedge d\psi + m*\psi \qquad C4\text{-}(29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial d\bar{\psi}} = \frac{i}{2} *\gamma\psi \qquad C4\text{-}(30)$$

El mismo procedimiento se podría emplear para el campo de Rarita-Schwinger del gravitino (espín $3/2$).

con $\Psi \in F_{1}(M^{4}, S)$

y Lagrangiano correspondiente

$$L(dx, \psi, d\psi) = \frac{i}{2}(\bar{\psi} \wedge \gamma^{5}\gamma \wedge d\psi - d\bar{\psi} \wedge \gamma^{5}\gamma \wedge \psi) - \frac{m}{2}\bar{\psi} \wedge \gamma^{5}\gamma \wedge \gamma \wedge \psi \qquad C4\text{-}(31)$$

donde $\gamma^{5} = \gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$ como es usual. Sin embargo como en este trabajo no se va a tratar directamente con supergravedad, no explicitaremos su variación.

Si explicitamos algo todo lo anterior tendremos lo siguiente:

Las variaciones infinitesimales de Φ bajo el grupo de Lie G, tomarán la expresión

$$\delta\Phi = \theta^{a}T_{a}\Phi = \theta\Phi \qquad C4\text{-}(33)$$

a partir de la expresión finita de transformaciones de fase Φ es una p-forma de tipo (ρ, E), $(\rho : G \to Aut(E))$ (notación $g\Phi = \rho(g)\Phi$)

$$\Phi' = [\exp \theta^{a}T_{a}]\Phi = g\Phi \qquad C4\text{-}(34)$$

donde T_{a}, a= 1,.., d= dim G son los generadores del álgebra de Lie de G (ALG) en la representación de Φ y θ^{a} son parámetros infinitesimales del grupo, constantes. La acción global de G que hemos estudiado δ es solo posible cuando θ^{a}= ctes.

Llevando la expresión C4-(33) a C4-(6) esta tomará la forma

$$\delta A(C) = \int_{C}\left\{\theta\Phi \wedge \left[\frac{\partial L}{\partial \Phi} - (-1)^{p}\, d\frac{\partial L}{\partial d\Phi}\right] + d\left(\theta\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi}\right)\right\} = 0 \qquad C4\text{-}(35)$$

Aplicando la fórmula C4-(4), obtendremos de una forma análoga a lo ya efectuado, la expresión siguiente

$$\delta A(C) = \int_{C}\left\{\theta^{a}T_{a} \wedge \left[\frac{\partial L}{\partial \Phi} - (-1)^{p}\, d\frac{\partial L}{\partial d\Phi}\right] + \theta^{a} d\left(T_{a}\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi}\right)\right\} \qquad C4\text{-}(36)$$

La corriente $^*j(\theta)$ del campo Φ libre se expresará como

$^*j = \theta^a\, ^*j_a$

$$^*j_a = T_a \Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi} \qquad C4-(37)$$

con

Por tanto la ecuación $C4-(13)$ tomará la expresión

$$d^*j = d\theta^a \wedge {}^*j_a + \theta^a d^*j_a = $$
$$= -\theta^a T_a \Phi \wedge {}^*EL \qquad C4-(38)$$

y como por ahora $\theta^a = cte \Rightarrow d\theta^a = 0$ esto implicará que

$$d^*j_a = -T_a \Phi \wedge {}^*EL \qquad C4-(39)$$

módulo, las ecuaciones del campo Φ libre $^*EL = 0$ obtenemos

$$d^*j_a = 0 \qquad a = 1, \ldots, \dim G \qquad C4-(40)$$

i.e., las ecuaciones de conservación locales de las corrientes $^*j_a$, bajo transformaciones globales de Φ.

ii) <u>Invariancia Gauge Local</u>

Al tomar $\theta^a = cte$ en la variación infinitesimal $\delta\Phi$ de $C4-(33)$ fisicamente se ha efectuado la transformación de Φ, globalmente, i.e., para todo punto del ET es la misma transformación y por tanto, independientemente de cual fuese ese punto específico.

El campo Φ en diversas épocas y lugares se transforma de la misma manera. Sin embargo, dado que la fase no es ningún observable físico podemos exigir, dado que la estructura de la teoría lo permite, que las transformaciones de fase sean <u>locales</u> i.e., que la transformación de fase sea dependiente del ET. Matematicamente esto significa que los parámetros $\theta^a = cte$ pasan a ser funciones $\theta^a = \theta^a(x)$.

Las transformaciones infinitesimales del campo Φ, serán por tanto

$$\delta_L \Phi = \theta^a(x)\, T_a \Phi \qquad C4-(41)$$

La exigencia de invariancia de la acción (ó lo que es lo mismo, del Lagrangiano) bajo estas transformaciones <u>locales</u>, es lo que denominaremos invariancia gauge local. Ello exigirá, en el caso de que las corrientes externas no sean cero, como vamos a ver a continuación, la introducción de un nuevo campo (gauge) A en interacción con el Φ libre inicialmente.

<u>PROGRAMA DE UTIYAMA</u>

Metodologicamente, la idea gauge se desarrolla en los siguientes pasos

1) ¿Que tipo de campo de interacción A hay que introducir para mantener la invarianza <u>local</u> gauge de la acción?

2) ¿Cual es la expresión de la interacción entre el campo A y el campo originalmente libre ?.

3) ¿Cual es la ley de transformación del campo de interacción bajo el grupo gauge $G(x)$?

4) ¿Como obtenemos el nuevo Lagrangiano invariante bajo $G(x)$, a partir del Lagrangiano libre $L(\phi, d\phi)$?

5) ¿Cuales son las ecuaciones de campo del campo A libre?

El método gauge asi expuesto fue introducido originalmente por Utiyama. Algunos de estos puntos en realidad se podrían subdividir, pero como esquema general es válido y por eso lo seguiremos a continuación. Comenzemos por el primer punto.

PUNTO 1

1) Si $\theta=\theta(x)$ debido a que $\theta(x)=\theta^a(x)T_a$ la ecuación de conservación local $d{*j}=0$, toma la expresión

$$d{*j}=\theta^a(x)\,d{*j_a}+d\theta^a(x)\wedge{*j_a}=0 \iff$$

$$\iff d{*j_a}=0 \quad y \quad \underline{{*j_a}=0} \quad \forall a \qquad C4\text{-}(42)$$

Si queremos "conservar" la ecuación de conservación bajo transformaciones gauge (ó de fase) locales obtenemos que todas las corrientes se anulan, con lo que no hay nada que conservar, mientras que si ${*j_a}\neq 0$, el Lagrangiano $L(\phi,d\phi)$ del campo libre perderá su invariancia y habremos arruinado al principio variacional.

La raiz del problema consiste en que si $\theta=\theta(x)$

$$\delta_L d\Phi=d\delta_L\Phi=d\theta\wedge\Phi\wedge\theta d\Phi=d\theta^a(x)\wedge T_a\Phi+\theta^a(x)T_a\,d\Phi \qquad C4\text{-}(43)$$

La aparición del término inhomogeneo $d\theta^a(x)\wedge T_a\Phi$ ó dicho de otra forma, el que la derivada exterior $d\Phi$ no sea covariante bajo variaciones locales δ_L, es lo que causa los problemas arriba comentados.

El problema se soluciona pasando de la invariancia global, a una invariancia local (i.e., invariancia bajo transformaciones gauge locales) ó de segundo tipo, en la notación de Pauli. Ello se consigue introduciendo d= dim G nuevos campos A^a, como nuevas variables auxiliares en la dependencia funcional del Lagrangiano. Con ello se considera el nuevo Lagrangiano (ya no libre) $L'=L'(\Phi,d\Phi,A^a)$, como base del principio variacional.

Los campos exteriores A^a son denominados usualmente en la literatura, potenciales gauge (en lenguaje de fibrados constituyen la conexión de un fibrado principal). Las variaciones $\delta_L A^a$, compensarán los términos no deseados en los que aparece $d\theta^a\neq 0$, al imponer la invariancia de bajo la acción local de G, i.e., bajo G (x), i.e.

$$\delta_L L'=\delta_L\Phi\wedge{*EL'}+d{*j'}+\delta_L A^a\wedge\frac{\partial L'}{\partial A^a}=$$
$$=\theta^a(x)T_a\Phi\wedge{*EL'}+\theta^a(x)\,d{*j'_a}+$$
$$+d\theta^a(x)\wedge{*j'_a}+\delta_L A^a\wedge\frac{\partial L'}{\partial A^a}=0 \qquad C4\text{-}(44)$$

Además como los $d\theta^a$ son independientes para $\forall a=1\ldots \dim G$, ello implica que los potenciales gauge A^a deben variar independientemente, para poder eliminar separadamente cada término.

Hay que notar por otra parte que si las corrientes son nulas es posible construir Lagrangianos con invariancia local gauge sin introducir campos gauge externos A^a. La introducción de estos solo es necesaria, si además de invariancia local gauge se impone el requerimiento de que las corrientes externas no sean nulas.

La posibilidad más sencilla (procedimento mínimo), para conseguir la invariancia local de la acción es tomar

$${*j'_a}=T_a\Phi\wedge\frac{\partial L'}{\partial d\Phi}\doteq\frac{\partial L'}{\partial A^a} \quad y \quad \delta_L A^a\doteq-d\theta^a(x) \qquad C4\text{-}(45\text{-}46)$$

Con lo que obtenemos la expresión local analoga a la global C4-(12).

PUNTO 2 y 3

Notese que debido a C4-(45-46)

$$L'(\Phi,d\Phi,A^a) = L(\phi,d\Phi) + A^a \wedge {}^*j_a' \qquad C4-(47)$$

y que por tanto en vista de la ecuación C4-(44) en la que no aparece el término

$$A^a \wedge \delta_L {}^*j_a' = A^a \wedge \delta_L \left(\frac{\partial L'}{\partial A^a}\right) \qquad C4-(48)$$

ello implica que

$$\delta_L {}^*j_a' = \theta^b f_b{}^c{}_a j_c' \qquad C4-(49)$$

Es decir, ${}^*j_a'$ tiene que ser covariante bajo la acción del grupo gauge(local) $G(x)$.

Por la expresión C4-(46) la respuesta matemática al primer punto del programa de Utiyama es clara dado que las $\theta^a(x)$ son funciones, i.e., o-formas, los potenciales gauge son 1-formas, $A^a \in F_1(M^4,R)$.

A partir de la ecuación C4-(45) podemos realizar el punto 2 del programa de Utiyama obteniendo la expresión del acoplamiento entre Φ y A^a. Para ello definamos (ver apéndice 2) $A\wedge\Phi = A^a \wedge T_a \Phi$ C4-(50). Donde $A \in F_1(M^4, ALG)$, es una 1-forma valuada en el algebra de Lie de G (notación $A\wedge\phi = \rho_*(A)\wedge\Phi$, $\rho_*: ALG \to End(E)$. A partir de C4-(50) obtenemos

$$T_a \Phi = \frac{\partial(A\wedge\Phi)}{\partial A^a} \qquad C4-(51)$$

Teniendo en cuenta la ecuación C4-(45) obtendremos

$$\frac{\partial L'}{\partial A^a} = \frac{\partial(A\wedge\Phi)}{\partial A^a} \wedge \frac{\partial L'}{\partial d\Phi} \qquad C4-(52)$$

C4-(52) se verifica si y solo si

$$\frac{\partial L'}{\partial d\Phi} = \frac{\partial L'}{\partial(A\wedge\Phi)} \qquad C4-(53)$$

Esta última identidad nos dice que $d\phi$ y $A\wedge\phi$ solo pueden aparecer en $L'(\phi,d\phi,A)$ a través de la combinación

$$D\phi = d\phi + A\wedge\phi \qquad C4-(54)$$

a la que denominaremos derivada G-covariante exterior de ya que su transformación es homogénea

$$\delta_L D\Phi = \theta D\Phi \quad , \quad (D\Phi)' = g\, D\Phi \qquad C4-(55)$$

al contrario que $d\Phi$, como vimos en C4-(43). Probemos C4-(55), que efectivamente $D\phi$ se transforma covariantemente

$$\begin{aligned}\delta_L D\Phi &= \delta_L d\Phi + \delta_L(A\wedge\Phi) = \\ &= \theta d\Phi + d\theta\wedge\Phi + \delta_L A\wedge\Phi + A\wedge\theta\Phi\end{aligned} \qquad C4-(56)$$

como $A\wedge\theta\Phi = [A,\theta]\wedge\Phi + \theta A\wedge\Phi$ C4-(57)

obtendremos cuando A es interpretada como una 1-forma valuada en el algebra de Lie de G (ver apéndice 2).

$$\begin{aligned}\delta_L D\Phi &= \theta(d\Phi + A\wedge\Phi) + (\delta_L A + d\theta + [A,\theta])\wedge\Phi = \\ &= \theta D\Phi + (\delta_L A + d\theta + [A,\theta])\wedge\Phi\end{aligned} \qquad C4-(58)$$

Por tanto, para que $D\Phi$ sea covariante, se tendrá que verificar que la ley de transformación gauge local de A infinitesimal sea

$$\delta_L A = -d\theta - [A,\theta] = -D\theta \qquad C4-(59)$$

la transformación finita es, $A' = gAg^{-1} - dg.g^{-1} = Ad_G A - dg.g^{-1}$ salvo el término inhomogeneo $-dg.g^{-1}$ se transforma como una 1-forma de tipo (Ad_G, ALG), en componentes toma la expresión más usual

$$\delta_L A^a = -d\theta^a - f^a{}_{bc} A^b \theta^c = -D\theta^a \qquad C4-(60)$$

a través de $\delta_L A = \delta A^a T_a$, $D\theta = D\theta^a T_a$

y $[T_a, T_b] = f^c{}_{ab} T_c$

$f^c{}_{ab} = f^c{}_{[ab]}$, son las constantes de estructura del grupo G al que consideramos en general no abeliano, i.e., $f^c{}_{ab} \neq 0$.

La elección inicial $\delta_L A^a = -d\theta^a$, para la transformación del potencial gauge se ha visto que no es la general (no es valida para el caso no abeliano) sino que es la transformación más simple correspondiente a que G sea abeliano. Sin embargo, eso no podía saberse a ese nivel porque no estabamos preparados a mirar a A^a como las componentes de la 1-forma $A \in F_1(M^4, ALG)$ La necesidad de esto último solo se impuso al establecer la formula C4-(55) , con lo que en consecuencia aparece el corchete "no abeliano" $[A, \theta]$ en la fórmula C4-(57) . Ello también necesita considerar en el tratamiento, no a las componentes $^*j_a$ sino a $^*j \in F_3(M^4, ALG)$.

Mediante las fórmulas C4-(54) y C4-(59) se llevan a cabo los puntos 2 y 3 del programa de Utiyama.

PUNTO 4

Debido a la ley de transformación local gauge C4-(5) de A bajo G (x) , estos pueden ser transformados a cero localmente, en cuyo caso, $L'(\Phi, d\Phi, A^a)$ y el libre $L(\Phi, d\Phi)$ coinciden. En general debido al acoplamiento minimo C4-(54)

$$L'(\Phi, d\Phi, A) = L(\Phi, D\Phi) \qquad C4\text{-}(61)$$

Notese la desaparición de la prima y por tanto L tiene la misma forma que el libre. Este Lagrangiano

$$L(\Phi, D\Phi) = L(\Phi, d\Phi) + L_{\Phi - A} \qquad C4\text{-}(62)$$

sintetiza pues el Lagrangiano libre del campo y el de interacción.

Notese, que la realización del punto 4 del programa de Utiyama consiste simplemente en la receta siguiente. Pártase del caso libre con $L(\Phi, d\Phi)$ sustitúyase $d\Phi \to D\Phi$ y obtenemos el Lagrangiano invariante bajo G(x) , $L(\Phi, D\Phi)$

Además, vemos que la expresión C4-(59) de transformación A , solo coincide con la expresión C4-(46) que intuitivamente habiamos considerado primero, solo en el caso de que G sea abeliano.

Mediante un mecanismo de feed back, podemos generalizar la expresión C4-(46) para el caso general de que G no sea abeliano

$$\delta_L L'(\Phi, d\Phi, A) = \delta_L \Phi \wedge {}^*EL' + \theta^a d^*j'_a + d\theta^a \wedge {}^*j'_a + \delta_L A^a \wedge {}^*j'_a = 0 \qquad C4\text{-}(63)$$

Sustituyendo $\delta_L A^a = -d\theta^a - f^a{}_{bc} A^b \theta^c$, i.e (C4-60)

y cambiando índices mudos , se obtiene:

$$\delta_L L'(\Phi, d\Phi, A) = \delta_L \Phi \wedge {}^*EL' + \theta^a d^*j'_a - f^c{}_{ba} A^b \wedge {}^*j'_c = \delta_L \Phi \wedge {}^*EL' + \theta^a D^*j'_a = 0 \qquad C4\text{-}(64)$$

Esto implica que las identidades que se verifican módulo las ecuaciones de campo $^*EL' = 0$, son de la forma

$$D^*j'_a = d^*j'_a + f^{c\,\cdot\cdot}_{\;ab} A^b \wedge {}^*j'_c = 0 \qquad C4\text{-}(65)$$

vimos que la corriente material ya no se conserva debilmente como ocurre en la teoría abeliana. Es una 3-forma del tipo (Ad_G, ALG)

Es decir, un campo no abeliano con potencial gauge A contribuye a la corriente. La nueva ley de conservación generaliza la ley de conservación de la corriente global y abeliana $d\,{}^*j=0$, en la que solamente contribuye el campo inicial pero no el campo gauge exterior. Físicamente esto significará que el campo electromágnetico representado por el campo de fotón necesitará una teoría gauge abeliana, ya el fotón no está cargado electrica (ó magnéticamente), mientras que la interacción de color representada por el campo de gluón, se formalizará mediante una teoría no abeliana ya que el gluón esta coloreado, i.e., posee la carga específica del campo.

Las variaciones bajo el grupo gauge G(x) de la expresión sintetica $L(\Phi, D\Phi)$ del Lagrangiano campo libre y de su interacción con el campo exterior, serán, ya que $\dfrac{\partial L'}{\partial d\phi}=\dfrac{\partial L}{\partial D\phi}$

$$\delta_L L(\Phi, D\Phi) = \delta_L\Phi\wedge\frac{\partial L}{\partial\Phi}\Big|_\phi + \delta_L D\Phi\wedge\frac{\partial L}{\partial D\Phi} \qquad \text{C4-(66)}$$

Donde $\big|_\Phi$ señala, que Φ contenido en $D\Phi$ a través de $A\wedge\Phi$, no varía, variando solo el Φ "independiente". A través C4-(56) se obtiene

$$\delta_L L(\Phi, D\Phi) = \delta_L\Phi\wedge{}^*EL + \theta^a D\,{}^*j_a = 0 \qquad \text{C4-(67)}$$

Donde

$${}^*EL = \frac{\partial L}{\partial\Phi}\Big|_\phi - (-1)^p D\frac{\partial L}{\partial D\Phi} \qquad \text{C4-(68)}$$

que es igual a la expresión $^*EL'$ obtenida a partir de $L'(\Phi, d\Phi, A)$ y que las ecuaciones de campo son covariantes bajo G(x).

$${}^*EL = {}^*EL' = \frac{\partial L}{\partial\phi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\phi} + \frac{\partial L}{\partial d\phi}\wedge\frac{\partial D\phi}{\partial\phi} \qquad \text{C4-(69)}$$

Ya que

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = \frac{\partial L}{\partial\phi}\Big|_\phi - \frac{\partial D\phi}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial L}{\partial d\phi} = \frac{\partial L}{\partial\phi}\Big|_\phi - (-1)^p\frac{\partial(\phi\wedge A)}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial L}{\partial d\phi}$$

y

$$= \frac{\partial L}{\partial\phi}\Big|_\phi - (-1)^p A\wedge\frac{\partial L}{\partial d\phi} \qquad \text{C4-(70)}$$

ya que
$A\wedge\phi = (-1)^p\phi\wedge A$ y $\dfrac{\partial A}{\partial\phi}=0$.

PUNTO 5 : ó Lagrangiano cinético de los campos exteriores

Los campos gauge A^a, necesitan, interpretados como campos físicos, un principio de acción para sí mismos, mediante el cual se puedan obtener sus propias ecuaciones de campo, considerados como campos libres. Si estas ecuaciones de campo, como es usual, se suponen ecuaciones diferenciales de segundo orden como máximo, la dependencia del Lagrangiano de A^a será

$$L'_A(h, A^a, dA^a)\in F_4(M^4, R) \qquad \text{C4-(71)}$$

Donde la base $h\in F_1(M^4, R^4)$ ó de forma equivalente sus componentes $h^i\in F_1(M^4, R)$, aparecen explicitamente en L_A, ya que no se pueden sumergir en la notación de A (lo contrario de Φ ver C4-(10)), (necesitamos una base 1-forma, para construir un Lagrangiano 4-forma). Sin embargo, la dependencia explícita en las coordenadas sigue estando prohibida por la homogeneidad del ET.

Por supuesto L'_A tiene que ser invariante $\delta_L L'_A = 0$ bajo el grupo gauge G(x). Esto restringe la expresión funcional de L'_A considerablemente. Veámoslo

$$\delta_L L'_A = \delta_L h\wedge\frac{\partial L'_A}{\partial h}\Big|_h + \delta_L A^a\wedge\frac{\partial L'_A}{\partial A^a} + \delta_L dA^a\wedge\frac{\partial L'_A}{\partial dA^a} = 0 \qquad \text{C4-(72)}$$

$|_h$ significa que los componentes $h^i \in F_1(M^4, R)$ necesarios para construir $A^a = A^a_i h^i$ no varían, i.e., las 1-formas A^a son las variables independientes.

$$*t'_a = \frac{\partial L'_A}{\partial h}\Big|_h \qquad \text{C4-(73)}$$ La energía-momento canónico del campo A.

Remodelando C4-(72) convenientemente, se obtiene

$$\delta_L L'_A = \delta_L h \wedge *t'_A + \delta_L A^a \wedge *ELA'_a + d\left[\delta_L A^a \wedge \frac{\partial L'_A}{\partial dA^a}\right] = 0 \qquad \text{C4-(74)}$$

Donde

$$*ELA'_a = \frac{\partial L'_A}{\partial A^a} + d\frac{\partial L'_A}{\partial dA^a} = \frac{\delta L'_A}{\delta A^a} \qquad \text{C4-(75)}$$

Que son las ecuaciones de campo para A. Como $\delta_L h = \theta h = \theta^a Y_a h$, donde Y_a son los generadores de ALG en la representación proporcionada por h y como $\delta_L A = -D\theta$, obtenemos

$$\delta_L L'_A = \theta^a Y_a h \wedge *t'_A - D\theta \wedge *ELA' - D\left[D\theta^a \wedge \frac{\partial L'_A}{\partial dA^a}\right] \qquad \text{C4-(76)}$$

de donde

$$\delta_L L'_A = \theta^a\left[Y_a h \wedge *t'_A + DD\frac{\partial L'_A}{\partial dA^a}\right] +$$
$$- D\theta^a \wedge \left[*ELA'_a - D\frac{\partial L'_A}{\partial dA^a}\right] = 0 \qquad \text{C4-(77)}$$

Por consiguiente

$$*ELA'_a = D\frac{\partial L'_A}{\partial dA^a} = d\frac{\partial L'_A}{\partial dA^a} + A^a \wedge \frac{\partial L'_A}{\partial dA^a} \qquad \text{C4-(78)}$$

$$D*ELA'_a = -(Y_a h)^i \wedge *t'_{Ai} \qquad \text{C4-(79)}$$

Comparando las dos expresiones obtenidas C4-(75) y C4-(78) de las ecuaciones de campo para el potencial gauge A, obtenemos

$$\frac{\partial L'_A}{\partial A} = A \wedge \frac{\partial L'_A}{\partial dA} \qquad \text{C4-(80)}$$

Además como

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial(A\wedge A)}{\partial A} \qquad \text{C4-(81)}$$

y por tanto

$$\frac{\partial L'_A}{\partial dA} = 2\frac{\partial L'_A}{\partial(A\wedge A)} \qquad \text{C4-(82)}$$

con ello

$$\frac{\partial L'_A}{\partial A^a} = \frac{1}{2}\frac{\partial(A\wedge A)^b}{\partial A^a} \wedge \frac{\partial L'_A}{\partial(A\wedge A)^b} \qquad \text{C4-(83)}$$

Por consiguiente A y dA aparecen en la dependencia funcional de L_A en la forma compacta, $L'_A(h, A, dA) \longrightarrow L_A(h, F)$ C4-(84)

donde $$F^a = dA^a + \frac{1}{2}(A\wedge A)^a = DA^a \qquad \text{C4-(85)}$$

F es precisamente la intensidad de campo gauge ó, en términos geométricos, la curvatura del campo gauge cuyo potencial es A. Entonces se verificará que referidos al nuevo Lagrangiano

$$*ELA = \frac{\delta L_A(h,F)}{\delta A} = D\frac{\partial L_A(h,F)}{\partial dA} \qquad \text{C4-(86)}$$

$$*t_A = \frac{\partial L_A(h,F)}{\partial h}\Big|_h \qquad \text{C4-(87)}$$

$$D*ELA_a = -(Y_a h)^i \wedge *t_{Ai} \qquad \text{C4-(88)}$$

La fórmula C4-(85) es la más general, correspondiente al caso en el que el grupo G no sea abeliano.

En el caso particular de que G sea abeliano se obtiene

$$\left.\begin{array}{l}(A\wedge A)^a = f^a{}_{bc}A^b \wedge A^c \\ f^a{}_{bc} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow F = dA \qquad \text{C4-(89)}$$

Matematicamente por la expresión C4-(85), $F \in F_2(M^4, ALG)$ es una 2-forma valuada en el álgebra de Lie de G, ya que $A \in F_1(M^4, ALG)$ y F es de tipo (Ad_G, ALG).
Puesto que F, la intensidad de campo, es geometricamente una curvatura, tiene que verificar la identidad de Bianchi

$$DF = 0 \qquad \text{C4-(90)}$$

Por otra parte, podemos obtener F, aplicando dos veces la derivada covariante exterior D a un campo $\Phi \in F_p(M^4, E)$

$$DD\Phi = d\, D\Phi + A\wedge D\Phi =$$
$$= d\,(d\Phi + A\wedge\Phi) + A\wedge(d\Phi + A\wedge\Phi) =$$
$$= d\,d\Phi + d\,(A\wedge\Phi) + A\wedge d\Phi + A\wedge A\wedge\Phi \qquad C4-(91)$$

$dd\Phi = 0$, por el lema de Poincaré

$$d(A\wedge\Phi) = dA\wedge\Phi - A\wedge d\Phi \qquad C4-(92)$$

$$A\wedge A\wedge\Phi = A^a\wedge A^b\wedge T_aT_b\,\Phi = \frac{1}{2}A^a\wedge A^b\,[T_a, T_b]\,\Phi \qquad C4-(93)$$

Por tanto

$$DD\Phi = dA\wedge\Phi + \frac{1}{2}(A\wedge A)\wedge\Phi \qquad C4-(94)$$
$$DD\Phi = F\wedge\Phi \qquad C4-(95)$$

Expresión que operativamente se leerá, DD= F y que, en lenguaje de componentes, nos dice que el conmutador de las derivadas covariantes es la curvatura gauge.

Analogamente y teniendo en cuenta que $D\theta = -\delta_L A$

$$DD\theta = [F, \theta] = -D\delta_L A \qquad C4-(96)$$

Y como tambien se verifica que, $(\theta = \theta^a T_a \in F_0(M^4, ALG))$

$$\delta_L F = \delta_L(dA) + \delta_L\left(\frac{1}{2}A\wedge A\right) =$$
$$= \delta_L(dA) + \frac{1}{2}(\delta_L A\wedge A + A\wedge\delta_L A) \qquad C4-(97)$$

donde

$$\delta_L A\wedge A = \delta_L A^a\wedge A^b\,[T_a, T_b]$$
$$= (-1)\,A^b\wedge\delta_L A^a\,(-1)\,[T_b, T_a]$$
$$= A^b\wedge\delta_L A^a\,[T_b, T_a] = A\wedge\delta_L A \qquad (C4-98)$$

Por tanto

$$\delta_L F = \delta_L dA + A\wedge\delta_L A = D\,\delta_L A \qquad C4-(99)$$

Y comparando esta expresión con la $C4-(96)$, obtenemos que F se transforma bajo las transformaciones de gauge locales infinitesimales de forma homogénea (al contrario que A)

$$\delta_L F = [\theta, F] \qquad C4-(100)$$

En componentes

$$(\delta_L F)^a = f^a{}_{bc}\,\theta^b F^c \qquad C4-(101)$$

en forma finita $F' = gFg^{-1} = Ad_G F$ es una 2-forma de tipo (Ad_G, ALG) Esta transformación de F bajo G, se reduce en el caso de que G sea abeliano a $(Ad_G = 1 \Rightarrow F' = F)$

$$(\delta_L F)^a = 0 \qquad C4-(102)$$

En la literatura física, respecto a la transformación C4-(101) de F, se dice que F se transforma covariantemente, mientras que C4-(102) nos dice que F es un invariante. Calculemos el valor de DF.

Para objetos que como F se transforman covariantemente $F' = gFg^{-1}$, i.e., son del tipo (Ad_G, ALG) la derivada covariante viene definida como

$$DF = dF + A\wedge F - (-1)^p F\wedge A = dF + [A\wedge F] \qquad C4-(103)$$

como el grado de F es 2, obtenemos la identidad de Bianchi

$$DF = dF + A\wedge F - F\wedge A =$$
$$= d\left(dA + \frac{1}{2}A\wedge A\right) + A\wedge\left(dA + \frac{1}{2}A\wedge A\right) -$$
$$-\left(dA + \frac{1}{2}A\wedge A\right)\wedge A = 0 \qquad C4-(104)$$

Por otra parte combinando las ecuaciones C4-(86) y C4-(88) tendremos que

$$Y\,h\wedge{}^*t_A = -DD\,\frac{\partial L_A}{\partial dA} \qquad C4-(105)$$

Aplicando la fórmula C4-(95) obtendremos

$$Yh \wedge {}^*t_A = -F \wedge \frac{\partial L_A}{\partial dA} \qquad C4\text{-}(106)$$

y teniendo en cuenta, que, como hemos visto,

$$\frac{\partial L_A}{\partial dA} = \frac{\partial L_A}{\partial F}$$

Obtendremos

$$-Yh \wedge {}^*t_A = D^*EL_A = F \wedge \frac{\partial L_A}{\partial F} \qquad C4\text{-}(107)$$

De la fórmula anterior se deduce que, cuando $Y=0$, es decir, cuando el grupo G se representa trivialmente en R^4, (la representación h es trivial), entonces

$$D^*EL_A = 0 \Rightarrow f^a{}_{bc} F^b \wedge \frac{\partial L_A}{\partial F_c} = 0 \qquad C4\text{-}(108)$$

Si el grupo de Lie G es semisimple, se toma como métrica del álgebra $\mathfrak{g}$ a la métrica Killing-Cartan, definida por el producto escalar siguiente

$$\gamma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to R$$
$$\gamma(X,Y) = -\mathrm{Tr}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \qquad C4\text{-}(109)$$

donde $\tilde{X} = ad\,X$ en nuestra notación es la representación adjunta del álgebra al que (ver apendice C) $\tilde{X}Z = [X,Z]$ / $[\ ]$ es el corchete de Lie.

Si el grupo además de semisimple es compacto entonces la métrica de Killing-Cartan es definida positiva y no degenerada. Esta en componentes tendrá la expresión siguiente

$$f^a{}_{bc} = f^a{}_{[bc]}\ ;\ \gamma_{cd} = f^{a\cdot\cdot}{}_{bc} f^{b\cdot\cdot}{}_{da} = \gamma_{(cd)} \qquad C4\text{-}(110)$$

Incluso si γ_{cd} es singular (degenerada), i.e., si el grupo no es semisimple, todavía puede ser usada para bajar índices del álgebra (no para subirlos). A través de γ_{cd} se construye con toda generalidad

$$f_{abc} = \gamma_{ad} f^d{}_{bc} \qquad C4\text{-}(111)$$

y $f_{abc} = f_{[abc]}$, son completamente antisimétricos para cualquier grupo de Lie, en virtud de (110) y de las identidades de Bianchi

$$f^a{}_{[bc} f^d{}_{g]a} = 0 \qquad C4\text{-}(112)$$

(Nótese que siempre es posible escoger una métrica en el Algebra de Lie si la representación adjunta $\tilde{X}$ del álgebra es equivalente a su inversa traspuesta ${}^t\tilde{X}^{-1}$

$$\gamma \tilde{X} \gamma^{-1} = {}^t\tilde{X}^{-1} \qquad C4\text{-}(113)$$

, γ se toma como métrica en general)

Al ser las constantes de estructura completamente antisimétricas de la expresión C4-(108), se deduce que

$$\frac{\partial L_A}{\partial F_a} \sim {}^*F^a \qquad C4\text{-}(114)$$

Por lo tanto en y solo en el caso en que G se represente trivialmente en R^4 (i.e., $Yh=0$), el Lagrangiano del campo exterior con potencial gauge A es necesariamente del tipo Yang-Mills, es decir, cuadrático en las intensidades del campo gauge A.

$$L_{YM} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(F \wedge {}^*F) = -\frac{1}{2}\gamma(F, {}^*F) \qquad C4\text{-}(115)$$

El caso $Y_a h \neq 0$, ocurrirá en el caso de simetri externas y, como veremos en un capítulo posterior, permitirá que el Lagrangiano del campo gravitatorio pueda ser lineal en curvatura escalar en contra de la sentencia que aparece usualmente en la literatura.

Tomando el Lagrangiano total $L = L_m(\Phi, D\Phi) + L_A(h,F)$ Las ecuaciones del campo exterior A son, en el caso no-abeliano tomando como $L_A(h,F)$ al lagrangiano de Yang-Mills C4-(115)

$$^*EL_{A_a} = \frac{\partial L_A}{\partial A^a} + d\frac{\partial L_A}{\partial dA^a} = \frac{\delta L_A}{\delta A^a} = -\frac{\delta L_m}{\delta A^a} \qquad C4\text{-}(116)$$

$$d{*}F_a = {*}\overset{A}{J}_a + {*}j_a \qquad C4-(117)$$

siendo

$$*\overset{A}{J}_a = f_a{}^{bc} A_c \wedge {*}F_b \qquad C4-(118)$$

donde $*\overset{A}{J}_a = \dfrac{\partial L_A}{\partial A^a}$ C4-(119)

es la corriente del campo A y $*j_a = \dfrac{\partial L_m}{\partial A^a}$ es la corriente externa. Se ve que estas ecuaciones también admiten la expresión

$$D{*}F_a = {*}j_a \qquad C4-(120)$$

que junto con las identidades de Bianchi

$$DF_a = 0 \qquad C4-(121)$$

constituyen las ecuaciones de Yang-Mills.

En el caso abeliano, como $F = dA$ y $*\overset{A}{J}_a = 0$, obtendremos las ecuaciones de Maxwell ya que $D{*}F = d{*}F$

$$d{*}F = {*}j_a \qquad C4-(122)$$

La diferencia fundamental entre las ecuaciones de Yang-Mills y la de Maxwell consiste en que las primeras son no-lineales y las segundas son lineales.

Ello se corresponderá físicamente con el hecho de que en las interacciones descritas por las ecuaciones de Yang-Mills, por ejemplo, cromodinámica, el campo A, (en este caso, el campo gluónico) posee la caracteristica de la interacción, (en este caso carga de color) y por lo tanto contribuye a su propia fuente, i.e., $*\overset{A}{J} \neq 0$ y $*$ELA son no lineales. Al contrario, en el caso del electromagnetismo Maxwelliano, el fotón, el campo gauge A, no posee la característica de la interacción, (en este caso, la carga eléctrica) y por tanto $*\overset{A}{J} = 0$ y las ecuaciones

de campo del campo electromagnético $*$ELA, son lineales.

5) RESUMEN DEL METODO GAUGE

Ya se han visto los pasos fundamentales que conlleva la utilización del método gauge, y en los cuales se han definido los potenciales y la intensidad de los campos gauge exteriores, los cuales se necesitan para restaurar la invariancia local del principio de mínima acción.

Los tipos fundamentales de objetos que se han utilizado han sido el grupo gauge G, los campos $\Phi \in \mathcal{F}_p(M^4, E)$, $p \leq 4$ donde $E(S)$ es un espacio vectorial (ó spinorial) sobre el cual G actua mediante una representación $\rho : G \to \mathrm{Aut}\, E$ y los potenciales gauge $A \in \mathcal{F}_1(M^4, ALG)$, a partir de los cuales obtenemos las intensidades del campo gauge $F \in \mathcal{F}_2(M^4, ALG)$

Respecto a los G-campos Φ hay que señalar que son más generales que los usualmente utilizados y denominados campos materiales, ya que, tipos particulares de campos Φ, son el campo "y" de asignación de coordenadas, $y \in \mathcal{F}_0(M^4, R^4)$ y la base $h \in \mathcal{F}_1(M^4, R^4)$. Ello permitirá aplicar el formalismo anterior no solo a simetrías internas tipo Yang-Mills sino también a simetrías externas y por tanto describir a la interacción gravitatoria mediante el método gauge.

Por otra parte los campos exteriores introducidos para restaurar la invariancia local (i.e., dependiente del espacio-tiempo) bajo G de la acción, de una manera mínima, están caracterizados por los potenciales gauge A^a y por la intensidad F^a (aunque su exacta caracterización esté realizada por el factor de fase según vimos).

Los potenciales gauge A, tienen las siguientes propiedades fundamentales:

i) Son 1-formas $A^a \in F_1(M^4,R)$, $a=1,..,\dim G$

ii) Deben ser independientes, i.e., necesitamos d= dim G diferentes A^a para compensar los diferentes términos del tipo $D\theta^a$, como hemos visto.

iii) Los A^a se transforman de una manera inhomogénea bajo su grupo gauge G y son por tanto componentes de 1-forma valuada en el álgebra de Lie de G $A = A^a X_a \in F_1(M^4, ALG)$

iv) Pueden ser transformados localmente de manera que se anulen escogiendo convenientemente la transformación.

v) Se acoplan a los G-campos a través de la derivada covariante que realiza precisamente un acoplamiento mínimo $D\phi = d\phi + A\wedge\phi$

vi) Las corrientes $*j_a = \frac{\partial L_m}{\partial A^a}$ tienen que obedecer ciertas identidades ver C4.(65) , debido a la invariancia gauge local de

vii) Su propio Lagrangiano cinético L_A , los incluye en su dependencia funcional solo a través de la dependencia en las intensidades de campo gauge $F^a = DA^a$ son las componentes de una 2-formas de tipo (Ad_G, ALG).

viii) Sus correspondientes ecuaciones de campo $*ELA$ tienen que obedecer ciertas identidades C4-(107) debido a la invariancia gauge local de $L_A(h,F)$

Hasta ahora no se ha introducido la constante de acoplamiento de la interacción entre los campos Φ y los potenciales gauge. Si denominamos a esta k, las expresiones más fundamentales tomarán la forma

$$\tilde{D}\Phi = d\Phi + k\tilde{A}\wedge\Phi \qquad C5(1)$$

$$k\,\delta_L\tilde{A} = -\tilde{D}\theta \qquad C5(2)$$

$$\tilde{D}\tilde{D}\Phi = k\tilde{F}\wedge\Phi \qquad C5\text{-}(3)$$

$$\tilde{F} = d\tilde{A} + \frac{k}{2}\tilde{A}\wedge\tilde{A} \qquad C5\text{-}(4)$$

Y el Lagrangiano total será de la forma según hemos visto

$$L(h,\Phi,\tilde{D}\phi,\tilde{F}) = L_m(\Phi,\tilde{D}\Phi) + L_A(h,\tilde{F}) \qquad C5\text{-}(5)$$

Y las ecuaciones de campo toman las expresiones

$$\frac{\delta L_m}{\delta\phi} = 0 \Rightarrow *EL_\phi = \left.\frac{\partial L_m}{\partial\phi}\right|_\phi - (-1)^p\tilde{D}\frac{\partial L_m}{\partial d\phi} = 0 \qquad C5\text{-}(6)$$

$$\frac{\delta L}{\delta\tilde{A}} = 0 \Rightarrow *\tilde{j}_a = \frac{\partial L_m}{\partial\tilde{A}^a} = -\frac{\delta L_A}{\delta\tilde{A}^a} = -*ELA_a \qquad C5(7)$$

y donde

$$*\tilde{j}_a = k\,T_a\phi\wedge\frac{\partial L_m}{\partial d\phi} = k\,*j_a \qquad C5\text{-}(8)$$

Si se efectua el desacoplo ó limite de no-interacción de ϕ con A, i.e., $k\to 0$, conducirá aplicandolo a las fórmulas base anteriores a las expresiones siguientes

$$\tilde{D}\phi = d\phi \qquad C5\text{-}(9)$$

$$d\theta = 0 \qquad C5\text{-}(10)$$

$$\tilde{D}\tilde{D}\phi = dd\phi = 0 \qquad C5\text{-}(11)$$

$$\tilde{F} = d\tilde{A} \qquad C5\text{-}(12)$$

$$*\tilde{j}_a = 0 \qquad C5\text{-}(13)$$

Las dos primeras ecuaciones señalan que hemos recuperado la acción global de G sobre los campos ahora libres Φ, además la corriente asociada a Φ se anula, según la última ecuación. Además, $k\to 0$ conduce a que también poseemos una invariancia local abeliana y el campo A es un campo libre y lineal.

Utilizando el método denominado "técnica de acoplamiento Nöther" es posible mediante un proceso iterativo en K construir a partir de los campos Φ libre y A libre y lineal, las ecuaciones de Yang-Mills no-lineales y con corrientes externas. (veáse, por ejemplo, S. Deser (1970)).

Por otra parte si efectuamos <u>un cambio de escala</u> en los potenciales gauge A de la forma siguiente

$$K\tilde{A} = A \qquad C5-(14)$$

es decir, absorbiendo la constante de acoplamiento en A . Esto conduce a el cambio $K\tilde{F} = F$, y las fórmulas base quedarán en la forma

$$D\Phi = d\phi + A\wedge\phi \qquad C5-(15)$$

$$\delta A = -D\theta \qquad C5-(16)$$

$$DD\Phi = F\wedge\Phi \qquad C5-(17)$$

$$F = dA + \tfrac{1}{2}A\wedge A \qquad C5-(18)$$

En este caso el Lagrangiano tendrá la expresión

$$L = L_m(\phi, D\phi) + \frac{1}{K^{\varepsilon}} L_A(h, F) \qquad C5-(19)$$

Aparece por tanto $K^{-\varepsilon}$ como un factor del Lagrangiano de los campos exteriores A, siendo ε el grado polinomial de L_A respecto de F.

<u>En el límite de constante de acoplamiento infinita</u>, $K\to\infty$ (esclavitud infrarroja, si la teoría es asintoticamente libre) se tendrá que

$$L_A(h, F) = 0 \qquad C5-(20)$$

$$L(h, \phi, D\phi, F) \xrightarrow[K\to\infty]{} L_m(\phi, D\phi) \qquad C5-(21)$$

La acción en este caso posee una invariancia "mayor" que la invariancia local gauge y la teoría es renormalizable (ver S. Kaptanoglu (1982)).

CAPITULO D

TEORIA GAUGE DE GRAVITACION

1) INTRODUCCION

i) Propósito y Filosofía

El propósito al considerar la idea gauge como método para construir la teoría de gravedad, es que esta sea aplicable al mundo microscópico.

Naturalmente a nivel macroscópico la gravedad es débil y atractiva y a través de la interpretación de los objetos astrofísicos como partículas clásicas, podemos obtener predicciones a través de GR ó de sus aproximaciones Newtoniana ó post-(post...) newtoniana. Sin embargo a nivel microscópico el único experimento realizado, es el COW (Colella, Overhauser, Werner (1975)), en el cual un neutrón sujeto al campo gravitatorio terrestre, es descrito, no como una partícula clásica, sino como un campo ondulatorio material $\Phi(x)$ ya que el potencial gravitatorio no se acopla directamente a la masa del neutrón como ocurre en el mundo macroscópico, sino al campo y solo despues de efectuar la aproximación semiclásica se obtiene la trayectoria clásica. Por tanto la teoría que se elaborará va a ser "clásica", pero no en el sentido usual, ya que no describiremos a un sistema físico elemental mediante la trayectoria que una partícula puntual realiza en el espacio-tiempo, sino que a ese sistema físico elemental le asociamos un campo clásico material $\Phi(x)$, al que posteriormente se pueda someter a cuantificación según las reglas usuales en la teoría gauge. Para ello intentaremos seguir en la descripción

de la interacción gravitatoria, el método gauge empleado para describir las interacciones electromagnética, debil y fuerte y que en su parte estructural ha sido desarrollado en el capítulo anterior.

La filosofía de la descripción mediante teoría gauge de la gravedad es pues la misma que la empleada en las descripciones mediante teoría de campos de la gravedad efectuadas por Thirring (1959), Weinberg (1972) y otros. Partir del espacio tiempo Minkowskiano, e introducir en él la interacción gravitatoria, lo cual conduce a que al mismo tiempo el espacio-tiempo Minkowskiano se ha transformado en otro tipo diferente de espacio-tiempo en el sentido geométrico de la palabra.

Otro punto importante de la filosofía con que se ha efectuado este trabajo, es intentar que la teoría gravitatoria aplicable a nivel macroscópico difiera lo menos posible de la teoría de Einstein-Hilbert, que por ahora y despues de casi setenta años, es la mejor teoría de gravedad que poseemos a nivel macroscópico.

Realmente el proceso histórico que siguió Einstein en la elaboración de la teoría de gravedad, es completamente análogo al que se sigue en la idea gauge aplicando el método Yang-Mills, ya que, primero investigó el comportamiento de la materia y de la geometría del espacio-tiempo sin gravedad. En este contexto los sistemas inerciales de referencia juegan el principal papel ya que permiten construir la Relatividad Especial.

Consideró posteriormente sistemas de referencia no-inerciales y explotó el hecho de que debido al principio de equivalencia las fuerzas inerciales tienen la estructura de pseudo-fuerzas gravitacionales. Si por fin se relajan las ligaduras globales de la geometría del espacio-tiempo para que "localmente" la Relatividad Especial sea válida, nos vemos conducidos inexorablemente a obtener la teoría de gravedad. En el método gauge la idea es análoga, a partir de invariancias globales y introduciendo potenciales gauge obtenemos invariancias locales que describen a una determinada interacción.

ii) Métodos y Formalismos

Entre la gran cantidad de trabajos que han aparecido sobre teoría gauge de gravedad, se pueden distinguir fundamentalmente tres métodos.

En el primero se parte de un determinado grupo global considerado al mismo tiempo como grupo de transformaciones de coordenadas (pasivas) y como grupo interno actuando sobre los campos materiales mediante transformaciones pasivas. El grupo local final es el grupo físico que contiene difeomorfismos y transformaciones internas actuando sobre los campos materiales.

R. Utiyama (1956) fue el primero que intentó este programa utilizando el grupo de Lorentz $O_\delta(3,1,R)$, y posteriormente utilizando a su recubridor SL(2C) para introducir espinores de una forma natural, Lord (1971) y Carmeli (1974).

Posteriormente Kibble (1961) utilizó el grupo de Poincaré (P). Generalizaciones a grupos más generales fueron realizadas por Bregman (1973) y Charap y Tait (1975) utilizando el grupo de Weyl (W), Kasuya (1975) y Agnese-Calvini (1975) usando el grupo conforme (C).

Utilizando el grupo de traslaciones como grupo de transformación de coordenadas se encuentran los trabajos de Feynman (1963) y posteriormente, Hayashi y Nakano (1967) y Hayashi-Shirafuji (1979). Denominaremos a este método el

método Utiyama.

En el segundo método se usan las traslaciones como transformaciones activas de los campos materiales. De esa forma, Hehl y col. (1976) (1980-a-b) usando el grupo de Poincaré como grupo global, llegan a un grupo funcional (no de Lie) como grupo local. Este método conduce directamente a la aproximación denominada variedad de grupo, en la que los campos materiales estan definidos en el grupo y no en el espacio-tiempo. (ver también Ne'eman Y, Regge T. (1978)).

Generalizaciones a GA(4,R) intentando unificar gravedad con la interacción fuerte han sido realizadas dentro de este último esquema por Hehl y Sijacki (1979) y Ne'eman, Sijacki (1979) e introduciendo las ideas de Salam y Strathdee (1978), con la interacción fuerte construida a partir de otra métrica f_{ij}, por Pascual (1980).

Denominaremos a este segundo método, el método de Hehl-von der Heyde.

Finalmente mediante un tercer método, al que denominaremos Yang-Mills, se realiza la teoría gauge de gravedad considerando a los grupos de transformaciones como puramente internas, actuando sobre coordenadas internas en un espacio de Minkowski interno y asimismo sobre los campos materiales internamente. De esta forma se construye la teoría invariante Lorentz como teoría gauge de Poincaré, rota por los campos de Higgs que son las coordenadas internas. Sobre este método han trabajado Ivanov y Niederle (1982), usando el formalismo diferencial.

Resumiendo hay fundamentalmente tres métodos:

1) Utiyama
2) Hehl-von der Heyde
3) Yang-Mills

Además existen tres formalismos matemáticos para llevarlos a cabo, como ya vimos:

1) Diferencial. Bien trabajando en componentes ó mediante formas diferenciales.

2) Integral

3) Fibrados

El formalismo diferencial ha sido el utilizado preferentemente en la literatura física. El formalismo integral exceptuando a Yang (1974) con su pretendida teoría gauge de GL(4,R), (en realidad de O(3,1,R)), no ha sido casi usado en la literatura referida a gravedad.

El formalismo de fibrados ha sido usado por Trautman (1970) usando el fibrado $O^g M$ y Cho (1976) usando el fibrado de traslaciones (i.e., considerando al fibrado tangente como un fibrado principal).

Hay que señalar que la teoría de la variedad de grupo, no tiene una buena formulación mediante los fibrados principales usuales y, o bien hay que introducir para su descripción los fibrados "suaves" como hace Ne'eman (1980) ó bien hay que añadir otro fibrado a los usuales en teorías Yang-Mills como son el fibrado de las conexiones y su fibrado asociado, como ha realizado Perez-Rendón (1980).

