



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**DISEÑO Y ESTUDIO DEL
COMPORTAMIENTO DE UN COHETE
PROPULSADO POR AIRE A PRESIÓN**

Autor:

San José Martín, Alejandro

Tutor:

**Méndez Bueno, César
Ingeniería Energética y
Fluidomecánica**

Valladolid, Junio 2018.

DISEÑO Y ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE UN COHETE PROPULSADO POR AIRE A PRESIÓN

RESUMEN:

A partir de la experimentación llevada a cabo con un cohete realizado con una botella, se consigue diseñar teóricamente el proceso mediante el uso de las ecuaciones de la Mecánica de fluidos. Este diseño sirve para obtener un mejor estado y así poder alcanzar una mayor altura.

Para este estudio se utiliza una botella de plástico de Coca Cola como cohete por su facilidad para conseguirla y por su gran resistencia ya que aguanta altas presiones (comparada con una botella de agua).

Finalmente se seleccionan las mejores condiciones obtenidas en el estudio teórico, llevando a cabo una comparativa frente al resto de condiciones para explicar por qué estas condiciones son las mejores.

PALABRAS CLAVE: Cohete-Botella, Aerodinámica, Aire comprimido, Fuerza de arrastre y Experimento.

Índice

SÍMBOLOS UTILIZADOS.....	7
Subíndices comunes.....	8
1.- INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	9
1.1.- INTRODUCCIÓN.....	9
1.2.- OBJETIVOS.....	10
1.3.- CONTENIDOS	10
2.- DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y ESTUDIO ANALÍTICO	13
2.1.- PROCESO PREVIO EXPERIMENTAL.....	14
2.2.- DISEÑO TEÓRICO	16
2.2.1.- Gasto de agua	16
2.2.2.- Gasto de aire	24
2.2.4.- Integración de las ecuaciones	30
3.- ESTUDIO EXPERIMENTAL	37
3.1.- DIMENSIONADO DEL MODELO	38
3.2.- VELOCIDADES TEORICAS DEL TUNEL DE VIENTO	43
3.3.- 3D.....	45
3.3.1.- Bordes y ángulos de ataque.....	45
3.4.- TUNEL DE VIENTO.....	46
3.5.- FUERZA DE ARRASTRE.....	50
3.6.- FUERZA DE SUSTENTACIÓN.....	51
4.- ESTUDIO PARAMÉTRICO Y OPTIMIZACIÓN	53
4.1.- COMPARATIVA.....	55
4.2.- JUSTIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS.....	60
4.2.1.- Diámetro de salida.....	60
4.2.3.- Volumen inicial de agua	61
4.2.1.- Presión inicial	63
4.3.- JUSTIFICACIÓN PROCESO ESTACIONARIO	64
5.- CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	69
5.1.- CONCLUSIONES	69

5.2.- TRABAJOS FUTUROS	70
6.- ESTUDIO ECONÓMICO.....	71
7.- BIBLIOGRAFÍA.....	73
8.- AGRADECIMIENTOS.....	75
9.- ANEXOS	77
9.1.- PLANO BOTELLA.....	77
9.2.- PLANO CONOS DE LA NARIZ.....	79
9.3.- ESTUDIO PARAMÉTRICO.....	81

SÍMBOLOS UTILIZADOS

Algunos símbolos pueden ir acompañados de distintos subíndices.

R -> Constante de los gases ideales	d_s -> Diámetro de la tobera de salida
T -> Temperatura	D -> Diámetro medio de la botella
γ -> Coeficiente de dilatación adiabática	F_d -> Fuerza de arrastre
ρ -> Densidad del fluido	F_L -> Fuerza de sustentación
μ -> Viscosidad	E -> Empuje
m -> Masa	P -> Presión
V -> Volumen	a -> Velocidad de propagación del sonido
Q -> Caudal	v -> Velocidad
C_D -> Coeficiente de arrastre	M -> Número de Mach
C_b -> Coeficiente de bloqueo	U -> Potencial
A_1 -> Área media de la botella	g -> Gravedad
A_s -> Área de la tobera de salida	t_c -> Tiempo crítico de vaciado
A_{perp} -> Área de la botella perpendicular a la dirección del movimiento	t_r -> Tiempo de residencia
$A_{sección}$ -> Área de la sección de pruebas del túnel de viento	l_c -> Longitud típica
A_{modelo} -> Área del modelo perpendicular a la dirección del movimiento (relativo)	Re -> Número de Reynolds
h -> Altura del fluido en el interior de la botella	Δh -> Variación de la altura
H -> Altura media de la botella	α -> Ángulo del cono de la nariz
H_c -> Altura alcanzada por el cohete en el vuelo	k -> Constante del túnel de viento

Subíndices comunes

max -> Máximo

min -> Mínimo

real -> Estado real del cohete

ensayo -> Característica del ensayo en el túnel de viento

diaf -> Diafragma del túnel de viento

a -> aire

w -> agua

sección -> Sección de pruebas del túnel de viento

modelo -> Modelo de ensayo en el túnel de viento

s -> Salida

amb -> Ambiente

sc -> Salida crítica

O -> Interior

O_i -> Interior en el instante inicial

c -> Cohete

1.- INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1.- INTRODUCCIÓN

A partir de la realización de un experimento utilizando una botella de plástico como cohete impulsado por agua y aire comprimido, se pretende realizar el estudio teórico del proceso para realizar un diseño mejorado.

El proceso de preparación del cohete es muy sencillo. En primer lugar es necesario perforar el tapón para colocar una válvula de salida (utilizando una válvula de una rueda de bicicleta). Es necesario extraer la válvula antirretorno que lleva en su interior para permitir la salida de fluidos. Con esto listo y la botella destapada, se llena de agua hasta la altura deseada. Una vez llena, se coloca el tapón con la válvula y se conecta a una bomba de aire (de desplazamiento positivo). Se invierte la botella y se coloca en la plataforma de lanzamiento. Se llena hasta la presión deseada medida en el manómetro que tiene la bomba. Posteriormente se desconecta la bomba y el cohete sale hacia arriba.

Este estudio teórico pretende definir el diseño teórico del proceso para conseguir una mejora de los parámetros variables y con esto, lograr una mayor altura máxima.

Para realizar el estudio teórico se utilizan todas las ecuaciones de la Mecánica de fluidos, algunas de ellas son:

- Ecuación de conservación de la masa.
- Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.
- Ecuación de la energía. (En sus formas como)
 - Ecuación de la energía total
 - Ecuación de Bernoulli
- Ecuación de estado de un gas ideal

Todas estas ecuaciones se integran convenientemente para obtener el resultado final.

La solución del problema dependerá de los parámetros variables seleccionados. Es necesaria la realización de un estudio paramétrico para determinar cuáles son las mejores condiciones entre las posibles para así conseguir la mayor altura.

Este estudio tiene ciertas limitaciones a la hora de aplicarlo a un cohete real. Primero, debido a las características del cohete real, como la gran masa que

tiene, necesitaría una presión de aire demasiado elevada para producir un empuje no tan grande como el conseguido por el combustible líquido, junto con un depósito de aire y agua mayor que el del combustible. Debido a esto, los cohetes utilizan combustibles líquidos, ya que también permiten regular la fuerza de empuje aportada en cada instante. Pero de manera limitada se podría utilizar la parte aerodinámica como primera base de estudio para la aerodinámica de un cohete.

Pueden existir varias soluciones que tengan un resultado buscado similar con distintas condiciones iniciales, este estudio mostrará algunas de ellas para lograr una gran mejora con respecto al inicial.

Para finalizar con esta breve introducción, me gustaría proponer un modelo posible. Un lanzamiento de personas como atracción (similar al flyboard pero sin una conexión directa a tierra), utilizadas junto con un paracaídas para poder aterrizar, porque ¿A quién no le gustaría sentir lo que es volar?

1.2.- OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo es aplicar las ecuaciones al problema real de un cohete realizado previamente para obtener su diseño teórico con la intención de mejorarlo.

Para conseguir alcanzar este objetivo general, también debemos abordar cumplir una serie de objetivos específicos parciales que sin el objetivo anterior no serían posibles de conseguir:

- Reducir el arrastre aerodinámico mediante el uso de diferentes conos de la nariz.
- Alcanzar la altura máxima utilizando las mejores condiciones posibles teóricas.

1.3.- CONTENIDOS

Este trabajo está dividido en una serie de capítulos, los cuales, aunque relacionados, abordan temas distintos sobre el vuelo del cohete. Su contenido será el siguiente:

- En primer lugar está la descripción del problema y el estudio analítico. En este apartado se describirá de manera detallada el problema a resolver junto con la forma de resolución y los métodos empleados.
- En segundo lugar está el estudio experimental. En este segundo apartado se explicarán las intenciones de este estudio experimental junto con las utilidades y los resultados de este, todo ello con la descripción de los objetos utilizados.

- En tercer lugar se encuentra el estudio paramétrico. Aquí se explicará sobre qué se ha realizado el estudio teórico paramétrico, cómo ha sido realizado junto con sus resultados y una comparativa detallada de ellos.
- En cuarto lugar se sitúa la conclusión y trabajos futuros. En él se expondrá las conclusiones finales de este Trabajo Fin de Grado junto con los posibles trabajos futuros.
- En quinto lugar estará la bibliografía utilizada para el desarrollo de este Trabajo Fin de Grado.
- En sexto lugar estará el presupuesto, incluyendo los gastos del Trabajo Fin de Grado necesarios para poder llevar a cabo los estudios experimentales en el laboratorio.
- Finalmente se puede encontrar los anexos. Este apartado incluye los planos de la botella utilizados para la realización del modelo y las tablas del estudio paramétrico.

2.- DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y ESTUDIO ANALÍTICO

A partir de un experimento realizado con un cohete hecho con una botella de plástico se va a llevar a cabo un estudio en el que se va a obtener el diseño teórico a través de ecuaciones.



Figura 1 Experimento previo al estudio teórico

El cohete está situado en una plataforma de lanzamiento casera que implica un rozamiento muy elevado durante el contacto con el cohete, por lo que provoca una altura mucho menor durante el vuelo.

En este primer experimento realizado previo al estudio teórico se utilizó una botella de plástico de Coca Cola debido a su alta resistencia para aguantar altas presiones (ya que una botella de agua no aguantaría tanta presión) y a su facilidad para obtenerla.

También es necesario el uso de una válvula de una rueda (extrayendo la válvula anti retorno de su interior para que de esta manera permita la salida de fluidos desde su interior y no se bloquee).

El estudio se realizara para esta botella de plástico ya que fue el modelo del experimento, que es el siguiente:



Figura 2: Botella de plástico de Coca Cola utilizada como cohete

2.1.- PROCESO PREVIO EXPERIMENTAL

A continuación se describe paso a paso el proceso realizado experimentalmente de preparación, llenado y lanzamiento de la botella:

1. En primer lugar es necesario realizar un taladro en el tapón de la botella para colocar la válvula por donde saldrán los fluidos del interior. Esta válvula se obtiene de la rueda de una bicicleta. Es necesario extraer la válvula antirretorno existente en su interior. En este agujero se fija la válvula de manera que la presión del interior impida su movimiento.



Figura 3 Tapón ya perforado con la tobera (válvula) de salida colocada

2. A continuación se llena la botella de agua hasta una cierta altura "h" (en el posterior estudio paramétrico obtendremos una altura mejor de la utilizada previamente, ya que en este primer intento, la altura de agua aportada al cohete fue una altura que por intuición podía ser aproximada).

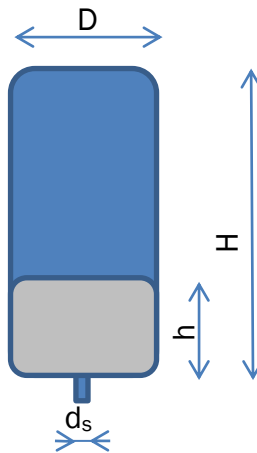


Figura 4 Denominación de las dimensiones de la botella

3. Se coloca el tapón, se conecta una bomba de aire (de desplazamiento positivo) para introducir el aire en el interior y se invierte la botella (quedando el tapón hacia abajo). De esta manera se impide la salida de los fluidos del interior de la botella con la válvula anti retorno incorporada en la bomba de aire. Es necesario que se coloque en una plataforma de lanzamiento para que su lanzamiento sea completamente vertical.
4. Con la botella ya colocada en la plataforma, se comienza a introducir aire hasta la presión deseada, sin que la presión exceda unos valores que podrían hacer explotar la botella antes de lanzarse.

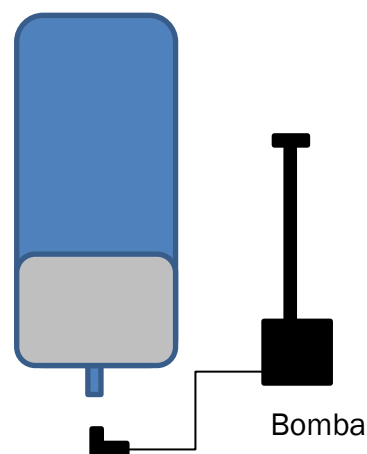


Figura 5 Conexión entre la botella y la bomba de aire

5. Finalmente se desconecta la bomba de aire, lo que hace que comience a salir el agua. La cantidad de movimiento del agua ejerce una fuerza que hace que la botella comience a ascender lentamente hasta gastarse el agua y posteriormente acelera más durante la salida del aire.

2.2.- DISEÑO TEÓRICO

Se busca describir el proceso anterior de manera teórica. Para conseguir esta descripción es necesario el uso de las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Muchas de las ecuaciones requerirán calcular otros parámetros utilizando otras ecuaciones. Se utilizarán las ecuaciones de manera secuencial.

Se dividirá en dos procesos al igual que sucede de manera real. En primer lugar se calcula el gasto de agua y después el gasto del aire. El aire no comienza a salir hasta que no se ha gastado todo el agua.

2.2.1.- Gasto de agua

2.2.1.1.- Cálculo de la masa de agua

En primer lugar, es necesario calcular la variación de la masa de agua del interior de la botella en función del tiempo. La salida del agua aporta una Fuerza de Empuje (que es debida a la cantidad de movimiento del agua) inferior a la aportada por el aire. Su utilidad será la de conseguir una cierta velocidad para el cohete y así la salida del aire tendrá un mayor rendimiento.

Para poder calcularlo es necesario utilizar la Ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \cdot dV + \iint_{SC} \rho \cdot (\bar{v}_r \cdot \bar{n}) \cdot dS = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación está aplicada a un volumen de control deformable (variando igual que el agua).



Figura 6 Volumen de control para la Ecuación de conservación de la masa en el cálculo de la masa de agua

Esta ecuación expresa que la masa de un sistema no varía en el tiempo. El primer término hace referencia a la variación temporal de masa del Volumen de Control, y el segundo término al flujo de masa que atraviesa la Superficie de Control, la suma de ambos debe ser cero. El flujo másico se puede sustituir por la siguiente ecuación:

$$\dot{m} = \rho \cdot Q$$

2.2.1.2.- Cálculo de la velocidad de salida del agua

Para el cálculo de la velocidad de salida es necesario aplicar la ecuación de Bernoulli. Esta ecuación está sujeta a una serie de hipótesis que es necesario que se cumplan para su aplicación.

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U = cte \quad (2)$$

Donde “U” es el potencial de fuerzas másicas.

Es necesario que se cumplan las 5 siguientes hipótesis para poder aplicarla:

- El flujo debe ser ideal
- El proceso debe ser estacionario.
- Las fuerzas másicas tiene que provenir de un potencial.
- La densidad tiene que ser constante.
- Existencia de línea de corriente entre los puntos a aplicar.

En este caso es necesario comprobar si la hipótesis de proceso estacionario es cierta o no, el resto de hipótesis sí se cumplen (con su explicación a continuación). Finalmente la hipótesis de proceso estacionario se cumple, justificada al final del proyecto.

- La primera hipótesis dice que el flujo debe ser ideal. Esto implica que los fenómenos de transporte sean despreciables. Por esto, la viscosidad debe ser prácticamente nula (despreciable) y el flujo debe ser incompresible.
- La segunda hipótesis conlleva que el proceso sea estacionario (o cuasiestacionario). Se justifica al final del trabajo detalladamente, por lo que sí es correcta. La ecuación también es aplicable en procesos casi permanentes, cuando el tiempo característico de variación de los procesos fluidos es suficientemente largo para poder justificar que se desprecien los términos no estacionarios.
- La tercera hipótesis implica que las fuerzas másicas tienen que provenir de un potencial, otra hipótesis correcta, ya que, las únicas fuerzas másicas existentes provienen del potencial gravitatorio.

- En la cuarta hipótesis dice que la densidad tiene que ser constante. La hipótesis es correcta ya que la densidad es constante en todo el volumen de control.
- La quinta hipótesis implica que tiene que existir una línea de corriente entre los puntos a aplicar. Esta hipótesis es cierta ya que no existen saltos entre el interior de la botella y la salida. El recorrido del fluido es continuo por lo que sí existe una línea de corriente.

Como todas las hipótesis se cumplen, se podrá aplicar la ecuación de Bernoulli a lo largo de todo el trabajo.

Cuando todas las líneas de corriente vienen de una región uniforme en reposo donde se cumplen las condiciones de la fluidoestática, se cumple:

$$p + \rho \cdot U = \text{constante}$$

Su aplicación también es posible debido a que no se aplica ningún trabajo en el interior de la botella (que implicaría una serie de pérdidas), sino que el fluido sale únicamente debido a la diferencia de presiones entre el interior y el exterior de la botella como más adelante se explicará.

