Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Continuidad de las raíces de un polinomio en función de sus coeficientes

Autor: Inés Calzada González

Tutor: Jesús M. Domínguez Gómez

Índice general

Introducción

Inicialmente, el objetivo de este Trabajo Fin de Grado era examinar diferentes demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra, y completarlo con el estudio de la continuidad de las raíces de un polinomio en función de sus coeficientes siguiendo la exposición de [CG]. Sin embargo, una vez que comenzamos a trabajar con el artículo citado, observamos que su comprensión requería mucho más esfuerzo del inicialmente previsto, debido a que en muchas ocasiones, y a lo largo de todo el artículo, los autores solo dan pistas al lector de cómo se debería llevar a cabo la prueba de determinadas afirmaciones. Es por ello que decidimos cambiar el enfoque del trabajo y centrarnos en la correcta comprensión del artículo, explicando con detalle aquellas demostraciones para las que los autores solo dan pistas, y limitándonos a incluir solo dos demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra, una de ellas en forma muy resumida ya que es la que, con carácter general, se ve en el Grado de Matemáticas.

Puesto que nuestro objetivo principal pasó a ser el artículo [CG], vamos a resumir ahora la idea, ciertamente ingeniosa, que desarrollan los autores. Queremos no obstante advertir que la demostración tradicional de este resultado se basa en el Teorema de Rouché (véase [GJ]). La demostración de [CG] es más bien de naturaleza topológica, y guarda cierta semejanza con la expuesta en [HM 1]. Planteado el teorema a resolver, surge el problema de la ordenación de las raíces, es por ello que Cucker y González introducen la relación de equivalencia dada por el grupo simétrico S_n. A continuación, el problema pasa a ser la prueba de que una función, construida a partir de dicha relación de equivalencia, es un homeomorfismo. La comprobación de que su inversa es continua es difícil de probar directamente, y por ello buscan una extensión suya definida en un espacio compacto y con llegada en un espacio de Hausdorff, así bastará con ver que es una biyección continua para concluir que es un homeomorfismo.

El primer capítulo es de naturaleza técnica o auxiliar, en él incluimos las demostraciones de resultados que necesitamos posteriormente. En particular, vemos en qué condiciones el producto de dos aplicaciones cociente es una aplicación cociente. Después vemos la descomposición canónica de una aplicación continua, prestando especial interés a las condiciones que garantizan que las restricciones de ciertas aplicaciones cociente son también aplicaciones cociente. Además, recordamos la definición del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ y probamos propiedades que necesitamos en el capítulo 2.

El segundo capítulo es el capítulo central de esta memoria, y en él llevamos a cabo la prueba de la continuidad de las raíces de un polinomio en función de sus coeficientes siguiendo [CG]. Para ello necesitamos ver $\mathbb{C}^n$ inmerso en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, y hacer uso tanto de los polinomios simétricos elementales como de propiedades del espacio proyectivo probadas en el capítulo anterior.

Por último, en el apéndice exponemos las dos demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra que se suelen estudiar en el Grado de Matemáticas. La primera de ellas se estudia en la asignatura de Variable Compleja, y está basada en el Teorema de Liouville. La segunda se basa en el estudio del grado de una aplicación continua de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ y, a veces, se ve en la asignatura de Topología.

En general no incluimos las demostraciones que suelen formar parte de las asignaturas del Grado de Matemáticas pero, en ocasiones, recordamos las definiciones de ciertos conceptos.

Para simplificar, cuando no hay lugar a confusión, omitimos con frecuencia el símbolo de composición de aplicaciones, así como numerosos paréntesis.

Capítulo 1

Topología del espacio proyectivo complejo

El objetivo de este primer capítulo es el de hacer un repaso de ciertas nociones de Topología General. En particular, de la topología cociente y del espacio proyectivo complejo, incluyendo las demostraciones de varias propiedades que necesitaremos en el capítulo 2, que es el capítulo central de esta memoria.

Primero recordamos el concepto de aplicación cociente y vemos bajo qué condiciones el producto de dos aplicaciones cociente es una aplicación cociente.

Después hablamos de la descomposición canónica de una aplicación continua, poniendo énfasis en la descomposición canónica de la restricción de una aplicación de paso al cociente y viendo qué condiciones se tienen que dar para poder identificar un subespacio de un espacio cociente con el cociente de un subespacio del espacio en cuestión.

Por último, hacemos un breve repaso de lo que es el espacio proyectivo complejo y sus cartas afínes, y demostramos algunas de sus propiedades topológicas como la compacidad y la concidión de Hausdorff.

La bibliografía usada en este capítulo es [GH] y [Mu].

1.1. Primeras nociones

Comenzaremos enunciando brevemente algunos de los conceptos que iremos usando a lo largo de esta memoria.

Definición 1.1.1. *Sean X e Y espacios topológicos y sea $q : X \longrightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación q se dice que es una **aplicación cociente** si los abiertos de Y son exactamente los subconjuntos U de Y tales que $q^{-1}(U)$ es abierto de X.*

Definición 1.1.2. *Sea X un conjunto y sea R una relación de equivalencia en X. Se dice que un subconjunto A de X es **saturado** (para R) si para todo $a \in A$ y para todo $x \in X$ tal que xRa, se verifica que $x \in A$, es decir, si A es unión de clases de equivalencia. Obsérvese que, si denotamos por $p : X \longrightarrow X/R$ la aplicación de paso al cociente, entonces A es saturado (para R) si, y solo si, $A = p^{-1}p(A)$.*

Recordemos que toda aplicación continua y sobreyectiva que, además, sea abierta o cerrada, es una aplicación cociente.

A continuación enunciaremos uno de los teoremas más importantes en el estudio de los espacios cociente, y trata de cómo definir aplicaciones continuas sobre un espacio cociente. Este resultado, así como el siguiente, se prueba siempre en la asignatura de Topología de segundo curso.

Teorema 1.1.1. *Sea $q : X \longrightarrow Y$ una aplicación cociente. Sea Z un espacio topológico y sea $g : X \longrightarrow Z$ una aplicación que es constante sobre cada conjunto $q^{-1}(\{y\})$, para todo $y \in Y$. Entonces, se tiene que, g induce una aplicación $f : Y \longrightarrow Z$ tal que $f \circ q = g$. La aplicación inducida f es continua si, y solo si, g es continua. Además f es una aplicación cociente si, y solo si, g es una aplicación cociente.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Definición 1.1.3. *Se dice que un espacio es **localmente compacto** si cada punto posee un entorno compacto. Obsérvese que no exigimos que el espacio* *sea de Hausdorff.*

Compactificación de Alexandroff.
Sea X un espacio topológico que es de Hausdorff, localmente compacto y no compacto, y sea Y otro espacio topológico. Llamamos **compactificación de Alexandroff de X** a Y si:

- $X \subset Y$ y la topología de X es la de subespacio de Y.
- Y es compacto y de Hausdorff.
- $Y = X \cup \{p\}$, $p \notin X$.
- X es denso en Y, es decir, p no es un punto aislado.

Proposición 1.1.1. ***(Unicidad de la compactificación de Alexandroff).*** *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto que no es compacto. Si Y e Y' son dos compactificaciones de Alexandroff de X, entonces existe un único homeomorfismo $f : Y \longrightarrow Y'$ tal que $f|_X = id$.*

Tanto la existencia como la unicidad de la compactificación de Alexandroff se ven siempre en la asignatura de Topología de segundo curso.

Teorema 1.1.2. ***(Teorema de Tychonoff).*** *El producto finito de espacios compactos es compacto.*

Aunque el resultado anterior es cierto para cualquier producto de espacios compactos, hay años en los que en la asignatura de Topología de segundo curso solo se ha probado esta versión restringida, que es suficiente para nuestras necesidades.

Necesitaremos después un resultado sobre aplicaciones cociente que vamos a probar haciendo uso del Lema del tubo, que también se prueba en segundo curso.

Lema 1.1.1. ***(Lema del tubo).*** *Consideremos el espacio producto $X \times Y$, donde Y es compacto y sea $x_0 \in X$. Si N es un subconjunto abierto de $X \times Y$ que contiene a la recta $\{x_0\} \times Y$, entonces N contiene algún tubo $W \times Y$ alrededor de $\{x_0\} \times Y$, donde W es un entorno de x_0 en X.*

Queremos llamar la atención sobre el hecho de que el producto de dos aplicaciones cociente puede no ser una aplicación cociente. En teoría de homotopía se usa con frecuencia el siguiente resultado: Si $q : X \longrightarrow Y$ es una aplicación cociente, entonces $q \times id : X \times [0,1] \longrightarrow Y \times [0,1]$ también es una aplicación cociente. Con vistas al capítulo 2, necesitamos mejorar este resultado.

Teorema 1.1.3. *Sea $q : A \longrightarrow B$ una aplicación cociente y C un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces $q \times id : A \times C \longrightarrow B \times C$ también es una aplicación cociente.*

Demostración. Tenemos que probar que dado un $U \subseteq B \times C$, U es abierto si, y solo si, $V = (q \times id)^{-1}(U)$ es abierto de $A \times C$.

Como q es aplicación cociente entonces es continua y, por tanto, $q \times id$ también es continua, así pues, el hecho de que U es abierto en $B \times C$ implica que V es abierto de $A \times C$.

Para concluir bastará probar que si V es abierto en $A \times C$ entonces U es abierto en $B \times C$. Supongamos pues que V es abierto en $A \times C$. Probaremos que U es abierto en $B \times C$ viendo que es entorno de cada uno de sus puntos.

Sea $(b,c) \in U$. Elijamos $(a,c) \in V$ tal que $q(a) = b$, lo cual es posible ya que q es sobreyectiva por ser una aplicación cociente.

Como V es abierto y $(a,c) \in V$, entonces existen abiertos H_1 y H_2 de A y C, respectivamente, tal que $a \in H_1$, $c \in H_2$ y $(a,c) \in H_1 \times H_2 \subseteq V$. Luego existe K, entorno compacto de c contenido en H_2, de tal forma que $H_1 \times K \subseteq H_1 \times H_2 \subseteq V$. Por lo tanto, en particular, $\{a\} \times K \subseteq V$.

Sea $W = \{x \in A \,:\, \{x\} \times K \subseteq V\}$. Ahora observamos en primer lugar que $W = \{x \in A \,:\, \{q(x)\} \times K \subseteq U\}$. Es claro que $a \in W$. Veamos que W es un entorno abierto de a. Por el Lema del tubo (1.1.1) sabemos que existe un entorno abierto de a, H, tal que $H \times K \subseteq V$. Luego $H \subseteq W$, de donde se sigue que W es un entorno abierto de a.

Además $q^{-1}(q(W)) = W$, ya que si $a \in q^{-1}(q(W))$ entonces $q(a) = q(w \in W)$, luego $q(w) \times K \subseteq U$, por lo tanto, $q(a) \times K \subseteq U$, lo que implica que $a \in W$.

Así pues, $q(W)$ es abierto por ser q aplicación cociente. Y, por tanto, tenemos que $q(W) \times K$ es un entorno de (b,c) contenido en U, con lo que se concluye que U es abierto.

