Práctica 2: Péndulo Simple.
Determinación de la aceleración de la gravedad.

1. Introducción

Según la RAE, un péndulo es un *«cuerpo grave que puede oscilar suspendido de un punto por un hilo o varilla»*. Grave hace referencia a que el cuerpo posee masa y, por lo tanto, sufre una fuerza (llamada peso) en el seno de un campo gravitatorio (de ahí el nombre de gravedad, porque hace caer *graves*).

En física, hay multitud de péndulos diseñados y estudiados a lo largo de la historia[1]. Sin embargo, en esencia todos tienen una característica común, que oscilan y realizan, bajo determinadas condiciones, movimientos periódicos o cuasi-periódicos.

Es por este hecho por lo que han sido tan estudiados: **son sistemas relativamente sencillos para tener un buen patrón para la medida del tiempo**.

El más sencillo de todos es el denominado péndulo simple o péndulo matemático. Idealmente, el péndulo simple consiste en una masa puntual (m) suspendida de un hilo de longitud l, inextensible y sin masa. La masa se desplaza un ángulo θ respecto de la vertical y se deja oscilar (sin imprimirle velocidad inicial) movida únicamente por la acción de la gravedad y la restricción que le impone el hilo.

El movimiento de la masa puntual está restringido, por tanto, a un arco de circunferencia de radio l dentro de un plano, como puede verse en la Figura 1-(a).

Las únicas fuerzas que actúan sobre esa masa son el peso ($\vec{P}$) y la tensión del hilo ($\vec{T}$). La situación general de problema puede verse en la Figura 1-(b).

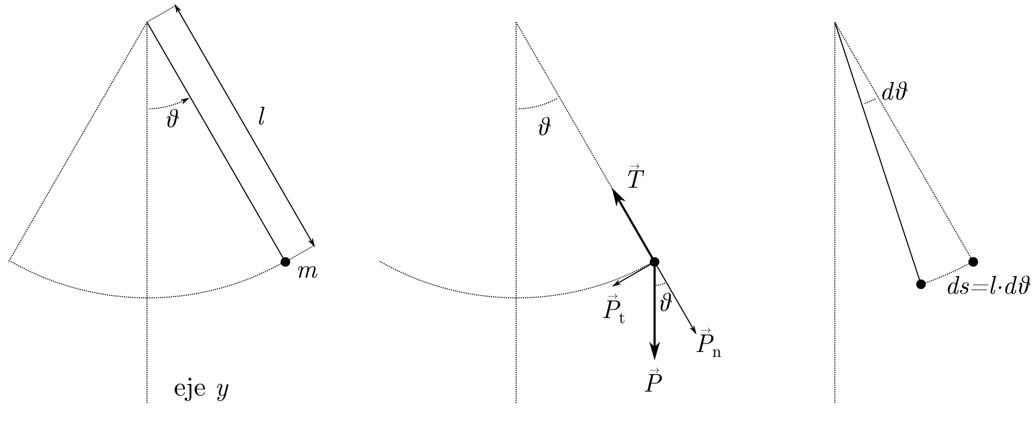

Figura 1: Disposición del Péndulo Simple y su Diagrama de Fuerzas.

Para cualquier ángulo θ podremos descomponer el peso en dos componentes, una en la dirección tangente en ese punto al arco que describe la masa ($\vec{P}_\mathrm{t}$) y otra en dirección normal[2] a dicho arco ($\vec{P}_\mathrm{n}$).

En la dirección normal tendremos, además de la componente normal del peso, la tensión ($\vec{T}$) ejercida por la cuerda.

[1] Basta comprobar el artículo de la Wikipedia https://es.wikipedia.org/wiki/Péndulo, para ver enlaces a más de una docena de variaciones de péndulos.

[2] A veces esta última componente se denomina radial puesto que está en la dirección del radio de dicho arco de circunferencia.