En el caso de este estudio, la ecuación de Bernoulli se aplica entre la superficie en “reposo” del agua en el interior de la botella (1) y la salida (s):

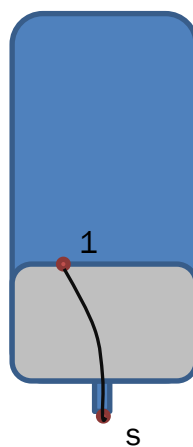


Figura 7 Descarga de un fluido ideal desde un depósito a través de un orificio

Aplicamos la ecuación (2):

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U = \frac{P_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + U_s$$

Donde despejando la velocidad a la salida:

$$v_s = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{P_1 - P_s}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot z_1 \right)}$$

En la cual, el término de la velocidad del punto 1 es despreciable frente al término de las presiones, ya que esta velocidad no es muy elevada.

El término del potencial gravitatorio ($g \cdot z_1$) no es despreciable. Esto es debido a que, aunque su orden es inferior a la diferencia de presiones, aporta un cierto valor.

Por lo que la velocidad a la salida del agua se podría decir que en su mayoría es debido a la diferencia de presiones entre el interior y la salida:

$$v_s = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{P_1 - P_s}{\rho} \right) + 2 \cdot g \cdot h}$$

2.2.1.3.- Cálculo de la velocidad del cohete

Ahora se necesita calcular la velocidad del cohete. Para calcular esta velocidad es necesario partir de la Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \bar{v} \cdot \rho \cdot dV + \iint_{SC} \bar{v} \cdot \rho \cdot (\bar{v}_r \cdot \bar{n}) \cdot dS = \\ = \iint_{SC} -p \cdot \bar{n} \cdot dS + \iint_{SC} (\bar{n} \cdot \bar{\tau}') \cdot dS + \iiint_{VC} \rho \cdot \bar{f}_m \cdot dV \end{aligned} \quad (3)$$

La ecuación parte de la segunda ley de Newton. Esta expresa que, la variación en la unidad de tiempo de la cantidad de movimiento de una masa fluida es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre esta. Existen dos tipos de fuerzas, fuerzas de superficie y fuerzas de volumen.

En este caso, el volumen de control es toda la botella (incluyendo el agua y el aire).

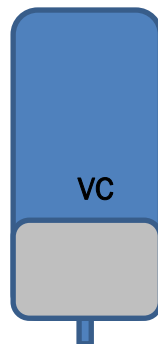


Figura 8 Volumen de control para la aplicación de la Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación expresa que la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento de un Volumen de Fluido más la cantidad de movimiento que atraviesa esa Superficie de Control es igual a la resultante de fuerzas externas aplicadas sobre el Volumen de Control. Siendo el tercer término las fuerzas de presión, el cuarto término las fuerzas viscosas (ambas sobre la Superficie de Control) y el quinto término las fuerzas de volumen aplicada sobre el Volumen de Control.

Es una ecuación vectorial, por lo que, se aplica en cada dirección por separado. Solamente interesa aplicarla en la dirección de movimiento (en la vertical), ya que en el resto de direcciones no va a existir ninguna fuerza ni ninguna cantidad de movimiento debido a las paredes de la botella y a que el movimiento y la única salida sean verticales.

El término de las presiones (tercer término) es 0 ya que la presión en toda la superficie de control es la atmosférica. El término de las fuerzas viscosas (cuarto término) es despreciable ya que se considera flujo ideal. Aplicando la ecuación en la dirección del movimiento (vertical).

$$\left(v \cdot \frac{dm}{dt} + m \cdot \frac{dv}{dt} \right) - \rho \cdot v_s \cdot Q_S = -F_D - m \cdot g$$

La variación de la masa en el tiempo es "0" ya que el proceso de vaciado se considera estacionario. Aplicando la Ecuación de Bernoulli se obtiene el valor de la velocidad de salida (obtenido anteriormente). Dando como resultado finalmente:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{2 \cdot \frac{(P_1 - P_S)}{\rho}} \cdot m_S - F_D - m \cdot g}{m}$$

Ahora se calcula la velocidad del cohete. La aceleración (variación de la velocidad en el tiempo) se define de la siguiente manera:

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t}$$

Aplicando la definición de límite se puede obtener la velocidad. Finalmente queda:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{dv}{dt}$$

Obteniendo esta a partir de la velocidad en el instante anterior y la variación de la velocidad por unidad de tiempo.

Esta forma de integración implica calcular la velocidad por pasos, necesitando siempre el valor de la velocidad en el punto anterior y su variación.

La velocidad inicial se conoce debido a que el cohete parte del reposo, por lo que esta velocidad inicial es nula. La variación de la velocidad no es conocida inicialmente.

Se necesita conocer el término de la Fuerza de arrastre para poder resolver la ecuación anterior de variación de velocidad en el tiempo.

2.2.1.5.- Fuerza de arrastre

Cuando un cuerpo está inmerso en una corriente móvil (o, alternativamente, un cuerpo se mueve a través de un fluido en reposo) experimenta una fuerza. Esta fuerza es el resultado del movimiento relativo entre el cuerpo y el fluido.

La componente de la fuerza en la dirección del flujo que se aproxima se conoce como resistencia o arrastre, y la componente de la fuerza perpendicular al flujo que se aproxima se conoce como sustentación.

Las fuerzas de sustentación no necesariamente se presentan en todos los flujos; solamente ocurren si existe asimetría. En este caso el cuerpo es simétrico por lo que la fuerza de sustentación “ F_L ” es nula.

Los experimentos han demostrado que cualquier cuerpo colocado en una corriente móvil experimenta una resistencia. Si el cuerpo se mueve en relación con un fluido en reposo, la fuerza de resistencia resiste al movimiento. El vector de fuerza de resistencia siempre apunta corriente abajo.

La resistencia es la resultante de las fuerzas de presión y las debidas a esfuerzos cortantes sobre la superficie del cuerpo.

La fuerza neta sobre el perfil aerodinámico se puede calcular integrando la presión y el esfuerzo cortante sobre la superficie:

$$\vec{F} = - \oint p \cdot \hat{n} \cdot dA + \oint \tau_w \cdot \hat{t} \cdot dA$$

Donde \hat{n} y \hat{t} son los vectores unitarios perpendicular y tangente a la superficie del perfil. En esta expresión, τ_w es positiva si la fuerza cortante señala la misma dirección que \hat{t} .

La resistencia y la sustentación son las componentes de la fuerza en la dirección del flujo y la perpendicular a él. La fuerza de sustentación era “0”, y la fuerza de arrastre se calcula:

$$F_D = \oint (-p \cdot \cos \theta + \tau_w \cdot \sin \theta) \cdot dA$$

Donde “ θ ” es el ángulo existente entre la normal a la superficie del cuerpo y la dirección (y sentido) del flujo, medido en el sentido de las manecillas del reloj.

Como “ θ ” es aproximadamente 90° sobre la mayor parte superior del perfil y aproximadamente de 270° sobre la mayor parte inferior del mismo, la fuerza de sustentación es ocasionada sobre todo por la presión.

Esta ecuación es útil para calcular la fuerza de arrastre si se conoce la distribución de presiones y esfuerzos cortantes. En general el interés último es la fuerza de resistencia (y la fuerza de sustentación) en lugar de las distribuciones de presiones y esfuerzos, por lo que los resultados experimentales y analíticos se presentan directamente como fuerza de resistencia (y fuerza de sustentación). Los datos se presentan en términos de los coeficientes adimensionales de arrastre “ C_D ” (y sustentación), que se define como:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot S}$$

donde v_∞ es la velocidad del fluido relativa al objeto y S es un área de referencia. En la práctica se emplean varias definiciones para el área. El área frontal (la que se ve al mirar el cuerpo desde la dirección del flujo que se aproxima) y el área proyectada (la que se vería observando al cuerpo desde arriba).

Despejando de la definición de coeficiente de arrastre se obtiene el valor de la fuerza de arrastre:

$$F_d = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot C_D \cdot S \quad (4)$$

A continuación se muestra un ejemplo de lo explicado anteriormente. Lo que le ocurre cuando el fluido (aire en este caso) circula alrededor de la botella.

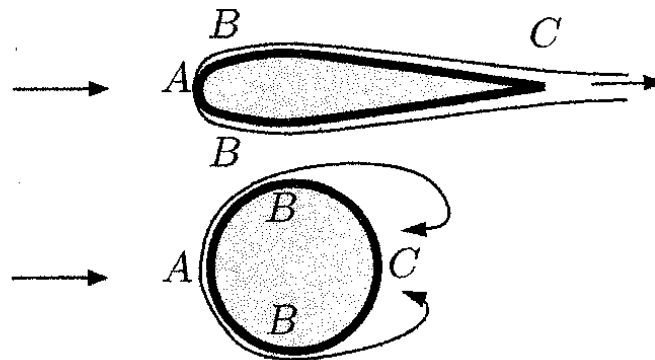


Figura 9 Esquema que ilustra la aparición de una zona de depresión en la parte posterior del cuerpo cuando hay desprendimiento, que se hace muy pequeña o desaparece cuando el cuerpo es aerodinámico

Se pueden observar 2 casos. En la segunda imagen, el desprendimiento de la capa límite es muy rápido, por lo que provoca una depresión en la parte posterior (presión inferior a la existente en la parte anterior), esto conlleva una fuerza en la dirección del movimiento del fluido (relativo a la botella), a lo que se le suma la fuerza de fricción existente entre el fluido y la botella.

Para disminuir esta fuerza de arrastre, la forma de la botella es más parecida al primer caso (primera imagen), en el cual la capa límite se desprende prácticamente al final, sin llegar a crear una gran diferencia de presiones entre la parte posterior y anterior, por lo que la fuerza influyente será la de fricción entre la botella y el fluido, consiguiendo así disminuir la fuerza de arrastre existente.

El número de Reynolds es importante para definir si el flujo es laminar o turbulento y representa el cociente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas. Se calcula de la siguiente forma:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot L}{\mu_0}$$

2.2.2.- Gasto de aire

Ahora se procede al cálculo de la masa de aire. El aire comienza a salir una vez se ha gastado todo el agua. Durante la salida del aire existen dos tramos. Un primer tramo en el que la tobera está bloqueada y un segundo tramo cuando se desbloquea la tobera.

Mientras la tobera está bloqueada el gasto de aire será máximo independientemente del valor de la presión de salida. Cuando se desbloquea la tobera el gasto va disminuyendo hasta que no sale más aire.

2.2.2.1.- Tobera bloqueada

En este primer caso la tobera está bloqueada.

El área de salida es igual al área mínima de la tobera:

$$A_s = A_{min}$$

1.- Cálculo de la masa de aire

Y el gasto de aire tiene que cumplir la siguiente ecuación:

$$G = \rho_0 \cdot a_0 \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2 \cdot (\gamma-1)}} \cdot A_{min} = 0,579 \cdot \rho_0 \cdot a_0 \cdot A_{min} \quad (\gamma = 1,4)$$

Independiente del valor de la presión a la salida. Por más que se succione aguas abajo no se es capaz de sacar más gasto de fluido de la botella.

Durante este proceso de salida con la tobera bloqueada, el número de Mach a la salida es igual a "1". El número de Mach se calcula de la siguiente manera:

$$M = \frac{v}{a} \quad (5)$$

Representa la relación entre la velocidad de propagación en el medio y la del sonido en el fluido. El flujo es subsónico si M es menor que 1, sónico si M es igual a 1 y supersónico si M es mayor que 1.

v representa la velocidad de propagación en el medio.

a representa la velocidad de propagación del sonido en un fluido y se calcula:

$$a = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_a}$$

Para este caso en el que el Mach es igual a 1, se produce el bloqueo sónico. Conociendo el valor del número de Mach, no es necesario conocer la

temperatura a la salida para calcular la velocidad del sonido, ya que esta es igual a la velocidad del fluido.

Esto implica que la presión a la salida sea menor que la presión de salida crítica:

$$p_s < p_{sc}$$

La presión p_{sc} es la presión de salida crítica, esta presión aparece justo en el momento el cual el Mach a la salida es 1. Para presiones inferiores a esta, las condiciones de salida del aire seguirán siendo las mismas.

En este caso, la tobera es convergente, y cuando el depósito descarga por un orificio de área mínima a la salida, las condiciones sónicas se presentarían en la misma salida. Por lo que, la presión durante este bloqueo sónico sería únicamente función de la presión en el interior, no sería función de la velocidad. Sería la presión de salida crítica:

$$P_{sc} = \left(\frac{2}{\gamma - 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \cdot P_0 = 0,528 \cdot P_0 \quad (\gamma = 1,4)$$

Para calcular esta presión de salida necesaria para saber si nos encontramos en el estado de tobera bloqueada. Se necesita calcular como varía la presión en el interior de la botella en función del tiempo. Partiendo de la siguiente ecuación politrópica para un proceso adiabático:

$$P_{0i} \cdot V_{0i}^\gamma = cte = P_0 \cdot V_0^\gamma$$

Se obtiene:

$$P_0 = P_{0i} \cdot \left(\frac{v}{V_a} \cdot m_a\right)^\gamma$$

Donde “ v ” es el volumen específico del aire y se calcula de la siguiente forma:

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$$

La ecuación politrópica se puede aplicar en los procesos adiabáticos. Un proceso adiabático es aquel en el cual el sistema termodinámico (generalmente, un fluido que realiza un trabajo) no intercambia calor con su entorno. Un proceso adiabático que es además reversible se conoce como proceso isentrópico. En este caso, el proceso sí es adiabático, por lo que podemos aplicar la ecuación ya que no existe intercambio de calor.

Para saber si la tobera se encuentra bloqueada es necesario calcular la presión a la salida. El bloqueo debe cumplir lo explicado anteriormente:

$$p_s < p_{sc} = 0,528 \cdot P_0$$

Partiendo de la relación de presiones y velocidad para una tobera convergente:

$$\frac{P_0}{P_s} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_s^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Se obtiene la siguiente fórmula para la presión de salida. En este caso el Mach a la salida sea igual a "1", por esto se obtiene la misma fórmula que la presión de salida crítica:

$$P_s = P_0 \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

La tobera se va a encontrar bloqueada hasta que la presión a la salida se iguale a la presión ambiente (entonces la presión a la salida no podrá disminuir más y estará por encima de la presión de salida crítica).

II.- Cálculo de la velocidad de salida del aire

Otro dato más que se necesita conocer es la velocidad de salida del aire. Para obtenerla únicamente es necesario aplicar el número de Mach que se sabe con anterioridad que tiene un valor de "1", su cálculo se realiza mediante la ecuación (5):

Despejando la velocidad:

$$v = v_s = M \cdot a$$

III.- Cálculo de la velocidad del cohete

Otro dato más a calcular es la velocidad del cohete durante la salida del aire mientras la tobera está bloqueada.

Para calcular esta velocidad es necesario, como en el caso del gasto de agua, partir de la ecuación (3).

En este caso, el volumen de control es la botella entera, ya que todo es aire. El volumen de control es indeformable, ya que esta ecuación se comienza a aplicar cuando el agua se ha gastado y el aire ocupa la botella al completo.



Figura 10 Volumen de control para la Ecuación de conservación de la masa en el cálculo de la masa de aire

Aplicando la ecuación como en el eje vertical (hacia arriba en la dirección del movimiento del cohete). Las fuerzas viscosas son despreciables nuevamente. Aplicando la ecuación obtenemos:

$$\left(v \cdot \frac{dm}{dt} + m \cdot \frac{dv}{dt} \right) - \rho \cdot v_s \cdot Q_s = (P_s - P_{amb}) \cdot A_s - F_D - m \cdot g$$

La variación de la masa en el tiempo es "0" ya que el proceso de vaciado se considera estacionario (esto ocurre durante todo el vaciado). Dando como resultado finalmente:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_s \cdot m_s + (P_s - P_{amb}) \cdot A_s - F_D - m \cdot g}{m}$$

Donde la fuerza de arrastre se calcula igual que en el caso anterior.

Ahora se calcula la velocidad del cohete durante este periodo. La aceleración (variación de la velocidad en el tiempo) se obtiene nuevamente como en el apartado anterior, resultando nuevamente:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{dv}{dt}$$

Obteniendo esta a partir de la velocidad en el instante anterior y la variación de la velocidad por unidad de tiempo.

2.2.2.2.- Tobera desbloqueada

En este último caso la tobera esta desbloqueada. La presión a la salida ahora es igual a la presión ambiente.

La resolución ahora es muy parecida al proceso con la tobera bloqueada pero con unas pequeñas diferencias.

Ahora influyen las condiciones a la salida de la tobera. En este caso el número de Mach a la salida es menor de "1" y nos encontramos en flujo subsónico.

1.- Cálculo de la masa de aire

Para calcular el gasto de aire ahora es necesario aplicar la ecuación (1), despejando obtenemos:

$$\frac{dm_a}{dt} = v_s \cdot \rho_a \cdot A_s$$

Es necesario conocer la densidad a la salida y la velocidad a la salida.

La densidad a la salida se obtiene aplicando la ecuación de estado de un gas ideal.

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Despejando la densidad:

$$\rho_s = \frac{P_s}{R \cdot T_s}$$

Utilizando la condición:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La presión de salida es conocida, siendo su valor el de la presión ambiente. La temperatura a la salida es desconocida y es necesario calcularla.

La temperatura a la salida se calcula utilizando la relación de temperaturas para una tobera.

$$\frac{T_s}{T_0} = \left(\frac{P_s}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Donde, despejando la temperatura a la salida:

$$T_s = T_0 \cdot \left(\frac{P_s}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

II.- Cálculo de la velocidad de salida de aire

Ahora es necesario calcular la velocidad de salida. Para obtenerla únicamente es necesario aplicar el número de Mach al igual que en el caso anterior, ecuación (5):

Despejando nuevamente la velocidad:

$$v = v_s = M \cdot a$$

El valor de la velocidad del sonido “a” se obtiene con el valor de la temperatura a la salida antes obtenida:

$$a = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_a}$$

El otro dato necesario es el valor del número de Mach. Para obtenerlo se utiliza la relación de presiones a la salida para una tobera:

$$\frac{P_0}{P_s} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_s^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Despejando:

$$M_s^2 = \left(\left(\frac{P_0}{P_s}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{\gamma - 1}\right)$$

Con esto ya se obtiene el valor del gasto de aire para el periodo en el que la tobera esta desbloqueada.

