

Práctica 1: Ley de Hooke.

Determinación de la constante elástica de un muelle por dos métodos: Estático y Dinámico.

1. Introducción

Como ya hemos visto en clase y seguramente conocíais de antes, un resorte o muelle cumple dentro del rango de elasticidad¹ del material la famosa Ley de Elasticidad de Hooke. El caso general sería estirar (o comprimir) el muelle a lo largo de su eje de simetría en una dirección arbitraria del espacio dada por el eje l de la Figura 1. En esa situación, la fuerza elástica que ejerce el muelle en reacción a la fuerza con la que lo estiramos es:

$$\vec{F}_{\text{elástica}} = -k \cdot \Delta l \cdot \vec{u}_l \quad (1)$$

expresada aquí de forma genérica y vectorial, donde $\vec{F}_{\text{elástica}}$ es la fuerza que ejerce el muelle en sentido contrario al que hemos alargado (o comprimido) una cantidad Δl respecto a su longitud natural l_0 . La constante k es la denominada constante elástica del muelle.

Puesto que la situación habitual es realizar el estiramiento (o la compresión) del muelle en un dirección concreta que no cambia durante el experimento (por ejemplo, horizontal o vertical), solemos denominar a esa dirección como eje x . Entonces $\vec{F}_{\text{elástica}} = \vec{F}$ sólo tendrá componente \vec{u}_x y podemos trabajar con la ecuación para esa componente, olvidándonos de los vectores:

$$F = -k \cdot \Delta x \quad (2)$$

donde ahora llamamos Δx a la elongación que antes habíamos llamado Δl , para ser coherentes con llamar a ese eje x (pero podíamos haber seguido con Δl).

La longitud natural del muelle (ahora x_0 en vez de l_0) es aquella que tiene el muelle cuando no estamos ejerciendo ninguna fuerza externa sobre él. Sin embargo, **en la Tierra siempre va a sufrir la atracción gravitatoria, por lo que no será lo mismo colocarlo en vertical que en horizontal**. Pero, sea como fuere, vamos a considerar x_0 la longitud del muelle en esa posición en la que vamos a medirlo. Por tanto:

$$\Delta x = x - x_0 \quad (3)$$

¹Esta Ley no se cumple para cualquier estiramiento. Sabemos que si estiramos demasiado un muelle no vuelve a su forma original cuando lo soltamos. Eso es que hemos sobrepasado su límite elástico. Es más, si tiráramos muy fuerte con una máquina que fuera capaz de realizar la suficiente fuerza, no sólo lo deformaríamos sino que podríamos llegar a romper el metal del que está hecho.

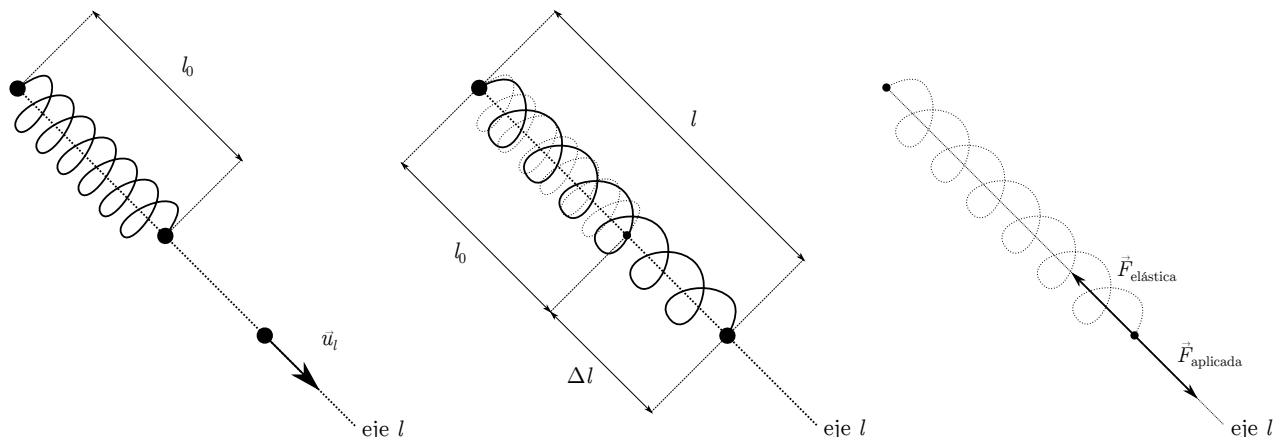


Figura 1: Diagrama general de la elongación de un muelle en las condiciones de la Ley de Hooke.