En este trabajo se usará preferentemente el formalismo diferencial tomando principios variacionales. Utilizando el método Yang-Mills es posible realizar el esquema gauge usando fibrados.

Además de la elección del método y el formalismo existe otra elección que es de fundamental importancia la del grupo de Lie de partida.

Tomaremos en primer lugar, el más simple, T_4, traslaciones para ir sucesivamente generalizando el grupo gauge. Al ir generalizando el grupo, veremos que la geometría correspondiente será también más general.

2) DIFERENCIAS CON LAS TEORIAS INTERNAS USUALES

Para finalizar hay que hacer notar las dos fundamentales diferencias que existen entre la teoría gauge de gravedad y la de simetrias internas.

a) En primer lugar el grupo de Lie de partida va a ser un grupo no-compacto (en teorías internas siempre es compacto y casi siempre semisimple, salvo en la teoría de Weinberg-Salam)

b) En segundo lugar y esta es la diferencia más importante. En teorías internas, el campo exterior gauge A que es una conexión, es lo único que se necesita. Si la gravedad es un campo gauge, necesitamos no solamente, en la interpretación usual, una conexión del ET sino tambien una métrica (o tetrada para campos espinoriales).

Por consiguiente la teoría gravitatoria es, en principio, mas complicada que las teorías Yang-Mills internas usuales.

Por último, hay que señalar que, la teoría de gravitación tiene que ser construida finalmente en el fibrado $O^g M$, es decir, debe ser invariante Lorentz localmente y covariante bajo difeomorfismos, independiente de cual sea el método utilizado, si se verifica $Dg_{ij} = 0$.

Siempre se considerará en este trabajo la ligadura ($Dg_{ij} = 0$) de que la conexión sea compatible con la métrica.

Naturalmente, si el grupo interno es el grupo de Weyl la geometría será de Weyl, si el grupo interno es el conforme la geometría será Weyl ó Weyl-Cartan y si el grupo interno es GA(4,R) (roto a GL(4,R)) la geometría será metrico-afín general. Pero es difícil dar sentido físico a las nuevas corrientes materiales (de dilatación y hipermomento) que se necesitan en ese tipo de teorías microscópicas de gravedad.

3) TRANSFORMACIONES INTERNAS Y EXTERNAS

Trataremos de distinguir los papeles que juegan las interpretaciones activa y pasiva de una transformación infinitesimal determinada. Sea un campo $\Phi \in \mathcal{F}_p(M^4,E)$ y sea δ la variación total de ese campo bajo una determinada transformación

$$\delta\Phi = \tau_t^*\Phi' - \Phi = \tau_t^*\Phi' - \tau_t^*\Phi + \tau_t^*\Phi - \Phi \qquad \text{D3-(1)}$$

siendo $\tau_t^* : T^*_{\tau(y)}(M^4) \longrightarrow T^*_y(M^4)$

el pull-back ó imagen recíproca del difeomorfismo

$$\tau_t : M^4 \longrightarrow M^4 \qquad \text{D3-(2)}$$
$$y \longrightarrow \tau_t(y)$$

$\tau_t(y)$ es el "flujo" de un determinado campo vectorial X'

Teniendo en cuenta la expresión de la derivada de Lie se verifica

$$\tau_t^*\Phi - \Phi \longrightarrow \delta t\, \ell(X')\Phi = \ell(\delta t X')\Phi = \ell(X)\Phi \qquad \text{D3-(3)}$$

y por tanto

$$\delta\Phi = \bar\delta\Phi + \ell(X)\Phi \qquad \text{D3-(4)}$$

$\bar\delta$ señala la variación interna y $\ell(X)$ la variación externa, (ℓ es la derivada de Lie, ver apéndice 2).

El mismo tratamiento se puede efectuar si consideramos una asignación de coordenadas $y \in F_0(M^4,R^4)$

$$\delta y = \tau^* y' - y = \tau^* y' - \tau^* y + \tau^* y - y$$
$$= \bar\delta y + \tau^* y - y \qquad \text{D3-(5)}$$

siendo $\tau(x) = x' \in M^4$ y $\tau^* y = y \circ \tau$

Al actuar δy sobre un punto $x \in M^4$ se obtiene

$$\delta y(x) = y'(x') - y(x) =$$
$$= y'(x') - y(x') + y(x') - y(x)$$
$$= \bar\delta y(x') + \tau^* y(x) - y(x) \qquad \text{D3-(6)}$$

ya que

$$\tau^* y(x) = y(\tau(x)) = y(x') \qquad \text{D3-(7)}$$

Lo anterior se puede ver más graficamente

$$\begin{tikzcd}
M^4 \ni x \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "y"'] \arrow[dr, "\tau^* y"] & x' = \tau(x) \arrow[d, "y"] \arrow[dr, "y'"] & \\
R^4 \ni y(x) \arrow[r, "\delta_\tau"] & y(x') \arrow[r, "\bar\delta"] & y'(x')
\end{tikzcd} \qquad \text{D3-(8)}$$

donde $(\delta_\tau y)(x) = (\tau^* y - y)(x) = y(x') - y(x)$ D3-(9)

Por tanto a la variación total δ la podemos expresar como

$$\delta = \bar\delta + \delta_\tau \qquad \text{D3-(10)}$$

Donde δ_τ señala la variación bajo difeomorfismos y $\bar\delta$ la variación interna bajo un grupo de Lie G. La primera variación es activa, ya que pasamos de un punto a otro de M y la segunda pasiva, ya que simplemente se efectua un cambio de nombre a un mismo punto de M.

La interrelación entre transformaciones de coordenadas activas (difeomorfismos) y pasivas (reparametrizaciones) significa que si trabajamos en el espacio de Minkowski, al estar este modelado sobre R^4, no se puede distinguir si se ha efectuado una transformación activa ó pasiva, ya que efectuado un difeomorfismo siempre existe una reparametrización que lo compensa.

$$\delta y = \bar{\delta} y + \ell(X) y = 0 \Rightarrow \bar{\delta} y^i = \theta^i = -X^i \qquad \text{D3-(11)}$$

Sin embargo, en general, se puede pensar en considerar a $\delta = \bar{\delta} + \ell(X)$ como variación infinitesimal bajo $G \otimes \text{Diff}\, M^4$, siendo G un grupo de Lie interno.

La transformación será <u>activa</u> <u>si</u> $\delta = \ell(X)$ y <u>pasiva</u> <u>si</u> $\bar{\delta} = \delta$.

Entonces por ejemplo si efectuamos <u>traslaciones</u> globales <u>activas</u> y no efectuamos las pasivas de "y" obtendremos

$$\left.\begin{array}{l} \delta_\tau y = \theta = \text{cte} \\ \bar{\delta} y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta y = \theta = \text{cte} \qquad \text{D3-(12)}$$

Y por tanto bajo estas

$$\begin{array}{l} \bar{\delta} \Phi = 0 \\ \delta \Phi = \delta_\tau \Phi = \ell(X) \Phi = \theta^i \ell(\partial_i) \Phi \end{array} \qquad \text{D3-(13)}$$

Para traslaciones <u>pasivas</u>, obtendríamos

$$\bar{\delta} y = \theta = \text{cte} \quad , \quad \bar{\delta} \Phi = 0 \qquad \text{D3-(14)}$$

si Φ no soporta una representación de T_4 (el grupo interno de traslaciones).

De la misma forma, si consideramos transformaciones de <u>Lorentz</u> globales en M^4 y $\Phi \in F_p(M^4, E)$ siendo E un espacio de representación del grupo de Lorentz la variación <u>pasiva</u> de será

$$\bar{\delta} \Phi = \frac{1}{2} \theta^{ij} X_{ij} \Phi \qquad \text{D3-(15)}$$

con $\theta^{ij} = \theta^{[ij]}$ = cte y X_{ij} los generadores del grupo de Lorentz en la representación Φ. La variación <u>activa</u> de "y" bajo el grupo de Lorentz será

$$\delta_\tau y = \frac{1}{2} \theta^{ij} Y_{ij} y \qquad \text{con } (Y_{ij} y)^\tau = \delta_{ij}^{\tau\sigma} y_\sigma \qquad \text{D3-(16)}$$

Y_{ij} La representación usual del grupo de Lorentz en R^4

Asociado a esta transformación activa está el campo vectorial $X = X^\alpha \partial_\alpha$ con $X^\alpha = \frac{1}{2} \theta^{ij} \delta_{ij}^{\alpha\beta} y_{\cdot\beta}$ y por tanto $X = \frac{1}{2} \theta^{ij} (y_j \partial_i - y_i \partial_j)$. Con lo que la variación total de Φ será

$$\delta \Phi = \frac{1}{2} \theta^{ij} [X_{ij} - \ell\, (y_i \partial_j - y_j \partial_i)] \Phi \qquad \text{D3-(17)}$$

A partir de un principio variacional y considerando variaciones activas, i.e., difeomorfismos, se obtienen las diferentes leyes de conservación a través del teorema de Nöther usual (ver apéndice 3).

4) TEORIA GAUGE DE T_4

i) <u>El método</u>

Como se ha dicho, útilizando el cálculo de Cartan, consideremos primero, partiendo de un espacio de Minkowski, la invariancia <u>global</u> bajo traslaciones del Lagrangiano 4-forma de los campos materiales libres (sin interacción), $L_m(y, dy, \Phi, d\Phi)$ suponiendo como es usual, dependencia hasta la 1-derivada exterior, para obtener ecuaciones de campo de 2-orden. Donde $y \in F_o(M^4, R^4)$ es la asignación de coordenadas, $dy \in F_1(M^4, R^4)$ es una base coordenada ortonormal y $\Phi \in F_r(M^4, E^4)$ son los campos materiales, que soportan una representación de un grupo de Lie G a los que consideramos, en forma general, como $r \leq 4$ formas sobre un espacio vectorial E (o espinorial S).

Bajo traslaciones <u>globales</u> las variaciones internas, de "y" y Φ son, ya que $G \neq T_4$

$$\delta_{T_4G}\Phi = 0 \quad y \quad \delta_{T_4G}\, y = \theta = cte \qquad D4\text{-}(1,2)$$

Consideremos $\delta_{T_4}G$ como una transformación pasivas.

Lo segundo implica $\delta_{T_4G}\, dy = d\theta = 0$, (T_4G significa, T_4 global). Tanto "y" como "dy" se consideran como T_4 campos en un sentido generalizado de este concepto, donde $R_4 \neq ALT_4$ y por tanto T_4 actua con la representación usual y no por la adjunta, lo que sería trivial al ser abeliano, como sería el caso si considerasemos $R^4 = ALT_4$. Como el Lagrangiano es invariante bajo la acción infinitesimal de T_4 obtendremos

$$\delta_{T_4G}\, L_m = 0 \quad en \quad C \subseteq M^4 \qquad D4\text{-}(3)$$

Es decir la acción es estacionaria ($C \subseteq M^4$ es una subvariedad compacta de Minkowski). Por otra parte

$$\delta_{T_4G} L_m = 0 \Rightarrow \delta_{T_4G}\, y \wedge \frac{\partial L_m}{\partial y}\Big|_y + \delta_{T_4G}\, dy \wedge \frac{\partial L_m}{\partial dy} = 0 \qquad D4\text{-}(4)$$

$|_y$ significa que "y" en "dy" no varía.

Como bajo una traslación global $\delta_{T_4G}\, dy = 0$, D4-(4) implica que $\partial L_m / \partial y|_y = 0$, i.e., las funciones coordenadas "y" no deben de aparecer en el Lagrangiano debido a la homogeneidad del ET. Por tanto $L_m = L_m\,(dy, \phi, d\phi)$.

Demos ahora el paso crucial siguiendo la idea gauge y hagamos <u>locales</u> las traslaciones, i.e., $\theta = \theta(x)$, (dependientes del origen).

Como ahora $\delta_L dy = d\theta \neq 0$, tendremos que

$$\delta_{T_4L} L_m = \theta \wedge \frac{\partial L_m}{\partial y}\Big|_y + d\theta \wedge \frac{\partial L_m}{\partial dy} \neq 0 \qquad D4\text{-}(5).$$

(T_4L significa traslaciones locales) .

Para restaurar la invariancia se introduce el potencial gauge (conexión), $b \in F_1(M^4, ALT_4 = R^4)$, valuado en el algebra de Lie de T_4. El nuevo Lagrangiano tendrá la forma $L'(dy, \Phi, d\Phi, b)$ y supongamos que $\delta_{T_4L} L'_m = 0$ D4-(6)

$$\delta_{T_4L} L'_m = \delta_{T_4L}\, y \wedge \frac{\partial L'_m}{\partial y}\Big|_y + \delta_{T_4L}\, dy \wedge \frac{\partial L'_m}{\partial dy} + \delta_{T_4L}\, b \wedge \frac{\partial L'_m}{\partial b}$$

Para que la condición de homogeneidad se siga verificando, tendremos que introducir las condiciones de acoplamiento mínimo a la interacción exterior introducida por b, mediante las cuales se verifica $\delta_{T_4L} L'_m = 0$ D4-(7-8)

$$*j = \frac{\partial L'_m}{\partial dy} = \frac{\partial L'_m}{\partial b} \quad y \quad \delta_{T_4L} b = -\delta_{T_4L}\, dy = -d\theta$$

Donde $*j$ es la corriente dual (en este caso la energía-momento) y la segunda condición es la ley de variación típica del potencial gauge en teorías abelianas, (como en este caso el grupo T_4).

La condición D4-(7) nos dice además que "b" solo aparece en el Lagrangiano a través de la <u>derivada covariante</u> exterior Dy, definida como

$$h = Dy = dy + b \wedge y = dy + b \qquad D4\text{-}(9)$$

$$h^\gamma = Dy^\gamma = dy^\gamma + b^\alpha (Y_\alpha y)^\gamma = dy^\gamma + b^\gamma$$

Que es efectivamente covariante por la condición D4-(8) puesto que $\delta_{T_4L} h = \delta_{T_4L} Dy = 0$ que es lo análogo para el caso local de la ley de transformación de "dy" global: $\delta_{T_4G}\, dy = 0$

Notese que $D\Phi = d\Phi + b \wedge \Phi = d\Phi$ ya que $\delta\phi = 0$ D4-(10)

La dependencia del Lagrangiano material será ahora la siguiente

$$L'_m(dy, \Phi, d\Phi, b) = L_m(h = Dy, \Phi, d\Phi) \qquad D4\text{-}(11)$$

A través de "b" se "puede" pensar que se ha introducido la "Gravedad" acoplada al Lagrangiano libre. Por supuesto "b"

es un ortodoxo potencial gauge ya que verifica las condiciones siguientes:

a) Puede ser transformado a cero por transformaciones gauge.

b) Bajo la acción local del grupo gauge se transforman de manera inhomogénea, vease D4-(8)

c) Es una 1-forma con valores en el álgebra de Lie del grupo, en nuestro caso, R^4.

d) Las cuatro componentes b^α son independientes, ya que para compensar los 4 términos $d\theta^\alpha$, mediante D4-(8), se necesitan cuatro componentes distintas.

La clase de equivalencia de tetradas relacionadas por trasformaciones de Lorentz constantes van a constituir una base de teleparalelismo Cartan a la que denominaremos $[h]$

La clase de equivalencia de tetradas relacionadas por trasformaciones de Lorentz locales definen una métrica g Lorentziana.

La sentencia de que la teoría gauge de T_4 conduce a un espacio de teleparalelismo Cartan $(\hat{\Omega} = 0)$, no es más que una interpretación ya que tambien se puede pensar que lo único que se ha efectuado es el cambio de una base coordenada por una base no coordenada.

Sin embargo como la conexión no-holónoma se puede considerar por la fórmula D4-(9) que es igual a cero, es posible como hace W. Thirring (1982) interpretar el espacio obtenido como un espacio flat Cartan (teleparalelismo), el cual posee torsión pero no curvatura Cartan, ya que su conexión holónoma (ver apéndice 1) es en componentes, $\Gamma^i_{jk} = h^{i\cdot}_{\ \alpha}\, \partial_j h_k^{\ \alpha}$. y la torsión es $\Theta^\alpha = dh^\alpha$, i.e., es igual al objeto de no-holonomía cambiado de signo. En componentes coordenadas la

torsión es

$$\Theta^\alpha = \frac{1}{2} Q^\alpha{}_{kj}\, dy^j \wedge dy^k \qquad \text{D4-(12)}$$

$$Q^{i\cdot\cdot}_{\ jk} = h^{i\cdot}_{\ \alpha}\, \partial_{[j} h_{k]}^{\ \alpha} \qquad \text{D4-(13)}$$

Y referida a una base no-holónoma

$$Q^{\alpha\cdot\cdot}_{\ \gamma\beta} = - G^{\alpha\cdot\cdot}_{\ \gamma\beta} \qquad \text{D4-(14)}$$

Donde $G^{\alpha\cdot\cdot}_{\ \gamma\beta}$ son las componentes del objeto de no-holonomía

$$G^\alpha = dh^\alpha = \frac{1}{2} G^{\alpha\cdot\cdot}_{\ \beta\gamma}\, h^\beta \wedge h^\gamma \qquad \text{D4-(15)}$$

Mediante esta interpretación de la teoría gauge de T_4 es posible formular la teoría de Einstein-Hilbert, si además se impone la invariancia Lorentz local del Lagrangiano. Para ello no hace falta más que proseguir el esquema gauge construyendo el Lagrangiano del campo gravitatorio libre, i.e., la dinámica de la tetrada "h". La teoría gauge nos dice que debe tener la dependencia siguiente

$$L'_{T_4} = L'_{T_4}(dy, b, db) \qquad \text{D4-(16)}$$

Por tanto su variación δ_{T4L} será

$$\delta_{T4L} L'_{T_4} = \delta_{T4L}\, dy \wedge \frac{\partial L'_T}{\partial dy} + \delta_{T4L}\, b \wedge \frac{\partial L'_T}{\partial b} + \delta_{T4L}\, db \wedge \frac{\partial L'_T}{\partial db} =$$

$$= d\theta \wedge \left[\frac{\partial L'_T}{\partial dy} - \frac{\partial L'_T}{\partial b} \right] = 0 \qquad \text{D4-(17)}$$

Ya que $\delta_{T4L} db = 0$, por ser $db = dh$. D4-(18)

Por tanto y en analogía con lo efectuado en teoría gauge interna la dependencia del Lagrangiano será

$$L_{T_4} = L_T(h, dh) = L_T(h, G) \qquad \text{D4-(19)}$$

Además la "intensidad T_4" será $G = dh = db$ donde $G \in \mathcal{F}_2(M^4, R^4)$, es el objeto de no-holonoma de h.

Para la expresión explicita de L_T existen varias posibilidades, la mas general serán las combinaciones lineales de los tres invariantes Weitzenböck y un término cosmólogico

$$L_1 = dh^\alpha \wedge * dh_\alpha \qquad \text{D4-(20)}$$

$$L_2 = \frac{1}{2} dh^\alpha \wedge h_\alpha \wedge *(dh^\beta \wedge h_\beta) \qquad \text{D4-(21)}$$

$$L_3 = dh^\alpha \wedge h^\beta \wedge *(dh_\beta \wedge h_\alpha) \qquad \text{D4(22)}$$

$$L_4 = \frac{1}{4} h^\alpha \wedge * h_\alpha = \mathcal{E} \qquad \text{D4-(23)}$$

Donde $\mathcal{E}$ es la 4-forma de volumen.

El Lagrangiano "gravitatorio" más general será, por tanto, una combinación lineal de los cuatro L_i

$$L_T(h, G) = \sum_{i=1}^{4} a_i L_i \qquad \text{D4-(24)}$$

Veamos ahora si algún tipo de combinación específica concuerda con el Lagrangiano de Einstein-Hilbert referido a la tetrada.

ii) Relatividad general como teoría T_4

El Lagrangiano de Einstein-Hilbert toma en términos de los L_i la expresión

$$\ell^2 L_{EH} = -\frac{1}{2} dh^\alpha \wedge h^\beta \wedge *(dh_\beta \wedge h_\alpha) + \frac{1}{4} dh^\alpha \wedge h_\alpha \wedge *(dh^\beta \wedge h_\beta) - d(h_\alpha \wedge * dh^\alpha) \qquad \text{D4-(25)}$$

Que en función de los L_i's será

$$\ell^2 L_{EH} = -\frac{1}{2}(L_3 - L_2) - d(h_\alpha \wedge * dh^\alpha) = = \frac{1}{2} * \tilde{R} = \frac{1}{2} \tilde{R}\, \mathcal{E} \qquad \text{D4-(26)}$$

(donde $\ell^2 = 8\pi G$, G constante gravitatoria de Newton y $c = 1$) y $\tilde{R}$ la curvatura escalar pseudoriemanniana y $\mathcal{E}$ la 4-forma de volumen.

Por tanto, salvo una forma exacta y que no influye con las condiciones apropiadas de contorno en las ecuaciones de campo, se ha encontrado que un Lagrangiano específico obtenido a través de la teoría Yang-Mills de T_4 que permite obtener las mismas ecuaciones de campo que en Relatividad General para la parte gravitatoria pura. <u>En ese sentido</u> se puede decir que <u>se obtiene Relatividad General</u> a partir de la teoría gauge en sentido interno del grupo de traslaciones T_4.

Por supuesto, otras combinaciones de los L_i son posibles y serán descutidas más adelante las cuales serán teorías puramente tetrádicas en el ET Weitzenböck.

Tomando componentes, obtendremos

$$G^\alpha = \frac{1}{2} G^\alpha{}_{\beta\gamma}\, h^{\beta\gamma} \qquad (h^{\beta\gamma} = h^\beta \wedge h^\gamma) \qquad \text{D4-(27)}$$

Los tres invariantes de Weitzenböck son

$$W_1 = G^{\alpha\beta\gamma} G_{\alpha\beta\gamma}\, \mathcal{E} \qquad \text{D4-(28)}$$

$$W_2 = G^{\alpha\beta\gamma} G_{\beta\alpha\gamma}\, \mathcal{E} \qquad \text{D4-(29)}$$

$$W_3 = G^{\alpha}{}_{\alpha\beta}\, G^{\gamma}{}_{\gamma}{}^{\beta}\, \mathcal{E} = G_\beta G^\beta \mathcal{E} \qquad \text{D4-(30)}$$

La relación entre los L_i y los W_i es

$$W_1 = 2L_1 \Rightarrow L_1 = \frac{1}{2} W_1 \qquad \text{D4-(31)}$$

$$W_2 = L_1 - 2L_2 \Rightarrow L_2 = \frac{1}{4} W_1 - \frac{1}{2} W_2 \qquad \text{D4-(32)}$$

$$W_3 = L_1 - L_3 \Rightarrow L_3 = \frac{1}{2} W_1 - W_3 \qquad \text{D4-(33)}$$

Los L_i tienen la expresión en componentes siguiente

$$L_1 = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta\gamma}\, G^{\alpha\beta\gamma}\, \varepsilon \qquad D4\text{-}(34)$$

$$L_2 = \frac{3}{4} G_{[\alpha\beta\gamma]}\, G^{[\alpha\beta\gamma]}\, \varepsilon \qquad D4\text{-}(35)$$

$$(G^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\alpha\beta} = G_\beta) \qquad L_3 = \frac{1}{2}\left(G_{\alpha\beta\gamma}\, G^{\alpha\beta\gamma} - 2\, G_\alpha\, G^\alpha\right)\varepsilon \qquad D4\text{-}(36)$$

Por tanto el Lagrangiano de Einstein-Hilbert toma en términos de W_i la expresión

$$\ell^2 L_{EH} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} W_1 + \frac{1}{2} W_2 - W_3\right) - d\left(h_\alpha \wedge {}^*dh^\alpha\right) \qquad D4\text{-}(37)$$

Que explicitado será

$$\ell^2 L_{EH} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4} G^{\alpha\beta\gamma} G_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} G^{\alpha\beta\gamma} G_{\beta\alpha\gamma} - G^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\alpha\beta}\, G^{\gamma\cdot\beta}{}_{\cdot\gamma\cdot}\Big)\varepsilon - d\left(h_\alpha \wedge {}^*dh^\alpha\right) \qquad D4\text{-}(38)$$

Se puede tomar por tanto como Lagrangiano efectivo de la teoría gauge de T_4 el <u>Lagrangiano de Einstein-Hilbert</u> ya que su expresión referida a una base no-holónoma es una especial combinación cuadrática del objeto de no holonomía.

Hay que hacer notar que ese Lagrangiano es <u>invariante bajo rotaciones Lorentz locales</u> de la tetrada h , i.e., bajo transformaciones D4-(39)

$$h^\alpha \longrightarrow \Lambda^\alpha{}_\beta(x)\, h^\beta \quad / \quad d\Lambda^\alpha{}_\beta(x) \neq 0 \quad / \quad \Lambda^\alpha{}_\beta \in O(3,1)$$

Por tanto, visto de esta forma el Lagrangiano de EH es invarianta bajo transformaciones generales de coordenadas (en sentido pasivo) y bajo el grupo de Lorentz local O(3,1) de transformaciones de la tetrada.

iii) <u>Ecuaciones de campo de la teoría gauge T_4</u>

Si ahora despues de haber discutido la parte "gravitatoria" tenemos en cuenta la materia, el Lagrangiano total es

$$L(h, dh, \Phi, d\Phi) = \frac{1}{\ell^2} L_T(h, dh) + L_m(h, \Phi, d\Phi) \qquad D4\text{-}(40)$$

El factor $1/\ell^2$ aparece fuera del Lagrangiano L_T, ya que se puede efectuar una transformación de escala en "h" y "dh", de análoga forma a como se discutió en la exposición general de la teoría Yang-Mills.

A partir del Lagrangiano D4-(40), (absorbiendo la 1) las ecuaciones de campo serán, para la materia

$$\frac{\delta L_m}{\delta \phi} = 0 \Rightarrow {}^*EL_\phi = \frac{\partial L_m}{\partial \phi} - (-1)^p\, d\, \frac{\partial L_m}{\partial d\phi} \qquad D4\text{-}(41)$$

Para el campo exterior

$$\frac{\delta L}{\delta h} = 0 \Rightarrow {}^*t = -\frac{\partial L_m}{\partial h}\Big|_h = \frac{\delta L_T}{\delta h} = {}^*EL_T \qquad D4\text{-}(42)$$

En la segunda ecuación se observa un acoplamiento de la geometría, ${}^*EL_T$, y de la materia, ${}^*t$

$$ {}^*EL_T = \frac{\delta L_T}{\delta h} = \frac{\partial L_T}{\partial h} + d\,\frac{\partial L_T}{\partial dh} \qquad D4\text{-}(43)$$

Definiendo ${}^*t_T = \partial L_T/\partial h$ se observa que las ecuaciones de campo se pueden poner en una forma tipo Yang-Mills (no Maxwelliana) definiendo

$${}^*F = \frac{\partial L_T}{\partial dh} \qquad D4\text{-}(44)$$

como la intensidad del campo gravitatorio, se obtienen

$$d\,{}^*F = {}^*t_T + {}^*t \qquad D4\text{-}(45)$$

Muy recientemente W. Thirring ha expuesto el punto de vista que ya expresó en su libro "A Course of Mathematical Physics", Springer, Wien (1978) Vol. 2 ,en un artículo aparecido en Dynamical Sistems and Microphysics (1982), Academic Press, que acabo de recibir, expone las mismas ecuaciones de campo D4-(45), tomando como $L_T = L_{EH}$ y llega a decir que "son una vía alternativa de escribir a las ecuaciones de Einstein".

Con el Lagrangiano de Einstein-Hilbert L_{EH} estas ecuaciones toman una forma más explícita, teniendo en cuenta que en este caso

$$*F_\alpha = \frac{\partial L_{EH}}{\partial dh^\alpha} = -h^\beta \wedge *(dh_\beta \wedge h_\alpha) + \frac{1}{2} h_\alpha \wedge *(dh^\beta \wedge h_\beta) \qquad \text{D4-(46)}$$

$$*t_\alpha = i(h_\alpha)\Phi \wedge d\frac{\partial L_m}{\partial d\phi} + i(h_\alpha)\, d\phi \wedge \frac{\partial L_m}{\partial d\phi} - i(h_\alpha) L_m \qquad \text{D4-(47)}$$

$$*t_{T\alpha} = i(h_\alpha)\, dh^\beta \wedge *F_\beta - i(h_\alpha) L_T \qquad \text{D4-(48)}$$

$*t_{T\alpha}$ es (base natural) el pseudo-tensor de Landau-Lifshitz (vease la expresión 25 apéndice 3 de la 3-forma de energía-momento).

Por supuesto, a nosotros nos parece que en contra de la afirmación de Thirring, la teoría de Einstein-Hilbert está mucho mejor expresada (y más sencillamente) en su expresión habitual.

iv) Ejemplos de teorías gravitatorias alternativas que se pueden obtener mediante la teoría gauge de T_4

En la literatura, se han considerado diversos Lagrangianos alternativos al de RG, Lagrangianos que producen teorías alternativas de gravedad, los cuales pueden ser vistos resultantes de la teoría gauge T_4 (interpretada a la Thirring)

pero sin exigir la invariance Lorentz local que posee el Lagrangiano de RG, o mejor, a través del límite de teleparalelismo de la teoría Poincaré rota (ver sección D-8)

a) La teoría Hayward-Holland (1979-1981)

Es el Lagrangiano más simple y es análogo al Lagrangiano de Maxwell

$$L_{HH} = \frac{-S}{2\ell^2} G^\alpha \wedge *G_\alpha = -\frac{S}{\ell^2} dh^\alpha \wedge *dh_\alpha =$$
$$= \frac{-S}{2\ell^2} G^{\alpha}{}_{ij}^{\cdot\cdot}\, G_\alpha{}^{ij}_{\cdot\cdot}\, \varepsilon \qquad \text{D4-(49)}$$

Pese a la analogía Maxwelliana, Holland (1981) tomando a la fuente completamente determinada por las "intensidades de campo" G^α, es capaz de construir una teoría no-lineal de gravedad macroscópica debido a que $*t_T \neq 0$ y demostrar que la teoría posee el límite newtoniano y como solución en el caso estático y de simetría esférica a la solución exterior de Schwarzschid.

b) La teoría de Møller (1978)

En el último gran trabajo antes de su muerte, Møller (1978) construyó, con el ánimo de que la teoría de gravedad no predijese singularidades, una teoría macroscópica de gravedad, que también se puede obtener dentro del esquema gauge de T_4. En la teoría de Møller, la métrica pierde su carácter de variable gravitatoria en favor de la tetrada h y según el desarrollo de este autor juegan un papel preponderante los coeficientes γ_{ijk} definidos como

$$\gamma_{ijk} = h_i{}^\alpha\, \tilde{\nabla}_k h_{\alpha j} \qquad \text{D4-(50)}$$

siendo $\tilde{\nabla}_k$ la derivada covariante Livi-Civita-Christoffel y verificandose

$$\overset{T}{\Gamma}{}^k{}_{ij} = h^k{}_{\cdot\alpha}\, \partial_i h_j{}^\alpha = \left\{ {k \atop ji} \right\} + \gamma^k{}_{\cdot\cdot ji} \qquad \text{D4-(51)}$$

siendo $\overset{T}{\Gamma}{}^{k}{}_{ij}$ los coeficientes de la conexión de un espacio Weitzenböck ó de teleparalelismo T_4 referidos a un sistema coordenado. En un ET, T_4, los coeficientes $\gamma^{k}{}_{ji}$ juegan el papel de tensor defecto (ver apendice 1). Mientras que referidos a una base no coordenada de un ET pseudo-Riemanniano son denominados coeficientes de rotación Ricci. (vease H. Meyer (1982)).

El Lagrangiano de Møller es el siguiente

$$L_M = \frac{-s}{2\ell^2}\left[\alpha_1 \gamma^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\alpha}\,\gamma_{\gamma}{}^{\beta\gamma}{}_{\cdot\cdot} + \alpha_2 \gamma_{\beta\delta\varepsilon}\gamma^{\beta\delta\varepsilon} + \alpha_3 \gamma_{\beta\delta\varepsilon}\gamma^{\varepsilon\delta\beta}\right]\varepsilon \qquad D4\text{-}(52)$$

donde $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \lambda$, $\alpha_3 = (1-2\lambda)$ / $L_M(\lambda = 0) = L_{EH}$

$$L_{EH} = \frac{-s}{2\ell^2}\left[-\gamma^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\alpha}\,\gamma_{\gamma}{}^{\beta\gamma}{}_{\cdot\cdot} + \gamma_{\beta\delta\varepsilon}\gamma^{\varepsilon\delta\beta}\right]\varepsilon \qquad D4\text{-}(53)$$

Como

$$\gamma_{\delta\beta\alpha} = \frac{1}{2}\left(G_{\alpha\delta\beta} + G_{\delta\alpha\beta} + G_{\beta\delta\alpha}\right) \qquad D4\text{-}(54)$$

y $$\gamma_{\beta\delta\alpha} = \frac{1}{2}\left(G_{\alpha\beta\delta} + G_{\beta\alpha\delta} + G_{\delta\beta\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(-G_{\alpha\delta\beta} - G_{\beta\delta\alpha} - G_{\delta\alpha\beta}\right)$$

se verifica

$$\gamma_{\delta\beta\alpha} = -\gamma_{\beta\delta\alpha} \qquad D4\text{-}(55)$$

En términos de $G^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma}$ el Lagrangiano de Møller es

$$L_M = \frac{-s}{2\ell^2}\left\{\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)G_{\alpha\beta\gamma}G^{\alpha\beta\gamma} + \frac{1-\lambda}{2}G_{\alpha\beta\gamma}G^{\beta\alpha\gamma} - G_{\beta}G^{\beta}\right\}\varepsilon \qquad D4\text{-}(56)$$

Se puede observar por tanto que si $\lambda = 0 \Rightarrow$ GR. Por lo tanto esta teoría tiene que ser desechada en cuanto que no cumple el ánimo original de Møller, la no predicción de singularidades, ya que en el caso $\lambda = 0$ se reduce a la teoría de Einstein-Hilbert y por tanto tiene la misma predicción respecto de las singularidades.

c) La teoría de Hehl-Ne'eman-Nitsch-Von der Heyde (1978)

El Lagrangiano del candidato alternativo a RG como teoría macroscópica favorecido por Hehl et al. (1978) es $\frac{L_3}{2}$

$$\ell^2 L_{HN^2V} = \frac{1}{2}\, dh^{\alpha}\wedge h^{\beta}\wedge {}^*(dh_{\beta}\wedge h_{\alpha}) = \frac{L_3}{2} =$$
$$= \frac{1}{4}W_1 - \frac{1}{2}W_3 =$$
$$= \left(\frac{1}{4}G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}G_{\beta}G^{\beta}\right)\varepsilon \qquad D4\text{-}(57)$$

Comparandolo con el Lagrangiano de Einstein-Hilbert vemos que se verifica la relación , $L_{EH} = L^*_{EH} - d(h_{\alpha}\wedge {}^*dh^{\alpha})$

$S=-1$

$$L^*_{EH} = \frac{1}{2\ell^2}(L_3 - L_2) = \frac{-1}{2\ell^2}L_2 + L_{HN^2V} \qquad D4\text{-}(58)$$

Bajo el grupo de Lorentz, $G_{\alpha\beta\gamma}$ se puede descomponer, en las componentes irreducibles siguientes (ver M. Hamermesh 1962)

$$G_{\alpha\beta\gamma} = \underbrace{G_{[\alpha\beta\gamma]}}_{\text{axial}} + \underbrace{\frac{2}{3}\eta_{\alpha[\beta}G_{\gamma]}}_{\text{vectorial}} +$$
$$\underbrace{+\frac{2}{3}\left(G_{\alpha\beta\gamma} - G_{[\beta\gamma]\alpha} - \eta_{\alpha[\gamma}G_{\beta]}\right)}_{\text{tensorial}}$$
$$G_{\alpha\beta\gamma} = {}^{A}G_{\alpha\beta\gamma} + {}^{V}G_{\alpha\beta\gamma} + {}^{T}G_{\alpha\beta\gamma} \qquad D4\text{-}(59)$$

Vemos por tanto que el Lagrangiano de HN^2V y el de Einstein-Hilbert difieren en el cuadrado de la parte axial.

Este término (y la forma exacta) hacenque a diferencia del Lagrangiano de Einstein-Hilbert, el Lagrangiano de HN^2V no sea invariante bajo rotaciones Lorentz locales, solamente es invariante Lorentz global.

Nitsch (1980) demostró que todas las soluciones con simetría esferica de la teoría de Einstein-Hilbert son también soluciones de esta teoría, y por tanto esta posee la solución de Schwarzschild . Además se ha demostrado sucesivamente que, EH y HN^2V coinciden en la aproximación lineal (Hehl, Nitsch, Von der Heyde, 1980) i.e., hasta 3º orden de desarrollo de las tetradas en $\frac{v}{c}$ (aproximación lenta), coinciden hasta 4º orden (L.L. Smalley, 1980) y que debido al vector axial $G_{[\alpha\beta\gamma]}$ difieren en 5º orden (J. Nitsch, F.W. Hehl 1980), (ver tambien Nitsch (1980) y Schweizer et al (1979-80)).

Pese a todo ello, pensamos que <u>no se debe considerar</u> a esta teoría <u>como</u> una <u>alternativa</u> (<u>macroscópica</u>) <u>a RG</u>, de acuerdo con la filosofía básica de que la materia escalar no debe detectar torsión, aunque sea Weitzenböck, y esto es precisamente lo que sucede con la teoría de Nitsch-Hehl.

d) <u>La teoría de Hayashi-Shirafuji (1979)</u>

Esta teoría a la que sus autores han denominado "Nueva Relatividad General" deriva de el Lagrangiano gravitatorio siguiente

$$L_{HS} = \frac{-s}{2\ell^2}\tilde{R}\,\varepsilon + \left(c_1\,{}^{T}Q_{ijk}\,{}^{T}Q^{ijk} + c_2\,{}^{V}Q_{ijk}\,{}^{V}Q^{ijk} + c_3\,{}^{A}Q_{ijk}\,{}^{A}Q^{ijk}\right)\varepsilon \qquad \text{DA-(60)}$$

donde T,V,A denotan la parte tensorial, vectorial y axial de la torsión de teleparalelismo Cartan, respectivamente.

A esta teoría sus autores la consideran, al revés que los anteriores, <u>microscópica</u>. Según Hayashi-Shirafuji (1979) esta teoría esta de acuerdo con todos los experimentos realizados en gravitación. Sin embargo, la misma crítica efectuada arriba para la teoría HN^2V (Hehl-Ne'eman-Nitsch-Von der Heyde) sigue siendo válida para la teoría de Hayashi-Shirafuji.

5) TEORIA GAUGE DE O(3,1,R) GENERAL

i) <u>El método</u>

a) <u>Introducción</u>

Consideremos al grupo de Lorentz como grupo interno actuando por tanto sobre los indicès no-holonomos (Lorentz) y partamos del Lagrangiano invariante Lorentz globalmente dado por la teoría gauge de grupo T_4

$$L(h, dh, \Phi, d\Phi) = L_m(h, \Phi, d\Phi) + L_T(h, dh) \qquad \text{D5-(1)}$$

La tetrada "h" como hemos visto es $h \in F_1(M, R^4)$ y consideremosla en su aspecto de campo Lorentz, al ser R^4 el espacio de representación usual de O(3.1.R), la transformación infinitesimal es

$$\delta_R h^\alpha = \theta^{|\gamma\delta|}(Y_{\gamma\delta} h)^\alpha = \theta^{|\gamma\delta|}\,\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}\, h_\beta = \\ = \theta^\alpha{}_\beta\, h^\beta \qquad \text{D5-(2)}$$

Asimismo los campos Lorentz <u>(con espín)</u> $\Phi \in F_p(M^4, E\ \delta S)$ soportan una representación ρ: O(3,1,R) $\longrightarrow$ GL(E). Por tanto su transformación infinitesimal será en sentido pasivo

$$\delta_R \Phi = \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}\Phi \qquad \text{D5-(3)}$$

Donde $\theta^{\alpha\beta}$ son los parámetros del grupo de Lorentz y $Y_{\alpha\beta}, X_{\alpha\beta}$ son los generadores en las representaciones de h y de Φ, respectivamente.

Naturalmente si $\Phi \in F_p(M^4, S)$, donde S es un espacio espinorial, habría que considerar el homomorfismo recubridor Λ : SL(2,C) $\longrightarrow$ $O_0(3,1,R)$ y la diferencial Λ_* /

$$\Lambda_*: AL\ SL(2,C) \rightarrow AL\ O_0(3,1,R) \qquad \text{D5-(4)}$$

obteniendo una base natural del álgebra de Lie de SL(2,C), AL SL(2,C), en la forma

$$\check{X}_{\alpha\beta} = \Lambda_{*}^{-1} X_{\alpha\beta} \qquad D5-(5)$$

Por tanto, el formalismo a desarrollar es completamente independiente de que los campos Φ sean E-valuados ó S-valuados.

b) Invariancia Lorentz global

La invariancia de L bajo la acción global del grupo de Lorentz conduce a la identidad

$$-\delta_R h^\alpha \wedge {}^*EL_\alpha - \delta_R \phi \wedge {}^*EL_\phi = d\left[\delta_R h^\alpha \wedge \frac{\partial L}{\partial dh^\alpha} + \right.$$
$$\left. + \delta_R \phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi}\right] \qquad D5-(6)$$

siguiendo un proceso análogo al ya expuesto en el caso general de un grupo G cualesquiera, siendo ${}^*EL_\alpha$ y ${}^*EL_\phi$ las ecuaciones de Euler-Lagrange de "h" y Φ respectivamente.

$${}^*EL_\alpha = \frac{\delta L}{\delta h^\alpha} = \left.\frac{\partial L_m}{\partial h^\alpha}\right|_h + \frac{\delta L_T}{\delta h^\alpha} \qquad D5-(7)$$

$$= \left.\frac{\partial L_m}{\partial h^\alpha}\right|_h + \frac{\partial L_T}{\partial h^\alpha} + d\left(\frac{\partial L_T}{\partial dh^\alpha}\right) \qquad D5-(8)$$

$${}^*EL_\alpha = - {}^*t^m_\alpha + {}^*EL^T_\alpha = - {}^*t^m_\alpha - {}^*t^T_\alpha + d{}^*F_\alpha \qquad D5-(9)$$

Obtenida sustituyendo D4 - (42 - 43 - 45) y

$${}^*EL_\phi = \frac{\partial L_m}{\partial \phi} - (-1)^p d\frac{\partial L_m}{\partial d\phi} = \frac{\delta L_m}{\delta \phi} \qquad D5-(10)$$

Sustituyendo D5-(2) y D5-(3) en la identidad D5-(6) obtenemos

$$X_{\alpha\beta}\Phi \wedge {}^*EL_\phi = h_\alpha \wedge {}^*EL_\beta - h_\beta \wedge {}^*EL_\alpha +$$
$$+ d\left[h_\alpha \wedge {}^*F_\beta - h_\beta \wedge {}^*F_\alpha - \right.$$
$$\left. - X_{\alpha\beta}\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\Phi}\right] \qquad D5-(11)$$

Y sustituyendo la expresión D5-(9) obtenemos

$$X_{\alpha\beta}\Phi \wedge {}^*EL_\phi = - h_\alpha \wedge {}^*t^m_\beta + h_\beta \wedge {}^*t^m_\alpha$$
$$- d\left[X_{\alpha\beta}\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi}\right] \qquad D5-(12)$$

Y

$$0 = h_\alpha \wedge {}^*EL^T_\beta - h_\beta \wedge {}^*EL^T_\alpha +$$
$$+ d\left[h_\alpha \wedge {}^*F_\beta - h_\beta \wedge {}^*F_\alpha\right] \qquad D5-(13)$$

Separando la parte material de la geométrica y siendo

$${}^*EL^T_\alpha = \frac{\delta L_T}{\delta h^\alpha} = - {}^*t^T_\alpha + d{}^*F_\alpha \qquad D5-(14)$$

Las ecuaciones D5-(12) y D5-(13) expresan la invariancia global de L_m y L_T bajo 0 (3,1,R) y de las cuales D5-(11) es una consecuencia trivial.