III.- Cálculo de la velocidad del cohete

Ahora es necesario conocer la velocidad del cohete. Esta se calcula igual que en el caso de tobera bloqueada, aplicando la ecuación (3).

El volumen de control es la botella entera igualmente.



Figura 11 Volumen de control para la Ecuación de conservación de la masa en el cálculo de la masa de aire

Aplicando la ecuación como en el eje vertical (hacia arriba en la dirección del movimiento del cohete). Las fuerzas viscosas son despreciables igualmente. Aplicando la ecuación obtenemos:

$$\left(v \cdot \frac{dm}{dt} + m \cdot \frac{dv}{dt} \right) - \rho \cdot v_s \cdot Q_s = -F_D - m \cdot g$$

La variación de la masa en el tiempo es “0” ya que el proceso de vaciado se considera estacionario (esto ocurre durante todo el vaciado). Ahora no existe diferencia de presiones ya que a la salida el aire sale con la presión ambiente por lo que la única Fuerza de Empuje existente es debido a la cantidad de movimiento del aire. Dando como resultado finalmente:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_s \cdot m_s - F_D - m \cdot g}{m}$$

La fuerza de arrastre se calcula de la misma forma que en los anteriores apartados.

Igualmente se calcula la velocidad del cohete durante este periodo. La aceleración (variación de la velocidad en el tiempo) se obtiene nuevamente como en el apartado anterior, resultando nuevamente:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{dv}{dt}$$

Obteniendo esta a partir de la velocidad en el instante anterior y la variación de la velocidad por unidad de tiempo.

2.2.4.- Integración de las ecuaciones

Para integrar las ecuaciones se utiliza un método paso a paso y se aplica en una hoja de datos.

Inicialmente, es necesario colocar una lista con los valores fijos, esto será de gran ayuda a la hora de relacionar las ecuaciones y para evitar introducir números “iguales” con distintos decimales o errores.

Esta serie de valores fijos para el experimento vienen dados por el material utilizado (una botella de plástico de Coca Cola) o por las condiciones ambientales, como son:

- El volumen útil del cohete (botella) de 2 litros.
- El valor del coeficiente adiabático de los gases (γ) para la temperatura ambiente y el aire es de 1,4.
- La presión ambiente (P_{amb}) será de 1 bar.

- La masa del cohete vacío (m_c) es de 0,051 Kg.
- El diámetro máximo de la botella (D_{max}) es de 0,104 m.
- El diámetro medio de la botella (D) es de 0,1 m.
- La temperatura ambiente (T_{amb}) será de 20°C.
- La viscosidad del aire (μ_a) será de $1,8 \times 10^{-5}$ Ns/m².

Las condiciones ambientales utilizadas son las estándar para Valladolid en una época determinada, ya que cada día pueden existir pequeñas variaciones.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Vb (l)	2	0,002		ma0 (kg)	0,011416204		dt (s)	0,005	
2	PO (bar)	6	600000		va0 (m3/kg)	0,140151667	volumen espe	Db (m)	0,104	diámetro botella
3	TO (°C)	20	293		Dtob (mm)	4		Afb (m2)	0,00849487	
4	mw0 (kg)	0,4			Atob (m2)	1,25664E-05		Ramb (kg/m3)	1,1891879	densidad ambiente
5	Row (kg/m3)	1000			Pamb (bar)	1	100000	Tamb (°C)	20	293
6	R (J/kg/K)	287			Cp (J/kg/K)	1004,5		Cd	0,2882	
7	Gamma	1,4			Masa cohe (k)	0,051		μ (N*s/m2)	0,000018	

Figura 12 Situación de los parámetros predefinidos en la hoja de cálculo

Algunos de los valores que aparecen en la imagen están definidos por las condiciones iniciales anteriores.

En segundo lugar es necesario determinar el intervalo de tiempo el cual va a utilizarse para la integración por pasos.

Esta integración por pasos será la utilizada para la integración de las ecuaciones diferenciales. Debido a la gran dificultad de resolverlas de manera directa, se resolverán de manera aproximada con un error despreciable mediante el Método de Euler.

El Método de Euler consiste en resolver las ecuaciones mediante un proceso de integración numérica para resolver las ecuaciones diferenciales a partir de un valor inicial dado. Es un método de primer orden, lo que significa que el error local es proporcional al cuadrado del tamaño del paso, y el error global es proporcional al tamaño del paso, por lo que reduciendo al máximo el tamaño de paso se reduce el error hasta que este sea despreciable.

El intervalo de tiempo (Δt) utilizado para la integración con el Método de Euler es necesario comprobarlo una vez escritas todas las ecuaciones. Partiendo desde un número “elevado”, hasta finalmente el número el cual, tras

disminuir este intervalo de tiempo, no aplique una diferencia visible en la cifra significativa considerada para este estudio (que el error sea despreciable).

En este caso el intervalo de tiempo (Δt) va a ser:

$$\Delta t = 0,005 \text{ s}$$

en el cual ya no se aprecia ninguna variación en las 6 cifras significativas.

Si se utiliza un intervalo menor, el resultado no va a sufrir una variación que afecte significativamente y va a ser más lento de calcular, por lo que no es necesario disminuirlo más de lo estimado.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Vb (l)	2	0,002		ma0 (kg)	0,011416204		dt (s)	0,005	
2	PO (bar)	6	600000		va0 (m3/kg)	0,140151667	volumen espeDb (m)		0,104	diametro botella
3	TO (°C)	20	293		Dtob (mm)	4	Afb (m2)		0,00849487	
4	mw0 (kg)	0,4			Atob (m2)	1,25664E-05	Ramb (kg/m3)		1,1891879	densidad ambiente
5	Row (kg/m3)	1000			Pamb (bar)	1	100000	Tamb (°C)		20
6	R (J/kg/K)	287			Cp (J/kg/K)	1004,5		Cd		0,2882
7	Gamma	1,4			Masa cohe (ki)	0,051		μ (N*s/m2)		0,000018

Figura 13 Se muestra rodeado el intervalo de tiempo

A continuación, en tercer lugar, se coloca una primera columna que muestre el instante de tiempo en el que se sitúa la integración para poder resolver las ecuaciones diferenciales por el método utilizado.

9		r
10	tiempo (s)	r
11	0	
12	0,005	
13	0,01	
14	0,015	
15	0,02	
16	0,025	
17	0,03	
18	0,035	
19	0,04	
20	0,045	

Figura 14 Columna de tiempo en la hoja de datos

Esta columna debe finalizar como mínimo una vez el cohete vuelva a caer al suelo. Aunque una vez se alcance la altura máxima, la caída del cohete puede no ser siempre vertical en un caso real, existiendo un coeficiente de arrastre

distinto para cada posición en la caída (mayor ya que no caería de la forma más aerodinámica posible) y por lo tanto, caería más despacio.

En cuarto lugar es necesario colocar las ecuaciones anteriormente descritas en orden para poder resolver el problema paso a paso evitando cometer errores.

9		masa agua	masa aire	velocidad coh	posicion cohe	Volumen aire	f
10	tiempo (s)	mw (kg)	ma (kg)	c (m/s)	X (m)	Va (m3)	f
11	0	0,4	0,0114162	0	0	0,0016	
12	0,005	0,39801308	0,0114162	0,08682727	0,00021707	0,001601987	
13	0,01	0,39602824	0,0114162	0,17395651	0,00086903	0,001603972	
14	0,015	0,39404545	0,0114162	0,26139062	0,0019574	0,001605955	
15	0,02	0,39206473	0,0114162	0,34913253	0,0034837	0,001607935	
16	0,025	0,39008606	0,0114162	0,43718519	0,0054495	0,001609914	
17	0,03	0,38810943	0,0114162	0,5255516	0,00785634	0,001611891	
18	0,035	0,38613485	0,0114162	0,61423476	0,01070581	0,001613865	
19	0,04	0,38416229	0,0114162	0,7032377	0,01399949	0,001615838	
20	0,045	0,38219177	0,0114162	0,79256351	0,01773899	0,001617808	

Figura 15 Situación de las ecuaciones en la hoja de cálculo

Presion interio	Temperatura	var. Masa de	velocidad de sal	Presion critica	Presion salida	MACH SALIDA
P (Pa)	T (K)	dmw/dt (Teo)	cws (Teo)	Pc (Pa)	Ps aire (Pa)	Ms
600000	293	0,39738353	31,6227766	316969,073	316969,073	1
598958,421	292,854585	0,39696941	31,58982179	316418,825	316418,825	1
597921,017	292,709573	0,39655652	31,55696492	315870,784	315870,784	1
596887,765	292,564962	0,39614485	31,52420546	315324,936	315324,936	1
595858,638	292,420751	0,3957344	31,49154292	314781,266	314781,266	1
594833,61	292,276938	0,39532516	31,45897678	314239,763	314239,763	1
593812,657	292,13352	0,39491713	31,42650654	313700,412	313700,412	1
592795,753	291,990496	0,39451029	31,3941317	313163,2	313163,2	1
591782,874	291,847863	0,39410465	31,36185178	312628,114	312628,114	1
590773,994	291,705621	0,3937002	31,32966628	312095,142	312095,142	1

Figura 16 Continuación Figura 15

Temperatura	velocidad son	Velocidad de	Densidad salic	Densida interi	Gasto aire m	Fuerza rozam
Ts (K)	a sal (m/s)	Cas (Teo)	MAI Roas (Kg/m3)	Ro0 (Kg/m3)	dma/dt teo (k Fr (N)	
244,166667	313,219039	313,219039	4,52322944	7,13512742	0,01781267	0
244,045487	313,141305	313,141305	4,51761936	7,12627784	0,01778616	1,0974E-05
243,924644	313,063767	313,063767	4,512029	7,11745938	0,01775975	4,4051E-05
243,804135	312,986424	312,986424	4,50645824	7,10867184	0,01773344	9,9461E-05
243,683959	312,909276	312,909276	4,50090699	7,09991508	0,01770723	0,00017744
243,564115	312,832321	312,832321	4,49537513	7,09118889	0,01768112	0,00027823
243,4446	312,75556	312,75556	4,48986256	7,08249312	0,0176551	0,00040207
243,325413	312,67899	312,67899	4,48436915	7,0738276	0,01762918	0,00054921
243,206553	312,602612	312,602612	4,47889481	7,06519215	0,01760336	0,00071991
243,088017	312,526423	312,526423	4,47343942	7,0565866	0,01757764	0,00091441

Figura 17 Continuación Figura 16

var. Masa agu	var. Masa air	velocidad de	Presion de sal	Empuje	aceleracion t	aceleracion
dmw/dt (Kg/s)	dma/dt (Kg/s)	cs (m/s)	PsE (Pa)	Emp (N)	dc/dt (Teo)	dc/dt (m/s ²)
0,39738353	0	31,6227766	100000	12,5663706	17,3654547	17,3654547
0,39696941	0	31,5898218	100000	12,5401929	17,4258476	17,4258476
0,39655652	0	31,5569649	100000	12,5141201	17,4868215	17,4868215
0,39614485	0	31,5242055	100000	12,4881516	17,5483815	17,5483815
0,3957344	0	31,4915429	100000	12,4622868	17,610533	17,610533
0,39532516	0	31,4589768	100000	12,4365251	17,6732811	17,6732811
0,39491713	0	31,4265065	100000	12,4108657	17,7366315	17,7366315
0,39451029	0	31,3941317	100000	12,3853081	17,8005896	17,8005896
0,39410465	0	31,3618518	100000	12,3598517	17,865161	17,865161
0,3937002	0	31,3296663	100000	12,3344958	17,9303513	17,9303513

Figura 18 Continuación Figura 17

Muchas de las ecuaciones ha sido necesario introducirlas en primer lugar de manera teórica para evitar errores, por ejemplo:

En primer lugar se calcula cómo se gastaría el aire de manera teórica (como si durante todo el vuelo solo saliera aire y no dejara de salir en ningún momento del proceso) y más adelante, se introduce de manera real. En la manera real se diferencia de si en realidad está saliendo por la tobera agua, aire o nada, así en el gasto de aire real podría:

- “0” en el caso de que saliera agua.
- El gasto de aire teórico en el caso de que salga aire.
- “0” nuevamente en el caso de que no salga nada ya.

Ahora se introducen otras dos casillas que mostrará uno de los objetivos buscados en este trabajo (la altura máxima), junto con otro dato importante (la velocidad máxima). Ambas alcanzadas por el cohete en el vuelo.

	L	M
Xmax (m)		77,7572335
vmax (m/s)		44,7897252

Figura 19 Altura máxima y velocidad máxima de la hoja de datos

Para finalizar a modo de “resumen” se insertan unas gráficas que muestran toda la evolución del proceso de manera visual, mucho más fácil de entender lo que ocurre durante todo el proceso. Estas gráficas son utilizadas en el estudio paramétrico. Son las siguientes:

1. Gasto de agua y aire frente al tiempo.

2. Gasto de agua y posición frente al tiempo.
3. Aceleración y velocidad frente al tiempo.
4. Posición y velocidad frente al tiempo.

De esta manera se consigue resolver el problema, para poder realizar un estudio paramétrico y así obtener el mejor de los estados estudiados.

3.- ESTUDIO EXPERIMENTAL

Este estudio experimental se lleva a cabo para obtener un posible mejor estado que nos dé una menor fuerza de arrastre. Para ello se estudiará en el túnel de viento un modelo a escala de la botella real.

Para la parte aerodinámica de la botella, se comparará la botella sin añadir nada con otros tres casos, en los que se coloca un cono de la nariz en la parte incidente del aire durante el vuelo. Es este apartado se estudiará cuál es el mejor ángulo entre los 3 seleccionados para el estudio (30°, 60° o 90°) o si no influye colocar un cono en la parte incidente.

Este estudio experimental se llevará a cabo en el túnel de viento proporcionado por la Universidad de Valladolid.

Aquí se puede ver un modelo del mismo:

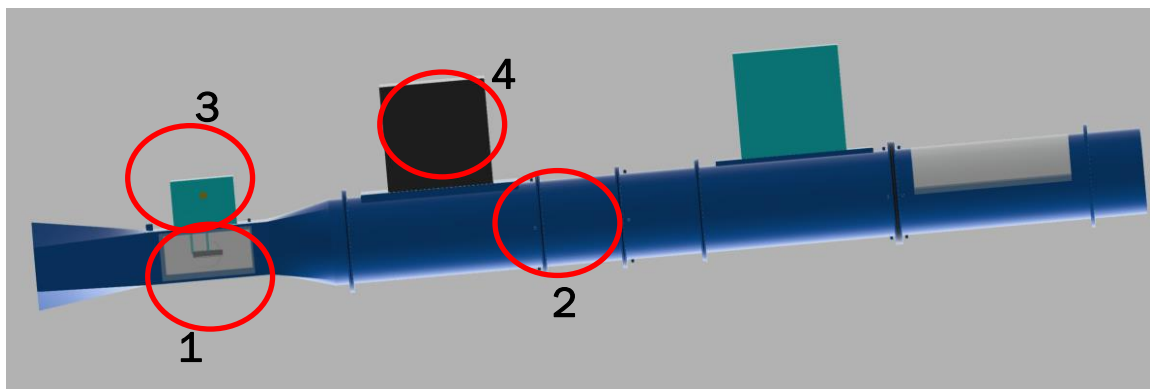


Figura 20 Túnel de viento

En el punto “1” se encuentra la zona de ensayo, esta sección es rectangular. En esta zona se coloca el modelo en una barra conectada a un medidor de fuerza. El aire circula desde el principio del túnel pasando por el punto “2” hasta el punto “1”.

En el punto “2” se encuentra el diafragma, es una sección circular. En esta zona está colocado el manómetro diferencial que mide la diferencia de presiones entre un punto antes del diafragma y un punto después para poder calcular la velocidad en esta sección.

En el punto “3” se encuentra el panel de medición de la fuerza. En él se puede medir la fuerza en unidades fuera del sistema internacional (gramos fuerza).

En el punto “4” se encuentra el panel de medición de la diferencia de presión del diafragma (se mide indirectamente con la diferencia de alturas de agua que aporta la diferencia de presiones).

3.1.- DIMENSIONADO DEL MODELO

Para poder realizar pruebas y estudiar el rozamiento en el túnel de viento se va a imprimir un modelo de la botella en una impresora 3D. El modelo incluye la botella por un lado y por otro los tres conos de la nariz a estudiar.

Para dimensionar el modelo es necesario saber cuál puede ser su tamaño máximo, debido a las dimensiones del túnel de viento en el cual se van a realizar las pruebas.

El tamaño máximo del modelo influye el bloqueo del túnel de viento. No puede ser mayor de un cierto valor, debido a que, sí el área del modelo es más grande del máximo posible, existiría influencia de las paredes en el estudio de la fuerza de arrastre y los valores serían erróneos. Para calcular este tamaño máximo existe el coeficiente de bloque.