Podríamos estar tentados de pensar que ambas fuerzas se anulan y no existe movimiento en esa dirección. Sin embargo, puesto que el movimiento no es a lo largo de una recta sino de una circunferencia, tiene que existir una fuerza resultante no nula y, por tanto, una aceleración en otra dirección además de la tangente. Hemos visto en clase que el módulo de la aceleración normal en coordenadas polares (que son las que describen bien un movimiento circular) viene dada por el cuadrado del módulo de la velocidad dividido entre el radio de giro, es decir, $\vec{a_{\mathrm{n}}} = -\frac{|\vec{v}|^2}{r} \cdot \vec{u_r}$. Como el radio de giro en este caso es la longitud de la cuerda (l) :

$$
\begin{aligned}
\sum F_{\text{eje normal}} &= m \cdot a_{\mathrm{n}} \\
-P_{\mathrm{n}} + T &= m \cdot a_{\mathrm{n}} \\
-m \cdot g \cdot \cos\theta + T &= m \cdot \frac{v^2}{l} \\
T &= m \cdot g \cdot \cos\theta + m \cdot \frac{v^2}{l} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

La componente tangencial tampoco es nula puesto que el péndulo se acelera (inicialmente estaba en reposo y pasa a moverse). Tendremos para esa componente que:

$$
\begin{aligned}
\sum F_{\text{eje tangencial}} &= m \cdot a_{\mathrm{t}} \\
-P_{\mathrm{t}} &= m \cdot a_{\mathrm{t}} \\
-m \cdot g \cdot \sin\theta &= m \cdot a_{\mathrm{t}} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Esto es cierto para cada ángulo θ. El problema es que la dirección de los ejes normal y tangencial cambia para cada ángulo y, por tanto, para cada instante del movimiento.

Como hemos visto al hablar del movimiento circular, si la masa se va a mover sobre un arco de circunferencia en un plano, lo lógico es dar su posición en función del radio (r) desde el origen y un ángulo con respecto a un eje (θ). Esas, r y θ, son las denominadas coordenadas polares.

En nuestro caso, el radio va a ser constante y será precisamente la longitud del hilo que va desde el origen hasta la masa, es decir, $r = l$. El ángulo será precisamente el formado con el eje vertical, θ.

Sin embargo, el ángulo (θ) si que va a variar con el tiempo. Por tanto, también variará la primera derivada temporal del ángulo, la velocidad angular $\left(\omega = \frac{d\theta}{dt}\right)$ e, incluso, la segunda derivada temporal del ángulo: la aceleración angular $\left(\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$.

Deducir matemáticamente las componentes normal (o radial) y tangencial de la velocidad y de la aceleración no es especialmente complejo pero excede la finalidad de esta práctica. No obstante, hay que remarcar que este no es un movimiento circular uniforme (MCU) puesto que la rapidez o celeridad (el módulo de la velocidad, $|\vec{v}|$) varía a lo largo del movimiento. Efectivamente, el péndulo parte inicialmente del reposo, acelera hasta alcanzar la velocidad máxima (en módulo) en el punto más bajo de la trayectoria y decelera hasta pararse en el otro extremo, donde vuelve a suceder lo mismo en sentido contrario (y así una y otra vez). Sí es, intuitivamente, un movimiento periódico.

Si, tal y como se puede apreciar en la Figura 1-(c), el péndulo avanza en una cantidad diferencial de tiempo (dt) una cantidad diferencial de ángulo ($d\theta$), es fácil comprender que la longitud diferencial de arco que ha recorrido (ds) es:

$$ds = l \cdot d\theta \qquad (3)$$

Es, precisamente[3], la variación temporal de la posición a lo largo de ese arco la que nos dará la velocidad tangencial de la partícula en cada instante $\left(v_{\mathrm{t}} = \frac{ds}{dt}\right)$ y, su segunda derivada, la que nos dará el valor de la aceleración tangencial $\left(a_{\mathrm{t}} = \frac{d^2s}{dt^2}\right)$. Esta aceleración tangencial es, además, la aceleración que aparecía en la Ecuación (2). Luego entonces:

$$-m \cdot g \cdot \sin\theta = m \cdot a = m \cdot a_{\mathrm{t}} = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \qquad (4)$$

O bien, reordenando los términos y simplificando:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g \cdot \sin\theta = 0 \qquad (5)$$