Con lo que módulo las ecuaciones de Euler-Lagrange ${}^*EL_\phi = {}^*EL_\alpha = 0$ se verificará la ley de conservación débil

$$d{}^*j_{\alpha\beta} = 0 \qquad D5-(15)$$

donde $${}^*j_{\alpha\beta} = -{}^*S_{\alpha\beta} + {}^*j_{T\,\alpha\beta} \qquad D5-(16)$$

Y $${}^*S_{\alpha\beta} = - X_{\alpha\beta}\phi \wedge \frac{\partial L_m}{\partial d\phi} \quad y \quad {}^*j_{T\,\alpha\beta} = -2\, h_{[\alpha} \wedge {}^*F_{\beta]} \qquad D5-(17)$$

Como sabemos la invariancia local bajo 0(3,1,R) se puede conseguir en el caso trivial sin necesidad de introducir potenciales gauge si la corriente ${}^*j_{\alpha\beta}$ es cero con lo que se obtendría

$$-{}^*S_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}\phi \wedge \frac{\partial L_m}{\partial d\phi} = 2\, h_{[\alpha} \wedge {}^*F_{\beta]} = - j_{T\,\alpha\beta} \qquad D5-(18)$$

Y de la ecuación D5-(11) se obtendría

$$X_{\alpha\beta}\phi \wedge {}^*EL_\phi = 2\, h_{[\alpha} \wedge {}^*EL_{\beta]} \qquad D5-(19)$$

Sin embargo para tratar el caso no trivial $(*j_{\alpha\beta}\neq 0)$ y restaurar la invariancia bajo transformaciones de Lorentz locales es necesario introducir un campo exterior como veremos en la siguiente subsección y en analogía con el procedimiento general.

c) Invariancia Lorentz local

Haciendo a los parámetros $\theta^{\alpha\beta}$, funciones $\theta^{\alpha\beta}(x)$ y siguiendo paso a paso el método gauge ya explicitado en el caso general de un grupo de Lie G cualesquiera (no-abeliano), lo aplicamos al caso particular del grupo de Lorentz O(3,1,R) con las siguientes "correspondencias"

$$\theta^{a}(x) \longrightarrow \theta^{\alpha\beta}(x) \qquad A^{a} \to \hat{\omega}^{\alpha\beta} \qquad \text{D5-(20)}$$

$$f^{a}{}_{bc} \to f^{\eta\varepsilon}{}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\tau\nu}\left[\delta^{\eta\tau}_{\alpha\beta}\,\delta^{\nu\varepsilon}_{\gamma\delta} + \delta^{\nu\tau}_{\alpha\beta}\,\delta^{\eta\varepsilon}_{\gamma\delta}\right]$$

Donde $\hat{\omega}^{\alpha\beta}$ es el potencial gauge que restaura la invariancia Lorentz local, matematicamente será una conexión. $\hat{\omega}\in F_1(M^4, AL_{O(3,1)})$ son 1-formas valuadas en el álgebra de Lie del grupo de Lorentz y cuya ley de transformación bajo el grupo de Lorentz local (RL) será

$$\delta_{RL}\hat{\omega}^{\alpha\beta} = -d\theta^{\alpha\beta} - \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\cdot\gamma}\,\theta^{\gamma\beta} - \hat{\omega}^{\beta}{}_{\cdot\gamma}\,\theta^{\alpha\gamma} = -\hat{D}\theta^{\alpha\beta}$$

$$\delta_{RL}\hat{\omega} = -d\theta - [\hat{\omega},\theta] = -\hat{D}\theta \qquad \text{D5-(21)}$$

Donde "$\hat{D}$" representa a la derivada covariante Lorentz. <u>En principio</u> los 6-potenciales $\underline{\hat{\omega}^{\alpha\beta}}$ (componentes de $\hat{\omega}$) son <u>independientes de la tetrada h</u> como requiere ortodoxamente el método gauge y por tanto representan 6 verdaderos grados de libertad. $\hat{\omega} = \frac{1}{2}\hat{\omega}^{\alpha\beta}X_{\alpha\beta}$

Los potenciales exteriores $\hat{\omega}^{\alpha\beta}$ restauran la invariancia del Lagrangiano inicial bajo transformaciones Lorentz locales, si en este se sustituyen las derivadas exteriores de los campos

Lorentz h y Φ por las derivadas covariantes exteriores

$$L(h, dh, \Phi, d\Phi) \longrightarrow L(h, \hat{D}h, \Phi, \hat{D}\Phi) \qquad \text{D5-(22)}$$

Donde de esta forma ya se ha introducido la interacción entre Φ y $\hat{\omega}$ y entre h y $\hat{\omega}$ en el Lagrangiano. La derivada covariante exterior está definida en la forma siguiente en forma compacta

$$\Theta = \hat{D}h = dh + \hat{\omega}\wedge h \qquad \text{D5-(23)}$$

$$\hat{D}\Phi = d\Phi + \hat{\omega}\wedge\Phi \qquad \text{D5-(24)}$$

y en componentes

$$\Theta^{\alpha} = \hat{D}h^{\alpha} = dh^{\alpha} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\cdot\beta}\wedge h^{\beta} \qquad \text{D5-(25)}$$

$$\hat{D}\Phi = d\Phi + \tfrac{1}{2}\hat{\omega}^{\alpha\beta}\wedge X_{\alpha\beta}\Phi \qquad \text{D5-(26)}$$

Θ será la torsión de un espacio de Cartan y será distinta de cero ya que no se ha exigido como hizo Utiyama (1956), que los potenciales exteriores, "a priori", no tengan torsión, Θ será la intensidad de campo traslacional covariante Lorentz y la ley de transformación de las derivadas covariantes $\hat{D}h$ y $\hat{D}\Phi$ es efectivamente covariante

$$\delta_{RL}\hat{D}h = \theta\,\hat{D}h \qquad \text{D5-(27)} \qquad\qquad \delta_{RL}\hat{D}\Phi = \theta\,\hat{D}\Phi \qquad \text{D5-(28)}$$

ó en componentes

$$\delta_{RL}\hat{D}h^{\alpha} = \theta^{\alpha}{}_{\cdot\beta}\,\hat{D}h^{\beta} \qquad \text{D5-(29)}$$

$$\delta_{RL}\hat{D}\Phi = \tfrac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}X_{\alpha\beta}\,\hat{D}\Phi \qquad \text{D5-(30)}$$

ii) Invariancias de $L(h,\hat{D}h,\Phi,\hat{D}\Phi)$

PARTE 1º

Este Lagrangiano $L(h,\hat{D}h,\Phi,\hat{D}\Phi)$ en el que ya se ha realizado el acoplo mínimo con la interacción exterior introducida por $\hat{\omega}$, tiene como antecesor previo el Lagragiano $L'(h,dh,\Phi,d\Phi,\hat{\omega})$ en el cual todavía no se ha introducido el acoplo mínimo

$$L(h,\hat{D}h,\Phi,\hat{D}\Phi) = L'(h,dh,\Phi,d\Phi,\hat{\omega}) \qquad \text{D5-(31)}$$

Bajo variaciones de Φ se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$*EL_\phi = \frac{\partial L'}{\partial \Phi} - (-1)^p d \frac{\partial L'}{\partial d\phi} = \qquad \text{D5-(32)}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \Phi}\Big|_\phi - (-1)^p \hat{D} \frac{\partial L}{\partial d\Phi} \qquad \text{D5-(33)}$$

Donde como siempre $|_\phi$ significa que no varía Φ en $\hat{D}\Phi$

Bajo variaciones de la tetrada "h" se obtienen

$$*EL_\alpha = \frac{\partial L'}{\partial h^\alpha}\Big|_h + d \frac{\partial L'}{\partial dh^\alpha} = -*\tilde{t}_\alpha + d*F_\alpha \qquad \text{D5-(34)}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial h^\alpha}\Big|_h + \hat{D} \frac{\partial L}{\partial dh^\alpha} = -*t_\alpha + \hat{D}*F_\alpha \qquad \text{D5-(35)}$$

En donde

$$-*t_\alpha = \frac{\partial L(h,\hat{D}h,\Phi,\hat{D}\Phi)}{\partial h}\Big|_h =$$

$$= \frac{\partial L_m(h,\Phi,\hat{D}\Phi)}{\partial h}\Big|_h + \frac{\partial L_T(h,\hat{D}h)}{\partial h}\Big|_h =$$

$$= -*t^m_\alpha - *t^T_\alpha \qquad \text{D5-(36)}$$

Y $*t^m_\alpha$ y $*t^T_\alpha$ tienen las siguientes expresiones (compárese con D4-(47), D4-(48))

$$-*t^m_\alpha = i(h_\alpha) L_m(h,\Phi,\hat{D}\Phi) - i(h_\alpha)\Phi \wedge \frac{\partial L_m}{\partial \Phi}\Big|_\phi -$$

$$- i(h_\alpha)\hat{D}\Phi \wedge \frac{\partial L_m}{\partial d\Phi} \qquad \text{D5-(37)}$$

(Notese la aparición en el último término de $\hat{D}\Phi$ y la barra $|_\phi$ en el tercer término) y

$$-*t^T_\alpha = i(h_\alpha) L_T(h,\hat{D}h) - i(h_\alpha) \Theta^\beta \wedge *F_\beta \qquad \text{D5-(38)}$$

La 3-forma de energía-momento "mixta" D5-(36), tiene la expresión

$$-*t_\alpha = i(h_\alpha) L(h,\hat{D}h,\Phi,\hat{D}\Phi) - i(h_\alpha)\hat{D}h^\beta \wedge *F_\beta$$

$$- i(h_\alpha)\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial \Phi}\Big|_\phi - i(h_\alpha)\hat{D}\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial \hat{D}\Phi} \qquad \text{D5-(39)}$$

Esta 3-forma $*t_\alpha$ esta relacionada con la pseudo-energía momento por la expresión (compárese D5-(34) y D5-(35))

$$-*t_\alpha = -*\tilde{t}_\alpha + \hat{\omega}^\beta{}_\alpha \wedge *F_\beta \qquad \text{D5-(40)}$$

Por otra parte la invariancia local bajo O(3,1,R) nos permite escribir, teniendo en cuenta la ecuación C4-(36) y la ecuación C4-(64), del formalismo general

$$\frac{1}{2} X_{\alpha\beta}\Phi \wedge *EL_\phi = h_{[\alpha} \wedge *EL_{\beta]} - \frac{1}{2}\hat{D} *j_{\alpha\beta} \qquad \text{D5-(41)}$$

Donde $*j_{\alpha\beta}$ tiene la expresión (vease D5-(16))

$$*j_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}\Phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} - 2 h_{[\alpha} \wedge *F_{\beta]} \qquad \text{D5-(42)}$$

Utilizando la derivada covariante Lorentz y realizando un procedimiento análogo al que conduce a la formula (56) del apendice 3, se obtiene que la covariancia bajo Diff (M^4) implica que (ver apéndice 3)

$$i(h_\alpha)\hat{D}\Phi\wedge{}^*EL_\phi + (-1)^p i(h_\alpha)\Phi\wedge\hat{D}{}^*EL_\phi =$$

$$= -\hat{D}{}^*t_\alpha + i(h_\alpha)\,\hat{D}h^\beta\wedge{}^*t_\beta - i(h_\alpha)\,\hat{\Omega}^{|\gamma\beta|}\wedge{}^*j_{\gamma\beta}$$

D5-(43)

Donde $\hat{\Omega}\in F_2(M^4, AL\,O(3,1))$ es la intensidad de campo gauge de los potenciales gauge $\hat{\omega}\in F_1(M^4, AL\,O(3,1))$ $\hat{\Omega}$ sera la 2-forma de curvatura Cartan definida como

$$\hat{\Omega} = d\hat{\omega} + \frac{1}{2}\hat{\omega}\wedge\hat{\omega} = \hat{D}\hat{\omega} \qquad \text{D5-(44)}$$

ó en forma matricial, en componentes

$$\hat{\Omega}^{\alpha\beta} = d\hat{\omega}^{\alpha\beta} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\cdot\gamma}\wedge\hat{\omega}^{\gamma\beta} = \hat{D}\hat{\omega}^{\alpha\beta}$$

D5-(45)

Relacionadas a través de la expresión

$$\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^{|\alpha\beta|}X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\hat{\Omega}^{\alpha\beta}X_{\alpha\beta} \qquad \text{D5-(46)}$$

y donde

$$\hat{\Omega}^{\alpha\beta} = d\hat{\omega}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}f^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta\epsilon\tau}\,\hat{\omega}^{|\gamma\delta|}\,\hat{\omega}^{|\epsilon\tau|} \qquad \text{D5-(47)}$$

Sustituyendo la expresión de las constantes de estructura del álgebra de Lie de grupo de Lorentz, se obtiene

$$\hat{\Omega}^{\alpha\beta} = d\hat{\omega}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\rho\mu}\left(\hat{\omega}^{\alpha\rho}\wedge\hat{\omega}^{\mu\beta} + \hat{\omega}^{\beta\rho}\wedge\hat{\omega}^{\alpha\mu}\right) =$$

$$= d\hat{\omega}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\hat{\omega}^{\alpha}{}_{\cdot\mu}\wedge\hat{\omega}^{\mu\beta} + \hat{\omega}^{\beta}{}_{\cdot\mu}\wedge\hat{\omega}^{\alpha\mu}\right) =$$

$$\hat{\Omega}^{\alpha\beta} = d\hat{\omega}^{\alpha\beta} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\cdot\mu}\wedge\hat{\omega}^{\mu\beta} \qquad \text{D5-(48)}$$

Donde $\hat{\Omega}^{\alpha\beta} = F_2(M^4, R)$

Por otra parte, la curvatura Cartan al ser la intensidad de campo gauge del grupo de Lorentz local, verifica que su ley de transformación infinitesimal, bajo O(3,1,R) es

$$\delta_{RL}\hat{\Omega} = [\theta, \hat{\Omega}] \qquad \text{D5-(49)}$$

ó en componentes

$$\delta_{RL}\hat{\Omega}^{\alpha\beta} = \theta^{\alpha}{}_{\cdot\gamma}\,\hat{\Omega}^{\gamma\beta} + \theta^{\beta}{}_{\cdot\gamma}\,\hat{\Omega}^{\alpha\gamma} \qquad \text{D5-(50)}$$

es decir se transforma bajo la representación adjunta de O(3,1,R), en analogía con lo ya visto en el formalismo gauge general y asimismo

$$\hat{D}\hat{\Omega} = 0 \qquad \text{D5-(51)}$$

se verifica la identidad de Bianchi.

Por otra parte la identidad de Bianchi para la intensidad de campo traslacional covariante Lorentz, i.e., la torsión Cartan, tiene la expresión

$$\hat{D}\Theta = \hat{\Omega}\wedge h \qquad \text{D5-(52)}$$

PARTE 2ª

Consideremos ahora la expresión de $L(h,\hat{D}h,\Phi,\hat{D}h)$ de forma más explícita

$$L(h,\hat{D}h,\Phi,\hat{D}\Phi) = L_m(h,\Phi,\hat{D}\Phi) + L_T(h,\hat{D}h)$$

D5-(53)

Sabemos que las 3-corrientes correspondientes tienen la siguiente descomposición (vease D5-(16) y D5-(36))

$${}^*t_\alpha = {}^*t^m_\alpha + {}^*t^T_\alpha \qquad \text{D5-(54)}$$

$${}^*j_{\alpha\beta} = -{}^*S_{\alpha\beta} + {}^*j^T_{\alpha\beta} \qquad \text{D5-(55)}$$

Donde

$$-{}^*t^m_\alpha = \left.\frac{\partial L_m(h,\Phi,\hat{D}\phi)}{\partial h}\right|_h \qquad \text{D5-(56)}$$

$$-{}^*t^T_\alpha = \left.\frac{\partial L_T(h,\hat{D}h)}{\partial h}\right|_h \qquad \text{D5-(57)}$$

$$-{}^*S_{\alpha\beta} = \frac{\partial L_m}{\partial\hat{\omega}^{\alpha\beta}} = X_{\alpha\beta}\Phi\wedge\frac{\partial L_m}{\partial d\Phi} \qquad \text{D5-(58)}$$

$$*j^T_{\alpha\beta} = \frac{\partial L_T}{\partial \hat{\omega}^{\alpha\beta}} = -2\, h_{[\alpha} \wedge {}^* F_{\beta]} \qquad D5-(59)$$

De la invariancia local Lorentz y covariancia bajo difeomorfismos de L_m y L_T se obtienen 4 ecuaciones. Teniendo en cuenta, en primer lugar, las expresiones D5-(12) que la invariancia Lorentz local de L_m

$$X_{\alpha\beta}\Phi \wedge {}^*EL_\phi = -2\, h_{[\alpha} \wedge {}^* t^m_{\beta]} + \hat{D}\, {}^* S_{\alpha\beta} \qquad D5-(60)$$

y la covariancia bajo Diff M^4 proporciona la ecuación

$$i(h_\alpha)\hat{D}\Phi \wedge {}^*EL_\phi + (-1)^p i(h_\alpha)\, \Phi \wedge \hat{D}\, {}^*EL_\phi =$$

$$= -\hat{D}\, {}^* t^m_\alpha - i(h_\alpha)\, Ⓗ^\beta \wedge {}^* t^m_\beta - \frac{1}{2} i(h_\alpha) \hat{\Omega}^{\gamma\beta} \wedge {}^* S_{\gamma\beta}$$

(ver apéndice 3) D5-(61)

Por otra parte, teniendo en cuenta la expresión la invariancia local Lorentz de L_T, nos dice que

$$\hat{D}\, {}^* j^T_{\alpha\beta} = 2\, h_{[\alpha} \wedge {}^*EL^T_{\beta]} \qquad D5-62$$

y la covariancia bajo difeomorfismos de L_T conduce a

$$\hat{D}\, {}^*EL^T_\alpha = -i(h_\alpha)\, Ⓗ^\beta \wedge {}^*EL^T_\beta - \frac{1}{2} i(h_\alpha) \hat{\Omega}^{\beta\gamma} \wedge {}^* j^T_{\beta\gamma}$$

D5-(63)

Donde

$$*EL^T_\alpha = -\,{}^* t^T_\alpha + \hat{D}\, {}^* F_\alpha \qquad D5-(64)$$

iii) El Lagrangiano del campo exterior O(3,1,R)

Como sabemos por el método general Yang-Mills el Lagrangiano 4-forma de los campos $\hat{\omega}$ libres tiene la dependencia funcional siguiente

$$L'_R(h, \hat{\omega}, d\hat{\omega}) \qquad D5-(65)$$

y la dependencia explícita

$$L_R(h, \hat{\Omega}) \qquad D5-(66)$$

Y la invariancia local O(3,1,R) proporciona las identidades (compárese con el método general C4-(79))

$$*EL^R = \frac{\delta L_R}{\delta \hat{\omega}} = \hat{D}\, {}^*\Sigma' \qquad D5-(67)$$

$$\hat{D}\, {}^*EL^R_{\alpha\beta} = -2\, h_{[\alpha} \wedge {}^* t^R_{\beta]} \qquad D5-(68)$$

donde

$$*\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{\partial L_R}{\partial d\hat{\omega}^{\alpha\beta}} \qquad D5-(69)$$

$$-{}^* t^R_\alpha = \left.\frac{\partial L_R}{\partial h^\alpha}\right|_h = i(h_\alpha) L_R - i(h_\alpha) \hat{\Omega}^{|\beta\gamma|} \wedge {}^*\Sigma'_{\beta\gamma}$$

D5-(70)

Y la invariancia bajo Diff M^4 conduce a (ver apéndice 3)

$$i(h_\alpha) \hat{\Omega}^{|\beta\gamma|} \wedge {}^*EL^R_{\beta\gamma} = \hat{D}\, {}^* t^R_\alpha + i(h_\alpha)\, Ⓗ^\gamma \wedge {}^* t^R_\gamma$$

D5-(71)

iv) Ecuaciones de campo generales

El Lagrangiano total de la teoría gauge de O(3,1,R) tendrá la expresión

$$L_{Tot} = L_m(h, \Phi, \hat{D}\Phi) + L_T(h, Ⓗ) + L_R(h, \hat{\Omega}) \qquad D5-(72)$$

Agrupemos ahora la parte puramente geométrica (gravitatoria) en

$$L_G(h, \textcircled{H}, \hat{\Omega}) = L_T(h, \textcircled{H}) + L_R(h, \hat{\Omega}) \qquad D5\text{-}(73)$$

El Lagrangiano total será

$$L_{Tot} = L_m(h, \Phi, \hat{D}\Phi) + L_G(h, \textcircled{H}, \hat{\Omega}) \qquad D5\text{-}(74)$$

A partir de este Lagrangiano obtendremos tres ecuaciones de campo variando Φ, h y $\hat{\omega}$

$$\frac{\delta L_{Tot}}{\delta \Phi} = 0 \Leftrightarrow {}^*EL_\phi = \left.\frac{\partial L_m}{\partial \phi}\right|_\phi - (-1)^p \hat{D} \frac{\partial L_m}{\partial d\phi} = 0 \qquad D5\text{-}(75)$$

$$\frac{\delta L_{Tot}}{\delta h} = 0 \Leftrightarrow {}^*EI_\alpha = \frac{\delta L_G}{\delta h^\alpha} = -\left.\frac{\partial L_m}{\partial h^\alpha}\right|_h = {}^*t^m_\alpha \qquad D5\text{-}(76)$$

$$\frac{\delta L_{Tot}}{\delta \hat{\omega}} = 0 \Leftrightarrow {}^*CA_{\alpha\beta} = \frac{\delta L_G}{\delta \hat{\omega}^{\alpha\beta}} = -\frac{\partial L_m}{\partial \hat{\omega}^{\alpha\beta}} = {}^*S_{\alpha\beta} \qquad D5\text{-}(77)$$

Donde ${}^*EI_\alpha$ significa ecuación de Einstein (variación respecto de h) y ${}^*CA_{\alpha\beta}$ significa ecuación de Cartan (variación con respecto de $\hat{\omega}$). Es una teoría metrico-afin ó mejor tetradica-afin ya que variamos independientemente la tetrada y la conexión. (Principio de Einstein-Palatini ó de primer orden).

Desarrollando estas ecuaciones obtenemos que

$${}^*EI_\alpha = {}^*EL^T_\alpha - {}^*t^R_\alpha \qquad D5\text{-}(78)$$

Veanse ecuaciones D5-(14) y D5-(70)

Y que

$${}^*CA_{\alpha\beta} = {}^*j^T_{\alpha\beta} + {}^*EL^R \qquad D5\text{-}(79)$$

Veanse ecuaciones D5-(59) y D5-(67)

Y explicitamente las ecuaciones de campo de <u>Einstein</u> toman la forma

$${}^*EI_\alpha = \left.\frac{\partial L_T}{\partial h^\alpha}\right|_h + \hat{D}\left(\frac{\partial L_T}{\partial \hat{D}h^\alpha}\right) + \frac{\partial L_R}{\partial h^\alpha} = {}^*t^m_\alpha \qquad D5\text{-}(80)$$

ó agrupando términos

$$\boxed{{}^*EI_\alpha = \hat{D}\left(\frac{\partial L_G}{\partial \textcircled{H}^\alpha}\right) + \frac{\partial L_G}{\partial h^\alpha} = {}^*t^m_\alpha} \qquad D5\text{-}(81)$$

Y las de <u>Cartan</u> la expresión

$${}^*CA_{\alpha\beta} = -2h_{[\alpha} \wedge {}^*F_{\beta]} + \hat{D}\frac{\partial L_R}{\partial d\hat{\omega}^{\alpha\beta}} = {}^*S_{\alpha\beta} \qquad D5\text{-}(82)$$

$$\boxed{{}^*CA_{\alpha\beta} = 2h_{[\beta} \wedge \frac{\partial L_G}{\partial \textcircled{H}^{|\alpha]}} + \hat{D}\frac{\partial L_G}{\partial \hat{\Omega}^{\alpha\beta}} = {}^*S_{\alpha\beta}} \qquad D5\text{-}(83)$$

Recordemos las expresiones de las fuentes que aparecen en ellas

$$-{}^*t^m_\alpha = -t_{\alpha\beta}\,{}^*h^\beta = \frac{\partial L_m}{\partial h^\alpha} \qquad D5\text{-}(84)$$

$t_{\alpha\beta}$ es el tensor canónico de energía-momento de la materia

$$-{}^*S_{\alpha\beta} = -S_{\alpha\beta\gamma}\,{}^*h^\gamma = X_{\alpha\beta}\Phi \wedge \frac{\partial L_m}{\partial \hat{D}\Phi} \qquad D5\text{-}(85)$$

${}^*S_{\alpha\beta}$ es el tensor canónico de espin de la materia.

Las ecuaciones de campo D5-(81) y D5-(83) son las mismas que las de ecuaciones de Hehl-Ne'eman- van der Heyde (1980) obtenidas a partir de la teoría gauge del grupo de Poincaré físico (lorentz mas difeomorfismos).

Se observa que tienen basicamente la estructura de las ecuaciones de Yang-Mills excepto por los términos $\partial L_G/\partial h^\alpha$ y $2h_{[\beta} \wedge \partial L_G/\partial \textcircled{H}^{|\alpha]}$ que son las 3-formas de energía-momento y de espin del campo gravitatorio. La expresión explícita de la 3-forma de energía-momento gravitatoria es, sumando las ecuaciones D5-(38) y D5-(70), la siguiente

$$\left.\frac{\partial L_G}{\partial h^\alpha}\right|_h = i(h_\alpha) L_G - i(h_\alpha) \Theta^\beta \wedge \frac{\partial L_G}{\partial \Theta^\beta} - \qquad\qquad$$
$$- \frac{1}{2} i(h_\alpha) \hat{\Omega}^{\beta\gamma} \wedge \frac{\partial L_G}{\partial \hat{\Omega}^{\beta\gamma}} \qquad \text{D5-(86)}$$

Y efectuando el producto interno

$$\left.\frac{\partial L_G}{\partial h^\alpha}\right|_h = i(h_\alpha) L_G + Q^\beta{}_{\cdot\cdot\alpha\gamma}\, h^\gamma \wedge \frac{\partial L_G}{\partial \Theta^\beta} - \qquad\qquad$$
$$- \frac{1}{2} \hat{R}^\beta{}_{\cdot\cdot\cdot\gamma\alpha\beta}\, h^\beta \wedge \frac{\partial L_G}{\partial \hat{\Omega}^\beta{}_{\cdot\gamma}} \qquad \text{D5-(87)}$$

Naturalmente para obtener la expresión completamente explícita de estas ecuaciones, se necesita tomar un determinado Lagrangiano gravitatorio L_G, cuya elección no esta determinada en absoluto por el método gauge. La discusión de las diversas posibilidades de Lagrangianos U_4 gravitatorios asi como de las ecuaciones de campo especificas en cada caso y su relación con los tests experimentales y teoricos son objeto de capítulos posteriores.

v) Identidades Nöther

a) Se obtienen dos expresiones que son consecuencia de la invariancia local Lorentz de L total. En la primera D5-(60) se obtuvo la siguiente expresión de la invariancia Lorentz local de L_m

$$X_{\alpha\beta}\, \Phi \wedge {}^*EL_\phi = -2\, h_{[\alpha} \wedge {}^*t^m_{\beta]} + \hat{D}\, {}^*S_{\alpha\beta} \qquad \text{D5-(88)}$$

Si imponemos las ecuaciones de campo de la materia, se obtiene

$$\hat{D}\, {}^*S_{\alpha\beta} = 2\, h_{[\alpha} \wedge {}^*t^m_{\beta]} \qquad \text{D5-(89)}$$

La segunda es la suma de las ecuaciones D5-(62) y D5-(68) es decir, la invariancia Lorentz local de L_G nos dice que

$$\frac{1}{2} \hat{D}\, {}^*CA_{\alpha\beta} = h_{[\alpha} \wedge {}^*EI_{\beta]} \qquad \text{D5-(90)}$$

b) Por otra parte, la covariancia bajo Diff M^4 del Lagrangiano total conduce a las ecuaciones siguientes. En primer lugar la covariancia bajo difeomorfismos de L_m implicaba (ver D5-(61)) que

$$i(h_\alpha)\hat{D}\Phi \wedge {}^*EL_\phi + (-1)^p i(h_\alpha)\Phi \wedge \hat{D}\, {}^*EL_\phi =$$
$$= -\hat{D}\, {}^*t^m_\alpha - i(h_\alpha)\Theta^\beta \wedge {}^*t^m_\beta - \frac{1}{2} i(h_\alpha) \hat{\Omega}^{\gamma\beta} \wedge {}^*S_{\gamma\beta} \qquad \text{D5-(91)}$$

De la que imponiendo las ecuaciones de campo de la materia ${}^*EL_\phi = 0$, se obtiene la siguiente ley de conservación débil.

$$\hat{D}\, {}^*t^m_\alpha = -i(h_\alpha)\Theta^\beta \wedge {}^*t^m_\beta - \frac{1}{2} i(h_\alpha) \hat{\Omega}^{\gamma\beta} \wedge {}^*S_{\gamma\beta} \qquad \text{D5-(92)}$$

y en componentes sustituyendo las expresiones de la torsión Cartan

$$\Theta^\beta = -\frac{1}{2} Q^\beta{}_{\cdot\cdot\alpha\gamma}\, h^\alpha \wedge h^\gamma \qquad \text{D5-(93)}$$

y de la curvatura Cartan.

$$\hat{\Omega}^{\gamma\beta} = \frac{1}{2} \hat{R}^{\gamma\beta}{}_{\cdot\cdot\alpha\delta}\, h^\alpha \wedge h^\delta \qquad \text{D5-(94)}$$

se obtiene a partir de D5(92)

$$\hat{D}\, {}^*t^m_\alpha = Q^\beta{}_{\cdot\cdot\alpha\gamma}\, h^\gamma \wedge {}^*t^m_\beta - \frac{1}{2} \hat{R}^\gamma{}_{\cdot\cdot\cdot\beta\alpha\delta}\, h^\delta \wedge {}^*S_\gamma{}^\beta{}_\cdot \qquad \text{D5-(95)}$$

Donde ${}^*t^m_\alpha$ es la 3-forma de energía-momento canónico de la materia es (ver D5-(37))

$$-{}^{*}t^{m}_{\alpha} = i(h\alpha)\,L_m(h,\Phi,\hat{D}\Phi) - i(h\alpha)\,\Phi\wedge\frac{\partial L_m}{\partial \phi}\Big|_{\phi} - i(h\alpha)\,\hat{D}\Phi\wedge\frac{\partial L_m}{\partial \hat{D}\Phi} \qquad \text{D5-(96)}$$

En segundo lugar la <u>covariancia bajo Diff M^4</u> del Lagrangiano <u>gravitatorio</u> L_G conduce a la expresión

$$\hat{D}{}^{*}EI_{\alpha} = -i(h\alpha)\,\Theta^{\gamma}\wedge{}^{*}EI_{\gamma} - \frac{1}{2}\,i(h\alpha)\,\hat{\Omega}^{\beta\gamma}\wedge{}^{*}CA_{\beta\gamma} \qquad \text{D5-(97)}$$

que en componentes toma la expresión

$$\hat{D}{}^{*}EI_{\alpha} = Q^{\gamma\cdot\cdot}_{\ \alpha\beta}\,h^{\beta}\wedge{}^{*}EI_{\gamma} - \frac{1}{2}\,\hat{R}^{\beta}{}_{\gamma\alpha\delta}\,h^{\delta}\wedge{}^{*}CA_{\beta}^{\cdot\gamma} \qquad \text{D5-(98)}$$

6) LA TEORIA GAUGE DE O(3,1,R) CON TORSION NULA

Considerando otra vez a O(3,1,R) como grupo interno pero imponiendo además la ligadura de que la torsión Cartan sea nula, se reproduce el tratamiento de Utiyama (1956-1980) (ó de Carmeli (1974) ,usando el grupo SL(2,C)) del campo gravitatorio. Este tratamiento conduce a Relatividad general como teoría gauge del grupo O(3,1,R),pero posee unas características que son diferentes a la ya expuesta teoría gauge de T_4.

El tratamiento es completamente análogo al efectuado en el anterior capítulo.

Se considera a la tetrada $h\in F_1(M^4,R^4)$ y al campo material $\Phi\in F_p(M^4,E\ ó\ S)$,como campos Lorentz (<u>con espín</u>) sujetos a las leyes de transformación D5(2) y D5-(3)
Se parte asimismo del Lagrangiano invariante Lorentz globalmente

$$L(h,dh,\Phi,d\Phi) = L_m(h,\Phi,d\Phi) + L_{T_4}(h,dh) \qquad \text{D6-(1)}$$

y que verifica por tanto las identidades D5-(11) y D5-(12-13)

Imponiendo que los parámetros $\theta^{\alpha\beta}$ del grupo de Lorentz, sean funciones $\theta^{\alpha\beta}(x)$ la única forma (si las corrientes no son nulas) de restaurar la invariancia (local) del Lagrangiano consiste, como ya se ha hecho repetidamente, en introducir potenciales gauge exteriores (conexiones). En este caso particular <u>como se ha impuesto "a priori" que la conexión no tiene torsión</u>, los potenciales exteriores serán la conexión de Christoffel-Levi-Civita necesariamente, matematicamente será $\tilde{\omega}\in F_1(M^4,ALO(3,1,R))$, $\tilde{\omega}=\frac{1}{2}\tilde{\omega}^{\alpha\beta}X_{\alpha\beta}$ con $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}\in F_1(M^4,R)$ y $X_{\alpha\beta}\in ALO(3,1,R)$. Cuya ley de transformación infinitesimal bajo transformaciones de Lorentz locales (RL) es

$$\delta_{RL}\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = -d\theta^{\alpha\beta} - \tilde{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma}\,\theta^{\gamma\beta} - \tilde{\omega}^{\beta}{}_{\gamma}\,\theta^{\alpha\gamma} = -D\theta^{\alpha\beta} \qquad \text{con } \tilde{\omega}^{\alpha\beta}=\tilde{\omega}^{[\alpha\beta]} \qquad \text{D6-(2)}$$

Donde "$\tilde{D}$" es la derivada covariante Lorentz bajo torsión nula

$$\delta_{RL}\tilde{\omega} = -d\theta - [\tilde{\omega},\theta] = -\tilde{D}\theta \qquad \text{D6-(3)}$$

Para incorporar la interacción exterior en el Lagrangiano material libre inicialmente habra que sustituir a la diferencial exterior $d\Phi$ por la diferencial exterior covariante Lorentz bajo torsión nula

$$\tilde{D}\Phi = d\Phi + \tilde{\omega}\wedge\Phi \qquad \text{D6-(4)}$$

Analogamente para la tetrada se verificará que

$$\tilde{D}h = dh + \tilde{\omega}\wedge h = 0 \qquad \text{D6-(5)}$$

que es precisamente la condición impuesta a priori, i.e., torsión nula.

La intensidad de campo gauge sera $\tilde{\Omega} \in F_2(M^4, O(3,1,R))$, la 2-forma de curvatura Riemann-Christoffel

$$\tilde{\Omega} = \tilde{D}\tilde{\omega} = d\tilde{\omega} + \frac{1}{2}\tilde{\omega}\wedge\tilde{\omega} \qquad \text{D6-(6)}$$

La teoría gauge del grupo de Lorentz bajo torsión nula conduce geometricamente a un espacio pseudo-riemanniano y por tanto como veremos a Relatividad General si escogemos como Lagrangiano gauge de O(3,1,R) a Lagrangiano de Einstein-Hilbert.

Pero veamos antes cuales son las características especificas de esta particular forma de gaugear al grupo de Lorentz.

En primer lugar los 6 potenciales gauge $\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^{[\alpha\beta]}$ son compuestos ó dependientes ya que se pueden expresar en términos de la tetrada h, ya que D6-(5) implica que D6-(7)

$$dh^\alpha = -\tilde{\omega}^\alpha{}_\beta \wedge h^\beta \Rightarrow i(h^\alpha)\, dh^\beta = -\tilde{\omega}^{\beta\gamma\alpha} h_\gamma + \tilde{\omega}^{\beta\gamma}$$

$$\Rightarrow i(h^\alpha)i(h^\beta)\, dh^\gamma = -\tilde{\omega}^{\gamma\alpha\beta} + \tilde{\omega}^{\gamma\beta\alpha} \qquad \text{D6-(8)}$$

donde $\tilde{\omega}^{\gamma\beta\alpha} = \tilde{\omega}^{[\gamma\beta]\alpha}$, son los coeficientes Ricci de rotación, i.e., la expresión completamente anholonoma de la conexión Christoffel-Levi-Civita.

De las dos ecuaciones anteriores se deduce que

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[i(h^\beta)\, dh^\alpha - i(h^\alpha)\, dh^\beta + h_\gamma \wedge i(h^\alpha) i(h^\beta)\, dh^\gamma\right] \qquad \text{D6-(9)}$$

Por tanto la conexión de Levi-Civita es un potencial gauge compuesto, y no verifica por tanto la condición 2 de independencia (Capítulo C) que debían verificar los potenciales gauge ortodoxos.

El Lagrangiano invariante Lorentz localmente se construye como siempre efectuando las sustituciones $d\phi \to \tilde{D}\Phi$ y $dh \to \tilde{D}h = 0$ en el Lagrangiano material global y añadiendo el Lagrangiano cinético gravitatorio de los potenciales dinámicos $\tilde{\omega}$. Tendrá por tanto la expresión siguiente

$$L_{Tot}(h, \Phi, \tilde{D}\Phi) = L_m(h, \Phi, \tilde{D}\Phi) + L_R(h, \tilde{\Omega}) \qquad \text{D6-(10)}$$

Donde $\tilde{\Omega}$ es la curvatura 2-forma Riemann-Christoffel

Notese que hemos tomado el término $L_T(h, \tilde{D}h = 0) = 0$ igual a cero, aunque en general existe la posibilidad de considerarlo igual al término cosmólogico $L_4 = \frac{1}{2} h^\alpha \wedge {}^*h_\alpha$ ya que este no depende de $\tilde{D}h = 0$.

Como sabemos el término $L_R(h, \tilde{\Omega})$ no tiene su expresión explicita determinado por el esquema gauge y en general será una combinación cuadrática en curvaturas (Riemann-Christoffel, Ricci, escalar) del tipo de los que aparecen en las teorías Eddington-Weyl.

Sin embargo es posible tomar para $L_R(h, \tilde{\Omega})$ la expresión del Lagrangiano de Einstein-Hilbert, i.e., en contra de lo que aparece usualmente en la literatura, el Lagrangiano gravitatorio de la teoría gauge del grupo de Lorentz no está "forzado" a ser cuadrático en curvatura, como ocurría necesariamente en la teoría gauge de simetrías internas.

Esto se puede ver facilmente si aplicamos a la teoría O(3,1,R) la fórmula C4-(107), que tenía la expresión

$$f^a{}_{bc} F^b \wedge \frac{\partial L_A}{\partial F^a} = D^*EL A_c = -(Y_c h)^\beta \wedge {}^*t^m_\beta \qquad \text{D6-(11)}$$

Hagamos las correspondientes sustituciones

$$G \to O(3,1,R) \quad ; \quad A^{a} \to \tilde{\omega}^{\alpha\beta} \qquad D6-(12-13)$$

$$F^{a} \to \tilde{\Omega}^{\alpha\beta} \quad ; \quad Y_{a} \to Y_{\alpha\beta} = Y_{[\alpha\beta]} \qquad D6-(14-15)$$

$$*ELA_{a} \to *S_{\alpha\beta} = *S_{[\alpha\beta]} \qquad D6-(16)$$

Como ahora O(3,1,R) ya no se representa trivialmente (como ocurría con G interno) en R^4 ya que $(Y_{ab}h)^{\gamma} = \delta^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} h_{\delta}$
Lo análogo de la fórmula D6-(11) es en el caso de O(3,1,R)

$$D^{*} S_{\alpha\beta} = 2\, h_{[\alpha} \hat{\ } {}^{*}t^{m}{}_{\beta]} \qquad D6-(17)$$

Donde $^{*}S_{\alpha\beta} = \delta L_G / \delta \tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ es la corriente de espin de los campos gauge. Y $-{}^{*}t^{m}{}_{\beta} = \partial L_m / \partial h^{\beta}|_h$

Observamos por tanto que al no realizarse trivialmente O(3,1,R) en R^4, como sucedía con los grupos G de simetrías internas, el Lagrangiano del campo gauge no necesita ser cuadrático en las intensidades gauge (en este caso curvatura Riemanniana) y por tanto el Lagrangiano lineal en la curvatura escalar Riemann-Christoffel es un perfecto Lagrangiano gravitatorio desde el punto de vista del esquema gauge.

<u>En conclusión</u> tomando como potencial gauge del grupo de Lorentz a la conexión Christoffel-Levi-Civita, se observan las <u>características</u> siguientes:

a) Se supone <u>arbitrariamente</u> que la <u>torsión</u> de la conexión es <u>nula</u>. Ligadura arbitraria.

b) La conexión Christoffel-Levi-Civita es <u>compuesta</u>, (se obtiene a partir de la tetrada) y por lo tanto al no ser independiente, <u>no</u> es un <u>ortodoxo</u> potencial gauge.

c) <u>Se puede obtener Relatividad General</u> a partir de la teoría gauge de O(3,1,R) con la ligadura de torsión nula ya que el Lagrangiano gravitatorio puede tomar la expresión de Einstein-Hilbert.

d) El Lagrangiano gravitatorio toma en general la expresión siguiente en componentes

$$L_R(h,\tilde{\Omega}) = \frac{-s}{2l^2}\left(a_1 \tilde{R} + a_2 \tilde{R}^2 + a_3 \tilde{R}_{\alpha\beta}\tilde{R}^{\alpha\beta} + a_4 \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{R}^{\alpha\beta\gamma\delta}\right) \qquad D6-(18)$$

En general es un Lagrangiano de cuatro parámetros a_i y entonces debido al teorema de Euler-Gauß-Bonnet será de <u>tres parámetros</u> ya que en este caso un parámetro a_2, a_3, a_4, es dependiente de los otros dos.

Por tanto en general la teoría de O(3,1,R) con torsión nula da lugar a las teorías gravitatorias del tipo Eddington-Weyl en general pero en particular y esto es lo verdaderamente interesante <u>conduce a RG</u> y de una forma <u>más natural que la teoría gauge de T_4</u>, ya que el espacio geométrico es pseudo-riemanniano V_4 en la teoría O(3,1,R) y Weitzenböck en la teoría T_4 (con la interpretación de Thirring).

7) DISCUSION GENERAL DE LA TEORIA GAUGE DE O(3,1) y IO(3,1)

i) <u>O(3,1,R)</u>

Al superponer la teoría gauge del grupo de Lorentz a la del grupo de traslaciones, hemos realizado la teoría gauge de O(3,1,R). ¿Que sucedería si gaugeásemos a $T_4 \otimes O(3,1,R)$?

Recordemos que la intensidad de campo de la teoría gauge T_4 es objeto de no-holonomía

$$G^{\alpha} = db^{\alpha} = dh^{\alpha} \qquad h \in F_1(M^4, ALT_4 \otimes R^4)$$
$$G \in F_2(M^4, ALT_4) \qquad D7-(1)$$

Y la de la teoría gauge de O(3,1,R) la curvatura Cartan

$$\hat{\Omega}^{\alpha\beta} = d\hat{\omega}^{\alpha\beta} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma} \wedge \hat{\omega}^{\gamma}{}_{\beta} \qquad D7(2)$$

Donde $\hat{\omega} \in F_1(M^4, ALO(3.1))$

$\hat{\Omega} \in F_2(M^4, ALO(3.1))$

Y que la torsión Cartan Θ definida como

$$\Theta^{\alpha} = dh^{\alpha} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge h^{\beta} \qquad D7-(3)$$

Es la versión covariante Lorentz de las intensidades T_4, G^{α}.
Por construcción, la transformación de la tetrada h bajo $T_4 \otimes O(3,1,R)$ es infinitesimalmente la siguiente

$$\delta_{T_4 \otimes O(3.1)} h^{\alpha} = \theta^{\beta}(\hat{X}_{\beta} h)^{\alpha} + \tfrac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}(\hat{X}_{\alpha\beta} h)^{\alpha} \qquad D7-(4)$$

Es decir, se considera que $h = h^{\alpha} X_{\alpha}$ toma valores en R^4 considerado como parte del álgebra de Lie de $T_4 \otimes L$. Y por tanto $\hat{X}_{\beta}$ y $\hat{X}_{\alpha\beta}$ son los generadores de la representación adjunta del álgebra de $T_4 \otimes O(3,1,R)$ definida como

$$ad : ALT_4 + AL\ O(3.1) \longrightarrow GL(ALT_4 + AL\ O(3.1))$$
$$X \longrightarrow \hat{X} = adX \qquad D7(5)$$

Y tal que $ad(X)Y = [X,Y]$

Por consiguiente la expresión D7-(4) desarrollada es

$$\delta_{RL \otimes TL} h^{\alpha} = \theta^{\beta}[X_{\beta}, X_{\gamma}]^{\alpha} h^{\gamma} + \tfrac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}[X_{\alpha\beta}, X_{\gamma}]^{\alpha} h^{\gamma} \qquad D7-(6)$$

y por tanto como

$[X_{\beta}, X_{\alpha}] = 0$ por ser T_4 abeliano

y $[X_{\alpha\beta}, X_{\gamma}] = 0$ por ser $T_4 \otimes O(3,1,R)$ producto directo . Se obtiene que

$$\delta_{T \otimes O(3.1)} h^{\alpha} = 0. \qquad D7-(7)$$

Sin embargo, considerando a R^4 como el espacio de representación usual de O(3,1), la ley es la D5-(2), $\delta_{O(3.1)} h^{\alpha} = \theta^{\alpha}{}_{\beta} h^{\beta}$

Por otra parte, las transformaciones del potencial traslaciones $b \in F_1(M^4, ALT_4)$ y del potencial Lorentz $\hat{\omega} \in F_1(M^4, AL\,O(3.1))$ recordamos que infinitesimalmente son bajo T_4 y O(3,1,R)

$$\delta_{TL} b^{\alpha} = -d\theta^{\alpha} \qquad \delta_{RL} b^{\alpha} = 0 \qquad D7-(8)$$

$$\delta_{TL} \hat{\omega}^{\alpha\beta} = 0 \qquad \delta_{RL} \hat{\omega}^{\alpha\beta} = -\hat{D}\theta^{\alpha\beta} \qquad D7-(9)$$

Por tanto bajo $T_4 \otimes O(3,1,R)$ estas transformaciones toman la expresión

$$\delta_{T \otimes O(3.1)} b^{\alpha} = -d\theta^{\alpha} \qquad D7(10)$$

$$\delta_{T \otimes O(3.1)} \hat{\omega}^{\alpha\beta} = -\hat{D}\theta^{\alpha\beta} \qquad D7-(11)$$

ii) IO(3,1,R)

Si se hubiera considerado al grupo de Poincaré, I O(3,1,R) = $= O(3,1,R) \odot T_4$, se tendría que las funciones serían $\theta = (\theta^{\alpha}, \theta^{\alpha\beta})$ los potenciales gauge $\hat{\omega} = (b^{\alpha}, \hat{\omega}^{\alpha\beta}) \in F_1(M^4, ALI\ O(3.1))$ y las leyes de transformación infinitesimal de estos serían bajo transformaciones locales Poincaré (P)

$$\delta_{PL} b^{\alpha} = -d\theta^{\alpha} - \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\theta^{\beta} + \theta^{\alpha}{}_{\beta} b^{\beta} \qquad D7-(12)$$

$$\delta_{PL} \hat{\omega}^{\alpha\beta} = -\hat{D}\theta^{\alpha\beta} = -d\theta^{\alpha\beta} - \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma}\theta^{\gamma\beta} - \hat{\omega}^{\beta}{}_{\gamma}\theta^{\gamma\alpha} \qquad D7-(13)$$

Ya que en este caso, separadamente se verifica

$$\delta_{TL} b^{\alpha} = -d\theta^{\alpha} - \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\theta^{\beta} \qquad D7-(14)$$

$$\delta_{RL} b^{\alpha} = \theta^{\alpha}{}_{\beta} b^{\beta} \qquad D7-(15)$$

$$\delta_{TL} \hat{\omega}^{\alpha\beta} = 0 \qquad D7-(16)$$

$$\delta_{RL} \hat{\omega}^{\alpha\beta} = -\hat{D}\theta^{\alpha\beta} \qquad D7-(17)$$

El campo material se transformaría en la forma siguiente

$$\delta_{TL}\phi = 0 \qquad \delta_{RL}\phi = \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}(x)\, X_{\alpha\beta}\,\phi \qquad \text{D7-(18)}$$

y por tanto

$$\delta_{PL}\Phi = \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}(x)\, X_{\alpha\beta}\,\Phi \qquad \text{D7-(19)}$$

La derivada covariante sería

$$\hat{D}\Phi = d\phi + \hat{\omega}\wedge\phi \qquad \text{D7-(20)}$$

Y la intensidad de campo gauge sería $\hat{\Omega} = (\hat{\Omega}^{\alpha}, \hat{\Omega}^{\alpha\beta})$
dondé $\hat{\Omega}\in F_2(M^4, AL\,I\,O(3,1))$

$$\hat{\Omega}^{\alpha} = db^{\alpha} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\wedge b^{\beta} \quad ; \quad \hat{\Omega}^{\alpha\beta} = d\hat{\omega}^{\alpha\beta} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma}\,\hat{\omega}^{\gamma\beta} \qquad \text{D7-(21,22)}$$

Notese que $\hat{\Omega}^{\alpha}$, D7-(21), viene definida a través del potencial gauge de traslaciones b y no a través de la tetrada h, como lo hace la torsión Cartan.

A través de la teoría gauge de I O(3,1,R), se llegaría por tanto, a realizar el método sobre un espacio-tiempo de Cartan, pero la "torsión" procedería de "b" y no de la tetrada "h".

Sin embargo en la literatura se interpreta usualmente a "b" como la tetrada (ver por ejemplo M. Kaku, P. Towsend, P. Van Nieuwenhuizen 1977a-1977b), papel que realmente posee "h" y para hacer contacto con Relatividad General se impone la ligadura de que $\hat{\Omega}^{\alpha} = 0$ lo cual conduce a las mismas fórmulas que las obtenidas en el capítulo de teoría gauge de O(3,1,R) con torsión nula, pero con la fundamental diferencia de que se usa "b", en el papel de la tetrada "h".

Este procedimiento conduce a contradicciones ya que la "torsión" y curvatura Poincaré se transforman bajo traslaciones locales en la forma

$$\delta_{TL}\hat{\Omega}^{\alpha} = -\hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta}\,\theta^{\beta} \qquad \text{D7-(23)}$$

$$\delta_{TL}\hat{\Omega}^{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{D7-(24)}$$

La expresión D7-(23) se obtiene directamente ya que

$$\begin{aligned}\delta_{TL}\hat{\Omega}^{\alpha} &= \delta_{TL}(db^{\alpha} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\wedge b^{\beta}) = \\ &= \delta_{TL}\, db^{\alpha} + \underset{0}{\delta_{TL}\hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}}\wedge b^{\alpha} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\wedge\delta_{TL} b^{\alpha} = \\ &= d\,\delta_{TL} b^{\alpha} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\wedge\delta_{TL} b^{\alpha} \qquad \text{D7-(25)}\end{aligned}$$

Y sustituyendo la expresión D7-(14) se obtiene

$$\begin{aligned}\delta_{TL}\hat{\Omega}^{\alpha} &= -\overset{0}{dd}\theta^{\alpha} - d(\hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\,\theta^{\beta}) + \\ &+ \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\wedge(-d\theta^{\beta} - \hat{\omega}^{\beta}{}_{\gamma}\,\theta^{\gamma}) = \\ &= -(d\hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta})\theta^{\beta} + \cancel{\hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\wedge d\theta^{\beta}} \\ &\cancel{-\hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\wedge d\theta^{\beta}} - \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta}\wedge\hat{\omega}^{\beta}{}_{\gamma}\,\theta^{\gamma} = \\ &= -\hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta}\,\theta^{\beta} \quad \blacksquare \qquad \text{D7-(26)}\end{aligned}$$

Y en cuanto a la expresión D7-(24)

$$\delta_{TL}\hat{\Omega}^{\alpha\beta} = \delta_{TL}\, d\hat{\omega}^{\alpha\beta} + \delta_{TL}(\hat{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma}\wedge\hat{\omega}^{\gamma}{}_{\beta}) = 0 \quad \blacksquare \qquad \text{D7-(27)}$$

Ya que $\delta_{TL}\hat{\omega}^{\alpha\beta} = 0$

Por consiguiente, en vista de la transformación bajo traslaciones locales de la "torsión" $\hat{\Omega}^{\alpha}$ construida a partir de b, la ligadura $\hat{\Omega}^{\alpha} = 0$ no es covariante bajo ellas y por tanto la conexión Lorentz $\hat{\omega}^{\alpha\beta}$ no se transforma como $\delta_{TL}\hat{\omega}^{\alpha\beta} = 0$, a menos que se modifique la ecuación D7-(14), i.e., la ley de transformación de b bajo traslaciones, que es lo que hacen (Kaku et al 1977-a-1977b). La única posibilidad de mantener la ley de transformación D7-(14) y conseguir que la ligadura $\hat{\Omega}^{\alpha} = 0$, sea covariante gauge, es "romper" el grupo de Poincaré a través de realizaciones no lineales de este en el espacio afin Minkowskiano $P / O(3,1,R)$ (Una búsqueda bibliográfica señala que este último procedimiento ha sido utilizado en E.A. Ivanov, J. Niederle (1982)).

Hemos intentado formular a través del formalismo Lagrangiano esta última aproximación al problema, es decir, formular la teoría gauge del grupo de Poincaré como simetría interna y despues romper la simetría gauge Poincaré a la Lorentz, sin embargo el desarrollo en el formalismo Lagrangiano de esta última condición es muy complicado. Por ello se ha considerado la teoría gauge de $O(3,1,R)$ en el modo desarrollado en los anteriores capítulos y que constituye otra aproximación distinta a las antes comentadas.

iii) Criticas al esquema $O(3,1,R)$

El procedimiento empleado en los anteriores capítulos, construyendo la teoría gauge de $O(3,1,R)$, no es del todo natural por los siguientes motivos:

a) La construcción efectuada de la teoría $O(3,1,R)$ es "mixta", ya que primitivamente al surgir de la teoría gauge de T_4 la tetrada $h \in F_1(M^4, R^4)$ i.e., esta valuada en R^4 considerado como álgebra de Lie de T_4, pero posteriormente al "superponer" la teoría gauge de $O(3,1,R)$, R^4 es considerado como el espacio de representación usual del grupo de Lorentz, obteniendose como potencial gauge Lorentz la conexión lineal Cartan.

b) Al gaugear T_4 y $O(3,1,R)$ interpretando la teoría T_4 "a la Thirring" se necesitan introducir dos constantes de acoplo que en principio tendrían que ser distintas.

Naturalmente que ambas se pueden tomar iguales "ad hoc" y como la constante de Newton de gravitación.
De esta forma, en el caso mas simple de lagrangiano lineal en curvatura, el lagrangiano gravitatorio sería:

$$L_G = -\frac{S}{2l^2}\tilde{R} - \frac{S}{2l^2}\hat{R} \qquad D7-(28)$$

que en el caso de torsión nula daría lugar a

$$L_G = -\frac{S}{2l^2}\tilde{R} \qquad D7-(29)$$

Ya que el primer término se anularía por provenir de la teoría gauge de T_4.

