Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Singularidades de ecuaciones diferenciales lineales en el dominio complejo

Autor: Alberto González Sanz

Tutor: Javier Sanz Gil

D. JAVIER SANZ GIL, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que el presente trabajo, "Singularidades de ecuaciones diferenciales lineales en el dominio complejo", ha sido realizado bajo su dirección en el Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, por D. Alberto González Sanz, y constituye su Trabajo Fin de Grado para optar al título de Graduado/a en Matemáticas.

Que le consta que el trabajo es original e inédito, y que autoriza su presentación.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a 16 de julio de 2018.

Fdo.: Javier Sanz Gil

Índice general

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar una introducción elemental a la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) lineales, y a la teoría de EDOs lineales de orden $n \geq 2$, en el dominio complejo.

Este propósito hace necesaria la utilización de numerosos desarrollos teóricos contenidos en diversas asignaturas del Grado en Matemáticas. Especialmente, se requiere un conocimiento de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas lineales en el caso real, la teoría de funciones complejas de variable compleja, algunos elementos de análisis funcional, y el manejo de cuestiones básicas de álgebra lineal, en concreto en lo referente al álgebra matricial. Cabe destacar que, para no interrumpir el desarrollo de la exposición, se han dedicado dos apéndices a los resultados auxiliares de los que se hará uso en el trabajo y que, aun no estando habitualmente contenidos en las enseñanzas del Grado, sí pueden ser obtenidos rápidamente a partir de las mismas: nos referimos a los elementos de funciones holomorfas a valores en un espacio de Banach complejo y el concepto de prolongación analítica a lo largo de una curva (culminando en el teorema de monodromía), y a ciertos desarrollos del álgebra matricial (ecuaciones matriciales, y el estudio de la exponencial y los logaritmos de matrices).

El primer capítulo se dedica a la descripción de los sistemas que estudiaremos y sus propiedades básicas. Recordamos el concepto de dominio simplemente conexo, y comenzamos obteniendo el resultado clásico de existencia y unicidad de soluciones, definidas en todo tal dominio G, para el problema de Cauchy asociado a un sistema lineal de EDOs de orden uno cuya matriz de coeficientes es holomorfa en G. Se introduce el concepto de matriz fundamental y se presenta la fórmula de variación de las constantes, que permite tratar el problema no homogéneo si se conocen las soluciones del homogéneo, de forma similar a lo estudiado en el Grado para este tipo de problemas en el caso real. Completado el estudio en torno a los puntos regulares (aquellos en cuyo entorno la matriz del sistema es holomorfa), pasamos al análisis de los puntos singulares aislados. Se comienza describiendo cómo cambia una matriz fundamental cuando se la prolonga analíticamente a lo largo de una circunferencia que rodea la singularidad, lo que da lugar al concepto de factor y grupo de monodromía, que describimos someramente. Cierra este capítulo un estudio de sistemas con un aspecto favorable, que llamamos reducidos, y que jugarán un papel más adelante.

El segundo capítulo se dedica al estudio de las singularidades de primera especie, aquellas en las que la matriz del sistema presenta un polo de orden uno. Se trata primero el caso de buen espectro, en el que se puede obtener información muy completa sobre las soluciones del sistema, para abordar a continuación el caso general. Una conclusión interesante es que toda singularidad de primera especie es regular, en el sentido de que las soluciones tienen un crecimiento moderado cuando se tiende con la variable a la singularidad. Mostramos con un ejemplo que el recíproco no es cierto, es decir, hay singularidades de segunda especie y regulares. Concluimos este capítulo ilustrando los resultados obtenidos con un análisis de los denominados sistemas hipergeométricos confluentes.

En el tercer capítulo se estudian EDOs lineales de orden $n \geq 2$, en parte mediante su posible transformación en un sistema lineal de EDOs de orden uno. También aquí se puede hablar de singularidades de primera y segunda especie de la ecuación, y resulta que, en este caso, las de primera especie son precisamente las singularidades regulares. Centrándonos en este caso, es posible dar un método práctico, llamado de Frobenius, para la construcción de una base del espacio de soluciones de una ecuación en torno a la singularidad, a lo que dedicamos el resto del capítulo. Aunque el desarrollo se hace para orden arbitrario n, se ha considerado relevante detallar el procedimiento en el caso más sencillo y, a la vez, más interesante desde el punto de vista de las aplicaciones, el correspondiente a $n = 2$.

Notación y terminología

$\mathbb{C}$	Cuerpo de los números complejos.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales, $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	Conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbf{x}'$	Derivada, componente a componente, de un vector complejo.
$\Vert A \Vert$	Norma matricial de la matriz A.
$D(z_0, \rho)$	Disco abierto de centro z_0 y radio ρ.
$\det$	Determinante.
I	Matriz identidad.
$C(a, \epsilon)$	Circunferencia de centro a y radio ϵ.
$R(a, \rho_1, \rho_2)$	Corona circular de radio a y radios ρ_1, ρ_2.
$\log(z), \ \exp(z)$	Función logaritmo y exponencial compleja.
$\mathrm{diag}[k_1 I_{\nu_1}, \dots, k_l I_{\nu_l}]$	Matriz diagonal por bloques de tamaño ν_k, con bloques diagonales $k_1 I_{\nu_1}, \dots, k_l I_{\nu_l}$.
$\mathrm{Re}\ z$	Parte real de $z \in \mathbb{C}$.
$\mathrm{Im}\ z$	Parte imaginaria de $z \in \mathbb{C}$.
$D^*(0, r)$	Disco punteado de centro 0 y radio r.
$\mathbf{H}(G, \mathbb{E})$	Conjunto de funciones holomorfas de G en E.

Capítulo 1

PROPIEDADES BÁSICAS

Consideramos G un abierto conexo de $\mathbb{C}$, a este tipo de conjuntos les llamaremos dominios. Sea $\nu \geq 1$ un número natural, y sea $A(z)$ una matriz de dimensión $\nu \times \nu$ y de coeficientes $(a_{i,j}(z))$, los cuales son funciones holomorfas en G. Por supuesto, se puede considerar A como una función matricial de G en $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, que es holomorfa en el sentido especificado en el apéndice A para funciones a valores en un espacio de Banach complejo como $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, dotado de una cualquiera de las normas habituales, todas ellas equivalentes entre sí por tratarse de un espacio de dimensión finita.

Nos planteamos el siguiente problema: buscar $\mathbf{x}$ vector columna de funciones holomorfas en G, $\mathbf{x}(z) = (x_1(z), \ldots, x_\nu(z))$, tal que:

$$\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}\ , \qquad z \in G. \tag{1.1}$$

Aquí se ha utilizado la notación estándar, siendo $\mathbf{x}$ el vector columna $\mathbf{x}(z) = (x_1(z), \ldots, x_\nu(z))$, $z \in G$.

El resultado, en cuanto al análisis de la existencia y unicidad de soluciones, depende de la topología del conjunto. Veremos que, fijando una condición inicial, este problema tiene solución única en todo dominio simplemente conexo.

1.1. Dominios simplemente conexos

Empezaremos definiendo lo que entendemos por un dominio simplemente conexo a partir del concepto de homotopía.

Definición 1.1. Sea G un dominio de $\mathbb{C}$, sean β y γ dos curvas en G, es decir, sendas aplicaciones $\beta,\ \gamma : [0,1] \to G$ continuas. Diremos que $\beta,\ \gamma$ son *homotópicas* en G si existe una función

$$F : [0,1] \times [0,1] \to G,$$

continua, tal que

$$F(t,0) = \beta(t), \quad F(t,1) = \gamma(t).$$

A esta función la llamaremos *homotopía* entre β y γ .

Definición 1.2. Sea G un dominio de $\mathbb{C}$, diremos que es *simplemente conexo* si toda curva en G, es decir, toda aplicación $\gamma : [0,1] \to G$ continua, es homotópicamente equivalente a un punto, es decir, a una curva constante.

Como hemos comentado antes la existencia de soluciones depende, en gran medida, de la topología de G. En este caso si G es simplemente conexo, podremos garantizar, con los siguientes teoremas, que si damos una condición inicial la solución será única. Para demostrar esto comenzaremos tratando el problema en modo local, es decir, en un entorno de un punto. Deduciremos la unicidad y existencia de las soluciones locales, y comentaremos cómo extender esta solución, de modo único, sobre todo el dominio G gracias al teorema de monodromía.

Comenzamos explotando la fórmula de Cauchy-Hadamard para estimar el tamaño de los coeficientes de la serie de Taylor de una función holomorfa en el correspondiente disco de convergencia.

Sea E un espacio de Banach complejo. Como se puede ver en el Apéndice A, las funciones holomorfas en un abierto de $\mathbb{C}$ y a valores en E son precisamente las funciones analíticas en dicho abierto, es decir, aquellas que se pueden representar localmente, en un entorno de cada punto, mediante una serie de potencias adecuada centrada en ese punto y con coeficientes en E.

Para $f_n \in E$, $n \in \mathbb{N}_0$, consideramos las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-z_0)^n$. Definimos su radio de convergencia ρ mediante la igualdad

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|^{1/n},$$

denominada fórmula de Cauchy-Hadamard. Siguiendo el convenio habitual $1/0 = \infty$, y viceversa. Para todo $K > 1/\rho$ tenemos que $\|f_n\| \leq K^n$, para todo $n \geq n_0$. Para todo $k < 1/\rho$ se cumple que $\|f_n\| \geq k^n$ un número infinito de veces. Esto muestra que, al igual que en el caso escalar, la serie de potencias vectorial converge absolutamente en $D(z_0, \rho)$ y uniformemente en cada disco estrictamente contenido en él, mientras que diverge para todo z, con $|z| > \rho$.

Lema 1.3. Sea $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,(z - z_0)^n$ holomorfa en un entorno de z_0, $|z - z_0| < \rho$, entonces para todo $K > 1/\rho$ existe $c > 0$ tal que $\|A_n\| \leq c\,K^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración:
Por la fórmula de Cauchy-Hadamard, para todo $K > 1/\rho$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $\sqrt[n]{\|A_n\|} < K$. Despejando y tomando $c = \sup\{1 + \frac{\|A_n\|}{K^n},\ n \leq n_0\}$, tenemos la desigualdad buscada para todos los naturales. $\square$

Lema 1.4. Sea el sistema $\mathbf{x}' = A(z)\mathbf{x},\ z \in G$ con A holomorfa en una región $G \subset \mathbb{C}$, entonces para cada $z_0 \in G$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^\nu$ existe una única función $\mathbf{x}(z)$ holomorfa en el mayor disco, $D = D(z_0, \rho)$, centrado en z_0 y contenido en G, tal que

$$\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}, \qquad z \in D, \qquad \mathbf{x}(z_0) = \mathbf{x}_0. \tag{1.2}$$

Demostración:
Comencemos con la unicidad, supongamos que tenemos una solución de (1.2) $\mathbf{x}(z)$ holomorfa en algún disco D_0 centrado en z_0 y de radio $\rho_0 > 0$, entonces podemos representar $\mathbf{x}$ como una serie de potencias de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}_n (z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < \rho_0,$$

donde los $\mathbf{x}_n \in \mathbb{C}^m$ para todo $n \in \mathbb{N}$ son los vectores de coeficientes, y $\mathbf{x}_0$ viene dado por la condición inicial. De igual modo, podemos expandir $A(z)$ como serie de potencias,

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < \rho_0, \tag{1.3}$$

siendo $A_n \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ las matrices de coeficientes.
Derivando la serie de $\mathbf{x}$ e insertando en la ecuación diferencial ambas expresiones tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\mathbf{x}_{n+1} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}_n (z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < \rho_0.$$

Usando la definición de producto de Cauchy e igualando componente a componente, por el principio de identidad, obtenemos las igualdades

$$(n+1)\,\mathbf{x}_{n+1} = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}\,\mathbf{x}_m,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

Es evidente que podemos ir despejando cada $\mathbf{x}_n$ en función de los anteriores, lo cual de forma inmediata demuestra la unicidad ya que los coeficientes han de serlo.
Para probar la existencia es suficiente probar que la serie anterior, que resulta de la solución del sistema (1.4), y que se puede considerar como solución formal de (1.2), es de hecho convergente, es decir, que la serie representa una función holomorfa en el mayor disco $D(z_0, \rho)$ de centro z_0 y radio ρ contenida en G. Para ello, la convergencia de la serie de $A(z)$ nos garantiza, en virtud del lema 1.3, que para todo $K > 1/\rho$ existe c tal que $\|A_n\| \leq c\, K^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Ahora tomando normas en (1.4), aplicando la desigualdad triangular y la propiedad $\|B\mathbf{x}\| \leq \|B\|\|\mathbf{x}\|$, válida para toda matriz cuadrada B y vector $\mathbf{x}$, se deduce que tenemos

$$(n+1)\,\|\mathbf{x}_{n+1}\| \leq \sum_{m=0}^{n} \|A_{n-m}\|\,\|\mathbf{x}_m\| \leq \sum_{m=0}^{n} c\,K^{n-m}\|\mathbf{x}_m\|. \tag{1.5}$$