Podemos interpretar entonces la ecuación $F = -k \cdot (x - x_0)$ de dos formas completamente equivalentes:

- Si ejercemos una fuerza $-F$ (igual módulo pero sentido contrario) sobre el muelle en reposo, lo habremos estirado (o comprimido) una distancia x .
- Si queremos estirar (o encoger) una cantidad x un muelle en reposo, tendremos que aplicar sobre el una fuerza $-F$.

2. Objetivo

El objetivo de esta práctica es obtener la constante elástica (k) de varios muelles. Una vez conocida esa característica particular de ese muelle, podremos utilizarlo para medir fuerzas dentro de su límite elástico. **Éste es, precisamente, el principio de funcionamiento del DINAMÓMETRO.**

Podremos entonces utilizar nuestro muelle para medir fuerzas e incluso, si la fuerza es la gravitatoria, para pesar y determinar la masa de un objeto.

Para determinar la constante elástica vamos a utilizar dos métodos, uno estático y otro dinámico. Así podremos discutir acerca de los resultados obtenidos de ambas maneras y de las ventajas y desventajas de cada método.

3. Material

- Portapesas y varias pesas de distintas masas.
- Balanza para corroborar las masas anteriores.
- Varios muelles distintos para caracterizar.
- Soporte para colgar los muelles.
- Listón graduado en milímetros con marcadores de posición.
- Cronómetro (para el método dinámico).
- Dinamómetros calibrados de distintas escalas para verificar las fuerzas determinadas.
- Teléfono Móvil (si podemos utilizar el sensor de proximidad para detectar las oscilaciones).

4. Realización Práctica

Es recomendable realizar primero la caracterización por el método estático y proceder después con el método dinámico, dado que el método estático es más sencillo de realizar correctamente.

CONSEJOS GENERALES PARA PRÁCTICAS:

- **Apuntad bien las escalas y las unidades de todo lo que midáis.**
- **Apuntad los errores de escala de todas las medidas directas que realicéis.**
- **Escribid detalladamente en el cuaderno todo lo que vayáis haciendo y lo que os parezca relevante.** Si después es superfluo a la hora de realizar la memoria, no es mayor inconveniente (no se pone y punto). Sin embargo, si era imprescindible y no lo tenéis, es daréis cuenta cuando sea demasiado tarde.

4.1. Método Estático

Antes de empezar a medir, conviene comprobar que todo el montaje está fijo y que el listón de medida está lo más vertical posible, a fin de medir la distancia vertical de verdad.

Además, si queremos obtener la mejor precisión posible, deberíamos corroborar que nuestro portapesas y las pesas tienen la masa que indican. **¡Apuntad los valores, no solo las peséis!**

Tras esto, con cada uno de los muelles deberéis proceder de la siguiente forma:

1. Suspended del soporte el muelle en vertical, procurando que esté quieto.
2. Llevad el marcador de posición hasta la distancia vertical en la que se encuentra el extremo del muelle. Para ello, recordad que **hay que mirar siempre de manera perpendicular al listón y a la altura a la que está la posición a determinar**, a fin de medir con la mayor precisión (y así evitar medir en diagonal).
3. Colgad el portapesas y llevad el marcador hasta la nueva posición de equilibrio.
4. Id añadiendo el resto de pesas y determinando la posición de equilibrio en cada caso. Combinad las pesas de manera ingeniosa a fin de obtener el mayor número de puntos posibles.

Es evidente que hay anotar todos los pares masa-posición para cada muelle con cada masa, a fin de poder determinar la constante elástica k de cada uno. Como visteis en los apuntes de tratamiento de datos, lo más práctico es apuntarlo a modo de tabla. Una sugerencia podría ser:

Muelle 1		Muelle 2		...	
m/g	x/mm	m/g	x/mm
...

También podríais hacer una tabla independiente para cada muelle para aprovechar para realizar los cálculos necesarios para los ajustes o los errores en columnas aledañas, como tenéis en los ejemplos de los apuntes. Hacedlo como más os guste pero estad seguros de que tenéis todos los datos bien anotados y a que muelle corresponden.

Además **sería interesante que describierais cada muelle por sus características físicas: longitud, espesor del alambre, radio de la espira, color...** Así estaréis seguros de a cual os referíais en cada caso de manera inequívoca.

Lógicamente, con los pares de valores para cada muelle habrá que hacer una representación gráfica para comprobar si siguen alguna relación. Si en efecto cumplen la Ecuación (2), ¿cómo lo relacionamos con los datos que tenemos?. ¿Cuál es nuestra abscisa (x) y nuestra ordenada (y)?.