De esta manera, tomando "ad hoc" las mismas constantes de acoplo en este caso simple se podrian obtener la teoría de gravedad macrocópica tanto de la teoría gauge de T_4 interpretada "a la Thirring", como de la teoría gauge de $O(3,1,R)$ con torsión nula. Sin embargo nos parece que desde el punto de vista de la teoría gauge tomar la misma constante de acoplamiento para dos grupos locales distintos no es natural. Esto se soluciona considerando que la teoría T_4 es trivial.

c) La teoría gauge de $O(3,1,R)$ es también mixta en el sentido de que para obtener la teoría gauge de T_4 se consideran traslaciones en el sentido de transformaciones de coordenadas, mientras que posteriormente al gaugear $O(3,1,R)$ se consideran transformaciones Lorentz no como transformaciones de coordenadas sino como transformaciones de la tetrada y de los campos materiales. La teoría finalmente es invariante local Lorentz y covariante bajo Diff (M^4), como se necesita para obtener las apropiadas leyes Nöther y ecuaciones de campo.

d) Según el esquema efectuado, al localizar las traslaciones obtenemos el primer elemento dinámico de gravedad la tetrada, (lo mismo se obtendría al localizar cualquier grupo considerado como transformaciones de coordenadas, por ejemplo Poincaré) mientras que al localizar las transformaciones Lorentz de la tetrada se obtiene el segundo elemento dinámico la conexión $\hat{\omega}$, y como subproducto una métrica Lorentz como clase de equivalencia de tetradas relacionadas por transformaciones locales Lorentz. La teoría "se puede considerar" como una teoría gauge del grupo de Lorentz, construida mediante fibrados, en $Og(M)$, el fibrado Lorentz de las referencias lineales ortonormales construido sobre la variedad M dotada de una métrica Lorentz g.

Despues de estas críticas al esquema efectuado anteriormente, vamos a exponer en la siguiente sección en términos de fibrados (ya que mediante el formalismo Lagrangiano es muy complicado) el esquema gauge en el que se realiza la teoría Poincaré internamente y posteriormente, debido a la presencia de un campo de Higgs, se obtiene finalmente la teoría de gravedad como una teoría interna Poincaré "rota implicitamente" a una teoría interna Lorentz.

Por otra parte, algunos autores como Hehl y col (1980), Ne'eman y col. (1979) han tomado como potenciales gauge de traslaciones a la tetrada, pero traslaciones en el sentido activo, i.e., difeomorfismos. Con lo que su teoría se separa totalmente del esquema gauge Yang-Mills que aquí se ha aplicado a gravedad. Las variaciones de la tetrada y de la conexión que ellos utilizan no son internas, sino que en realidad son derivadas de Lie.

La teoría efectuada de esta forma conduce a una de teoría gauge de gravedad del grupo de Poincaré físico, i.e., Lorentz más Difeomorfismos. Por ello el "grupo local Poincaré" que ellos obtienen no es ya un grupo de Lie sino un grupo

funcional, cuyas "constantes de estructura" son la curvatura y la torsión Cartan. Sin embargo, se puede llegar a las mismas ecuaciones de campo que ellos obtienen, utilizando el método gauge más parecido al de las teorías internas, que es el que se ha desarrollado en el capítulo siguiente.

Finalmente hay que señalar que el esquema de Hehl-Ne'eman no admite una interpretación natural en términos de fibrados.

8) LA TEORIA GAUGE POINCARE ROTA

i) <u>Construcción</u>

Como la <u>teoría gauge de gravedad</u> tiene que surgir como una teoría invariante Lorentz y covariante bajo difeomorfismos, la teoría final debe ser construida en $Og\,M$ el fibrado de las referencias lineales ortonormales (ver apéndice 4).

<u>La vía más acertada</u>, en mi opinión, <u>de realizarla</u> es <u>como</u> una <u>teoría gauge Poincaré rota</u> (rota en el sentido del teorema de Higgs de simetrias internas). Los campos de Higgs van a ser los campos "y" que se han utilizado como coordenadas (internas) al efectuar la teoría gauge de T_4. Ello es posible usando el formalismo de fibrados (Apéndice 4).

Partamos del Lagrangiano relativista especial material

$$L_m = \mathcal{L}_m\left(\overset{\sigma}{\Phi}, \frac{\partial}{\partial z^\gamma}\overset{\sigma}{\Phi}\right) d^4 z \qquad \text{D8-(1)}$$

Sobre el espacio de Minkowski $(M = R^4, \eta)$ donde $\overset{\sigma}{\Phi} = \sigma^* \Phi$ donde Φ es una 0-forma de tipo ρ sobre $\underline{L}$ (el fibrado principal con <u>grupo de estructura O(3,1,R)</u>) y donde σ es la sección holónoma

$$\begin{aligned} \sigma : M &\longrightarrow L \\ x &\longrightarrow \left(x, \frac{\partial}{\partial z^{\gamma}}\Big|_{x}\right) \end{aligned} \qquad D8-(2)$$

donde z^{γ} es un sistema de coordenadas Lorentz global sobre M.

En coordenadas arbitrarias x^{i} sobre M, se puede escribir a L_m como (ver Utiyama 1956).

$$L_m = \mathcal{L}_m \left(\overset{\sigma}{\Phi}, \left[(\partial_i z^{\alpha})^{-1} \right]^{j}_{\gamma} \partial_j \overset{\sigma}{\Phi} \right) \det \left(\partial_i z^{\alpha} \right) d^4x \qquad D8-(3)$$

Consideremos que L_m es invariante bajo transformaciones del grupo de Poincaré globales (i.e., constantes).

$$z^{\alpha} \rightarrow z'^{\alpha} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta} \; z^{\beta} - t^{\alpha} \qquad D8-(4)$$

$$\overset{\sigma}{\Phi} \rightarrow \overset{\sigma}{\Phi}{}' = \rho(\Lambda^{-1}) \, \overset{\sigma}{\Phi} \qquad (\Lambda, t) \in \text{Poincaré} \qquad D8-(5)$$

donde $\sigma' = \sigma . \Lambda$ es la sección "rotada" de L y ρ es la representación del grupo de Lorentz (ó de su recubridor SL(2,C) bajo la cual Φ se transforma.

Mientras es fácil considerar a las transformaciones de Lorentz como transformaciones internas y permiten un procedimiento gauge natural (ver Utiyama 1956), es menos obvio, como ya se ha visto en los anteriores capítulos tratar con las traslaciones internas y sin embargo para construir la teoría gauge del grupo de Poincaré es necesario introducirlas.

Desde el punto de vista de fibrados esto se consigue pasando del fibrado L al $\hat{P}$ (el fibrado principal, <u>con grupo de estructura Poincaré</u>). De esta forma se puede asociar con el Lagrangiano D8-(3), el Lagrangiano afín (ver Hennig-Nitsch (1981))

$$\hat{L}_m(\overset{\sigma}{\Phi}, d\overset{\sigma}{\Phi}, d\overset{\sigma}{y}) = \hat{\mathcal{L}}_m \left(\overset{\sigma}{\Phi}, \left[(\partial_i \overset{\sigma}{y}{}^{\alpha})^{-1} \right]^{j}_{\gamma} \partial_j \overset{\sigma}{\Phi} \right) \det \left(\partial_i \overset{\sigma}{y}{}^{\alpha} \right) d^4x \qquad D8-(6)$$

Donde σ es ahora una sección de $\hat{P}$ vía la inmersión canónica, (ver Kobayashi, Nomizu (1963))

$$\alpha : L \hookrightarrow \hat{P} \qquad D8-(7)$$

determinada por la sección nula del fibrado tangente. El campo material Φ se extiende trivialmente a $\hat{P}$ y debe por tanto ser invariante bajo L traslaciones internas, mientras que $y \in F_0(\hat{P}, R^4)$, es de tipo (id, R^4), $R^4 \simeq IO(3,1,R) / O(3,1,R)$

Bajo la acción por la derecha de IO(3,1,R) (grupo estructural) sobre $\hat{P}$ se obtiene (ver apéndice 4)

$$\hat{R}^{*}_{(\Lambda,t)} \, y^{\alpha} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta} \; y^{\beta} - t^{\alpha} \qquad D8-(8)$$

$$\hat{R}^{*}_{(\Lambda,t)} \, \Phi = \rho(\Lambda^{-1}) \, \Phi \qquad D8-(9)$$

La invariancia de L_m bajo transformaciones globales Poincaré implica la invariancia de $\hat{L}_m$ bajo transformaciones globales Poincaré <u>internas</u>.

Al aplicar el <u>truco gauge</u>, para restaurar la invariancia de $\hat{L}_m$ bajo transformaciones de IO(3,1) <u>locales internas</u> habrá que efectuar los acoplos mínimos siguientes

$$d\overset{\sigma}{\Phi} \longrightarrow \hat{D}\overset{\sigma}{\Phi} \qquad D8-(10)$$

$$d\overset{\sigma}{y} \longrightarrow \hat{D}\overset{\sigma}{y} \qquad D8-(11)$$

verificándose

$$\hat{D}\Phi = d\Phi + \hat{\omega} \wedge \Phi \qquad D8-(12)$$

$$\hat{D} y^{\alpha} = dy^{\alpha} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta} \, y^{\beta} + \hat{b}^{\alpha} \qquad D8-(13)$$

$\hat{D}$ es la derivada covariante exterior con respecto a una conexión afín generalizada (ó conexión de "Cartan", ver Kobayashi Nomizu, 1963)

$$\hat{\omega} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta} & \hat{b}^{\alpha} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \qquad D8-(14)$$

El Lagrangiano material invariante localmente tendrá la expresión

$$\hat{L}_m = \hat{L}_m (\tilde{\Phi}, \hat{D}\tilde{\Phi}, \hat{D}\tilde{y}) \qquad D8-(15)$$

Por otra parte, las componentes de $\hat{D}y$ deben ser linealmente independientes

$$\text{rango}(\hat{D}y) = \dim M = 4 \qquad D8-(16)$$

ya que es la condición de existencia de la forma de soldadura sobre L (ver Giachetti, Ricci, Sorace 1981).

Bajo la reducción α, podemos descomponer a $\hat{\omega}$ mediante el pull-back α^*

$$\alpha^* \hat{\omega} = \underset{ALO(3,1)}{\underset{\Cap}{\tilde{\omega}}} + \underset{ALT_4}{\underset{\Cap}{\tilde{b}}} \qquad D8-(17).$$

Donde (ver Kobayashi-Nomizu 1963), $\tilde{\omega}$ es una conexión sobre L y $\tilde{b}$ es una 1-forma tensorial de tipo (ad, ALT_4) sobre L y tiene la expresión

$$\tilde{b} = \alpha^* \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D8-(18)$$

donde b es una 1-forma de tipo (id, R_4) sobre el fibrado Lorentz L.

Si θ es la forma canónica del fibrado de las referencias lineales ortonormales $O\mathcal{G}M$, existe un isomorfismo de fibrados tal que

$$\beta : L \to \beta(L) \subset O\mathcal{G}M \qquad D8-(19)$$

Y

$$b = \beta^* \theta \qquad D8-(20)$$

Asimismo teniendo en cuenta la ley de transformación de $y \in F_0(\hat{P}, R^4 \times IO(3,1)/O(3,1))$ bajo la acción por la derecha de IO(3,1,R) sobre $\hat{P}$ (ver D8-(8))

$$\hat{R}^*_{(\Lambda,t)} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D8-(21)$$

Existe un gauge en el que se verifica

$$y \circ \alpha = 0 \qquad D8-(22)$$

Y por tanto

$$\alpha^* \hat{D}y = b \qquad D8-(23)$$

Y por consiguiente la condición D8-(16) es equivalente a

$$\text{rango}\, b = \dim M = 4 \qquad D8-(24)$$

Con este esquema se pueden construir todas las formas diferenciales sobre $\hat{P}$ en términos de $\hat{\omega}$ y $\hat{D}y$. Por ejemplo la forma de curvatura de

$$\hat{\omega} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta} & \hat{b}_{\alpha} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \qquad D8-(25)$$

es

$$\hat{\Omega} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} & \hat{\Omega}^{\alpha} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = d\hat{\omega} + \hat{\omega} \wedge \hat{\omega} \qquad D8-(26)$$

donde

$$\hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} = d\hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\gamma} \wedge \hat{\omega}^{\gamma}{}_{\beta} \quad ; \hat{\Omega}^{\alpha} = d\hat{b}^{\alpha} + \hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \hat{b}^{\alpha} \qquad D8-(27-28)$$

Sin embargo como ya se ha visto en el capítulo de la discusión de la teoría Poincaré, $\hat{\Omega}^{\alpha}$ no es invariante bajo traslaciones, por lo que la curvatura y la torsión sobre $\hat{P}$ vienen definidas a través de las expresiones

$$\hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2} \hat{R}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \hat{D}y^{\gamma} \wedge \hat{D}y^{\delta} \qquad D8-(29)$$

$$\Theta^{\alpha} = \frac{1}{2} Q^{\alpha}{}_{\gamma\beta} \hat{D}y^{\beta} \wedge \hat{D}y^{\gamma} \qquad D8-(30)$$

A través de una sección (local) σ de $\hat{P}$ se obtendrán los mismos objetos en M y

$$\sigma^{*}\hat{D}y = h \qquad D8\text{-}(31).$$

es la tetrada.

La anterior construcción de la teoría en la cual "y" actua como un campo de Higgs, nos parece la mas acertada, ya que partiendo de la invariancia interna Poincaré local se obtiene una teoría con invariancia interna Lorentz local.

De esta forma el grupo de Poincaré es el grupo gauge de la gravitación (construida en un espacio de Cartan) de una manera más apropiada que la efectuada en los anteriores capítulos.

Sin embargo las ecuaciones de campo e identidades son las mismas que las ya obtenidas anteriormente en los capítulos anteriores ya que hemos llegado a ellas imponiendo invariancia Lorentz local y covariancia bajo difeomorfismos.

Finalmente hay que notar que a través

$$(\alpha \circ \beta^{-1})^{*} \qquad D8\text{-}(32)$$

toda la teoría se puede construir en $O^{g}M$ y a través de σ^{*} en M.

ii) Límites

La teoría gauge de Poincaré rota admite dos límites

1) $\Theta = 0$. La torsión es cero, con lo cual la conexión en $O^{g}M$, $\omega = (\beta^{-1})^{*}\tilde{\omega}$ esta univocamente determinada. La base M es un espacio pseudo-Riemanniano.

2) $\hat{\Omega} = 0$ La curvatura Cartan se anula. En base al teorema de conexión de curvatura nula (apéndice 4) existe una sección local de $O^{g}M$

$$\begin{aligned} \sigma : M \supset U &\longrightarrow O^{g}M \\ x &\longrightarrow (x, h_i) \end{aligned} \qquad D8\text{-}(33)$$

tal que $\overset{\sigma}{\omega} = \sigma^{*}\omega = 0$ $\qquad D8\text{-}(34)$

En estas secciones locales la torsión y el objeto de no-holonomía de h coinciden salvo un signo

$$\overset{\sigma}{\Theta} = d\overset{\sigma}{\theta} = dh$$

La geometría de M es pues de un espacio Weitzenböck ó de teleparalelismo Cartan.

A este espacio tambien se llega interpretando "a la Thirring" la teoría del grupo de traslaciones T_4, como hemos visto.

iii) Ecuaciones de campo e identidades

Hemos denominado esta forma de construir la teoría de Poincaré rota porque partiendo de la invariancia interna Poincaré global (y covariancia bajo difeomorfismos) se llega finalmente a una teoría invariante local Lorentz (y covariante bajo difeos).

Las ecuaciones de campo son por tanto las D5-(81) y D5-(83) a las que denominamos de Einstein y Cartan respectivamente sobre M

$$^{*}EI_{\alpha} = \hat{D}\left(\frac{\partial L_G}{\partial \Theta^{\alpha}}\right) + \frac{\partial L_G}{\partial h^{\alpha}} = {}^{*}t^{m}{}_{\alpha} \qquad D8\text{-}(35)$$

$$^{*}CA_{\alpha} = \hat{D}\left(\frac{\partial L_G}{\partial \hat{\Omega}^{\alpha\beta}}\right) + 2\, h_{[\beta} \wedge \frac{\partial L_G}{\partial \Theta^{|\alpha]}} = {}^{*}S_{\alpha\beta} \qquad D8\text{-}(36)$$

Las identidades obtenidas imponiendo la invariancia Lorentz local y la covariancia bajo difeomorfismos de L_G eran D5-(90) D5-(98)

$$\hat{D}{}^*CA_{\alpha\beta} = 2\, h_{[\alpha} \wedge {}^*EI_{\beta]} \qquad D8-(37)$$

$$\hat{D}{}^*EI_\alpha = Q^{\gamma\cdot\cdot}{}_{\alpha\beta}\, h^\beta \wedge {}^*EI_\gamma - \frac{1}{2}\hat{R}^{\beta\cdot\cdot\cdot}{}_{\gamma\alpha\delta}\, h^\delta \wedge {}^*CA_\beta{}^{\cdot\gamma}. \qquad D8-(38)$$

Finalmente, las identidades que se obtienen imponiendo invariancia local Lorentz y covariancia bajo difeomorfismos de L_m eran D5-(89) y D5-(95)

$$\hat{D}{}^*S_{\alpha\beta} = 2\, h_{[\alpha} \wedge {}^*t^m_{\beta]} \qquad D8-(39)$$

$$\hat{D}{}^*t^m_\alpha = Q^{\beta\cdot\cdot}{}_{\alpha\gamma}\, h^\gamma \wedge {}^*t^m_\beta - \frac{1}{2}\hat{R}^{\gamma}{}_{\beta\alpha\delta}\, h^\delta \wedge {}^*S_\gamma{}^{\cdot\beta}. \qquad D8-(40)$$

En las ecuaciones de campo D8-(35) y D8-(36) son válidas independientemente de cual sea la forma especifica de Lagrangiano gravitatorio que se elija. Esta elección no esta determinada por el método gauge. En una sección posterior se exponen todos los Lagrangianos posibles de la teoría gauge de IO(3,1,R) rota, covariante bajo difeomorfismos é invariante local O(3,1,R).

iv) Comentarios sobre las ecuaciones de campo generales

a) Como ya se ha comentado las ecuaciones D8-(35) y D8-(36) son análogas a las ecuaciones de Yang-Mills excepto por los términos $\partial L_G/\partial h^\alpha$ y $2h_{[\beta} \wedge \partial L_G/\partial \Theta^{|\alpha]}$ que Hehl (1980) y Hehl y col. (1980) interpretan como las 3-formas de energía-momento y de espín del campo gravitatorio. En estas ecuaciones de campo el espín de los campos materiales es la fuente de la curvatura y la energía-momento la fuente de la torsión (al revés que en la teoría Einsteiniana).

Por ello estos autores sugieren que ya que el espín es nulo en el mundo macroscópico entonces también será nula la curvatura Cartan. Con lo cual toman un espacio de teleparalelismo como arena geométrica macroscópica. Sin embargo, el hacer cero el espín, no fuerza en las ecuaciones de campo a que la curvatura sea cero.

Es mas, si hacemos el espín y la curvatura Cartan simultaneamente cero en las ecuaciones de campo llegamos a una contradicción ya que entonces la torsión y la energía-momento deben ser cero.

Veamos usando las ecuaciones de campo

$$\hat{D}\left(\frac{\partial L_G}{\partial \Theta^\alpha}\right) + \frac{\partial L_G}{\partial h^\alpha} = {}^*t^m_\alpha \qquad D8-(37)$$

$$\hat{D}\left(\frac{\partial L_G}{\partial \hat{\Omega}^{\alpha\beta}}\right) + h_{[\beta} \wedge \frac{\partial L_G}{\partial \Theta^{|\alpha]}} = {}^*S_{\alpha\beta} \qquad D8-(39)$$

En la segunda ecuación

$${}^*S_{\alpha\beta} = \hat{\Omega}_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \Theta^\alpha = 0 \qquad D8-(40)$$

Y en la primera ecuación

$$\Theta^\alpha = 0 \Rightarrow {}^*t^m_\alpha = 0 \qquad D8-(41)$$

Por tanto, en contra de la opinión de Hehl, una teoría de teleparalelismo solo puede describir a la gravedad macroscópica, si su Lagrangiano da las mismas ecuaciones que las de Relatividad General, pero en este caso es mas económico trabajar desde el principio en un espacio V_4 semiriemanniano, es decir imponer la ligadura $\Theta = 0$, de torsión nula.

b) $\ {}^{*}S_{\alpha\beta}=0$. El espin es cero $\quad D8-(42)$

En este caso la ecuación D8-(39) requiere que el tensor de energía-momento canónico sea simétrico.

$$t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha} \qquad D8-(43)$$

y la ecuación D8-(40) queda reducida a

$$\hat{D}\,{}^{*}t_{\alpha}^{m} = Q^{\beta}{}_{\cdot\cdot\alpha\gamma}\, h^{\gamma} \wedge {}^{*}t_{\beta}^{m} \qquad D8-(44)$$

Y pasando a la derivada covariante exterior Levi-Civita-christoffel se obtiene

$$\tilde{D}\,{}^{*}t_{\alpha}^{m} = (Q^{\beta}{}_{\cdot\cdot\alpha\gamma} - K^{\beta}{}_{\cdot\cdot\alpha\gamma})\, h^{\gamma} \wedge {}^{*}t_{\beta}^{m} \qquad D8-(45)$$

y como $Q^{\beta}{}_{\cdot\cdot\alpha\gamma} = 2\, K^{\beta}{}_{[\alpha\gamma]}$ (ver apéndice 1)

se obtiene que

$$\tilde{D}\,{}^{*}t_{\alpha}^{m} = (2\, K^{\beta}{}_{\cdot[\alpha\gamma]} - K^{\beta}{}_{\cdot\alpha\cdot\gamma})\, h^{\gamma} \wedge {}^{*}t_{\beta}^{m} \qquad D8-(46)$$

$$= -K^{\beta}{}_{\cdot\gamma\alpha}\, h^{\gamma} \wedge {}^{*}t_{\beta}^{m} = 0 \qquad D8-(47)$$

ya que $K^{(\beta}{}_{\cdot\gamma)\alpha} = 0$

y $\tilde{D}\, t_{i} = 0 \Rightarrow \tilde{\nabla}_{j}\, t^{ij} = 0 \qquad D8-(48)$

que es la ley de conservación de Relatividad General.

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento para materia sin espin no son influenciadas por la torsión. Esto sugiere otra vez que $\Theta^{\alpha}=0$, es el límite macroscópico de la teoría Poincaré y no el límite de teleparalelismo.

"Solo los campos de Dirac de espin $1/2$ "sienten" la parte totalmente antisimétrica de la torsión $Q_{[\alpha\beta\gamma]}$ y los campos Yang-Mills (electromagnético, fuerte) tampoco "sienten" torsión". Esta sentencia constituye la filosofía básica en la interpretación de Hehl y col., sin embargo, veremos que tambien sè pueden describir mediante Relatividad General.

9) LIMITES DE LA TEORIA POINCARE ROTA

i) Introducción

Vamos a considerar dos límites del espacio de Cartan. El primer límite consiste en un espacio V_4 pseudo-riemanniano al cual se puede llegar por dos métodos. El primero consiste en aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange (Lanczos) al Lagrangiano gravitatorio y el segundo consiste en anular la torsión en las ecuaciones de campo. Hehl y col. (1980-a-b).

El segundo límite consiste en obtener a partir del espacio de Cartan un espacio de teleparalelismo Cartan. En este límite los dos métodos anteriores coinciden (kopczynski, 1982) y además existe otro posible método que consiste en tomar la torsión en la forma $\Theta^{\alpha} = dh^{\alpha}$ y la curvatura Cartan cero en el Lagrangiano gravitatorio.

El segundo límite ha sido el favorecido por Hehl y col. (1980-a-b, 1981) para describir a la gravedad macroscópica. Por el contrario nosotros pensamos que es el realmente el primer límite el único que puede describir a la interacción gravitatoria en el macrocosmos sin conducir a contradicciones.

ii) Ligadura de torsión nula (V_4)

a) Método de los multiplicadores de Lagrange (Lanczos) (1949)

El Lagrangiano gravitatorio tendrá la expresión en M

$$L_G(h^\alpha, \textcircled{H}^\alpha, \hat{\Omega}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}, \lambda_i) = L'_G(h^\alpha, \textcircled{H}^\alpha, \hat{\Omega}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}) + \lambda_\alpha \wedge \textcircled{H}^\alpha \qquad \text{D9-(1)}$$

donde λ_i es una 2-forma, que constituye el multiplicador de Lagrange.

Las ecuaciones de campo toman la expresión

$$\textcircled{H}^\alpha = 0 \quad (\text{espacio } V_4). \qquad \text{D9-(2)}$$

$$*EI'_\alpha = *t^m_\alpha + \hat{D}\lambda_\alpha \qquad \text{D9-(3)}$$

$$*CA'_{\alpha\beta} = *S_{\alpha\beta} - 2\lambda_{[\alpha} \wedge h_{\beta]} \qquad \text{D9-(4)}$$

con $\lambda_\alpha = \frac{1}{2}\lambda_{\alpha\beta\gamma} * h^{\beta\gamma}$ tales que $\lambda_{\alpha\beta\gamma} = \lambda_{\alpha[\beta\gamma]}$
teniendo en cuenta que D9-(5)

$$*CA'_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma} * h^\gamma \qquad \text{D9-(6)}$$

$$*EI_\alpha = E_{\alpha\beta} * h^\beta \qquad \text{D9-(7)}$$

$$*S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta\gamma} * h^\gamma \qquad \text{D9-(8)}$$

$$*t^m_\alpha = t_{\alpha\beta} * h^\beta \qquad \text{D9-(9)}$$

la última ecuación de campo toma la expresión

$$2\lambda_{[\alpha\beta]\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma} - S_{\alpha\beta\gamma} \qquad \text{D9-(10)}$$

y por tanto

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(C_{\alpha\beta\gamma} + C_{\gamma\alpha\beta} - C_{\beta\gamma\alpha} - S_{\alpha\beta\gamma} - S_{\gamma\alpha\beta} + S_{\beta\gamma\alpha}\right) \qquad \text{D9-(11)}$$

Si sustituimos esta ecuación de $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ en la ecuación de campo D8-(51), teniendo en cuenta D8-(50), se obtiene

$$*EI_\alpha = *T_\alpha + \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^\beta\left(C_{\alpha\beta\gamma} + C_{\gamma\alpha\beta} - C_{\beta\gamma\alpha}\right) * h^\beta \qquad \text{D9-(12)}$$

donde $$*T_\alpha = *t^m_\alpha - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^\beta\left(S_{\alpha\beta\gamma} + S_{\gamma\alpha\beta} - S_{\beta\gamma\alpha}\right) * h^\beta \qquad \text{D9-(13)}$$

$*T_\alpha$ es la 3-forma de energía-momento simétrico, que es la fuente en Relatividad General.

Tomando como $L_G = -\frac{s}{2l^2}\hat{R}\varepsilon$, $C_{\alpha\beta\gamma}$ se anula y las ecuaciones D8-(60) son las ecuaciones de Relatividad General en un espacio V_4, semi-riemanniano.

b) Torsión nula en las ecuaciones de campo.

Es importante hacer notar que todos los trabajos que aparecen en la literatura no efectuan este tratamiento para el límite de $\textcircled{H} = 0$, sino que simplemente imponen $\textcircled{H} = 0$ en las ecuaciones de campo.

Por ejemplo, Hehl y col. (1980-1981) para obtener Relatividad General, parten del Lagrangiano de Einstein-Cartan y de sus correspondientes ecuaciones de campo que en componentes (vease Capítulo B, ó sección D-12) son las siguientes

$$\hat{G}^{i\cdot}_{\cdot\alpha} = t^{\cdot i}_{\alpha\cdot}\left(\frac{8\pi l^2}{\hbar c}\right) \qquad \text{D9-(14)}$$

la ecuación de Einstein ($\hat{G}^{i\cdot}_{\cdot\alpha}$ es el tensor de Einstein un espacio de Cartan)

$$Q^{i\beta\cdot}_{\cdot\cdot\alpha} + Q^{\delta\cdot[\beta}_{\cdot\delta}\, h_{\alpha]}{}^{i} = S^{\beta\cdot i}_{\cdot\alpha\cdot}\left(\frac{8\pi l^2}{\hbar c}\right) \qquad \text{D9-(15)}$$

la ecuación de Cartan.

Hehl y col. imponen $(S^{\beta\cdot i}_{\cdot\alpha\cdot} = 0)$ densidad de espin cero como límite macroscópico, ello implica por la ecuación de Cartan que la torsión es cero y por lo tanto la ecuación de Einstein se reduce a las ecuaciones de Einstein-Hilbert (Relatividad General) con $t^{ij} = T^{ij}$ el tensor energía-momento canónico igual al métrico. Esto sucede por llevar al límite que los campos con espín "sienten" torsión necesariamente.

iii) Ligadura de curvatura Cartan nula (T_4)

Existen dos formas de efectuarlo:

1) Dentro del esquema de la teoría Poincaré rota, la teoría de teleparalelismo debe ser basada en el Lagrangiano 4-forma siguiente, (Kopczynski 1982)

$$L = L_G + L_m = L'_G + \lambda_{\alpha\beta} \wedge \hat{\Omega}^{\alpha\beta} + L_m \qquad \text{D9-(16)}$$

donde $\lambda_{\alpha\beta}$ son las 2-formas que constituyen los multiplicadores de Lagrange.

Las ecuaciones de campo toman la expresión

$$\hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} = 0 \qquad (\text{espacio } T_4) \qquad \text{D9-(17)}$$

$$*EI'_{\alpha} = *t^{m}_{\alpha} \qquad \text{D9-(18)}$$

$$*CA'_{\alpha\beta} = *S_{\alpha\beta} - \hat{D}\lambda_{\alpha\beta} \qquad \text{D9-(19)}$$

Con las identidades D8-(37) y D8-(39) se demuestra que la última ecuación es localmente equivalente a

$$\hat{D}\left(*CA'_{\alpha\beta} - *S_{\alpha\beta}\right) = 0 \qquad \text{D9-(20)}$$

La cual es la parte antisimétrica de D9-(18)

Por tanto la unica ecuación de la teoría es la D9-(18)

2) Como segundo método, a esta ecuación se puede llegar mas directamente tomando secciones locales de $O^{g}\mathcal{M}$, tales que

$$\tilde{\omega} = \sigma^{*}\omega = 0 \qquad \text{D9-(21)}$$

por tanto

$$\tilde{\textcircled{H}} = d\tilde{\theta} = dh \qquad \text{D9-(22)}$$

y variando respecto de h, se obtiene la ecuación D8-(66).

Esta es la forma que se ha utilizado al exponer la teoría gauge de T_4, interpretándola "à la Thirring". (Einstein (1928))

Sin embargo, el procedimiento empleado por Baekler (1980) de efectuar el límite de teleparalelismo imponiendo $\alpha \to 0$ en la ecuación de campo de Cartan, nos parece totalmente inconsistente.

Exhibiendo las constantes de acoplamiento ℓ^2 y α^2 la primera la longitud de Planck al cuadrado y la segunda una constante de acoplo adimensional, las ecuaciones de campo D8-(37) y D8-(38) toman la forma

$$\hat{D}\left(\frac{\partial L_G}{\partial \textcircled{H}^{\alpha}}\right) + \ell^2 \frac{\partial L_G}{\partial h^{\alpha}} = \ell^2 * t^{m}_{\alpha} \qquad \text{D9-(23)}$$

$$\hat{D}\left(\frac{\partial L_G}{\partial \hat{\Omega}^{\alpha\beta}}\right) + \frac{\alpha^2}{\ell^2} h_{[\beta} \wedge \frac{\partial L_G}{\partial \textcircled{H}^{\alpha]}} = \alpha^2 * S_{\alpha\beta} \qquad \text{D9-(24)}$$

Baekler (1980) toma $\alpha \to 0$ como límite de teleparalelismo lo que implica que $\hat{\Omega}^{\alpha\beta} = 0$, obviando aparentemente la contradicción lógica que se había encontrado en las ecuaciones de campo en los comentarios, $(*S_{\alpha\beta} = \hat{\Omega}_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \textcircled{H}^{\alpha} = 0 \Rightarrow$ vía ecuación de Einstein $\Rightarrow *t^{m}_{\alpha} = 0)$.

Sin embargo, $\alpha \to 0$ no tiene ningún sentido, ya que aparece solo en los Lagrangianos cuadraticos en curvatura que en ese caso "dominarían" a los cuadráticos en torsión (teleparalelismo) cuya constante de acoplo es $1/\ell^2$.

10) LAGRANGIANOS GRAVITATORIOS U_4

i) Lagrangiano gravitatorio general

El Lagrangiano gravitatorio tendrá la dependencia explícita siguiente $L_G(h, \Theta, \hat\Omega)$.

$$L_{Tot}(h, \Phi, \hat D\Phi, \Theta, \hat\Omega) = L_m(h, \Phi, \hat D\Phi) + L_G(h, \Theta, \hat\Omega) \qquad D10\text{-}(1)$$

El Lagrangiano 4-forma gravitatorio invariante Lorentz local general polinomial, es una combinación lineal del término lineal de la teoría Einstein-Cartan, más terminos cuadráticos en curvatura Cartan y en torsión, (Sería también interesante considerar en la teoría Poincaré los Lagrangianos no-polinómicos que Kerner (1982) usa en un espacio de Riemann)

$$L_G = \hat L + \sum_{N=1}^{6} a_N C_N + \sum_{N=1}^{3} b_N T_N \qquad D10\text{-}(2)$$

donde $\hat L$ es el término lineal en curvatura escalar Cartan y C_N y T_N son los términos cuadráticos en curvatura Cartan y en torsión.

$$\hat L = \hat\Omega_{\alpha\beta} \wedge {}^*h^{\alpha\beta} = \hat R\,\varepsilon \qquad D10\text{-}(3)$$

Los posibles términos cuadráticos en curvatura Cartan son

$$C_1 = -(\hat\Omega_{\alpha\beta}\wedge{}^*h^{\alpha\beta})\wedge{}^*(\hat\Omega_{\gamma\delta}\wedge{}^*h^{\gamma\delta}) \qquad D10\text{-}(4)$$

$$C_2 = -\hat\Omega^{\alpha}{}_{\cdot\gamma}\wedge{}^*h_{\alpha\delta}\wedge{}^*(\hat\Omega^{\beta\gamma}\wedge{}^*h_{\beta}{}^{\cdot\delta}) \qquad D10\text{-}(5)$$

$$C_3 = \hat\Omega_{\alpha\beta}\wedge{}^*\hat\Omega^{\alpha\beta} \qquad D10\text{-}(6)$$

$$C_4 = -\hat\Omega^{\alpha}{}_{\cdot\gamma}\wedge{}^*h_{\alpha\delta}\wedge{}^*(\hat\Omega^{\beta\delta}\wedge h_{\beta}{}^{\cdot\gamma}) \qquad D10\text{-}(7)$$

$$C_5 = -(\hat\Omega_{\alpha\beta}\wedge{}^*h_{\gamma\delta})\wedge{}^*(\hat\Omega^{\gamma\delta}\wedge{}^*h^{\alpha\beta}) \qquad D10\text{-}(8)$$

$$C_6 = -(h_\gamma\wedge{}^*\hat\Omega_{\alpha\beta})\wedge{}^*(h^{\beta}\wedge{}^*\hat\Omega^{\alpha\gamma}) \qquad D10\text{-}(9)$$

Y sustituyendo la expresión

$$\hat\Omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\hat R^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot\gamma\delta}\, h^\gamma\wedge h^\delta \qquad D10\text{-}(10)$$

se obtienen

$$C_1 = \hat R\hat R\,\varepsilon \qquad D10\text{-}(11)$$

$$C_2 = \hat R_{\gamma\delta}\hat R^{\gamma\delta}\,\varepsilon \qquad D10\text{-}(12)$$

$$C_3 = \frac{1}{2}\hat R_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat R^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\varepsilon \qquad D10\text{-}(13)$$

$$C_4 = \hat R^{\cdot\cdot}_{\gamma\delta}\hat R^{\delta\gamma}_{\cdot\cdot}\,\varepsilon \qquad D10\text{-}(14)$$

$$C_5 = \hat R_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat R^{\gamma\delta\alpha\beta}\,\varepsilon \qquad D10\text{-}(15)$$

$$C_6 = \hat R_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat R^{\alpha\gamma\beta\delta}\,\varepsilon \qquad D10\text{-}(16)$$

De los seis términos cuadráticos en curvatura Cartan, solamente hay cinco independientes, ya que la variación de la forma de Euler en P que relaciona a C_1, C_4 y C_5

$$E(\Omega) = \frac{1}{32\pi^2}\epsilon_{ijkl}\hat\Omega^{ij}\wedge\hat\Omega^{kl} = \qquad D10\text{-}(17)$$

$$= \frac{\varepsilon}{16\pi^2}\left(\frac{1}{2}\hat R^2 - 2\hat R_{\alpha\beta}\hat R^{\beta\alpha} + \frac{1}{2}\hat R^{\alpha\beta\gamma\delta}\hat R_{\gamma\delta\alpha\beta}\right)$$

no tiene influencia sobre las ecuaciones de campo.

Por otra parte los términos cuadráticos en torsión son ó bien la generalización de los invariantes Weinzenböck

$$T_1 = \Theta^\alpha \wedge {}^*\Theta_\alpha = \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon \qquad \text{D10-(18)}$$

$$T_2 = \Theta^\alpha \wedge {}^*\Theta_\alpha - \Theta^\alpha \wedge h_\alpha \wedge {}^*(\Theta^\beta \wedge h_\beta) = Q^{\alpha\beta\gamma} Q_{\beta\alpha\gamma} \varepsilon \qquad \text{D10-(19)}$$

$$T_3 = \Theta^\alpha \wedge {}^*\Theta_\alpha - \Theta^\alpha \wedge h^\beta \wedge {}^*(\Theta_\beta \wedge h_\alpha) = Q^{\alpha}{}_{\cdot\,\alpha\gamma}\, Q^{\beta}{}_{\beta}{}^{\gamma}\, \varepsilon = Q_\gamma Q^\gamma \varepsilon \qquad \text{D10(20)}$$

ó de los L_i del espacio con teleparalelismo

$$T'_1 = \Theta^\alpha \wedge {}^*\Theta_\alpha = \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon \qquad \text{D10-(21)}$$

$$T'_2 = \frac{1}{2}\Theta^\alpha \wedge h_\alpha \wedge {}^*(\Theta^\beta \wedge h_\beta) = \frac{3}{4} Q_{[\alpha\beta\gamma]} Q^{[\alpha\beta\gamma]} \varepsilon \qquad \text{D10-(22)}$$

$$T'_3 = \Theta^\alpha \wedge h^\beta \wedge {}^*(\Theta_\beta \wedge h_\alpha) = \frac{1}{2}\left(Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\beta\alpha\gamma} - 2 Q_\gamma Q^\gamma\right) \varepsilon \qquad \text{D10-(23)}$$

Debilitando la invariancia local de O(3,1,R) a la componente conexa $SO^{\uparrow}(3,1,R)$, son tambien posibles términos que violan la paridad. Aunque no los consideraremos en el Lagrangiano general, estos son los siguientes:

$$V_1 = \Theta^\alpha \wedge h_\alpha \wedge {}^*(h^\beta \wedge {}^*\Theta_\beta) = -\frac{1}{2} Q_\gamma\, \varepsilon^{\gamma\delta\alpha\beta} Q_{[\delta\alpha\beta]} \qquad (24)$$

$$V_2 = \Theta^\alpha \wedge \Theta_\alpha = \hat{\Omega}_{\alpha\beta} \wedge h^\alpha \wedge h^\beta + \text{forma exacta} \qquad (25)$$

$$V_3 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \hat{\Omega}^{\alpha\beta} \wedge {}^*\hat{\Omega}^{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{R}^{\alpha\beta\mu\nu} \hat{R}^{\gamma\delta}{}_{\mu\nu}\, \varepsilon \qquad (26)$$

$$V_4 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{R}^{\alpha\beta\mu\nu} \hat{R}_{\mu\nu}{}^{\gamma\delta} \varepsilon \qquad \text{D10-(27)}$$

$$V_5 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{R}^{\alpha\mu\beta\nu} \hat{R}^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta}{}_{\nu}\, \varepsilon \qquad \text{D10-(28)}$$

$$V_6 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{R}^{\alpha\mu\beta\nu} \hat{R}^{\gamma\delta}{}_{\mu\nu}\, \varepsilon \qquad \text{D10-(29)}$$

$$V_7 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{R}^{\mu\nu\alpha\beta} \hat{R}^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta}{}_{\nu}\, \varepsilon \qquad \text{D10-(30)}$$

Además, en un espacio de dimensión 4 se tienen 2 polinomios de Pontrajin

$$P_{1/2}(\hat{\Omega}) = -\frac{1}{2} \hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\alpha} \qquad \text{D10-(31)}$$

$$P_1(\hat{\Omega}) = \frac{1}{8\pi^2}\left(\hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\alpha} \wedge \hat{\Omega}^{\beta}{}_{\beta} - \hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \hat{\Omega}^{\beta}{}_{\alpha}\right) \qquad \text{D10-(31)}$$

en el caso de la teoría gauge del grupo de Lorentz, como la arena geométrica es un espacio de Cartan, se obtiene

$$\hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\alpha} = 0 \Rightarrow P_{1/2}(\hat{\Omega}) = 0 \qquad \text{D10-(32)}$$

$$P_1(\hat{\Omega}) = -\frac{1}{8\pi^2} \hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \hat{\Omega}^{\beta}{}_{\alpha} = -\frac{1}{32\pi^2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{R}^{\mu\nu\alpha\beta} \hat{R}_{\mu\nu}{}^{\gamma\delta} \varepsilon \qquad \text{D10-(33)}$$

Sin embargo a $P_1(\hat{\Omega})$ le ocurre lo mismo que a la forma de Euler, i.e., no contribuye a las ecuaciones de campo .

ii) Diversos Lagrangianos específicos

Como el término lineal en curvatura Cartan tiene la expresión

$$2L_{EC} = \hat{\Omega}_{\alpha\beta}\wedge {}^{*}h^{\alpha\beta} = \hat{R}\varepsilon \qquad \text{D10-(34)}$$

y

$$\hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\cdot\beta} = \tilde{\Omega}^{\alpha}{}_{\cdot\beta} - \tilde{D}K^{\alpha}{}_{\cdot\beta} + K^{\alpha}{}_{\cdot\gamma}\wedge K^{\gamma}{}_{\cdot\beta} \qquad \text{D10-(35)}$$

ya que $\hat{\omega}^{\alpha}{}_{\beta} = \tilde{\omega}^{\alpha}{}_{\beta} - K^{\alpha}{}_{\cdot\beta}$ donde $K^{\alpha}{}_{\beta}$ es la 1-forma de contorsión, entonces se verifica

$$2L_{EC} = 2L_{EH} + K_{\alpha\gamma}\wedge K^{\gamma}{}_{\cdot\beta}\wedge {}^{*}h^{\alpha\beta} - d(K_{\alpha\beta}\wedge {}^{*}h^{\alpha\beta})$$

$$= L_{EH} + \Theta^{\alpha}\wedge h^{\beta}\wedge {}^{*}(\Theta_{\beta}\wedge h_{\alpha}) -$$

$$-\frac{1}{2}\Theta^{\alpha}\wedge h_{\alpha}\wedge {}^{*}(\Theta^{\beta}\wedge h_{\beta}) + d(2h_{\alpha}\wedge {}^{*}\Theta^{\alpha}) \qquad \text{D10-(36)}$$

y por tanto

$$2L_{EC} = \tilde{R}\varepsilon + T_1 - T_3 - T_2' + \text{forma exacta} \qquad \text{D10-(37)}$$

Por consiguiente tambien podemos considerar a $\tilde{R}\varepsilon$, el Lagrangiano de Einstein-Hilbert como un término más. De esta forma son posibles las siguientes teorías gravitatorias, ya aparecidas en la literatura.

1) La teoría de Einstein-Cartan (1973)

Su Lagrangiano gravitatorio es como ya se ha visto

$$L_{EC} = \frac{-s}{2\ell^{2}}\hat{\Omega}_{\alpha\beta}\wedge {}^{*}h^{\alpha\beta} = \frac{-s}{2\ell^{2}}{}^{*}\hat{R} \qquad \text{D10-(38)}$$

con $\ell^{2} = 8\pi G$, $\hbar = c = 1$

2) La teoría de Yang (1974)

$$L_{Y} = \frac{1}{\alpha^{2}}\hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\cdot\beta}\wedge {}^{*}\Omega_{\alpha}{}^{\cdot\beta} = \frac{1}{2\alpha^{2}}\hat{R}^{\alpha}{}_{\cdot\beta\gamma\delta}\hat{R}_{\alpha}{}^{\cdot\beta\gamma\delta}\varepsilon \qquad \text{D10-(39)}$$

Obtenida a través de una teoría gauge de $O(3,1)$.

3) La teoría Fairchild (1977).

$$L_{F} = -\frac{s}{2\ell^{2}}\hat{\Omega}_{\alpha\beta}\wedge {}^{*}h^{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha^{2}}\hat{\Omega}^{\alpha\beta}\wedge {}^{*}\hat{\Omega}_{\alpha\beta}$$

$$= -\frac{s}{2\ell^{2}}\hat{R}\varepsilon + \frac{1}{2\alpha^{2}}\hat{R}^{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon \qquad \text{D10-(40)}$$

4) La teoría de Hehl-Ne'eman-Nitsch-Von der Heyde (1978) (1980).

$$L_{HN^{2}V} = \frac{s}{\ell^{2}}\Theta^{\alpha}\wedge h_{\beta}\wedge {}^{*}(\Theta^{\beta}\wedge h_{\alpha}) + \frac{1}{\alpha^{2}}\hat{\Omega}^{\alpha}{}_{\cdot\beta}\wedge {}^{*}\hat{\Omega}_{\alpha}{}^{\cdot\beta} =$$

$$= \frac{s}{2\ell^{2}}(Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\alpha\beta\gamma} - 2Q_{\alpha}Q^{\alpha})\varepsilon + \frac{1}{2\alpha^{2}}\hat{R}_{\alpha}{}^{\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\alpha}{}_{\cdot\beta\gamma\delta}\varepsilon \qquad \text{D10-(41)}$$

5) La teoría de Wallner (1980).

$$L_{W} = L_{EH} - L_{F} = -\frac{s}{2\ell^{2}}\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}\wedge {}^{*}h^{\alpha\beta} - \qquad \text{D10-(42)}$$

$$-\left(-\frac{s}{2\ell^{2}}\hat{\Omega}_{\alpha\beta}\wedge {}^{*}h^{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha^{2}}\hat{\Omega}^{\alpha\beta}\wedge\hat{\Omega}_{\alpha\beta}\right)$$

6) La teoría "Yang-Mills" (López 1977).

Según el esquema gauge de simetrías internas, el Lagrangiano debería ser cuadrático siempre en las intensidades de campo. Este requerimiento se ha visto que no es necesario en el caso de gravedad. Pero si formulásemos el Lagrangiano mas análogo con las teorías Yang-Mills internas, este sería del tipo siguiente

$$L_{YM} = -\frac{s}{\ell^{2}}\Theta^{\alpha}\wedge {}^{*}\Theta_{\alpha} + \frac{1}{\alpha^{2}}\hat{\Omega}^{\alpha\beta}\wedge {}^{*}\Omega_{\alpha\beta} =$$

$$= \frac{-s}{2\ell^{2}}Q^{\alpha\beta\gamma}Q_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon + \frac{1}{2\alpha^{2}}\hat{R}^{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon \qquad \text{D10-(43)}$$

6) Diversas teorías unitarias.

A continuación se exponen varios Lagrangianos gravitatorios los cuales según se ha demostrado en la literatura son unitarios (libres de fantasmas y taquiones) y se espera que sean renormalizables. Para demostrar su unitariedad se han utilizado métodos perturbativos sobre el ET Minkowskiano.

Con esta prevención los Lagrangianos unitarios son además del Lagrangiano de Einstein-Hilbert y el de Einstein-Cartan, los siguientes.

6-1) La teoría de Neville (1980).

$$L_N = \frac{-s\lambda}{2\ell^2}\hat{R}\varepsilon + \frac{n^2}{2\alpha^2}\hat{R}^{\alpha\beta\cdot\cdot}{}_{\gamma\delta}\left(\hat{R}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} + \hat{R}^{\gamma\delta\cdot\cdot}{}_{\alpha\beta} - 4\hat{R}_{\alpha}{}^{\cdot\gamma\cdot\delta}{}_{\beta\cdot}\right)$$

con $\frac{n}{2\alpha^2} > 0$ D10-(44)

6-2) La familia de Sezgin-Van Nieuwenhuizen (1980).

a) La primer teoría de 5 parámetros L^{I}_{SV}

$$L^{I}_{SV} = \frac{-s\lambda}{2\ell^2}\hat{R}\varepsilon + \frac{a}{\alpha^2}\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\hat{R}^{\alpha\beta\gamma\delta} - 2\hat{R}^{\gamma\delta\alpha\beta} + 2\hat{R}^{\alpha\gamma\beta\delta}\right)\varepsilon - \frac{s}{2\ell^2}b\left(Q_\alpha Q^\alpha\right)\varepsilon - \frac{s}{2\ell^2}c\,Q_{\alpha\beta\gamma}\left(Q^{\alpha\beta\gamma} - 2Q^{\beta\delta\alpha}\right)\varepsilon + \frac{d}{\alpha^2}\hat{R}_{\alpha\beta}\left(\hat{R}^{\alpha\beta} - \hat{R}^{\beta\alpha}\right)\varepsilon \qquad \text{D10-(45)}$$

b) La segunda teoría de 4 parámetros L^{II}_{SV}

$$L^{II}_{SV} = L_N - \frac{s}{2\ell^2}a\,Q_{\alpha\beta\gamma}\left(Q^{\alpha\beta\gamma} + 2Q^{\beta\gamma\alpha}\right) + \frac{b}{\alpha^2}\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\gamma\delta\alpha\beta} \qquad \text{D10-(46)}$$

Siendo L_N el Lagrangiano de Neville.

c) $$L^{III}_{SV} = L_N - \frac{s}{2\ell^2}\left[a\left(Q_{\alpha\beta\gamma}\right)^2 + b\,Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\beta\gamma\alpha} + c\,Q^\alpha Q_\alpha\right] + \frac{d}{\alpha^2}\left(4\hat{R}_{\alpha\beta}\hat{R}^{\alpha\beta} - \hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\gamma\delta\alpha\beta}\right). \qquad \text{D10-(47)}$$

Donde los parámetros en todas estas teorías satisfacen ciertas ligaduras que no se han expuesto por brevedad.