Según un artículo, el coeficiente de bloqueo es el cociente entre el área del modelo y el área de la sección de medición del túnel de viento. Esta relación de áreas no puede superar el 10%. Se calcula con la siguiente ecuación:

$$C_b = \frac{A_{modelo}}{A_{sección}} \leq 0,1$$

Las dimensiones del túnel de viento son:

Ancho = 197 mm

Alto = 291 mm

Teniendo el túnel un área:

$$A_{sección} = 7327 \text{ mm}^2$$

Y la botella tiene un área máxima:

$$A_{1,max} = 8494,87 \text{ mm}^2$$

Por lo que, para cumplir el coeficiente de bloqueo, el modelo debería tener como máximo un 67% del tamaño de la botella:

$$\frac{A_{modelo}}{A_1} \cdot 100 = 67\%$$

Pero para evitar la influencia de las paredes en el estudio, y teniendo en cuenta que una de las dos dimensiones del túnel de viento es menor, se repite el cálculo como si el túnel fuese cuadrado, con un valor del lado de 197 mm.

Suposición, túnel cuadrado de lado 197 mm. Por lo que el área del túnel sería de:

$$A_{sup-cuad,ensayo} = 38809 \text{ mm}^2$$

y cumpliendo el coeficiente de bloqueo, el modelo debería tener como máximo un 45% del tamaño de la botella.

$$\frac{A_{modelo}}{A_1} \cdot 100 = 45\%$$

Para evitar el ajuste al máximo, el modelo tendrá un tamaño del 40% del tamaño de la botella, evitando así cualquier influencia en el estudio por parte del bloqueo del área de ensayo.

$$\frac{A_{modelo}}{A_1} \cdot 100 = 40\%$$

Este modelo se imprimirá mediante una impresora 3D. Esto incluye la botella y los conos de la nariz. Todos ellos impresos al 40% de su tamaño real.

Quedando finalmente impresos de la siguiente forma (se incluye también otra foto comparando el modelo con la botella real para apreciar su reducción de tamaño):

- Botella:



Figura 21 Modelo de la botella



Figura 22 Comparativa botella real frente al modelo de la botella

- Cono de la nariz de 30°:



Figura 23 Modelo del cono de la nariz de 30°



Figura 24 Comparativa botella real frente al modelo del cono de 30°

- Cono de la nariz de 60°:



Figura 25 Modelo del cono de la nariz de 60°



Figura 26 Comparativa botella real frente al modelo del cono de 60°

- Cono de la nariz de 90°:



Figura 27 Modelo del cono de la nariz de 90°



Figura 28 Comparativa botella real frente al modelo del cono de 90°

3.2.- VELOCIDADES TEORICAS DEL TUNEL DE VIENTO

Se trata de determinar el intervalo de velocidades en el que es necesario moverse en el túnel de viento al realizar el ensayo.

La velocidad máxima alcanzada en uno de los casos del posterior estudio paramétrico es de 85 m/s y la mínima de 10 m/s utilizando un valor estimado mediante tablas del coeficiente de arrastre.

Para saber el intervalo que tenemos que medir en el laboratorio, estimaremos las velocidades del viento en la zona de medición.

Para una velocidad la máxima de la botella real, obtenemos el siguiente número de Reynolds:

$$v_{real} = 85 \text{ m/s}$$

$$Re = 4.85 \times 10^5$$

Y con estos dos valores para el tamaño del modelo, obtendríamos una velocidad equivalente de:

$$v_{ensayo} = 212.5 \text{ m/s}$$

Frente a la velocidad mínima de la botella real, obtenemos el siguiente número de Reynolds:

$$v_{real} = 10 \text{ m/s}$$

$$Re = 6.93 \times 10^4$$

Y con estos dos valores para el tamaño del modelo, obtendríamos una velocidad equivalente de:

$$v_{ensayo} = 25 \text{ m/s}$$

El caudal en la zona de ensayo se determinara de la siguiente manera (llamando máximo al caso de la velocidad máxima y mínimo al de la velocidad mínima):

$$Q_{min} = v_{min} \cdot A_{ensayo} = 1.4381 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{máx} = v_{max} \cdot A_{ensayo} = 12.1819 \text{ m}^3/\text{s}$$

Con estos caudales, se calcula la velocidad del aire en el diafragma del túnel de viento. El diafragma permite medir con un manómetro diferencial la diferencia de presión entre un punto antes del diafragma y otro después. Esta diferencia de presión, se representa mediante una diferencia de alturas de agua en unos tubos milimetrados. Ambas están relacionadas mediante la siguiente ecuación de Bernoulli quedando finalmente:

$$\Delta P = \rho_w \cdot g \cdot \Delta h$$

La velocidad en el diafragma se calcula de la siguiente forma:

$$Q = v_{diaf} \cdot A_{diaf}$$

Despejando la velocidad:

$$v_{diaf,min} = \frac{Q_{min}}{A_{diaf}} = 7.94 \text{ m/s}$$

$$v_{diaf,max} = \frac{Q_{max}}{A_{diaf}} = 67.32 \text{ m/s}$$

Y con estos datos, obtendremos una diferencia de presión en el diafragma (la constante “k” estimada para el túnel de viendo es de aproximadamente “5”):

$$\Delta P_{min} = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_{min}^2 = 189.1308 \text{ Pa}$$

$$\Delta P_{max} = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_{max}^2 = 13595.95 \text{ Pa}$$

Y con estos valores, llevados a la siguiente ecuación nos da el valor de Δh que buscamos:

$$\Delta P_{min} = \rho_w \cdot g \cdot \Delta h$$

Donde la diferencia de alturas provocada por la diferencia de presiones en el diafragma es:

$$\Delta h_{min} \cong 2 \text{ cm}$$

$$\Delta h_{max} \cong 138 \text{ cm}$$

Pero el medidor del ensayo solo puede medir hasta un valor de:

$$\Delta h = 40 \text{ cm}$$

Inferior a la altura máxima necesaria, por lo que, se repite el proceso en sentido inverso. Partiendo de ese valor de “ Δh ” máximo, se calcula el valor de la velocidad real a la que corresponde (junto al número de Reynolds), siendo este:

$$Re = 3.15 \times 10^5$$

$$v_{real} = 45.43 \text{ m/s}$$

Inferior a la necesaria, pero sin suponer un problema para el estudio, ya que, el caso seleccionado posteriormente en el estudio paramétrico será el de la máxima altura, y no el de la máxima velocidad, estando mucho más próximos a este valor, o incluso dentro del intervalo.

3.3.- 3D

El modelo ha sido realizado tras la obtención de las medidas reales a partir de la sección de una botella de plástico de Coca Cola. Tras la realización en Catia del documento, se realizó la impresión del modelo en una impresora 3D.

Para la impresión ha sido necesario ampliar los espesores de la botella a un mínimo de 0,4 mm. Esto es debido a los límites mínimos de impresión para la impresora. Este sobredimensionamiento del espesor no afecta a los cálculos, debido a que la ampliación ha sido realizada en el interior de la botella y las dimensiones útiles continúan siendo las mismas.

3.3.1.- Bordes y ángulos de ataque

El ángulo de ataque es el ángulo de incidencia del viento con la dirección de la botella.

Este ángulo será de “0” grados, ya que el movimiento relativo del viento respecto al cohete es únicamente en la dirección del movimiento pero en sentido contrario.

El borde de ataque elegido en la punta es redondeado en vez de tener forma de pico, ya que, si el cono finalizara completamente en forma de pico, no seríamos capaces de obtener un cono de esa forma en la impresora 3D. En cambio, utilizando un borde de ataque un poco redondeado, se consigue disminuir la fuerza de arrastre (disminuyendo el coeficiente de arrastre) en comparación con el borde de ataque en forma de pico, resultando además mucho más sencillo obtener esta forma.

3.4.- TUNEL DE VIENTO

Ahora se describirán las pruebas realizadas en el túnel de viento para la determinación de los coeficientes de arrastre.

Primero es necesario realizar unas comprobaciones previas a las mediciones. Se observa que el calibre para medir la fuerza tiene un valor máximo (en unidades fuera del sistema internacional, como son los gramos fuerza) de:

$$F_D = 160 \text{ grf}$$

Lo que corresponde a aproximadamente con unos 18 cm para el valor de “ Δh ” que introduce la diferencia de presiones en el diafragma del túnel para el caso máximo.

Realizando los cálculos de manera similar al cálculo teórico de la velocidad en el túnel de viento, se obtienen los siguientes valores:

$$v_{\text{ensayo,max}} \cong 76.5 \text{ m/s}$$

$$Re = 2.1227 \times 10^5$$

$$v_{\text{real,max}} = 30.617 \text{ m/s}$$

Lo cual implica estimar los valores del coeficiente de arrastre para la velocidad real estudiada. Esto no introduce ningún problema para extrapolar los valores, ya que, la velocidad máxima para el caso de la máxima altura no es muy distinta, encontrándose el caso real de altura máxima (obtenido en el posterior estudio paramétrico) en un número de Reynolds similar. Posteriormente se comprueba si es correcta esta aproximación para los números de Reynolds en los que se mueve el intervalo.

A continuación realizaremos 4 estudios diferentes:

1. Modelo de la botella

2. Modelo de la botella más cono de 30°
3. Modelo de la botella más cono de 60°
4. Modelo de la botella más cono de 90°

Se mide la fuerza de arrastre “ F_D ” para una cierta diferencia de alturas “ Δh ” producida en el diafragma por la diferencia de presiones.

Para cada ensayo se han realizado varias mediciones, utilizando la media de todas ellas. En el ensayo se muestra el coeficiente de arrastre para cada caso y el medio del mismo.

-Botella sin cono aerodinámico:

Elemento	F_D (grf) medio	h (cm H ² O)	V_{ensayo} (m/s)	Re_{ensayo}	F_D (N)	C_D
Botella sin cono de la nariz	19,48717949	2	26,1337278	7,25E+04	0,1862	0,33430984
	49,92	5	41,3210518	1,15E+05	0,4704	0,33782889
	71,46853147	8	52,2674555	1,45E+05	0,686	0,30791696
	105,4976303	12	64,0142981	1,78E+05	1,029	0,30791696
	133,4831461	15	71,5701611	1,98E+05	1,2936	0,30967648
	158,4858044	18	78,4011833	2,17E+05	1,5386	0,30693944
					MEDIO	0,31689491

-Botella con cono de la nariz de 30°:

Elemento	F_D (grf) medio	h (cm H ² O)	V_{ensayo} (m/s)	Re_{ensayo}	F_D (N)	C_D
Botella con cono de 30°	18	2	26,1337278	7,25E+04	0,1764	0,31671458
	43,97727273	5	41,3210518	1,15E+05	0,441	0,31671458
	68,46715328	8	52,2674555	1,45E+05	0,686	0,30791696
	98,98989899	12	64,0142981	1,78E+05	0,98	0,29325424
	124,497992	15	71,5701611	1,98E+05	1,225	0,29325424
	150,9933775	18	78,4011833	2,17E+05	1,47	0,29325424
					MEDIO	0,30314523

-Botella con cono de la nariz de 60°:

Elemento	F _D (grf) medio	h (cm H ₂ O)	V _{ensayo} (m/s)	Re _{ensayo}	F _D (N)	C _D
Botella con cono 60°	17	2	26,1337278	7,25E+04	0,1666	0,29911933
	42,49411765	5	41,3210518	1,15E+05	0,4116	0,29560028
	65,49618321	8	52,2674555	1,45E+05	0,637	0,28592289
	96,49740933	12	64,0142981	1,78E+05	0,9506	0,28445662
	120	15	71,5701611	1,98E+05	1,176	0,28152407
	144,4982699	18	78,4011833	2,17E+05	1,421	0,2834791
					MEDIO	0,28820235

-Botella con cono de la nariz de 90°:

Elemento	F _D (grf) medio	h (cm H ₂ O)	V _{ensayo} (m/s)	Re _{ensayo}	F _D (N)	C _D
Botella con cono 90°	17,48571429	2	26,1337278	7,25E+04	0,1666	0,29911933
	45	5	41,3210518	1,15E+05	0,441	0,31671458
	68,98550725	8	52,2674555	1,45E+05	0,686	0,30791696
	100,4378109	12	64,0142981	1,78E+05	1,0094	0,30205187
	124,968	15	71,5701611	1,98E+05	1,2446	0,29794631
	150	18	78,4011833	2,17E+05	1,47	0,29325424
					MEDIO	0,30264508

Como se puede observar el valor máximo es para la botella sin cono de la nariz (como se podía esperar):

$$C_{D,max} = 0.3169$$

Y el valor mínimo es para el ángulo de 60°, con un valor de:

$$C_{D,min} = 0.2882$$

Se podría esperar que, el coeficiente inferior fuera para el ángulo de 30°, pero finalmente se comprueba que no es el inferior. Esto es debido a que, el cono de 30° es mucho más largo comparado con los otros dos conos. Esto implica una mayor superficie de contacto, y por lo tanto, una mayor fricción entre el aire y la superficie de este.

Si comparamos el valor máximo con el mínimo, el coeficiente de arrastre se reduce en un 9%, un valor considerable para obtener la máxima altura posible.

$$\text{Reducción} = 9 \%$$

A diferencia de los datos teóricos de los libros, los coeficientes obtenidos experimentalmente son inferiores. Por esta razón se han llevado a cabo las pruebas, para comprobar los valores exactos para conseguir un cálculo más preciso.

Para un cono de ángulo de 60° se estimaba un valor de $C_D = 0,5$, pero tras el estudio experimental, se comprueba que, para nuestro caso es de "0,288". Esto es debido a que, tras el cono, se encuentra la botella (un cilindro de gran longitud comparado con el cono), lo que hace que la capa limite se adhiera a la botella desprendiéndose finalmente de una forma suave y produciendo una fuerza de arrastre mucho menor como se explicó en el capítulo teórico.

Como se puede observar, para el estudio experimental, nos encontramos en la zona plana del coeficiente de arrastre (tras las mediciones en el laboratorio):

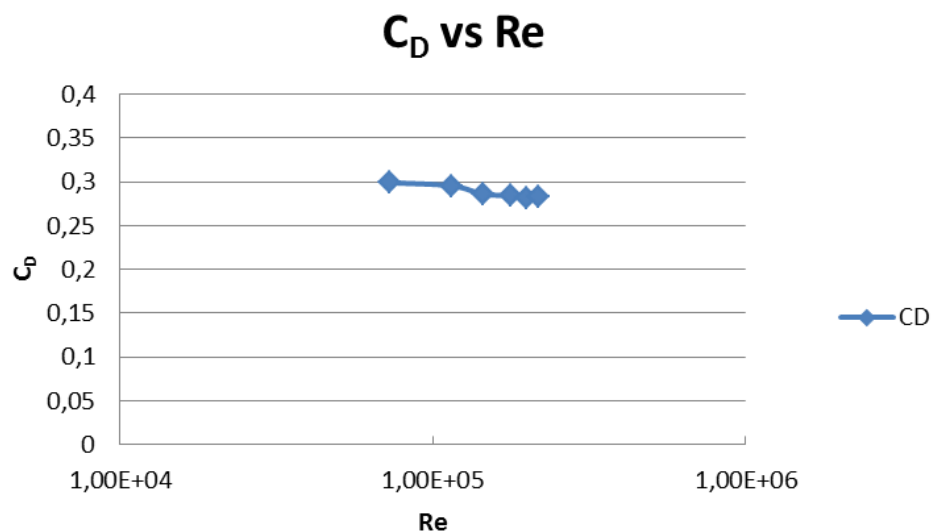


Figura 29 Coeficiente de arrastre frente al Reynolds para la el caso elegido

Se puede comparar con gráficas existentes en libros obtenidas experimentalmente. En este caso compararemos con una gráfica que mide la relación entre el coeficiente de arrastre y el Reynolds para un cilindro y una esfera lisos.

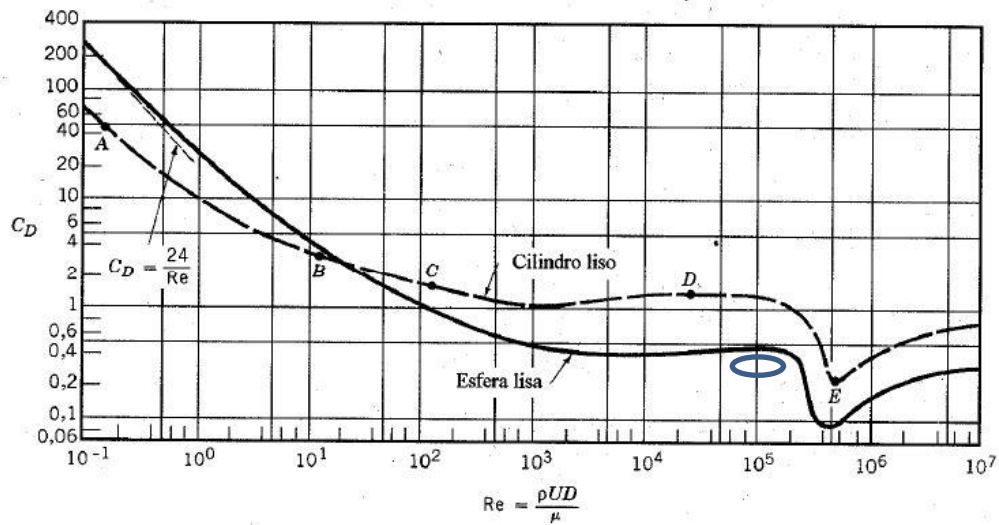


Figura 30 Coeficiente de arrastre frente al Reynolds para un cono y una esfera

Este estudio se encuentra en la zona redondeada. Se puede observar que no son iguales el caso de un cilindro y el de una esfera, por lo que, para la botella es probable que tampoco sea igual, pero si semejante. Estamos por la zona plana, con unos Reynolds inferiores a la caída del coeficiente, por lo que, se puede considerar que el coeficiente de arrastre para el estudio será aproximadamente el medido en el túnel de viento.

3.5.- FUERZA DE ARRASTRE

Para el cálculo de la fuerza de arrastre se utiliza el valor obtenido en el apartado anterior para el coeficiente de arrastre. En este caso el área pasa a ser el real de la botella y no el del modelo como el apartado anterior. Estos valores serán utilizados en el estudio paramétrico real.