[3]Hemos utilizado los módulos para no complicar aún más el problema, pero puede hacerse de manera sistemática con vectores

Donde hay que remarcar que, contra lo que pudiera habernos dictado la intuición, **el movimiento del péndulo no depende (en el caso ideal) de la masa suspendida sino únicamente de la longitud del hilo y de la gravedad**. Además, podemos hacer uso de la relación dada en la Ecuación (3) y sustituir:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= l \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d^2 s}{dt^2} &= l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned} \tag{6}$$

Y obtendremos la ecuación de movimiento temporal del péndulo en función del ángulo que forma con la vertical como:

$$l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \cdot \sin\theta = 0 \tag{7}$$

Esto es una ecuación diferencial, cuyo método de solución tampoco lo habéis visto aún en Física ni, probablemente, en Matemáticas. Vamos a dividir todo entre l (puesto que es distinto de 0) y dejar la ecuación en la forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \sin\theta = 0 \tag{8}$$

Desgraciadamente, la solución de esta Ecuación (8) no sólo no es trivial sino que requiere del conocimiento de métodos de cálculo avanzado o una aproximación por desarrollo en Serie (de Taylor o de Fourier)[4]. El problema deriva del hecho de tener la función seno, por lo que vamos a ver cual es el desarrollo en serie[5] de la función seno de θ:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \theta^{2n+1} \\ \sin\theta &= \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots \\ \sin\theta &= \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

Aunque aún no sepáis que significa todo esto, es fácil entender que si θ tiene valores próximos a 0, el segundo término valdrá menos que el primero, el tercero menos que el segundo, etc. En efecto, hagamos la cuenta para un ángulo de $5\,^\circ$ pero en radianes, es decir, $\theta \approx 0{,}08727\,\mathrm{rad}$:

$$\begin{aligned} \sin 0{,}08727 &= 0{,}08727 - \frac{1}{6}0{,}08727^3 + \frac{1}{120}0{,}08727^5 - \frac{1}{5040}0{,}08727^7 + \cdots \\ 0{,}08716 &\approx 0{,}08727 - 1{,}108 \cdot 10^{-4} + 4{,}218 \cdot 10^{-8} - 7{,}647 \cdot 10^{-12} + \cdots \\ 0{,}08716 &\approx 0{,}08727 \end{aligned} \tag{10}$$

Lo que vamos a hacer entonces es aproximar el seno del ángulo por el propio valor del ángulo, es decir, el primer término del desarrollo en serie. Entonces, si suponemos $\sin\theta = \theta$, la Ecuación (8) nos quedará:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0 \tag{11}$$

Que es, finalmente, la Ecuación diferencial del Péndulo Simple. **Esta aproximación sólo vale para ángulos pequeños y cuanto mayor sean los ángulos en los que oscile nuestro péndulo, mayor error cometeremos sobre la solución real.** Pero nos permite encontrar la solución a dicha Ecuación que resulta en un movimiento armónico [6] y por tanto podemos definir su período (T), su frecuencia (f) o su frecuencia angular (ω):

$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\tfrac{g}{l}} \\ T &= \tfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\tfrac{l}{g}} \\ f &= \tfrac{1}{T} = \tfrac{1}{2\pi}\sqrt{\tfrac{g}{l}} \end{aligned}} \tag{12}$$

[4]Una de las cosas más útiles más útiles de las Matemáticas en Física o Ingeniería es, precisamente, aproximar fórmulas mediante un desarrollo en serie de potencias.

[5]En realidad esta solución correspondería al desarrollo en serie de McLaurin, que es el desarrollo de Taylor alrededor del valor $\theta = 0$.

[6]Todo sistema que tenga una ecuación diferencial en el que sólo aparezcan la segunda derivada temporal y la propia variable multiplicada por una constante y su suma sea 0, se comporta como un oscilador armónico. Por eso el muelle de nuestra primera práctica lo era (idealmente) puesto que su ecuación diferencial del movimiento es:

$$\frac{d^2x}{dx^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

2. Objetivos

- Determinar la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra utilizando un péndulo simple y comprobar el efecto sobre el período del péndulo al no utilizar oscilaciones de pequeña amplitud.
- Utilizar los sensores de un smartphone para realizar dichas medidas.
- Aprender como tratar los datos obtenidos mediante programas informáticos usuales como una hoja de cálculo.