$\square$

Corolario 1.1.1. *Sean $p : A \longrightarrow B$ y $q : C \longrightarrow D$ aplicaciones cociente. Si B y C son espacios de Hausdorff localmente compactos, $p \times q : A \times C \longrightarrow B \times C$ es también una aplicación cociente.*

Demostración. Basta observar que $p \times q$ coincide con la composición

$$A \times C \xrightarrow{p \times id} B \times C \xrightarrow{id \times q} B \times D.$$

Por tanto, gracias al Teorema (1.1.3), $p \times q$ es aplicación cociente por ser composición de dos aplicaciones cociente.

□

1.2. Descomposición canónica de una aplicación continua

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. La aplicación f induce en X la siguiente relación de equivalencia: $x_1 R x_2$ si $f(x_1) = f(x_2)$. Se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/R \arrow[r, "h"] & f(X) \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

donde $p : X \longrightarrow X/R$ es la aplicación de paso al cociente, j es la inclusión y $h(p(x)) = f(x)$. Es obvio que p y j son continuas. También es inmediato que h es biyectiva.

Por otra parte, h es continua si, y solo si, $j \circ h$ es continua. A su vez, $j \circ h$ es continua si, y solo si, $(j \circ h) \circ p$ es continua, y esta última aplicación es continua ya que es f. Luego h es continua.

Recordemos que si $q : X \longrightarrow Y$ es una aplicación cociente, entonces $q(X) = Y$ y la biyección continua h es un homeomorfismo. En este caso, en el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, equal] \\ X/R \arrow[r, "h"] & q(X) \end{tikzcd}$$

podemos suprimir la esquina inferior derecha.

Así pues, una aplicación cociente es esencialmente una aplicación de paso al cociente, pues q solo se diferencia de p en el homeomorfismo h.

Sea X un espacio topológico, R una relación de equivalencia en X, $A \subseteq X$ e $i : A \hookrightarrow X$ la inclusión. Realizamos la descomposición canónica de la aplicación continua $p \circ i$, y obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p_A"'] & X \arrow[r, "p"] & X/R \\ A/R_A \arrow[rr, "h"] & & p(A) \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

donde $h(p_A(a)) = p(a)$.

La relación de equivalencia R que teníamos en X induce una relación de equivalencia R_A en $A \subseteq X$.

Dado un elemento en X/R podemos considerar su antecedente en X ya que p es sobre (por ser aplicación cociente), pero, en general, no podemos garantizar la existencia de un antecedente en A, razón por la cual, en general, $p(A)$ es subespacio de X/R no igual a X/R.

En general, h es solo una biyección continua, pues la restricción de una aplicación cociente puede no ser una aplicación cociente.

Con frecuencia nos va a interesar que esta aplicación h sea un homeomorfismo. A continuación veremos algunos resultados que nos proporcionarán condiciones suficientes para poder garantizar que h sea un homeomorfismo.

El primero de estos es uno de los resultados más utilizados en topología.

Proposición 1.2.1. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua y biyectiva. Si X es compacto e Y es Hausdorff entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Probaremos que f es una aplicación cerrada. Sea C un cerrado de X. Puesto que X es compacto, C también es compacto. Como f es continua, $f(C)$ también es compacto. Además, Y es de Hausdorff y $f(C) \subseteq Y$, con lo que concluimos que $f(C)$ es un cerrado de Y.

$\square$

Teorema 1.2.1. ***(Restricción de una aplicación cociente).*** *Sean X e Y espacios topológicos, $q : X \longrightarrow Y$ una aplicación cociente y sea A un subespacio de X que es saturado con respecto a q, es decir, $A = q^{-1}q(A)$. Consideramos la descomposición canónica $q|_A = j \circ h \circ p_A$. Entonces, h es un homeomorfismo en cualquiera de las dos situaciones siguientes:*

(a) Si A es un abierto o un cerrado en X.

(b) Si q es una aplicación abierta o una aplicación cerrada.

Demostración. Consideramos el diagrama que representa la descomposición canónica de la aplicación $q|_A = q \circ i$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p_A"'] \arrow[drr, "q_A"] & X \arrow[r, "q"] & Y \\
A/R_A \arrow[rr, "h"] & & q(A) \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd}$$

- Suponemos que A es abierto.

  Veamos que h es una aplicación abierta.

  Sea U un abierto de A/R_A. Observemos que $q(A)$ es un abierto de Y, ya que A es un abierto saturado con respecto a q. Así pues, probar que $h(U)$ es un abierto de $q(A)$ equivale a probar que $h(U)$ es un abierto de Y, y esto último equivale a probar que $q^{-1}(h(U))$ es un abierto de X.

  Veamos que $q^{-1}(h(U)) = p_A^{-1}(U)$. Sabemos que $p_A^{-1}(U)$ es un abierto de A y, por tanto, abierto de X (pues A es un abierto de X). Teniendo en cuenta que p_A es sobreyectiva:

$$\begin{aligned}
q^{-1}(h(U)) &= q^{-1}(jh(U)) \\
&= q^{-1}(jhp_A(p_A^{-1}(U)) \\
&= q^{-1}(qi(p_A^{-1}(U))) \\
&= q^{-1}q(p_A^{-1}(U)).
\end{aligned}$$

  A su vez, veamos que $q^{-1}q(p_A^{-1}(U)) = p_A^{-1}(U)$. Nos basta probar que

$$q^{-1}q(p_A^{-1}(U)) \subseteq p_A^{-1}(U),$$

ya que, la otra contención se verifica siempre.

Sea $x \in q^{-1}q(p_A^{-1}(U))$. Luego $q(x) = q(a \in p_A^{-1}(U))$, donde $p_A^{-1}(U) \subseteq A$, y A saturado con respecto a q, por tanto, $x \in A$.

Entonces, $q(x) = q(a)$, con $x, a \in A$, por tanto, $p_A(x) = p_A(a)$, donde, $p_A(a) \in U$, lo cual implica que $x \in p_A^{-1}(U)$.

- Suponemos que A es cerrado.

  Veamos que h es una aplicación cerrada.

  Sea F un cerrado de A/R_A. Observemos que $q(A)$ es un cerrado de Y, ya que A es un cerrado saturado con respecto a q. Así pues, probar que $h(F)$ es un cerrado de $q(A)$ equivale a probar que $h(F)$ es un cerrado de Y, y esto último equivale a probar que $q^{-1}(h(F))$ es un cerrado de X.

  Veamos que $q^{-1}(h(F)) = p_A^{-1}(F)$. Sabemos que $p_A^{-1}(F)$ es un cerrado de A y, por tanto, cerrado de X (pues A es ahora cerrado de X). A partir de ahora, se procede de manera análoga al caso A abierto.

- Suponemos que q es una aplicación abierta.

  Veamos que h es una aplicación abierta.

  Sea U un abierto de A/R_A. Luego $p_A^{-1}(U)$ es un abierto de A, así que $p_A^{-1}(U) = A \cap V$, siendo V un abierto de X.

  A continuación probaremos que $h(U)$ es un abierto de $q(A)$ viendo que $h(U) = q(A) \cap q(V)$. Sabemos que $q(V)$ es un abierto de Y por ser q una aplicación abierta.

  Veamos que $q(A) \cap q(V) = q(A \cap V)$. Nos basta probar que

  $$q(A) \cap q(V) \subseteq q(A \cap V),$$

  ya que la otra contención se verifica siempre.

  Sea $y \in q(A) \cap q(V)$. Luego $y = q(a \in A)$, $y = q(v \in V)$. Entonces

$q(v) \in q(A)$ y, por tanto, $v \in q^{-1}q(A) = A$ (ya que A es saturado con respecto a q). Luego $v \in A \cap V$. De donde, $y = q(v) \in q(A \cap V)$.

Finalmente,

$$q(A \cap V) = q(p_A^{-1}(U)) = qi(p_A^{-1}(U) = jhp_A(p_A^{-1}(U)) = hp_A(p_A^{-1}(U)) = h(U),$$

donde el último paso está garantizado por ser p_A sobreyectiva.

- Suponemos que q es una aplicación cerrada.

  Veamos que h es una aplicación cerrada.

  Sea F un cerrado de A/R_A. Luego $p_A^{-1}(F)$ es un cerrado de A, así que $p_A^{-1}(F) = A \cap T$, siendo T un cerrado de X.

  A continuación probaremos que $h(F)$ es un cerrado de $q(A)$ viendo que $h(F) = q(A) \cap q(F)$, donde sabemos que, $q(F)$ es un cerrado de Y por ser q una aplicación cerrada.

  Ahora, análogamente al caso en que q era aplicación abierta, verificamos que
  $$q(A) \cap q(F) = q(A \cap F),$$
  por ser A saturado respecto de q.

  Finalmente, como en el caso anterior, llegamos a que
  $$q(A \cap F) = h(F),$$
  por ser p_A sobreyectiva.

□

Observación. La aplicación h del teorema precedente es un homeomorfismo si, y solo si, la restricción $q_A : A \longrightarrow q(A)$ es una aplicación cociente. Esta es la razón por la que en algunos textos (véase [Mu]) el resultado anterior se enuncia en términos de restricción de una aplicación cociente.

1.3. Propiedades topológicas de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

En esta sección recordaremos lo que es el espacio proyectivo complejo y sus cartas afines, además de demostrar algunas de sus propiedades topológicas.

Sea R la relación de equivalencia sobre $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, donde $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$, tal que, para todo x, y en $\mathbb{C}^{n+1}$, xRy si, y solo si, existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda \neq 0$ y tal que $x = \lambda y$.
Además, $<x> = \{\lambda x \ : \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ denotará la clase de equivalencia de x .

Llamaremos espacio proyectivo complejo al espacio cociente $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/R$, y lo denotaremos con $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. A su vez, llamamos i-ésima carta afín de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ al conjunto

$$U_i = \{<x_0, \dots, x_n> \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \ : \ x_i \neq 0\}.$$

Es claro que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = U_0 \cup \cdots \cup U_n$. Asociada a cada U_i se tiene una biyección

$$\varphi_i : \mathbb{C}^n \longrightarrow U_i$$

dada por $\varphi_i(y_1, \dots, y_n) = <y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n>$ (hablando estrictamente, la carta afín es el par (U_i, φ_i)). Su inversa está dada por

$$\varphi_i^{-1}(<x_0, \dots, x_n>) = (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$$

Veamos a continuación que las cartas afínes U_i son conjuntos abiertos y densos de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$:

Proposición 1.3.1. *Los conjuntos U_i son abiertos de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.*

Demostración. Razonaremos para U_0, pero podemos generalizar la prueba para todo i sin dificultad.

El conjunto $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n$ es un abierto de $\mathbb{C}^{n+1}$ contenido en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ y, por tanto, un abierto de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Además, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n$ es saturado para R ya que si tenemos un elemento con primera coordenada no nula, al multiplicarlo por un λ no nulo, la primera coordenada va a seguir siendo no nula.

Al considerar la aplicación de paso al cociente $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ observamos que $p((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n) = U_0$, con lo que se concluye la prueba ya que hemos probado que U_0 es imagen de un abierto saturado por la aplicación

p de paso al cociente.

$\square$

Proposición 1.3.2. *Los conjuntos U_i son densos en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.*

Demostración. Sea V un abierto no vacío de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Veamos que $V \cap U_i \neq \emptyset$.