Para el estudio paramétrico se utilizará la ecuación (5) definida en el capítulo teórico:

En dicha ecuación se considera la densidad del aire constante ya que, la altura no es suficiente como para influir en una variación importante de la densidad del aire. El coeficiente es el calculado anteriormente. El área de la botella es la real y la velocidad la considerada en cada momento del vuelo.

Se observa que en los casos que más alto asciende la botella, la velocidad máxima alcanzada es mucho más baja que en el caso de velocidad máxima, esto ayuda a que la fuerza de arrastre sea mucho menor, y por lo tanto, hay menos resistencia al vuelo. Por ello consigue llegar más alto.

3.6.- FUERZA DE SUSTENTACIÓN

La fuerza de sustentación es la fuerza originada por el movimiento relativo entre un cuerpo y un fluido, pero siendo únicamente la componente en la dirección perpendicular al flujo incidente. No siempre existe. Esta fuerza se calcula de la siguiente manera:

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_c^2 \cdot C_L \cdot A_{perp}$$

Donde C_L es el coeficiente de sustentación. Este coeficiente es similar al coeficiente de arrastre, también es adimensional.

La fuerza de sustentación para el ensayo es nula, debido a la simetría de la botella, aunque el fondo de la botella no es simétrico, con el cono de la nariz esta parte no influye y el cono sí es simétrico, por lo que la fuerza de sustentación es "0".

Para la realización de los cálculos no se considera que exista ningún viento lateral, por lo que, con la simetría no existirá movimiento lateral de la botella y por lo tanto tampoco existirá esta fuerza.

Esta fuerza podría llegar a existir si por algún factor, la botella se desviara (aunque fuera muy poco) y debido a esto, el aire comenzaría a circular más rápido por el lado hacia el que se desvía el cohete y más lento por el contrario, provocando una diferencia de presiones que conlleva que la botella continuara desviándose aún más.

Este caso sería una situación que no se podría solucionar para este estudio, pero que, debido a la simetría de la botella junto al cono y a la no existencia de viento lateral, no debería de aparecer.

4.- ESTUDIO PARAMÉTRICO Y OPTIMIZACIÓN

Tras la determinación del cono de la nariz, se busca mejorar otros tres parámetros variables realizando un estudio paramétrico.

El primer valor determinado en el estudio experimental fue:

El ángulo (α) del cono de la nariz.

Este estudio paramétrico se lleva a cabo mediante las ecuaciones introducidas en la hoja de cálculos. El objetivo es alcanzar la altura máxima (comparando siempre la velocidad máxima que se alcanza en cada estudio).

Finalmente se obtendrán una serie de casos (obteniendo las máximas alturas) en los cuales se podrán comparar las condiciones iniciales de cada uno y a que son debidas estas soluciones.

Ahora los valores a estudiar teóricamente son:

El diámetro (d_s) de la tobera de salida, que influirá en el caudal de salida y el empuje obtenido.

El volumen de agua inicial ($V_{0,w,i}$).

La presión ($P_{0,i}$) inicial de aire.

El estudio se va a realizar para el ángulo de 60° de cono de la nariz. Se determinó previamente en el estudio experimental con los ensayos en el laboratorio, que tiene un coeficiente de arrastre de $C_d = 0,288$ con el que obtendremos los valores óptimos para el resto de variables.

A continuación se puede ver una tabla resumen de los 5 mejores casos para obtener la altura máxima durante el vuelo del cohete. Junto a ellos, se observa también el caso de velocidad máxima. Este último caso solamente se utilizará para contrastar los datos con el caso de altura máxima.

α (°)	60	60	60	60	60	60
d_s (mm)	4	4	4	4	8	12
$V_{0,w,i}$ (l)	0,4	0,4	0,5	0,6	0,5	0,4
$P_{0,i}$ (bar)	5	6	6	6	6	6
$H_{c,max}$ (m)	65,739	77,757	77,718	75,942	65,8425	60,749
$V_{c,max}$ (m/s)	38,338	44,790	43,068	40,421	66,521	80,432
Re	2,66E+05	3,11E+05	2,99E+05	2,80E+05	4,61E+05	5,58E+05
C_D	0,2882	0,2882	0,2882	0,2882	0,2882	0,2882

El primer caso sería descartable, ya que, es el mismo caso que el máximo pero con menor presión, algo que como era previsible da una menor altura máxima.

Se observa que las máximas alturas se alcanzan para el menor tamaño de tobera de salida, sin diferenciar la cantidad de agua inicial que existe en la botella (existen pequeñas diferencias en el resultado, pero siguen siendo valores mucho mayores al resto de los casos).

También se aprecia que, la altura alcanzada para el primer caso, es muy parecida al caso en el que el diámetro de la tobera es de 8 mm, pero con una presión inferior de un bar, lo que implicarían unas condiciones más fáciles de alcanzar y más seguras.

Se observa que la velocidad máxima es alcanzada cuando tenemos el mayor diámetro de salida en la tobera. No así ocurre para la altura máxima, ya que el agua, al existir una tobera mayor, se gasta antes. Esto no permite que el aire salga cuando el cohete este en un punto más alto, sino que se gasta tan rápido que el aire sale mucho antes. Esto impide que llegue tan alto como con las otras toberas. Además al alcanzar una velocidad mayor, implica que exista una fuerza de arrastre mayor, lo que hará que el cohete decelere más rápido.

El estudio se centrara en alcanzar el punto más alto, por lo que se utilizarán los siguientes valores:

$$d_s = 4 \text{ mm}$$

$$V_{0,w,i} = 0.4 \text{ l}$$

$$P_{0,i} = 6 \text{ bar}$$

Con lo que se obtienen unos valores de:

$$H_{c,max} = 77.757 \text{ m}$$

$$v_{c,max} = 44.790 \text{ m/s}$$

4.1.- COMPARATIVA

A continuación se expondrá una comparativa gráfica entre el caso de velocidad máxima y el de altura máxima, para poder apreciar las diferencias existentes entre ambos casos.

Todas estas gráficas representan los valores obtenidos en el estudio teórico representadas de manera visual.

De esta manera se puede comparar fácilmente unos resultados con otros sin tener que mirar los valores numéricos uno por uno.

- En primer lugar compararemos el gasto de agua y aire frente al tiempo, en él se podrá apreciar que para el caso de máxima altura este proceso es más lento:

Caso altura máxima:

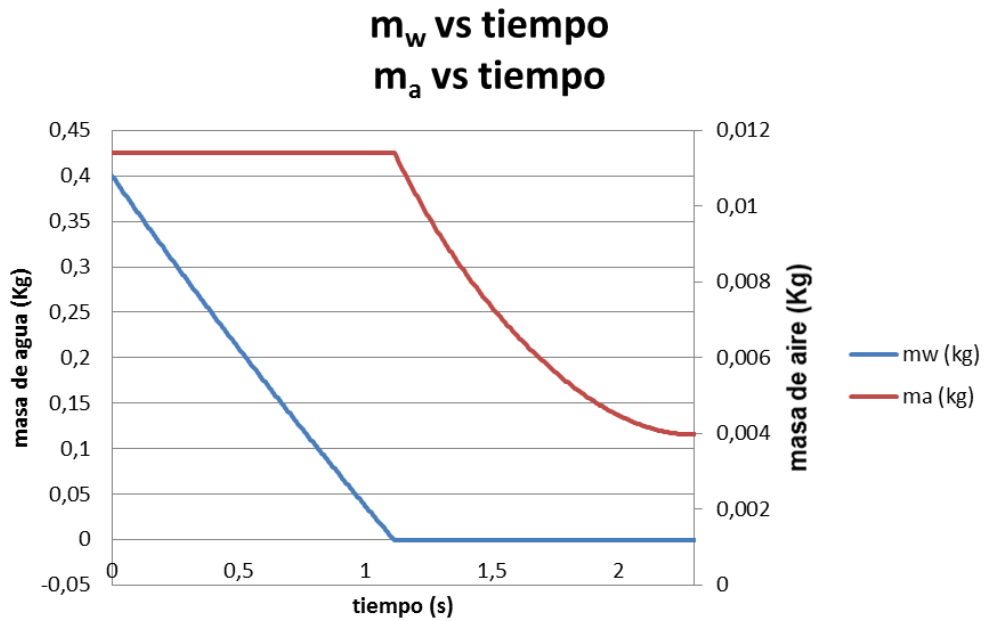


Figura 31 Masa de agua y aire frente al tiempo para el caso de altura máxima

Caso velocidad máxima:

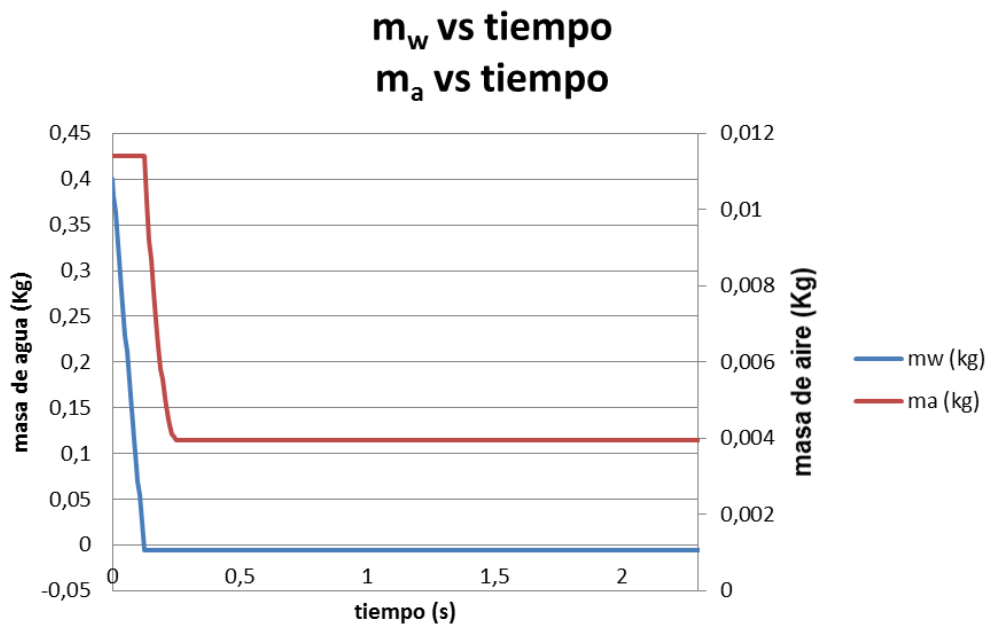


Figura 32 Masa de agua y aire frente al tiempo para el caso de velocidad máxima

El proceso de empuje (fuerza de empuje) realizado por la cantidad de movimiento de los fluidos salientes en el caso de velocidad máxima se realiza en un tiempo casi 8 veces inferior al proceso de altura máxima,

esto hace que no exista más fuerza de empuje el resto del tiempo y por eso no alcance más altura.

- En segundo lugar se va a proceder a comparar el gasto de agua y la posición frente al tiempo, para poder observar el avance del cohete en función del gasto de agua en el tiempo y entre ambos casos las alturas máximas alcanzadas.

Caso altura máxima:

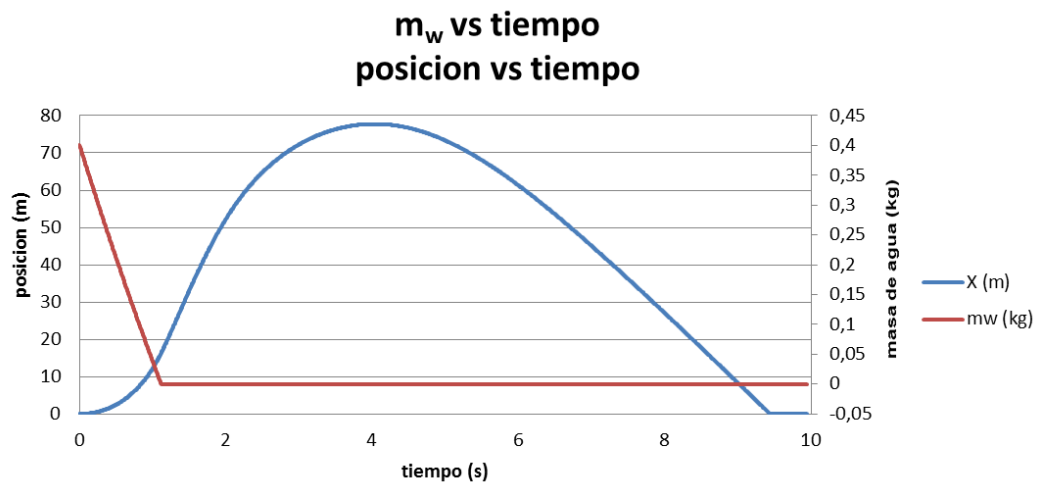


Figura 33 Masa de agua y posición frente al tiempo para el caso de altura máxima

Caso velocidad máxima:

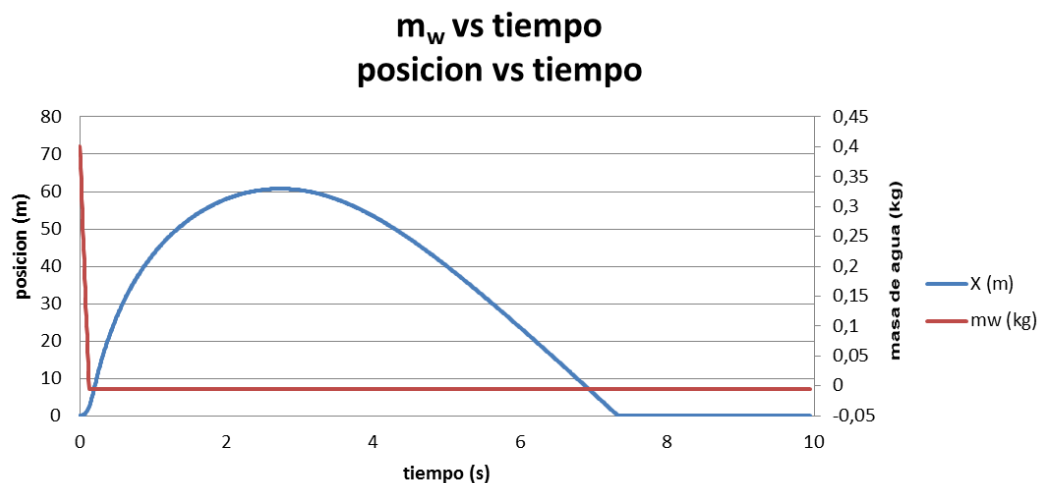


Figura 34 Masa de agua y posición frente al tiempo para el caso de velocidad máxima

En la gráfica se observa que, en el caso de la velocidad máxima se alcanzan antes unas posiciones más elevadas, pero esto conlleva que el vuelo es más rápido, y por tanto, al gastarse el agua más rápido también es más bajo.

- En tercer lugar se comparará la aceleración y la velocidad frente al tiempo:

Caso altura máxima:

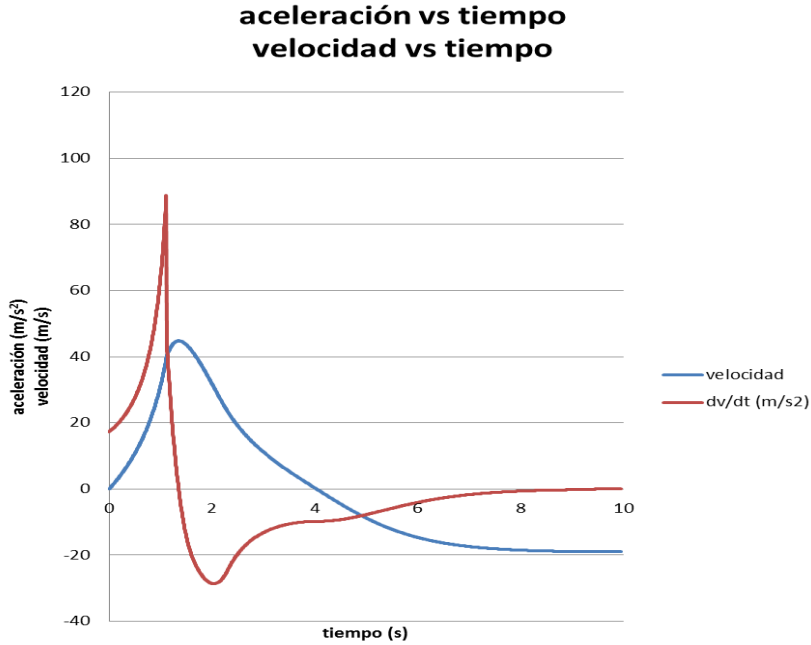


Figura 35 Aceleración y velocidad frente al tiempo para el caso de altura máxima

Caso velocidad máxima:

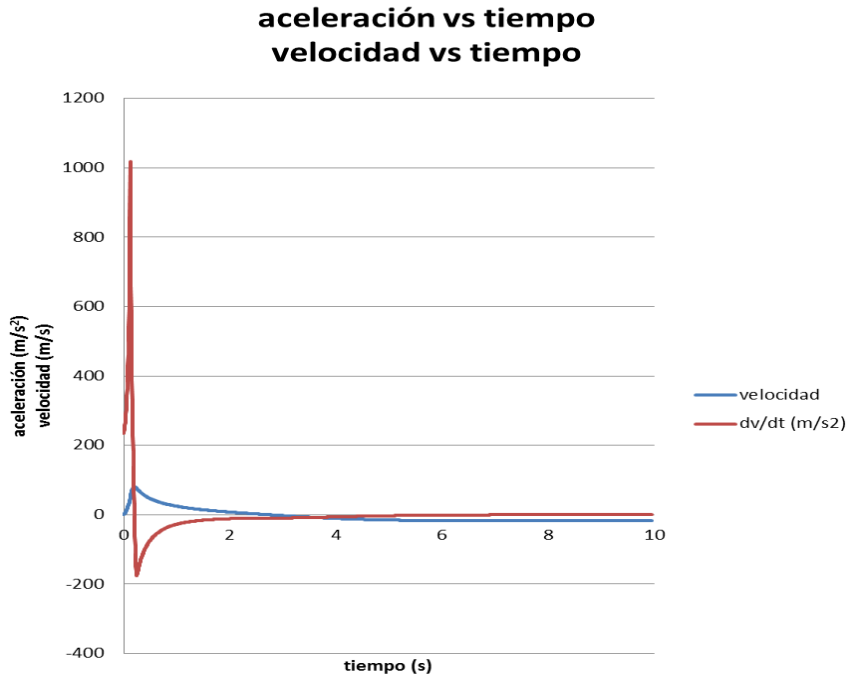


Figura 36 Aceleración y velocidad frente al tiempo para el caso de velocidad máxima

Para el caso de máxima velocidad, la gráfica tiene un orden superior, debido a que el empuje es mucho más elevado, y la aceleración máxima también en casi 10 veces superior pero debido a que esta aceleración es imposible de mantenerse más que un instante, la altura máxima alcanzada es inferior.