Para deducir estas cosas **plantead**, si aún no lo habéis hecho, **el diagrama del cuerpo libre de vuestro problema para el extremo del muelle de donde colgáis el portapesas.**

- Demostrad que la relación entre esos pares de valores es una recta y que, con el problema así planteado, se puede obtener el valor de k a partir de la pendiente y el valor de la aceleración de la gravedad.
- Calculad por el método de mínimos cuadrados cuál es la recta que mejor se ajusta a los puntos de cada muelle.
- Calculad el valor de k y su error absoluto total.

4.2. Método Dinámico

4.2.1. Teoría del Método

Ya habéis (o deberíais) visto el movimiento de un oscilador armónico simple (en la tarea 2 que os mandé). Todos deberíais tener una idea más o menos correcta de lo que es un movimiento periódico: aquel que se repite periódicamente en el tiempo. Es decir, aquel que tras un determinado tiempo, al que llamaremos PERÍODO, se repite (o más específicamente, vuelve a pasar por los mismos puntos y con las mismas velocidades y aceleraciones en ellos).

Se suele denotar al período con la letra T o con la letra griega «tau» minúscula, τ .

Un muelle del que se suspende una masa m , cuando lo estiramos un poco más ejerciendo una pequeña fuerza y lo soltamos, oscila con un período T :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_{\text{efectiva}}}{k}} \quad (4)$$

donde k es la constante elástica del muelle. La masa efectiva (m_{efectiva}) que aparece es la masa del muelle (m_{muelle}) multiplicada por un pequeño factor constante (f) de modo que $m_{\text{efectiva}} = f \cdot m_{\text{muelle}}$. Desconocemos el valor de f (aunque debe ser menor de 1), pero no lo necesitamos.

Si elevamos la expresión anterior, dada por (4), al cuadrado y reordenamos los términos, obtendremos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot m + \frac{4\pi^2 \cdot m_{\text{efectiva}}}{k} \quad (5)$$

Como la constante elástica y la masa efectiva son propias del muelle, no dependerán de la masa que haya suspendida de él cuando oscila y por lo tanto, será constante para cada muelle en particular (pero distinta entre muelles). Entonces, si representamos el cuadrado del período del muelle en función de la masa que hayamos colgado de él, tendremos la ecuación de una recta. Efectivamente, el caso es el siguiente:

$$T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2 \cdot m_{\text{efectiva}}}{k}}_{\text{cte.}} + \underbrace{\frac{4\pi^2}{k}}_{\text{cte.}} \cdot m \quad (6)$$

$$y = a + b \cdot x$$

donde T^2 iría en el eje de ordenadas (haría las veces de y) y m en las abscisas (haría las veces de x).

4.2.2. Realización del Método

Para cada uno de los muelles que tengáis:

1. Suspended del soporte el muelle con el portapesas.
2. Estirad un poco más el muelle, procurando que estéis haciéndolo lo más vertical posible (a fin de cuando lo soltéis, el muelle solo oscile arriba y abajo y no de lado).
3. Dejad que oscile unas pocas veces y preparad el cronómetro para medir.
4. Pulsad el inicio del cronómetro cuando la oscilación esté en su posición más alta o en la más baja².
5. Medid el tiempo (t) que tarda en realizar 20 oscilaciones el muelle con esa masa.
6. Para esa masa, repetid la medida de 20 oscilaciones varias veces estirando distancias distintas cada vez. Hacedlo un total de 3 veces para poder corroborar que no influye en el período significativamente.
7. Repetid los pasos 1 a 6 para el resto de masas de que dispongáis.
8. Repetid los pasos anteriores para el resto de muelles de que dispongáis.

²Esto tiene varias finalidades:

- a) En primer lugar, lo más fácil para no equivocarse al contar oscilaciones en un movimiento periódico es buscar máximos o mínimos, puesto que si nos fijamos en una posición intermedia, corremos el riesgo de contarla dos veces en una oscilación.
- b) Además, la velocidad en las posiciones extremas es mínima, con lo que se localizan más fácilmente y de manera más precisa (sobre todo cuanto más rápida sea la oscilación)

Lo más conveniente viene a ser apuntar todo en una tabla similar a la del método estático, pero esta vez con el tiempo en vez de la elongación. Como el tiempo medido es el de 20 oscilaciones, será 20 veces el período. Entonces, puede ser útil añadir una tercera columna para calcular cuanto vale el período en cada caso a partir del tiempo promedio de 20 oscilaciones.

La tabla podría ser algo similar a la siguiente:

Muelle 1			Muelle 2			...		
m/g	t/s	T/s	m/g	t/s	T/s
m_1	t_{1,m_1}	T_{1,m_1}
	t_{2,m_1}	T_{2,m_1}		
	t_{3,m_1}	T_{3,m_1}		
...