Sea $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la aplicación de paso al cociente, y supongamos que $x = (x_0, \ldots, x_n) \in p^{-1}(V)$. Como $p^{-1}(V)$ es un abierto de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq p^{-1}(V)$.

Si $x_i \neq 0$, entonces $x = (x_0, \ldots, x_n) \in p^{-1}(V) \cap p^{-1}(U_i) = p^{-1}(V \cap U_i)$, luego $p(x) \in V \cap U_i$.

Si $x_i = 0$, entonces $z = (x_0, \ldots, x_{i-1}, \frac{\epsilon}{2}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in B(x, \epsilon) \subseteq p^{-1}(V)$. Luego $z \in p^{-1}(V) \cap p^{-1}(U_i)$. Así que $p(z) \in V \cap U_i$.

$\square$

A continuación, veremos algunas otras propiedades topológicas del espacio proyectivo complejo que necesitamos para el desarrollo de esta memoria. Más en particular, para la posterior prueba de la continuidad de las raíces de polinomios en función de sus coeficientes.

Proposición 1.3.3. ***(Inmersión de** $\mathbb{C}^n$ **en** $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$**).*** *La carta afín*

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi_0} U_0$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto <1, x_1, \ldots, x_n>$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Sean $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la aplicación de paso al cociente, $i : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ la inclusión y R' la restricción a $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n$ de la relación R que define $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ a partir de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Consideremos la descomposición canónica de la aplicación continua $p \circ i$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p'"'] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "p"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\
((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n)/R' \arrow[rr, "h"] & & p((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n) \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

donde $h(p'(a)) = p(a)$.

Es un diagrama del tipo (1.1) que construimos en la sección anterior, solo que esta vez, tratamos en particular el caso del espacio proyectivo complejo, que es el que nos sirve para probar el homeomorfismo que deseamos ver.

Empezaremos observando que

$$p((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n) = \{<1, x_1, \ldots, x_n> \ : \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n\}.$$

Por lo tanto, $U_0 = p((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n)$, donde U_0, como hemos dicho anteriormente, es la 0-ésima carta afín del espacio proyectivo complejo.

Para probar que la aplicación φ_0 es un homeomorfismo, debemos probar que es continua, biyectiva y que su inversa también es continua.

Empecemos viendo que φ_0 es una aplicación continua. Sea $k : U_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la inclusión. La aplicación φ_0 es continua si, y solo si, $k \circ \varphi_0$ es continua, y esta última aplicación podemos escribirla como la composición

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (1, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto <1, x_1, \ldots, x_n>$$

donde la primera aplicación es continua ya que tiene componentes continuas (la primera componente es constante y la segunda es esencialmente la identidad), y la segunda aplicación es la que anteriormente hemos denotado por p, y es la aplicación de paso al cociente por la relación R y, por tanto, también es continua.

La biyectividad es trivial, ya que es evidente que elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas, con lo que tendríamos la inyectividad, y todo elemento de la imagen tiene claramente un antecedente, luego también es sobreyectiva.

Por último nos quedaría probar que la aplicación f, inversa de φ_0, es continua.

$$f : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$<1, x_1, \ldots, x_n> \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

Para ello primero vamos a escribir f como composición de otras dos aplicaciones y, seguido, veremos que cada una de ellas es continua.

$$U_0 \xrightarrow{h^{-1}} ((\mathbb{C}\setminus\{0\})\times\mathbb{C}^n)/R' \xrightarrow{g} \mathbb{C}^n$$

$$<1, x_1, \ldots, x_n> \longmapsto <1, x_1, \ldots, x_n> \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

La aplicación h^{-1} será continua si probamos que h es un homeomorfismo. Como ya hemos comentado, $(\mathbb{C}\setminus\{0\})\times\mathbb{C}^n$ es un abierto de $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$, saturado con respecto a p, luego, usando el Teorema (1.2.1) aplicado a nuestro diagrama (1.2), se concluye que h es un homeomorfismo.

Para poder concluir que f es continua, nos falta probar la continuidad de g.

Podemos escribir la aplicación g de la siguiente manera

$$g : ((\mathbb{C}\setminus\{0\})\times\mathbb{C}^n)/R' \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$<\lambda, x_1, \ldots, x_n> \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

con $\lambda \neq 0$.

Dicha aplicación se obtiene pasando al cociente $\pi_2 : (\mathbb{C}\setminus\{0\})\times\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ (que es la proyección segunda, y es constante en cada clase de equivalencia):

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}\setminus\{0\})\times\mathbb{C}^n \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & \mathbb{C}^n \\
((\mathbb{C}\setminus\{0\})\times\mathbb{C}^n)/R' \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

donde R' es la restricción a $(\mathbb{C}\setminus\{0\})\times\mathbb{C}^n$ de la relación R que define $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ a partir de $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$. Ahora, aplicando el Teorema (1.1.1), concluimos que g también ha de ser continua. Luego f es continua.

□

Proposición 1.3.4. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Como venimos haciendo en esta sección, denotaremos por $<x> = <x_0, \ldots, x_n>$ a la clase de equivalencia de $x = (x_0, \ldots, x_n)$ por la relación R tal que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/R$.

Sean $<x> \neq <y>$. Veamos que $<x>$ e $<y>$ pueden separarse por abiertos saturados disjuntos.

Para ello, vamos a comenzar viendo que existen índices i, j tales que (x_i, x_j) e (y_i, y_j) son linealmente independientes.

Razonemos por reducción al absurdo. Suponemos pues que no existe tal pareja de índices.

Fijemos i tal que $x_i \neq 0$. De acuerdo con nuestra suposición, (x_i, x_j) e (y_i, y_j) son linealmente dependientes para todo j.

Entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} (y_i, y_0) & = & \lambda_0(x_i, x_0) \\ (y_i, y_1) & = & \lambda_1(x_i, x_1) \\ & & \\ (y_i, y_n) & = & \lambda_n(x_i, x_n) \end{array}\right\}$$

De donde, igualando las primeras componentes, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{rcl} y_i & = & \lambda_0 x_i \\ y_i & = & \lambda_1 x_i \\ & & \\ y_i & = & \lambda_n x_i \end{array}\right\}$$

Lo cual, a su vez, implica (recordemos que $x_i \neq 0$) que :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda_0 & = & \frac{y_i}{x_i} \\ \lambda_1 & = & \frac{y_i}{x_i} \\ & & \\ \lambda_n & = & \frac{y_i}{x_i} \end{array}\right\}$$

Por tanto, tenemos que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$.

Ahora, igualando las segundas componentes, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} y_0 & = & \lambda x_0 \\ y_1 & = & \lambda x_1 \\ & & \\ y_n & = & \lambda x_n \end{array}\right\}$$

Es decir, $<x_0, \ldots, x_n> = <y_0, \ldots, y_n>$, con lo que llegamos a una contradicción.

Por lo tanto, existen índices i, j tales que $x_i y_j - x_j y_i \neq 0$ o, equivalentemente, $|x_i y_j - x_j y_i| > 0$.

Vamos a definir ahora dos abiertos saturados disjuntos V y W tales que $x \in V$, $y \in W$. Sean

$$V = \{z = (z_0, \ldots, z_n) \ : \ |z_j x_i - z_i x_j| < |z_j y_i - z_i y_j|\}$$

$$W = \{z = (z_0, \ldots, z_n) \ : \ |z_j x_i - z_i x_j| > |z_j y_i - z_i y_j|\}$$

El conjunto V es abierto ya que las funciones

$$(z_0, \ldots, z_n) \longmapsto |z_j x_i - z_i x_j|,$$

$$(z_0, \ldots, z_n) \longmapsto |z_j y_i - z_i y_j|$$

son ambas continuas. Y análogamente ocurre con W.

Es claro que V y W son saturados y disjuntos. Finalmente, $x \in V$ ya que

$$0 = |x_j x_i - x_i x_j| < |x_j y_i - x_i y_j|.$$

Análogamente, tenemos que $y \in W$.

□

Lema 1.3.1. *$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^{2n+1}/R'$, donde ahora R' es la restricción a $\mathbb{S}^{2n+1}$ de la relación que define $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ como espacio cociente de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.*

Demostración. Al igual que en la Proposición (1.3.3), necesitamos construir un diagrama del tipo (1.1). Luego consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{2n+1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p'"'] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "p"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\
\mathbb{S}^{2n+1}/R' \arrow[rr, "h"] & & p(\mathbb{S}^{2n+1}) \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd}$$

donde $h(p'(a)) = p(a)$.

Como vimos en la segunda sección de este capítulo, h es biyección continua.

Además, como $\mathbb{S}^{2n+1}$ es compacto, entonces sabemos que $\mathbb{S}^{2n+1}/R'$ también lo es. Por otro lado, $p(\mathbb{S}^{2n+1})$ es de Hausdorff por ser un subespacio de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, que hemos probado que es de Hausdorff en la Proposición (1.3.4). Entonces, en aplicación de la Proposición (1.2.1), h es un homeomorfismo.

Ahora bien, para ver que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^{2n+1}/R'$ nos faltaría probar que $p(\mathbb{S}^{2n+1})$ es igual a $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Para ello tendremos que ver que todo elemento de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ está en $p(\mathbb{S}^{2n+1})$.

Primero vamos a ver que toda clase de equivalencia en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ corta a $\mathbb{S}^{2n+1}$: Sea $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Veamos que la clase $<z_0, \ldots, z_n>$ corta a $\mathbb{S}^{2n+1}$.

Tenemos:

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \left\{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\right\},$$
$$<z_0, \ldots, z_n> = \{\lambda(z_0, \ldots, z_n) \ : \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

Siguiendo a [GH], escribiremos abreviadamente:

$z = (z_0, \ldots, z_n)$, $<z> = <z_0, \ldots, z_n>$ y $|z|^2 = |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2$.

Para probar que $<z> \cap \mathbb{S}^{2n+1} \neq \emptyset$, debemos ver que la ecuación en λ

$$1 = |\lambda z|^2 \tag{1.3}$$

tiene alguna solución.
Ahora bien:

$$1 = |\lambda z|^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$1 = |\lambda|^2 |z|^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$|\lambda| = \sqrt{1/|z|^2}$$

Vemos pues que todos los λ que satisfacen la ecuación (1.3) forman una circunferencia en $\mathbb{C}$. Es decir, hay tantos puntos en $<z> \cap \mathbb{S}^{2n+1}$ como puntos hay en una circunferencia. Luego $<z> \cap \mathbb{S}^{2n+1} \neq \emptyset$.

Por último, basta pasar al cociente por R' y hacer su imagen por h para recuperar la clase de equivalencia por R del espacio $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ya que por construcción habíamos definido $h(p'(a)) = p(a)$.

$\square$

Proposición 1.3.5. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *es un espacio compacto.*

Demostración. Para probar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es compacto, basta observar por el Lema (1.3.1) que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^{2n+1}/R'$, donde R' es la restricción a $\mathbb{S}^{2n+1}$ de la relación que define $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ como espacio cociente de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Entonces, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es compacto por ser homeomorfo a un cociente de un espacio compacto.

□

Proposición 1.3.6. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^2$.

Demostración. La Proposición (1.3.3) nos da la identificación de $\mathbb{C}$ con el conjunto $U_0 \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Luego, podemos ver $\mathbb{C}$ como un subespacio denso de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, gracias a la Proposición (1.3.2).