6-3) La familia de Sezgin (1981).

Sezgin (1981), demostró que las ligaduras impuestas para obtener las teorías unitarias anteriores eran demasiado restrictivas y que existian mas Lagrangianos unitarios. El más favorecido en este trabajo en relación con la renormalizabilidad es el Lagrangiano siguiente

$$L_S = -\frac{s}{2\ell^2}\tilde{\hat{R}}\varepsilon - \frac{24}{\alpha^2}g_1\hat{R}_{[\alpha\beta]}\hat{R}^{[\alpha\beta]}\varepsilon + \frac{g_1+g_2}{\alpha^2}\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon + \frac{(-4g_1+g_2)}{\alpha^2}\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\gamma\delta\alpha\beta}\varepsilon + \frac{4(g_1-g_2)}{\alpha^2}\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\alpha\gamma\beta\delta}\varepsilon \qquad \text{D10-(48)}$$

con $g_1/\alpha^2 > 0$ y g_2 arbitrario.

7) Otro candidato más.

Otro Lagrangiano que ha sido propuesto en base a criterios de "simplicidad", Pascual (1982), es el Lagrangiano siguiente

$$L_P = -\frac{s}{2\ell^2}\tilde{\hat{R}}\varepsilon + \frac{1}{\alpha^2}\left[a_2\hat{R}_{\alpha\beta}\hat{R}^{\alpha\beta} + a_3\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\alpha\beta\gamma\delta} + a_6\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\alpha\gamma\beta\delta}\right] \qquad \text{D10-(49)}$$

Que es muy parecido al Lagrangiano anterior de Sezgin.

Despues de lo ya discutido se puede pensar que el límite macróscopico de este tipo de teorías se puede efectuar tomando primero $\alpha \to \infty$ en el Lagrangiano , (al revés que Baekler (1980) ya que si la parte de gravedad microscópica tiene el mismo comportamiento que QCD , como suponen Hehl y col. (1980-a-b), este sería el límite de baja energía. Posteriormente se impondria al Lagrangiano restante $R + Q^2$ la ligadura de torsión nula, con lo cual se obtendría Relatividad General univocamente como límite macroscopico.

Alternativamente se puede introducir la ligadura de torsión nula en el Lagrangiano, lo cual como se ha visto conduce a una teoría métrica macroscópica, que sometida a los tests teóricos y experimentales tendría que proporcionar univocamente Relatividad General, ya que los términos de Eddington-Weyl-Lanczos no poseen un buen límite newtoniano.

11) CRITERIOS QUE DEBE VERIFICAR EL LAGRANGIANO GRAVITARORIO

i) Introducción

Hemos visto que, formulando la interacción gravitacional dentro del esquema gauge, el Lagrangiano gravitatorio no queda determinado univocamente por la teoría, sino que existe una gran variedad de posibles teorías que son "alternativas" a la teoría de Einstein en su límite macroscópico. Cada uno de ellos conduce a un tipo diferente de ecuaciones de campo.

En el presente capítulo se discuten los criterios ó tests teóricos y experimentales que debe satisfacer una teoría de gravedad. Estos criterios conducen a una reducción del conjunto de los "a priori" posibles Lagrangianos (ó densidades Lagrangianas) del campo gravitatorio.

Los criterios que debe verificar una teoría microscópica de gravedad para que en el límite macroscópico sea valida son al menos los siguientes:

1) Todos los criterios que vimos verificaba Relatividad General. Con respecto a la densidad Lagrangiana significan que esta debe ser una densidad escalar (invariante). Con el respecto a las ecuaciones de campo señalaban que matematicamente deben ser ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de orden no superior al segundo en las variables de campo.

2) Las ecuaciones del campo gravitatorio y ciertas identidades verificadas por las variables gravitatorias deben garantizar que las variables materiales satisfacen automaticamente identidades del tipo Nöther, pero no otras adicionales.

3) La existencia de una buena formulación del problema de Cauchy de los valores iniciales.

4) Límite newtoniano, i.e., acuerdo con los experimentos verificados por la teoría de gravedad de Newton, en el caso límite de campos gravitatorios debiles , pequeñas velocidades y bajas presiones.

5) Acuerdo con los experimentos post-newtonianos y post-post newtonianos (PN yPPN): trayectorias curvas de los rayos luminosos, atraso del tiempo, precesión del giróscopo, precesión del perihelio del Mercurio.

6) La existencia del teorema de Birkhoff, i.e., que la solución exacta de las ecuaciones de campo en el vacío en el caso de simetría esférica sea única y estática y coincida con la de solución exterior de Schwarzschild.

7) La existencia de soluciones cosmológicas.

8) Por último, como también queremos que la teoría microscópica total sea un mejor candidato que la teoría de Einstein como teoría cuántica de gravedad, debemos exigir la existencia de una teoría cuántica unitaria y renormalizable.

Este último punto es el mas difícil de satisfacer y hasta ahora y naturalmente dentro del formalismo covariante de cuantificación no se ha probado que exista alguna teoría (algún Lagrangiano) que lo verifique, ni siquiera utilizando teorías supergravitatorias.

En adición a los anteriores criterios teóricos y experimentales y debido al esquema gauge aplicado a gravedad ya expuesto se puede establecer suposiciones estéticas de simplicidad siguientes:

1) La primera suposición va a representar un cambio fundamental respecto de RG. En esta la variable gravitatoria es la métrica, utilizando el formalismo métrico usual de Hilbert. Ahora y en razón a lo expuesto en teoría gauge de gravedad y supondremos que el formalismo es tetrádico-afín, i.e., las variables gravitatorias son la tetrada h y la conexión $\hat{\omega}$

Como ya se ha comentado, ello es necesario para describir la interacción gravitatoria de campos fermiónicos.

2) La segunda suposición consiste en intentar alejarnos lo menos posible de la teoría de Einstein-Hilbert. Es decir la presencia explícita en el Lagrangiano de términos cuadráticos en torsión sin que aparezca la curvatura escalar pseudo-riemanniana será considerado como una suposición en contra de los criterios estéticos y de simplicidad, además de ser mas difícil "a priori" el límite newtoniano.

Sin embargo hay que tener cuidado con ser demasiado simplista ya que el Lagrangiano 4-forma siguiente

$$L_G = -\frac{s}{2l^2}\tilde{R}\,\varepsilon + \frac{1}{2\alpha^2}\hat{R}^{\alpha\cdots}{}_{\beta\gamma\delta}\,\hat{R}_{\alpha\cdots}{}^{\beta\gamma\delta}\,\varepsilon \qquad \text{D11-(1)}$$

suma del Lagrangiano de Einstein-Hilbert (1916) y del Lagrangiano de Yang (1974), es por supuesto el mas simple de todos, pero como veremos, conduce a una conservación independiente de espin y de momento angular orbital. Con lo cual debe ser completamente desechado como candidato a Lagrangiano gravitacional.

Examinemos más exhaustivamente los diversos criterios que se han expuesto, comenzando por los criterios experimentales.

ii) Criterios experimentales

1) Límite Newtoniano.

Este es el criterio mas importante que debe satisfacer la teoría gravitatoria en el macroscosmos y se obtiene en el caso límite en el que 1) las velocidades son pequeñas

$c=1,\ s=-1$

$$v \sim O(\varepsilon) \qquad \text{D11-(2)}$$

y 2) el campo gravitatorio es débil con potencial newtoniano

$$\Phi \sim O(\varepsilon^2) \qquad \text{D11-(3)}$$

donde $\varepsilon = 10^{-3}$ para experimentos en el sistema solar.

3) Las densidades de momento y stress son pequeñas comparadas con la densidad de energía

$$|T_{0\alpha}| / T_{00} \sim O(\varepsilon) \qquad \text{D11-(4)}$$

$$|T_{\alpha\beta}| / T_{00} \sim O(\varepsilon^2) \qquad \text{D11-(5)}$$

Decir que una teoría de gravedad tiene buen límite newtoniano, significa que es posible asignar de una manera consistente ordenes en $\mathcal{E}$ a cada uno de los componentes del campo gravitatorio e identificar a una (ó mejor parte del desarrollo en $\mathcal{E}$ de una) variable gravitatoria con el potencial newtoniano $\varphi \sim O(\varepsilon^2)$. El límite newtoniano debe ser estudiado, naturalmente, de forma independiente para cada Lagrangiano candidato.

Cualquier Lagrangiano que posea como término el Lagrangiano de Einstein-Hilbert o de Einstein-Cartan verificará por tanto el límite newtoniano de forma directa. Este test permite Lagrangianos del tipo

$$L_G = -\frac{S}{2\ell^2}\tilde{R}\,\varepsilon + \text{términos cualesquiera} \qquad D11\text{-}(6)$$

$$L_G = -\frac{S}{2\ell^2}\hat{R}\,\varepsilon + \text{términos cualesquiera} \qquad D11\text{-}(7)$$

Considerando como límite macróscopico válido, unicamente el límite de torsión nula.

2) Experimentos terrestres y en el sistema solar.

Estos experimentos pueden ser divididos en dos tipos:

a) Aquellos en los que el campo gravitatorio es esencialmente Newtoniano, por ejemplo, el desplazamiento hacia el rojo gravitacional de las ondas luminosas o la unicidad de la caída libre para cuerpos masivos. Estos experimentos serán por tanto verificados por cualquier teoría que en su límite macroscópico verifique el límite newtoniano.

b) Aquellos experimentos que miden los aspectos no-Newtonianos del campo gravitatorio, por ejemplo, la curvatura de la luz y atraso del tiempo, la precesión del perihelio de los planetas (en particular Mercurio) y de un giróscopo en órbita terrestre.

Resumiendo, los experimentos hasta ahora realizados miden la contribuciones newtonianas y post-newtonianas del Sol y las contribuciones newtonianas de los planetas.

Por lo tanto, una teoría gravitatoria es consistente con respecto a todos los tests experimentales, si la tetrada (ó la métrica) en el sistema solar concuerda a orden post-newtoniano con la solución exterior de Schwarzschild centrada en el Sol, si exceptuamos las pequeñas perturbaciones newtonianas no esféricas debidas a los planetas. Por tanto cualquier nueva teoría macroscópica de gravedad, si ha superado el test de buen límite newtoniano, tambien verificará todos los experimentos que RG ha superado si

1) La nueva teoría verifica el teorema de Birkhoff, i.e., la teoría posee una única solución en el vacío con simetría esférica.

2) La tetrada (ó la métrica correspondiente) de esta solución en el vacío con simetría esférica concuerda con la solución exterior de Schwarzschild, hasta al menos el orden post-newtoniano.

3) Esta solución en el vacío con simetría esférica, es estable bajo perturbaciones no esfericamente simétricas.

Por otra parte, P. Yasskin y W. Stoeger (1980) han demostrado que en un campo gravitatorio fijo, el comportamiento de la luz y cuerpos test masivos cuya densidad de espín es nula o con espín intrinseco neto (el espin integrado) nulo los efectos de la torsión son nulos tambien y las ecuaciones de propagación de este tipo de cuerpos son exactamente las mismas que en RG. De esta forma el experimento del giróscopo de Schiff no sería un test de la existencia de torsión en el ET, debida al espín de las partículas elementales de un determinado cuerpo. Las únicas posibilidades, apuntadas por

Yasskin y Stoeger, de medir los efectos de la torsión están fuera de la presente technología, ya que sería necesario en el caso óptimo estudiar sistemas con espín pero sin momento angular orbital, tales como haces de partículas polarizadas ó el He^3 superfluido polarizado. En el caso de sistemas con espín y momento angular orbital, sería necesario realizar experimentos con un giroscopo de hierro magnetizado cuya masa debería al menos de ser del orden de $M = 8{,}5\times10^8$ gr. Por supuesto, por ahora es imposible poner en orbita terrestre a un objeto de este tipo.

3) Observaciones cosmológicas.

Además de superar los experimentos newtonianos y relativistas generales, una nueva teoría de gravedad debe ser compatible con las observaciones cosmológicas de que el Universo a gran escala es esencialmente isótropo y homogeneo espacialmente y homogeneo en el tiempo, que se está expandiendo y que tiene una radiación de fondo a $2{,}7^{\circ}$K.

Además, como ya se ha comentado, las teorías con torsión, permiten en muchos casos evitar la singularidad inicial. Sobre la cosmología de la teoría Einstein-Cartan ver los comentarios hechos en el capítulo de exposición de esta teoría.

Tomando Lagrangianos generales cuadráticos en curvatura Cartan y en torsión Cartan, Minkevich (1980) ha demostrado que, en condiciones muy generales es posible evitar la singularidad inicial. Hecho que no es posible con Lagrangianos del tipo Eddington-Weyl cuadráticos en la curvatura Riemann-Christoffel, como han demostrado Macrae y Riegert (1981).

iii) Criterios teóricos

a) Ecuaciones de campo de segundo orden

Al igual que RG imponemos que las ecuaciones de campo de cualquier nueva teoría sean de segundo orden.

En las variables gravitatorias, la teoría gauge determina que las variables gravitatorias sean $h^{\alpha}_{\cdot i}$ y $\hat{\Gamma}^{\beta\cdot\cdot}_{\alpha i}$. Vamos a relacionar las teorías que se obtienen tomando variables puramente holonómicas, como la métrica g_{ij} y la torsión $Q_{ij}^{\cdot\cdot k}$, con las teorías que se obtienen tomando variables gravitatorias mixtas como la tetrada $h^{\alpha}_{\cdot i}$ y la conexión mixta $\hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i}$.

TEOREMA DE SKINNER-GREGORASH (1976)

Tomando como variables gravitatorias a g_{ij} y Q_{ij} (en vez de la torsión se puede emplear K ó λ el defecto), Skinner y Gregorash (1976) y Aldersley (1977-a-b) demostraron que las teorías de tipo métrico-afín Cartan en las cuales las ecuaciones de campo fuesen como máximo de segundo orden en g_{ij} y Q_{ij} entonces el Lagrangiano debía ser del tipo siguiente

$$L_G = \alpha\hat{R}\,\varepsilon + \beta\,\varepsilon \qquad \text{D11-(8)}$$

Es decir el Lagrangiano es el de Einstein-Cartan más un posible término cosmologico.

TEOREMAS DE YASSKIN (1979)

Tomando como variables gravitatorias a $h_i^{\cdot\alpha}$ y $\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta i}$ que es lo que resulta naturalmente del esquema gauge. Yasskin (1979) ha probado teoremas que relacionan las teorías obtenidas tomando como variables a g_{ij} y $Q_{ij}^{\cdot\cdot k}$ con las obtenidas tomando como variables a

El primer teorema dice que

si $L_G = L_G(g_{ij}, \hat{R}^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot jke})$ D11-(9)

entonces $L_G = L_G(h^{\alpha}_{\cdot i}, \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i}, \partial_j \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i})$ D11-(10)

y por tanto las ecuaciones de campo obtenidas variando respecto a $h^{\cdot\alpha}_{i}$ y $\hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i}$ son respectivamente

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta h^{\alpha}_{\cdot i}} = f(h^{\alpha}_{\cdot i}, \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta i}, \partial_j \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i}) \qquad \text{D11-(11)}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta i}} = g(h^{\alpha}_{\cdot i}, \partial_j h^{\alpha}_{\cdot i}, \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i}, \partial_j \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta i}, \partial_k \partial_j \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i}) \qquad \text{D11-(12)}$$

donde $\mathcal{L}_G = h L_G$

El segundo teorema dice que

si $L_G = L(g_{ij}, \hat{R}^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot jke}, Q^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk})$ D11-(13)

entonces $L_G = L_G(h^{\alpha}_{\cdot i}, \partial_j h^{\alpha}_{\cdot i}, \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i}, \partial_j \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i})$ D11-(14)

y por consiguiente las ecuaciones de campo tienen como orden máximo 2 en las derivadas de $h^{\cdot\alpha}_{i}$ y $\hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i}$.

Hay que hacer notar que <u>existen más</u> Lagrangianos mixtos que dan lugar a ecuaciones de campo de orden máximo 2 en las variables h^{i}_{α} y $\hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i}$, que Lagrangianos holónomos que den lugar a ecuaciones de campo de orden máximo 2 en las variables g_{ij} y $Q^{\cdot\cdot k}_{ij\cdot}$.

b) <u>Leyes de conservaci'on Nöther</u>.

Vamos a expresar, en términos de componentes lo desarrollado en la sección 5, 8-iii), en términos de formas diferenciales.

Tomando la densidad Lagrangiana material como $\mathcal{L}_m = h L_m$ entonces el tensor de energía-momento canónico $t^{\cdot i}_{\alpha\cdot}$ el tensor de espin canónico $S^{\beta\cdot i}_{\cdot\alpha\cdot}$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange de los campos materiales EL_{ϕ} están definidas como

$$-sh\, t^{\cdot i}_{\alpha\cdot} = \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^{\alpha}_{\cdot i}} \qquad \text{D11-(15)}$$

$$-sh\, S^{\beta\cdot i}_{\cdot\alpha\cdot} = \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\beta i}} \qquad \text{D11-(16)}$$

$$h\, EL_{\phi} = \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \phi} \qquad \text{D11-(17)}$$

si L_m es un escalar y las ecuaciones $EL_{\phi} = 0$ se satisfacen entonces vimos que $t^{\cdot i}_{\alpha\cdot}$ y $S^{\alpha\cdot i}_{\cdot\beta\cdot}$ satisfacían las leyes de conservación Nöther

$$\nabla_i t^{\cdot i}_{\gamma\cdot} = \frac{1}{2} S^{\beta\cdot\delta}_{\cdot\alpha\cdot} \hat{R}^{\alpha\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\beta\gamma\delta} + t^{\cdot\delta}_{\alpha\cdot} Q^{\alpha\cdot\cdot}_{\gamma\delta} \qquad \text{D11-(18)}$$

$$\nabla_i S^{\cdot\cdot i}_{\beta\alpha\cdot} = t_{\beta\alpha} - t_{\alpha\beta} = 2\, t_{[\beta\alpha]} \qquad \text{D11-(19)}$$

∇_i es mixta.

ver ecuaciones D8-(39), D8-(40).

En esta subsección se va a demostrar que estas leyes de conservación pueden ser derivadas sin usar el formalismo Lagrangiano para definir a $t^{\cdot i}_{\alpha\cdot}$ y $S^{\beta\cdot i}_{\cdot\alpha\cdot}$.

Supongamos por tanto que $t^{\cdot i}_{\alpha\cdot}$ y $S^{\beta\cdot i}_{\cdot\alpha\cdot}$ estan definidos fenomenologicamente.

Sabemos que las ecuaciones de la teoría métrico-afín Cartan vienen dadas por

$$E_{\alpha}{}^{\cdot i}_{\cdot} = t_{\alpha}{}^{i} \qquad D11-(20)$$

$$C^{\beta}{}_{\cdot\alpha\cdot}{}^{\cdot i} = S^{\beta}{}_{\cdot\alpha}{}^{\cdot i}{}_{\cdot} \qquad D11-(21)$$

(Ver Capítulo B)

Si suponemos que los tensores $E_{\alpha}{}^{\cdot i}_{\cdot}$ y $C^{\beta}{}_{\cdot\alpha\cdot}{}^{\cdot i}$ verifican las identidades

$$\nabla_i E_{\gamma}{}^{\cdot i}_{\cdot} = \frac{1}{2} C^{\beta}{}_{\cdot\alpha\cdot}{}^{\cdot\delta} \hat{R}^{\alpha\cdots}{}_{\beta\gamma\delta} + E_{\alpha}{}^{\cdot\delta}_{\cdot} Q^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\cdot\gamma\delta} \qquad D11-(22)$$

$$\nabla_i C_{\beta\alpha}{}^{\cdot\cdot i} = E_{\beta\alpha} - E_{\alpha\beta} = 2\, E_{[\beta\alpha]} \qquad D11-(23)$$

Ver

Entonces D11-(18) y D11-(19) son una consecuencia de las ecuaciones de campo D11-(20) y D11-(21)

Notese que en el caso especial de RG

$$L_G = -\frac{s}{2\ell^2}\tilde{R}$$

entonces $E_{\alpha}{}^{\cdot i}_{\cdot} = \frac{1}{\ell^2}\tilde{G}_{\alpha}{}^{\cdot i}_{\cdot}$ donde $\tilde{G}_{\alpha}{}^{\cdot i}_{\cdot}$ es el tensor de Einstein-Christoffel

y $C^{\beta}{}_{\cdot\alpha\cdot}{}^{\cdot i} = 0$ D11-(24-25)

ya que si recordamos las definiciones de $E_{\alpha}{}^{\cdot i}_{\cdot}$ y $C^{\beta}{}_{\cdot\alpha\cdot}{}^{\cdot i}$

$\mathcal{L}_G = h L_G$

$$s h E_{\alpha}{}^{\cdot i}_{\cdot} = \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta h^{\alpha}{}_{\cdot i}} \qquad D11-(26)$$

$$s h C^{\beta}{}_{\alpha\cdot}{}^{\cdot i} = \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\partial \hat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta i}} \qquad D11-(27)$$

Por tanto, en el caso especial de la teoría de Einstein-Hilbert las ecuaciones D11-(22) y D11-(23) toman la expresión

$$\tilde{\nabla}_i \tilde{G}^{ij} = 0 \quad ; \quad \tilde{G}_{[ij]} = 0 \qquad D11-(28)$$

Habrá que preguntarse cuando se verifican en general las ecuaciones D11-(22) y D11-(23) y que como consecuencia la teoría gravitatoria tengan leyes de conservación Nöther. La respuesta viene dada por el siguiente teorema

3) TEOREMA DE YASSKIN (1979)

Si el Lagrangiano gravitatorio es una función escalar con la dependencia siguiente

$$L_G = L_G\left(h^{\alpha}{}_{\cdot i}, \partial_j h^{\alpha}{}_{\cdot i}, \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta i}, \partial_j \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta i}\right) \qquad D11-(29)$$

entonces las ecuaciones D11-(22) y D11-(23) se verifican. Por consiguiente, todos los Lagrangianos obtenidos de la teoría gauge verifican este teorema, pero hay que tener en cuenta que existen Lagrangianos que verifican de forma inconsistente estas ecuaciones como el Lagrangiano siguiente obtenido como caso posible mediante el método gauge.

$$L_G = -\frac{s}{2\ell^2}\tilde{R} + \frac{1}{2\alpha^2}\hat{R}^{\alpha\cdot\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma\delta}\,\hat{R}_{\alpha}{}^{\cdot\beta\gamma\delta} \qquad D11-(30)$$

El Lagrangiano D11-(30) que sería el más sencillo de todos los posibles Lagrangianos conduce a una conservación separada de espín y momento angular orbital.

Ello es debido a que el tensor de Einstein es simétrico ya que se verifican

$$E_{ij} = E_{(ij)} = \frac{1}{\ell^2}\tilde{G}_{ij} - \frac{2s}{\alpha^2}\left(\hat{R}^{\alpha\cdots}{}_{\beta\gamma i}\,\hat{R}_{\alpha}{}^{\beta\gamma i}{}_{\cdots} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{4} g_{ij}\hat{R}^{\alpha\cdots}{}_{\beta\gamma\delta}\,\hat{R}_{\alpha}{}^{\beta\gamma\delta}{}_{\cdots}\right) \qquad \text{D11-(31)}$$

$$C^{\alpha\cdot i}{}_{\beta\cdot} = -\frac{4s}{\alpha^2}\nabla_j \hat{R}^{\alpha\cdot ij}{}_{\beta\cdot\cdot} \qquad \text{D11-(32)}$$

Los cuales satisfacen D11-(22) y D11-(23), pero en el caso específico, debido a la simetría de E_{ij} , $E_{[ij]} = 0$ D11-(33)

además D11-(32) implica que $\nabla_i C^{\alpha\cdot i}_{\cdot\beta\cdot} = 0$ D11-(34)

Y por tanto usando las ecuaciones de campo D11-(20) y D11-(21) se obtiene

$$\nabla_i S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot i} = 0 \quad \text{y} \quad t_{[\alpha\beta]} = 0 \qquad \begin{matrix}\text{D11-(35)}\\ \text{D11-(36)}\end{matrix}$$

Vemos finalmente que el Lagrangiano D11-(30) conduce a una conservación separada de espín y de momento angular orbital y por tanto hay que desecharlo como candidato a Lagrangiano gravitatorio.

c) Inexistencia del problema de Cauchy.

La existencia de una buena formulación del problema de Cauchy para una determinada teoría gravitatoria, permite que esta sea predictiva, i.e., si se conocen los valores iniciales, se puede predecir que le ocurrirá al sistema en un determinado tiempo futuro. Para ello debe ocurrir que:

1) Debe ser posible dividir las ecuaciones de la teoría en ecuaciones de ligadura (las cuales son satisfechas por las variables de campo en cada instante de tiempo) y en ecuaciones de evolución (que relacionan las variables gravitatorias a diferentes tiempos).

2) Las ecuaciones de evolución deben garantizar que si las ecuaciones de ligadura son satisfechas en un tiempo inicial, entonces estas son satisfechas en todos los instantes de tiempo próximos.

3) Debe existir al menos una solución de las ecuaciones de ligadura, ó de forma equivalente, debe existir al menos una solución de la teoría total.

La descomposición en ecuaciones de ligadura y de evolución, permitirá separar las variables gravitatorias y conocer cuales son las variables que representan grados de libertad dinámicos. Esto representará un primer paso en el proceso de cuantificación mediante el método canónico.

Para que no exista el problema de Cauchy, partiendo de un Lagrangiano se necesita que este no posea derivadas de las variables gravitatorias respecto del tiempo, superiores al primer orden.

d) Teoría cuántica.

A lo largo de la memoria, se han ido exponiendo las características de diversas teorías gravitatorias, comenzando por la teoría de Einstein-Hilbert, con respecto el método de cuantificación covariante es decir cuantificando la teoría clásica por métodos perturbativos, que son actualmente los que han sido más desarrollados.

El uso de método gauge más próximo al método Yang-Mills de simetrías internas, fue debido fundamentalmente al hecho de que es posible una buena teoría cuántica (unitaria y renormalizable) de la interacción electro-débil-nuclear, añadiendo al Lagrangiano clásico Yang-Mills de estas teorías el Lagrangiano de fijar el gauge (de t'Hooft) y el Lagrangiano de los fantasmas (de Fadeev-Popov). El Lagrangiano cuántico en las teorías de las interacciones "internas" tiene la ex-presión

$$L_{\text{cuántico}} = L_{\text{clásico}} + L_{\text{fijar el gauge}} + L_{\text{fantasmas}} \qquad \text{D11-(37)}.$$

Sin embargo, aunque todavía no existe una buena teoría cuántica de gravedad, entre los Lagrangianos, con torsión que propagandose en el vacío, que resultan de aplicar el método gauge, existe una familía de Lagrangianos que Sezgin y Van Niwuwenhuizen (1980) y posteriormente Sezgin (1981) han probado que son unitarios, aunque el problema de la renormalización para esta familía, todavía continua abierto. Esta familía está expuesta en la sección de ejemplos de teorías gravitatorias.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que el formalismo covariante puede no ser significativo respecto de la teoría no lineal ya que :

1) Sentencias sobre la teoría linealizada pueden no ser ciertas en la teoría no-lineal.

2) La unitariedad de la matriz S en la teoría linealizada, puede no tener ningún sentido en la teoría no-lineal, ya que como en ciertos espacios-tiempos curvos no se puede definir a una partícula, mucho menos se podrá definir la matriz S.

12) ECUACIONES DE CAMPO EXPLICITAS DEL LAGRANGIANO GENERAL CON TORSION

En la sección 8-iii) se ha expuesto utilizando formas diferenciales las ecuaciones de campo en forma condensada, válidas para cualquier Lagrangiano gravitatorio. Vamos ahora a obtener estas ecuaciones de campo de forma explícita, <u>en componentes</u>, para el Lagrangiano gravitatorio en un espacio de Cartan más general.

Este tiene la expresión en componentes

$$\begin{aligned} L_G = & -s\frac{\hbar c}{16\pi \ell^2}\left(c_1\tilde{R} + c_2\hat{R}\right) - \frac{\hbar c}{8\pi\ell^2}\Lambda \\ & + \frac{\hbar c}{16\pi\alpha^2}\Big(a_1\hat{R}^2 + a_2\hat{R}_{\alpha\beta}\hat{R}^{\alpha\beta} + a_3\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\alpha\beta\gamma\delta} + \\ & \quad + a_4\hat{R}_{\alpha\beta}\hat{R}^{\beta\alpha} + a_5\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\gamma\delta\alpha\beta} + \\ & \quad + a_6\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{R}^{\alpha\gamma\beta\delta}\Big) - \\ & - s\frac{\hbar c}{16\pi\ell^2}\Big(b_1 Q^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\delta}Q_{\alpha\cdot\cdot}^{\cdot\gamma\delta} + b_2 Q^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\delta}Q^{\gamma\cdot\delta}_{\cdot\alpha\cdot} + \\ & \quad + b_3 Q^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\alpha\delta}Q^{\gamma\cdot\delta}_{\cdot\gamma\cdot}\Big) \end{aligned} \qquad \text{D12-(1)}$$

La densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_G = hL_G$

Donde $\ell^2 = \hbar G/c^3$, y donde como ya se ha comentado uno de los parámetros a_1, a_4, a_5 es arbitrario en base al teorema de Euler-Gauß-Bonnet.

Las ecuaciones de campo en el vacío a partir de esta <u>densidad Lagrangiana</u> bajo variaciones arbitrarias de las variables gravitatorias $h^{\alpha}_{\cdot i}$ y $\hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\beta i}$, la tetrada y la conexión mixta. Teniendo en cuenta que la dependencia de es

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_G\left(h^{\alpha}_{\cdot i}, \partial_j h_i^{\cdot\alpha}, \hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\beta i}, \partial_j\hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\beta i}\right) \qquad \text{D12-(2)}$$

La variación bajo $\delta h^{\alpha}_{\cdot i}$ es

$$\frac{\delta\mathcal{L}_G}{\delta h^{\alpha}_{\cdot i}} = \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial h^{\alpha}_{\cdot i}} - \partial_j\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial\partial_j h^{\alpha}_{\cdot i}} \qquad \text{D12-(3)}$$

y bajo $\delta\hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\beta i}$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_G}{\delta\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\cdot\beta i}} = \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\cdot\beta i}} - \partial_j\frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial\partial_j\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\cdot\beta i}} \qquad \text{D12-(4)}$$

Determinando la 1ª ecuación

Usando la regla de cadena obtenemos

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta h^\alpha{}_i} = \frac{\partial h}{\partial h^\alpha{}_i} L_G + h \frac{\partial L_G}{\partial \hat{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu}} \frac{\partial \hat{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu}}{\partial h^\alpha{}_i} + h \frac{\partial L_G}{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}} \frac{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}}{\partial h^\alpha{}_i} - \partial_j \left[h \frac{\partial L_G}{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}} \frac{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}}{\partial \partial_j h^\alpha{}_i} \right] \tag{D12-(5)}$$

ya que

$$\hat{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = h_\gamma{}^i h_\delta{}^j \hat{R}^\alpha{}_{\beta ij} \tag{D12-(6)}$$

y como la torsión Cartan no-holónoma se puede expresar (ver apendice 1)

$$\begin{aligned} Q^\alpha{}_{\beta\gamma} &= \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\gamma\beta} - \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma} - G^\alpha{}_{\beta\gamma} = \\ &= h_\beta{}^j \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\gamma\beta} - h_\gamma{}^k \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta k} - \\ &\quad -(\delta^\mu_\beta \delta^\nu_\gamma - \delta^\nu_\beta \delta^\mu_\gamma) h_\mu{}^m h_\nu{}^n \partial_n h^\alpha{}_m \end{aligned} \tag{D12-(7)}$$

Calculando, teniendo en cuenta estas expresiones se obtiene

$$\frac{\partial h}{\partial h^\alpha{}_i} = h h_\alpha{}^i \tag{D12-(8)}$$

$$\frac{\partial \hat{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu}}{\partial h^\alpha{}_i} = 2 h_\mu{}^i \hat{R}^\rho{}_{\sigma\nu\alpha} \tag{D12-(9)}$$

$$\frac{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}}{\partial h^\alpha{}_i} = 2 h_\mu{}^i Q^\rho{}_{\nu\alpha} \tag{D12-(10)}$$

Y

$$-\partial_j \left[h \frac{\partial L_G}{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}} \frac{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}}{\partial \partial_j h^\alpha{}_i} \right] = 2h \nabla_j \left[h_\mu{}^i h_\nu{}^j \frac{\partial L_G}{\partial Q^\alpha{}_{\mu\nu}} \right] \tag{D12-(11)}$$

siendo ∇_j la derivada covariante mixta (Levi-Civita-Christoffel para índices holónomos y $\hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta i}$ para los índices no-holónomos).

Por tanto la ecuación para $h^\alpha{}_i$ es

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta h^\alpha{}_i} = h \Big[& 2 \nabla_j \Big(h_\mu{}^i h_\nu{}^j \frac{\partial L_G}{\partial Q^\alpha{}_{\mu\nu}} \Big) + \\ & + 2 h_\mu{}^i Q^\rho{}_{\nu\alpha} \frac{\partial L_G}{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}} + \\ & + 2 h_\mu{}^i \hat{R}^\rho{}_{\sigma\nu\alpha} \frac{\partial L_G}{\partial \hat{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu}} + h_\alpha{}^i L_G \Big] \end{aligned} \tag{D12-(12)}$$

Determinemos ahora la segunda ecuación de campo, usando la regla de la cadena, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta i}} = h & \frac{\partial L_G}{\partial \hat{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu}} \frac{\partial \hat{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu}}{\partial \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta i}} + \\ & + h \frac{\partial L_G}{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}} \frac{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}}{\partial \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta i}} - \\ & - \partial_j \left[h \frac{\partial L_G}{\partial \hat{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu}} \frac{\partial \hat{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu}}{\partial \partial_j \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta i}} \right] \end{aligned} \tag{D12-(13)}$$

Y teniendo en cuenta las expresiones de la curvatura y torsión no-holónomas Cartan, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta i}} = h \Big[& 2 \nabla_j \Big(h_\mu{}^i h_\nu{}^j \frac{\partial L_G}{\partial \hat{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}} \Big) + \\ & + h_\mu{}^i (\delta^\rho_\alpha \delta^\beta_\nu - \eta^{\rho\beta} \eta_{\nu\alpha}) \frac{\partial L_G}{\partial Q^\rho{}_{\mu\nu}} \Big] \end{aligned} \tag{D12-(14)}$$

Donde $\bar{\nabla}_j$ es la derivada covariante mixta.

Variando el Lagrangiano material se obtenía (tomamos ahora o-formas)

$$\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^\alpha{}_i} = -sh\, t_\alpha{}^{\cdot i} \qquad \text{D12-(15)}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta i}} = -sh\, S^{\beta}{}_{\cdot\alpha}{}^{\cdot i} \qquad \text{D12-(16)}$$

$$h\, EL_\phi = \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \phi} = 0 \qquad \text{D12-(17)}$$

Por tanto el principio de mínima acción conduce a

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta h^\alpha{}_i} = -\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^\alpha{}_i} \qquad \text{D12-(18)}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta i}} = -\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\beta i}} \qquad \text{D12-(19)}$$

Sustituyendo L_G en las expresiones D12-(12) y D12-(15) se obtiene para $h^{\alpha}{}_{i}$ la ecuación de "Einstein"

$$E_\alpha{}^{i} = \frac{\hbar c}{8\pi \ell^2}\left(c_1 \tilde{G}^i{}_\alpha + c_2 \hat{G}^i{}_{\cdot\alpha}\right) - s\frac{\hbar c}{8\pi\ell^2}\Lambda h_\alpha{}^{\cdot i} -$$

$$- s\frac{\hbar c}{4\pi\alpha^2} a_1\left(\hat{R} R^i{}_{\cdot\alpha} - \frac{1}{4} h_\alpha{}^i \hat{R}^2\right) +$$

$$+ s\frac{\hbar c}{8\pi\alpha^2} a_2\left(\hat{R}^{\mu\nu}\hat{R}^{i\cdots}{}_{\mu\nu\alpha} - \hat{R}^{\mu i}\hat{R}_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha{}^i \hat{R}^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu}\right) -$$

$$- s\frac{\hbar c}{4\pi\alpha^2} a_3\left(\hat{R}^{\kappa\lambda\mu i}\hat{R}_{\kappa\lambda\mu\alpha} - \frac{1}{4} h_\alpha{}^i \hat{R}^{\kappa\lambda\mu\nu}\hat{R}_{\kappa\lambda\mu\nu}\right)$$

$$+ \ldots$$

$$\ldots + s\frac{\hbar c}{8\pi\alpha^2} a_4\left(\hat{R}^{\nu\mu}\hat{R}^{i\cdots}{}_{\mu\nu\alpha} - \hat{R}^{i\mu}\hat{R}_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha{}^i \hat{R}^{\nu\mu}\hat{R}_{\mu\nu}\right)$$

$$- s\frac{\hbar c}{4\pi\alpha^2} a_5\left(\hat{R}^{\mu i\kappa\lambda}\hat{R}_{\kappa\lambda\mu\alpha} - \frac{1}{4} h_\alpha{}^{\cdot i}\hat{R}^{\mu\nu\kappa\lambda}\hat{R}_{\kappa\lambda\mu\nu}\right)$$

$$+ s\frac{\hbar c}{8\pi\alpha^2} a_6\left(\hat{R}^{\kappa i\lambda\mu}\hat{R}_{\kappa\lambda\mu\alpha} - \hat{R}^{\kappa\mu\lambda i}\hat{R}_{\kappa\lambda\mu\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha{}^{i}\hat{R}^{\kappa\mu\lambda\nu}\hat{R}_{\kappa\lambda\mu\nu}\right)$$

$$- \frac{\hbar c}{4\pi\ell^2} b_1\left(\nabla_j Q_\alpha{}^{\cdot ij} - Q^{\kappa\mu i}Q_{\kappa\mu\alpha} + \frac{1}{4} h_\alpha{}^i Q^{\kappa\mu\nu}Q_{\kappa\mu\nu}\right)$$

$$- \frac{\hbar c}{4\pi\ell^2} b_2\left(\nabla_j Q^{[i}{}_{\cdot\alpha}{}^{j]} + Q^{[i}{}_{\cdot\beta}{}^{j]} Q^{\beta}{}_{\cdot j\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha{}^i Q^{\alpha\beta\gamma}Q_{\beta\alpha\gamma}\right)$$

$$+ \frac{\hbar c}{8\pi\ell^2} b_3\left(h_\alpha{}^j h_\beta{}^i \nabla_j Q^{\gamma}{}_{\cdot\gamma}{}^{\beta} - h_\alpha{}^i \nabla_j Q^{\gamma}{}_{\cdot\gamma}{}^{j} - \frac{1}{2} h_\alpha{}^i Q^{\gamma}{}_{\gamma\delta} Q^{\beta\cdot\delta}{}_{\cdot\beta}\right) =$$

$$= t_\alpha{}^{\cdot i}$$

D12-(20)

Mientras que para $\hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}_{\ \beta i}$ se obtiene la ecuación de "Cartan": utilizando D12-(14) y D12-(16)

$$\begin{aligned}
C^{\beta\cdot i}_{\cdot\alpha\cdot} = & -\frac{\hbar c}{4\pi l^2} c_2 \eta^{\beta\gamma} \nabla_j \left(h_\alpha{}^{[i}_{\cdot} h_\gamma{}^{j]}_{\cdot}\right) \\
& + s\frac{\hbar c}{2\pi\alpha^2} a_1 \eta^{\beta\gamma} \nabla_j \left(\hat{R}\, h_\alpha{}^{[i}_{\cdot} h_\gamma{}^{j]}_{\cdot}\right) \\
& + s\frac{\hbar c}{4\pi\alpha^2} a_2 \eta^{\beta\gamma} \nabla_j \left(\hat{R}_{\alpha}^{\cdot[i}{}_{\cdot} h_\gamma{}^{j]}_{\cdot} - \hat{R}_{\gamma\cdot}^{\cdot[i} h_\alpha{}^{j]}_{\cdot}\right) \\
& + s\frac{\hbar c}{2\pi\alpha^2} a_3 \nabla_j R_\alpha{}^{\beta i j} \\
& + s\frac{\hbar c}{4\pi\alpha^2} a_4 \eta^{\beta\gamma} \nabla_j \left(\hat{R}^{[i\cdot}_{\cdot\alpha} h_\gamma{}^{\cdot j]}_{\cdot} - \hat{R}^{[i\cdot}_{\cdot\gamma} h_\alpha{}^{\cdot j]}_{\cdot}\right) \\
& + s\frac{\hbar c}{2\pi\alpha^2} a_5 \nabla_j \hat{R}^{ij}{}_{\alpha\cdot}{}^{\cdot\beta} \\
& + s\frac{\hbar c}{4\pi\alpha^2} a_6 \eta^{\beta\gamma} \nabla_j \left(\hat{R}_{\alpha\cdot\gamma\cdot}^{\cdot[i\cdot j]} - \hat{R}_{\gamma\cdot\alpha\cdot}^{\cdot[i\cdot j]}\right) \\
& - \frac{\hbar c}{2\pi l^2} b_1 \eta^{\beta\delta} Q_{[\alpha\cdot\delta]}^{\ \cdot i} \\
& - \frac{\hbar c}{4\pi l^2} b_2 \eta^{\beta\delta} \left[Q^{i}_{\cdot\alpha\delta} - Q_{[\alpha\delta]}{}^{i}\right] \\
& - \frac{\hbar c}{4\pi l^2} b_3 \eta^{\beta\delta} Q^{\gamma\cdot\cdot}_{\cdot\gamma[\alpha} h_{\delta]}{}^{i}_{\cdot} = \\
= & S^{\beta\cdot i}_{\cdot\alpha\cdot}
\end{aligned}$$ D12-(21)

Estas ecuaciones de campo en componentes, del Lagrangiano más general parecen y verdaderamente son muy complicadas, sobre todo si las comparamos con las de RG. Sin embargo vamos a estudiar los casos más simples que son los que aparecen en la literatura y que han sido expuestos en las secciones de ejemplos de teorías gravitatorias U_4 . Para ello combiene recordar siempre las propiedades de simetria de $\hat{R}^{\alpha\cdot\cdot\cdot}_{\ \beta\gamma\delta}$ y $Q^{\alpha\cdot\cdot}_{\ \beta\delta}$ y que la derivada covariante mixta que se ha utilizado es

$$\begin{aligned}
\nabla_j h_\alpha{}^{i}_{\cdot} &= \partial_j h_\alpha{}^{i} + \left\{{i \atop kj}\right\} h_\alpha{}^{k} - \hat{\Gamma}^{\beta\cdot\cdot}_{\ \alpha j} h_\beta{}^{i} = \\
&= -\lambda^{i\cdot\cdot}_{\ \alpha j} = K^{i}{}_{\alpha j} \\
&= -\frac{1}{2} g^{ik}\left(Q_{\alpha k i} + Q_{i k \alpha} - Q_{k\alpha i}\right)
\end{aligned}$$ D12-(22)

y

$$\begin{aligned}
Q^{i\cdot\cdot}_{\ jk} &= \lambda^{i}{}_{kj} - \lambda^{i}{}_{jk} = \\
&= h^{\alpha}{}_{j} \nabla_k h_\alpha{}^{i} - h^{\alpha}{}_{k} \nabla_j h_\alpha{}^{i}_{\cdot}
\end{aligned}$$ D12-(23)

13) VIABILIDAD DE LOS LAGRANGIANOS GRAVITATORIOS CON TORSION

Vamos a examinar si determinados Lagrangianos especiales, obtenidos como casos particulares del Lagrangiano general, verifican los criterios teóricos y experimentales. Naturalmente que todos los Lagrangianos considerados no verificararán todos los tests, pero es interesante ver que tests han conseguido superar cada uno de ellos.

Primero discutimos aspectos generales del Lagrangiano general y de sus ecuaciones de campo.

Comparación con los tests

1) En primer lugar hay que hacer notar que las ecuaciones de campo derivadas del Lagrangiano general son lineales en las segundas derivadas de $h_{\alpha}{}^{i}$ y de $\hat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta i}$. Luego siempre se verifica el primer criterio teórico ya que no son nunca de orden superior al segundo en las derivadas parciales de las variables gravitatorias $h_{i}{}^{\alpha}$ y $\hat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta i}$.

Además si, $c_1 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$, i.e., se anulan los términos de curvatura escalar Riemann-Christoffel y los cuadráticos en torsión, no hay derivadas segundas de $h_{i}{}^{\alpha}$, mientras que, si $a_i = 0$, $i = 1,..,6$, i.e., se anulan los términos cuadráticos en curvatura Cartan y sus contracciones, en las ecuaciones de campo no aparecen derivadas segundas de la conexión $\hat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta i}$. Por tanto cuando los términos cuadráticos en curvatura Cartan son nulos en el Lagrangiano, la torsión no se propaga, como ya ocurría más simplemente en la teoría de Einstein-Cartan.

2) Respecto al criterio teórico 2, de existencia de i-dentidades Nöther, hay que señalar que de acuerdo con el teorema que se expuso en esa sección, se observa que las ecuaciones de campo obtenidas a partir del Lagrangiano general verificaban las ecuaciones D11-(22) y D11-(23) para $E_{\alpha}{}^{i}$ y $C_{\alpha\beta}{}^{i}$. Como ya vimos con un ejemplo, eso no implicaba que se verificasen las identidades Nöther, para ello era necesario que el tensor $E_{\alpha}{}^{i}$ no fuese simétrico.

Notese a partir de las ecuaciones de campo generales que unicamente producen términos simétricos en ellas los términos en el Lagrangiano general con coeficientes C_1 y $(y\Lambda)$ a_3, correspondientes a la curvatura escalar Riemann-Christoffel y la curvatura Cartan cuadrática.

Por lo tanto cualquier Lagrangiano verificará las identidades Nöther si contiene al menos un término distinto de C_2 y a_3, $y(\Lambda)$.

3) Respecto al primer y más importante criterio experimental, el de la obtención del límite newtoniano hay que señalar que los únicos términos en los que aparezca la longitud de Planck $\ell^2 = G\hbar / c^3$. son los cruciales respecto de este problema, i.e., los términos con coeficientes C_1, C_2, b_i, $i = 1,2,3$. Por ejemplo, el Lagrangiano de Hehl y col., $C_1 = C_2 = 0$, $a_i = 0$ $i = 1,2,4,5,6$, $b_1 = 1$, $b_2 = -2$, $a_3 = 1$ proporciona en el límite de campo débil, un potencial newtoniano proviniente de la especial combinación de los términos cuadraticos en torsión y más un potencial del tipo $\alpha r + \beta r^2$ del tipo de confinamiento de quarks, proviniente de la parte cuadrática en curvatura Cartan. Sin embargo, para nosotros no es conveniente tomar la parte macroscópica con términos de torsión al cuadrado, por las razones ya expresadas.

Por tanto, cualquier Lagrangiano del tipo $\frac{1}{2\ell^2}\hat{R} + \frac{1}{2\alpha^2}\hat{R}^2$ (donde $\hat{R}^2$ es cualquier combinación de las curvaturas Cartan) al efectuar el límite macroscópico $\alpha \to \infty$ e imponiendo torsión igual 0, daría lugar a Relatividad General.

4) Cada solución de las ecuaciones de Einstein-Hilbert en el vacío

$$\tilde{R}_{ij} = 0 \iff \begin{array}{l} \hat{R}_{ij} = 0 \\ Q^{i}{}_{jk} = 0 \end{array} \qquad \text{D13-(1)}$$

es una solución de las ecuaciones de campo en el vacío ($t_{ij} = 0$, $S^{i}{}_{jk} = 0$) y con torsión nula ($Q^{i}{}_{jk} = 0$) obtenidas a partir del Lagrangiano general $(\Lambda = 0)$. Por lo tanto, en el vacío, en ausencia de torsión, cualquier Lagrangiano proporciona una teoría equivalente a la de Einstein-Hilbert.

cual la solución de Schwarzschild es siempre una solución.

Esta aserción ha sido objeto del trabajo de Debney, et al (1978), en el caso particular del Lagrangiano de Fairchild. Sin embargo, a partir de las ecuaciones explícitas de campo se ve directamente que se verifica en general.

5) Sin embargo, aunque la solución de Schwarzschild es siempre una solución no todos los Lagrangianos particulares verifican el teorema de Birkhoff. En la literatura han aparecido bastantes trabajos dedicados a este problema Neville (1980-c), Ramaswamy et al (1979), Rauch et al (1981-1982-a-b).

Neville (1980) y Ramaswamy (1979) consideran lo que denominan teorema de Birkhoff débil

simetria O(3) + ET asintoticamente flat	$\Rightarrow$	solución de Schwarzschild + torsión = 0

probando que este teorema lo verifican todos los Lagrangianos del tipo $\hat{R} + \hat{R}^2$ (siendo $\hat{R}^2$ cualquier combinación cuadrática en curvatura Cartan ó sus contracciones).

Mientras que Rauch et al (1981-1982-b) consideran teorema de Birkhoff fuerte ó usual.

Simetria SO(3) $\Rightarrow$ solución de Schwarzschild

probando que solo existen dos Lagrangianos específicos que lo verifican

$$L_I = -\lambda \hat{R} + \gamma \hat{R}^2$$

$$L_{II} = -\lambda \hat{R} + \frac{1}{12}(4a+b+3\lambda) Q_{ijk} Q^{ijk} + \frac{1}{6}(-2a+b-3\lambda) Q_{ijk} Q^{jki} + \frac{1}{3}(-a+2c-3\lambda) Q^{j\cdot\cdot}_{\;ji} Q^{k\cdot i}_{\;\cdot k}.$$

con la restricción, $\lambda\, abc \neq 0$.

Sin embargo, esto no es para nosotros nada más que un problema académico, ya que una teoría que se supone microscópica no debe verificar el teorema de Birkhoff necesariamente, aunque si lo debe hacer el límite macroscópico.

Hay que señalar, que esos dos tipos de teorema de Birkhoff solo pueden aparecer en este tipo de teorías tetradico-afines, ya que en una teoría métrica no hay distinción entre simetría O(3) y SO(3).