Nuevamente, sois libres de utilizar otro formato u ordenación que os guste más. Sin embargo, tenéis que percataros de que ahora disponéis de varias medidas de tiempo para cada masa, por lo que tendréis que realizar el promedio de una de las dos formas siguientes:

- Promediar el tiempo para cada masa a partir de los tres de que disponéis y luego obtener el período promedio es decir, por ejemplo:

$$\bar{t}_{m_1} = \frac{t_{1,m_1} + t_{2,m_1} + t_{3,m_1}}{3} \quad (7)$$

$$\bar{T}_{m_1} = \frac{\bar{t}_{m_1}}{20}$$

- O bien, calcular cada período a partir del tiempo y luego promediar los tres períodos para cada masa, es decir, por ejemplo:

$$T_{1,m_1} = \frac{t_{1,m_1}}{20} \quad (8)$$

$$\bar{T}_{m_1} = \frac{T_{1,m_1} + T_{2,m_1} + T_{3,m_1}}{3}$$

Después, **para cada muelle, representad los puntos de la manera sugerida en la Ecuación (6) y calculad la recta que mejor se ajusta a ellos por el método de mínimos cuadrados.** Así, podréis obtener el valor de k y su error absoluto total.

4.2.3. EXTRA. Medición con Smartphone

Si nos sobra tiempo y es posible, vamos a intentar realizar la caracterización mediante el uso del móvil para uno de los muelles.

Para ello, vamos a utilizar dos sensores que actualmente tienen prácticamente todos los móviles modernos (el de proximidad y el magnetómetro).

Lo primero que necesitamos es instalar la aplicación Physics Toolbox Suite en el móvil (existe en la correspondiente «Store» tanto para Android como para iOS, pero la versión de Android está mucho más actualizada).

Método con el Sensor de Proximidad

1. En la aplicación, seleccionad el sensor de proximidad y, una vez ahí, el «modo péndulo».
2. Colocad el móvil en la mesa con el sensor de proximidad (suele estar al lado del auricular) apuntando hacia el portapesas.
3. Haced oscilar verticalmente con cuidado el portapesas, a fin de que oscile como deseamos y con la suficiente amplitud como para estar cerca del sensor en el punto más bajo y alejarse después.
4. Apuntad los valores de, al menos, 5 oscilaciones y calculamos la media del período así medido.

Método con el Magnetómetro

1. En la aplicación, seleccionad el magnetómetro.
2. Localizad con un imán la zona donde más o menos se encuentra el magnetómetro en el móvil, observando los valores medidos en la pantalla (donde sean máximos).
3. Colocad el imán pegado a la base del portapesas y el móvil en la mesa como antes, intentando que la zona del magnetómetro se encuentre sobre la vertical.
4. Pulsad en la aplicación a grabar los datos (círculo con el «+») y haced oscilar como antes el portapesas.
5. Cuando tengáis al menos 5 oscilaciones grabadas, parad el dispositivo dando al «stop» y detened también el portapesas.
6. Guardad los datos en un archivo «.csv» con el nombre que deseéis.
7. Abrirlo con una hoja de cálculo para representar gráficamente las oscilaciones registradas por el magnetómetro.
8. Calculad el período de, al menos, 5 oscilaciones y la media del período por este método.

Comparación con los resultados manuales

Una vez realizadas las medidas con el smartphone y los correspondientes cálculos, comparad los resultados con los obtenidos para el período del mismo muelle por el método dinámico.

5. Cuestiones

1. Haz un cuadro resumen del valor de las constantes elásticas (junto con su error y redondeado correctamente) de cada muelle por cada uno de los dos métodos. ¿El valor de las constantes calculado por cada método incluye en el intervalo de su error a la constante calculada por el otro método?.
2. A la vista de los resultados obtenidos para el valor de la constante k de cada muelle por cada método (junto con su respectivo error), ¿qué método te parece más preciso?.
3. ¿Qué pegas y ventajas has visto en cada uno de los dos métodos?.
4. Todo siempre es susceptible de mejorar. ¿Qué cambiarías en el método que te haya parecido menos preciso para intentar que fuera mejor?.
5. Es fácil demostrar que el valor promedio final de cada período realizando el cálculo a partir de (7) o de (8) resulta en el mismo valor. Sin embargo, ¿es esto cierto para el cálculo de errores?. Demostrad si ambos son iguales o si un método conlleva un error mayor que el otro. Hacedlo calculando ambos numéricamente.