Por otra parte, sabemos que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup {<}0,1{>} = \mathbb{C} \cup {<}0,1{>}$ y como hemos probado que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es compacto (Proposición (1.3.5)) y de Hausdorff (Proposición (1.3.4)), entonces $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es una compactificación de Alexandroff de $\mathbb{C}$.

Como $\mathbb{S}^2$ es también una compactificación de Alexandroff de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, basta aplicar el resultado de la unicidad de la compactificación de Alexandroff (Proposición (1.1.1)) para concluir que, efectivamente, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^2$.

□

Capítulo 2

La continuidad de las raíces de un polinomio

El objetivo principal de esta memoria, y en concreto de este capítulo, es entender y detallar la prueba expuesta en [CG] de la continuidad de las raíces de un polinomio en función de los coeficientes.

Primero exponemos el resultado preciso y comentamos la dificultad que presenta su correcta comprensión. Damos a continuación un resultado equivalente usando la relación de equivalencia dada por la acción del grupo simétrico S_n.

Después extendemos este nuevo resultado a espacios proyectivos. Para ello, consideramos $\mathbb{C}^n$ inmerso en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, y definimos extensiones de los polinomios simétricos elementales.

Por último, realizamos la prueba de este resultado extendido, apoyándonos en propiedades topológicas de los espacios proyectivos y de las aplicaciones cociente.

La bibliografía usada es [CG], [Mu] y [Sa].

2.1. Enunciado del teorema. Resultado equivalente

Sea $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ un polinomio mónico complejo. El Teorema Fundamental del Álgebra prueba que existen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ pertenecientes a $\mathbb{C}$ tales que $P(x) = \prod_{1 \leq i \leq n} (x - \xi_i)$. Hemos repetido cada raíz tantas veces como indique su multiplicidad.

Si variamos los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, el sistema de raíces $\xi_1, \ldots, \xi_n$ también variará. Veamos cómo es esa variación:

Teorema 2.1.1. *Sea $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ un polinomio mónico complejo, y sean $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sus raíces. Dado $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, existe un $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, tal que, para todo polinomio mónico $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$, si $|b_j - a_j| < \delta$ para $1 \leq j \leq n$, entonces existen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ pertenecientes a $\mathbb{C}$ tales que $Q(x) = \prod_{1 \leq i \leq n} (x - \zeta_i)$ y $|\zeta_j - \xi_j| < \epsilon$ para $1 \leq j \leq n$.*

La mayoría de las demostraciones de este teorema se basan en el Teorema de Rouché, sin embargo, en este artículo, los autores dan una demostración alternativa usando los polinomios simétricos y espacios proyectivos.

Una de las dificultades que alberga este teorema reside en la correcta comprensión de su enunciado. Es por ello, que nos parece oportuno dar un enunciado menos técnico pero que puede servir de aclaración al lector.

De manera coloquial, podemos decir que, cuando en un polinomio se modifican un poco los coeficientes, hay una ordenación de las nuevas raíces que se distancian poco de las que teníamos previamente.

Lo que haremos a continuación será buscar un resultado equivalente al del teorema precedente. Así, una vez probemos este nuevo resultado, quedará probado el Teorema (2.1.1), que, como venimos diciendo, es nuestro objetivo principal.

2.1.1. Polinomios simétricos elementales

Recordemos la relación existente entre las raíces y los coeficientes del polinomio $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[x]$.

Dadas n variables $x_1, \ldots, x_n$, llamamos polinomios simétricos elementales en las variables $x_1, \ldots, x_n$ a los polinomios $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, para $1 \leq i \leq n$, definidos por

$$\sigma_i(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^i \sum x_{k_1} \cdots x_{k_i},$$

donde $\{k_1, \ldots, k_i\}$ varía en todas las posibles elecciones de i elementos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Obsérvese que hemos modificado el signo habitual de los polinomios simétricos elementales para conseguir que, si $\xi_1, \ldots, \xi_n$ son las raíces del polinomio $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, se verifique que:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = x^n + \sigma_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) x^{n-1} + \cdots + \sigma_n(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

2.1.2. Definición de la aplicación σ

Identificaremos el polinomio $P(x)$ con el punto $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ formado por sus coeficientes, así consideraremos $P(x)$ como un punto de $\mathbb{C}^n$. Nos gustaría poder hacer lo mismo con el sistema de raíces $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Sin embargo, nos encontramos con el problema que ya hemos dejado entrever previamente, la ordenación. Permutaciones de las ξ_i nos dan el mismo sistema de raíces. Es por ello que vamos a introducir la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{C}^n$:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \sim (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

si, y solo si, existe una permutación ρ del grupo simétrico S_n tal que $\zeta_j = \xi_{\rho(j)}$, para $1 \leq j \leq n$. Y denotaremos por $\mathbb{C}^n_{sym}$ al espacio cociente obtenido a partir de $\mathbb{C}^n$ por esta relación de equivalencia. A su vez, denotaremos por $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ a la clase de equivalencia de $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Sea $\rho \in S_n$. Sabemos que ρ induce un homeomorfismo $f_\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ dado por

$$f_\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(n)})$$

Para facilitar la notación, identificaremos cada permutación ρ con el homeomorfismo f_ρ que induce.

Consideramos ahora la aplicación

$$\tau : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n_{sym}$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto [\xi_1, \ldots, \xi_n]$$

Esta aplicación es biyectiva ya que dos polinomios mónicos son iguales si tienen el mismo sistema de raíces, y toda n-upla $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ en $\mathbb{C}^n$ determina un polinómio mónico $x^n + \sigma_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)x^{n-1} + \cdots + \sigma_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ cuyas raíces son $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Entonces, la inversa de la aplicación τ estará bien definida y vendrá dada por

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}^n_{sym} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ [\xi_1, \ldots, \xi_n] &\longmapsto (\sigma_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, \sigma_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)) \end{aligned}$$

2.1.3. Teorema equivalente

Ahora ya podemos reescribir el Teorema (2.1.1). Recordemos que hemos dotado a $\mathbb{C}^n_{sym}$ de la topología cociente. Veremos a continuación que el Teorema (2.1.1) equivale a:

Teorema 2.1.2. *La aplicación σ es un homeomorfismo.*

Proposición 2.1.1. *El Teorema (2.1.1) y el Teorema (2.1.2) son equivalentes.*

Demostración. Veamos la doble implicación.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que se satisface el Teorema (2.1.1) y veamos que se verifica el Teorema (2.1.2).

Como σ es claramente continua, ya que sus componentes son continuas por ser polinomios en las ξ_i, nos bastará con ver que τ es continua en cada uno de los puntos de $\mathbb{C}^n$.

Sea $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. De acuerdo con la definición de τ, tenemos que

$$\tau(a_1, \ldots, a_n) = [\xi_1, \ldots, \xi_n],$$

donde $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ es la clase de equivalencia de las raíces del polinomio mónico de grado n cuyos coeficientes son $(a_1, \ldots, a_n)$.

Sea V un entorno abierto de $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ y sea p la aplicación de paso al cociente

$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n_{sym}$. Así pues, $p^{-1}(V)$ es un entorno abierto de $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Como en $\mathbb{C}^n$ tenemos la topología producto, podemos tomar un abierto U_j de cada factor, tal que $\xi_j \in U_j$, para $1 \leq j \leq n$, y $U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq p^{-1}(V)$. Además, para cada j, podemos tomar una bola abierta centrada en ξ_j y de radio $\epsilon_j > 0$ que esté contenida en U_j. Finalmente, si $\epsilon = \text{mín}_{1 \leq j \leq n} \epsilon_j$, tendremos que $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B(\xi_1, \epsilon) \times \cdots \times B(\xi_n, \epsilon) \subseteq p^{-1}(V)$.

Como estamos suponiendo que se verifica el Teorema (2.1.1), existe $\delta > 0$ tal que si $|b_j - a_j| < \delta$ para $1 \leq j \leq n$, entonces las raíces $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ del polinomio $x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$, con un determinado orden, verifican que $|\zeta_j - \xi_j| < \epsilon$ para $1 \leq j \leq n$.

A continuación definimos $W = B(a_j, \delta) \times \cdots \times B(a_n, \delta)$, que es un entorno abierto de $(a_1, \ldots, a_n)$. La tesis del Teorema (2.1.1) se traduce de la siguiente forma: Si $(b_1, \ldots, b_n) \in W$, entonces $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in p^{-1}(V)$. Y, en consecuencia, $\tau(b_1, \ldots, b_n) = [\zeta_1, \ldots, \zeta_n] \in V$. Por tanto, hemos terminado la prueba de que τ es continua en el punto $(a_1, \ldots, a_n)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que se satisface el Teorema (2.1.2) y veamos que se verifica el Teorema (2.1.1).

Partimos del polinomio mónico $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, cuyas raíces son $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Sea $\epsilon > 0$. Consideramos el abierto $U = B(\xi_1, \epsilon) \times \cdots \times B(\xi_n, \epsilon)$, y sea V el saturado de U. Luego $V = \bigcup_{\rho \in S_n} \rho(U)$, donde estamos identificando ρ con el homeomorfismo inducido $f_\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$.

Sea $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n_{sym}$ la aplicación de paso al cociente. Por la definición dada de U, tenemos que $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in U \subseteq V$. Luego, $[\xi_1, \ldots, \xi_n] \in p(V)$, que es abierto de $\mathbb{C}^n_{sym}$ ya que V es saturado. Así que, $p(V)$ es un entorno abierto de $[\xi_1, \ldots, \xi_n] = \tau(a_1, \ldots, a_n)$.

Como estamos suponiendo que σ es homeomorfismo, entonces τ (que es la inversa de σ) es continua en el punto $(a_1, \ldots, a_n)$. Luego existe $\delta > 0$ tal que si $|b_j - a_j| < \delta$, para $1 \leq j \leq n$, entonces $\tau(b_1, \ldots, b_n) \in p(V)$, es decir, si $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ son las raíces de $x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$, se verifica que $[\zeta_1, \ldots, \zeta_n] \in p(V)$.

Ahora bien,

$$[\zeta_1, \dots, \zeta_n] \in p(V)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in p^{-1}(p(V)) = V, \text{ pues V es saturado.}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \rho(U), \text{ para un cierto } \rho \in S_n.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\rho^{-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in U$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\zeta_{\pi(1)}, \dots, \zeta_{\pi(n)}) \in U, \text{ siendo } \pi = \rho^{-1}.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|\zeta_{\pi(j)} - \xi_j| < \epsilon, \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

Con lo que hemos llegado a que se verifica el Teorema (2.1.1).

□

2.2. Extensión de σ a un espacio proyectivo

La idea de esta sección no es otra que probar un resultado equivalente al Teorema (2.1.2) para una extensión σ^* de σ que también será biyectiva y que estará definida en un espacio compacto que contiene a $\mathbb{C}^n_{sym}$. Para hacerlo, usaremos espacios proyectivos complejos.

Siguiendo con la notación ya introducida en la Sección 1.3, el punto de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ cuya clase de equivalencia contiene a $(x_0, \dots, x_n)$ es $<x_0, \dots, x_n>$.

2.2.1. Inmersión de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Consideramos la inmersión

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto <1, x_1, \dots, x_n> \end{aligned}$$

que, como probamos en la Proposición (1.3.3), establece un homeomorfismo entre $\mathbb{C}^n$ y su imagen U_0.