Definimos la siguiente sucesión:

$$c_0 = \|\mathbf{x}_0\|, \quad (n+1)c_{n+1} = \sum_{m=0}^{n} c\,K^{n-m}\,c_m,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.6}$$

la cual verifica que $\|\mathbf{x}_n\| \leq c_n$, afirmación que probaremos aplicando el principio de inducción:
Para el caso $n = 0$, por la definición de c_0, tenemos que $c_0 = \|\mathbf{x}_0\|$, entonces queda probado. Sea ahora $n \geq 0$, supongamos la desigualdad cierta para todo $k \leq n$ y probémosla para $n+1$. Aplicando la hipótesis de inducción en la desigualdad (1.5) y utilizando (1.6) se deduce que

$$(n+1)\,\|\mathbf{x}_{n+1}\| \leq \sum_{m=0}^{n} c\,K^{n-m}c_n = c_{n+1}(n+1).$$

Es sencillo comprobar que la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,z^n$ es la solución formal del problema de Cauchy $y' = c\,(1-K\,z)^{-1}\,y$, con condición inicial $y(0) = c_0$. Pero este problema se resuelve de forma elemental y, de hecho, se comprueba fácilmente que la solución es $y(z) = c_0\,(1-K\,z)^{-c/K}$, holomorfa en $|z| < 1/K$, ahora bien, gracias a la unicidad, probada antes, tenemos que $f(z) = y(z)$ en $|z| < 1/K$, luego f es holomorfa en este dominio. Esto en particular quiere decir, en virtud de la convergencia absoluta de una serie de potencias en su disco abierto de convergencia, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\|\,|z-z_0|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|z-z_0|^n < \infty, \quad \text{si } |z-z_0| < 1/K.$$

Esto prueba que el radio de convergencia de $\mathbf{x}$ es al menos $1/K$ para cada $K > 1/\rho$, luego su radio será al menos ρ, lo cual concluye la demostración.□

Tras este lema que garantiza la existencia y unicidad de soluciones locales formulamos el teorema que se refiere a esto mismo pero en un dominio más general, el simplemente conexo.

Teorema 1.5 (Unicidad y existencia en simplemente conexos)**.** Se considera el problema anterior, donde $A(z)$ es holomorfa en $G \subset \mathbb{C}$ dominio simplemente conexo. Entonces para cada $z_0 \in G$ y cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^\nu$ existe una única función $\mathbf{x}$ holomorfa en G tal que

$$\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}, \quad z \in G, \quad \mathbf{x}(z_0) = \mathbf{x}_0.$$

Demostración:
Sea $z_0 \in G$, consideramos el disco $D = D(z_0, \rho) \subset G$ descrito en el lema 1.4. Por este mismo lema existe una solución del problema de Cauchy en D, consideramos el germen (f, D) y tomamos $z_1 \notin D$ y una curva γ con soporte, γ^*, contenido en G y que une ambos puntos z_0 y z_1. Utilizando la compacidad del soporte de la curva podemos garantizar que existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ y $\epsilon_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, tales que los discos $D_k = D(\gamma(t_k), \epsilon_k)$ recubren γ^*, $D_0 = D$ y $\gamma(t_{k-1}) \in D(\gamma(t_k), \epsilon)$ para $k = 1, \ldots, n$.
En la primera bola tenemos bien definido el problema de Cauchy:

$$\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}, \quad z \in D_0, \quad \mathbf{x}(\gamma(t_0)) = \mathbf{x}_0,$$

del cual sabemos, en virtud del lema 1.4, que tiene solución única $\mathbf{x}_0$.
En la segunda bola definimos otro problema de Cauchy:

$$\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}, \quad z \in D_1, \quad \mathbf{x}(\gamma(t_1)) = \mathbf{x}_0(\gamma(t_1)),$$

al igual que antes, en virtud del lema 1.4, tiene solución única $\mathbf{x}_1$.
Ahora bien, es evidente que tanto $\mathbf{x}_0$ como $\mathbf{x}_1$ son solución del problema de Cauchy en la intersección, $D_0 \cap D_1$,

$$\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}, \quad z \in D_0 \cap D_1, \quad \mathbf{x}(\gamma(t_1)) = \mathbf{x}_0(\gamma(t_1)).$$

Por construcción, sabemos que existirá $\epsilon > 0$ tal que $D(\gamma(t_1), \epsilon) \subset D_0 \cap D_1$, en ese disco formulamos otro problema de Cauchy nuevo:

$$\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}, \quad z \in D(\gamma(t_1), \epsilon), \quad \mathbf{x}(\gamma(t_1)) = \mathbf{x}_0(\gamma(t_1)),$$

de nuevo con solución única. Teniendo en cuenta que $D(\gamma(t_1), \epsilon) \subset D_0 \cap D_1$, entonces $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}_1$ en $D(\gamma(t_1), \epsilon)$, y aplicando el principio de identidad, podemos concluir que coinciden en la intersección $D_0 \cap D_1$. Así, el germen $(\mathbf{x}_1, D_1)$ es prolongación analítica directa del germen $(\mathbf{x}_0, D_0)$. Podemos iterar este procedimiento en cada $k = 1, \ldots, n$ y concluir que el germen $(\mathbf{x}_0, D_0)$ es arbitrariamente prolongable a lo largo de cualquier curva contenida en G, y como G es simplemente conexo, la demostración se termina haciendo uso del teorema de monodromía. □

1.2. Solución fundamental

Ahora trabajaremos sobre el concepto de solución fundamental, la definición, la existencia y así como de la relación entre las mismas. Este concepto adquiere importancia ya que gracias a él se pueden hallar todas las soluciones existentes, independientemente de la condición inicial.

Definición 1.6. Considerando el problema $\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x},\ z \in G$ con G dominio de $\mathbb{C}$, diremos que $X(z)$, función matricial definida en G con valores en $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, es una solución fundamental del problema si es holomorfa en G, $X'(z) = A(z)X(z)$ para todo $z \in G$, es decir, sus columnas son solución del problema $\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x},\ z \in G$, y además su determinante es no nulo para todo $z \in G$.

Definición 1.7. Sea A una matriz cuadrada, definimos la traza de A, $\text{traza}(A)$, como la suma de sus elementos diagonales.

Proposición 1.8. Sea $X : G \to \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ una función holomorfa en $G \subset \mathbb{C}$, dominio simplemente conexo, solución del problema $X'(z) = A(z)\,X(z)$, $z \in G$. Consideramos $w(z) = \det(X(z))$ y $a(z) = \text{traza}(X(z))$, entonces se verifica que para cualquier $z_0 \in G$ arbitrario

$$w(z) = w(z_0)\ \exp\left(\int_{z_0}^{z} a(u)\,du\right), \qquad z \in G, \tag{1.7}$$

donde la integral se realiza a lo largo de cualquier curva diferenciable a trozos con soporte en G y que una los puntos z_0 y z. En particular $w(z) = 0$ en un punto si y solo si lo es en todo punto.

Demostración:
La definición de determinante nos garantiza que $w'(z) = \sum_{k=1}^{\nu} w_k(z)$, donde cada w_k corresponde con el determinante de la matriz que resulta al cambiar en $X(z)$ la fila k-ésima por su derivada. Si denotamos $f_k(z)$ a la fila k-ésima, $w_k(z) = \det(\mathbf{f}_1(z), ..., \mathbf{f}'_k(z), ..., \mathbf{f}_n(z))$, usando que $X'(z) = A(z)\, X(z)$, tenemos que $\mathbf{f}'_k(z) = \sum_{j=1}^{v} a_{k\,j}\, \mathbf{f}_j(z)$. Volviendo a la fórmula anterior tenemos

$$\begin{aligned} w'(z) &= \sum_{k=1}^{v} \det(\mathbf{f}_1(z), ..., \sum_{j=1}^{\nu} a_{k\,j}\, \mathbf{f}_j(z), ..., \mathbf{f}_n(z)) \\ &= \sum_{k=1}^{v} \sum_{j=1}^{\nu} \det(\mathbf{f}_1(z), ..., a_{k\,j}\, \mathbf{f}_j(z), ..., \mathbf{f}_n(z)) \end{aligned}$$

Como $\det(\mathbf{f}_1(z), ..., a_{k\,j}\, \mathbf{f}_j(z), ..., \mathbf{f}_n(z)) = 0$ si $j \neq k$ obtenemos que

$$w'(z) = \sum_{k=1}^{\nu} \det(\mathbf{f}_1(z), ..., a_{k\,k}\, \mathbf{f}_k(z), ..., \mathbf{f}_n(z)) = (\sum_{k=1}^{\nu} a_{k\,k})\, w(z) = a(z)\, w(z).$$

Ahora resolviendo la ecuación diferencial anterior obtenemos justamente lo pedido. $\square$

Proposición 1.9 (Existencia de solución fundamental)**.** Consideramos el problema $X'(z) = A(z)\, X(z)$, $z \in G$, con G dominio simplemente conexo, entonces existe al menos una solución fundamental $X(z)$.

Demostración:
Sea $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, \nu$ solución de $\mathbf{x}' = A(z)\, \mathbf{x},\ z \in G$ tal que $\mathbf{x}(z_0) = \mathbf{e}_i$ con $z_0 \in G$, siendo $\mathbf{e}_i$ el vector i-ésimo de la base canónica. Entonces si $X = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\nu)$ tendremos claramente que $\det(X(z_0)) = 1 \neq 0$, luego por la proposición 1.8 concluimos. $\square$

Teorema 1.10. Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo, supongamos que $X(z)$ es solución de $X'(z) = A(z)\, X(z)$, $z \in G$ y $\mathbf{x}(z)$ lo es de $\mathbf{x}' = A(z)\, \mathbf{x},\ z \in G,\ \mathbf{x}(z_0) = \mathbf{x}_0$ con $z_0 \in G$. Para $\mathbf{c} = X^{-1}(z_0)\, \mathbf{x}_0$ tenemos

$$\mathbf{x}(z) = X(z)\, \mathbf{c}, \quad z \in G.$$

Por lo tanto, las soluciones del problema forman un espacio vectorial, donde las columnas de X forman una base.

Demostración:
En primer lugar, sea $\mathbf{y}(z) = X(z)\,\mathbf{c},\ z \in G$. Es claro que $\mathbf{y}$ es holomorfa en G, y derivando

$$\mathbf{y}'(z) = X'(z)\,\mathbf{c} = A(z)\,X(z)\,\mathbf{c} = A(z)\,\mathbf{y}(z),$$

en segundo lugar

$$\mathbf{y}(z_0) = X(z_0)\,\mathbf{c} = X(z_0)\,X^{-1}(z_0)\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0.$$

Por la unicidad de soluciones para los problemas de Cauchy, teorema 1.5, se deduce que $\mathbf{y}(z) = \mathbf{x}(z)$, para todo $z \in G$, como queríamos. □

De esta manera tenemos garantizado que encontrando ν soluciones linealmente independientes podremos hallar todas las que existan, además de forma inmediata podemos saber cómo son todas las soluciones fundamentales a partir de una.

Proposición 1.11. Supongamos que $X(z)$ es solución fundamental de $X'(z) = A(z)\,X(z)$, $z \in G$, entonces se verifica que $Y(z)$ es solución fundamental si y solo si $Y(z) = X(z)\,C$, siendo C una matriz $\nu \times \nu$ constante invertible.

Demostración:
Supongamos $Y(z) = X(z)\,C$, siendo C como en el enunciado, entonces como $X'(z) = A(z)\,X(z)$, $z \in G$ se tiene que $X'(z)\,C = A(z)\,X(z)\,C$, luego Y es solución fundamental, puesto que C es invertible:

$$\det Y(z) = \det X(z) \cdot \det C \neq 0,\ \ z \in G.$$

Recíprocamente, si Y es solución fundamental y fijamos un punto $z_0 \in G$, es claro que $Y^{-1}(z_0)X(z_0)$ es una matriz constante invertible, por lo que, gracias a lo anterior, $\tilde{Y}(z) = Y(z)Y^{-1}(z_0)X(z_0)$ es también solución fundamental. Ahora bien, es claro que $X(z)$ e $\tilde{Y}(z)$ resuelven el mismo problema de Cauchy en el punto z_0, y por la unicidad de soluciones se deduce que

$$X(z) = \tilde{Y}(z) = Y(z)\,C,$$

siendo $C = Y^{-1}(z_0)X(z_0)$. □

1.3. Sistema no homogéneo

Ahora nos planteamos hallar soluciones de un sistema lineal no homogéneo, es decir, con el término independiente de $\mathbf{x}(z)$ no nulo, y nos preguntamos por la forma de sus soluciones y la información que nos da el sistema

homogéneo.
El sistema puede ser descrito de la siguiente manera. Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio, buscamos $\mathbf{x}$ vector de funciones holomorfas en G tal que:

$$\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(z), \qquad z \in G, \tag{1.8}$$

donde A es una matriz de dimensión $\nu \times \nu$, de coeficientes $(a_{i,j}(z))_{1 \leq i,j \leq \nu}$, los cuales son funciones holomorfas en G, y $\mathbf{b}(z)$ es un vector de funciones holomorfas también en G.
La unicidad del problema, cuando damos condiciones iniciales $\mathbf{x}(z_0) = \mathbf{x}_0$, es evidente, sin más que recurrir a la unicidad del homogéneo:
Si tenemos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ soluciones del sistema (1.8) entonces $\mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ es solución del problema $\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}$, con $\mathbf{x}(z_0) = \mathbf{0}$, por unicidad ha de ser $\mathbf{q}(z) = \mathbf{0}$ en G, y por lo tanto $\mathbf{x}(z) = \mathbf{y}(z)$, para todo $z \in G$.