3. Material

- Soporte para suspender el péndulo.
- Hilo.
- Masa.
- Flexómetro o regla graduada.
- Calibre y Micrómetro (para calcular las dimensiones de la masa).
- Balanza.
- Medidor de ángulos.
- Cronómetro.
- Smartphone con software *Physics Toolbox Suite*.
- Ordenador con hoja de cálculos (*Excel*, *LibreOffice* o similar).

4. Realización Práctica

4.1. Comprobación del Efecto de la Amplitud sobre el Período

Tal y como hemos dicho en la Introducción, la ecuación real del movimiento del sistema es la dada en (8) pero vamos a utilizar la aproximación de primer orden dada en (11). Por ello:

1. En la hoja de cálculo, calculad primero una tabla donde pongáis en una columna el valor del ángulo θ y su seno en la siguiente, para que os hagáis una idea de que validez tiene la aproximación. Es decir, algo similar a esto:

$\theta\,/°$	$\theta\,/\text{rad}$	$\sin\theta$	$\theta-\sin\theta$	$\frac{\theta-\sin\theta}{\sin\theta}\,/\,\%$
0				
1				
2				
···	···	···	···	···
90				

2. Lo siguiente es dejar el péndulo colgado a una distancia fija y medir el período para ángulos dentro del intervalo anterior ($10-90°$), de 10 en 10 grados. Vamos a hacerlo de dos maneras:

   a) **Con el sensor de proximidad del móvil**: Ponemos el *Physics Toolbox Suite* en el **modo péndulo** dentro del apartado de sensor de proximidad y lo **colocamos** de tal manera que esté en el **máximo de la oscilación**. Dejamos que la aplicación mida **5 períodos** y los copiamos en una tabla correspondiente de la hoja de cálculo. Después, calculamos el **período medio**, su error de escala, su error accidental y lo **expresamos correctamente junto con su error total**.

b) **Con el sensor magnético del móvil:** Ponemos el *Physics Toolbox Suite* en el **modo magnetómetro** y pegamos un imán en la masa que oscila. Colocamos el móvil más o menos **cerca del máximo de amplitud** y dejamos que la aplicación registre al menos **5 oscilaciones** (habiéndole **dado previamente a grabar los datos**). Guardamos el archivo con un **nombre relativo al ángulo inicial** y medimos igual el resto de ángulos. Después, pasamos los correspondientes **archivos** del móvil **al ordenador** y los abrimos en una hoja de cálculo para tratarlos igual que antes y obtener el **período medio junto con su error total**.

OJO: ¡El péndulo siempre debe oscilar en un plano vertical!

Al final, deberías obtener una tabla resumen del estilo de la siguiente:

$\theta\,/°$	$\bar{T}_{prox.}\,/\mathrm{s}$	$\bar{T}_{mag.}\,/\mathrm{s}$
10		
20		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
90		

Si la ecuación que rige el comportamiento del péndulo fuera la (11), el ángulo inicial daría igual y todos los períodos deberían ser similares salvo por el error.

3. **Calculad el período teórico del péndulo** con la Ecuación dada en (12), es decir, según:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \tag{13}$$

donde tenéis que tener **cuidado puesto que la longitud** no es la del hilo desde donde está atado al soporte hasta la unión con la masa, sino **hasta el centro de masas de la masa puesto que no es puntual**. Para ello, lo mas conveniente será medir la longitud del hilo y el tamaño de la masa por separado y añadir a la longitud del hilo la distancia hasta el centro de masas del cuerpo.

4.2. Cálculo de la Gravedad Terrestre con un Péndulo en Pequeñas Oscilaciones

Ahora que habéis comprobado el efecto de utilizar el péndulo con oscilaciones grandes ya sabéis que **sólo se puede utilizar para medir correctamente con oscilaciones pequeñas**. Podríais calcular la gravedad terrestre a partir de los datos anteriores para la medida de 10 o 20 grados y ver que obtenéis.