Ahora, podemos extender la correspondencia entre los polinomios mónicos de grado n y los puntos de $\mathbb{C}^n$. Para ello, diremos que dos polinomios no nulos $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ y $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$ son homotéticos, cuando existe un $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tal que $b_j = \lambda a_j$ para $0 \leq j \leq n$. Esto es equivalente a decir que $P(x)$ y $Q(x)$ tienen el mismo grado y el mismo sistema de raíces. Asociamos el punto $<a_0, \dots, a_n>$ a la clase de homotecia del polinomio $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$. Un punto $<a_0, \dots, a_n>$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ pertenece entonces a $\mathbb{C}^n$ si, y solo si, los elementos de la correspondiente clase de homotecia son polinomios de grado exactamente n (recordemos que estamos viendo $\mathbb{C}^n$ inmerso en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ gracias a la carta afín φ_0).

2.2.2. Definición de la aplicación σ^*

Para preparar la definición de σ^*, definimos extensiones de los polinomios simétricos elementares,

$$\begin{aligned} \sigma_i^h : ((\mathbb{C}^2))^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((z_1, x_1), \dots, (z_n, x_n)) &\longmapsto z_1 \cdots z_n \sigma_i(\frac{x_1}{z_1}, \dots, \frac{x_n}{z_n}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Es fácil comprobar, usando la definición de σ_i, que

$$\sigma_i^h((z_1, x_1), \dots, (z_n, x_n)) = (-1)^i \sum x_{k_1} \cdots x_{k_i} z_{k_{i+1}} \cdots z_{k_n} \tag{2.2}$$

donde $\{k_1, \dots, k_i\}$ varía en todas las posibles elecciones de i elementos del conjunto $\{1, \dots, n\}$ y $\{k_{i+1}, \dots, k_n\}$ son los elementos restantes.

Entonces, σ_i^h es un polinomio homogéneo en las variables $z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_n$, de grado total n, que satisface

$$\sigma_i^h((\lambda_1 z_1, \lambda_1 x_1), \dots, (\lambda_n z_n, \lambda_n x_n)) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \sigma_i^h((z_1, x_1), \dots, (z_n, x_n)). \tag{2.3}$$

Comprobamos la propiedad precedente directamente usando la definición de σ_i^h dada en (2.1):

$$\begin{aligned}\sigma_i^h((\lambda_1 z_1, \lambda_1 x_1), \ldots, (\lambda_n z_n, \lambda_n x_n)) &= \lambda_1 z_1 \cdots \lambda_n z_n \sigma_i(\frac{\lambda_1 x_1}{\lambda_1 z_1}, \ldots, \frac{\lambda_n x_n}{\lambda_n z_n}) \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n z_1 \cdots z_n \sigma_i(\frac{x_1}{z_1}, \ldots, \frac{x_n}{z_n}) \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \sigma_i^h((z_1, x_1), \ldots, (z_n, x_n)).\end{aligned}$$

Gracias a la Propiedad (2.3), podemos definir

$$\begin{aligned}\sigma^h : (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ (<z_1, x_1>, \ldots, <z_n, x_n>) &\longmapsto <\sigma_0^h(), \ldots, \sigma_i^h(), \ldots>\end{aligned} \tag{2.4}$$

donde, dentro de los paréntesis que hemos dejado vacíos para no sobrecargar la notación, iría

$$(<z_1, x_1>, \ldots, <z_n, x_n>) \quad \text{y} \quad \sigma_0^h(<z_1, x_1>, \ldots, <z_n, x_n>) = z_1 \cdots z_n.$$

Como los σ_i^h son simétricos, σ^h induce una aplicación definida en $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n_{sym}$ (el cociente de $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n$ por la acción del grupo simétrico S_n), que vamos a denotar por

$$\sigma^* : (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n_{sym} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

2.3. La prueba de que σ^* es un homeomorfismo

Como mencionamos al comienzo de la sección anterior, si conseguimos probar que σ^* es un homeomorfismo habremos probado el Teorema (2.1.2), pues veremos que σ^* es una extensión de σ.

Para ello vamos a necesitar previamente un par de resultados que demostraremos a continuación.

Lema 2.3.1. *Sean* $<1, \xi_1>, \ldots, <1, \xi_r>, <0, 1>, \ldots, <0, 1>$ *n puntos de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$*, los primeros r de ellos pertenecientes a* $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$*. Si*

$$\sigma^*([<1, \xi_1>, \ldots, <1, \xi_r>, <0, 1>, \ldots, <0, 1>]) = <a_0, \ldots, a_n>,$$

entonces $a_0 = \cdots = a_{n-r-1} = 0$*,* $a_{n-r} \neq 0$*, y* $a_{n-r}x^r + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ *tiene* $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ *como sistema de raíces.*

Demostración. Consideremos

$$\left.\begin{array}{rcl} (z_1, y_1) & = & (1, x_1) \\ \\ (z_r, y_r) & = & (1, x_r) \\ (z_{r+1}, y_{r+1}) & = & (0, 1) \\ \\ (z_n, y_n) & = & (0, 1) \end{array}\right\}$$

Hay $n-r$ pares que tienen nula la componente z, luego solo hay r pares que no tienen nula la componente z.

Para favorecer una mejor comprensión de la prueba del lema, separaremos la misma en distintos casos:

Caso 1: $i \leq n-r-1$

Por la Propiedad (2.2),

$$\sigma_i^h((z_1, y_1), \ldots, (z_n, y_n)) = (-1)^i \sum y_{k_1} \cdots y_{k_i} z_{k_{i+1}} \cdots z_{k_n}.$$

donde $\{k_1, \ldots, k_i\}$ varía en todas las posibles elecciones de i elementos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ y $\{k_{i+1}, \ldots, k_n\}$ son los elementos restantes.

Al elegir un subconjunto $\{k_1, \ldots, k_i\}$ de i elementos de $\{1, \ldots, n\}$, su complementario tiene $n-i$ elementos.

Como $n-i > r$, y solo hay r pares que no tienen nula la componente z, concluimos que, en este caso, cada uno de los sumandos

$$y_{k_1} \cdots y_{k_i} z_{k_{i+1}} \cdots z_{k_n}$$

es nulo y, por tanto,

$$\sigma_i^h((z_1, y_1), \ldots, (z_n, y_n)) = 0.$$

Caso 2: $i = n-r$

Razonando como en el caso anterior, todos los sumandos

$$y_{k_1} \cdots y_{k_i} z_{k_{i+1}} \cdots z_{k_n}$$

serán nulos, excepto cuando $\{k_{i+1}, ..., k_n\} = \{1, ..., r\}$, en cuyo caso tendremos $\{k_1, \ldots, k_i\} = \{r+1, \ldots, n\}$ y, por lo tanto,

$$\begin{array}{cccc} y_{k_1} \cdots & y_{k_i} & z_{k_{i+1}} \cdots & z_{k_n} \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Luego,

$$\sigma_i^h((z_1, y_1), \ldots, (z_n, y_n)) = (-1)^i = (-1)^{n-r} = (-1)^{n+r}.$$

Caso 3: $i = n$

$$\begin{aligned} \sigma_n^h((z_1, y_1), \ldots, (z_n, y_n)) &= (-1)^n y_1 \cdots y_n \\ &= (-1)^n x_1 \cdots x_r 1 \cdots 1 \\ &= (-1)^n x_1 \cdots x_r \\ &= (-1)^n (-1)^r \sigma_r(x_1, \ldots, x_r) \\ &= (-1)^{n+r} \sigma_r(x_1, \ldots, x_r). \end{aligned}$$

Caso 4: $i = n-1$

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}^h((z_1, y_1), \ldots, (z_n, y_n)) &= (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^n y_1 \cdots y_{j-1} z_j y_{j+1} \cdots y_n \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^r y_1 \cdots y_{j-1} z_j y_{j+1} \cdots y_n \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^r y_1 \cdots y_{j-1} y_{j+1} \cdots y_r \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^r x_1 \cdots x_{j-1} x_{j+1} \cdots x_r \\ &= (-1)^{n-1} (-1)^{r+1} \sigma_{r-1}(x_1, \ldots, x_r) \\ &= (-1)^{n+r} \sigma_{r-1}(x_1, \ldots, x_r). \end{aligned}$$

Caso 5: $i = n-2$ (suponemos $i < j$ sin pérdida de generalidad).

$$\begin{aligned}
&\sigma^h_{n-2}((z_1,y_1),\ldots,(z_n,y_n))\\
&\quad = (-1)^{n-2}\textstyle\sum_{\{i,j\}\subseteq\{1,\ldots,r\},i\neq j} y_1\cdots y_{i-1}z_iy_{i+1}\cdots y_{j-1}z_jy_{j+1}\cdots y_n\\
&\quad = (-1)^{n-2}\textstyle\sum_{\{i,j\}\subseteq\{1,\ldots,r\},i\neq j} y_1\cdots y_{i-1}y_{i+1}\cdots y_{j-1}y_{j+1}\cdots y_r\\
&\quad = (-1)^{n-2}\textstyle\sum_{\{i,j\}\subseteq\{1,\ldots,r\},i\neq j} x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_{j-1}x_{j+1}\cdots x_r\\
&\quad = (-1)^{n-2}(-1)^{r+2}\sigma_{r-2}(x_1,\ldots,x_r)\\
&\quad = (-1)^{n+r}\sigma_{r-2}(x_1,\ldots,x_r).
\end{aligned}$$

Caso 6: $n-r < i$ (es decir, $n-i < r$).

$$\begin{aligned}
\sigma^h_i((z_1,y_1),\ldots,(z_n,y_n)) &= (-1)^i\textstyle\sum_{\{k_{i+1},\ldots,k_r\}\subseteq\{1,\ldots,r\}} y_{k_1}\cdots y_{k_i}z_{k_{i+1}}\cdots z_{k_n}\\
&= (-1)^i\textstyle\sum_{\{k_{i+1},\ldots,k_r\}\subseteq\{1,\ldots,r\}} y_{k_1}\cdots y_{k_i}
\end{aligned}$$

En cada producto $y_{k_1}\cdots y_{k_i}$ podemos suprimir el factor y_{k_j} si $k_j \notin \{1,\ldots,r\}$, pues para todos ellos $y_{k_j} = 1$. Así pues, solo nos quedan aquellos sumandos $y_{k_1}\ldots y_{k_i}$ en los que el complementario de $\{k_1,\ldots,k_i\}$, con respecto a $\{1,\ldots,n\}$, está contenido en $\{1,\ldots,r\}$.

Además, en cada uno de esos productos hemos podido suprimir los factores y_{k_j} para los que $k_j \notin \{1,\ldots,r\}$.

Luego, los sumandos que nos quedan son los que se obtienen al variar $\{k_{i+1},\ldots,k_n\}$ entre los posibles subconjuntos de $\{1,\ldots,r\}$ y quedarnos con su complementario en $\{1,\ldots,r\}$.