Teorema 1.12 (Variación de las constantes)**.** Sea G un dominio simplemente conexo, y consideremos el sistema no homogéneo (1.8). Si $X(z)$ es solución fundamental del correspondiente sistema homogéneo en G, entonces todas las soluciones de (1.8) serán de la forma

$$\mathbf{x}(z) = X(z)\,(\mathbf{c} + \int_{z_0}^{z} X^{-1}(u)\,\mathbf{b}(u)\,du), \qquad z \in G, \tag{1.9}$$

con $z_0 \in G$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^\nu$ arbitrarios.

Demostración:
Derivando $\mathbf{x}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(z) &= X'(z)\,\left(\mathbf{c} + \int_{z_0}^{z} X^{-1}(u)\,\mathbf{b}(u)\,du\right) + X(z)\,X^{-1}(z)\,\mathbf{b}(z) \\
&= X'(z)\,\left(\mathbf{c} + \int_{z_0}^{z} X^{-1}(u)\,\mathbf{b}(u)\,du\right) + \mathbf{b}(z) \\
&= A(z)\,X(z)\,\left(\mathbf{c} + \int_{z_0}^{z} X^{-1}(u)\,\mathbf{b}(u)\,du\right) + \mathbf{b}(z) \\
&= A(z)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(z),
\end{aligned}$$

luego es solución del problema. Veamos ahora que todas son de esta forma. Sea $\mathbf{x}_0(z)$ solución de (1.8), que será obviamente la solución del problema de valores iniciales con $\mathbf{x}(z_0) = \mathbf{x}_0(z_0)$. Si utilizamos en (1.9) este valor de z_0 y tomamos $\mathbf{c} = X^{-1}(z_0)\,\mathbf{x}_0(z_0)$, entonces $\mathbf{x}(z_0) = \mathbf{x}_0(z_0)$, y por la unicidad antes comentada tenemos la prueba. $\square$

Esto aclara completamente la estructura de las soluciones, donde nos vale con resolver primero el sistema homogéneo y luego hallar una solución particular.

1.4. Región general

Volviendo a problemas homogéneos, hemos estudiado las propiedades básicas de las soluciones en una región simplemente conexa, donde la existencia y unicidad, en los problemas de Cauchy, se verifican siempre. En dominios generales no tenemos esa garantía, luego tenemos que estudiar la forma del conjunto a la par que las singularidades de la matriz $A(z)$, lo cual nos llevará a una clasificación de los problemas.

Localmente hablando, en todo disco donde $A(z)$ sea holomorfa podemos dar una solución al problema homogéneo; si la región es conexa, será conexa por caminos por ser abierto, y podremos ir extendiendo las soluciones de un punto a otro. En otras palabras, los gérmenes de solución son arbitrariamente prolongables en el dominio. Si el dominio es simplemente conexo, gracias al teorema de monodromía se obtiene así la solución global, pero si no lo es, se ha de estudiar la función así definida en la superficie de Riemann correspondiente, y jugará un papel relevante el grupo fundamental del dominio.

Trabajaremos, en lo que sigue, sobre un dominio concreto pero muy representativo, las coronas circulares, $R = R(z_0, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$ con $0 \leq \rho_1 < \rho_2$. Para estos conjuntos vale con conocer el comportamiento de las soluciones al extenderlas una vuelta, es decir, sobre circunferencias concéntricas en z_0.

Definición 1.13. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva, diremos que es un lazo si $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Observación 1.14. Supongamos que tenemos X solución fundamental del problema homogéneo en $D = D(z_1, \delta) \subset G$, y denotamos por $\tilde{X}$ a su prolongación analítica por un lazo que empieza y acaba en z_1. De acuerdo con la proposición 1.11, existirá una matriz invertible C tal que $\tilde{X} = XC$. Tomamos Y, otra solución fundamental del problema en D, la cual se relaciona análogamente con X mediante $Y = X\,T$, para alguna matriz regular T. Entonces, si denotamos por $\tilde{Y}$ a la extensión de Y por el mismo lazo, tenemos:

$$\tilde{Y} = \tilde{X}\,T = X\,C\,T = X\,T\,T^{-1}\,C\,T = Y\,T^{-1}\,C\,T.$$

Proposición 1.15. Supongamos que tenemos el problema homogéneo con $G = R(z_0, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$, con $0 \leq \rho_1 < \rho_2$, anteriormente descrito, sea $X(z)$ una solución fundamental en el disco $D =$

$D(z_1, \delta) \subset G$. Entonces existe una matriz $M \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ tal que para una rama arbitraria pero fija de $(z-z_0)^M = \exp(M\ \log(z-z_0))$ en D, la función

$$S(z) = X(z)\,(z-z_0)^{-M}, \qquad z \in G \tag{1.10}$$

es univaluada en G. A esta matriz M la llamaremos matriz de monodromía.

Demostración:
Consideramos $X(z)$ la solución fundamental en D, si prolongamos analíticamente a lo largo de $C(z_0, |z_0-z_1|)$, la circunferencia de centro z_0 y radio $|z_0-z_1|$, recorrida en sentido positivo, tendremos una nueva solución fundamental $\tilde{X}$ en D. Por la proposición 1.11 tenemos que $\tilde{X} = X\,C$, con C cierta matriz invertible.
Definimos M tal que $C = \exp(2\pi i M))$, que existe, puesto que toda matriz no singular admite logaritmo, véase el apéndice de funciones matriciales.
Al realizar la prolongación analítica tenemos que para cada $z \in D$,

$$\begin{aligned}(\widetilde{(z-z_0)^M}) &= \exp(M\ (\log(z-z_0) + 2\pi i)) \\ &= \exp((M\ \log(z-z_0))\,C = (z-z_0)^M.\end{aligned}$$

Si se define ahora $S(z)$ como en (1.10), su prolongación analítica a lo largo de $C(z_0, |z_0-z_1|)$ será

$$\begin{aligned}\tilde{S}(z) = \tilde{X}(z)\widetilde{(z-z_0)}^{-M} &= X(z)\,C\,(z-z_0)^{-M}\exp(-2\pi i M) \\ = X(z)\,(z-z_o)^{-M}C\,C^{-1} &= S(z).\end{aligned}$$

Por lo tanto la función $S(z)$ es univaluada en G (en el sentido de que coincide con sus prolongaciones analíticas a lo largo de curvas que rodeen a la singularidad z_0). □

1.5. Grupo de monodromía

Supongamos que tenemos un problema del tipo (1.1), donde las singularidades de $A(z)$ son aisladas. Como hemos comentado antes, si tomamos un punto $z_0 \in G \subset \mathbb{C}$ y en un entorno suyo D, habrá una solución fundamental X, la cual si la extendemos por un lazo, camino que tiene el mismo punto de llegada que de salida, en virtud de la proposición 1.11, nos da otra solución de la forma $X^*(z) = X(z)\,W$, donde W es una matriz regular y constante la cual llamaremos factor de monodromía. Aunque no será utilizado en lo sucesivo, es interesante describir cómo se puede dotar al conjunto de dichos factores de una estructura de grupo, íntimamente relacionado con el grupo de homotopía correspondiente al abierto G desprovisto de las singularidades de $A(z)$.

Definición 1.16. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva, diremos que es simple si $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ para todo $s, t \in [0,1]$ tales que $|s-t| \in (0,1)$.

Proposición 1.17. Si dos lazos son homotópicamente equivalentes entonces su factor de monodromía es el mismo.

Demostración:

Sean γ_1, γ_2 dos lazos homotópicamente equivalentes sobre z_0, entonces evidentemente $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ es equivalente a la identidad, luego aplicando el teorema de monodromía obtenemos que al extender por γ el factor de monodromía no varía. Si denotamos C_k al factor correspondiente a la curva γ_k tenemos

$$X = X^{**} = C_{-2}\, X^* = C_{-2}\, C_1\, X,$$

como X es invertible, tenemos que justo una es la inversa de la otra, y además $C_{-2} = C_2^{-1}$, concluimos la prueba. $\square$

Sabemos que las clases de homotopía pueden ser dotadas de una estructura de grupo, de igual forma podemos hacer con los factores de monodromía.

Proposición 1.18. Definimos el conjunto

$$\Gamma = \{C : \ C \ \text{ es factor de monodromía del problema } \ (1.1)\},$$

entonces se verifica que $(\Gamma, \cdot)$ es un grupo, siendo $\cdot$ el producto clásico de matrices.

Demostración:
Es suficiente comprobar que es subgrupo del grupo de matrices, es decir:

1. $I \in \Gamma$.

2. Si $B \in \Gamma$ entonces $B^{-1} \in \Gamma$.

3. Si $A, B \in \Gamma$, entonces $A\, B \in \Gamma$.

Lo cual se justifica, de forma no muy detallada, en las siguientes líneas.
1. Es evidente, basta tomar una curva contenida en un entorno simplemente conexo.
2. B^{-1} corresponde con la curva tomada en dirección opuesta.
3. El producto de ambas se corresponde con la concatenación de las curvas.

$\square$

Si suponemos ahora que las singularidades del sistema son finitas podremos saber mucha información del grupo.

Supongamos que son $a_1, ..., a_m$ las singularidades del sistema (1.1). Tomamos $z_0 \in G^* = G \setminus \{a_1, ..., a_m\}$, entonces existe ϵ tal que el disco punteado de centro a_k y radio ϵ está contenido en G^*, $D^*(a_k, \epsilon) \subset G^*$. Sea $z_k \in C(a_k, \epsilon/2)$, existe una curva simple ϕ_k que une z_0 con este punto y una parametrización C de $C(a_k, \epsilon/2)$ que comienza en z_k orientada positivamente. Sea la curva γ_k la correspondiente a la concatenación de ambas, es decir:

$$\gamma_k(t) = \begin{cases} \phi_k(3t) & \text{si } t \leq 1/3 \\ C(3(t-1/3)) & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ \phi_k(1-3t) & \text{si } 2/3 \leq t \end{cases}$$

Este es un lazo, que visualmente corresponde con aproximarse a una singularidad darla una vuelta y retornar de forma simple al punto de partida.
Si G es simplemente conexo y las singularidades son finitas, se puede comprobar que los generadores del grupo son justamente estos descritos anteriormente, que son finitos y fácilmente visualizables.
Esto nos ayuda a la hora de trabajar con conjuntos aparentemente raros, ya que podremos restringirlos a cada una de las singularidades por separado para realizar su estudio.

1.6. Sistemas reducidos

En estos parágrafos trabajaremos con un sistema (1.1) , donde la matriz $A(z)$ es triangular por bloques. Sin pérdida de generalidad, supondremos que la matriz es triangular inferior por bloques, para el otro tipo también se verifica y las pruebas son idénticas, es decir, tenemos la estructura

$$A(z) = \begin{bmatrix} A_{11}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l1}(z) & A_{l2}(z) & \cdots & A_{ll}(z) \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

con $l > 1$, los bloques $A_{kj}(z)$ son todos holomorfos en una misma región G, los bloques diagonales son cuadrados con dimensiones arbitrarias $\nu_k \times \nu_k$, en este caso diremos que el problema (1.1) está reducido en $(\nu_1, ..., \nu_l)$.

Teorema 1.19. Dada una matriz $A(z)$ de la forma (1.11), el sistema (1.1) con esta matriz tiene una solución fundamental de la forma

$$X(z) = \begin{bmatrix} X_{11}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ X_{21}(z) & X_{22}(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{l1}(z) & X_{l2}(z) & \cdots & X_{ll}(z) \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

con $X_{kk}(z)$ solución fundamental del sistema

$$\mathbf{x}'_k = A_{kk}(z)\,\mathbf{x}_k, \;\; z \in G, \tag{1.13}$$

y donde los bloques no diagonales se obtienen de forma recursiva de la relación

$$X_{kj}(z) = X_{kk}(z)\,[C_{kj} + \int_{z_0}^{z} X_{kk}^{-1}(u)\,Y_{kj}(u)\,du], \quad z \in G, \tag{1.14}$$

con $z_0 \in G$ arbitrario, al igual que las matrices C_{kj}, e

$$Y_{kj}(u) = \sum_{s=j}^{k-1} A_{ks}(u)\,X_{sj}(u).$$

Además todas las soluciones fundamentales triangulares por bloques de la forma (1.12) se obtienen de esta manera.