Sin embargo, como ya habéis ido aprendiendo en los apuntes de cálculo de errores, es mucho mejor siempre poder hacer el ajuste de los datos variando algún parámetro y calculando el valor a partir de los parámetros del ajuste. De esta manera, los posibles errores experimentales de una experiencia individual quedan más «diluidos». Además, así veis que efectivamente se cumple la Ecuación (13) para distintas longitudes (l).

Por tanto:

1. Colocad el péndulo con una longitud de hilo (y medidla, evidentemente).
2. Medid el tiempo de 10 oscilaciones (para un ángulo de 10 grados o menor) dos veces, una con el sensor de proximidad y otra con el magnetómetro (para poder comparar mejor el período promedio con cada método).
3. Variad la distancia.
4. Volved a medir 10 oscilaciones dos veces.
5. Repetid hasta tener los períodos para 5 distancias distintas.

Tendréis entonces algo similar a la siguiente tabla:

$l\,/\mathrm{m}$	$\bar{T}_{prox.}\,/\mathrm{s}$	$\bar{T}_{mag.}\,/\mathrm{s}$
l_1	$\bar{T}_{1,prox.}$	$\bar{T}_{1,mag.}$
l_2	$\bar{T}_{2,prox.}$	$\bar{T}_{2,mag.}$
l_3	$\bar{T}_{3,prox.}$	$\bar{T}_{3,mag.}$
l_4	$\bar{T}_{4,prox.}$	$\bar{T}_{4,mag.}$
l_5	$\bar{T}_{5,prox.}$	$\bar{T}_{5,mag.}$

Si ahora operáis con la Ecuación (13) y eleváis ambos miembros al cuadrado, obtendréis:

$$T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\text{cte.}} \cdot l \qquad (14)$$

Si comparáis esta ecuación con la del ajuste a una recta:

$$y = a + b \cdot x$$
$$\underbrace{T^2}_{y} = \underbrace{0}_{a} + \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\text{b}} \cdot \underbrace{l}_{x}$$

Por lo tanto, podéis representar esos datos como una recta para cada uno de los dos métodos y calcular la gravedad a partir de su pendiente (b). Calculad el valor de la gravedad por cada método y su error.

4.3. Diseño de un Reloj que oscile cada Segundo

La Ecuación (14) también os puede servir para calcular cuál debería ser la longitud de un péndulo simple para que oscile con un período de $T = 1\,\text{s}$. Calculadlo y poned esa distancia para medir 10 oscilaciones y comprobad que dicho período es más o menos el esperado dentro del error.

Sin embargo, como la longitud que sale es tan pequeña, suele ser más habitual calcular la longitud necesaria para hacer un péndulo de $T = 2\,\text{s}$. De manera que entre ir de un extremo al otro (media oscilación), tarde un segundo. Calculad la longitud necesaria para este caso, ponedla y comprobad de nuevo con 10 oscilaciones como el período es mucho más cercano al esperado.

5. Cuestiones

1. Además del error introducido por aproximar el seno del ángulo por el propio ángulo, ¿qué otras fuentes de error veis en esta práctica?.
2. Aún en el caso de que pudiéramos obtener la solución exacta para ángulos grandes, ¿veis algún otro problema experimental derivado de la velocidad, la tensión en el hilo, el hecho de que la masa no sea puntual, etc.?
3. Hemos medido 10 oscilaciones para mejorar el valor del período. ¿Creéis que si midiéramos por ejemplo mil o diez mil, obtendríamos un valor del período aún mejor y con menos error?. ¿Por qué?.
4. El valor de la gravedad obtenido, junto con su error, ¿cae dentro del valor teórico de la misma?.
5. ¿Por que se indica en el guión que se cuide que el péndulo oscile en un plano vertical?.
6. Es evidente que durante muchos siglos hasta el desarrollo de la electrónica se han utilizado péndulos como patrones de tiempo (no hay mas que ver el típico reloj de pared, pese a que no es ni mucho menos un péndulo simple). ¿Qué ventajas e inconvenientes se te ocurren de utilizar un péndulo simple frente a otros mecanismos rudimentarios como, por ejemplo, un reloj de arena?.