Tenemos pues, que si $A \subseteq \{1,\ldots,r\}$ y $|A| = n-i$, entonces

$$\begin{aligned}
(-1)^i\textstyle\sum_{j\in\{1,\ldots,r\}\setminus A,}\prod y_j &= (-1)^i\textstyle\sum_{j\in\{1,\ldots,r\}\setminus A,}\prod x_j\\
&= (-1)^i(-1)^{r+(n-i)}\sigma_{r-(n-i)}(x_1,\ldots,x_r)\\
&= (-1)^{r+n}\sigma_{i-(n-r)}(x_1,\ldots,x_r).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para este último caso,

$$\sigma^h_i((z_1,y_1),\ldots,(z_n,y_n)) = (-1)^{r+n}\sigma_{i-(n-r)}(x_1,\ldots,x_r).$$

Gracias al estudio por separado de cada uno de los casos anteriores podemos concluir que

$$\sigma_i^h((1,x_1),\dots,(1,x_r),(0,1),\dots,(0,1))$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-r-1 \\ (-1)^{n+r} & \text{si} \quad i = n-r \\ (-1)^{n+r}\sigma_{i-(n-r)}(x_1,\dots,x_r) & \text{si} \quad n-r+1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \tag{2.5}$$

Ahora bien, la hipótesis del lema nos decía que:

$$\sigma^*([<1,\xi_1>,\dots,<1,\xi_r>,<0,1>,\dots,<0,1>]) = <a_0,\dots,a_n>.$$

Y por otra parte, usando la propia definición de σ^* y (2.5), tenemos que

$$\sigma^*([<1,\xi_1>,\dots,<1,\xi_r>,<0,1>,\dots,<0,1>])$$
$$= <\sigma_0^h(),\dots,\sigma_{n-r-1}^h(),\sigma_{n-r}^h(),\sigma_{n-r+1}^h(),\dots,\sigma_n^h()>$$
$$= <0,\dots,0,(-1)^{n+r},(-1)^{n+r}\sigma_1(\xi_1,\dots,\xi_r),\dots,(-1)^{n+r}\sigma_r(\xi_1,\dots,\xi_r)>$$
$$= <0,\dots,0,1,\sigma_1(\xi_1,\dots,\xi_r),\dots,\sigma_r(\xi_1,\dots,\xi_r)>.$$

Notemos que en la primera igualdad, dentro de los paréntesis que hemos dejado vacíos para no sobrecargar la notación, iría

$$(<1,\xi_1>,\dots,<1,\xi_r>,<0,1>,\dots,<0,1>).$$

Luego,

$$a_0 = \cdots = a_{n-r-1} = 0, \quad a_{n-r} \neq 0$$

y, además, existe un $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que,

$$a_{n-r}x^r + a_{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$= \lambda(x^r + \sigma_1(\xi_1,\dots,\xi_r)x^{r-1} + \cdots + \sigma_{r-1}(\xi_1,\dots,\xi_r)x + \sigma_r(\xi_1,\dots,\xi_r)).$$

De donde, $a_{n-r} \neq 0$ y las raíces de $a_{n-r}x^r + a_{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ son $\xi_1, \ldots, \xi_r$.

$\square$

Corolario 2.3.1. *La aplicación σ^* es biyectiva, y su restricción a $\mathbb{C}^n_{sym}$ nos da la biyección $\sigma : \mathbb{C}^n_{sym} \longrightarrow \mathbb{C}^n$.*

Demostración. Primero veremos que es inyectiva y sobreyectiva, después examinaremos su restricción.

- Inyectividad:

  Al trabajar con elementos de $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n_{sym}$, tomaremos representantes como en el Lema (2.3.1), es decir, colocaremos primero los elementos de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de la forma $<1, \xi>$ (pares que pertenecen a $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), y después los pares de la forma $<0, 1>$.

  Supongamos que

$$\sigma^*([<1, \xi_1>, \ldots, <1, \xi_r>, <0, 1>, \ldots, <0, 1>]) \tag{2.6}$$

$$= \sigma^*([<1, \zeta_1>, \ldots, <1, \zeta_s>, <0, 1>, \ldots, <0, 1>]) \tag{2.7}$$

  Si (2.6) es igual a $<a_0, \ldots, a_n>$ y (2.7) es igual a $<b_0, \ldots, b_n>$, tenemos que $(a_0, \ldots, a_n) = \lambda(b_0, \ldots, b_n)$ con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

  Por el Lema (2.3.1) , sabemos que

$$\begin{cases} a_0 = \cdots = a_{n-r-1} = 0 \\ a_{n-r} \neq 0 \\ a_{n-r}x^r + \cdots + a_n \quad \text{tiene } (\xi_1, \ldots, \xi_r) \text{ como raíces.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = \cdots = b_{n-s-1} = 0 \\ b_{n-s} \neq 0 \\ b_{n-s}x^s + \cdots + b_n \quad \text{tiene } (\zeta_1, \ldots, \zeta_s) \text{ como raíces.} \end{cases}$$

  Como a_{n-r} es el primer coeficiente no nulo de $(a_0, \ldots, a_n)$, b_{n-s} el primer coeficiente no nulo de $(b_0, \ldots, b_n)$, y $(a_0, \ldots, a_n) = \lambda(b_0, \ldots, b_n)$, entonces $r = s$.

Además $(a_{n-r}, \ldots, a_n) = \lambda(b_{n-r}, \ldots, b_n)$, por lo que los polinomios

$$a_{n-r}x^r + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

$$b_{n-r}x^r + \cdots + b_{n-1}x + b_n$$

tienen las mismas raíces, es decir, $(\xi_1, \ldots, \xi_r) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_r)$ salvo el orden.
Por lo tanto, los antecedentes coinciden.

- Sobreyectividad:

  Consideremos $<a_0, \ldots, a_n> \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, luego el polinomio $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ no es idénticamente nulo. Sea r su grado y $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sus raíces.

  Ahora consideramos $<1, \xi_1>, \ldots, <1, \xi_r>, <0, 1>, \ldots, <0, 1>$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Gracias al Lema (2.3.1), se verifica que

  $$\sigma^*([<1, \xi_1>, \ldots, <1, \xi_r>, <0, 1>, \ldots, <0, 1>]) = <a_0, \ldots, a_n>.$$

- La restricción de σ^* a $\mathbb{C}^n_{sym}$ coincide con σ:

  Consideramos $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ gracias a la inmersión

  $$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

  $$z \longmapsto <1, z>$$

  Así pues, identificaremos z con $<1, z>$.

  De igual modo, podemos considerar $\mathbb{C}^n \subseteq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n$. Ahora, al pasar al cociente, tendremos $\mathbb{C}^n_{sym} \subseteq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n_{sym}$, ya que la relación de equivalencia que define $\mathbb{C}^n_{sym}$ no es otra que la inducida por $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n_{sym}$, debido a que dos elementos están relacionados si, y solo si, coinciden salvo permutación.

  Por lo tanto, $\sigma^*([\xi_1, \ldots, \xi_n]) = \sigma^*([<1, \xi_1>, \ldots, <1, \xi_n>])$, debido a la identificación anterior.

  Supongamos que $\sigma^*([<1, \xi_1>, \ldots, <1, \xi_n>]) = <a_0, \ldots, a_n>$. Queremos ver que también $\sigma([\xi_1, \ldots, \xi_n]) = <a_0, \ldots, a_n>$.

Por el Lema (2.3.1), tenemos que $a_0 \neq 0$ y que el polinomio $a_0x^n + \cdots + a_n$ tiene $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ como raíces, que también son las raíces del polinomio $x^n + \dfrac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \cdots + \dfrac{a_n}{a_0}$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
<a_0, \ldots, a_n> &= <1, \frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}> \\
&= (\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}), \\
&= (\sigma_0(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, \sigma_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)) \\
&= \sigma([\xi_1, \ldots, \xi_n]).
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 2.3.1. *La aplicación $\sigma^* : (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n_{sym} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Para esta prueba vamos a hacer uso de la Proposición (1.2.1) que nos va a garantizar que σ^* es un homeomorfismo bajo unas determinadas hipótesis. La primera de ellas, que es la biyectividad de σ^*, nos viene dada por el Corolario (2.3.1). Además, necesitaremos probar que σ^* es continua, que $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n_{sym}$ es compacto y que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es un espacio de Hausdorff.

- El espacio $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n_{sym}$ es compacto.

  Como vimos en la Proposición (1.3.6), $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$, que es compacto.

  Ahora, aplicando el Teorema de Tychonoff (1.1.2) llegamos a que $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n$ es compacto. Para concluir que $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n_{sym}$ es compacto, basta tener en cuenta que el cociente de un compacto es compacto.

- El espacio $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es de Hausdorff.

  Esta prueba ya la hemos realizado en la Proposición (1.3.4).

- La aplicación σ^* es continua.

  Primero observemos que, para probar la continuidad de la aplicación σ^*, nos basta con ver que σ^h es continua, pues σ^* es el paso al cociente de σ^h de acuerdo con el siguiente diagrama (véase el Teorema (1.1.1)):

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n \arrow[r, "\sigma^h"] \arrow[d] & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n_{sym} \arrow[ur, "\sigma^*"'] & \end{tikzcd}$$

  Recordamos la definición de la aplicación σ^h:

$$\sigma^h : (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$
$$(<z_1, x_1>, \ldots, <z_n, x_n>) \longmapsto <\sigma_0^h(), \ldots, \sigma_i^h(), \ldots>$$

  donde

$$\sigma_i^h : ((\mathbb{C}^2))^n \longrightarrow \mathbb{C} \tag{2.8}$$
$$((z_1, x_1), \ldots, (z_n, x_n)) \longmapsto (-1)^i \sum x_{k_1} \cdots x_{k_i} z_{k_{i+1}} \cdots z_{k_n}$$

  Es claro que cada σ_i^h es una aplicación continua, ya que es una función polinómica.

  Ahora construimos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^n \arrow[r, "(\sigma_0^h, \ldots, \sigma_n^h)"] \arrow[d, "q^n"'] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "p"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n \arrow[urr, "\sigma^h"'] & & \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

  donde tanto p como $q : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ son las aplicaciones de paso al cociente.

  Antes de continuar, justificaremos el hecho de que podemos construir este diagrama:

Por un lado, debemos comprobar que, dado un $((z_1, x_1), \ldots, (z_n, x_n))$ perteneciente a $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^n$, su imagen por $(\sigma_0^h, \ldots, \sigma_n^h)$ está en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Es decir, tenemos que ver que se verifica que

$$\sigma_i^h((z_1, x_1), \ldots, (z_n, x_n)) \neq 0, \text{ para todo } i.$$

Como $((z_1, x_1), \ldots, (z_n, x_n)) \in (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^n$ esto significa que

$$(z_i, x_i) \neq 0, \quad \text{para todo } i. \tag{2.10}$$

Supongamos que $z_{k_1}, \ldots, z_{k_i} \neq 0$ y $z_{k_{i+1}} = \cdots = z_{k_n} = 0$. Entonces, por (2.10), tenemos que $x_{k_{i+1}} = \cdots = x_{k_n} \neq 0$. Luego en (2.8) nos queda que

$$\sigma_i^h((z_1, x_1), \ldots, (z_n, x_n)) = (-1)^i x_{k_{i+1}} \cdots x_{k_n} z_{k_1} \cdots z_{k_i} \neq 0.$$

Por otro lado, la aplicación $p \circ (\sigma_0^h, \ldots, \sigma_n^h)$ se puede factorizar a través de q^n gracias a la Propiedad (2.3):

$$\sigma_i^h((\lambda_1 z_1, \lambda_1 x_1), \ldots, (\lambda_n z_n, \lambda_n x_n)) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \sigma_i^h((z_1, x_1), \ldots, (z_n, x_n)).$$

Una vez tenemos perfectamente justificada la construcción del diagrama (2.9), seguimos con nuestro objetivo que es probar que σ^h es continua.