Demostración:
En primer lugar $X(z)$, definida como en el enunciado, es claramente derivable por construcción, luego derivando en (1.14) obtenemos, para $k > j$:

$$\begin{aligned} X'_{kj}(z) &= X'_{kk}(z)\,[C_{kj} + \int_{z_0}^{z} X_{kk}^{-1}(u)\,Y_{kj}(u)\,du] + X_{kk}(z)\,X_{kk}^{-1}(z)\,Y_{kj}(z) \\ &= A_{kk}(z)X_{kk}(z)\,[C_{kj} + \int_{z_0}^{z} X_{kk}^{-1}(u)\,Y_{kj}(u)\,du] + \sum_{s=j}^{k-1} A_{ks}(u)\,X_{sj}(z) \\ &= A_{kk}(z)X_{kj} + \sum_{s=j}^{k-1} A_{ks}(u)\,X_{sj}(z) \\ &= \sum_{s=j}^{k} A_{ks}(z)\,X_{sj}(z). \end{aligned}$$

Se observa que $X(z)$ es una solución fundamental del problema (1.1).
Para demostrar la segunda parte del teorema, si tomamos $U(z)$ una solución

de (1.1) con esta estructura, entonces $U_{kk}(z)$ cumplirá la condición (1.13). Tomemos $z_0 \in G$ y elijamos las matrices constantes $C_{kj} = U_{kk}^{-1}(z_0)\, U_{kj}(z_0)$, para $1 \leq j < k \leq l$.
Si se define una matriz $X(z)$, en la forma (1.12), con el procedimiento descrito anteriormente usando los datos $U_{kk}(z), z_0$ y C_{kj}, resulta inmediato que $X(z)$ coincide con $U(z)$ en el punto z_0. Es decir, tenemos dos soluciones fundamentales que coinciden en un punto del dominio, luego serán iguales y $U(z)$ será de la forma pedida. $\square$

En caso de sistemas ν_k=1 para todo k, el resultado es fácilmente computable, resolviendo las correspondientes EDOs escalares, por métodos elementales. Es decir, los sistemas diagonales son siempre resolubles.

Este resultado será usado en gran medida en el capítulo siguiente, donde las matrices de este tipo ayudan a aportar soluciones más generales. Puesto que toda matriz constante puede ser reducida a una por bloques, en esta teoría tiene gran importancia este resultado.

Capítulo 2

SINGULARIDADES DE PRIMERA CLASE

En este capítulo estudiaremos el problema $\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}$, en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, cuando tenemos, en la matriz $A(z)$, un polo a lo sumo de grado uno en z_0, lo cual denominaremos problema con singularidad de primera clase. Para resolver este tipo de problemas tenemos que seguir ciertos pasos:

1.) Encontrar una solución fundamental $X(z)$, junto con la matriz de monodromía M y la función univaluada $S(z) = X(z)\,(z-z_0)^{-M}$ en el conjunto $R(z_0, 0, \rho)$.

2.) Clasificar el tipo de singularidad que tiene $S(z)$, ya sea polo, evitable o esencial.

3.) Encontrar los coeficientes de Laurent de la función $S(z)$.

Proposición 2.1. Si tomamos $S(z) = X(z)\,(z-z_0)^{-M}$ con $X(z)$ solución fundamental, entonces toda solución fundamental será de la forma $\tilde{X}(z) = \tilde{S}(z)\,(z-z_0)^{\tilde{M}}$, con $\tilde{S} = S\,C$ y $\tilde{M} = C^{-1}\,M\,C$, siendo C la matriz que cumple $\tilde{X} = X\,C$.

Demostración:
Basta observar que

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= X\,C = S\,\exp(M\,\log(z-z_0))C = S\,C\,C^{-1}\exp(M\,\log(z-z_0))C\\ &= \tilde{S}\,\exp(C^{-1}\,M\,C\,\log(z-z_0)) = \tilde{S}\,(z-z_0)^{\tilde{M}},\end{aligned}$$

luego es de la forma descrita. □

Lo anterior prueba que las matrices de monodromía de distintas soluciones fundamentales, ligadas por una matriz invertible C, son semejantes por medio de esa misma matriz C.
Además, este hecho permite afirmar que basta establecer los resultados siguientes para una solución fundamental particular.

Proposición 2.2. Si tenemos $B(z) = A(z+z_0)$ e $\mathbf{y}(z) = \mathbf{x}(z+z_0)$, entonces $\mathbf{x}$ es solución del problema $\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}$ en $R(z_0, 0, \rho)$ si y solo si $\mathbf{y}$ es solución de $\mathbf{y}' = B(z)\,\mathbf{y}$ en $R(0, 0, \rho)$.

Demostración:
Supongamos que $\mathbf{x}$ es solución del problema $\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}$ en $R(z_0, 0, \rho)$, entonces $\mathbf{y}'(z) = \mathbf{x}'(z+z_0) = A(z+z_0)\,\mathbf{x}(z+z_0) = B(z)\,\mathbf{y}$ y además está definido en $R(0, 0, \rho)$, luego queda probado.
El recíproco se prueba de forma análoga. $\square$

Por esta proposición podemos suponer que la singularidad está en cualquier punto del plano complejo, lo haremos, para mayor sencillez, en el 0.

Con esta información podemos redefinir el problema a este otro, con el que en ocasiones resultará más sencillo trabajar:

$$z\,\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}, \quad A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, z^n, \quad |z| < \rho, \tag{2.1}$$

con $A(z)$ matriz holomorfa en $|z| < \rho$.

2.1. Sistemas con buen espectro

Nos centraremos en esta sección en el análisis de los problemas con buen espectro que, como veremos, pueden ser analizados velozmente y presentan un buen comportamiento.

Definición 2.3. Diremos que el problema tiene buen espectro si los autovalores de A_0 no distan nunca un número natural no nulo. Es decir, si λ es autovalor de A_0, entonces $\lambda + n$ no es autovalor de A_0 para ningún $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que todo sistema (2.1) con buen espectro admite el término independiente del desarrollo de Taylor de $A(z)$ en 0, A_0, como matriz de monodromía y la solución fundamental para la que esto ocurre es tal que $S(z) = X(z)\, z^{-A_0}$ es analítica en 0. Es más, tenemos un método recursivo para hallar los coeficientes del desarrollo de Taylor de $S(z)$.

Teorema 2.4. Todo problema (2.1) con buen espectro admite una única solución fundamental de la forma

$$X(z) = S(z)\, z^{A_0}, \quad S(z) = I + \sum_{n=1}^{\infty} S_n\, z^n, \quad |z| < \rho. \tag{2.2}$$

Los coeficientes de $S(z)$ vienen definidos por la relación

$$S_n\,(A_0 + n\,I) - A_0\,S_n = \sum_{m=0}^{n-1} A_{n-m}\,S_m,\ n \geq 1. \tag{2.3}$$

Demostración:
La demostración es muy similar a la efectuada para el lema 1.4. Trabajamos primero de forma formal, operando con las series correspondientes y obligando a que cumplan la ecuación deseada. Una vez encontrada la única solución formal en la forma esperada, restará probar la convergencia de la serie $S(z)$. Tenemos que, para una $X(z)$ como en (2.2),

$$z\,X'(z) = z\,(S(z)\,z^{A_0 - I}\,A_0 + S'(z)\,z^{A_0}) = A(z)\,S(z)\,z^{A_0},$$

luego se ha de verificar

$$S(z)\,z^{A_0}\,A_0 + S'(z)\,z^{A_0+I} = A(z)\,S(z)\,z^{A_0}.$$

Entonces desarrollando los coeficientes y simplificando z^{A_0} obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} S_n\,z^n\,z^{A_0}\,A_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,S_{n+1}\,z^n\,z^{A_0+I} &= (\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,z^n)\,(\sum_{n=0}^{\infty} S_n\,z^n)\,z^{A_0},\\
\sum_{n=0}^{\infty} S_n\,z^n\,A_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,S_{n+1}\,z^{n+1} &= (\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,z^n)\,(\sum_{n=0}^{\infty} S_n\,z^n),\\
\sum_{n=0}^{\infty} S_n\,A_0\,z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\,S_n\,z^n &= (\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,z^n)\,(\sum_{n=0}^{\infty} S_n\,z^n),\\
A_0\,S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n\,(A_0 + n\,I) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} A_{n-m}\,S_m\,z^n.
\end{aligned}$$

Igualamos los coeficientes de las diferentes potencias de z en ambos miembros, podemos elegir $S_0 = I$, y se ha de cumplir que

$$S_n\,(A_0 + n\,I) = \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}\,S_m,$$

$$S_n\,(A_0 + n\,I) - A_0\,S_n = \sum_{m=0}^{n-1} A_{n-m}\,S_m.$$

Este cálculo prueba que, en caso de ser la solución con A_0 matriz de monodromía, $S(z)$ tendrá esa forma recursiva. Ahora, mediante el lema B.1, podremos garantizar que tiene solución única el sistema para cada S_n dando por conocidas las anteriores, y como $S_0 = I$ es conocida, entonces están determinados sin ambigüedad, luego tenemos probada la unicidad.
Para determinar la existencia basta probar que la serie de S hallada antes converge en $|z| < \rho$. Como en la prueba del lema 1.4, para todo $K > 1/\rho$ existe un $c > 0$ tal que $\|A_n\| \leq cK^n$. Si denotamos por $B_n = S_n(A_0 + nI) - A_0 S_n$, tendremos que $\|B_n\| \leq c\,\sum_{m=0}^{n-1} K^{n-m}\,\|S_m\|$.

Podemos trabajar con la matriz S_n viéndola como un vector $\mathbf{s}_n$ de dimensión ν^2, simplemente concatenando cada una de las filas de la matriz. Con esto el sistema

$$(S_n\,(A_0 + n\,I) - A_0\,S_n)/n = (\sum_{m=0}^{n-1} A_{n-m}\,S_m)/n, \tag{2.4}$$

$$S_n\,(A_0/n + I) - A_0\,S_n/n = \frac{1}{n}(\sum_{m=0}^{n-1} A_{n-m}\,S_m), \tag{2.5}$$

puede ser descrito como un sistema vectorial $\nu^2 \times \nu^2$, donde la incógnita es $\mathbf{s}_n$. Es decir, existirán M_n, matriz de dimensión $\nu^2 \times \nu^2$, y $\mathbf{b}_n$, vector de dimensión ν^2, tales que resolver el sistema (2.4) equivale a resolver $M_n\,\mathbf{s}_n = \mathbf{b}_n$.
Si $S_n = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq \nu}$, cada $s_{i,j}$ en el sistema $M_n\,\mathbf{s}_n = \mathbf{b}_n$ tiene coeficiente $1 + c_{ij}(n)$ en la diagonal, donde $c_{i,j}(n)$ depende de los coeficientes de A_0 y $\lim_{n\to\infty} c_{i,j}(n) = 0$, mientras que el resto de coeficientes tienden a 0 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto haciendo tender $n \to \infty$ el determinante de M_n tiende a 1 y nunca se anula. Este razonamiento lleva a que M_n^{-1} está acotada, lo cual implica que $\|S_n\| \leq n^{-1}\,\tilde{c}\,\|B_n\|$, para $\tilde{c}$ suficientemente grande. Definimos la sucesión $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ por recurrencia, poniendo $s_0 = \|S_0\|$ y $s_n = n^{-1}\,\tilde{c}\,c\sum_{m=0}^{n-1} K^{n-m}\,\|S_m\|$. Por inducción se prueba que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ $\|S_n\| \leq s_n$. La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} s_n\,z^n$ es solución formal de la ecuación $f'(z) = \tilde{c}\,c\,K\,f(z)\,(1 - K\,z)^{-1}$, y sabemos que hay unicidad de solución para $|z| < K^{-1}$, luego la serie f convergerá para estos valores, lo cual implica que la serie $S(z)$ también lo hará para $|z| < \rho$. $\square$

Proposición 2.5. Considerando un sistema (2.1) con buen espectro, sea $\mathbf{s}_0$ un autovector de A_0 con autovalor asociado λ, entonces el sistema tiene solución $\mathbf{x}(z) = \mathbf{s}(z)z^{\lambda}$ con $\mathbf{s}(z) = \mathbf{s}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{s}_n\, z^n$ y $\mathbf{s}_n$ satisfaciendo la relación de recurrencia $((n+\lambda)\, I - A_0)\, \mathbf{s}_n = \sum_{m=0}^{n-1} A_{n-m}\, \mathbf{s}_m$.