Es curioso señalar que en el contexto de teorias metricas, unicamente Relatividad General satisface el teorema de Birkhoff (ver H. Goenner (1970), P. Havas (1977).

6) Sin imponer que la torsión sea cero, se han obtenido otros tipos de soluciones exactas en el vacio ($t_{ij} = 0$, $S_{ijk} = 0$) con simetría esférica O(3) en los trabajos de Baekler (1981), Baekler, Hehl y Mielke (1982), Benn et al (1981-82) y con simetria cilíndrica por J.D. Mc Crea (1982).

Actualmente, el grupo de Colonía esta dedicado fundamentalmente, empleando programas de ordenador como REDUCE y ORTOCARTAN, a obtener soluciones exactas de las ecuaciones de campo generales en el vacío. Para nosotros, otra vez, esto solo constituye un problema académico.

7) Soluciones cosmológicas imponiendo el principio cosmológico, han sido estudiadas por A.V. Minkevich (1980) y F. Müller-Hoissen (1982) y en otras referencias de estos trabajos, cuando la torsión es dinámica.

Imponiendo isotropía e homogeneidad y $S^i_{\;jk} = 0$. existen dos casos, en uno se obtienen las mismas ecuaciones de Friedmann suplementadas por otra ecuación en la que aparece la torsión (que en este caso solo tiene una componente estricta no nula). En este reciente trabajo de Müller-Hoissen, se demuestra que si las sòluciones cosmológicas no tienen singularidad métrica, tienen singularidad en la torsión. Por lo tanto, en este respecto, nada se mejora respecto a Relatividad General.

8) Utilizando la teoría linealizada, diversos Lagrangianos específicos obtenidos por Sezgin y Van Nieuwenhuizen (1980) y Sezgin (1981) son como ya se vió unitarios sin embargo, aunque el problema de la renormalizabilidad sigue abierto, es posible que ninguna teoría de este tipo sea unitaria y renormalizable a la vez. Por lo tanto tampoco en este respecto nada se mejora respecto a Relatividad General.

ii) <u>Conclusión del apartado</u>

A pesar de nuestras esperanzas, se ha visto que las teorías construidas en un espacio de Cartan no ofrecen realmente otra alternativa macroscópica a la Relatividad General y como teorías microscópicas tienen al menos tantos problemas como Relatividad General, con la diferencia de que son bastante mas complicadas.

Sin embargo quizás en este último sentido es todavía válido proseguir su estudio en el futuro como una de las vías posibles hacia la teoría de gravedad cuántica, generalizando, por ejemplo, la teoría Poincaré rota a la teoría de Sitter ó conforme ó $GA(4,R)$ y adoptando por tanto geometrías más generales.

Adoptando el punto de vista de que interacción gravitatoria a energías superiores es una teoría gauge, mientras que a bajas energías es una teoría fenomenológica obtenida a través del rompimiento de la simetría, creemos que realmente es el grupo de Sitter, el más cualificado entre las anteriores posibles generalizaciones. La razón es doble. En primer lugar, se realizaría una perfecta analogía con el modelo σ no lineal mecánico estadístico. Este, a alta energía es la teoría gauge de O(N) (lease O(5) para de Sitter euclideanizado) mientras que a baja energía, despues del rompimiento de O(N), es invariante bajo O(N-1) (lease O(4) para el grupo de Lorentz euclideo). En segundo lugar, la constante cosmológica (ó el tensor energía-momento del vacío mecanocuántico) surgiría de manera completamente natural en la teoría gauge de Sitter rota.

APENDICE 1

NOTACION EN COMPONENTES Y GEOMETRIAS METRICO-AFINES

1) Métrica.

En primer lugar como nuestro espacio-tiempo ET es una variedad Lorentziana 4 dimensional, para tener en cuenta las dos convenciones, la tipo temporal y la tipo espacial, tomamos en general la métrica de Minkowski como

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(-s, -s, -s, +s) \qquad (1)$$

donde s= +1 para la convención temporal y s= -1 para la espacial. El resto de las convenciones de signo y de las posiciones de los indices son las de Misner, Thorne y Wheeler, (1973).

En general, salvo en los casos en los que se explicite lo contrario, los indices latinos i,j,k,l...denotan una base coordenada u holónoma, $i = 1,2,3,4$

$$dx^i \;, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \;, \qquad dx^i(\partial_j) = \delta^i_j \qquad (2)$$

Mientras que indices griegos denotan una base arbitraria no-holónoma

$$h_\alpha = h_\alpha{}^i \partial_i \;, \quad h^\alpha = h^\alpha{}_i dx^i \qquad (3)$$

La base vectorial h_α y la base de 1-formas h^α son asimismo duales. Por lo tanto las mátrices $h_\alpha{}^i$ y $h^\alpha{}_i$ son inversas

$$h^\alpha{}_i h_\alpha{}^j = \delta_i^j \;; \quad h_\alpha{}^i h^\beta{}_i = \delta_\alpha^\beta \qquad (4)$$

Las componentes coordenadas de la métrica estan relacionadas con las componentes en una base arbitraria por las fórmulas

$$g_{ij} = g_{\alpha\beta} h^\alpha{}_i h^\beta{}_j \;; \quad g_{\alpha\beta} = h_\alpha{}^i h_\beta{}^j g_{ij} \qquad (5)(a,b)$$

siempre supondremos que es simétrico, $g_{[ij]} = 0$.

Comparando (5) con las fórmulas(4) se obtiene

$$h_\alpha{}^j = g_{\alpha\beta} h^\beta{}_i g^{ij} \;; \quad h^\alpha{}_i = g^{\alpha\beta} h_\beta{}^j g_{ji} \qquad (6)(a,b)$$

Tomando el determinante de la ecuación (5-a) se obtiene

$$\tilde{g} = \hat{g} h^2 \qquad \sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-\hat{g}}\,|h| \qquad (7)(a,b)$$

donde

$$\tilde{g} = \det g_{ij} \qquad \hat{g} = \det g_{\alpha\beta} \qquad (8)(a,b)$$

$$h = \det h^\alpha{}_i = (\det h_\alpha{}^i)^{-1} \qquad (9)(a,b)$$

Suponiendo que la base coordenada ∂_i esté orientada, el elemento de volumen es

$$\varepsilon = \frac{1}{24} \varepsilon_{ijkl}\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l \qquad (10)$$

$$= \sqrt{-\tilde{g}}\, d^4x \qquad (11)$$

donde ε_{ijkl} es el tensor completamente antisimétrico con

$$\varepsilon_{0123} = \sqrt{-\tilde{g}} \qquad (12)$$

Si la base no-holónoma h_α esta orientada, entonces

$$h > 0 \qquad \sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-\hat{g}}\, h \qquad (13)$$

Y por consiguiente el elemento de volumen puede ser escrito como

$$\varepsilon = \frac{1}{24}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, h^\alpha \wedge h^\beta \wedge h^\gamma \wedge h^\delta =$$
$$= \sqrt{-\hat{g}}\; h^1 \wedge h^2 \wedge h^3 \wedge h^4 =$$
$$= \sqrt{-\hat{g}}\; h\, d^4x \qquad (14)$$

Si la base no-holónoma h_α es ortonormal y orientada entonces

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(s, +s, +s, +s) \qquad (15)$$
$$\hat{g} = -1 \quad ; \quad \sqrt{-\tilde{g}} = h$$

y por consiguiente el elemento de volumen puede ser escrito como

$$\varepsilon = h^1 \wedge h^2 \wedge h^3 \wedge h^4 = h\, d^4x \qquad (16)$$

Para una base arbitraria, h_α las funciones conmutador $G^{\alpha}{}_{\cdot\beta\gamma}$ están definidas como

$$[h_\beta, h_\gamma] = -G^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, h_\alpha \qquad (17)$$

y por lo tanto satisfacen

$$G^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = h^{\alpha}{}_{j}\,(h_{\beta}{}^{k}\, \partial_k h_{\gamma}{}^{j} - h_{\gamma}{}^{k}\, \partial_k h_{\beta}{}^{j})$$
$$= h_{\beta}{}^{j}\, h_{\gamma}{}^{k}\,(\partial_k h^{\alpha}{}_{\cdot j} - \partial_j h^{\alpha}{}_{\cdot k}) = G^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]} \qquad (18)$$

Las funciones conmutador, $G^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ se denominan tambien objeto de no-holonomía ya que miden "la cantidad" por la cual la base h_α no es una base coordenada (u holónoma).

2) Conexiones.

Para una derivada covariante arbitraria ∇ , los coeficientes de la conexión $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ en una base arbitraria h_α estan definidos como

$$\nabla_{h_\gamma} h_\beta = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, h_\alpha \qquad (19)$$

En particular, los componentes coordenados de los coeficientes de conexión $\Gamma^{i}{}_{jk}$ serán

$$\nabla_{\partial_k} \partial_j = \Gamma^{i}{}_{jk}\, \partial_i \qquad (20)$$

Las relaciones entre los componentes coordenados y no-holónomos de una conexión es

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = h^{\alpha}{}_{i}\, h_{\beta}{}^{j}\, h_{\gamma}{}^{k}\, \Gamma^{i}{}_{jk} + h^{\alpha}{}_{i}\, h_{\gamma}{}^{k}\, \partial_k h_{\beta}{}^{i} \qquad (21)$$
$$\Gamma^{i}{}_{jk} = h_{\alpha}{}^{i}\, h^{\beta}{}_{j}\, h^{\gamma}{}_{\cdot k}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + h_{\alpha}{}^{i}\, \partial_k h^{\alpha}{}_{\cdot j} \qquad (22)$$

Si h_α es ortonormal, entonces los coeficientes de conexión no-holónomos se denominan coeficientes Ricci de rotación $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ que se corresponden con los coeficientes $\Gamma^{i}{}_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\}$ de una conexión Christoffel-Levi-Civita en una base coordenada.

Tambien es útil introducir los componentes mixtos de conexión $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta k}$ los cuales están definidos como

$$\nabla_{\partial_k} h_\beta = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta k}\, h_\alpha \qquad (23)$$

Y que están relacionados con $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ y $\Gamma^{i}{}_{jk}$ por las fórmulas

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = h_{\gamma}{}^{k}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta k} \qquad (24)$$
$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta k} = h^{\gamma}{}_{k}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \qquad (25)$$
$$\Gamma^{i}{}_{jk} = h_{\alpha}{}^{i}\, h^{\beta}{}_{j}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta k} + h_{\alpha}{}^{i}\, \partial_k h^{\alpha}{}_{j} \qquad (26)$$
$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta k} = h^{\alpha}{}_{i}\, h_{\beta}{}^{j}\, \Gamma^{i}{}_{jk} + h^{\alpha}{}_{i}\, \partial_k h_{\beta}{}^{i} \qquad (27)$$

El tensor de torsión Q de la conexión ∇ es el operador

$$Q(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \qquad (28)$$

donde X,Y son campos vectoriales. O bien considerado como una 2-forma referida a una base h^α

$$Q^\alpha = Dh^\alpha = dh^\alpha + \omega^\alpha{}_{\dot\beta} \wedge h^\beta = = \frac{1}{2} Q^{\alpha}{}_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot}\, h^\beta \wedge h^\gamma \qquad (29)$$

Donde $\omega^{\alpha}{}_{\dot\beta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta k}^{\cdot\cdot}\, dx^k$ es la 1-forma de conexión. Sus componentes en una base arbitraria h_α son

$$\begin{aligned} Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} &= Q^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]}^{\cdot\cdot} = h^\alpha(Q(h_\beta, h_\gamma)) = \\ &= \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} - G^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} = \\ &= 2\,\Gamma^{\alpha}{}_{[\gamma\beta]} - G^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \\ &= h_\beta{}^j\, \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma j}^{\cdot\cdot} - h_\gamma{}^k\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta k}^{\cdot\cdot} + \\ &\quad + h_\beta{}^j h_\gamma{}^k (\partial_j h^{\alpha}{}_{\cdot k} - \partial_k h^{\alpha}{}_{j}) \end{aligned} \qquad (30)$$

Y sus componentes en una base coordenada son

$$\begin{aligned} Q^{i}{}_{jk}^{\cdot\cdot} &= Q^{i}{}_{[jk]}^{\cdot\cdot} = dx^i(Q(\partial_j, \partial_k)) = \\ &= \Gamma^{i}{}_{kj}^{\cdot\cdot} - \Gamma^{i}{}_{jk}^{\cdot\cdot} = 2\,\Gamma^{i}{}_{[kj]}^{\cdot\cdot} = \\ &= h_\alpha{}^i (h^{\gamma}{}_{\dot k}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma j}^{\cdot\cdot} - h^{\beta}{}_{\dot j}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta k}^{\cdot\cdot} + \\ &\quad \partial_j h^{\alpha}{}_{k} - \partial_k h^{\alpha}{}_{j}) \end{aligned} \qquad (31)$$

Las componentes mixtas de la torsión están definidas como

$$\begin{aligned} Q^{\alpha}{}_{jk}^{\cdot\cdot} &= h^\alpha(Q(\partial_j, \partial_k)) = \\ &= h^{\alpha}{}_{i} (\Gamma^{i}{}_{kj}^{\cdot\cdot} - \Gamma^{i}{}_{jk}^{\cdot\cdot}) = \\ &= h^{\gamma}{}_{\dot k}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma j}^{\cdot\cdot} - h^{\beta}{}_{\dot j}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta k} + \\ &\quad + \partial_j h^{\alpha}{}_{k} - \partial_k h^{\alpha}{}_{j} \end{aligned} \qquad (32)$$

Si Q= 0 la conexión ∇ se denómina libre de torsión ó conexión simétrica lo que se observa directamente en la fórmula

En una base arbitraria h_α la derivada covariante de la métrica ∇g es en componentes

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = h_\gamma g_{\alpha\beta} - \Gamma^{\delta}{}_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot} g_{\delta\beta} - \Gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} g_{\alpha\delta} \qquad (33)$$

En particular los componentes en una base coordenada son

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^{\ell}{}_{ik} g_{\ell j} - \Gamma^{\ell}{}_{jk}^{\cdot\cdot} g_{i\ell} \qquad (34)$$

Y si la base h_α es ortonormal

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = -\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot} g_{\delta\beta} - \Gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} g_{\alpha\delta} \qquad (35)$$

Los componentes mixtos de ∇g están definidos como

$$\nabla_k g_{\alpha\beta} = \partial_k g_{\alpha\beta} - \Gamma^{\delta}{}_{\alpha k} g_{\delta\beta} - \Gamma^{\delta}{}_{\beta k} g_{\alpha\delta} \qquad (36)$$

Y si h_α es ortonormal

$$\nabla_k g_{\alpha\beta} = -\Gamma^{\delta}{}_{\alpha k} g_{\delta\beta} - \Gamma^{\delta}{}_{\beta k} g_{\alpha\delta} \qquad (37)$$

Si $\nabla g = 0$, i.e., si se verifica el llamado teorema de Ricci, entonces la conexión es métrica ó compatible con la métrica. A $\nabla g = 0$ se la suele denominar condición de metricidad.

Si existe una 1-forma $N = N_\gamma h^\gamma = N_k dx^k$ tal que

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = -N_\gamma g_{\alpha\beta} \qquad (40)$$

$$\nabla_k g_{ij} = -N_k g_{ij} \qquad (a,b)$$

Entonces la conexión se denomina compatible Weyl ó semi-métrica. La condición (40) se denomina condición de compatibilidad de Weyl y a la 1-forma se le denomina potencial de Weyl, ya que este lo identificó con el potencial electromagnético en un ET de Weyl.

En general $\nabla_i g_{jk} = -N_{ijk}$ (41)

siendo $N_{ijk} = N_{i(jk)}$ (40 componentes) el tensor de no-metricidad parcial, que mide la cantidad en la que conexión no preserva la métrica durante un transporte paralelo.

$$N_{ijk} = N_i g_{jk} + \bar{N}_{ijk} \qquad (42)$$

donde $N_i = \dfrac{N_{i\ell}{}^{\ell}}{4}$ y $\bar{N}_{ijk}$ tiene traza nula.

La expresión más general en un espacio métrico-afín de los coeficientes de conexión $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ en una base arbitraria h_α, viene dada en función de las derivadas parciales de las componentes de la métrica $h_\delta g_{\beta\gamma}$, del objeto de no holonomía $G_{\delta\beta\gamma} = g_{\delta\alpha} G^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$, de la torsión $Q_{\delta\beta\gamma} = g_{\delta\alpha} Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ y de la derivada covariante de la métrica $\nabla_\delta g_{\beta\gamma}$ mediante la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = {} & \tfrac{1}{2} g^{\alpha\delta}(h_\beta g_{\delta\gamma} + h_\gamma g_{\delta\beta} - h_\delta g_{\beta\gamma}) \\ & + \tfrac{1}{2} g^{\alpha\delta}(G_{\beta\delta\gamma} + G_{\gamma\delta\beta} - G_{\delta\beta\gamma}) \\ & + \tfrac{1}{2} g^{\alpha\delta}(Q_{\beta\delta\gamma} + Q_{\gamma\delta\beta} - Q_{\delta\beta\gamma}) \\ & - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\delta}(\nabla_\beta g_{\delta\gamma} + \nabla_\gamma g_{\delta\beta} - \nabla_\delta g_{\beta\gamma})\end{aligned} \qquad (43)$$

Esta fórmula se obtiene sustituyendo la ecuación (30) para Q y la ecuación (35) para ∇g en la derecha de (21). Nótese que con las convenciones que hemos tomado todos los indices seguen la misma regla en todas las líneas y que los signos son todos iguales +, salvo el último que es − .

Si imponemos la condición de metricidad $\nabla g = 0$ y de torsión nula $Q=0$, existe una única conexión que verifica esos requirimientos, la conexión Christoffel-Levi-Civita, cuyos coeficientes de conexión son en una base arbitraria h_α

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \{^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\} = {} & \tfrac{1}{2} g^{\alpha\delta}(h_\beta g_{\delta\gamma} + h_\gamma g_{\delta\beta} - h_\delta g_{\beta\gamma}) + \\ & + \tfrac{1}{2} g^{\alpha\delta}(G_{\beta\delta\gamma} + G_{\gamma\delta\beta} - G_{\delta\beta\gamma})\end{aligned} \qquad (44)$$

Nótese el símbolo ∼ sobre Γ significa semi-Riemanniana y que $\{^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\}$ la mayoría de los autores solo lo utilizan cuando la base es coordenada. Nosotros también lo usamos para una base arbtraria.

La condición de metricidad $\nabla g = 0$ (vease 33) implica que

$$h_\gamma g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\delta}\{^{\delta}{}_{\beta\gamma}\} + g_{\beta\delta}\{^{\delta}{}_{\alpha\gamma}\} \qquad (45)$$

Y la condición de torsión nula $Q=0$ (vease 30) dice que

$$G^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \{^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\} - \{^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\} \qquad (46)$$

Por consiguiente en una base ortonormal, $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\delta}\{^{\delta}{}_{\beta\gamma}\}$ es antisimetrico en α y β, $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\Gamma}_{[\alpha\beta]\gamma}$ y por otra parte, en una base coordenada $\{^{i}{}_{jk}\}$ es simétrico en j y k, $\tilde{\Gamma}^{i}{}_{jk} = \{^{i}{}_{jk}\} = \tilde{\Gamma}^{i}{}_{(jk)}$.

La colección de términos

$$\{G\}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \tfrac{1}{2} g^{\alpha\delta}(G_{\beta\delta\gamma} + G_{\gamma\delta\beta} - G_{\delta\beta\gamma}) \qquad (47)$$

"mide la cantidad" por la cual la base h_α no es una base coordenada, y será llamado el "símbolo de no holonomía" para poder distinguirlo del "objeto" de no-holonomía G .

La ecuación (47) puede ser invertida para obtener

$$G^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} = \{G\}^{\alpha}{}_{\gamma\beta} - \{G\}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} \qquad (48)$$

Por otra parte la colección de términos

$$\{hg\}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}\left(h_\beta g_{\delta\gamma} + h_\gamma g_{\delta\beta} - h_\delta g_{\beta\gamma}\right) \qquad (49)$$

"mide la cantidad" por la cual la base h_α no es una base ortonormal (ó "la cantidad" por la cual los componentes de la métrica no son constantes). Por tanto llamaremos a $\{hg\}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ el símbolo de anormalidad, mientras que $h_\delta g_{\beta\gamma}$ será denominado el objeto de anormalidad.

La ecuación (49) puede ser invertida para obtener

$$h_\gamma g_{\alpha\beta} = \{hg\}_{\alpha\beta\gamma} + \{hg\}_{\beta\alpha\gamma} \qquad (50)$$

Combinando las ecuaciones (42) , (47) y (49) obtenemos que el símbolo de Christoffel-Levi-Civita tiene la expresión

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \left\{{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\right\} = \{hg\}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} + \{G\}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} \qquad (51)$$

Es la suma del símbolo de no-holonomía y del de anormalidad.

La diferencia entre la conexión general $\overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ y la conexión Christoffel-Levi-Civita $\tilde{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma}$ es el tensor defecto

$$\begin{aligned} D^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} &= \overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} - \left\{{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\right\} = \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}\left(Q_{\beta\delta\gamma} + Q_{\gamma\delta\beta} - Q_{\delta\beta\gamma}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}\left(\nabla_\beta g_{\delta\gamma} + \nabla_\gamma g_{\delta\beta} - \nabla_\delta g_{\beta\gamma}\right) \end{aligned} \qquad (52)$$

El cual se puede descomponer en la suma

$$D^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} = -K^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} - M^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} \qquad (53)$$

siendo

$$K^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\delta}\left(Q_{\beta\delta\gamma} + Q_{\gamma\delta\beta} - Q_{\delta\beta\gamma}\right) \qquad (54)$$

el tensor de contorsión.

y

$$M^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}\left(\nabla_\beta g_{\delta\gamma} + \nabla_\gamma g_{\delta\beta} - \nabla_\delta g_{\beta\gamma}\right) \qquad (55)$$

el tensor de no-metricidad absoluto.

Las ecuaciones (53), (54) y (55) se resuelven para obtener

$$Q^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\gamma\beta} = K^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} - K^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\gamma\beta} = D^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\gamma\beta} - D^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \qquad (56)$$

y

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta\gamma} + M_{\beta\alpha\gamma} = -D_{\alpha\beta\gamma} - D_{\beta\alpha\gamma} \qquad (57)$$

Las ecuaciones (51) (52) y (53), muestran que la conexión lineal más general dada por la fórmula (41) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} &= \left\{{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\right\} + D^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} = \\ &= \{hg\}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} + \{G\}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} - K^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} - M^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma} \end{aligned} \qquad (58)$$

A esta conexión la denominamos conexión metrica-afin y es conexión lineal más general.

En una base coordenada vendrá dada por la expresión

$$\overset{MA}{\Gamma}{}^{i\cdot\cdot}{}_{jk} = \left\{{}^{i}{}_{jk}\right\} + D^{i\cdot\cdot}{}_{jk} = \qquad (59)$$

$$= \{\partial g\}^{i}{}_{jk} - K^{i\cdot\cdot}{}_{jk} - M^{i\cdot\cdot}{}_{jk} \qquad (60)$$

Una conexión compatible con la métrica $\nabla g = 0$ pero con torsión arbitraria, se denomina Conexión Cartan $\hat{\Gamma}^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\beta\gamma}$ en la cual

$$\overset{\wedge}{\nabla}_\alpha g_{\beta\gamma} = 0 \qquad ; \quad M^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} = 0 \tag{61}$$

$$X^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = D^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} = -K^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \tag{62}$$

Una conexión de torsión cero y semi-métrica se denomina conexión de Weyl , $\overset{W}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot}$ y satisface

$$Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0 \Rightarrow K^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} = 0 \tag{63}$$

$$\overset{W}{\nabla}_\alpha g_{\beta\gamma} = -N_\alpha g_{\beta\delta} \quad ; \quad M^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} = W^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} \tag{64}$$

$$D^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} = -W^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} = \frac{1}{2}\left(N_\beta \delta^{\alpha}_{\gamma} + N_\gamma \delta^{\alpha}_{\beta} - N^{\alpha} g_{\beta\gamma}\right) \tag{65}$$

Una conexión compatible Weyl (semi-métrica) pero con torsión arbitraria, se denominará conexión Weyl-Cartan $\overset{WC}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot}$ y verificará

$$\overset{WC}{\nabla}_\alpha g_{\beta\gamma} = -N_\alpha g_{\beta\gamma} \tag{66}$$

$$D^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} = -K^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} - W^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} \tag{67}$$

Donde en $W^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot}$ significa que el tensor de no-metricidad es el específico de la conexión Weyl, dado por la fórmula (65)

3) Curvatura.

La curvatura metrico-afin $\overset{MA}{R}$ de la conexión general dada por la fórmula (43) es el operador

$$\overset{MA}{\Omega}(X,Y)Z = \overset{MA}{R}(X,Y).Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{68}$$

Donde X,Y,Z son campos vectoriales y [ ] el conmutador.

También se la puede considerar como la 2-forma (ver apéndice 2)

$$\overset{MA}{\Omega}{}^{\alpha}{}_{\beta}^{\cdot} = \frac{1}{2}\overset{MA}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}^{\cdot\cdot\cdot} h^{\gamma}\wedge h^{\delta} \tag{69}$$

$$= d\overset{MA}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\beta}^{\cdot} + \overset{MA}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\gamma}^{\cdot}\wedge\overset{MA}{\omega}{}^{\gamma}{}_{\cdot\beta} \tag{70}$$

Sus componentes en una base arbitraria h_α, son

$$\overset{MA}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}^{\cdot\cdot\cdot} = h^{\alpha}\left(\overset{MA}{R}(h_\gamma,h_\delta).h_\beta\right) =$$

$$= h_\gamma \overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\delta}^{\cdot\cdot} - h_\delta \overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} +$$

$$+\overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\varepsilon\gamma}^{\cdot\cdot}\overset{MA}{\Gamma}{}^{\varepsilon}{}_{\beta\delta}^{\cdot\cdot} - \overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\varepsilon\delta}^{\cdot\cdot}\overset{MA}{\Gamma}{}^{\varepsilon}{}_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot} - G^{\varepsilon}{}_{\gamma\delta}^{\cdot\cdot}\overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\varepsilon}^{\cdot\cdot} \tag{71}$$

En particular, sus componentes coordenadas son

$$\overset{MA}{R}{}^{i}{}_{jkl}^{\cdot\cdot\cdot} = dx^{i}\left(\overset{MA}{R}(\partial_k,\partial_l),\partial_j\right) =$$

$$= \partial_k \overset{MA}{\Gamma}{}^{i}{}_{jl}^{\cdot\cdot} - \partial_l \overset{MA}{\Gamma}{}^{i}{}_{jk}^{\cdot\cdot} +$$

$$+\overset{MA}{\Gamma}{}^{i}{}_{mk}^{\cdot\cdot}\overset{MA}{\Gamma}{}^{m}{}_{jl}^{\cdot\cdot} - \overset{MA}{\Gamma}{}^{i}{}_{ml}^{\cdot\cdot}\overset{MA}{\Gamma}{}^{m}{}_{jk}^{\cdot\cdot} = \tag{72}$$

$$= 2\,\partial_{[k}\overset{MA}{\Gamma}{}^{i}{}_{|j|l]} + 2\,\overset{MA}{\Gamma}{}^{i}{}_{m[k|}\overset{MA}{\Gamma}{}^{m}{}_{j|l]}^{\cdot\cdot}$$

Donde [ ] significa antisimetrización.

Los componentes mixtos estarán definidos como

$$\overset{MA}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta kl}^{\cdot\cdot\cdot} = h^{\alpha}\left(\overset{MA}{R}(\partial_k,\partial_l).h_\beta\right) =$$

$$= \partial_k \overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta l}^{\cdot\cdot} - \partial_l \overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta k} +$$

$$+\overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\varepsilon k}^{\cdot\cdot}\overset{MA}{\Gamma}{}^{\varepsilon}{}_{\beta l}^{\cdot\cdot} - \overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\varepsilon l}^{\cdot\cdot}\overset{MA}{\Gamma}{}^{\varepsilon}{}_{\beta k}^{\cdot\cdot} = \tag{73}$$

$$= 2\,\partial_{[k|}\overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta|l]} + 2\,\overset{MA}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\varepsilon[k|}\overset{MA}{\Gamma}{}^{\varepsilon}{}_{\beta|l]}$$

Por contracción en 1º y 3º indices de tensor de curvatura general, obtenemos el tensor de curvatura Ricci metrico-afín (asimétrico)

$$\overset{MA}{R}_{\beta\delta} = \overset{MA}{R}{}^{\gamma\cdots}{}_{\beta\gamma\delta} \qquad (74)$$

Contrayendo el 1º y 2º indices, obtenemos el tensor de curvatura de homotecia

$$\overset{MA}{R}_{\gamma\delta} = \overset{MA}{R}{}^{\alpha\cdots}{}_{\alpha\gamma\delta} \qquad (75)$$

Y mediante la contracción del tensor de Ricci obtenemos la curvatura escalar general

$$\overset{MA}{R} = g^{\beta\delta}\overset{MA}{R}_{\beta\delta} = R^{\beta\cdot}{}_{\cdot\beta} \qquad (76)$$

El tensor de Einstein (asimétrico) metrico-afín será

$$\overset{MA}{G}_{\alpha\beta} = \overset{MA}{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\overset{MA}{R} \qquad (77)$$

La curvatura Riemann-Christoffel obtenida con la conexión Christoffel-Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ tendrá como componentes en una base arbitraria h_α

$$\tilde{R}^{\alpha\cdots}{}_{\beta\gamma\delta} = h_\gamma\{{}^{\alpha}{}_{\beta\delta}\} - h_\delta\{{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\} + \{{}^{\alpha}{}_{\varepsilon\gamma}\}\{{}^{\varepsilon}{}_{\beta\delta}\} - \{{}^{\alpha}{}_{\varepsilon\delta}\}\{{}^{\varepsilon}{}_{\beta\delta}\} - G^{\varepsilon\cdot\cdot}{}_{\gamma\delta}\{{}^{\alpha}{}_{\beta\varepsilon}\} \qquad (78)$$

Y en una base coordenada sus componentes son

$$\tilde{R}^{i\cdots}{}_{jkl} = \partial_k\{{}^{i}{}_{jl}\} - \partial_l\{{}^{i}{}_{jk}\} + \{{}^{i}{}_{mk}\}\{{}^{m}{}_{jl}\} - \{{}^{i}{}_{ml}\}\{{}^{m}{}_{jk}\} = 2\,\partial_{[k|}\tilde{\Gamma}^{i}{}_{j|l]} + 2\,\tilde{\Gamma}^{i}{}_{m[k|}\tilde{\Gamma}^{m}{}_{j|l]} \qquad (79)$$

Y los componentes mixtos serán

$$\tilde{R}^{\alpha\cdots}{}_{\beta kl} = \partial_k\{{}^{\alpha}{}_{\beta l}\} - \partial_l\{{}^{\alpha}{}_{\beta k}\} + \{{}^{\alpha}{}_{\varepsilon k}\}\{{}^{\varepsilon}{}_{\beta l}\} - \{{}^{\alpha}{}_{\varepsilon l}\}\{{}^{\varepsilon}{}_{\beta k}\} \qquad (80)$$

La curvatura Ricci-Christoffel (simétrica) (10 componentes) es la única contracción, ya que ahora la curvatura de homotecia es cero y será

$$\tilde{R}_{\beta\delta} = \tilde{R}^{\gamma\cdots}{}_{\beta\gamma\delta} \qquad (81)$$

Y la curvatura escalar Christoffel es

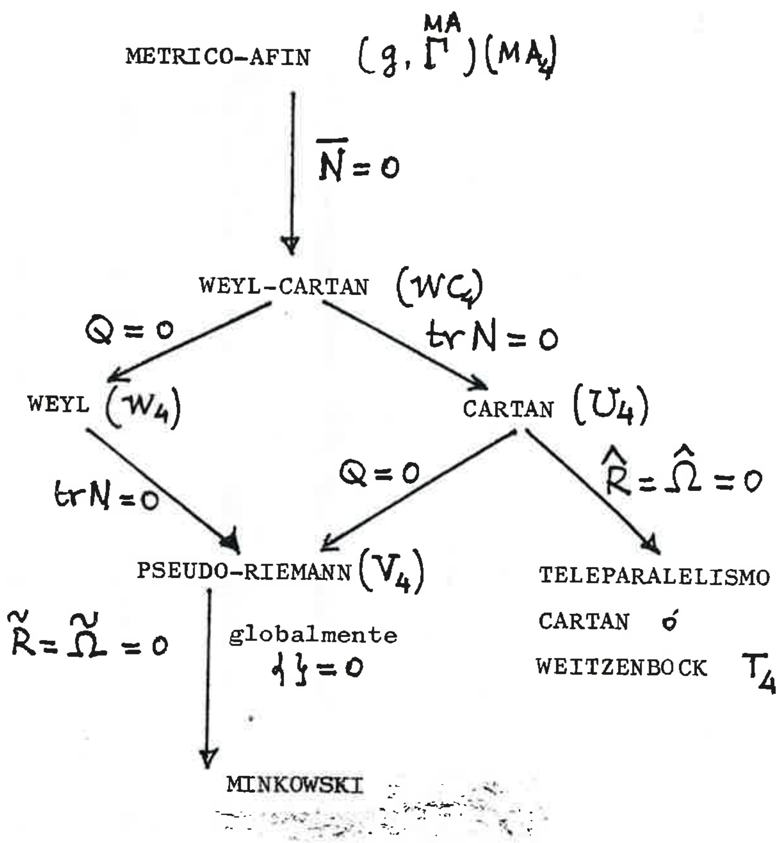
$$\tilde{R} = g^{\beta\delta}\tilde{R}_{\beta\delta} \qquad (82)$$

Y la curvatura de Einstein-Christoffel (10 componentes)

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\tilde{R} \qquad (83)$$

Expresiones analogas se obtendrían para la curvatura Weyl-Cartan y la curvatura Cartan aunque por supuesto las simetrías (ó asimetrías) de los componentes tensoriales (y su número por tanto) serían distintas.

Podemos resumir en un esquema general los espacios tiempos ET que se pueden considerar en general, asi como sus relaciones, en el siguiente cuadro. Hay que hacer la salvedad de que no se han considerado las geometrías puramente afines y que se han considerado las geometrías métricas, como un caso particular de las métrico-afines.



ESQUEMA GENERAL DE GEOMETRIAS METRICO-AFINES

APENDICE 2

NOTACION EN
FORMAS DIFERENCIALES ALTERNADAS

Este apéndice no es una exposición sistemática del tema ya que existen excelentes monografías(por ejemplo, Choquet-Bruhat Y et al (1977), Thirring W. (1978), Von Westenholz C. (1981)), y artículos(por ejemplo, Trautman A. (1973), Thirring W. y Wallner R.P. (1978)), sobre él. Lo que se expone aquí es solamente una introducción al cálculo de Cartan,ya que este ha sido extensamente utilizado en la memoria. Al contrario que en el resto de ésta, en este apéndice las bases coordenadas llevan índices griegos $\mu, \nu, \ldots$ y las no-holónomas latinos i,j,k.

1) Algebra exterior.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo R,dim V= n. Una álgebra asociativa $\Lambda(V)$, con las leyes de adición + y de producto exterior $\wedge$ sobre R se denomina Algebra exterior ó algebra de Graßmann sobre V, cuando verifica

$$\text{i)}\quad \Lambda(V) \ni 1 \in R \quad y \quad \Lambda(V) \subseteq V \tag{1}$$

$$\text{ii)}\quad v \in V \Rightarrow v \wedge v = 0 \tag{2}$$

$$\text{iii)}\quad \dim \Lambda(V) = 2^n \tag{3}$$

si $\{h_i\}_{i=1,..,n}$ es una base de V entonces

$$\forall p \in [1,n] \; ; \; h_{i_1 \ldots i_p} = h_{i_1} \wedge h_{i_2} \wedge \ldots \wedge h_{i_p} \in \Lambda(V) \tag{4}$$

Y debido a ii), $h_{i_1 \ldots i_p} = h_{|i_1 \ldots i_p|}$ con $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$

es decir $h_{i_1 \ldots i_p}$ es completamente antisimétrico.

Por otra parte

$$\forall \alpha \in \Lambda(V) \Rightarrow \alpha = \alpha_0 + \sum_{p=1}^{n}{}' \alpha^{i_1 \ldots i_p} h_{|i_1 \ldots i_p|} \qquad (5)$$

donde $\alpha_0, \alpha^{i_1 \ldots i_p} \in R$

Los elementos $h_{|i_1 \ldots i_p|}$ generan un subespacio lineal de $\Lambda(V)$, $\Lambda^p(V)$, de los p-vectores exteriores (nótese que $\Lambda^0(V) = R$ y $\Lambda^1(V) = V$) tal que

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda_p(V) \qquad (6)$$

Considerando el espacio dual $V^* = \{f : V \to R, \text{ lineal}\}$ del espacio V, se denomina $\Lambda(V^*)$ al algebra exterior sobre V^*. De la misma manera los subespacios lineales $\Lambda_p(V^*)$ contienen a todas las p-formas sobre V, asimismo $\Lambda_0(V^*) = R$ pero $\Lambda_1(V^*) = V^*$

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda_p(V^*) \qquad (7)$$

Tanto $\Lambda(V)$ como $\Lambda(V^*)$ tienen estructura de álgebra graduada bajo el producto exterior ó cuña ó de Graßmann "$\wedge$"

$$\wedge : \Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \to \Lambda^{p+q}(V) \qquad (8)$$

$$\forall p, q \in [0, n] \; / \; p+q \leq n$$

2) p-vectores y p-formas sobre M^n

Sea M_n una variedad n-dimensional localmente homomorfa a R^n, diferenciable y sean $T_p M^n$ y $T^*_p M_n$ los espacios vectoriales tangentes y cotangentes en $p \in M_n$ con bases $\{h_i\}$ y $\{h^i\}$, i=1...n, respectivamente.

Definiendo el producto exterior $\wedge$ como

$$h_{i_1 \ldots i_p} = h_{i_1} \wedge h_{i_2} \wedge \ldots \wedge h_{i_p} = p! \, h_{[i_1} \otimes \ldots \otimes h_{i_p]}$$

y

$$h^{i_1 \ldots i_p} = h^{i_1} \wedge h^{i_2} \wedge \ldots \wedge h^{i_p} = p! \, h^{[i_1} \otimes \ldots \otimes h^{i_p]}$$

(9.10)

Donde $\otimes$ señala el producto tensorial y los corchetes completa antisimetrización, tal que

$$[i_1 \ldots i_p] = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \Sigma_p}{}' (-1)^{\sigma} i_{\sigma_1} \ldots i_{\sigma_p} \qquad (11)$$

Donde Σ_p es el grupo de permutaciones de p elementos.

Con la ayuda de el producto exterior "$\wedge$" podemos construir el álgebra exterior sobre el espacio vectorial $T_m M^n$ ó sobre su dual $T^*_m M^n$, i.e., las álgebras graduadas

$$\Lambda(T_m M^n) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(T_m M^n) \qquad (12)$$

$$\Lambda(T^*_m M^n) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda_p(T^*_m M^n) \qquad (13)$$

siendo $\Lambda^p(T_m M^n)$ y $\Lambda_p(T^*_m M^n)$ respectivamente los espacios de p-vectores y p-formas (exteriores) en $m \in M^n$ sobre $T_m M^n$ y $T^*_m M^n$ respectivamente.

Siendo $\Lambda^0(T_m M^n) = \Lambda_0(T^*_m M^n) = R$ y $h_{|i_1 \ldots i_p|}$ y $h^{|i_1 \ldots i_p|}$ las bases de Λ^p y Λ_p respectivamente.

Por tanto

$$\Lambda^p(T_m M^n) \ni X = X^{|i_1 \ldots i_p|} h_{i_1 \ldots i_p} = \frac{1}{p!} X^{i_1 \ldots i_p} h_{i_1 \ldots i_p} \qquad (14)$$

$$\Lambda_p(T^*_m M^n) \ni \omega = \omega_{|i_1 \ldots i_p|} h^{i_1 \ldots i_p} = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \ldots i_p} h^{i_1 \ldots i_p} \qquad (15)$$

con $X^{i_1 \ldots i_p} \in R$ y $\omega_{i_1 \ldots i_p} \in R$. El nº de componentes es en ambos casos $\binom{n}{p}$. La barra vertical significa suma sobre $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$. Ahora se pueden definir los campos p-vectoriales y los campos p-formas en un entorno $U \subseteq M^n$ de la siguiente manera.

$$\mathcal{F}^p(M^n) = \{X : m \longrightarrow \Lambda^p(T_m M^n) \,/\, m \in M^n\} \quad (16)$$

$$\mathcal{F}_p(M_n) = \{\omega : m \longrightarrow \Lambda_p(T^*_m M^n) \,/\, m \in M^n\} \quad (17)$$

Suponiendo que son de clase C^∞, $\mathcal{F}^p(M^n)$ y $\mathcal{F}_p(M^n)$ constituyen los espacios de campos vectoriales de orden p y de campos de formas de grado p, ambos tienen estructura algebraica de módulo sobre el anillo de funciones $E_0(M^n) = C^\infty(M^n, R)$

Y de submodulo de $\mathcal{E}^p(M^n)$ y $\mathcal{E}_p(M^n)$ siendo estos los módulos sobre $E_0(M^n)$ de los campos tensoriales p contravariantes y p covariantes, respectivamente

$$\mathcal{E}^p(M^n) = \{T : m \longrightarrow \otimes^p T_m M^n \,/\, C^\infty, m \in M^n\} \quad (18)$$

$$\mathcal{E}_p(M^n) = \{V : m \longrightarrow \otimes_p T^*_m M^n \,/\, C^\infty, m \in M^n\} \quad (19)$$

De forma análoga los campos tensoriales mixtos de tipo $\mathcal{E}^r_s(M^n)$ estarán definidos como

$$\mathcal{E}^r_s(M^n) = \{M : m \longrightarrow \otimes^r T_m M^n \otimes_s T^*_m M^n\} \quad (20)$$

Estos campos tensoriales de tipo $\mathcal{E}^r_s(M^n)$ pueden ser interpretados como 0-formas de tipo $(\mathcal{E}^r_s, L^r_s)$ donde $\mathcal{E}^r_s$ es la representacióntensorial mixta y

$$L^r_s = R^n \otimes \underset{r}{\cdots} \otimes R^n \otimes (R^n)^* \otimes \underset{s}{\cdots} \otimes (R^n)^* \quad (21)$$

Asimismo puede construir las algebras exteriores sobre M^n

$$F(M^n) = \overset{n}{\underset{p=0}{\oplus}} F^p(M^n) \quad (22)$$

$$F^*(M^n) = \overset{n}{\underset{p=0}{\oplus}} \mathcal{F}_p(M^n) \quad (23)$$

Nótese que para p=1, $\Lambda(T_m M^n) = T_m M^n \overset{1}{\underset{=}{\otimes}} T_m M^n$ y por tanto $F^1(M^n) = \mathcal{E}^1(M^n)$ y analogamente $F_1(M^n) = \mathcal{E}_1(M^n)$

A través del producto exterior $\wedge : F^p \times F^q \to F^{p+q}$ y analogamente para campos de formas, $F(M^n)$ y $F^*(M^n)$ adquieren la estructura de álgebra graduada sobre R.

Sean $X \in F^p$, $Y \in F^q$, $\alpha \in F_p$, $\beta \in F_q$ los productos exteriores siguientes verifican

$$(X \wedge Y)(h^{i_1 \cdots i_p i_{p+1} \cdots i_{p+q}}) = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} X^{[i_1 \cdots i_p} Y^{i_{p+1} \cdots i_{p+q}]} \quad (24)$$

$$(\alpha \wedge \beta)(h_{i_1 \cdots i_p i_{p+1}, \cdots i_{p+q}}) = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} \alpha_{[i_1 \cdots i_p} \beta_{i_{p+1} \cdots i_{p+q}]} \quad (25)$$

con $X \wedge Y \in F^{p+q}$ y $\alpha \wedge \beta \in F_{p+q}$ ya que

$$\wedge(X, Y) = X \wedge Y \quad (26)$$

$$\wedge(\alpha, \beta) = \alpha \wedge \beta \quad (27)$$

Como $F(M^n)$ y $F^*(M^n)$ tienen estructura de álgebra graduada se verifican las siguientes propiedades

i) $\wedge$ es asociativa

ii) $\wedge$ es bilineal

iii) $X \wedge Y = (-1)^{pq} Y \wedge X \quad \forall X \in F^p \ \forall Y \in F^q \quad (28)$

$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \quad \forall \alpha \in F_p \ \forall \beta \in F_q \quad (29)$

En el caso particular $\omega \in F_p$ y $f \in F_0 \equiv C^\infty(M^n, R)$

$$f \wedge \omega = f.\omega \quad (30)$$

3) <u>δ de Kronecker generalizada</u>.

i) Las bases $\{h_i\} \in F^1$ y $\{h^i\} \in F_1$ don duales, i.e., se verifica

$$h^k(h_i) = \delta_i^{\ k} \quad (31)$$

ii) En el caso general $\{h_{i_1..i_p}\}\in F^p$ y $\{h^{i_1..i_p}\}\in F_p$ se verifica

$$h^{i_1..i_p}(h_{k_1..k_p}) = \delta^{i_1..i_p}_{k_1..k_p} \qquad (32)$$

donde δ es el tensor de Kronecker generalizado ó tensor de permutación y se verifican

$$\delta^{k_1..k_p}_{i_1..i_p} = p!\,\delta^{k_1..k_p}_{[i_1..i_p]} \qquad (33)$$

$$\delta^{|k_1..k_p|}_{|i_1..i_p|} = \delta^{k_1}_{i_1}\cdots\delta^{k_p}_{i_p} \qquad (34)$$

verificandose

$$\alpha_{i_1..i_p} = \delta^{k_1..k_p}_{i_1..i_p}\,\alpha_{|k_1...k_p|} \qquad (35)$$

para $\alpha\in F_p$ y analogamente para $X\in F^p$

Asimismo se verifican

$$(X\wedge Y)^{i_1..i_{p+q}} = \delta^{i_1..i_{p+q}}_{k_1..k_{p+q}}\,X^{|k_1..k_p|}\,Y^{|k_{p+1}..k_{p+q}|} \qquad (36)$$

$$(\alpha\wedge\beta)_{i_1..i_{p+q}} = \delta^{k_1..k_{p+q}}_{i_1..i_{p+q}}\,\alpha_{|k_1..k_p|}\,\beta_{|k_{p+1}..k_{p+q}|} \qquad (37)$$

iii) Y teniendo en cuenta (34) para $s<p\leq n$

$$\delta^{i_1..i_{p-s}\,|j_1..j_s|}_{k_1..k_{p-s}\,j_1..j_s} = \binom{n-p+s}{s}\,\delta^{i_1...i_{p-s}}_{k_1..k_{p-s}} \qquad (38)$$

y si p=s

$$\delta^{|i_1..i_p|}_{i_1..i_p} = \binom{n}{p} \qquad (39)$$

y si p=n

$$\delta^{i_1...i_{n-s}\,|j_1..j_s|}_{k_1..k_{n-s}\,j_1..j_s} = \delta^{i_1..i_{n-s}}_{k_1..k_{n-s}} \qquad (40)$$

y por tanto

$$\delta^{i_1..i_p}_{k_1..k_p} = \delta^{i_1..i_p\,|j_{p+1}..j_n|}_{k_1..k_p\,j_{p+1}..j_n} \qquad (41)$$

iv) Si $X\in F^1$ y $\omega\in F_1$ se verifica

$$\alpha(X) = \alpha_i X^i \in F_0 \qquad (42)$$

Que es el producto escalar $\langle\alpha|X\rangle = \alpha(X)$

En el caso general $Y\in F^p$, $\beta\in F_p$

$$\langle\beta|Y\rangle = \beta(Y) = \beta_{|i_1..i_p|}\,Y^{i_1..i_p}\in F_0 \qquad (43)$$

Este producto generaliza a su vez, en el caso en que el vector y la forma sean de distinto grado al producto interior ó contracción.

4) <u>Derivación y antiderivación</u>.

Sean $O: F(M^n)\rightarrow F(M^n)$ y $O^*: F^*(M^n)\rightarrow F^*(M^n)$ dos operadores en $F(M^n)$ y $F^*(M^n)$ respectivamente de grado s, tales que

$$\forall p \quad O: F^p(M^n) \longrightarrow F^{p+s}(M^n) \qquad (44)$$

$$\forall p \quad O^*: F_p(M^n) \longrightarrow F_{p+s}(M^n) \qquad (45)$$

O y O* se denominan derivaciones de grado s, si

$$O(X\wedge Y) = OX\wedge Y + X\wedge OY \qquad (46)$$

$$O^*(\alpha\wedge\beta) = O^*\alpha\wedge\beta + \alpha\wedge O^*\beta \qquad (47)$$

O y O* se denominan antiderivaciones de grado s, si

$$O(X\wedge Y) = OX\wedge Y + (-1)^p X\wedge OY \qquad (48)$$

$$O^*(\alpha\wedge\beta) = O^*\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge O^*\beta \qquad (49)$$

$$\forall X\in F^p,\ \forall Y\in F^q,\ \forall\alpha\in F_p,\ \forall\beta\in F_q$$

5) Producto interno a través de vectores.