Para ello, lo primero que vamos a hacer es comprobar que

$$q^n : (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^n \longrightarrow (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n$$

es una aplicación cociente.

Sabemos que $q : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es una aplicación cociente, ya que es la aplicación de paso al cociente. Además, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ son espacios localmente compactos y de Haudorff:

La prueba de que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es un espacio de Hausdorff y compacto ya la hemos realizado en la Proposición (1.3.4) y en el la Proposición (1.3.5) respectivamente. Por otra parte, $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ es un espacio localmente compacto y de Hausdorff ya que es abierto de $\mathbb{C}^2$, que es localmente compacto y de Hausdorff.

Por lo tanto, el Corolario (1.1.1) nos garantiza que q^n es una aplicación cociente.

Volviendo a nuestro diagrama (2.9), y usando de nuevo el Teorema (1.1.1), tenemos que σ^h será continua si, y solo si, $\sigma^h \circ q^n$ es continua.

Ahora bien, $\sigma^h \circ q^n = p \circ (\sigma_0^h, \ldots, \sigma_n^h)$, y esta última aplicación es continua por ser composición de continuas (la aplicación p es continua por ser la aplicación de paso al cociente y, por su parte, $(\sigma_0^h, \ldots, \sigma_n^h)$ es continua ya que todas sus componentes lo son).

Por lo tanto, hemos probado que la aplicación σ^* es una biyección continua con salida de un espacio compacto y llegada en uno de Hausdorff, luego es un homeomorfismo.

□

Apéndice A

Dos demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra

En este apéndice exponemos dos de las numerosas pruebas que existen del Teorema Fundamental del Álgebra.

La primera de ellas está basada en el Teorema de Liouville y, por tanto, en las propiedades de las funciones holomorfas. Es la prueba que, con carácter general, se ve en la asignatura de Variable Compleja.

Por su parte, la segunda de las demostraciones, tiene carácter topológico y se basa en el concepto de grado de una aplicación continua de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$. Hace uso, por lo tanto, de técnicas de teoría de homotopía.

Detallo más la segunda demostración, ya que yo no la había estudiado con anterioridad a la realización de esta memoria.

El objetivo de este apéndice es dar las dos demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra que, normalmente, se ven en el Grado de Matemáticas. Otras demostraciones se pueden ver en [FR].

A.1. Demostración basada en el Teorema de Liouville

Como ya hemos adelantado en la introducción, esta prueba está basada en propiedades de las funciones holomorfas. Es por ello que, antes que desarrollar esta demostración del Teorema Fundamental del Álgebra, recordaremos algunas definiciones básicas y enunciaremos el Teorema de Liouville (resultado en el que se basa la prueba).

Nuestra demostración no pretende ser otra cosa que un resumen de la prueba que se ve en la asignatura de Variable Compleja.

Definición A.1.1. *Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto de U. Se dice que f es derivable en z_0 si existe el límite*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}.$$

El límite anterior se denomina derivada de f en z_0.

Se dice que la función f es ***holomorfa*** *en el punto z_0 si existe un disco $B(z_0, r) \subseteq U$ tal que f es derivable en cada punto de $B(z_0, r)$. Se dice que f es holomorfa en U si es holomorfa en cada punto de U, es decir, si es derivable en cada punto de U.*

Definición A.1.2. *Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función compleja definida en A. Se dice que f es analítica en un punto $z_0 \in A$ si existen un número $\delta > 0$ tal que $B(z_0, \delta) \subseteq A$, y una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ convergente en $B(z_0, \delta)$, tales que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \text{ para cada } z \in B(z_0, \delta).$$

Se dice que f es analítica en A si es analítica en cada punto de A. Las funciones analíticas en todo el plano complejo se denominan ***funciones enteras****.*

Teorema A.1.1. ***(Teorema de Liouville)***
Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función entera. Si f es acotada, es decir, si existe $M > 0$ con $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

Ahora ya estamos en condiciones de probar el Teorema Fundamental del Álgebra:

Teorema A.1.2. ***(Teorema Fundamental del Álgebra)***
Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos. Entonces P tiene raíces en $\mathbb{C}$.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que $P(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Entonces, podemos definir $f(z) = 1/P(z)$. Además, $f(z)$ es cociente de funciones holomorfas y, por tanto, es una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$, es decir, es una función entera.

Veamos que $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$. Para $z \neq 0$, podemos escribir $P(z)$ de la siguiente manera:

$$P(z) = z^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}),$$

luego, tomando valores absolutos, tenemos que

$$|P(z)| = |z^n||a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}|.$$

Ahora, como

$$\frac{a_k}{z^{n-k}} \longrightarrow 0, \text{ cuando } |z| \to \infty,$$

tenemos:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|P(z)|}{|z|^n} = |a_n| \neq 0.$$

Por tanto, $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$, luego $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$.

Concluimos que f es acotada y, por el Teorema de Liouville (A.1.1), como f es entera y acotada, entonces f es constante. Esto, a su vez, implica que P es constante. Llegamos así a una contradicción, ya que ningún polinomio de grado mayor o igual que 1 es constante. Luego P tiene raíces en $\mathbb{C}$.

□

A.2. Demostración basada en el concepto de grado de una aplicación continua de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$

Esta segunda prueba del Teorema Fundamental del Álgebra está basada en el estudio de homotopías, levantamientos y grado de una aplicación continua.

Antes de comenzar con la demostración, daremos algunas definiciones básicas y algunos resultados respecto a la existencia y unicidad de los levantamientos, ya sea de caminos o de homotopías, así como el lema fundamental de construcción de homotopías. No demostraremos estos resultados ya que se ven siempre en la asignatura de Topología del Grado de Matemáticas.

Con frecuencia denotaremos por I el intervalo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

Definición A.2.1. ***(Homotopía de aplicaciones).*** *Sean $f, g : Y \longrightarrow X$ dos aplicaciones continuas que coinciden en un subespacio A de Y. Diremos que f y g son homótopas relativamente a A, y escribiremos $f \simeq g \operatorname{rel} A$, si existe una aplicación continua $F : Y \times I \longrightarrow X$ tal que*

(1) $F(y,0) = f(y)$, para todo $y \in Y$.

(2) $F(y,1) = g(y)$, para todo $y \in Y$.

(3) $F(a,t) = f(a) = g(a)$, para todo $a \in A$, $t \in I$.

Decimos que F es una homotopía entre f y g.

Si $A \neq \emptyset$ diremos simplemente que las aplicaciones f y g son homótopas, y escribiremos $f \simeq g$. Si queremos hacer alusión a la aplicación F, escribiremos $F : f \simeq g \operatorname{rel} A$, o $F : f \simeq g$ si $A = \emptyset$.

Notemos que toda aplicación continua $F : Y \times I \longrightarrow X$ es una homotopía entre las aplicaciones $f(y) = F(y,0)$ y $g(y) = F(y,1)$.

Lema A.2.1. ***(Lema fundamental de construcción de homotopías).*** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y sean $f, g : Y \longrightarrow X$ dos aplicaciones continuas tales que, para cada $y \in Y$, el segmento que une $f(y)$ con $g(y)$ está contenido en X. Entonces, las aplicaciones f y g son homótopas relativamente al conjunto de puntos donde coinciden. (La homotopía F viene dada por $F(y,t) = (1-t)f(y) + tg(y)$).*

Definición A.2.2. ***(Camino).*** *Sea X un espacio topológico y sean $x, y \in X$. Un* ***camino*** *en X que va de x a y es una aplicación continua*

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow X$$

tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. También diremos que el camino γ comienza en x y termina en y, o que x es el punto inicial e y es el punto final de γ.

Definición A.2.3. ***(Levantamiento de un camino).*** *Sea γ un camino y $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación definida por $\phi(t) = \cos 2\pi t + i \operatorname{sen} 2\pi t$. Llamamos* ***levantamiento del camino*** *γ a cualquier aplicación continua $\hat{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi \circ \hat{\gamma} = \gamma$, es decir, que haga conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\phi"] \\ I \arrow[ur, "\hat{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Teorema A.2.1. *Sea γ un camino en $\mathbb{S}^1$ con $\gamma(0) = z_0$. Fijamos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(t_0) = z_0$. Existe un único camino $\hat{\gamma}$ en $\mathbb{R}$ tal que $\hat{\gamma}(0) = t_0$ y $\phi \circ \hat{\gamma} = \gamma$, es decir, el camino γ tiene un único levantamiento que comienza en t_0.*

Sean γ y σ caminos en X. De acuerdo con la definición general, una **homotopía** entre γ y σ es una aplicación continua

$$F : I \times I \longrightarrow X$$

$$(s,t) \longmapsto F(s,t)$$

tal que $F(s,0) = \gamma(s)$, $F(s,1) = \sigma(s)$, para todo $s \in I$. Escribiremos $F : \gamma \simeq \sigma$.

Definición A.2.4. ***(Levantamiento de una homotopía).*** *Sea F una homotopía de $I \times I$ en $\mathbb{S}^1$. Llamamos* ***levantamiento de la homotopía*** *F a cualquier aplicación continua $\hat{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi \circ \hat{F} = F$, es decir, que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\phi"] \\ I \times I \arrow[ur, "\hat{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Teorema A.2.2. *Sean γ y σ dos caminos en $\mathbb{S}^1$ que comienzan en z_0 y sea $F : \gamma \simeq \sigma$ rel$\{0,1\}$. Fijamos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(t_0) = z_0$. Sean $\hat{\phi}$ y $\hat{\sigma}$ los únicos levantamientos de γ y σ, respectivamente, que comienzan en t_0. Entonces,* *existe un único levantamiento* $\hat{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\hat{F} : \hat{\gamma} \simeq \hat{\sigma}\ rel\{0,1\}$.

Sea $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicacción continua. El grado de la aplicación f corresponderá a la idea intuitiva de número de veces que la imagen de f envuelve a $\mathbb{S}^1$. Así, el grado de la aplicación $f(z) = z^2$ será 2, mientras que el grado de $f(z) = 1/z = \overline{z}$ será -1.

Preparemos ahora la definición rigurosa. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{R} \arrow[d, "\phi"] \\ I \arrow[urr, "\hat{f}"] \arrow[r, "\phi|_I"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

donde $\hat{f}$ es un levantamiento de la aplicación $f \circ \phi|_I$ (recordemos que habíamos definido $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ mediante $\phi(t) = \cos 2\pi t + i \operatorname{sen} 2\pi t$).

Daremos a continuación la definición del concepto de grado y probaremos las propiedades que usaremos en esta demostración del Teorema Fundamental del Álgebra.

Definición A.2.5. ***(Grado de una aplicación continua de*** $\mathbb{S}^1$ ***en*** $\mathbb{S}^1$***).*** *Sea* f *una aplicación continua de* $\mathbb{S}^1$ *en* $\mathbb{S}^1$. *Denominamos* ***grado de f****, y lo denotamos por* $\operatorname{grd}(f)$, *al número*

$$\operatorname{grd}(f) = \hat{f}(1) - \hat{f}(0),$$

donde $\hat{f}$ *es un levantamiento de* $f \circ \phi|_I$.