Demostración:
Como el sistema tiene buen espectro entonces se tiene una solución fundamental $X(z) = S(z)\, z^{A_0}$, $\;S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n\, z^n$, $\;|z| < \rho$, donde los coeficientes de $S(z)$ vienen definidos por la relación $S_n(A_0+nI) - A_0 S_n = \sum_{m=0}^{n-1} A_{n-m} S_m$.
Multiplicando a ambos lados de $X(z) = S(z)\, z^{A_0}$ por $\mathbf{s}_0$ obtenemos una solución del sistema (2.1),

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(z) = S(z)\, \exp(A_0\, \log(z))\mathbf{s}_0 &= S(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0^n\, \mathbf{s}_0\, \log(z)^n}{n!} \\
&= S(z)(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \log(z))^n}{n!})\mathbf{s}_0 = S(z)\, \mathbf{s}_0\, z^{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Definiendo $\mathbf{s}(z) = S(z)\mathbf{s}_0$,

$$\mathbf{x}(z) = \mathbf{s}(z) z^{\lambda}.$$

Ahora veamos cual es la recurrencia para obtener los coeficientes en la expresión $\mathbf{s}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{s}_n\, z^n$.
Por una parte,

$$\mathbf{s}(z) = (\sum_{n=0}^{\infty} S_n\, z^n)\mathbf{s}_0 = (\sum_{n=0}^{\infty} S_n \mathbf{s}_0\, z^n),$$

luego $S_n \mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_n$.
Por otra parte multiplicando en la relación de S_n por z_0 obtenemos,

$$
\begin{aligned}
S_n\, (A_0\, \mathbf{s}_0 + n\, \mathbf{s}_0) - A_0\, \mathbf{s}_n &= \sum_{m=0}^{n-1} A_{n-m}\, \mathbf{s}_m, \\
S_n\, (\lambda + n)\, \mathbf{s}_0 - A_0\, \mathbf{s}_n &= \sum_{m=0}^{n-1} A_{n-m}\, \mathbf{s}_m, \\
((\lambda + n)I - A_0)\, \mathbf{s}_n &= \sum_{m=0}^{n-1} A_{n-m}\, \mathbf{s}_m,
\end{aligned}
$$

lo cual prueba el resultado. $\square$

2.2. Sistemas con espectro general

En este apartado trataremos los problemas anteriores para el caso en el que A_0 tiene un espectro general, es decir, que puede darse que A_0 tenga dos autovalores que distan un entero no nulo, y veremos que los resultados no salen de forma tan sencilla como en el caso anterior. Es necesario definir nuevos conceptos, empezaremos hablando de la definición de transformación analítica.

Definición 2.6. Una matriz de funciones $T(z)$ es llamada una transformación analítica si es holomorfa en un entorno del origen y $\det T(z) \neq 0$. Equivalentemente, se ha de poder escribir $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n\, z^n$ si $|z|$ es suficientemente pequeño, con $\det(T_0) \neq 0$. Si $T_n = 0$ para todo $n > 0$, entonces diremos que la transformación es constante.

Proposición 2.7. Sea $T(z)$ una transformación analítica y tomamos $\mathbf{x} = T(z)\,\tilde{\mathbf{x}}$. Entonces $\mathbf{x}$ es solución del problema (2.1) si y solo si $\tilde{\mathbf{x}}$ es solución de

$$z\tilde{\mathbf{x}}' = B(z)\,\tilde{\mathbf{x}}, \tag{2.6}$$

donde B viene dada por

$$z\,T'(z) = A(z)\,T(z) - T(z)\,B(z). \tag{2.7}$$

Demostración:
Supongamos que $\mathbf{x}$ es solución del problema (2.1), es decir, cumple que $z\mathbf{x}' = A(z)\mathbf{x}$. Aplicamos la regla de la cadena y obtenemos:

$$A(z)\,T(z)\tilde{\mathbf{x}} = z(T(z)\,\tilde{\mathbf{x}})' = zT'(z)\,\tilde{\mathbf{x}} + zT(z)\,\tilde{\mathbf{x}}'.$$

Veamos que $\tilde{\mathbf{x}}$ es solución de (2.6), con $B(z)$ cumpliendo (2.7),

$$\begin{aligned} zT(z)\,\tilde{\mathbf{x}}' &= A(z)\mathbf{x} = A(z)\,T(z)\tilde{\mathbf{x}} - zT'(z)\,\tilde{\mathbf{x}}, \\ zT(z)\,\tilde{\mathbf{x}}' &= (A(z)\,T(z) - zT'(z))\,\tilde{\mathbf{x}}, \\ z\,\tilde{\mathbf{x}}' &= T^{-1}(z)(A(z)\,T(z) - zT'(z))\,\tilde{\mathbf{x}}, \\ z\,\tilde{\mathbf{x}}' &= B(z)\,\tilde{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Con esto queda probada la primera implicación, la otra implicación se realiza de un modo similar. □

Ahora, si $A(z)$ es holomorfa en torno al origen entonces $B(z)$ también lo será, puede que en un entorno más pequeño. En particular, el sistema (2.6) tendrá una singularidad de primer orden cuando el sistema (2.1) lo tenga, es más, si $A(z)$ tiene un polo en el origen entonces $B(z)$ también lo tendrá.

Lema 2.8. Suponemos que tenemos un sistema (2.1) con $A(z)$ dividida en bloques cuadrados

$$A(z) = \begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

tal que $A_{12}(0) = 0$ y las matrices A_{11} y $A_{22} + nI$ tienen espectros disjuntos para todo n. Entonces para $\tilde{\rho} > 0$ suficientemente pequeño existe una única matriz holomorfa $T_{12}(z)$, con dimensión igual a la de A_{12}, con $T_{12}(0) = 0$, tal que

$$zT'_{12}(z) = A_{11}(z)T_{12}(z) - T_{12}(z)A_{22}(z) - T_{12}(z)A_{21}(z)T_{12}(z) + A_{12}(z), \; |z| < \tilde{\rho}. \tag{2.9}$$

Demostración:
Nos enfrentaremos al problema, como viene siendo costumbre, empezando con la unicidad, demostrando que existe una serie de potencias que queda determinada de esta manera y luego probaremos la existencia viendo que la serie es convergente.
Desarrollando $A_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{ij}\, z^n$ y $T_{12}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n\, z^n$ e introduciéndolo en la ecuación (2.7) obtenemos las siguientes relaciones para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n(A_0^{22} + nI) - A_0^{11}T_n = \sum_{m=1}^{n-1}(A_{n-m}^{11}T_m - T_mA_{n-m}^{22}) - A_n^{12} + \sum_{l=1}^{n-1} T_l \sum_{m=1}^{n-l} A_{n-m-l}^{21}T_m.$$

Teniendo en cuenta el lema B.1, tenemos que T_n queda determinada de forma única mediante la resolución recursiva de estas ecuaciones.
Como $A(z)$ es holomorfa en 0 con un radio de convergencia ρ, entonces dado $K > 1/\rho$ existe $c_0 > 0$ tal que

$$\|A_n^{i,j}\| \leq c_0 K^n, \text{ para } i,j \in \{1,2\}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Para probar la existencia, basta ver que la serie de $T_{12}(z)$ converge. Para ello definimos

$$t_n = c\, K^n \,\{1 + \sum_{l=1}^{n-1} K^{-l}\, t_l\, [2 + \sum_{m=1}^{n-l} K^{-m}\, t_m]\}, \quad n \geq 1.$$

Para $K > 1/\rho$ y $c > 0$ suficientemente grande, se demuestra por inducción que $\|T_n\| \leq t_n$ si n>0.
Con $n = 1$ el resultado es evidente, ya que es simplemente $\|T_1\| \leq cK$.

Supongamos que se verifica para $n-1$ y comprobemos para n.
Sabemos que:

$$T_n(A_0^{22}+nI)-A_0^{11}T_n=\sum_{m=1}^{n-1}(A_{n-m}^{11}T_m-T_mA_{n-m}^{22})-A_n^{12}+\sum_{l=1}^{n-1}T_l\sum_{m=1}^{n-l}A_{n-m-l}^{21}T_m,$$

tomamos normas a ambos lados

$$\|T_n(A_0^{22}+nI)-A_0^{11}T_n\|=\|\sum_{m=1}^{n-1}(A_{n-m}^{11}T_m-T_mA_{n-m}^{22})-A_n^{12}+\sum_{l=1}^{n-1}T_l\sum_{m=1}^{n-l}A_{n-m-l}^{21}T_m\|.$$

Se observa que el lado izquierdo es asintóticamente equivalente a $n\|T_n\|$, luego existirá $d>0$ tal que

$$\|T_n\|\leq d\|\sum_{m=1}^{n-1}(A_{n-m}^{11}\,T_m-T_m\,A_{n-m}^{22})-A_n^{12}+\sum_{l=1}^{n-1}T_l\,\sum_{m=1}^{n-l}A_{n-m-l}^{21}\,T_m\|.$$

Aplicando en el lado derecho las desigualdades correspondientes, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|T_n\|\leq d(&\sum_{m=1}^{n-1}\sup\{\|A_{n-m}\|,\|A_{n-m}^{22}\|\}\|T_m\|+\|A_n^{12}\|\\ &+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-l}\|T_l\|\|A_{n-m-l}^{21}\|\|T_m\|).\end{aligned}$$

En virtud de (2.10), se deduce que

$$\|T_n\|\leq d(\sum_{m=1}^{n-1}(c_0K^{n-m})\|T_m\|+\|c_0K^n\|+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-l}\|T_l\|c_0K^{n-m-l}\|T_m\|),$$

y aplicando la hipótesis de inducción,

$$\|T_n\|\leq d(\sum_{m=1}^{n-1}(c_0K^{n-m})t_m+\|c_0K^n\|+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-l}c_0K^{n-m-l}t_mt_l),$$

$$\|T_n\|\leq d\,c_0k^n(1+\sum_{l=1}^{n-1}K^{-l}t_l(2+\sum_{m=1}^{n-l}K^{-m}t_m)),$$

$$\|T_n\|\leq d\,c_0K^nt_n.$$

Si ponemos $c=d\,c_0$, se tiene que

$$\|T_n\|\leq t_n,$$

y se concluye la inducción.

Tomando

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} K^{-n} t_n z^n, \tag{2.11}$$

comprobamos que formalmente es solución de la ecuación

$$(1-z)\, f(z) = z\, c\, [1 + 2\, f(z)] + c\, f^2(z). \tag{2.12}$$

Efectivamente, si suponemos que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ es solución de (2.12), llegamos a la ecuación:

$$(1-z) \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n = z\, c\, [1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n] + c\, (\sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n)^2, \tag{2.13}$$

desarrollamos el producto de Cauchy,

$$(1-z) \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n = z\, c\, [1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n] + c\, (\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k f_{n-k} z^n).$$

Igualando los coeficientes de las diferentes potencias de z a izquierda y derecha, llegamos a que, en una solución formal, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, sus coeficientes han de verificar:

$$f_1 = c, \tag{2.14}$$

$$f_n - f_{n-1} = 2c f_{n-1} + c \sum_{m=1}^{n-1} f_m f_{n-m},\ n \geq 2. \tag{2.15}$$

Comprobemos que los coeficientes del desarrollo de Taylor de f, definida como en (2.11), verifican (2.15). En primer lugar,

$$\begin{aligned} f_n &= c\, \{1 + \sum_{l=1}^{n-1} f_l\, [2 + \sum_{m=1}^{n-l} f_m]\} \\ &= c\, \{1 + 2 \sum_{l=1}^{n-1} f_l + (\sum_{l=1}^{n-1} f_l)(\sum_{m=1}^{n-l} f_m)\} \end{aligned}$$

$$= c\,\{1 + 2\sum_{l=1}^{n-2} f_l + 2f_{n-1} + (\sum_{l=1}^{n-1} f_l)(\sum_{m=1}^{n-1-l} f_m + f_{n-l})\},$$

$$= c\,\{1 + 2\sum_{l=1}^{n-2} f_l + 2f_{n-1} + (\sum_{l=1}^{n-2} f_l)(\sum_{m=1}^{n-1-l} f_m) + \sum_{l=1}^{n-2} f_l f_{n-l}\}$$

$$= c\,\{1 + \sum_{l=1}^{n-2} f_l\,[2 + \sum_{m=1}^{n-1-l} f_m]\} + c\,\{+2f_{n-1} + \sum_{l=1}^{n-2} f_l f_{n-l}\};$$

como se verifica que:

$$f_{n-1} = c\,\{1 + \sum_{l=1}^{n-2} f_l\,[2 + \sum_{m=1}^{n-1-l} f_m]\}, \quad n \geq 2,$$

restamos ambas ecuaciones

$$f_n - f_{n-1} = c\,\{2f_{n-1} + \sum_{l=1}^{n-2} f_l f_{n-l}\} = 2cf_{n-1} + c\sum_{m=1}^{n-1} f_m f_{n-m},$$

que es justo lo que estábamos comprobando.