Como un caso especial de antiderivación con s= -1 y a la vez como una generalización del producto escalar se define el producto interno o interior ó contracción ó derivada interior. Sea $X \in F^1$ y $\omega \in F_p$ su producto interno denotado por i ó $\lrcorner$ es

$$i : F^1 \times F_p \to F_{p-1} \qquad (42)$$
$$(X, \omega) \to i(X)\omega = i_X \omega = X \lrcorner \omega$$

Si verifica

i) $i(X)$ es una antiderivación en $F^*(M^n)$ de grado s= -1 (43)

ii) $i(X) f = 0 \quad \forall f \in F_0$ (44)

iii) $i(X) h^i = X^i \quad \{h^i\}$ base de F_1 (45)

Entre las propiedades que verifica se cuentan las siguientes

1) $i(X)(f\omega + g\theta) = f\, i(X)\omega + g\, i(X)\theta$ (46)

$\forall X \in F^1,\ \omega \in F_p,\ \theta \in F_q,\ f, g \in F_0$ (47)

2) $i(X)(\omega \wedge \theta) = i(X)\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge i(X)\theta$ (48)

3) $i(X)i(X)(\omega\wedge\theta) = i(X)i(X)\omega\wedge\theta + \omega \wedge i(X)i(X)\theta$ (49)

Ya que el operador $i(X)\circ i(X)$ es una derivación que aniquila $f \in F_0$ y $\omega \in F_1$ por (44) y (45)

por tanto

$$i(X)\circ i(X) = 0 \qquad (50)$$

4) $\forall \omega \in F_p$

$$i(h_i)\omega = \omega_{|i_1\dots i_p|}\, i(h_i)\, h^{i_1\dots i_p} = \omega_{i|i_2\dots i_p|}\, h^{i_2\dots i_p} = \frac{1}{(p-1)!}\,\omega_{i i_2\dots i_p}\, h^{i_2\dots i_p} \qquad (51)$$

5) $\omega_i = i(h_i)\,\omega$

Y en general , $s \leq p$

$$\omega_{i_1\dots i_s} = i(h_{i_s})\, i(h_{i_{s-1}})\dots i(h_{i_1})\,\omega \qquad (52)$$

Para s= p obtenemos los componentes de $\omega \in F_p$

Por otra parte definiendo

$$i(h_{i_1\dots i_s}) = i(h_{i_1})\circ \dots \circ i(h_{i_s}) \qquad (53)$$

obtenemos $\forall Z \in F^s$

$$i(Z) = Z^{|i_1\dots i_s|}\, i(h_{i_1\dots i_s}) \qquad (54)$$

y para $\omega \in F_p$

$$i(Z)\omega = \begin{cases} 0 & \text{para } s > p \quad (55) \\ Z^{|i_1\dots i_s|}\,\omega_{i_1\dots i_s} & s \leq p \quad (56) \end{cases}$$

El operador generalizado / $Z \in F^s$

$$i(Z) : F_p \to F_{p-s} \qquad (57)$$

no es para s > 1 ni una antiderivación ni una derivación, por ejemplo para s= 2

$$i(Z)(\omega\wedge\theta) = i(Z)\,\omega\wedge\theta + \omega\wedge i(Z)\,\theta + (-1)^{p+1} Z^{i_1 i_2}\,\omega_{i_1}\wedge\theta_{i_2} \qquad (58)$$

para $Z \in F^2,\ \omega \in F_p,\ \theta \in F_q$

6) $\forall \omega \in F_p \ , \{h_i\} \subset F^1 \ , \{h^i\} \in F_1$

A partir de la propiedad anterior obtenemos que

$$\omega = \binom{p}{s}^{-1} h^{i_1 \dots i_s} \wedge \omega_{|i_1 \dots i_s|} \tag{59}$$

Que para s= 1 toma la expresión

$$\omega = \frac{1}{p} h^i \wedge i(h_i)\, \omega \tag{60}$$

Esta propiedad es facilmente demostrable ya que

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} h^{i_1 \dots i_p} =$$

$$= \frac{(p-s)!}{p!} \omega_{i_1 \dots i_s | i_{s+1} \dots i_p|} h^{i_1 \dots i_p} =$$

$$= \frac{(p-s)!}{p!} h^{i_1 \dots i_s} \wedge \omega_{i_1 \dots i_s} =$$

$$= \frac{(p-s)!\, s!}{p!} h^{i_1 \dots i_s} \wedge \omega_{|i_1 \dots i_s|} \tag{61}$$

7) <u>Producto interno a través de formas</u>.

Analogamente a la anterior definición del producto interno a través de vectores se define el producto interno a través de formas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} i : F_1 \times F^p &\longrightarrow F^{p-1} \\ (\omega, X) &\longrightarrow i(\omega, X) = i_\omega X = \omega \lrcorner X \end{aligned} \tag{62}$$

Con las características siguientes

i) $i(\omega)$ es una antiderivación en $F(M^n)$ de grado $s=-1$ (63)

ii) $i(\omega) f = 0 \qquad \forall f \in F_0$ (64)

iii) $i(\omega) h_i = \omega_i \qquad \{h_i\}$ base de F^1 (65)

De manera análoga se verifica, por ejemplo para $\omega \in F_s \ , s \geq 2$ aunque en este caso ya no sea una antiderivación, que

$$i(\omega) = \omega_{|i_1 \dots i_s|}\, i(h^{i_1 \dots i_s}) \tag{66}$$

$\forall X \in F^p$

$$X = \binom{p}{s}^{-1} h_{|i_1 \dots i_s|} \wedge X^{i_1 \dots i_s} \tag{67}$$

y para s= 1

$$X = \frac{1}{p} h_i \wedge i(h^i)\, X \tag{68}$$

7) <u>Derivda exterior.</u>

Una antiderivación "d" en $F^*(M^n)$ de grado s= +1 se denomina derivada exterior (69)

$$d : F_p(M^n) \longrightarrow F_{p+1}(M^n) \qquad \forall p \in [0, n-1]$$

cuando verifica

1) $d \circ d = d^2 = 0$ (70)

2) df es la diferencial de $f \in F_0$ (71)

3) su "acción" es local, es decir (72)

$$\omega = \theta \in F_p(U \subseteq M^n) \Rightarrow d\omega = d\theta \in F_{p+1}(U \subseteq M^n) \tag{73}$$

Entre las propiedades se encuentran las siguientes

1) lineal $d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta$ (74)

2) $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta \ / \ \forall \omega \in F_p$ (75)

3) Sea (x, U) una carta de M^n, las bases coordenadas holónomas son

$$h_\mu = \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in F^1 \tag{76}$$

$$h^\mu = dx^\mu \qquad \in F_1 \tag{77}$$

Las bases coordenadas denotan vectores tangentes unitarios a las curvas coordenadas, para ellas utilizaremos siempre índices griegos μ, ν, λ . Como por definición h_μ y h^μ son duales se verifica $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu{}_\nu$.

Entonces $\forall \alpha \in F_p$

$$d\alpha = d\alpha_{|\mu_1 \cdots \mu_p|} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} = \tag{78}$$

$$= \frac{\partial \alpha_{|\mu_1 \cdots \mu_p|}}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \tag{79}$$

Mientras que en una base cualesquiera se obtiene a partir de (59), la fórmula general $\forall \omega \in F_p$

$$d\omega = \frac{r}{p} dh^k \wedge \omega_k + (-1)^r \binom{p}{r}^{-1} h^{|i_1 \cdots i_s|} \wedge d\alpha_{i_1 \cdots i_s} \tag{80}$$

En general la base será no-coordenada ó no holónoma, para las cuales utilizaremos índices latinos y se verificará que $dh^i \neq 0$ y

$$[h_i, h_j] = -G^k{}_{ij}\, h_k \tag{81}$$

siendo $G^k{}_{ij} = G^k{}_{[ij]}$ los coeficientes de no-holonomía, $[\ ]$ significa antisimetrización y

$$dh^i = \frac{1}{2} G^i{}_{jk}\, h^j \wedge h^k \tag{82}$$

A través del teorema de Poincaré $ddh^i = 0$, de obtiene la identidad de Jacobi

$$\partial_{[j} G^k{}_{mn]} = G^k{}_{i[j}\, G^i{}_{mn]} \tag{83}$$

4) $\forall \omega \in F_p \;/\; s \leq p$ se verifica en general

$$d\omega = \frac{s}{p} dh^j \wedge \omega_j + (-1)^s \binom{p}{s}^{-1} h^{|i_1 \cdots i_s|} \wedge d\omega_{i_1 \cdots i_s} \tag{84}$$

y en una base holónoma $dh^\mu = 0$

$$d\omega = (-1)^s \binom{p}{s}^{-1} h^{|\mu_1 \cdots \mu_s|} \wedge d\omega_{\mu_1 \cdots \mu_s} \tag{85}$$

La deducción de la fórmula (84) es directa, a partir de la (59) se obtiene

$$\begin{aligned} d\omega &= \binom{p}{s}^{-1} \Big\{ dh^{|i_1 \cdots i_s|} \wedge \omega_{i_1 \cdots i_s} + \\ &\quad + (-1)^s h^{|i_1 \cdots i_s|} \wedge d\omega_{i_1 \cdots i_s} \Big\} = \\ &= \binom{p}{s}^{-1} \Big\{ dh^j \wedge h^{|i_2 \cdots i_s|} \wedge \omega_{j i_2 \cdots i_s} + \\ &\quad + (-1)^s h^{|i_1 \cdots i_s|} \wedge d\omega_{i_1 \cdots i_s} \Big\} \end{aligned} \tag{86}$$

Y como $\omega_j = \binom{p-1}{s-1}^{-1} h^{|i_2 \cdots i_s|} \wedge \omega_{j i_2 \cdots i_s}$ (87)

se obtiene finalmente (84)

8) <u>Derivada de Lie de formas.</u>

El operador lineal derivada de Lie en $F^*(M^n)$ es una derivación de grado s= 0,dado el vector $X \in F^1$ y $\omega \in F_p$

$$\begin{aligned} \ell(X) : F_p(M^n) &\longrightarrow F_p(M^n) \\ \ell(X)\,\omega &= i(X)\, d\omega + d\, i(X)\, \omega \end{aligned} \tag{88}$$

Entre sus propiedades están las siguientes:

1) Al ser una derivación de grado s= 0

$$\ell(X)(\omega \wedge \theta) = \ell(X)\,\omega \wedge \theta + \omega \wedge \ell(X)\,\theta \tag{89}$$

verifica la regla de Leibniz

2) Al verificarse $i(X) \circ i(X) = 0$, $d \circ d = 0$ implicarán que

$$\ell(X)\, d = d\, \ell(X) \tag{90}$$

$$\ell(X)\, i(X) = i(X)\, \ell(X) \tag{91}$$

3) $\ell(fX) = f\,\ell(X) + df \wedge i(X) \;/\; f \in F_0$ (92)

4) Sean $X, Y \in F^1$

$$i(X)\,\ell(Y) = \ell(Y)\,i(X) + i([X,Y]) \qquad (93)$$

$$\ell([X,Y]) = [\ell(X), \ell(Y)] \qquad (94)$$

donde [ ] es el conmutador.

5) $\ell(X)\langle\omega, Y\rangle = \langle\ell(X)\omega, Y\rangle + \langle\omega, \mathcal{L}_X Y\rangle$ (95)

donde $\langle\omega, Y\rangle = i_\omega Y$ y $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$

$\forall\, \omega \in F_1 \;, X, Y \in F^1$

9) <u>Operador estrella de Hodge</u>.

Sea M^n orientable, i.e., existe una n-forma no nula $\mathcal{E} \in F_n(M^n)$, es decir, el grado de la forma de orientación $\mathcal{E}$ es el mismo que la dimensión de M^n. Como utilizamos M^n orientable, las p-formas ω que utilizamos son siempre de paridad par (i.e., no utilizamos formas de Rham) que son aquellas cuyas componentes bajo una transformación de coordenadas se transforman en bases coordenadas como

$$\omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} = \omega_{\nu_1 \ldots \nu_p} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_p}}{\partial \bar{x}^{\mu_p}} \qquad (96)$$

A través de $\mathcal{E} \in F_n(M^n)$ y del producto interno se construye el operador lineal estrella ó de Hodge, en la forma siguiente

$$\begin{aligned} * : F^p(M^n) &\longrightarrow F_{n-p}(M^n) \\ X &\longrightarrow {*X} = i(X)\,\mathcal{E} = \omega \end{aligned} \qquad (97)$$

Y en componentes

$$\omega_{i_1 \ldots i_{n-p}} = X^{|k_1 \ldots k_p|}\, \mathcal{E}_{k_1 \ldots k_p i_1 \ldots i_{n-p}} \qquad (98)$$

donde $\mathcal{E}_{i_1 \ldots i_n}(m) = i(h_{i_1 \ldots i_n})\,\mathcal{E}\,\big|_m > 0$ (99)

$$\forall\, \omega_{i_1 \ldots i_{n-p}} \neq 0 \;\Rightarrow\; X^{|k_1 \ldots k_p|} \neq 0 \qquad (100)$$

Luego $*$ es inyectiva y dado que $F^p(M)$ y $F_{n-p}(M)$ finito dimensionales y de la misma dimensión, $*$ es también "sobre", es un isomorfismo.

Entre sus propiedades se encuentran las siguientes:

1) Sea

$$\mathcal{E} = f\, h^{1 \ldots n} \qquad / \; f \in F_0 \,/\, f > 0$$

Para $\hat{\mathcal{E}} \in F^n(M^n)$

$$*\hat{\mathcal{E}} = i(\hat{\mathcal{E}})\,\mathcal{E} = k = \text{cte} \neq 0 \qquad (101)$$

Por tanto $\hat{\mathcal{E}}^{1 \ldots n} = \dfrac{k}{f}$ y teniendo en cuenta la expresión (32)

$$\mathcal{E}_{i_1 \ldots i_n} = f\, \delta^{1 \ldots n}_{i_1 \ldots i_n} \qquad (102)$$

$$\hat{\mathcal{E}}^{i_1 \ldots i_n} = \frac{k}{f}\, \delta^{i_1 \ldots i_n}_{1 \ldots n} \qquad (103)$$

2) $\forall\, X \in F^p \;, \forall\, \omega \in F_p$ se verifica que

$$\omega \wedge *X = \langle\omega, X\rangle\, \mathcal{E} \qquad (104)$$

ya que

$$\begin{aligned} \omega \wedge *X &= \omega \wedge i(X)\,\mathcal{E} = X^{|i_1 \ldots i_p|} \wedge \omega\, \mathcal{E}_{i_1 \ldots i_p} \\ &= X^{|i_1 \ldots i_p|}\, \omega_{i_1 \ldots i_p} \wedge \mathcal{E} = \langle\omega, X\rangle\, \mathcal{E} \end{aligned} \qquad (105)$$

Además de $*$ se puede definir el operador inverso de Hodge

$$*^{-1} = \frac{1}{k}(-1)^{p(n-p)}\, \hat{*} \qquad (106)$$

siendo $\hat{*}$ el operador lineal

$$\hat{*} : E_p(M^n) \longrightarrow E^{n-p}(M^n) \qquad (107)$$
$$\omega \longrightarrow \hat{*}\omega = i(\omega)\hat{\varepsilon}$$

10) <u>Cálculo de Cartan en variedades semiriemannianas.</u>

Sea la base $\{h^i\} \subset F_1(M^n)$ entonces

$$g = g_{ij}\, h^i \otimes h^j \qquad (108)$$

con $g_{ij} \in F_0 \quad \forall i,j$ y $g \in \mathcal{E}_2(M^n)$ se denomina métrica semiriemanniana si verifica

1) $g_{ij} = g_{(ij)}$, es simétrica (109)

2) $\det g_{ij} \neq 0$, no degenerada (110)

3) Es de tipo (s,r) s+ r= n (111)

s es el índice que es la dimensión del máximo subespacio de T_mM^n $\forall m / \forall X \in T_m M^n$ se verifique $g(X,X)<0$. La signatura esta definida como la diferencia $s-r$ ó como $r-s$.

Donde la función $g_{ij} \in F_0$ también se podría definir a través del producto escalar

$$\langle\, ,\, \rangle : F_1 \times F_1 \longrightarrow F_0$$
$$(h^i, h^j) \longrightarrow g^{ij} \qquad (112)$$

Donde son las componentes de $g \in \mathcal{E}_2(M^n)$ respecto de la base $\{h_i\} \subset F^1(M^n)$

La métrica g proporciona por tanto un isomorfismo entre 1-vectores y 1-formas

$$g : F^1(M^n) \longrightarrow F_1(M^n) \qquad (113)$$
$$X \longrightarrow g(X,\ )$$
$$X^i \longrightarrow X_k = g_{ki} X^i \qquad (114)$$

y en componentes

$$X = X^i h_i \quad , \quad g(X,\ ) = X_k h^k = \omega \qquad (115)$$

Asimismo las bases duales están relacionadas en la forma

$$h_i = g_{ij} h^j \qquad (116)$$

La métrica g al ser un isomorfismo permite "identificar" a $X \in F^1$ y $\omega = g(X,\ ) \in F_1$. Esto tendrá las siguientes consecuencias respecto al producto interno, la derivada de Lie y el operador de Hodge.

$$i(X) = i(\omega) = i(g(X,\ )) \qquad (117)$$
$$\ell(X) = \ell(\omega) = \ell(g(X,\ )) \qquad (118)$$

pero aunque

$$\ell(X)X = \mathcal{L}_X X = [X,X] = 0 \qquad (119)$$

se verifica que

$$\ell(\omega)\,\omega = [\ell(X) g]\, X \neq 0 \qquad (120)$$

Por otra parte también se podrían haber definido g_{ij} y g^{ij} dado que el producto escalar es un caso particular de producto interno como

$$i : F_1 \times F_1 \longrightarrow F_0$$
$$(h^i, h^j) \longrightarrow g^{ij} \qquad i(h^i)h^j = g^{ij} \qquad (121)$$
$$i : F^1 \times F^1 \longrightarrow F_0$$
$$(h_i, h_j) \longrightarrow g_{ij} \qquad i(h_i)h_j = g_{ij} \qquad (122)$$

En el caso particular en el que las bases sean las naturales ó coordenadas ó holónomas (notación de índices en griego) obtenemos

$$g = g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu = g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \otimes \partial_\nu \qquad (123)$$

Si n = 4, y s = ±1, la variedad hiperbólica (M^4,g) dotada de la métrica semiriemanniana g Lorentziana.

Si (M^n,g) esta orientado y $|g| = \det g_{ij}$ entonces la orientación es el elemento de volumen métrico

$$\mathcal{E} = \sqrt{(-1)^s|g|}\; h^{1\dots n} \qquad (124)$$

En el caso de que la base sea ortonormal

$$g = \eta_{ij}\, h^i \otimes h^j$$

$$\eta_{ij} = \mathrm{diag}(-1,\overset{s}{\dots},-1,1,\overset{r}{\dots},1) \qquad (125)$$

por tanto $\det \eta_{ij} = (-1)^s$ y $\epsilon = h^{1\dots n}$ cuyos componentes son dado $\epsilon_{1\dots n} = 1$

$$\epsilon^{i_1\dots i_n} = (-1)^s\, \delta^{i_1\dots i_n}_{1\dots n} = (-1)^s\, \epsilon_{i_1\dots i_n} \qquad (126)$$

y

$$\epsilon^{1\dots n} = \eta^{1 i_1}\dots\eta^{1 i_n}\,\delta^{1\dots n}_{i_1\dots i_n} = \det\eta_{ij} = (-1)^s \qquad (127)$$

Y en una base general toma la forma

$$\mathcal{E}_{i_1\dots i_n} = \sqrt{(-1)^s|g|}\;\epsilon_{i_1\dots i_n} \qquad (128)$$

Comparando esta expresión con las (102) y (103) vemos que

$$f = \sqrt{(-1)^s|g|} \qquad\qquad k = (-1)^s \qquad (129)$$

Por otra parte en variedades métricas semiriemannianas (M,g) ocurre que $F^p(M^n) \simeq F_p(M^n)$ debido a la estructura g, podemos por tanto en este caso construir el operador estrella de Hodge $*$ en la siguiente manera

$$*:\; F_p(M^n) \longrightarrow F_{n-p}(M^n) \qquad (130)$$

$$\omega \longrightarrow *\omega = i(\omega)\,\mathcal{E} \qquad (131)$$

$*\omega$ es la forma adjunta de ω

con el operador inverso definido como

$$*^{-1} = (-1)^{p(n-p)+s}\, * \qquad (132)$$

recordando lo visto en (106) para el caso general, y también para (M,g) se verifica

$$*\circ * = (-1)^{p(n-p)+s}\, id_{F_p} \qquad (133)$$

Entre sus propiedades se encuentran las siguientes

1) $*1 = \mathcal{E} \qquad *\mathcal{E} = (-1)^s$ (134)

2) $\forall \alpha\in F_p,\ \forall\beta\in F_q$

$$i(\alpha)*\beta = *(\beta\wedge\alpha) \qquad (135)$$

ya que

$$i(h^k) * h^{i_1\dots i_q} = \epsilon^{i_1\dots i_q|i_{q+1}\dots i_n|}\, i(h^k)\, h_{i_{q+1}\dots i_n} = \epsilon^{i_1\dots i_q k|i_{q+2}\dots i_n|}\, h_{i_{q+2}\dots i_n} = * h^{i_1\dots i_q k} \qquad (136)$$

entonces

$$i(\alpha)*\beta = \alpha_{|i_1\dots i_p|}\, i(h^{i_p})\dots i(h^{i_1}) *\beta = \alpha_{|i_1\dots i_p|} *(\beta\wedge h^{i_1\dots i_p}) = *(\beta\wedge\alpha) \qquad (137)$$

3) $\alpha\wedge *\beta = (-1)^{p(q+1)} * i(\alpha)\beta$ (138)

Teniendo en cuenta (133) y 2) (135)

$$*(\alpha\wedge\beta) = (-1)^{p(n-q)} *(*\beta\wedge\alpha) = (-1)^{p(n-q)}\, i(\alpha)**\beta = (-1)^{(n-q)p+q(n-q)+s}\, i(\alpha)\beta$$

Por tanto

$$\alpha\wedge*\beta = (-1)^{p(n-q)+q(n-q)+(p+n-q)(q-p)} * i(\alpha)\beta = (-1)^{p(q-1)} * i(\alpha)\beta \qquad (139)$$

4) $\alpha\wedge *\beta = \beta\wedge *\alpha$ (140)

de 3) con $p=q$

Con la operación estrella se obtienen las siguiente útiles expresiones, si n= 4

$$*1 = \varepsilon \tag{141}$$

$$*h^i = \varepsilon^i \tag{142}$$

$$*h^{ij} = *(h^i \wedge h^j) = \varepsilon^{ij} \tag{143}$$

$$*h^{ijk} = *(h^i \wedge h^j \wedge h^k) = \varepsilon^{ijk} \tag{144}$$

$$*h^{ijkl} = *(h^i \wedge h^j \wedge h^k \wedge h^l) = \varepsilon^{ijkl} \tag{145}$$

Y aplicando la fórmula (133) , se obtienen

$$*\varepsilon = (-1)^s \tag{146}$$

$$*\varepsilon^i = h^i \tag{147}$$

$$*\varepsilon^{ij} = (-1)^s h^i \wedge h^j = (-1)^s h^{ij} \tag{148}$$

$$*\varepsilon^{ijk} = h^i \wedge h^j \wedge h^k = h^{ijk} \tag{149}$$

$$*\varepsilon^{ijkl} = (-1)^s h^i \wedge h^j \wedge h^k \wedge h^l = (-1)^s h^{ijkl} \tag{150}$$

y se verifican

$$\varepsilon_{ijk} = h^l \varepsilon_{ijkl} \tag{151}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} h^k \wedge \varepsilon_{ijk} \tag{152}$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{3} h^j \wedge \varepsilon_{ij} \tag{153}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4} h^i \wedge \varepsilon_i \tag{154}$$

asi como las siguientes expresiones

$$h^m \wedge \varepsilon_{ijkl} = \frac{1}{3!} \delta^m{}_{[l} \varepsilon_{ijk]} \tag{155}$$

$$h^m \wedge \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2} \delta^m{}_{[k} \varepsilon_{ij]} \tag{156}$$

$$h^m \wedge \varepsilon_{ij} = \delta^m{}_{[j} \varepsilon_{i]} \tag{157}$$

$$h^m \wedge \varepsilon_i = \delta^m_i \varepsilon \tag{158}$$

A través de $*$ y d se construye el operador

$$d* : F_p(M^n) \longrightarrow F_{n-p+1}(M^n) \tag{159}$$

$\forall \omega \in F_p$ en bases $\{h_i\} \subset F^1$. $\{h^i\} \subset F_1$

$$d*\omega = dh^k \wedge *(\omega \wedge h_k) + \frac{1}{2} d(\ln|g|) \wedge *\omega + i(h_k) d\omega|i_2,\dots i_p|K * h_{i_2 \dots i_p} \tag{160}$$

ya que

$$d*h^{i_1 \dots i_p} = dh_k \wedge *h^{i_1 \dots i_p k} - \frac{1}{2} d\ln|g| \wedge *h^{i_1 \dots i_p} \tag{161}$$

y

$$d*h_{i_1 \dots i_p} = dh^k \wedge h_{i_1 \dots i_p k} + \frac{1}{2} d\ln|g| \wedge *h_{i_1 \dots i_p} \tag{162}$$

Y sus correspondientes expresiones en bases holónomas

A través de $*$ y $d*$ se construye el operador adjunto de "d" llamado también coderivada exterior, construyendo primero

$$*d* : F_p \longrightarrow F_{p-1} \tag{163}$$

$$\delta = (-1)^{n(p+1)+s} *d* : F_p \rightarrow F_{p-1} \tag{164}$$

Nótese que $\delta \circ \delta = 0$

Por último a través de "δ" y "d" se construye el operador de Laplace-Beltrami

$$\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d : F_p \rightarrow F_p \tag{165}$$

Los operadores Δ, δ, d permiten clasificar a las p-formas

$\omega_p \in F_p$	es armónica si	$\Delta\omega = 0$	(166)
	es cerrada si	$d\omega = 0$	(167)
	es co-cerrada si	$\delta\omega = 0$	(168)
	es exacta si	$\omega_p = d\theta_{p-1}$	(169)
	es co-exacta si	$\omega_p = \delta\theta_{p+1}$	(170)

Finalmente hay que señalar diferentes teoremas relativos a estos tipos especificos de formas.

El Lema de Poincaré

Toda forma (co) exacta es (co) cerrada, ya que $\begin{cases} d^2=0 \\ \delta^2=0 \end{cases}$ su inverso. Toda forma cerrada es exacta localmente, i.e., exacta en una carta de M^n y exacta globalmente si la topología es trivial, i.e., sin agujeros, o dicho de otra forma si todos sus periodos son cero (teorema de Rham), esto significa que $\int_c A = 0 \quad \forall c \subset M^n$

ó lo que es lo mismo que todas las curvas C son triviales es decir homótopicas a un punto.

Los conjuntos de p-formas cerradas y de p-formas exactas sobre M contituyen grupos Abelianos (con la suma como operación interna).

Como cualquier p-forma exacta es una p-forma cerrada, el grupo de p-forma exacta es un subgrupo del grupo de p-formas cerradas. El grupo cociente de ambos grupos es grupo de cohomología de Rham p-dimensional, el cual es isomorfo a los grupos de cohomología ordinariamente definidos en topología.

La dimensión del p-grupo de cohomología es p-número de Betti de una variedad, si esta es compacta este número es finito.

Para terminar esta parte sintetizemos el teorema de Hodge.

El teorema de Hodge

Si M^n es compacto y sin borde cualquier p-forma puede ser descompuesta como

$$\omega_p = d\alpha_{p-1} + \delta\beta_{p+1} + \gamma_p \qquad / \Delta\gamma_p = 0 \qquad (171)$$

i.e., en la suma de una forma exacta, una coexacta y una armónica.

Los operadores $d, \delta, \Delta, *$, verifican las siguientes propiedades

$$1)\ d = (-1)^{n(p+1)+1+s} * \delta * \qquad (172)$$

$$2)\ \delta\delta = 0 \qquad (173)$$

$$3)\ d * \delta = \delta * d = 0 \qquad (174)$$

$$4)\ \delta * = (-1)^p * d \quad , \quad * \delta = (-1)^{p+1} d * \qquad (175)$$

$$5)\ d\delta * = * \delta d \quad , \quad * d\delta = \delta d * \qquad (176)$$

$$6)\ \Delta * = * \Delta \qquad (177)$$

$$7)\ d\Delta = \Delta d \quad , \quad \delta\Delta = \Delta\delta \qquad (178)$$

11) Formas diferenciales valuadas en un espacio vectorial.

Hasta ahora se ha expuesto sucintamente el cálculo de Cartan para p-formas sobre M^n valuadas en el cuerpo R , $\omega \in F_p(M^n) \equiv F_p(M^n, R)$, ahora pasamos a generalizar este concepto al de p-formas sobre M^n valuadas en un espacio vectorial E, a las que denotaremos como $\Phi \in F_p(M^n, E) = F_p(M^n).E$

Analogamente a como se pueden definir los elementos de $\overset{p}{\otimes} T_m^* M^n$ (a través de un isomorfismo) como aplicacion multilineales de

$$\underset{p}{\times} T_m M^n \longrightarrow R$$

definimos los elementos de $\overset{p}{\otimes} T_m^* M^n . E$ como aplicaciones multilineales de $\underset{p}{\times} T_m M^n \rightarrow E$. Ello conduce a utilizar la notación para el espacio de p-formas valuadas en E siguiente

$$F_p(M^n, E) = F_p(M^n, R) . E = F_p(M^n) . E \qquad (179)$$

Por tanto cualquier $\Phi \in F_p(M^n, E)$ tendrá la expresión

$$\Phi = (\Phi^1, \ldots, \Phi^n) = \Phi^A . E_A \qquad (180)$$

$$/ \ \Phi^A \in F_p(M^n, R) \quad , \quad n = \dim E \quad , \quad \{E_A\} \text{ base de } E$$

De esta forma, el producto interno y la derivada exterior de p-formas E valuadas tendrá la expresión siguiente

$$\forall \Phi \in F_p(M^n, E) \qquad i(X)\Phi = i(X)\Phi^A . E_A \qquad (181)$$

$$\forall X \in F^1 \qquad d\Phi = d\Phi^A . E_A \qquad (182)$$

Sin embargo para definir el producto cuña o exterior de $\Phi \in F_p(M^n, E)$ y de $\Phi' \in F_p(M^n, E')$, habrá que tener en cuenta la existencia de producto de vectores en los diferentes espacios vectoriales E, E' ó en su producto catesiano $E \times E'$. Las definiciones de $\Phi \wedge \Phi'$ serán diferentes y dependeran de que tipo de espacios vectoriales son E y E'. Como ejemplo veamos los siguientes casos:

1) $E' = R$ y $\omega \in F_p(M^n, E' = R)$, $\Phi \in F_q(M^n, E)$

en este caso $\wedge : F_p(M^n, R) \times F_q(M^n, E) \to F_{p+q}(M^n, E)$

$$\omega \wedge \Phi = \omega \wedge \Phi^A . E_A \qquad (183)$$

2) Sea $E' = \mathcal{G} = ALG$ y E un espacio de representación de G entonces $\forall A \in F_p(M^n, ALG)$ y $\forall \phi \in F_q(M^n, E)$ se verifica

$$\wedge : F_p(M^n, \mathcal{G}) \times F_q(M^n, E) \longrightarrow F_{p+q}(M^n, E)$$

$$A \wedge \phi = A^a \wedge X_a \phi = A^a \wedge \phi^A X_a E_A \qquad (184)$$

donde X_a son los generadores de $\mathcal{G}$ en la representación Φ

3) $E' = E$ y $E = \mathcal{G} = ALG$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie G, entonces $\forall A \in F_p(M^n, ALG)$ $\forall B \in F_q(M^n, ALG)$

$$A \wedge B = A^a \wedge B^b . [X_a, X_b] = A^a \wedge B^b . (ad\, X_a) X_b \qquad (185)$$

y en lugar de las fórmulas (28) y (29) ahora se verifica

$$A \wedge B = (-1)^{pq+1} B \wedge A \qquad (186)$$

donde $\wedge : F_p(M^n, ALG) \times F_q(M^n, ALG) \longrightarrow F_{p+q}(M^n, ALG)$

y por tanto $A \wedge A \neq 0$ si $A \in F_r(M^n, ALG)$

4) Sea $E = E' = GL(m, R)$, se define entonces $\phi \wedge \psi$ a través de la multiplicación matricial en $GL(n, R)$, $\forall \phi \in F_p(M^n, GL(m,R))$ y $\psi \in F_p(M^n, GL(m,R))$

12) <u>Diferenciación.</u>

Frecuentemente en los principios variacionales se ha usado la "diferenciación" con respecto a p-formas, $\phi \in F_p$, $\partial / \partial \Phi$

Por ejemplo si el Lagrangiano es $L = L(\phi) = \phi$ su variación es

$$\delta L = \delta \phi = \delta \phi \wedge \frac{\delta L}{\delta \phi} \Rightarrow \frac{\delta L}{\delta \phi} = 1 \qquad (187)$$

En general si $L(\phi) \in F_r$, $P(\phi) \in F_s$, $\phi \in F_p$ entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} \in F_{r-p} \qquad y \qquad \frac{\partial P}{\partial \phi} \in F_{s-p}$$

y verifica

$$\begin{aligned} \delta(L \wedge P) &= \delta L \wedge P + L \wedge \delta P = \\ &= \delta\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi} \wedge P + L \wedge \delta\phi \wedge \frac{\partial P}{\partial \phi} = \\ &= \delta\phi \wedge \left[\frac{\partial L}{\partial \phi} \wedge P - (-1)^{pr} L \wedge \frac{\partial P}{\partial \phi} \right] \qquad (188) \end{aligned}$$

Y como
$$\delta(L\wedge P) = \delta\phi \wedge \frac{\partial}{\partial\phi}(L\wedge P) \qquad (189)$$

se obtiene comparando las dos últimas expresiones que

$$\frac{\partial}{\partial\phi}(L\wedge P) = \frac{\partial L}{\partial\phi}\wedge P + (-1)^{PT} L \wedge \frac{\partial P}{\partial\phi} \qquad (190)$$

$\forall L \in F_r\ ,\ \forall \phi \in F_p$.

13) G-Variedades.

1) Definic-ión

G-Variedades son los espacios donde se realizan grupos de Lie G.

Sea G un grupo de Lie y M una variedad de clase C^∞, sea $\rho : G \to \mathrm{Diff}\ E$ una realización (homomorfismo) de G en E a través del grupo de Difeomorfismos de E. Al triplete (E, G, ρ) ó bien solamente a E se le denomina G-variedad.

2) Proposiciones.

i) Realizaciones por la izquierda y por la derecha.

Una realización se dice por la izquierda ρ_I (por la derecha ρ_D) cuando se verifican

$$\rho_I(a.b) = \rho_I(a).\rho_I(b) \qquad \forall a.b \in G \qquad (191)$$

$$\rho_D(a.b) = \rho_D(b)\,\rho_D(a) \qquad (192)$$

ii) Representación lineal es

$\rho : G \to GL(E)$, donde $GL(E)$ es el grupo de transformaciones lineales del espacio vectorial E. ρ es la representación de G en E a través de $GL(E)$

$$\rho : a \to [\rho(a)]^\alpha{}_\beta \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots \dim E \qquad (193)$$

cada representación ρ de G se corresponde con una representación del álgebra de Lie de G, $ALG = \mathfrak{g} = T_eG$ a través de la transformación lineal

$$\begin{aligned} \rho_* : ALG &\to GL(E) \\ X &\to \rho_* X = \tilde{X} \end{aligned} \qquad (194)$$

iii) Cualquier grupo de Lie se autorealiza a través de $\rho : G \to \mathrm{Diff}\ G$ mediante traslaciones por la izquierda ó por la derecha $\forall a.b \in G$

$$\rho_I(a).b = ab = a_I(b) \qquad (195)$$

$$\rho_D(a).b = b.a = a_D(b) \qquad (196)$$

Los tripletes (G,G,I), (G,G,D) se denominan variedades principales y son por tanto un tipo específico de G-variedades; Las variedades principales con grupos de Lie vistos como G-variedades. $\rho(a)$ es un automorfismo de G, $\forall a \in G$ el conjunto de automorfismo de G, $\mathrm{Aut}\,G$, es él mismo, un grupo de Lie.

Tomando la diferencial tangencial, $\rho(a)_* : ALG \to ALG$ (ALG álgebra de Lie de G) es un automorfismo de ALG. Mediante $\rho(a) \to \rho_*(a)$ $\forall a \in G$ se construye una representación de $\mathrm{Aut}\,G$ en ALG a través de GL (ALG)

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}\,G &\longrightarrow GL(ALG) \\ \rho(a) &\longrightarrow \rho(a)_* \end{aligned} \qquad (197)$$

el grupo de automorfismos internos (por la izquierda) de G, se definen como

$$\forall a\in G \qquad \rho_+(a) = \rho_I(a)\circ\rho_D(a^{-1}) = a_I\circ a_D^{-1} \qquad (198)$$

ó

$$\rho_+(a).b = (a_I\circ a_D^{-1})b = aba^{-1} \qquad (199)$$

Como $\rho_+(ab) = \rho_+(a)\,\rho_+(b)$, entonces ρ_+ es una realización por la izquierda de G en G a través del grupo de automorfismos internos de G

$$\rho_+ : G \to Aut\,int\,(G) \qquad (200)$$

El homomorfismo de grupos definido como

$$\begin{aligned} Ad : G &\to GL\,(ALG) \\ a &\to Ad(a) = \rho_+(a)_* \end{aligned} \qquad (201)$$

es la representación adjunta (por la izquierda) de G. El triplete (ALG,G,Ad) es también por tanto una G-variedad.

La diferencial lineal de Ad, $Ad_* = ad$ es la representación adjunta (por la izquierda) del álgebra de Lie de G, ALG

$$\begin{aligned} Ad_* = ad : ALG &\to ALGL\,(ALG) \\ X &\to ad(X) = \hat{X} \end{aligned} \qquad (202)$$

tal que $\quad ad(X)Y = \hat{X}Y = [X,Y] \qquad \forall X,Y\in ALG \qquad (203)$

Para $A\in F_p(M^n,ALG)$ $B\in F_q(M^n,ALG)$ como ocurría en el ejemplo 3 del anterior apéndice, tendremos

$$A\wedge B = A^a\wedge B^b.\hat{X}_a X_b = A^a\wedge B^b.ad(X_a)X_b \qquad (204)$$

y por tanto en la notación habitual

$$A\wedge B = A^a\wedge B^b.[X_a,X_b] = [A,B] \qquad (205)$$

Con lo que

$$A\wedge A \neq 0 \qquad (206)$$

Y asimismo se verificará para $\phi\in F_r(M^n,E)$

$$[A,B]\wedge\phi = (A\wedge B)\wedge\phi = A\wedge B\wedge\phi + (-1)^{pq+1}B\wedge A\wedge\phi \qquad (207)$$

iii) Sea e el elemento neutro del grupo de Lie G.

Las siguientes definiciones siguen :

G actua efectivamente en E $\Leftrightarrow \{\rho(a)(v)=v \,/\, \forall v\in E \Rightarrow a=e\}$

G actua libremente en $E \Leftrightarrow \{a\neq e \,/\, \rho(a)v\neq v\}$

G actua transitivamente en $E\Leftrightarrow\{\forall v,v'\in E \quad \exists a\in G \,/\, v'=\rho(a)v\}$

iv) Se donomina orbita de $v\in E$ bajo G a

$$orb_G(v) = \{v'\in E \,/\, \exists a\in G \,/\, v'=\rho(a)v\} \qquad (208)$$

G actua transitivamente en orbita$_G(v)$ $\quad \forall v\in E$ y existe una relación de equivalencia en $orb_G(v)$

$$[v] = \{v'\in E \,/\, v'\sim v \,,\, \exists a\in G \,/\, v'=\rho(a)v\} \qquad (209)$$

Por $[v]$ denotamos la clase de equivalencia con representante canónico .

El espacio de las órbitas $\quad E/G = \{orb_G(v) \,/\, v\in E\} \qquad (210)$

es el espacio cociente de E bajo G.

La aplicación sobre

$$\begin{aligned} orb_G : E &\longrightarrow E/G \\ v &\longrightarrow orb_G(v) = [v] \end{aligned} \qquad (211)$$

es la proyección canónica.

v) Sea $v\in E$ y (E,G,ρ) una G-variedad, definamos

$$\begin{aligned} v : G &\to E \\ a &\to v(a) = \rho(a).v \end{aligned} \qquad (212)$$

es inyectiva (sobre) cuando G actua en E (libremente) transitivamente.

Por convención escribamos

$$v(a) = \rho(a).(v) = v_\rho(a) \qquad si \quad \rho = \rho_D \qquad 213$$

$$v(a) = \rho(a^{-1})(v) = \rho(a^{-1})v \qquad si \quad \rho = \rho_I \qquad 214$$

vi) La realización $\rho : G \longrightarrow$ Diff E induce el homomorfismo de álgebras de Lie siguiente

$$\begin{aligned} \rho_* : ALG &\longrightarrow AL\,Diff\,E \\ X &\longrightarrow \rho_* X = \tilde{X} \end{aligned} \qquad (215)$$

siendo $v \in E$, la aplicación $v : G \longrightarrow E$, su diferencial tangencial (ó líneal) es

$$\begin{aligned} v_* : T_eG &\rightarrow TE \\ X_e &\rightarrow v_* X_e = \tilde{X} \circ v \end{aligned} \qquad (216)$$

sean $X \in$ ALG y $\tilde{X} \in$ AL Diff E, y $\rho_* X = \tilde{X}$

entonces se verifica

$$\rho_*(X)|_v = v_*(X_e) \qquad X_e \in T_eG \simeq ALG$$

(217)

APENDICE 3

FORMALISMO GENERAL DEL PRINCIPIO VARIACIONAL

1) Dada la acción general, donde $C \subseteq M^4$ es un compacto y L el Lagrangiano 4-forma.

$$A(C) = \int_{C \subseteq M^4} L(y, dy, \phi, d\phi) \qquad (1)$$

La variación total bajo G $\otimes$ Diff M^4 se efectua de la siguiente forma

$$\delta A = \int_{\tau(C)} L'(y', dy', \phi', d\phi') - \int_C L(y, dy, \phi, d\phi)$$

$$= \int_C \tau^* L'(\tau^* y', d\tau^* y, \tau^*\phi', d\tau^*\phi') - L(y, dy, \phi, d\phi)$$

$$= \int_C \delta L \qquad (2)$$

Y como $\delta A = 0 \Rightarrow \delta L = 0$ separando la variación externa de la interna, se obtiene

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow \bar{\delta} L + \ell(X) L = 0 \qquad (3)$$

Y con la identidad de Cartan $\ell(X) = di(X) + i(X)d$

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow \bar{\delta} L + di(X) L = 0 \qquad (4)$$

Ya que L es una 4-forma en un espacio 4-dim y por tanto $dL = 0$

Si $\mathcal{L} = -* L$ es el Lagrangiano 0-forma se verifica

$$di(X) L = d*(\mathcal{L}X) = (\mathcal{L}X^\alpha)_{,\alpha}\,\varepsilon \qquad (5)$$

donde ε es la 4-forma de volumen.

Sin embargo (3) es demasiado fuerte y es suficiente el requerimiento

$$\delta L = d\delta * P \qquad (6)$$

con la condición de que para $\delta y = \delta dy = \ldots = \delta d\phi = 0$

$$\delta * P = 0 \qquad (7)$$

Aplicando la regla de variación se obtiene

$$\delta L = \delta y \wedge \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_y + \delta dy \wedge \frac{\partial L}{\partial dy} + \delta\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi} + + \delta d\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \qquad (8)$$

$$\delta L = \delta y \left[\frac{\partial L}{\partial y}\Big|_y - d\, \frac{\partial L}{\partial dy}\Big|_y \right] + \\ + \delta\phi \wedge \left[\frac{\partial L}{\partial \phi} - (-1)^p\, d\, \frac{\partial L}{\partial d\phi} \right] + \\ + d \left[\delta y \wedge \frac{\partial L}{\partial dy}\Big|_y + \delta\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \right] = d\delta{*P} \qquad (9)$$

donde $|_y$ significa que el "y" de"dy" no varía.

De la anterior expresión se obtiene la identidad

$$\delta\phi \wedge {*EL_\phi} = \delta y \wedge \left[-d{*t} - \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_y \right] - \\ - d\left[-\delta y \wedge {*t} + \delta\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} - \delta{*P} \right] \qquad (10)$$

Donde ${*EL_\phi}$ son las ecuaciones de Euler-Lagrange de Φ

y $\quad {*t} = - \frac{\partial L}{\partial dy}\Big|_y \in F_3(M^4, R^4) \qquad (11)$

2) Sea $L = L(y, dy, \phi, d\phi) = {*\mathcal{L}}(y, \Phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}, (d\phi)_{\alpha_1 \ldots \alpha_p})$

donde $\Phi = \Phi_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|}\, dy^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dy^{\alpha_p} \in F_p \qquad (12)$

Sea h= dy base coordenada y $\mathcal{L}$ es el Lagrangiano o-forma usual en componentes.

La variación del Lagrangiano 4-forma será

$$\delta L = \delta y \wedge \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_y + \delta h \wedge \frac{\partial L}{\partial h}\Big|_h + \delta\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi} + \\ + \delta d\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \qquad (13)$$

Y como $\quad \delta\phi = \delta\phi_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|}\, h^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} + \delta h^\alpha \wedge i(h_\alpha)\phi \qquad (14)$

$|_h$ significa que las "h" de ϕ no varían.

$$\delta L = \delta y \wedge \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_y + \delta h \wedge \left[\frac{\partial L}{\partial h}\Big|_h + i(h)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi} + \\ + i(h)d\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \right] + \qquad (15) \\ + \delta\phi_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|}\, h^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi} + \delta(d\phi)_{|\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}|}\, h^{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi}$$

Por otra parte la variación del Lagrangiano en la forma

$L = {*\mathcal{L}} = \mathcal{L}\,\varepsilon \qquad$ (ε elemento de volumen)

$$\delta{*\mathcal{L}} = \delta\varepsilon\, \mathcal{L} + \varepsilon\, \delta\mathcal{L} \qquad (16)$$

como $\quad \delta\varepsilon = \delta h \wedge i(h)\varepsilon \qquad (17)$

obtenemos

$$\delta{*\mathcal{L}} = \delta h \wedge i(h){*\mathcal{L}} + \varepsilon\delta\mathcal{L} \qquad (18)$$

Por otra parte $\delta\mathcal{L}$ es

$$\delta\mathcal{L} = \delta y \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\Big|_y + \delta\phi_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} + \qquad (19) \\ + \delta(d\phi)_{|\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}|} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\phi)_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}}}$$

introduciendo esta expresión en la anterior se obtiene

$$\delta L = \delta{*\mathcal{L}} = \delta h \wedge i(h){*\mathcal{L}} + \delta y \wedge {*\frac{\partial L}{\partial y}}\Big|_y + \qquad (20) \\ + \delta\phi_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|} {*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}}} + \delta(d\phi)_{|\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}|} {*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\phi)_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}}}}$$

Por otra parte

$$h^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi} = * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} \in F_4 \qquad (21)$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|}}\, {*h_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} \qquad (22)$$

De la misma forma se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial d\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\phi)_{|\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}|}} *h_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} \qquad (23)$$

Comparando las expresiones (15) y (20) de la variación δL se obtiene que

$$-*t = \frac{\partial L}{\partial h}\Big|_h = i(h)L - i(h)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi} - i(h)\, d\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \qquad (24)$$

la cual es la expresión de 3-forma energía-impulso canónico ó sustituyendo $\ell(h) = i(h)d + d\,i(h)$

$$-*t = \frac{\partial L}{\partial h}\Big|_h = i(h)L - i(h)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi} - i(h)\, d\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \qquad (25)$$

Sustituyendo la expresión de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene

$$-*t = i(h)L - i(h)\phi \wedge *EL_\phi - (-1)^p i(h)\phi \wedge d\frac{\partial L}{\partial d\phi} - i(h)\, d\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \qquad (26)$$

Sustituyendo la identidad homotópica de la derivada de Lie

$$-*t = i(h)L - i(h)\phi \wedge *EL - \ell(h)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} + d\,i(h)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} - (-1)^p i(h)\phi \wedge d\frac{\partial L}{\partial d\phi} \qquad (27)$$

Agrupando términos

$$-*t = i(h)L - \ell(h)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} - i(h)\phi \wedge *EL_\phi + d\left(i(h)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi}\right) \qquad (28)$$

Ejemplo:

Campo de Maxwell $L = L(dy, dA) = \frac{1}{2} dA \wedge *dA$ (29)

con $\frac{\partial L}{\partial A} = 0$ y $\frac{\partial L}{\partial dA} = *dA$ (30)

El tensor energía momento canónico es

$$-*t^\alpha = i(h^\alpha)L - i(h^\alpha)\, dA \wedge *dA \qquad (31)$$

Ya que de la expresión (25) solo contribuyen el primer y último término. Sustituyendo la expresión del Lagrangiano y $F = dA$ obtenemos

$$-*t^\alpha = \frac{1}{2}\left[F \wedge *(F \wedge h^\alpha) - i(h^\alpha) F \wedge *F\right] \qquad (32)$$

expresión que es invariante de gauge $(A \to A' = A - d\theta)$ y simétrica

Al contrario que lo que se usualmente se denomina tensor energía-momento "canónico" (en realidad pseudo-canónico) relacionado con el anterior mediante la expresión

$$*f^\alpha = *t^\alpha + dA^\alpha \wedge *F \qquad (33)$$

el cual no es obviamente simétrico.

Esta situación como veremos no se verifica en gravedad en la que el tensor energía momento análogo de (32) no es simétrico.

La razón de haber obtenido como tensor energía momento el tensor simétrico hay que buscarla en haber trabajado con formas y no en componentes, i.e., haber tratado al potencial electromagnetico como una 1-forma valuada en R (absorbiendo la unidad imaginaria) en vez de haber usado sus componentes A_μ i.e., una 0-forma, R^4 valuada.