Tengamos en cuenta que la aplicación $\phi(t) = \cos 2\pi t + i \operatorname{sen} 2\pi t$ es un homomorfismo del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ en el grupo multiplicativo $(\mathbb{S}^1, \cdot)$, y que su núcleo es $\mathbb{Z}$.

Proposición A.2.1. *El* $\operatorname{grd}(f)$ *es un número entero.*

Demostración. Tenemos que,

$$\phi(\operatorname{grd}(f)) = \phi(\hat{f}(1) - \hat{f}(0)) = \frac{\phi(\hat{f}(1))}{\phi(\hat{f}(0))} = \frac{f(\phi(1))}{f(\phi(0))} = \frac{f(1)}{f(1)} = 1.$$

De aquí se sigue que $\hat{f}(1) - \hat{f}(0) \in \mathbb{Z}$.

□

Proposición A.2.2. *El* $\mathrm{grd}(f)$ *está bien definido, es decir, no depende del levantamiento* $\hat{f}$.

Demostración. Supongamos que h es otro levantamiento de $f \circ \phi|_I$, entonces

$$\phi(\hat{f}(t) - h(t)) = \frac{\phi(\hat{f}(t))}{\phi(h(t))} = \frac{f(\phi(t))}{f(\phi(t))} = 1,$$

entonces $\hat{f}(t) - h(t)$ es un número entero, lo cual implica que $\hat{f}(t) - h(t)$ es constante (por ser una aplicación continua de I, que es un espacio conexo, en $\mathbb{Z}$, que es un espacio discreto). Luego $\hat{f}(1) - h(1) = \hat{f}(0) - h(0)$, es decir, $\hat{f}(1) - \hat{f}(0) = h(1) - h(0)$.

□

Proposición A.2.3. *Si* $f \simeq g$ *entonces* $\mathrm{grd}(f) = \mathrm{grd}(g)$.

Demostración. Suponemos $f \simeq g$. Existe entonces una homotopía F de $\mathbb{S}^1 \times I$ en $\mathbb{S}^1$ tal que $F(z, 0) = f(z)$ y $F(z, 1) = g(z)$, para todo $z \in \mathbb{S}^1$.

Consideramos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{R} \arrow[d, "\phi"] \\ I \times I \arrow[urr, "\hat{F}"] \arrow[r, "\phi|_I \times id"'] & \mathbb{S}^1 \times I \arrow[r, "F"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Observemos que $\hat{F}(z, 0)$ es un levantamiento de $f \circ \phi|_I$:

$$\phi(\hat{F}(z, 0)) = F(\phi|_I \times id)(z, 0) = F(\phi(z), 0) = f(\phi(z)),$$

y, análogamente, $\hat{F}(z, 1)$ es un levantamiento de $g \circ \phi|_I$.

Por lo tanto, $\mathrm{grd}(f) = \hat{F}(1, 0) - \hat{F}(0, 0)$ y $\mathrm{grd}(g) = \hat{F}(1, 1) - \hat{F}(0, 1)$, y tenemos que

$$\phi(\hat{F}(1, t) - \hat{F}(0, t)) = \frac{\phi(\hat{F}(1, t))}{\phi(\hat{F}(0, t))} = \frac{F(\phi(1, t))}{F(\phi(0, t))} = \frac{F(1, t)}{F(1, t)} = 1.$$

Entonces $\hat{F}(1, t) - \hat{F}(0, t)$ es un número entero, lo cual implica que la aplicación $\hat{F}(1, t) - \hat{F}(0, t)$ es constante (por ser de nuevo una aplicación continua del espacio conexo I, en el espacio discreto $\mathbb{Z}$). Concluimos que $\hat{F}(1, 0) - \hat{F}(0, 0)$ es igual a $\hat{F}(1, 1) - \hat{F}(0, 1)$.

□

Proposición A.2.4. $\mathrm{grd}(f \cdot g) = \mathrm{grd}(f) + \mathrm{grd}(g)$. *Notemos que "$\cdot$" denota la multiplicación de números complejos, es decir,* $(f \cdot g)(z) = f(z)g(z)$.

Demostración. Observemos que $\hat{f} + \hat{g}$ es un levantamiento de $(f \cdot g) \circ \phi|_I$:

$$\phi \circ (\hat{f} + \hat{g}) = (\phi\hat{f}) \cdot (\phi\hat{g}) = (f \circ \phi|_I) \cdot (g \circ \phi|_I) = (f \cdot g) \circ \phi|_I.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{grd}(f \cdot g) &= (\hat{f} + \hat{g})(1) - (\hat{f} + \hat{g})(0) \\ &= (\hat{f}(1) - \hat{f}(0)) + (\hat{g}(1) - \hat{g}(0)) \\ &= \mathrm{grd}(f) + \mathrm{grd}(g). \end{aligned}$$

□

Corolario A.2.1. $\mathrm{grd}(\frac{f}{g}) = \mathrm{grd}(f) - \mathrm{grd}(g)$.

Demostración. Es consecuencia directa de la proposición anterior. Puesto que toda función constante tiene grado 0, tenemos:

$$0 = \mathrm{grd}(1) = \mathrm{grd}(g \cdot \frac{1}{g}) = \mathrm{grd}(g) + \mathrm{grd}(\frac{1}{g}),$$

luego $\mathrm{grd}(\frac{1}{g}) = -\mathrm{grd}(g)$, por lo tanto,

$$\mathrm{grd}(\frac{f}{g}) = \mathrm{grd}(f \cdot \frac{1}{g}) = \mathrm{grd}(f) - \mathrm{grd}(g).$$

□

Corolario A.2.2. *Si $f \simeq cte$, entonces* $\mathrm{grd}(f) = 0$.

Demostración. Esto será consecuencia de la Proposición (A.2.3) ya que si $f \simeq cte$, entonces $\mathrm{grd}(f) = \mathrm{grd}(cte) = 0$.

□

Lema A.2.2. *Si $f : X \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua y no es sobreyectiva, entonces $f \simeq cte$.*

Demostración. Supongamos que $f : X \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es continua y no es sobreyectiva, es decir, existe un punto P perteneciente a $\mathbb{S}^1$ tal que $-P$ no está en la imagen de f.

Consideramos ahora las aplicaciones

$$X \xrightarrow{c_P} \mathbb{S}^1 \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{r} \mathbb{S}^1,$$

donde c_P es la aplicación constantemente igual a P, i la aplicación inclusión y r la aplicación que envía a cada x en $\frac{x}{\| x \|}$.

Ahora, por el lema fundamental de construcción de homotopías sabemos que $i \circ c_P \simeq i \circ f$. Luego $r \circ i \circ c_P \simeq r \circ i \circ f$, donde notamos que $r \circ i = id$. Así que $c_P \simeq f$.

$\square$

Finalmente, estamos en condiciones de demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra mediante las nociones y resultados comentados en esta sección:

Teorema A.2.3. ***(Teorema Fundamental del Álgebra)***
Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, con $a_n = 1$, un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos. Entonces P tiene raíces en $\mathbb{C}$.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $P(z)$ es distinto de 0, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Consideremos ahora la aplicación continua

$$F : \mathbb{S}^1 \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

$$(z, r) \longmapsto \frac{P(rz)}{|P(rz)|}$$

Sea $f_r : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación definida por $f_r(z) = F(z, r)$.

Entonces, por un lado, tenemos que $f_0(z) = F(z, 0) = \frac{P(0)}{|P(0)|} = \frac{a_0}{|a_0|} = cte$, luego $\operatorname{grd}(f_0) = 0$.

Y, por otra parte, veremos que, para r suficientemente grande, se verifica que $\operatorname{grd}(f_r) = n$, y veremos también que F induce una homotopía $f_0 \simeq f_r$. Llegando así a contradicción.

Sea $R > \text{máx}(\ \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|, 1\ )$. Para $|z| = 1$ tenemos:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| (R)^i \leq R^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| < R^n = |(Rz)^n|,$$

entonces

$$\left|\frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i}{(Rz)^n}\right| < 1.$$

Ahora bien,

$$\left|\frac{P(Rz)}{(Rz)^n} - 1\right| = \left|\frac{P(Rz) - (Rz)^n}{(Rz)^n}\right| = \left|\frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i}{(Rz)^n}\right| < 1,$$

por lo tanto, $\dfrac{P(Rz)}{(Rz)^n}$ tiene parte real mayor que 0. Así que

$$\frac{P(Rz)}{(Rz)^n}\left|\frac{(Rz)^n}{P(Rz)}\right| = \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}\frac{|(Rz)^n|}{(Rz)^n} = \frac{f_R(z)}{z^n}$$

también tiene parte real mayor que 0.

Luego la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto \frac{f_R(z)}{z^n} \end{aligned}$$

no es sobreyectiva y, de acuerdo con el lema precedente, $\dfrac{f_R(z)}{z^n}$ es homótopa a una constante. Por el Corolario (A.2.2), $\operatorname{grd}(\dfrac{f_R(z)}{z^n}) = 0$. Por último, gracias al Corolario (A.2.1),

$$0 = \operatorname{grd}(f_R) - \operatorname{grd}(z^n),$$

y $\operatorname{grd}(z^n) = n$, ya que la aplicación que manda t en nt es un levantamiento de la aplicación

$$t \longmapsto \cos 2\pi t + i \operatorname{sen} 2\pi t.$$

Así que $\mathrm{grd}(f_R) = n$.

Finalmente consideramos la aplicación

$$H : \mathbb{S}^1 \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

$$(z, t) \longmapsto F(z, Rt)$$

y vemos que $H(z, 0) = f_0$ y $H(z, 1) = f_R$. Por tanto, H establece una homotopía entre f_0 y f_R.

Como hemos visto que f_0 era constante, basta aplicar la Proposición (A.2.3) para concluir que $0 = \mathrm{grd}(f_0) = \mathrm{grd}(f_R) = n$, con lo que llegamos a una contradicción.

□

Bibliografía

[CG] F. Cucker and A. González-Corbalan, An alternate proof of the continuity of the roots of a polynomial, Amer. Math. Monthly, 96, No. 4, 1989, 342-345.

[FR] B. Fine and G. Rosenberger, The Fundamental Theorem of Algebra, Springer, 1997.

[GH] M.J. Greenberg and J.R. Harper, Algebraic Topology - A First Course, Perseus Books, 1981.

[GJ] L. Gillman and M. Jerison, Rings of Continuos Functions, Springer, 1960.

[HI] M. Henriksen and J.R. Isbell, On the continuity of the real roots of an algebraic equation, Proc. Amer. Math. Soc. 4, No.3, 1953, 131-134.

[HM 1] G. Harris and C. Martin, The roots of a polynomial vary continuously as a function of the coefficients, Proc. Amer. Math. Soc. 100, No. 2, 1987, 390-392.

[HM 2] G. Harris and C. Martin, Large roots yield large coeficients: An addendum to 'The roots of a polynomial vary continuously as a function of th coefficients', Proc. Amer. Math. Soc. 102, No. 4, 1988, 993-994.

[Mu] J.R. Munkres, Topología, Pearson, 2012.

[Sa] P. Sancho de Salas, Algebra I - Grado en Matemáticas, Universidad de Extremadura, 1991.