Las soluciones de (2.12) son:

$$f_{\pm}(z) = (2\,c)^{-1}\,\{1 - z\,(2\,c+1) \pm \sqrt{[1 - z\,(2\,c+1)]^2 - 4\,c^2\,z}\,\},$$

las cuales son holomorfas en torno al origen, con un radio de convergencia δ. Además $f_-(0) = 0$, y los coeficientes del desarrollo de Taylor satisfacen las relaciones (2.14) y (2.15), que es la satisfecha por los $K^{-n}t_n$, luego los coeficientes de la serie de Taylor de $f_{(}z)$ serán justamente $K^{-n}t_n$. Por lo tanto f, definida como en (2.11) será holomorfa en 0. Entonces, puesto que $\|T_n\| \leq t_n$, para $|z| < K\delta$, tenemos la convergencia buscada. $\square$

Hay que tener en cuenta que $T(z)$ podría ser holomorfa solamente en un entorno más pequeño de 0 y no en todo $D(0,\rho)$, a diferencia de lo que ocurría en los teoremas de los capítulos anteriores.

Podemos reformular el lema anterior diciendo que existe una única transformación analítica de la forma

$$T(z) = \begin{bmatrix} I & T_{12}(z) \\ 0 & I \end{bmatrix},\; T_{12}(0) = 0,$$

la cual transforma (2.1) en (2.4), con

$$B(z) = \begin{bmatrix} B_{11}(z) & 0 \\ B_{21}(z) & B_{22}(z) \end{bmatrix},$$

$$B_{11}(z) = A_{11}(z) - T_{12}(z)\, A_{21}(z), \quad B_{21}(z) = A_{21}(z),$$
$$B_{22}(z) = A_{21}(z)\, T_{12}(z) + A_{22}(z).$$

Para comprobarlo basta observar:

$$\begin{aligned}
zT'(z) &= \begin{bmatrix} 0 & T'_{12}(z) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
A(z)T(z) &= \begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{11}(z)T_{12}(z) + A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{21}(z)T_{12}(z) + A_{22}(z) \end{bmatrix}, \\
B(z) &= T^{-1}(z)[A(z)T(z) - zT'(z)] \\
&= \begin{bmatrix} I & -T_{12}(z) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{11}(z)T_{12}(z) + A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{21}(z)T_{12}(z) + A_{22}(z) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Esta observación permite demostrar el siguiente resultado con poca dificultad.

Proposición 2.9. Consideramos un sistema de la forma (2.1) con espectro general. Asumimos que A_0 es diagonal por bloques, donde cada bloque tiene un solo autovalor, y estos autovalores tienen las partes reales en aumento. Entonces existe una transformación analítica $T(z)$, que es triangularmente superior por bloques, respetando la estructura de A_0, con los bloques diagonales iguales a la identidad, de modo que el sistema transformado se reduce a uno con matriz triangular inferior respetando la estructura de bloques de A_0.

Demostración:
La demostración se realiza por inducción sobre el número de bloques de A_0. Si tomamos el caso de un solo bloque poco tenemos que probar ya que con $T = I$ bastaría, en el caso de dos justamente es la observación citada anteriormente. Suponemos cierto para N bloques y lo probamos para $N+1$, agrupamos los N primeros bloques en uno solo y aplicamos el lema 2.8 para obtener un sistema triangular inferior por bloques con dos bloques diagonales iguales a los de A_0, a los cuales se aplica la inducción, basta ver qué forma tiene $B(0)$. Cada una de estas transformaciones deja el sistema en la forma triangular por bloques, ahora creamos la transformación que las concatena y habremos terminado. $\square$

Esta proposición deja muy claro que si la matriz A_0 está en su forma de

Jordan, entonces podemos reducir el sistema a una forma diagonal inferior mediante transformaciones.
Es más, sabemos que toda matriz compleja admite forma de Jordan J_0. Sea P la matriz regular tal que $A_0 = P\, J_0\, P^{-1}$. Para cada $n > 0$, se tendrá $A_n = P\, A_n^*\, P^{-1}$, donde A_n^* es otra matriz que no tiene porque ser la forma de Jordan de A_n. Si

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, z^n = P\, J_0\, P^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} P\, A_n^*\, P^{-1}\, z^n,$$

entonces aplicando la transformación analítica dada por el cambio de base P, tenemos un sistema transformado con matriz (véase (2.7))

$$B(z) = P^{-1}\, A(z)\, P = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^*\, z^n.$$

Tendremos que $\mathbf{y}$ es solución de $\mathbf{y}'(z) = P^{-1}\, A(z)\, P\, \mathbf{y}$ si y solo si $\mathbf{x} = P\, \mathbf{y}$, lo cual es una transformación. Esto unido al anterior resultado me dice que siempre podemos transportar al problema a uno triangular.

Definición 2.10. Diremos que una matriz A se reduce por $(\nu_1, ..., \nu_l)$, cuando está dividida en l bloques de dimensión $\nu_1, ..., \nu_l$ cada uno.

Proposición 2.11. Consideramos un sistema (2.1), el cual se reduce por $(\nu_1, ..., \nu_l)$, con $A_{jj}(0)$ teniendo exactamente un autovalor λ_j, los cuales tienen parte real creciente. Es más, pedimos $A_{jk}(0) = 0$ para $k > j$. Por último sea $k_j \in \mathbb{Z}$, tal que cumple que $0 \leq \mathrm{Re}\lambda_j - k_j < 1$, es decir, k_j es la parte entera de la parte real de λ_j. Entonces existe una solución fundamental triangular por bloques $X(z)$ de (2.1) de la forma

$$X(z) = T(z)\, z^K\, z^M,$$

donde $T(z)$ es una transformación analítica triangular inferior por bloques, M es una matriz constante triangular inferior por bloques, cuyos bloques diagonales coinciden con $A_{jj}(0) - k_j\, I$, y $K = \mathrm{diag}[k_1 I_{v_1}, ..., k_l I_{v_l}]$

Demostración:
Usando el teorema 2.4, podemos hallar soluciones fundamentales $X_{jj}(z) = T_{jj}(z)\, z^{A_{jj}(0)}$, tras lo cual recursivamente usando el algoritmo recursivo del teorema 1.19 hallamos una solución fundamental $X(z)$ triangular inferior por bloques. Evidentemente $X(z)$ tiene un factor de monodromía que está

dividido en los mismos bloques y con la misma estructura, y de acuerdo con el teorema B.8, existirá una única matriz de monodromía M con autovalores cuyas partes reales pertenecen a $[0,1)$, además los bloques diagonales M_{jj} serán matrices de monodromía de los bloques diagonales $X_{jj}(z)$, elegidas de forma que tengan los autovalores en $[0,1)$. Otras posibles matrices de monodromía para $X_{jj}(z)$ serán $A_{jj}(0) - k_j\, I$, de acuerdo con la unicidad del teorema, tenemos que $M_{jj} = A_{jj}(0) - k_j\, I$.
Definimos

$$T(z) = X(z) z^{-M} z^{-K},$$

y veamos que es holomorfa en el origen. Para ello lo primero que debemos hacer es comprobar que está bien definida, es decir, que es univaluada. Como M es de mononodromía y z^{-K} es univaluada, por ser K diagonal con enteros en la diagonal, entonces es evidente que $T(z)$ es univaluada.
En cuanto lo que se refiere a la holomorfía en 0, observamos que los bloques diagonales son holomorfos en el origen, basta darse cuenta de la forma de la exponencial de matrices diagonales y aplicar que $X_{jj}(z)\, z^{-A_{jj}(0)} = T_{jj}(z)$ es holomorfa en el origen, en virtud del teorema 2.4.
Por la forma de la recurrencia (1.14) sabemos que los bloques bajo la diagonal de $T(z)$ no tienen una singularidad esencial en el origen. Además, por definición de $T(z)$, tenemos:

$$z\, T'(z) = A(z)\, T(z) - T(z)\, B(z), \tag{2.16}$$

donde podemos afirmar que

$$B(z) = K + z^{K}\, M\, z^{-K}.$$

Como $k_1, ..., k_n$ van incrementándose y M es triangular inferior por bloques, concluimos que $B(z)$ es holomorfa en el origen, basta con desarrollar $B(z)$ de la siguiente manera

$$B(z) = K + \begin{bmatrix} z^{k_1\, I} & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & z^{k_2\, I} & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & z^{k_{l-1}\, I} & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & z^{k_l\, I} \end{bmatrix} M \times$$

$$\times \begin{bmatrix} z^{k_1^{-1}\, I} & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & z^{k_2^{-1}\, I} & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & z^{k_{l-1}^{-1}\, I} & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & z^{k_l^{-1}\, I} \end{bmatrix}.$$

Y se comprueba también que $A(0)$ y $B(0)$ tienen los mismos bloques diagonales.
Para los bloques $T_{kj}(z)$, $1 \le j < k \le \nu$, obtenemos de la fórmula (2.16) que

$$z\,T'_{kj}(z) = A_{kk}(z)\,T_{kj}(z) - T_{kj}(z)\,B_{jj}(z) + R_{kj}(z), \tag{2.17}$$

donde los $R_{kj}(z)$ dependen solamente de unos pocos bloques de $T(z)$, los cuales están cerca de, o sobre, la diagonal. Supongamos que $R_{kj}(z)$, para $1 \le j < k \le \nu$, es holomorfa en el origen, lo cual es cierto si $k - j = 1$, pues $R_{kj}(z)$ involucra solo elementos diagonales de $T(z)$. Sea $m \ge 0$ el orden del polo de $T_{kj}(z)$, y denotamos por T^{kj}_{-m} al coeficiente correspondiente de su desarrollo de Laurent. Si m es positivo, entonces (2.17) implica que

$$[m\,I + A_{kk}(0)]\,T^{kj}_{-m} = T^{kj}_{-m}\,A_{jj}(0).$$

Como los autovalores han de tener parte real creciente, sin más que acudir al lema B.1, llegamos a que $T^{kj}_{-m} = 0$, luego $m = 0$, es decir, tenemos demostrada la holomorfía en el origen de $T_{kj}(z)$ si suponemos que $R_{kj}(z)$ es holomorfa en el origen. Probamos ahora por inducción sobre $k-j$ que todos los bloques de $T(z)$ han de ser holomorfos.
El caso $k - j = 1$ ya está analizado. Además sabemos que $R_{kj}(z)$ depende exclusivamente de los bloques que están más cerca de, o sobre, la diagonal, que son holomorfos por hipótesis de inducción. Por lo tanto $R_{kj}(z)$ será holomorfa en 0. $\square$

Tras todos estos resultados tenemos ya la suficiente base como para poder demostrar el teorema fundamental de esta sección, que nos proporciona la forma de las soluciones en problemas de singularidades de primera clase.

Teorema 2.12. Un sistema (2.1) con espectro general tiene una solución fundamental de la forma

$$X(z) = T(z)\,z^K\,z^M, \tag{2.18}$$

donde

a) $T(z)$ es una transformación analítica.

b) M es constante, triangular inferior por bloques de algún tipo $(\nu_1, .., \nu_l)$.

c) El bloque diagonal k-ésimo de M tiene exactamente un autovalor m_k con parte real en el intervalo $[0, 1)$

d) $K = \mathrm{diag}[\kappa_1 I_{\nu_1}, ..., \kappa_l I_{\nu_l}]$, $k_j \in \mathbb{Z}$ crecientes y tales que $m_k + \kappa_k$ es un autovector de A_0 con multiplicidad algebraica nu_k.

Demostración:
La demostración es justamente ir concatenando las proposiciones anteriores.

1. Transformamos el problema en uno con matriz A_0 en forma de Jordan, de forma que sus autovalores se ordenen crecientemente.

2. A lo obtenido aplicamos la proposición 2.9 para transformarlo en una ecuación triangular inferior por bloques.

3. Por último encontramos, gracias a la proposición 2.11, una ecuación con solución $z^K\, z^M$.

El producto de estas transformaciones nos da la buscada, con esto probamos a), y fijándonos en la proposición 2.11 tenemos claramente b). Los bloques diagonales de M tienen un solo autovalor, por tenerlos los de la forma de Jordan y ser los bloques iguales a $A_{jj}(0) - k_j\, I$, y pertenecen a $[0, 1)$ por ser la parte entera, luego tenemos c). Por último la forma de K también es evidente por este resultado y además $m_k + \kappa_k$ es un autovector de A_0 ya que la proposición 2.9 no altera A_0 y aplicando la proposición 2.11 se concluye.□

Definición 2.13. Dado un sistema (1.1) con una singularidad en z_0 diremos que es una singularidad regular si toda solución fundamental $X(z)$ se puede escribir, en un entorno punteado de z_0, como $X(z) = S(z)\,(z - z_0)^M$, donde $S(z)$ tiene a lo sumo un polo en z_0.

Corolario 2.14. Todo sistema con una singularidad de primer tipo es un sistema con singularidad regular.