Si hubieramos usado la formulación en componentes obtendriamos en vez de la expresión (25) la expresión del tensor pseudo-canónico

$$-*f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial h^\alpha}\Big|_h = i(h_\alpha)\mathcal{L}' - i(h^\alpha)\, d\phi_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|} \wedge \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial d\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} \qquad (34)$$

con $\mathcal{L}' = L'(h, \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}, d\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}) = L(h, \phi, d\phi)$ (35)

como $d\phi = d\phi_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|} \wedge h^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ con $h^\alpha = dx^\alpha$ (36)

entonces
$$\frac{\partial L'}{\partial d\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} = \frac{\partial d\phi}{\partial d\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} = h^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \qquad (37)$$

$$\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \in \mathcal{F}_0 (M^4, R^4 \otimes \overset{p}{\ldots} \otimes R^4) \qquad (38)$$

Y como $\phi_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|}$ es una 0-forma y L = L' se obtiene
$$-{}^*f^\alpha = \frac{\partial L'}{\partial h^\alpha}\Big|_h = i(h_\alpha) L - \ell(h_\alpha)\phi_{|\alpha_1 \ldots \alpha_p|} \wedge h^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi}$$
$$= i(h_\alpha) L - \ell(h_\alpha)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \qquad (39)$$

Cuando se verifican las ecuaciones de campo ${}^*El_\phi = 0$ vemos que ${}^*t$ (el canónico, obtenido a través de formas) y ${}^*f^\alpha$ (el pseudo-canónico obtenido usando componentes) difieren en una forma exacta.

Leyes de conservación débiles

Sea el Lagrangiano 4-forma con dependencia explícita $L = L(y, dy, \phi, d\phi)$ donde $y \in \mathcal{F}_0 (M^4, R^4)$ es una asignación de coordenadas y $-{}^*t_\mu = \frac{\partial L}{\partial y^\mu}\Big|_y$ la 3-forma de energía momento canónica

entonces se verifica que
$$i(h_\mu) d\phi \wedge {}^*El_\phi + (-1)^p i(h_\mu)\phi \wedge d\,{}^*El_\phi =$$
$$= -d\,{}^*t_\mu - \frac{\partial L}{\partial y^\mu}\Big|_y \qquad (40)$$

Demostración .

Sea $X \in \mathcal{F}^1$
$$\ell(X) L = \ell(X)\, y \wedge \frac{\partial L}{\partial y}\Big|_y + \ell(X)\, dy \wedge \frac{\partial L}{\partial dy}\Big|_{dy} +$$
$$+ \ell(X)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi} + \ell(X)\, d\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} =$$
$$= \ell(X)\, y \wedge \Big[\frac{\partial L}{\partial y}\Big|_y - d\,\frac{\partial L}{\partial dy}\Big|_{dy} \Big] +$$
$$+ \ell(X)\phi \wedge \Big[\frac{\partial L}{\partial \phi} - (-1)^p d\,\frac{\partial L}{\partial d\phi} \Big] +$$
$$+ d\Big[\ell(X)\, y \wedge \frac{\partial L}{\partial dy}\Big|_y + \ell(X)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi}\Big]$$
$$= d\,i(X) L + i(X)\, dL = d\,i(X) L \qquad (41)$$

Sustituyendo $\ell(X)\, y \wedge \frac{\partial L}{\partial dy}\Big|_y = -X^\mu {}^*t_\mu = -{}^*t(X)$ (42)

reordenando
$$d\,i(X) L = \ell(X)\phi \wedge {}^*El_\phi + X^\mu d\,{}^*t_\mu + X^\mu \frac{\partial L}{\partial y^\mu}\Big|_y +$$
$$+ d\Big[-{}^*t(X) + \ell(X)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \Big] \qquad (43)$$

Sustituyendo la expresión (25) para ${}^*t(X)$ se obtiene
$$d\,i(X) L = \ell(X)\phi \wedge {}^*El_\phi - X^\mu \Big[-d\,{}^*t_\mu - \frac{\partial L}{\partial y^\mu}\Big|_y \Big]$$
$$+ d\,i(X) L - d\Big[\ell(X)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi}\Big] +$$
$$+ dd\Big(i(X)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi}\Big) - d\big(i(X)\phi \wedge {}^*El_\phi\big)$$
$$+ d\Big(\ell(X)\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi}\Big) \qquad (44)$$

En el segundo miembro.

El 5º término es cero, obviamente $dd=0$, el 4º y el último se compensan, y el primer miembro se compensa con el tercer término del segundo, con lo que se obtendrá la expresión

$$X^{\mu}\left[-d{*}t_{\mu}-\frac{\partial L}{\partial y^{\mu}}\Big|_{y}\right]=\ell(X)\phi\wedge{*}EL_{\phi}-$$
$$-d\left[i(X)\phi\wedge{*}EL_{\phi}\right]=$$
$$=i(X)\,d\phi\wedge{*}EL_{\phi}+$$
$$+(-1)^{p}\,i(X)\phi\wedge d{*}EL_{\phi} \qquad (45)$$

Esta última expresión coincide con la expresión (40) que queríamos demostrar.

Definición : Ecuaciones de conservación débiles.

Sea $L=L(y,dy,\phi,d\phi)$ con el criterio débil del principio de mínima acción se obtiene $\delta L=d\delta{*}P$ y teniendo en cuenta $\delta{*}P=i(X)L+\bar{\delta}{*}\bar{P}$ se obtienen directamente a partir de (10) y de (45) , imponiendo las ecuaciones de campo del campo ${*}EL_{\phi}=0$, que

$$d\left[-\bar{\delta}y^{\mu}\wedge{*}t_{\mu}+\bar{\delta}\phi\wedge\frac{\partial L}{\partial d\phi}-d\bar{\delta}{*}\bar{P}\right]=0 \qquad (46)$$

$$-d{*}t_{\mu}=\frac{\partial L}{\partial y^{\mu}}\Big|_{y} \qquad (47)$$

A las cuales en el lenguaje de Trautman (1970) denominaremos leyes de conservación débiles, i.e., módulo las ecuaciones de campo.

De la ecuación (47) se obtiene como corriente la 3-forma energía momento y de la ecuación (46) la corriente 3-forma

$${*}j=\bar{\delta}y^{\mu}{*}t_{\mu}+\bar{\delta}\phi\wedge\frac{\partial L}{\partial d\phi}-\delta d{*}P \qquad (48)$$

<u>Ecuaciones (10) y (45) en sistemas no-holónomos</u>

Si se hubieran considerado sistemas no holónomos ortonormales $h^{\alpha}\neq dy^{\alpha}$ como bases, siguiendo un proceso completamente analogo se obtienen en vez de la identidad de Nöther (10) la identidad

$$-\delta\phi\wedge{*}EL_{\phi}=\delta y^{\mu}\wedge\frac{\partial L}{\partial y^{\mu}}\Big|_{y}-\delta h^{\alpha}{*}t_{\alpha}+$$
$$+d\left[\delta\phi\wedge\frac{\partial L}{\partial d\phi}-d\delta{*}\bar{P}\right] \qquad (49)$$

con $$-{*}t_{\alpha}=\frac{\partial L}{\partial h^{\alpha}}\Big|_{h} \qquad (50)$$

Y en vez de (45) la identidad

$$i(h_{\alpha})\,d\phi\wedge{*}EL_{\phi}+(-1)^{p}\,i(h_{\alpha})\phi\wedge d{*}EL_{\phi}=$$
$$=-d{*}t_{\alpha}+i(h_{\alpha})\,dh^{\beta}\wedge{*}t_{\beta}-i(h_{\alpha})\,dy^{i}\wedge\frac{\partial L}{\partial y^{i}}\Big|_{y} \qquad (51)$$

Las ecuaciones de conservación débiles tienen por tanto la expresión en sistemas no-coordenados

$$-d{*}t_{\alpha}+i(h_{\alpha})\,dh^{\beta}\wedge{*}t_{\beta}=i(h_{\alpha})\,dy^{i}\wedge\frac{\partial L}{\partial y^{i}}\Big|_{y} \qquad (52)$$

$$d\left[\bar{\delta}\phi\wedge\frac{\partial L}{\partial d\phi}-d\delta{*}\bar{P}\right]-\bar{\delta}h_{\alpha}\wedge{*}t_{\alpha}=-\bar{\delta}y^{i}\wedge\frac{\partial L}{\partial y^{i}}\Big|_{y} \qquad (53)$$

Expresiones que naturalmente se convierten en (46) y (47) al sustituir $h^{\alpha}\to dy^{i}$

Comentarios.

En diversos casos particulares se pueden obtener interesantes consecuencias a partir de la identidad de Nöther

i) Sea $\phi \in \mathcal{F}_0(M^4,R) \Rightarrow i(h)\phi = 0$ y la ecuación de conservación débil (52) es equivalente a las ecuaciones de campo $*El_\phi = 0$ siempre que $i(h_\alpha)\, d\phi \neq 0$

ii) Sea $\phi \in \mathcal{F}_1(M^4,R)$ en este caso (52) es equivalente a las ecuaciones de campo $*El_\phi = 0$ siempre que $\det[(d\phi)_{ij}] \neq 0$ y $d*El_\phi = 0$

Ejemplo : $\phi \to A \in \mathcal{F}_1(M^4, \mathcal{U}(1) \cong R)$ el potencial electromagnético

$$L = \frac{1}{2}\, dA \wedge * dA \quad , \quad *El_A = d * dA \Rightarrow d*El_A = 0$$

$$El_A = El_A^{\alpha} h_\alpha = * d * dA \in \mathcal{F}_1$$

$$i(h_\alpha)\, dA \wedge *El_A = i(h_\alpha) F \wedge *El_A = F_{\alpha\beta}\, El^\beta \varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow El^\beta = 0 \quad \forall \beta \quad \text{cuando } \det F_{\alpha\beta} \neq 0$$

$$(\text{i.e. } \bar{E}.\bar{B} \neq 0)$$

COVARIANCIA BAJO DIFEOMORFISMOS DE $L(h, \phi, D\phi)$

De la misma forma se ha tratado la covariancia de una acción general del campo ϕ libre bajo difeomorfismos considerando la derivada de Lie $\ell(X)$, se puede efectuar ahora un tratamiento analogo cuando el Lagrangiano es el de los campos libres más la interacción con el campo exterior A i.e., $L(h, \phi, D\phi)$. En este caso definimos una derivada de Lie covariante bajo G local en la forma

$$L(X) = D\, i(X) + i(X)\, D \tag{54}$$

que difiere de la usual en la presencia de las derivadas exteriores covariantes D, en vez de la presencia de las derivadas exteriores d.

Efectuando el mismo proceso que el efectuado anteriormente y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} L(X)\, D\phi &= i(X)\, DD\phi + D\, i(X)\, D\phi = \\ &= i(X)\,(F \wedge \phi) + D\, L(X)\, \phi - DD\, i(X)\, \phi \\ &= i(X)\, F \wedge \phi + D\, L(X)\, \phi \end{aligned} \tag{55}$$

(Donde se ha utilizado la fórmula (48) del apéndice 2 y que F = DD).

Se obtienen resultados análogos a los obtenidos en las fórmulas (51) y (25) y que para $L(h, \phi, D\phi)$ resultan ser

$$\begin{aligned} & i(h_\alpha)\, D\phi \wedge *El_\phi + (-1)^p\, i(h_\alpha)\, \phi \wedge D*El_\phi = \\ & = -D * t_\alpha + i(h_\alpha)\, Dh^\beta \wedge * t_\beta - i(h_\alpha)\, F^a \wedge * j_a \end{aligned} \tag{56}$$

Y donde la 3-forma de energía-momento canónico (ver fórmula (25)) toma la expresión

$$\begin{aligned} -*t_\alpha = \left.\frac{\partial L}{\partial h^\alpha}\right|_h &= i(h_\alpha)\, L - i(h_\alpha)\, \phi \wedge \left.\frac{\partial L}{\partial \phi}\right|_\phi - \\ & - i(h_\alpha)\, D\phi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi} \end{aligned} \tag{57}$$

En la expresión (56), Dh^β es

$$Dh = dh + A \wedge h = dh + A^a \wedge Y_a h \tag{58}$$

donde Y_a son los generadores de G en la representación de h. Si G se representa en R^4 trivialmente, entonces se verifica $Y_a = 0 \quad \forall a \Rightarrow Dh = dh$. Por otra parte de la expresión (56) se obtiene modulo las ecuaciones de Euler-Lagrange ${*}El_\phi = 0$, la ley de conservación débil

$$D{*}t_\alpha = i(h_\alpha)Dh^\beta \wedge {*}t_\beta - i(h_\alpha)F^a \wedge {*}j_a \qquad (59)$$

APENDICE 4

FIBRADOS

1) Geometría de las teorías gauge

Lo que sigue es un pequeño resumen de la formulación más intrinseca y global de las teorías gauge de simetrías internas, esquema que se puede aplicar, a gravedad teniendo en cuenta las características específicas de esta interacción, como se efectua en el capítulo D. Aquí solo se expondrán las principales definiciones de forma que lo expuesto en el capítulo D-8, sea lo más autocontenido posible. Una exposición más detallada se puede encontrar en gran cantidad de textos, entre ellos, Kobayashi et al (1963) y en la literatura física, Daniel et al (1980), Trautman (1970), Dreschler et al (1977), Yasskin (1979).

La estructura matemática fundamental de una teoría gauge es un G-fibrado principal (diferenciable) cuyos objetos fundamentales son:

P	π	M	G	R
espacio fibrado	Proyección fibrada P M C	espacio base (variedad C^∞)	Grupo de Lie con álgebra ALG	Acción por la derecha de G sobre P, (libre y transitiva sobre las fibras de P)

M, la variedad base es el espacio de Minkowski (M^4, η) en las teorías internas mientras que debe poseer una métrica Lorentz g en el caso de gravedad.

1ª Definición : Fibrado principal

1) El grupo de Lie G (al que tomaremos finito-dimensional) actua libremente (y diferenciablemente) sobre P por la derecha

$$P \times G \longrightarrow P$$
$$(p \cdot g) \longrightarrow R_g p = p \circ g \qquad \forall g \in G \quad \forall p \in P \qquad (1)$$

2) La variedad diferenciable (C^∞) M, es el espacio cociente bajo la relación de equivalencia introducida por la acción de G, $M = P/\sim$ y la proyección canónica $\pi : P \to M$ es C^∞, por lo que G es transitivo (simplemente) sobre la fibra $\pi^{-1}(x)$. $/ x \in M$. (2)

3) P es localmente trivial, i.e., $\forall x \in M \; \exists U \subset M \,/\, \pi^{-1}(U)$ es isomorfo con $U \times G$ en el sentido de que existe un difeomorfismo $J : \pi^{-1}(U) \to U \times G \;|\forall p \in \pi^{-1}(U)$ se verifica que $J(p) = (\pi(p), \eta(p))$

donde $\eta : \pi^{-1}(U) \to G$ satisface $\eta(pg) = \eta(p) g$ (3)
$\forall p \in \pi^{-1}(U)$
$\forall g \in G$

2ª Definición : Fibra

Cada fibra $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad cerrada de P y difeomorfa a G . Si $p \in \pi^{-1}(x) \Rightarrow \pi^{-1}(x) = \{pg \;/ \forall g \in G\}$ (4)

3ª Definición : Sección

Se denomina sección (local) a la aplicación diferencial de

$$\sigma : M \supset U \to P \qquad / \quad \pi \circ \sigma = id|_U \qquad (5)$$

En la literatura física a las secciones se las denomina "gauges". De un gauge a otro se puede pasar a través de las funciones de transición

$$g_{\mu\nu} : U \wedge V \longrightarrow G \qquad (6)$$
$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_U(p) \circ \eta_V^{-1}(p)$$

Si todas las funciones de transición verifican $g_{\mu\nu}(x) = e$, siendo e el elemento neutro de G, entonces existe un difeomorfismo de P en M G, i.e., P es trivial y admite una sección global.

4ª Definición : Formas (pseudo-tensoriales) sobre P

Actuando G por la izquierda sobre un espacio vectorial E en la representación ρ . Se llama a Φ forma de grado r (pseudo-tensorial) de tipo (ρ, E) sobre P, cuando se verifica (equivariante bajo P)

$$R_g^* \phi = \rho(g^{-1}) \Phi \qquad (7)$$

Esta definición se verifica en general cuando el grupo actua por la izquierda sobre una variedad F.

5ª Definición : Conexión en P

Sea $T_p(P)$ el espacio tangente al fibrado principal P en el punto $p \in P$ y sea "ver $T_p(P)$" el subespacio de $T_p(P)$ que consiste en todos los vectores tangentes en p a la fibra que pasa por él. $\mathrm{ver}\, T_p(P) = \{ Z_p \in T_p P \;/\; \pi_*(Z_p) = 0 \}$. (8)

Una conexión en P consiste en asignar $\forall p \in P$ un subespacio hor $T_p(P) \subset T_p(P)$ que verifique

i) $T_p(P) = \mathrm{ver}\, T_p(P) \oplus \mathrm{hor}\, T_p(P)$ (9)

ii) $\mathrm{hor}\, T_{pg}(P) = R_{g*}\, \mathrm{hor}\, T_p(P) \qquad \forall g \in G$ (10)

Siendo $R_{g*}: T_p(P) \to T_p(P)$ la inducida por R_g. Esta propiedad nos dice que la elección de hor T (P) es invariante por G

iii) $hor\, T_p(P)$ es C^∞ (11)

Otra forma de definir una conexión en P, es como 1-forma sobre P de tipo (ad, ALG) y $\omega \in T_1(P, ALG)$ que verifique además que $\Sigma(A) \lrcorner\, \omega = A$ (12)

, en términos más intrinsecos $\omega = \Sigma^{-1} \circ ver$

donde $A \in ALG$ y $\Sigma : ALG \to \pounds(P)$

Σ es un homomorfismo del álgebra de Lie de G en el álgebra de Lie de los campos vectoriales sobre P.

Los campos vectoriales $\Sigma(A)$ son todos verticales ($\pi_* \Sigma(A) = 0$) y se verifica que dim $ver\, T_p(P) = \dim ALG$

El campo vectorial fundamental $\Sigma(A)$ esta generado por la acción (por la derecha) de G en P en la forma

$$\Sigma(A)\big|_p = \frac{d}{dt}\left(R_{\exp(tA)}\, P\right)\Big|_{t=0} \qquad \forall p \in P \qquad (13)$$

El potencial gauge bajo una sección local σ, es el pull-back ó imagen inversa de ω por σ

$$\overset{\sigma}{\omega} = \sigma^* \omega \qquad (14)$$

Un cambio de sección (transformación gauge)

$$\sigma'(x) = \sigma(x) \circ g(x) \qquad (15)$$

el potencial gauge se transforma como

$$\overset{\sigma'}{\omega} = g^{-1}(x)\, \overset{\sigma}{\omega}\, g(x) + g^{-1}(x)\, dg(x) \qquad (16)$$

6ª Definición : Derivada exterior covariante en P

La definición más intrinseca esta dada por

$$D = hor \circ d \qquad (17)$$

Para una r-forma Φ esto significa que

$\forall Z_1 \ldots Z_{r+1} \in T_p(P)$

$$D\Phi(Z_1, \ldots Z_{r+1}) = d\Phi(hor Z_1, \ldots, hor Z_{r+1}) \qquad (18)$$

Y para una 0-forma Φ se verifica que

$$\begin{aligned} D\Phi(Z) &= d\phi(hor Z) = d\phi(Z - ver Z) = \\ &= d\phi(Z) - d\phi(ver Z) = \\ &= d\phi(Z) - d\phi(\Sigma \circ \omega(Z)) \\ &= d\phi(Z) - \Sigma(\omega(Z))\Phi \end{aligned} \qquad (19)$$

Si Φ es de tipo (ρ, E) se obtiene

$$\begin{aligned} (\Sigma(A)\Phi)_p &= \frac{d}{dt}\left(\Phi(R_{\exp(tA)}\, p)\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}\left(\rho(\exp(-tA)\, \Phi(p))\right)\Big|_{t=0} = \\ &= -\rho_*(A)\, \Phi(p) \end{aligned}$$

Y por consiguiente de (19)

$$D\Phi = d\phi + \rho_*(\omega)\Phi \qquad (20)$$

donde $\rho_* : ALG \to End\, E$

En general si Φ es una r-forma (tensorial, i.e., horizontal) sobre P de tipo (ρ, E), $D\phi$ es una $r+1$ del mismo tipo (ρ, E).

La forma Φ en P de tipo (ρ, E) se transforma bajo un cambio de sección local en la forma

$$\overset{\sigma'}{\Phi}(x) = \rho\left(g(x)^{-1}\right) \overset{\sigma}{\Phi}(x) \tag{21}$$

donde $\overset{\sigma}{\Phi} = \sigma^{*} \Phi$

y $\sigma'(x) = \sigma(x) \circ g(x)$

Alternativamente los campos materiales se pueden considerar como secciones (locales) de un fibrado asociado a P con fibra estandar E . Veamos para ello sucintamente la definición de este fibrado asociado

7ª Definición : Fibrado asociado

Sea P el fibrado principal y E en general una variedad sobre la cual G actua diferenciablemente por la izquierda en la forma

$$(g, \varepsilon) \in G \times E \longrightarrow g\varepsilon \in E \tag{22}$$

Sea el producto P$\times$E sobre el que hacemos actuar G por la derecha en la forma

$$(p.\varepsilon)g = \left(pg, \rho(g^{-1})\varepsilon\right) \qquad \begin{matrix} \forall g \in G \\ \forall p \in P \\ \forall \varepsilon \in E \end{matrix} \tag{23}$$

Definimos a $\mathcal{A}$ como fibrado asociado a P con fibra tipica E como el espacio cociente

$$\mathcal{A} = P \times_G E = P \times E /_{\sim} \tag{24}$$

bajo la relación de equivalencia

$$(p.\varepsilon) \sim \left(p \circ g, \rho(g^{-1})\varepsilon\right) \tag{25}$$

La estructura de fibrado de $\mathcal{A}$ viene inducida por la de P. La aplicación P$\times$E$\rightarrow$M induce una proyección $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow M$ tal que $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(x)$ es la fibra de $\mathcal{A}$ sobre x.

El esquema general es

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & P \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[dl, "\Phi"'] & M \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[d, "\mathcal{H}\,id"] \\ E \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, shift right, "\pi_{\mathcal{A}}"'] & M \arrow[l, shift right, "\tilde{\Phi}"'] \end{tikzcd} \tag{26}$$

Los campos físicos materiales se les puede considerar como secciones de $\mathcal{A}$, $\tilde{\Phi}$, ó como $\phi : P \rightarrow E$. Naturalmente si E no es trivial se pueden considerar como aplicaciones locales $\varphi_E\ \phi \circ \sigma$: M $\rightarrow$E pero no como aplicaciones globales (Ver a este respecto el interesante trabajo de del Olmo, por ejemplo).

8ª Definición : Reducción

Un homomorfismo (isomorfismo) entre dos fibrados principales $(P, \pi, M, G, \circ)$, $(P', \pi', M', G', \circ')$ es una aplicación (biyectiva)

$$k : P \longrightarrow P' \tag{27}$$

junto con un homomorfismo (isomorfismo) de los grupos estructurales

$$h : G \longrightarrow G' \tag{28}$$

tales que

$$k(p \circ g) = k(p) \circ h(g) \qquad \begin{matrix} \forall g \in G \\ \forall p \in P \end{matrix} \tag{29}$$

si $M = M'$ y $G = G'$ se le denomina homomorfismo (isomorfismo) fuerte, si $h = id$, $k_M = id$. (30)

Si G es un subgrupo de G', se dice que el grupo de estructura G' es reducible a G, si hay $(P, \pi, M, G, \circ)$ un fibrado principal y un homomorfismo $K : P \to P'$ tal que es una inmersión inyectiva y $K_M = id$ y $K(p \circ g) = K(p) \circ g$

$$\forall p \in P, \forall g \in G \tag{31}$$

2) El Fibrado de las bases lineales

Un ejemplo estandar de fibrado principal lo constituye el fibrado L(M) con grupo de estructura GL (n,R), de las bases lineales de una variedad M, n-dimensional.

Cada punto de L(M) es del tipo

$$p = (x, h_\alpha) = (x, h_1, \ldots h_n) \tag{32}$$

donde h_α son n-vectores linealmente independientes que constituyen una base de $T_x(M)$. Dos bases en el punto $x \in M$ están relacionadas mediante un elemento de GL(n,R).

La acción por la derecha de GL(n,R) sobre L(M) esta dada por

$$(x, h_\alpha) \circ g = (x, (g^\beta{}_\alpha h_\beta)) \quad \forall g \in GL(n,R) \tag{33}$$

La proyección fibrada es

$$\begin{aligned} \pi : L(M) &\to M \\ (x, h_\alpha) &\to x \end{aligned} \tag{34}$$

Un sistema local de coordenadas x^i sobre $U \subset M$ da lugar a una sección holónoma (coordenada) de L(M)

$$\begin{aligned} \sigma : U &\to L(M) \\ x &\to (x, \partial_i) \end{aligned} \tag{35}$$

Una sección(local) de L(M) que no se pueda escribir de esa forma se denomina no-holónoma (ver apéndice 1).

Cada base no holónoma h_α en cada punto $x \in M$, induce a partir de sistema de coordenada x^i de M un sistema de coordenadas $(x^i, h^i{}_\alpha)$ sobre $\pi^{-1}(U)$.

Si $X^\alpha{}_\beta$ es una base canónica del AL GL(n,R)i.e., con elementos

$$(X^\alpha{}_\beta)^\gamma{}_\delta = \delta^\alpha{}_\delta \, \delta^\gamma{}_\beta \tag{36}$$

Los campos vectoriales fundamentales sobre $\pi^{-1}(U)$ son, aplicando la fórmula (13)

$$\begin{aligned} \Sigma(X^\alpha{}_\beta) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x^i, h^i{}_\gamma [\exp(t X^\alpha{}_\beta)]^\gamma{}_\delta) = \\ &= h^i{}_\gamma (X^\alpha{}_\beta)^\gamma{}_\delta \frac{\partial}{\partial h^i{}_\delta} = \\ &= h^i{}_\beta \frac{\partial}{\partial h^i{}_\alpha} = \Sigma^\alpha{}_\beta \end{aligned} \tag{37}$$

La conexión (lineal) 1-forma ω sobre L(M) tiene la expresión

$$\omega = \omega^\alpha{}_\beta X^\beta{}_\alpha \tag{38}$$

y en el sistema de coordenadas de L(M)

$$\omega^\alpha{}_\beta = h_k{}^\alpha (\Gamma^k{}_{ij} h^i{}_\beta dx^j + dh^k{}_\beta) \tag{39}$$

(Comparese con el apéndice 1)

Mediante una sección holónoma σ, se obtiene

$$\tilde{\omega}^k{}_i = \sigma^* \omega^k{}_i = \Gamma^k{}_{ij} dx^j \tag{40}$$

Es obvio que mediante (16), los símbolos $\bar{\Gamma}^{k}{}_{ij}$, se transforman como los coeficientes de una conexión en M bajo un cambio de coordenadas.

Torsión y Curvatura

La 1-forma canónica sobre L(M) esta definida a través de

$$\theta\big|_{p=(x,h_\alpha)} = h^{-1}\circ\pi_* : T_p(L(M)) \to R^n \tag{41}$$

donde $\pi_* : T_p(L(M)) \to T_x M$ (42)

$h : R^n \to T_{\pi(h)}(M).$

θ es independiente de la conexión de L(M) asimismo, θ es tensorial (horinzontal) de tipo (id,R^n) sobre L(M) aunque no lo es $d\theta$ y $\theta^\alpha = h^\alpha{}_i dx^i$ en coordenadas de L(M).

La torsión de la conexión ω sobre L(M) esta definida en la forma

$$\Theta^\alpha = D\theta^\alpha = d\theta^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta \wedge \theta^\beta \tag{43}$$

$$= \frac{1}{2} Q^{\alpha\cdot\cdot}{}_{\gamma\beta}\ \theta^\beta\wedge\theta^\gamma \tag{44}$$

(Ver a este respecto apéndices 1 y 2) Θ^α es una 2-forma de tipo $(\mathcal{E}^1{}_0, R^4)$

Mientras que la 2-forma de curvatura sobre L(M)

$$\Omega = \Omega^\alpha{}_\beta X^\beta{}_\alpha \tag{45}$$

y $$\Omega^\alpha{}_\beta = d\omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\dot{\beta}\wedge\omega^\beta{}_\dot{\gamma} = \frac{1}{2}R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\ \theta^\gamma\wedge\theta^\delta \tag{46}$$

Verificandose las identidades de Bianchi siguientes

$$D\Omega^\alpha{}_\beta = 0 \qquad\qquad D\Theta^\alpha = \Omega^\alpha{}_\beta\wedge\theta^\beta \tag{47}$$

Conexiones de Curvatura nula

Sobre conexiones de curvatura nula existe un importante teorema, el cual se da a continuación.

TEOREMA

Las siguientes sentencias son equivalentes dado un G-fibrado P

1) $\Omega = 0$ (41)

2) $[X,Y]$ es horizontal, $\forall X,Y$ campos vectoriales horizontales. (42)

3) Existe una sección local σ de P $/\ \sigma^*\omega = 0$ (43)

DEMOSTRACION

$1 \Leftrightarrow 2$, Ver también, Trautman (1970)

Por definición al ser Ω tensorial (i.e., horizontal)

$$\Omega(X,Y) = d\omega(\mathrm{hor}X,\mathrm{hor}Y) =$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{hor}X\ \omega(\mathrm{hor}Y) - \mathrm{hor}Y\ \omega(\mathrm{hor}X) -$$
$$-\ \omega([\mathrm{hor}X,\mathrm{hor}Y])) =$$
$$= -\omega([\mathrm{hor}X,\mathrm{hor}Y]) = -\omega([X,Y])$$

2) $\Rightarrow$ 3) Aplicado el teorema de Frobenius, ver Sternberg (1964)

3) $\Rightarrow$ 1), $\sigma^*\omega = 0 \Rightarrow \sigma^*\Omega = 0$ y como Ω es tensorial $\Rightarrow \Omega = 0$. ∎

CONCLUSIONES

Los resultados fundamentales que se han obtenido a lo largo de la memoria son los siguientes:

1) En primer lugar se ha efectuado un resumen crítico de las teorías gravitatorias métricas y de su cuantificación por los métodos usuales.

2) Se ha observado que, si los campos materiales poseen espín, la variable gravitatoria debe ser la tetrada.

3) Adoptando el formalismo métrico-afín, el espín necesita a la torsión.

4) Se ha efectuado un resumen de las teorías con torsión algebraíca y con torsión dinámica y su cuantificación covariante.

5) Se ha efectuado una exposición, usando formas diferenciales, del esquema general de las teorías gauge internas mediante el formalismo Lagrangiano.

6) Aunque la teoría gravitatoria debe ser construida en un fibrado isomorfo a una G-estructura (subfibrado de L^gM), se ha usado el formalismo variacional para construir la teoría gauge de grupo de traslaciones que interpretada "a la Thirring" proporciona un espacio de teleparalelismo Cartan. Y se estudian diversas teorías en este espacio.

7) Se expone en que sentido se puede decir que Relatividad General es la teoría gauge de grupo de traslaciones más invariancia Lorentz local.

8) Se construye la teoría gauge del grupo de Lorentz usando el formalismo Lagrangiano observado que conduce, en general, a un espacio de Cartan y con la torsión nula a un

espacio pseudo-riemanniano.

9) Se expone en que sentido Relatividad General es la teoría gauge del grupo de Lorentz.

10) Se estudian las diferencias entre la tèoría gauge del grupo de Lorentz y de Poincaré y se formulan criticas al método usado.

(en nuestra opinión)

11) Se construye el esquema gauge mas apropiado para describir a la gravedad. Usando el formalismo de fibrados, se demuestra que lo que es más consistente geometricamente, es construir la teoría gauge interna Poincaré rota a una teoría con invariancia local Lorentz y covariante bajo difeomorfismos.

12) Se comentan las posibles inconsistencias de las ecuaciones de campo generales.

13) Se estudian dos posibles límites de la teoría, demostrando, si se rompe la ligadura entre torsión y espín, que el espacio pseudo-riemanniano es la verdadera arena macroscópica y no, como opinan otros autores, un espacio de teleparalelismo Cartan.

14) Se estudia el Lagrangiano gravitatorio más general y se exponen los principales tests teóricos y experimentales a los que debe someterse.

15) Se estudian la viabilidad de diversas teorías gravitatorias, concluyendo que Relatividad General es la única teoría macroscópica viable.

16) Se apuntan diversas generalizaciones de la teoría gauge Poincaré rota y en particular la preferencia por la teoría de Sitter.

REFERENCIAS

- Adler S. (1982), Rev. Mod. Phys, 54, 729.
- Agnese A., Calvini P. (1975), Phys Rev. D12, 3804.
- Aldersley (1977-a) GRG 8, 397.
- Aldersley (1977-b) Phys Rev. D15, 3507.
- Baekler P. (1980) Phys Lett 94B, 44.
- Baekler P. (1981) Phys Lett 99B, 329.
- Baekler P., Hehl F. Mielke (1982) en Proc. 2º M. Grossmann, North-Holland.
- Belinfante F.J. (1940), Physica 7, 449.
- Benn I.M. et al (1981) G.R.G. 13, 581.
- Benn I.M. et al (1982) J. Phys A15, 849.
- Brans C., Dicke R. (1961) Phys Rev. 124, 925.
- Bregman A. (1973) Prog Theoret Phys, 49, 667.
- Carmeli M. (1974) en "Group theory in Non-lineár Problems" ed A. Barut, Reidel.
- Cartan E. (1922), Compt. Rend. Acad. Sci., 174, 593.
- Charap J.M., Tait W. (1974), Proc. Roy Soc. A340, 249.
- Cho Y.M. (1976), Phys Rev. 14, 2521.
- Choquet-Bruhat Y. et al (1977) "Analysis, Manifolds and Physics" ed North-Holland.
- Collela R., Overhauser A.W., Werner S.A. (1975), Phys Rev. Lett 34, 1472.

- Daniel M., Viallet C. (1980) Rev. Mod. Phys 52, 175.
- Debney G., Fairchild E., Siklos S. (1978) G.R.G. 9, 879.
- de Sabbata V., Gasperini M. (1981-a) Phys Lett 83A, 115.
- de Sabbata V., Gasperini M. (1981-b) Phys Rev. D23, 2116.
- Deser S. (1970) G.R.G. 1, 9.
- Dreschler W., Mayer M.E. (1977) "Fiber Bundles in Gauge theories" Lect. Not. Phys 67, Springer.
- Duff M.J., Goldthorpe A. (1981), Preprint Imperial College.
- Eddington A. (1924), "The Mathematical theory of Relativity" C.U.P.
- Einstein A. (1915) "Die Feldgleichungen der Gravitation", Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. 844-847.
- Einstein A. (1917) Sitz. Ber. Preuss.Akad. Wiss., 142 reimpreso en "The principle of Relativity", Dover, N.Y.(1952).
- Einstein A. (1925) Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss., 414.
- Einstein A. (1928) Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss., 224.
- Fairchild E.E. (1977) Phys Rev. D16, 2438.
- Feynman R.P. (1963), en "Lectures on Gravitation" Pasadena, Cal. Tech.
- Fock V. (1927) Zeit. für Phys 39, 226.
- Giachetti R., Ricci R., Sorace E. (1981) Lett Math Phys 5, 85.
- Goenner H. (1970) Comun. Math Phys 16, 34.
- Grisaru M.T., van Nieuwenuizen P. Wu C.C. (1975) Phys Rev. D12, 397.
- Grisaru M.T., Zak M. (1980), Phys Lett 90B, 237.
- Hamermesh M. (1962) "Group theory and its Application to Physical Problems", Pergamon.

- Happer W., Tam A. (1977) Springer Ser. in Laser Spectroscopy Vol. 3, 333.

- Havas P. (1977) G.R.G. 8, 631.

- Hawking S. (1979) en G.R. : an Einstein Centenary Survey, ed. S. Hawking et al C.U.P.

- Hayashi K., Nakano T. (1967), Prog. Theor Phys 38, 491.

- Hayashi K., Shirafuji T. (1979) Phys Rev. D19, 3524.

- Hayward J. (1979) Phys Rev. D20, 3039.

- Hehl F.W. (1973) G.R.G. 4, 333.

- Hehl F.W. (1974) G.R.G. 5, 491.

- Hehl F.W.,von der Heyde P., Kerlick (1974) Phys Rev. D 10, 1066

- Hehl F.W., von der Heyde P., Kerlick D., Nester J. (1976) Rev. Mod. Phys 48,393.

- Hehl F.W., Ne'eman Y., Nitsch J., von der Heyde P. (1978) Phys Lett 78B, 102.

- Hehl F.W., Sijacki (1979) Preprint Universität zu Köln.

- Hehl F.W., Nitsch J., von der Heyde (1980-a) en "General Relativity and Gravitation" ed A. Held , Plenum.

- Hehl F.W. (1980-b) en Proc. Inter. School of Cosmology and Gravitation eds. P. Bergmann , de Sabbata, Plenum.

- Hennig J., Nitsch J. (1981) G.R.G. 13, 947.

- Hojman S., Rosenbaum M., Ryan M.P., Shepley L.C. (1978) Phys Rev. D 17, 3141.

- Hojman S. et al (1979) Phys Rev. D 19, 430.

- Holland P. (1981) Phys Lett 83A, 191.

- Horak M., Krupka D. (1978) Int J. Theor Phys 17, 573.

- Hill H.A. (1982) Univ. of Arizona Report.

- Ivanov E.,Niederle J. (1982) Phys Rev. D25, 976.

- Kaempffer F.A. (1978) Phys Rev. 18, 2727.

- Kaku M., Towsend P., van Nieuwenhuizen P. (1977-a) Phys Lett 69B, 304.

- Kaku M., Towsend P., van Nieuwenhuizen (1977-b) Phys Rev. Lett 39, 1109.

- Kaptanoglu S. (1982) Phys Rev. D, 26, 3754.

- Kasuya M. (1975) Nuovo Cim 28B, 127.

- Kerlick D. (1973) Astroph J., 185, 631.

- Kerlick D. (1975) Phys Rev. D, 12, 3004.

- Kerner (1982) G.R.G. 14, 453.

- Kibble T.W.B. (1961) J. Math. Phys 2, 212.

- Kibble T.W.B. (1981) en Quantum Gravity II, eds. D.W. Sciama, Oxford Univ. Press (1982).

- Kijowski J. (1978) G.R.G. 9, 857.

- Kobayashi S., Nomizu K. (1963) "Foundations of Differential Geometry" Vol. 1, Interscience Publishers.

- Kopczynski W. (1982) J. Phys A 15, 493.

- Kuchowicz B. (1976) Acta Cosmologica Z4, 67.

- Lanczos C. (1938) Ann. Math 39, 842.

- Lanczos C. (1949) "The Variational Principles of Mechanics" Toronto Press.

- Landau L. (1955) en "N. Bohr and the Development of Physics" ed. W. Pauli, Pergamon Press.

- London F. (1927) Zeit für Phys 42, 375.
- López C. (1977) Int. J. Theor. Phys 16, 167.
- Lord E.A. (1971) Proc. Cam. Phil. Soc. 69, 423.
- MaCrae K. Riegert R. (1981) Phys Rev. D 24, 2555.
- Mandelstam S. (1962) Ann Phys 19, 1.
- Mathisson M. (1937), Acta Phys Pol. 6, 163.
- McCrea J.D. (1982) Preprint Dias.
- Meyer H. (1982) G.R.G. 14, 531.
- Minkevich A. (1980) Phys Lett, 80A, 232.
- Misner C., Thorne K., Wheeler J.A. (1970) "Gravitation" ed. Freeman.
- Moffat J.W. (1979) Phys Rev. D 19, 3554.
- Møller C. (1978) K. Dan Vidensk Mat. Pys. Skr. 89, nº 13.
- Müller-Hoissen F. (1982) Phys Lett 92A, 433.
- Ne'eman Y., Regge T. (1978) Riv. Nuovo Cim 1, 1.
- Ne'eman Y., Sijacki D. (1979) Ann Phys (N.Y) 120, 292.
- Ne'eman Y. (1980) en Proc 6th Inter. Sch. of Cosmology and Gravitation, ed P. Bergmann, V. de Sabbata, Plenum.
- Nester J.M. (1977) Phys Rev. D 16, 2395.
- Nester J.M., Isenberg J. (1977) Phys Rev. D 15, 2078.
- Neville D.E. (1978) Phys Rev. D 18, 3535.
- Neville D.E. (1980-a) Phys Rev. D 21, 867.
- Neville D.E. (1980-b) Phys Rev. D 21, 2075.
- Neville D.E. (1980-c) Phys Rev. D 21, 2770.
- Ni W.T. (1979) 19, 2260. Phys Rev.

- Nieh H.T., Yan M.L. (1982) J.M.P. 23, 373.
- Nitsch J. (1980) en Proc. of the 6th Course Inter. School of Cosmology and Gravitation, eds P.G. Bergmann y V. de Sabbata. Plenum.
- Nitsch J., Hehl F.W. (1980) Phys Lett 90B, 98.
- Palatini A. (1919) Rend. Cir. Mat. Pal. 43, 203.
- Papapetrou A. (1951) Proc. Roy. Soc. A, 209, 248.
- Pascual J.F. (1980) Lett Nuovo Cim 28, 321.
- Pascual J.F. (1982) en "Encuentros Relativistas" ed. Univ. Pais Vasco.
- Penrose (1979) en "General Relativity, An Einstein Centenary Survey;" eds S.W. Hawking y W. Israel C.U.P.
- Pérez-Rendón A. (1980) en Lect. Not in Math 836 "Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics" ed P.L. García, A. Pérez-Rendón J.M. Souriau Springer.
- Purcell A.J. (1978) 18, 2730. Phys. Rev.
- Ramaswamy S. y Yasskin P. (1979) Phys Rev. D19, 2264.
- Rauch R., Nieh H. (1981) Phys Rev. D24, 2029.
- Rauch R. et al (1982-a) G.R.G. 14, 331.
- Rauch R. et al (1982-b) Phys Rev. D 25, 577.
- Rosenfeld L. (1940) Mem. Acad. Belg. Sci. 18, 1.
- Sakharov A. (1968) Sov. Phys Dok. 12, 1040.
- Salam A. Strathdee (1978) D18, 4596. Phys Rev.
- Schouten A., Ricci calculus Springer (1954).
- Schweizer M., Straumann N. (1979) Phys Lett 71A, 493
- Schweizer M., Straumann N. Wipf (1980) G.R.G. 12, 951

- Sciama D. (1962) en Recent Dev. in G.R. (Pergamon) 415.
- Seelig K.,"A. Einstein", Espasa-Calpe (1968).
- Sezgin E. van Nieuwenhuizen (1980) Phys Rev. D 21, 3269.
- Sezgin E. (1981) Phys Rev. 24D, 1677.
- Shaw R. (1955) Ph D Thesis, Imperial College
- Skinner R. Gregorash D. (1976) Phys Rev. D14, 3314.
- Smalley L.L. (1980) Phys Rev. D 21, 328.
- Stelle K.S. (1977) Phys Rev. D 16, 953.
- Sternberg S "Lectures on Differential Geometry" (Prentice Hall)
- Thirring W. (1959) Forts. der Phys 7, 79.
- Thirring W., Wallner R.P. (1978) en Lect. Not in Math, 676.
- Thirring W. (1978) "Classical Field theory", Springer .
- Thirring W. (1982) en "Dynamical Systems and Microphysics", Academic Press.
- t'Hooft G., Veltman M. (1974) Ann. Inst. H.P. 20, 69.
- t'Hooft G. (1979) en "Recent Developements in Gravitation", Plenum Press.
- Tonnelat M.A. (1965) "Les theories Unitaires de l'Electro-magnetisme et de la Gravitation", Gauthier-Villars.
- Trautman A. (1970) Rep. Math Phys 1, 29.
- Trautman A. (1972) Bull Acad. Pol. Sci. 20, 185, 503.
- Trautman A. (1973) Simp Math 12, 139.
- Trautman A. (1973) Nature (Phys Sci) 242, 7
- Trautman A. (1975) Ann. N.Y. Acad. Sci. 262, 241.
- Utiyama R. (1956), Phys Rev. 101, 1597.

- von Westenholz C.,(1981),"Differential forms in Mathematical Physics", North-Holland.
- Wallner R.,(1980), G.R.G., 12, 719.
- Weinberg S.,(1972), en "Gravitation and Cosmology" ed. J. Wiley.
- Weyl H.,(1917), Ann. Phys (Leipzig), 59, 101.
- Weyl H.,(1929), Zeit für Phys, 56, 330.
- Wheeler J.A.,(1974), en "High Energy Astrophysics and its relation to Elementary Particle Physics", M.I.T. Press.
- Wu T.T., Yang C.N.,(1975), Phys Rev. D, 12, 3845.
- Yang C.N.,(1971), en Hawai Conference.
- Yang C.N., Mills R.,(1954), Phys Rev., 96, 191.
- Yang C.N.,(1974),Phys Rev. Lett., 33, 445.
- Yasskin P.,(1978), "Fiber Bundles" Preprint, Univ. Maryland.
- Yasskin P.,(1979),Seminario en la Escuela International de Erice, 6º Curso de Cosmología y Gravitación.
- Yasskin P. y Stoeger W.,(1980), D21, 2081. Phys Rev.
- Zee A.,(1979),Phys.Rev. Lett., 42, 417.
- Zeldovich Ya,(1968), Sov. Phys.,15, 209.

ADDENDUM : SELECCION DE BIBLIOGRAFIA RELACIONADA NO CITADA EN EL TEXTO

- Atiyah M F (1979) "Geometry of Yang-Mills fields" Fermi Lect.
- Abers E S ,Lee B W "Gauge theories" (1973) Phys Rep 9,1.
- Ahner H F ,JMP 22 (1981) 1280.
- AsoreY M ,(1978) Tesis Doctoral:"Campos de Gauge Unificado" Universidad de Zaragoza.
- Anandan J (1979) Nuovo Cim. 53A,221.
- " (1980) Found. of Phys. 10,601.
- Audretsch J (1980) Phys Rev D24, 269.
- Balachandran A P et al (1979) Phys Rev 19,2416.
- Balachandran A P ,Marmo G,(1982) "Gauge symmetries and fibre bundles,Göteborg preprint 82-35.
- Basombrio F G , GRG 12(1980) 109.
- Blagojevic M et al.(1981) Nuovo Cim.62B,257.
- Chang D B y Jhohnson H H (1980) Phys Rev 21,874.
- Chang L N y Mansouri F (1978) Phys Rev 17,3168.
- Cho Y M y Freund P G O (1975) Phys Rev 12,1711.
- Cho Y M y Jang P S (1975) Phys Rev 12,3789.
- Cho Y.M (1976) Phys Rev 14,3335.
- D'Auria R ,Fré P ;Regge T (1980) Riv Nuovo Cim 6.
- D'Adda A,D'Auria R,Fré P,Regge T (1980) Riv Nuovo Cim 12.
- Derbes D (1978) Nuovo Cim 45,31.
- Dreschler W (1982) Ann Inst H P 37,155.
- Duff M D en Supergravity 81,eds S Ferrara y J G Taylor,CUP(1982)
- Eguchi T,Gilkey P B,Hanson A J ,"Gravitation,Gauge theories and Differential geometry" Phys Rep (1980) 66,213.
- Edelen D G B (1981) Annals of Phys,133,286.
- Fairchild E (1975) Ph D Thesis:"Applications of the Conformal group in Physics" Univ of Texas at Austin.
- García Estévez P ,Tesis Doctoral:"La Invariancia conforme en Gravitación y Cosmología"(1982)Univ Salamanca.

- Gambini R,Trias A (1981) Phys Rev 23,553.
- Gu C H ,Yang C N (1975) Scientia Sinica,18,483.
- Gu C H (1981) "On classical Yang-Mills fields" Phys Rep,80,251.
- Jackiw R (1980) "Invariance,symmetry and periodicity in gauge theories",Acta Phys Aust Suppl 22,383.
- Kopczynski W en Conf Inter on Diff Geom Meth in Mth Phys, Lect Not in Math 836(1980),eds García,Pérez-Rendón y Souriau, Springer.
- Leinaas J M (1980) "Topological charges in Gauge Theories" Fort der Physik 28,579.
- Lévy-Leblond J M (1974) Riv Nuovo Cim 4,99.
- Loos H G,J.M.P. 8 (1967) 2114.
- Luehr C P y Rosenbaum P (1980),JMP,21,1432.
- Mack G (1981) "Physical principles,Geometrical aspects and locality properties of Gauge field Th" Forts der Phys29,135
- Mateos J M (1980) Tesis Doctoral:"Simetrías Rotas en teoría de Campos" Universidad de Salamanca.
- Mayer M E (1979) "Geometric Aspects of Gauge Field Theories" Ann Israel Phys Soc vol 3.
- Mayer M E (1981) "Symmetry Breaking in Gauge Theories" Hadronic J 4,108.
- Müller-Hoissen F(1983) Dissertation,Univ Göttingen.
- Nester J M (1977) Ph D Thesis:"Canonical Formalism of the ECSK Theory" University of Maryland.
- van Nieuwenhuizen P "Supergravity" Phys Rep(1981) 68,189.
- Norris L K,Davis W R,(1979) Ann Inst H P 31,387.
- Norris L K,et al (1980) Phys Lett 79A,278.
- del Olmo M A ,Tesis Doctoral (a aparecer) "Realizaciones de Grupos de Lie de Transformaciones" Univ Valladolid.
- Peak D (1970) PH D Thesis:"Foundations of Gauge Theory" State University of New York at Albany.
- Percacci R (1982) GRG 14,1043.
- Pilch k A (1980) Lett Math Phys 4,49.

- O' Raifeartaigh L (1979) "Hidden Gauge Symmetry" Reports Prog Phys 42,159.

- Schweizer M A ,Dissertation (198o) Universität Zürich.

- Smolin L (1979) Nucl Phys B160,253.

- " (1982) Nucl Phys B208,431.

- Stelle K S ,West P C (1980) Phys Rev D21,1466.

- Rodríguez Espinosa J M (1976) Tesis de Licenciatura:"Formalismo geométrico de los campos de gauge" Universidad de Zaragoza.

-Trautman A (1979) Bull Acad Pol Sci 27,7.

- " (1980) en "General Relativity and Gravitation" Vol 1,ed A Held ,Plenum Press.

- " (1981) "Geometric aspects of Gauge Configurations" Acta Phys Aust Suppl23,401.

-Treat R P ,JMP 11(1970) 2176.

- Utiyama R (1980) Prog Theor Phys 64,2207

- Wallner R (1982) Acta Phys Aust 54,165.

- de Wit B (1981) "Conformal Invariance in Gravity and Supergravity" Lectures at Karpacz (Polonia).