- Por último, se comparara la posición y la velocidad del cohete frente al tiempo:

Caso altura máxima:

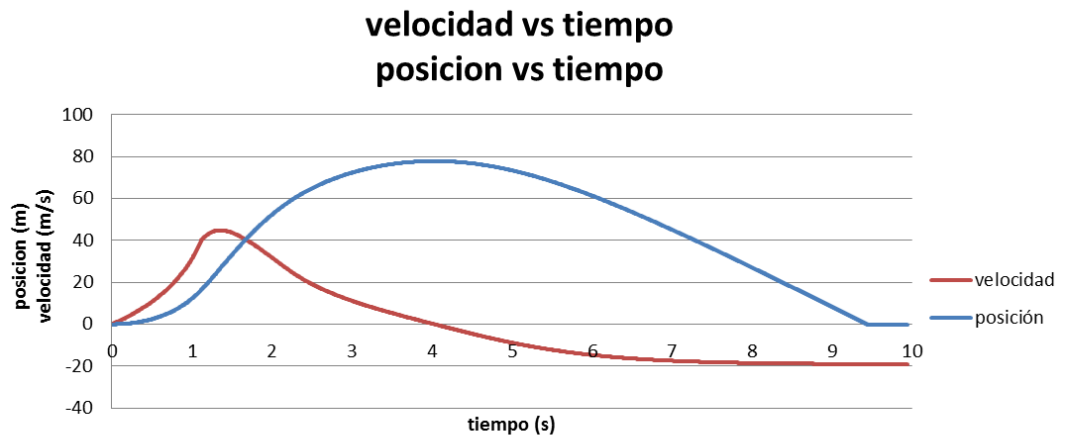


Figura 37 Velocidad y posición frente al tiempo para el caso de altura máxima

Caso velocidad máxima:

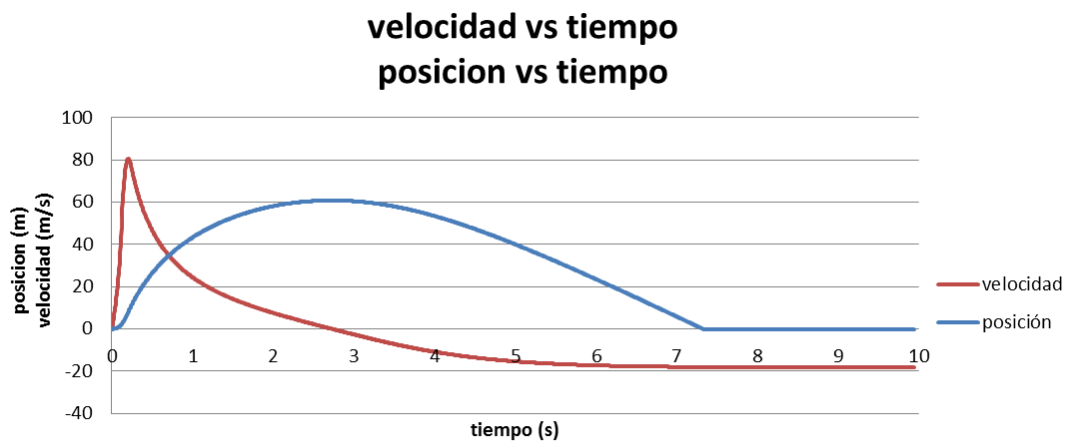


Figura 38 Velocidad y posición frente al tiempo para el caso de velocidad máxima

Esta última comparación gráfica explica perfectamente las diferencias entre ambos casos. En el caso buscado de altura máxima, la velocidad aumenta de manera progresiva y “lenta” (comparado con el otro caso), mientras que en el caso de velocidad máxima, la velocidad máxima se

alcanza antes de alcanzar los “10” metros y antes del medio segundo, por ello la energía cinética obtenida en ese instante no es capaz de elevar el cohete tanto como en el otro caso.

4.2.- JUSTIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS

Tras la realización del estudio paramétrico, se procede a realizar la comprobación de cada uno de los parámetros por separado, manteniendo el resto constantes. El coeficiente de arrastre obtenido de manera experimental se mantiene constante siempre después del estudio experimental. De esta manera se puede apreciar si nos encontramos en el mejor caso.

4.2.1.- Diámetro de salida

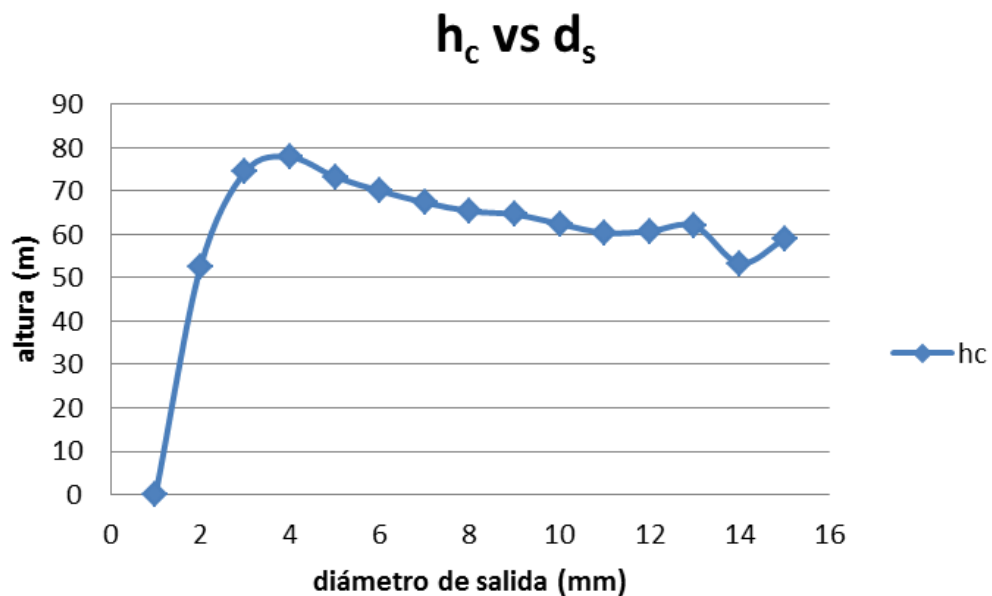
Para la comprobación del diámetro de salida se realiza el estudio con los siguientes parámetros constantes:

- Presión del aire $P = 6$ bar
- Volumen inicial de agua $V_{0,w} = 0.4$ l

Con estos valores fijos, se obtiene un valor para la altura en función del diámetro de salida:

Altura	Diámetro	Volumen de agua	Presión
h_c (m)	d_s (mm)	$V_{0,w}$ (l)	P (bar)
0	1	0,4	6
52,5492489	2	0,4	6
74,4731946	3	0,4	6
77,7572335	4	0,4	6
73,2235519	5	0,4	6
69,9974041	6	0,4	6
67,3276233	7	0,4	6
65,35646	8	0,4	6
64,5848772	9	0,4	6
62,3914864	10	0,4	6
60,3367784	11	0,4	6
60,7485629	12	0,4	6
61,9151124	13	0,4	6
53,3191752	14	0,4	6
59,0019548	15	0,4	6

Representándolos gráficamente se aprecia como varía la altura en función del diámetro de salida, observando cual es el máximo:



En la gráfica, al igual que en la tabla, se observa que el valor máximo para la altura corresponde con el diámetro de salida:

$$d_s = 4 \text{ mm}$$

Este diámetro es el obtenido en el estudio paramétrico. No se pueden utilizar diámetros mayores de 15 mm debido a las dimensiones del tapón de la botella.

Para diámetros inferiores a 3 mm, la fuerza de empuje producida por el agua durante el principio de la salida de esta no es la suficiente como para elevar el cohete hasta que alcanza un volumen de agua en el interior inferior, esto hace que la altura máxima alcanzada sea mucho menor.

4.2.3.- Volumen inicial de agua

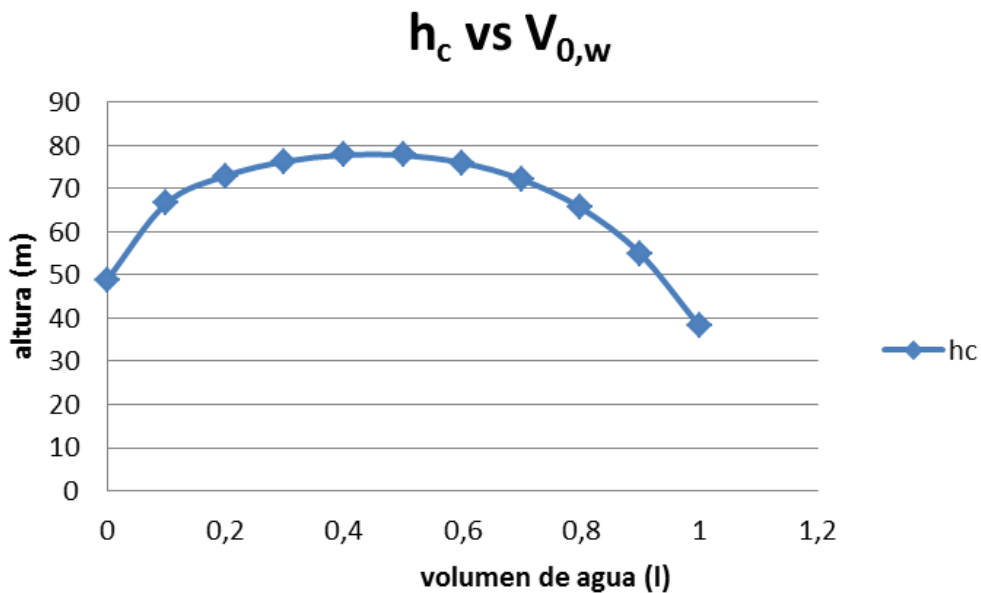
Para la comprobación del volumen inicial de agua se mantendrán los siguientes parámetros constantes:

- Presión del aire $P = 6 \text{ bar}$
- Diámetro de salida $d_s = 4 \text{ mm}$

Con estos valores fijos, se obtiene un valor para la altura en función del volumen inicial de agua:

Altura	Diámetro	Volumen de agua	Presión
h_c (m)	d_s (mm)	$V_{0,w}$ (l)	P (bar)
48,906922	4	0	6
66,5710433	4	0,1	6
72,9130409	4	0,2	6
76,2605711	4	0,3	6
77,7572335	4	0,4	6
77,717979	4	0,5	6
75,9420769	4	0,6	6
72,1026805	4	0,7	6
65,5220523	4	0,8	6
54,9777007	4	0,9	6
38,2351931	4	1	6

Representándolos gráficamente se aprecia como varía la altura en función del volumen inicial de agua, observando cual es el máximo:



En la gráfica, al igual que en la tabla, se observa que el valor máximo para la altura corresponde con el volumen de agua inicial:

$$V_{0,w} = 0.4 \text{ l}$$

Este volumen es el obtenido en el estudio paramétrico. Para volúmenes superiores a 1 litro, el agua ocupa más volumen que el aire, siendo el aire el que realiza la mayor parte del empuje. Debido a esta gran cantidad de agua, la altura máxima obtenida es menor, ya que, al existir una gran cantidad de agua, el cohete tendría demasiada masa para poder ascender con la fuerza de empuje que proporciona ese chorro de agua (con la tobera de salida existente).

Para vuelos con un volumen de agua inferior al óptimo, la altura es menor. Esto es debido al rendimiento proporcionado por la fuerza de empuje del aire. Si el aire sale demasiado pronto (con una velocidad muy baja), su rendimiento también es muy bajo, ya que la velocidad de salida del aire es muy elevada. Esto implica una altura máxima menor.

4.2.1.- Presión inicial

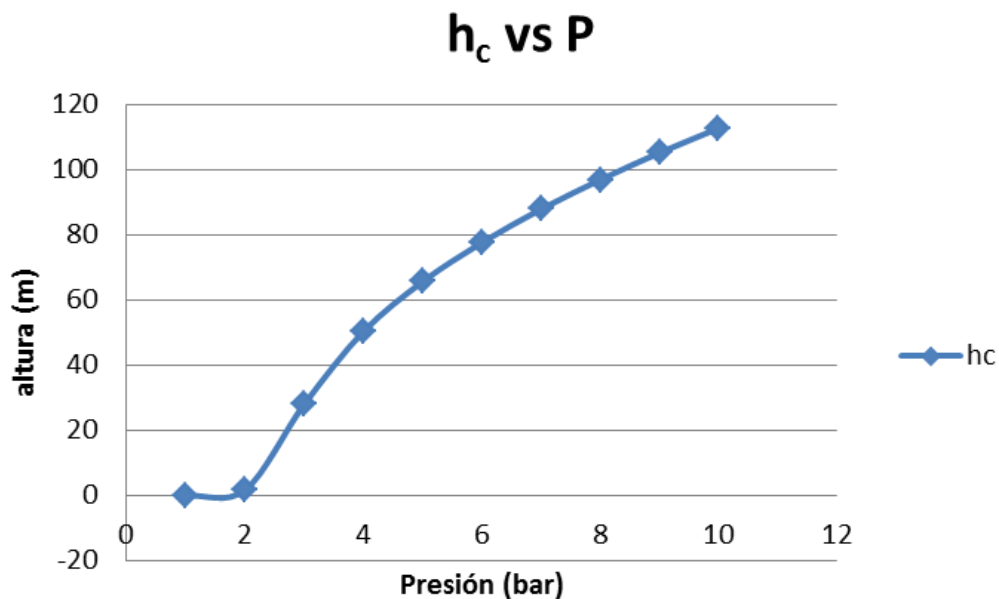
Para la comprobación del volumen inicial de agua se mantendrán los siguientes parámetros constantes:

- Volumen inicial de agua $V_{0,w} = 0.4$ l
- Diámetro de salida $d_s = 4$ mm

Manteniendo estos valores fijos, se obtiene un valor para la altura en función la presión inicial del aire (presión del interior):

Altura	Diámetro	Volumen de agua	Presión
h_c (m)	d_s (mm)	$V_{0,w}$ (l)	P (bar)
0	4	0,4	1
1,740352352	4	0,4	2
28,04938782	4	0,4	3
50,4142506	4	0,4	4
65,73871504	4	0,4	5
77,75723352	4	0,4	6
88,0248567	4	0,4	7
97,04302777	4	0,4	8
105,3663796	4	0,4	9
112,919126	4	0,4	10

Representándolos gráficamente se aprecia como varía la altura en función de la presión del aire, observando cual es el máximo:



En este caso se observan 2 cosas. En primer lugar, para presiones en el interior inferiores a 2 bar, la botella no asciende debido a que no se produce una fuerza de empuje lo suficientemente elevada como para mover la botella. En segundo lugar, la presión altura alcanzada aumenta a la vez que aumente la presión del aire (presión del interior). Como la presión en el interior no puede exceder unos valores máximos que soporta la botella, la presión óptima es la máxima permitida.

4.3.- JUSTIFICACIÓN PROCESO ESTACIONARIO

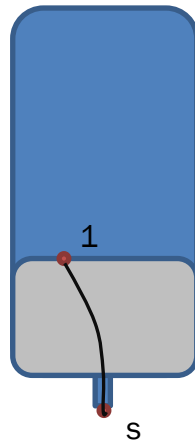
Es necesario justificar que el proceso es estacionario ya que esta hipótesis se ha utilizado constantemente durante todos los cálculos llevados a cabo en el desarrollo teórico. Entre los usos de esta hipótesis está el de utilizar la ecuación de Bernoulli y despreciar ciertos términos no estacionarios en otras ecuaciones.

En primer lugar para calcular la velocidad a la salida aplicamos la ecuación (2):

Esta ecuación se aplica de la misma manera que en el desarrollo teórico.

Se aplicará entre un punto de la superficie del líquido "1", donde, sí se supone que es estacionario, la velocidad del líquido en la superficie es 0 y el otro la salida "s", si tomamos como origen de potenciales de fuerzas másicas

en el centro de la salida del chorro, con un espesor mucho menor que el nivel de agua de la botella.