Demostración:
Basta razonar para $z_0 = 0$. Sea un sistema con singularidad de primer tipo entonces, en virtud del teorema previo, tenemos que existe una solución de la forma $X(z) = T(z)\, z^K\, z^M$, donde $T(z)$ es una transformación analítica y K es como en el teorema 2.12. Como z^K tiene a lo sumo un polo en 0 de orden $k_0 = \text{máx}_{1 \le \le l}\, k_j$ si $k_0 > 0$; si $k_0 \le 0$ la singularidad es evitable, se deduce que $S(z) = T(z) z^K$ tiene a lo sumo un polo en 0. Puesto que cualquier otra solución fundamental ha de ser de la forma $X(z)\, C$, con C constante e invertible, se concluye el resultado. □

Observaciones 2.15. El recíproco del corolario anterior no es cierto.

Comprobemos esto con un ejemplo que lo muestre. Sea M constante y K una matriz diagonal con elementos diagonales naturales, nos planteamos el problema con $A(z) = (K + z^K M z^{-K})$, es decir,

$$z\,\mathbf{x}'(z) = (K + z^K M z^{-K})\mathbf{x}(z), \;\; z \in \mathbb{C}, \;\; z \neq 0.$$

En cualquier caso tomamos $X(z) = z^K z^M$, derivando obtenemos, según la regla del producto, válida en matrices

$$\begin{aligned} zX' &= z(Kz^{K-I}z^M + z^K M z^{M-I}) \\ &= z(Kz^{K-I}zz^{-1}z^M + z^K M z^{M-I}) \\ &= (Kz^K z^{M-I} + z^K M z^{M-I})z \\ &= (Kz^K z^M + z^K M z^{-K} z^K z^M) = (K + z^K M z^{-K})X(z). \end{aligned}$$

Observamos que cumple la ecuación. Además claramente $X(z)$ tiene un crecimiento de tipo potencial, luego es una singularidad regular.

Claramente podemos encontrar matrices para las cuales este problema no es de primera clase ya que la matriz $A(z) = (K + z^K M z^{-K})$ no siempre es holomorfa en cero, ahora mostramos el ejemplo concreto. Tomemos

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} z^K &= \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}, \\ z^{-K} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Haciendo el producto, encontramos

$$z^K M z^{-K} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z} \\ z & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es claramente no holomorfa y por tanto no lo será la $A(z)$ definida anteriormente. Esto concluye la búsqueda del contraejemplo, puesto que es una singularidad regular que es singularidad de segunda clase del sistema.

En términos más tangibles, esto significa que si controlamos la singularidad, o crecimiento del sistema en la singularidad, entonces tendremos controlado el crecimiento de la solución en este punto. Sin embargo, podremos encontrar funciones regulares, o con crecimiento controlado por potencias en las singularidades, que sean solución de un problema bastante irregular.

2.3. Sistemas hipergeométricos confluentes

Como posible aplicación de los resultados estamos capacitados para analizar con especial detalle los sistemas del tipo:

$$z\,\mathbf{x}'(z) = (z\,A + B)\,\mathbf{x}(z), \quad A,\ B \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu} \tag{2.19}$$

Como dar soluciones generales es un trabajo complejo, supondremos que B es diagonalizable y tiene buen espectro. De acuerdo con la proposición 2.5 tenemos ν soluciones linealmente independientes de la forma $\mathbf{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{s}_n\, z^{n+\lambda}$, con λ autovalor de B y $\mathbf{s}_n$ satisfaciendo la relación de recurrencia

$$((n+\lambda)\,I - B)\,\mathbf{s}_n = A\,\mathbf{s}_{n-1}, \quad 1 \leq n. \tag{2.20}$$

Como B es diagonalizable, entonces podremos ponerla en forma $B = TDT^{-1}$, con D diagonal, haciendo el cambio $\mathbf{s}_n = T\,\mathbf{r}_n$ y $A = T\,A^*\,T^{-1}$, tenemos el sistema reducido para una matriz B diagonal.

Regresando a la recurrencia (2.20), esta vez con B diagonal, es decir

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_\nu \end{pmatrix},$$

el sistema queda

$$\begin{pmatrix} (n+\lambda)-b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (n+\lambda)-b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (n+\lambda)-b_\nu \end{pmatrix} \mathbf{s}_n = A\mathbf{s}_{n-1}.$$

Podemos resolverlo, ya que B tiene buen espectro, y por lo tanto:

$$\mathbf{s}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{(n+\lambda)-b_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(n+\lambda)-b_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n+\lambda)-b_\nu} \end{pmatrix} A\mathbf{s}_{n-1}.$$

Para mayor simplicidad suponemos que conmutan para todo n, es decir, que B o A es un múltiplo de la identidad. Entonces

$$\mathbf{s}_n = A \begin{pmatrix} \frac{1}{(n+\lambda)-b_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(n+\lambda)-b_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n+\lambda)-b_\nu} \end{pmatrix} \mathbf{s}_{n-1},$$

y recursivamente llegamos a

$$\mathbf{s}_n = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{(n+\lambda)-b_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(n+\lambda)-b_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n+\lambda)-b_\nu} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{(n-1+\lambda)-b_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(n-1+\lambda)-b_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n-1+\lambda)-b_\nu} \end{pmatrix}$$

$$\times \cdots \times \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)-b_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+\lambda)-b_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(1+\lambda)-b_\nu} \end{pmatrix} \mathbf{s}_0 =$$

$$= A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{((n+\lambda)-b_1)\cdots((1+\lambda)-b_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{((n+\lambda)-b_2)\cdots((1+\lambda)-b_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{((n+\lambda)-b_\nu)\cdots((1+\lambda)-b_\nu)} \end{pmatrix} \mathbf{s}_0.$$

Volviendo a la expresión de la solución tenemos que, cuando B o A es un múltiplo de la identidad,

$$\mathbf{x}(z) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{((n+\lambda)-b_1)\cdots((1+\lambda)-b_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{((n+\lambda)-b_2)\cdots((1+\lambda)-b_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{((n+\lambda)-b_\nu)\cdots((1+\lambda)-b_\nu)} \end{pmatrix} \mathbf{s}_0 z^n.$$

Capítulo 3

ECUACIONES ESCALARES DE ORDEN ARBITRARIO

En esta ocasión cambiamos ligeramente el campo de estudio, de momento dejamos las ecuaciones vectoriales de orden uno con matriz $A(z)$ para plantearnos una ecuación, que aunque escalar, implica a varias derivadas de la función desconocida, procedamos a definir el problema.

Sean $a_k(z)$, con $1 \leq k \leq n$, funciones holomorfas, en el sentido clásico de variable compleja, en un dominio $G \subset \mathbb{C}$, buscamos $u(z)$, una función holomorfa en G que cumpla:

$$u^{(n)} + a_1(z)\, u^{(n-1)} + ... + a_n(z)\, u = 0, \;\; z \in G. \tag{3.1}$$

Como veremos en la sección siguiente, fácilmente podemos relacionar este sistema con otro de la forma (1.1), y tener con ello garantizadas ciertas propiedades como la unicidad y la existencia en dominios simplemente conexos, o el conocimiento de la forma de las soluciones.

3.1. Relación con sistemas de orden uno

Supongamos que tenemos una ecuación de orden n (3.1), veamos que se puede transformar en un sistema de la forma $\mathbf{x}' = A(z)\,\mathbf{x}, \; z \in G$, con $A(z)$ una matriz holomorfa de dimensión n.

Proposición 3.1. Sea G una región de $\mathbb{C}$, sea $u(z)$ una función holomorfa, solución del sistema de orden n (3.1). Se define el vector $\mathbf{x}(z) = (x_1(z), \ldots, x_n(z))$, holomorfo en G, de la siguiente manera:

$$x_j = u^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.2}$$

Entonces, se tiene que $\mathbf{x}(z)$ es solución del problema (1.1) con

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(z) & -a_{n-1}(z) & \cdots & -a_2(z) & -a_1(z) \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

siendo una $A(z)$ matriz holomorfa de dimensión n.

Demostración:
Derivando en (3.2) con respecto a z nos queda

$$x_j' = u^{(j)} = x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1,$$

mientras que

$$x_n' = u^{(n)} = -a_1(z)\, u^{(n-1)} - ... - a_n(z)\, u = a_1(z)\, x_n - ... - a_n(z)\, x_1.$$

Poniendo el problema en forma matricial obtenemos:

$$\mathbf{x}'(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(z) & -a_{n-1}(z) & \cdots & -a_2(z) & -a_1(z) \end{bmatrix} \mathbf{x}(z), \ z \in G,$$

lo cual concluye la demostración. □

Observación 3.2. Tras observar esta relación, podemos destacar:

1. A la matriz A obtenida en el resultado anterior se la denomina matriz compañera de la ecuación escalar. Puesto que toda ecuación escalar de orden n se puede escribir como un sistema de n ecuaciones de orden 1, todo resultado obtenido para dichos sistemas proporcionará información sobre las ecuaciones escalares de orden n.

2. Es obvio que este procedimiento no es único, es decir, se pueden asociar diferentes sistemas lineares de orden uno a una misma ecuación linear escalar de orden n. Este grado de libertad será importante en la prueba del teorema 3.9, el cual caracteriza los puntos singulares regulares para ecuaciones escalares de orden $n \geq 1$, que probamos a definir.

Definición 3.3. Para una ecuación (3.1) diremos que $z = 0$ es un punto singular regular si la solución del mismo no crece más rápido que una potencia de $|z|$ cuando $z \to 0$, G será de la forma $D(0, \rho) \setminus \{0\}$, es decir, existe $c > 0$, $K \in \mathbb{R}$ tal que $|u(z)| \leq c|z|^K$, para $0 < |z| < \rho$.

Pero podemos definir otro posible cambio, para crear otra matriz diferente de esta, pero en este caso no del tipo de problema (1.1), sino del tipo (2.1).

Proposición 3.4. Sea G una región de $\mathbb{C}$, sea $u(z)$ una función holomorfa, solución de la ecuación de orden n (3.1). Entonces se define el vector $\mathbf{x}(z)$ holomorfo de la siguiente manera

$$x_j = z^{j-1} u^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.4}$$

se tiene que $\mathbf{x}(z)$ es solución del problema (2.1) con

$$A(z) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & n-2 & 1 \\ -z^n a_n & -z^{n-1} a_{n-1} & -z^{n-2} a_{n-2} & \cdots & \cdots & -a_2 z^2 & n-1-za_1) \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

siendo $A(z)$ una matriz holomorfa de dimensión n.

Demostración:
Derivando en 3.4 con respecto a z nos queda

$$x_j' = (j-1)\, z^{j-2} u^{(j-1)} + z^{j-1} u^{(j)}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

lo cual equivale a

$$z\, x_j' = (j-1)\, x_j + x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1,$$

excepto en el caso n, que hay que tratarlo por separado:

$$z\, x_n' = (n-1)\, x_n + z^n\, u^{(n)}.$$

Introduciendo la ecuación (3.1) obtenemos

$$z\, x_n' = (n-1)\, x_n + z^n\, (-a_1(z)\, u^{(n-1)} - a_2(z)\, u^{(n-2)} - ... - a_n(z)\, u),$$

y por último, como $x_j = z^{j-1}u^{(j-1)}$,

$$z\, x_n' = (n-1)\, x_n - z\, a_1(z)\, x_n - z^2\, a_2(z)\, x_{n-1} - ... - z^n\, a_n(z)\, x_1.$$

Poniendo el problema en forma matricial obtenemos:

$$z\, \mathbf{x}'(z) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & n-2 & 1 \\ -z^n a_n & -z^{n-1}a_{n-1} & -z^{n-2}a_{n-2} & \cdots & \cdots & -a_2 z^2 & n-1-za_1) \end{bmatrix} \mathbf{x}(z),$$

$$z \in G,$$

lo cual concluye la demostración. □

Nótese que esta substitución ha sido realizada en torno a cero, pero bien podría haberse realizado en torno a cualquier otro punto $z_0 \in \mathbb{C}$, y el resultado sería el mismo, esto garantiza que la siguiente proposición se pueda generalizar a otra singularidad en otro punto distinto de 0.

Proposición 3.5. El sistema (2.1) de matriz (3.5) tiene una singularidad de primer tipo en $z = 0$ si y solo si las funciones $a_j(z)\, z^j,\ j = 1, 2, \cdots, n$, son holomorfas en $z = 0$, lo que es lo mismo, si y solo si $a_j(z)$ tiene a lo sumo un polo de orden j en $z = 0$.

Demostración:
Es evidente, sin más que mirar la forma de la matriz (3.5), cuyos únicos elementos que podrían ser singulares son de la forma $a_j(z)\, z^j$. □

Este resultado motiva en gran medida la siguiente definición.

Definición 3.6. Diremos que una ecuación lineal escalar de orden n tiene una singularidad de primer tipo en $z_0 = 0$, si tiene un punto singular en $z_0 = 0$ y es de la forma:

$$u^{(n)} + \sum_{j=1}^{\infty} z^{-j} p_j(z) u^{(n-j)} = 0, \tag{3.6}$$

donde las funciones p_j son holomorfas en torno a 0.