Aplicamos la ecuación (2):

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + U_1 = \frac{P_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + U_s$$

Donde despejando la velocidad a la salida:

$$v_s = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{P_1 - P_s}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot z_1 \right)}$$

En la ecuación v_1 es 0, el potencial a la salida es 0 ya que es el origen de potenciales y el potencial en "1" es $U_1 = g \cdot z_1$, siendo z_1 la altura del agua en el interior "h", la presión en el interior es la considerada en el posterior estudio paramétrico (en este caso probaremos con varias), la presión a la salida es la atmosférica y queremos obtener la velocidad a la salida " v_s ". La presión en el punto 1 equivale a la presión en el interior $P_0 = P_1$.

$$v_s = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{P_0 - P_s}{\rho_w} \right) + 2 \cdot g \cdot h}$$

Y para la botella, tenemos un diámetro medio de $D_m = 0,1$ m lo que nos da el valor de h_0 . Para un valor de $P_0 = 6$ bar y un volumen inicial de agua $V_0 = 0,4$ l (da una altura $h_0 = 0,0509$ m), nos da un valor de la velocidad a la salida:

$$v_s = 31,638 \text{ m/s}$$

Una vez obtenida la velocidad de salida, se aplica la ecuación (1) a la botella para calcular la evolución del nivel del agua (A_1 es el área media de la botella y A_s el área de salida), que despejándola queda.

$$A_1 \cdot \frac{dh}{dt} = -Q_s = -A_s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h + 2 \cdot \left(\frac{P_0 - P_s}{\rho_w}\right)}$$

Como es un proceso adiabático (la altura total del recipiente es H)

$$P_{0i} \times V_{0i}^\gamma = cte = P_0 \times V_0^\gamma$$

$$V_{0,a} = A_1 \times (H - h)$$

Y despejando P_0 en función del resto obtenemos la siguiente ecuación:

$$A_1 \times \frac{dh}{dt} = -Q_s = -A_s \times \sqrt{2 \times g \times h + 2 \times \left(\frac{\frac{P_0 V_{0i}^\gamma}{A_1^\gamma (H-h)^\gamma} - P_s}{\rho_w}\right)}$$

Donde se obtiene una ecuación muy difícil de resolver de manera teórica, por lo que, se procede a su resolución de manera iterativa mediante una hoja de cálculo por el método de Euler ya explicado en la parte teórica.

Tras su resolución, se obtienen los siguientes datos:

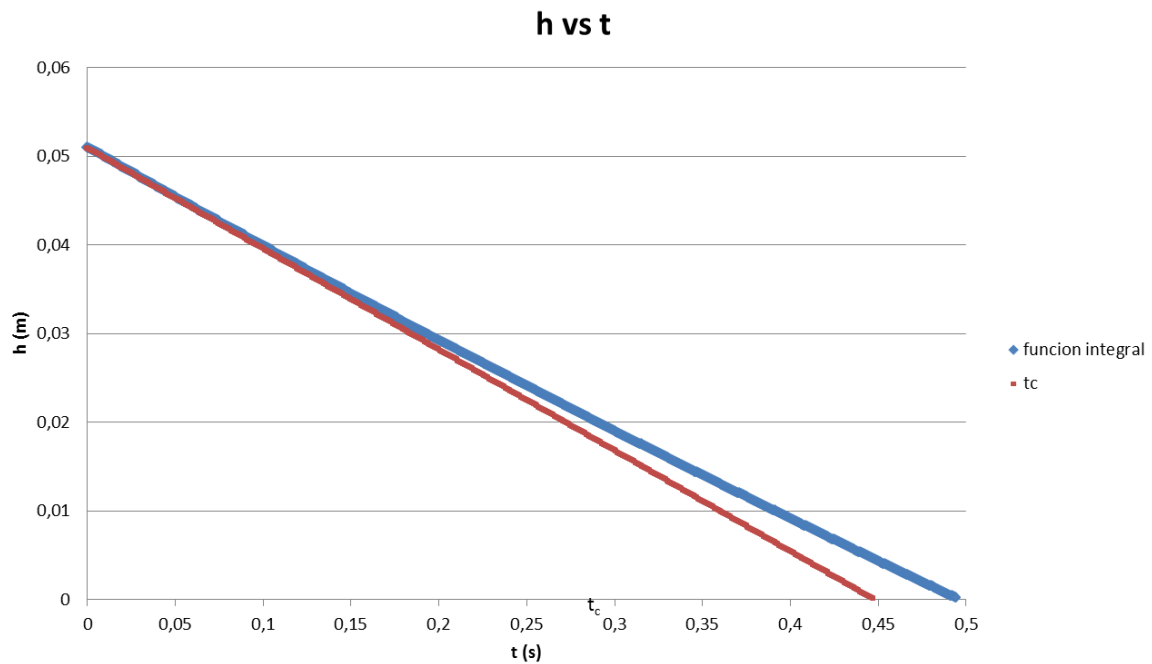


Figura 39 Altura del agua frente al tiempo y recta de tiempo característico

A continuación se muestra la misma gráfica de antes, únicamente con la altura en función del tiempo y una recta para comprobar que la variación de la altura no es lineal

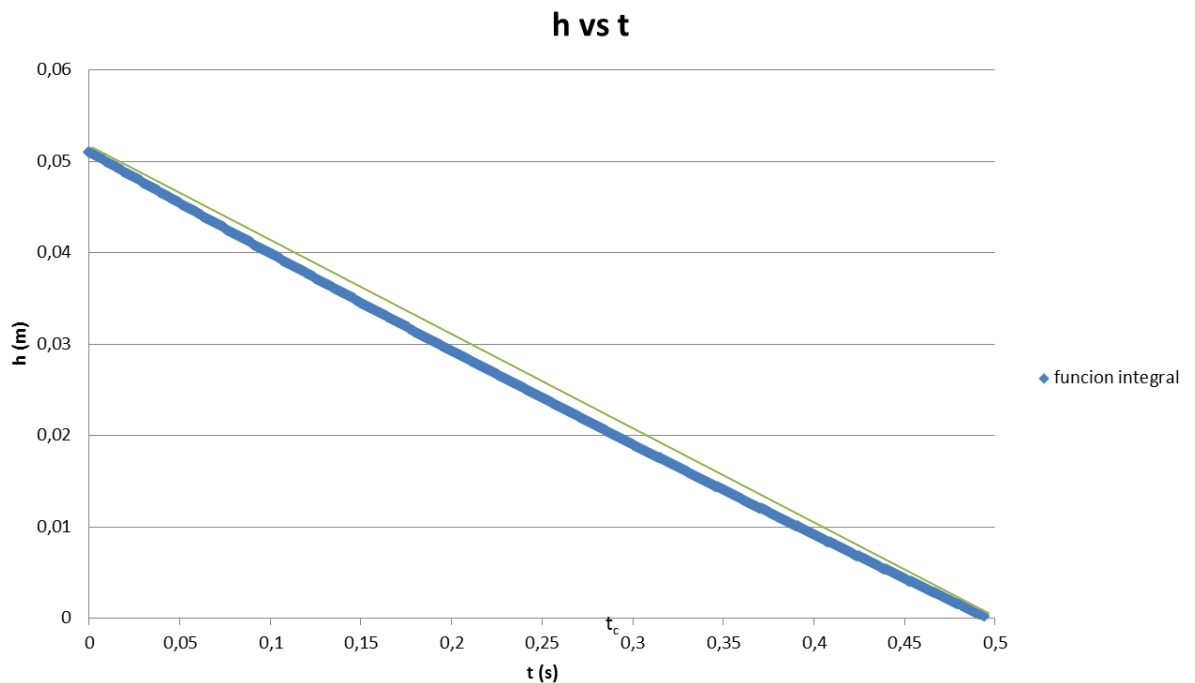


Figura 40 Altura de agua frente al tiempo y recta

Como se puede apreciar en esta segunda gráfica, la altura del agua comienza a disminuir a una velocidad y esta velocidad va disminuyendo más lentamente con el tiempo debido a que la presión en el interior de la botella disminuye.

En la primera gráfica se observa el tiempo característico de vaciado, siendo este el punto en el que la tangente a la curva en el instante $t = 0$ s corta con el eje x (función roja).

Obteniendo un valor de tiempo característico (para el caso estudiado, obtenido mediante el estudio paramétrico) de:

$$t_c \cong 0,447 \text{ s}$$

Para justificar que el proceso puede considerarse como un proceso estacionario, se necesita que:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{v}{t_c} \ll \frac{v^2}{t_c} \sim \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Donde l_c es la longitud típica en torno al orificio donde se cumpla que la v es distinta de 0. Como el orificio de salida es cilíndrico, $l_c \sim D_s$ (en este caso

haremos un estudio con distintos diámetros de salida (para el estudio paramétrico, y también repetiremos el proceso con distintos volúmenes iniciales de agua). La condición es equivalente a:

$$t_c \gg \frac{l_c}{v} = t_r$$

Tomaremos para este caso la velocidad típica como la mitad de la velocidad máxima de salida en el instante inicial.

$$t_c \gg \frac{l_c}{v} = 0,000253 \text{ s}$$

El estudio ha sido realizado para todos los posibles casos obteniendo en todos unos valores de tiempo crítico de un orden muy superior al tiempo de transición.

Por todo esto, se considera que el proceso es estacionario, y se pueden aplicar todas las suposiciones y las ecuaciones de Bernoulli.

Para justificar que el flujo es ideal, habría que comprobar que satisface la condición de:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \gg 1$$

Condición que se cumple para todos los casos, obteniendo valores entre:

$$9 \times 10^4 \leq Re \leq 7,5 \times 10^5$$

5.- CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

5.1.- CONCLUSIONES

Se ha realizado un estudio de la utilización de una botella de plástico (de 2 litros de Coca Cola) como cohete propulsado por agua y aire comprimido. Se ha partido de la realización práctica del experimento para su optimización. Se ha insertado una válvula en el tapón para permitir la salida de los fluidos del interior. Se han variado varios parámetros (diámetro de salida, volumen inicial de agua, presión inicial del aire y ángulo del cono de la nariz) para conseguir el mejor estado. También se han imprimido varios conos para realizar un estudio aerodinámico en el túnel de viento para calcular la fuerza de arrastre. Con estos datos se obtienen una serie de conclusiones:

1º- El cono de nariz de 60º es más aerodinámico que el resto (aunque se pudiera esperar que fuese el de 30º), esto se debe a que el de 30º tiene una superficie de contacto con el fluido mucho mayor que en los otros. En el caso de 90º el ángulo es demasiado grande y el cuerpo presenta una superficie demasiado roma a la corriente.

2º- La máxima altura alcanzada es para el menor diámetro de salida (de entre los estudiados), sin existir una gran diferencia para los distintos volúmenes de agua inicial (con ese diámetro). Esto se debe a que el diámetro de salida influye en la velocidad en la que se gasta el agua, si el gasto es demasiado rápido, el rendimiento que tiene es muy bajo, obteniendo un empuje total menor del que se obtiene con un diámetro menor.

3º- Se puede considerar que el vaciado del agua es un proceso estacionario como se ha demostrado.

4º- El pequeño error que se produce al integrar las ecuaciones con el método de Euler se puede considerar despreciable utilizando un paso de integración suficientemente pequeño como se ha demostrado.

5º- Con los números de Reynolds posibles del túnel de viento que se ha utilizado, el coeficiente de arrastre obtenido se encuentra en la zona plana de la curva, por lo que el Reynolds es despreciable.

6º- En el caso del vuelo real, seguramente aparecerá un pequeño viento lateral, que generará una fuerza de sustentación, que haría que los resultados difirieran de los estudiados en este trabajo.

5.2.- TRABAJOS FUTUROS

Tras la realización de este estudio se logra un diseño teórico del vuelo de un cohete diseñado con una botella utilizando agua y aire a presión. También se utiliza un cono de la nariz para obtener una mejor aerodinámica a la hora del vuelo.

Pero estas no son las únicas opciones que tiene el cohete para su diseño, sino que también se podrían añadir otras mejoras para conseguir una mayor altura y estabilidad.

Por ejemplo:

- Introducir alas para evitar posibles desvíos en el vuelo (habría que introducir una fuerza de arrastre adicional debido a las alas).
- Colocar un contrapeso en el interior del cono para comprobar si ayuda a la estabilización del cohete (el cohete tendría una masa mayor).
- Añadir un dispositivo mecánico y electrónico que controlase el diámetro de salida.

6.- ESTUDIO ECONÓMICO

A continuación se incluye un breve estudio económico de los costes que ha tenido el proyecto, únicamente han sido por parte de la impresión del modelo para realizar los ensayos en el túnel de viento.

7.- BIBLIOGRAFÍA

Universidad de educación a distancia (UNED) – Área de mecánica de fluidos [Online]; Available from: <http://www2.uned.es/ing-fluidos/>

Administración Nacional de la Aeronáutica y del espacio (NASA) – Space Flight System; Available from: <https://spaceflightsystems.grc.nasa.gov>

Antonio Crespo - Mecánica de fluidos

P. Gerhart; R. Gross; J. Hochstein - Fundamentos de mecánica de fluidos

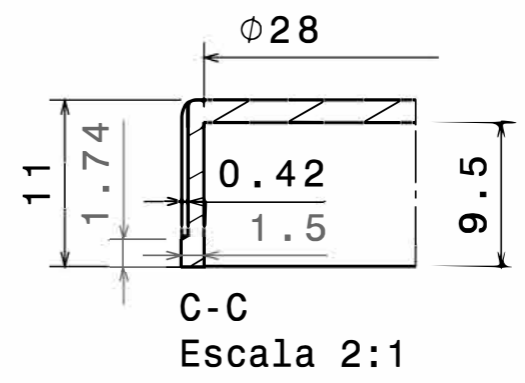
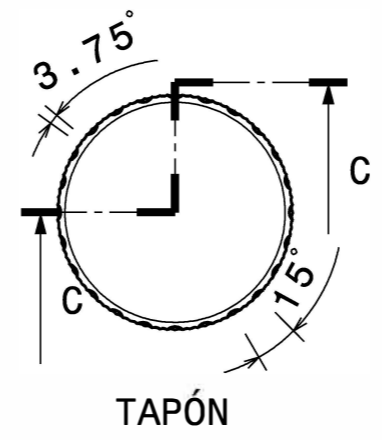
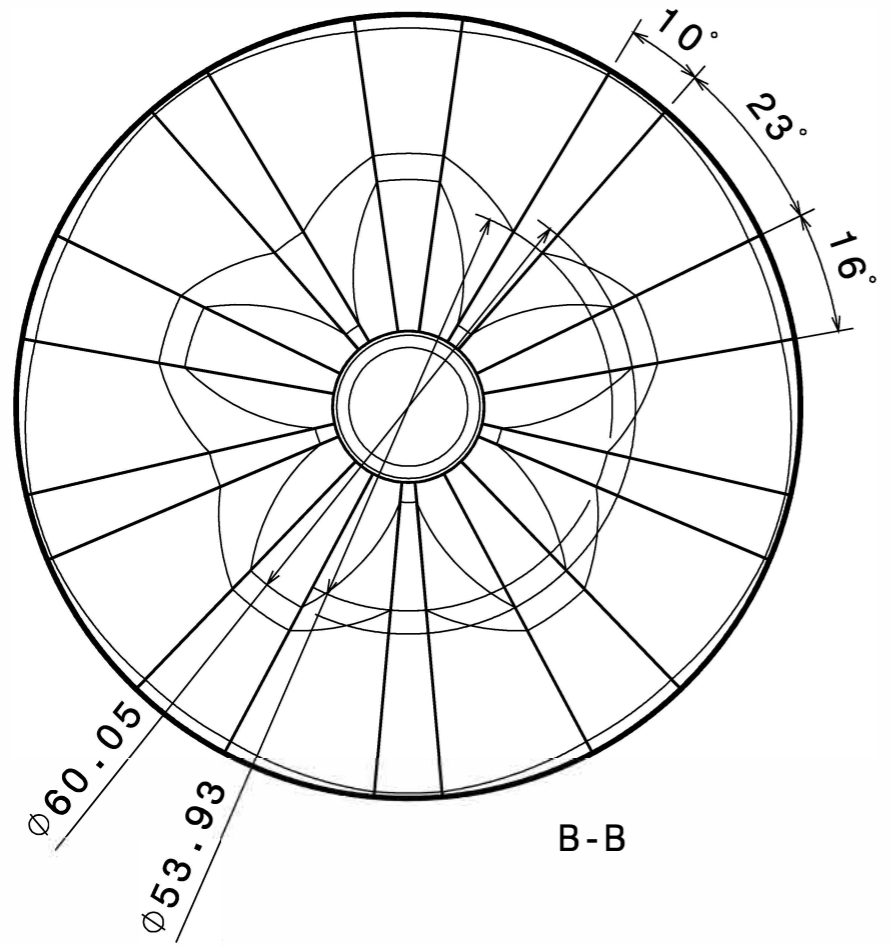
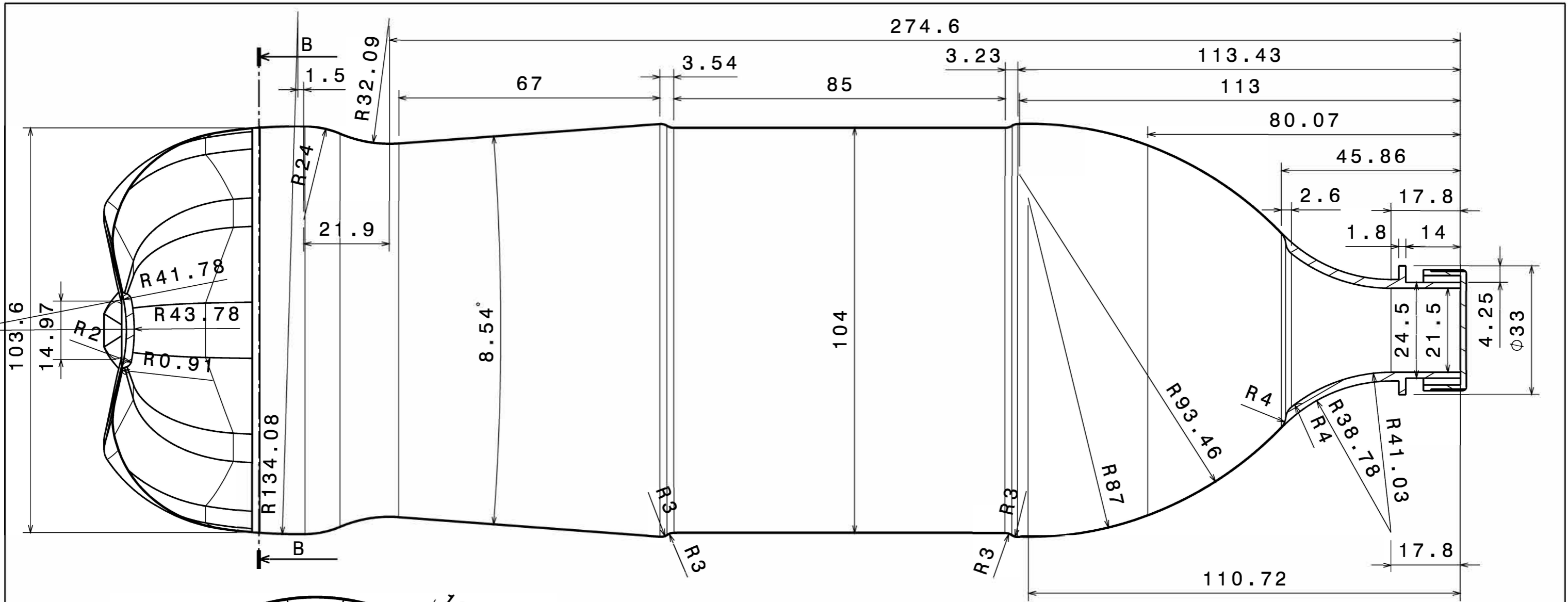
8.- AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, dar las gracias a Andrés Melgar Bachiller por ayudarme en la elección e inicio del proyecto. También dar las gracias a César Méndez Bueno por ocuparse de la supervisión del proyecto, por resolverme las dudas que me han surgido, por ayudar cuando fue necesario.

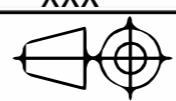
En general, a la familia por su paciencia y apoyo recibido en todo momento.

9.- ANEXOS

9.1.- PLANO BOTELLA

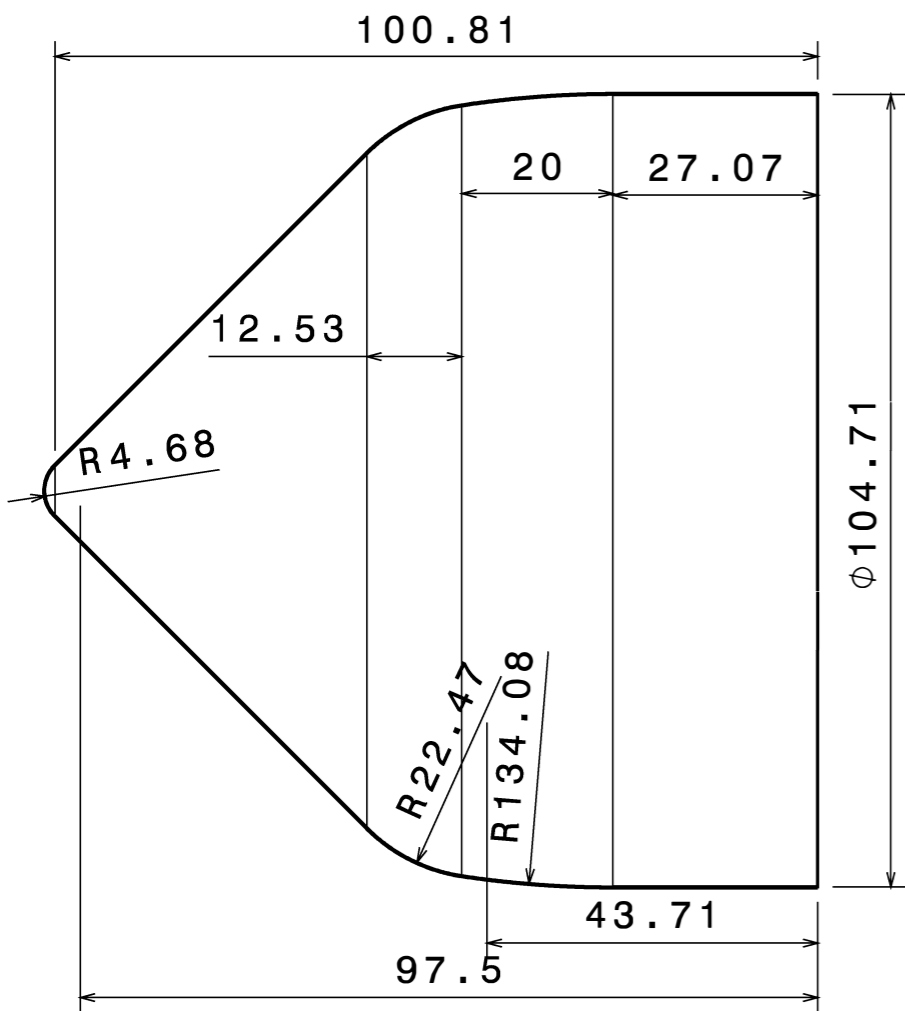


Todo el espesor no acotado es de 0,2 mm

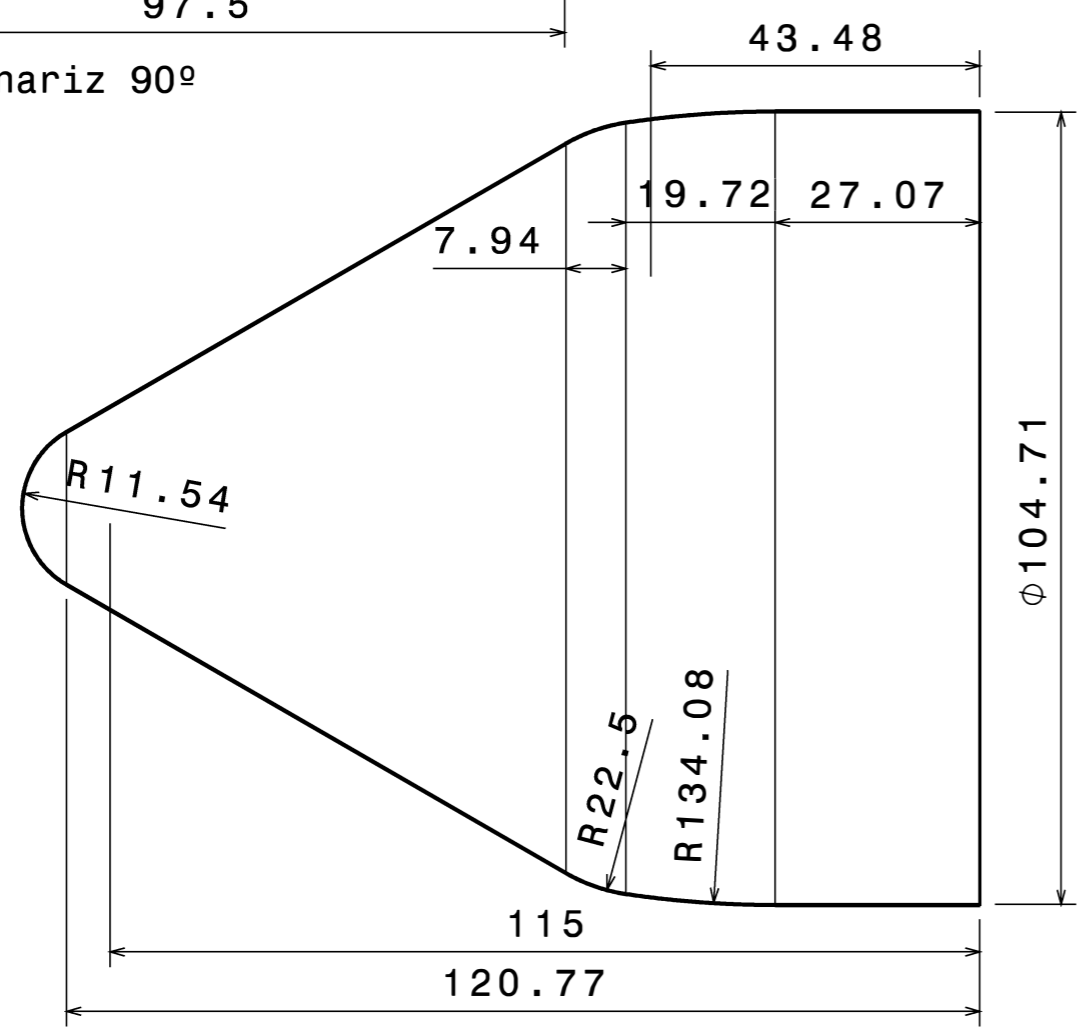
DESIGNED BY: Alejandro			
DATE: 02/06/2018			
CHECKED BY: XXX			
DATE: XXX			
SIZE A3		E.I.I. UVa	
SCALE 1:1		DRAWING NUMBER	Botella
			SHEET 1/1

This drawing is our property; it can't be reproduced or communicated without our written agreement.

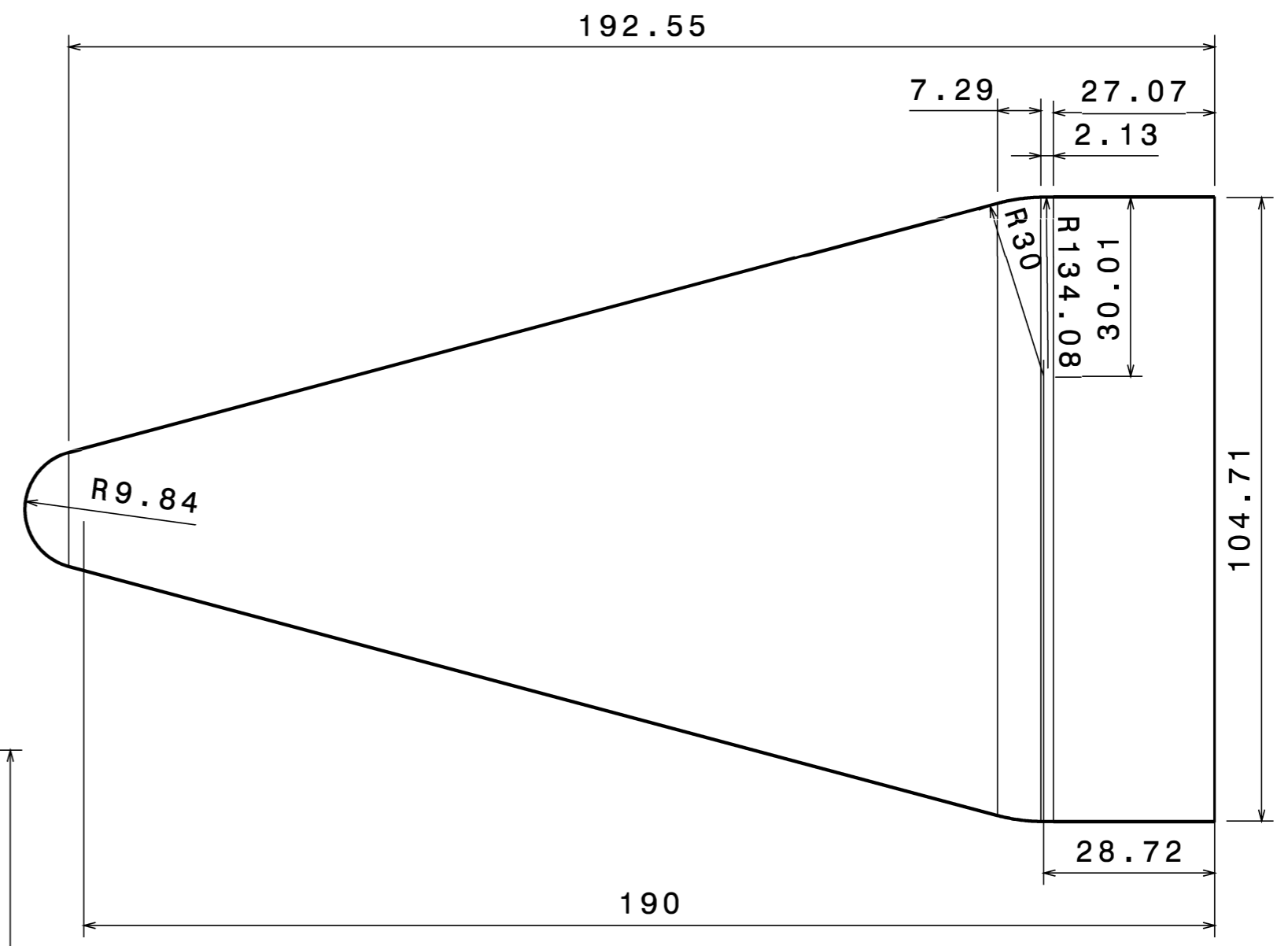
9.2.- PLANO CONOS DE LA NARIZ



Cono de nariz 90°

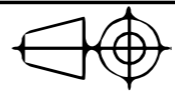


Cono de nariz 60°



Cono de nariz 30°

Todos los espesores tienen un valor de 0,162 mm

DESIGNED BY: Alejandro			
DATE: 02/06/2018			
CHECKED BY: XXX			
DATE: XXX			
SIZE A3		E.I.I. UVa	
SCALE 1:1		DRAWING NUMBER Sección conos de nariz	SHEET 1/1

This drawing is our property; it can't be reproduced or communicated without our written agreement.

9.3.- ESTUDIO PARAMÉTRICO

A continuación se muestran todos los resultados del estudio paramétrico realizado.

α (°)	60	60	60
d_s (mm)	4	4	4
$V_{0,w,i}$ (l)	0,4	0,4	0,4
$P_{0,i}$ (bar)	4	5	6
$H_{c,max}$ (m)	50,4142506	65,738715	77,7572335
$v_{c,max}$ (m/s)	30,1764721	38,3383225	44,7897252
Re	2,09E+05	2,66E+05	3,11E+05
C_d	0,2882	0,2882	0,2882

α (°)	60	60	60
d_s (mm)	4	4	4
$V_{0,w,i}$ (l)	0,5	0,5	0,5
$P_{0,i}$ (bar)	4	5	6
$H_{c,max}$ (m)	47,1813625	64,55706681	77,71797899
$v_{c,max}$ (m/s)	27,6265949	36,11594064	43,06841639
Re	1,92E+05	2,50E+05	2,99E+05
C_d	0,2882	0,2882	0,2882

α (°)	60	60	60
d_s (mm)	4	4	4
$V_{0,w,i}$ (l)	0,6	0,6	0,6
$P_{0,i}$ (bar)	4	5	6
$H_{c,max}$ (m)	40,3953318	61,2091319	75,9420769
$v_{c,max}$ (m/s)	23,9112158	33,2192676	40,4211063
Re	1,66E+05	2,30E+05	2,80E+05
C_d	0,2882	0,2882	0,2882

DISEÑO Y ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE UN COHETE PROPULSADO POR AIRE A PRESIÓN

α (°)	60	60	60
d_s (mm)	8	8	8
$V_{0,w,i}$ (l)	0,4	0,4	0,4
$P_{0,i}$ (bar)	4	5	6
$H_{c,max}$ (m)	48,6149891	57,7095093	65,35646
$v_{c,max}$ (m/s)	47,9823032	59,3864324	68,4704781
Re	3,33E+05	4,12E+05	4,75E+05
C_d	0,2882	0,2882	0,2882

α (°)	60	60	60
d_s (mm)	8	8	8
$V_{0,w,i}$ (l)	0,5	0,5	0,5
$P_{0,i}$ (bar)	4	5	6
$H_{c,max}$ (m)	48,4699714	58,1993995	65,8423345
$v_{c,max}$ (m/s)	47,0850353	57,194946	66,5211066
Re	3,26E+05	3,97E+05	4,61E+05
C_d	0,2882	0,2882	0,2882

α (°)	60	60	60
d_s (mm)	8	8	8
$V_{0,w,i}$ (l)	0,6	0,6	0,6
$P_{0,i}$ (bar)	4	5	6
$H_{c,max}$ (m)	47,6573075	57,6704456	64,6677161
$v_{c,max}$ (m/s)	44,9014608	55,0267043	65,3318984
Re	3,11E+05	3,82E+05	4,53E+05
C_d	0,2882	0,2882	0,2882

α (°)	60	60	60
d_s (mm)	12	12	12
$V_{0,w,i}$ (l)	0,4	0,4	0,4
$P_{0,i}$ (bar)	4	5	6
$H_{c,max}$ (m)	45,5273273	54,5383456	60,7485629
$v_{c,max}$ (m/s)	57,8047619	68,243181	80,4321181
Re	4,01E+05	4,73E+05	5,58E+05
C_d	0,2882	0,2882	0,2882

α (°)	60	60	60
d_s (mm)	12	12	12
$V_{0,w,i}$ (l)	0,5	0,5	0,5
$P_{0,i}$ (bar)	4	5	6
$H_{c,max}$ (m)	46,4655747	54,8080395	61,4773923
$v_{c,max}$ (m/s)	53,1063735	65,8799985	77,1822157
Re	3,68E+05	4,57E+05	5,35E+05
C_d	0,2882	0,2882	0,2882

α (°)	60	60	60
d_s (mm)	12	12	12
$V_{0,w,i}$ (l)	0,6	0,6	0,6
$P_{0,i}$ (bar)	4	5	6
$H_{c,max}$ (m)	44,9763469	53,6602707	59,6968523
$v_{c,max}$ (m/s)	52,5851549	64,3610242	76,3285908
Re	3,65E+05	4,46E+05	5,29E+05
C_d	0,2882	0,2882	0,2882