Ahora enunciaremos un lema que, aunque siendo clásico de variable compleja, nos sirve para la demostración del teorema sucesivo.

Lema 3.7. Sea $r > 0$, y $D^*(0,r) = R(0,0,r)$ el disco punteado de centro 0 y radio r, tomamos $u : D^*(0,r) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con un polo en 0. Entonces $\frac{u'(z)}{u(z)}$ tiene un polo simple en 0.

Demostración:
Como $u(z)$ tiene un polo en 0, supongamos que de orden s, entonces existe $\phi(z)$ holomorfa en $D(0,r)$ y no nula en 0, tal que $u(z) = \frac{\phi(z)}{z^s}, z \in D^*(0,r)$. Entonces,

$$u'(z) = \frac{\phi'(z)z - \phi(z)s}{z^{s+1}},$$

y por lo tanto,

$$\frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{\frac{\phi'(z)z-\phi(z)s}{z^{s+1}}}{\frac{\phi(z)}{z^s}} = \frac{\phi'(z)z - \phi(z)s}{\phi(z)z} = \frac{(\phi'(z)z - \phi(z)s)/\phi(z)}{z}.$$

Puesto que el numerador de la última fracción es una función holomorfa en un entorno de 0 y no se anula en 0, resulta que $\frac{u'(z)}{u(z)}$ tiene un polo simple en 0. $\square$

Observación 3.8. Razonando por inducción y con razonamientos similares al de la anterior demostración, se puede probar el siguiente enunciado:
Sea $r > 0$, y $D^*(0,r) = R(0,0,r)$ el disco punteado de centro 0 y radio r, tomamos $u : D^*(0,r) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con un polo en 0. Entonces para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $\frac{u^{(j)}(z)}{u(z)}$ tiene un polo de orden j en 0.

Teorema 3.9. El origen es un punto singular regular de (3.1) si y solo si es una singularidad de primer tipo.

Demostración:
Supongamos que tenemos una singularidad de primer tipo en la ecuación (3.1), entonces el sistema (3.5) tiene una singularidad de primer tipo, de acuerdo con la proposición 3.4. Entonces será una singularidad regular del sistema (3.5), como se probó en el corolario 2.14, y por tanto, si denotamos $\mathbf{x}(z)$ a la solución, esta crecerá más lentamente que una potencia de $|z|$ cuando $z \to 0$. Como $\mathbf{x}(z)$ está definido de forma que $x_1(z) = u(z)$, nos queda que $|u(z)| = |x_1(z)| \leq \|\mathbf{x}(z)\|$. Sabiendo que $\|\mathbf{x}(z)\|$ crece más lentamente que una potencia de $|z|$ cuando $z \to 0$, concluimos la primera implicación.

Supongamos ahora que tenemos una singularidad regular, es decir, una solución $u(z)$ no trivial en $|z| < \rho$ está sujeta a acotaciones como en la definición 3.3. Entonces, para $\alpha \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tenemos que $z^{\alpha}u(z)$ está acotada en $0 < |z| < \rho$ y es holomorfa, con lo que presentará una singularidad evitable en $z = 0$. En consecuencia se puede escribir $u(z) = s(z)\, z^{-\alpha}$, donde $s(z)$ es holomorfa en $|z| < \rho$. En otras palabras, la función u presenta un polo en 0, luego deducimos que

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\, z^{-\alpha+k}, \quad \text{si } 0 < |z| < \rho,$$

donde haciendo ρ suficientemente pequeño, podremos suponer que u no se anula.
Ahora terminamos la demostración por inducción sobre n. Para $n = 1$ sabemos que, si $u(z)$ tiene un polo en 0 entonces $u'(z)/u(z)$, en virtud del lema 3.7, tiene un polo simple en 0, luego $z\, a_1(z) = -z\, u'(z)/u(z)$ será holomorfa, lo cual me dice que la singularidad es de primer tipo.
Supongamos ahora que está demostrado para $n-1$, tomamos una función y holomorfa en $D^*(0, \rho)$, substituimos la función $u(z)\, y(z)$ en la ecuación (3.1), donde u es la solución antes descrita. Obtenemos, aplicando la fórmula de Leibniz de la derivada k-ésima, la siguiente ecuación:

$$y^{(n)}(z) = \sum_{j=1}^{n-1} y^{(j)}(z) \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \frac{u^{(k-j)}(z)}{u(z)} a_{n-k}(z), \tag{3.7}$$

Se puede observar que en (3.7) no aparece el término $y(z)$, luego es una ecuación del tipo (3.1), de grado $n-1$, para $y'(z)$. Además, la función $\frac{u^{(k-j)}(z)}{u(z)}$, de acuerdo con la observación anterior, tiene un polo de orden $k - j$ en 0, lo cual implica que $\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \frac{u^{(k-j)}(z)}{u(z)} a_{n-k}(z)$ es holomorfo en $D^*(0, \rho)$. Por lo tanto, asumiendo que ninguna solución de (3.1), incluido $u(z)y(z)$, puede crecer más rapidamente en 0 que una potencia de $|z|$, entonces tampoco lo harán ni $y(z)$ ni sus derivadas, es decir, la ecuación (3.7) presenta en 0 una singularidad regular. Por la hipótesis de inducción tenemos que los coeficientes que acompañan a $y^{(j)}$ tienen a lo sumo un polo de orden $n - j$, lo cual implica que cada a_k tiene a lo sumo un polo de orden $n - k$. $\square$

Este resultado, es sin duda el principal de este capítulo, ya que relaciona el concepto de singularidad regular y de singularidad de primer tipo en este tipo de ecuaciones escalares. Cabe destacar que significa esto en el sentido visual, no riguroso.

Recordemos que en los sistemas matriciales hemos visto que si un problema tiene una singularidad de primer tipo, entonces la solución tiene una singularidad regular, pero el recíproco no siempre es cierto. En otras palabras, para sistemas puede ocurrir que un problema con un "mal aspecto", entendido esto como una singularidad de segunda especie, tenga sin embargo todas sus soluciones con buen comportamiento, en el sentido de que su crecimiento es moderado.

En las ecuaciones escalares de orden n que tratamos en este capítulo, no solo se verifica la misma propiedad antes mencionada, sino que además el recíproco es cierto. Es decir, la solución de una ecuación escalar es de crecimiento potencial si y solo si el problema es de primer tipo o primera clase.

Los enunciados más importantes de este texto a nivel teórico ya están enunciados y tratados, de ahora en adelante nos centraremos en un asunto más práctico a la hora de resolver las ecuaciones diferenciales.

3.2. Método de Frobenius

Tras observar la relación entre los dos tipos de problemas estudiados, sistemas lineares de orden 1 y ecuaciones lineares de orden n, puede parecer razonable resolver las ecuaciones escalares de orden n reduciendo el problema a uno matricial, el cual sabemos manejar. Este método, a decir verdad, no es muy eficiente. En esta sección nos dedicaremos a mostrar un método exclusivo para estas ecuaciones escalares, el llamado método de Frobenius. De ahora en adelante suponemos que tenemos un problema con singularidad de primer tipo en un entorno de cero.

Para comenzar realicemos un pequeño cambio en la formulación del problema (3.6), que multiplicando por z^n se puede escribir como:

$$L(w) = z^n w^{(n)}(z) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(z) z^{n-j} w^{(n-j)}(z) = 0, \tag{3.8}$$

donde las funciones $Q_j(z)$ son holomorfas en $z = 0$. Con el fin de justificar el procedimiento en el caso general supongamos inicialmente que las funciones Q_j son constantes, digamos $Q_j(z) = c_j$, $j = 1, ..., n$.

Comencemos analizando cómo actúa el operador L sobre un monomio de la forma z^r. Es inmediato comprobar que $L(z^r) = f(z)z^r$, siendo

$$f(r) = r(r-1)\cdots(r-n+1) + \sum_{j=1}^{n} c_j r(r-1)\cdots(r-n+1+j).$$

Por lo que si r es una solución de la ecuación polinómica $f(r) = 0$, la función será solución de (3.8).

Si una solución r_0 de la ecuación $f(r) = 0$ tiene multiplicidad k, entonces será también solución la siguiente función:

$$z^{r_0}(c_0 + c_1 \log(z) + \cdots + c_{k-1} \log^{k-1}(z)).$$

Para mostrar esto se puede ir realizando de forma recursiva, supongamos que r tiene multiplicidad k, es decir, $f(r) = f'(r) = \cdots = f^{(k-1)}(r) = 0$. Tomamos $l < k$, entonces tenemos

$$L(z^r \ \log^l(z)) = L(\frac{\partial^l z^r}{\partial r^l}) = \frac{\partial^l (L(z^r))}{\partial r^l} = \frac{\partial^l (f(r)z^r)}{\partial r^l} = 0.$$

Incluso si las funciones $Q_J(z)$ no son constantes, como estamos suponiendo ahora, la permutación de la derivación y el operador L se justifica fácilmente observando la forma que tiene y aplicando el teorema de Schwarz.

$$L(w(z,r)) = z^n \frac{\partial^n w(z,r)}{\partial z^n} + \sum_{j=1}^{n} Q_j(z) z^{n-j} \frac{\partial^{n-j} w(z,r)}{\partial z^{n-j}},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(L(w(z,r)))}{\partial r} &= z^n \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial^n w(z,r)}{\partial z^n}) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(z) z^{n-j} \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial^{n-j} w(z,r)}{\partial z^{n-j}}) \\
&= z^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}(\frac{\partial w(z,r)}{\partial r}) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(z) z^{n-j} \frac{\partial^{n-j}}{\partial z^{n-j}}(\frac{\partial w(z,r)}{\partial r}) \\
&= L\left(\frac{\partial(w(z,r))}{\partial r}\right).
\end{aligned}$$

Podemos afirmar además que para cada r las soluciones $z^{r_0} \log^l(z)$, $l = 0, \cdots, k-1$ son independientes, ya que, si para ciertos $b_l \in \mathbb{C}$, $l = 0, \cdots, k-1$, se tiene

$$\sum_{l=0}^{k-1} b_l z^{r_0} \log^l(z) = 0, \ z \neq 0,$$

entonces

$$\sum_{l=0}^{k-1} b_l \log^l(z) = 0, \;\; z \neq 0.$$

Llamando $\alpha = \log(z)$, obtenemos

$$\sum_{l=0}^{k-1} b_l \alpha^l = 0, \;\; \alpha \in \mathrm{Im}(\log(z)),$$

luego $b_l = 0$ para $l = 0, \cdots, k-1$. Es decir, las funciones $z^{r_0} \log^l(z)$ $l = 0, \cdots, k-1$ son independientes.

Eliminemos ahora la restricción de que los polinomios Q_j sean constantes, podemos ver el problema tgeneral como una modificación del problema anterior, veamos cómo afecta esto a las soluciones. Esta es la idea del método de Frobenius.
Comencemos ensayando con series del tipo

$$w(z) = \sum a_k \, z^{r+k},$$

donde r está elegido de forma que $f(r) = 0$, siendo ahora f el polinomio

$$f(r) = r(r-1)\cdots(r-n+1) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(0) r(r-1)\cdots(r-n+1+j).$$

Supongamos que

$$Q_{n-i}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^i z^m.$$

Substituyendo y operando de manera puramente formal, tenemos que:

$$\begin{aligned} L(w) &= L(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, z^{r+k}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, L(z^{r+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} Q_m^i z^m z^i \frac{\partial^i (z^{r+k})}{\partial r^i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} Q_m^i z^{r+k+m} \prod_{p=1}^{i} (r+k-p+1). \end{aligned}$$

Agrupando los coeficientes de las diferentes potencias de z, obtenemos las siguientes expresiones:

cuando $m+k=0$,

$$\sum_{i=0}^{n} Q_0^i(r)\cdots(r-i+1) = f(r);$$

cuando $m+k=1$,

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} Q_1 \prod_{p=1}^{i}(r-p+1) + a_1 \sum_{i=0}^{n} Q_0 \prod_{p=1}^{i}(r+1-p+1);$$

cuando $m+k=s$,

$$\sum_{k=0}^{s} a_k \sum_{i=0}^{n} Q_{s-k}^i \prod_{p=1}^{i}(r+k-p+1) = a_s f(r+s) + a_{s-1} f_1(r+s-1) + \cdots + a_0 f_s(r),$$

donde $f_s(r)$ es un polinomio de grado n, de la froma

$$f_s(r) = \sum_{i=1}^{n} Q_s^i r(r-1)\cdots(r-i+1) + Q_s^0.$$

Esto, de forma sintética, nos lleva a

$$L(w) = a_0 f(r) z^r + (f(r+1)a_1 - g_1) z^{r+1} + \cdots + (f(r+j)a_j - g_j) z^{r+j} + \cdots ,$$

donde los g_i dependen linealmente de los $a_1, \cdots, a_{i-1}$ anteriores. Puesto que se trata de conseguir que $L(w) = 0$, de nuevo interesa que r sea solución de $f(r) = 0$, puesto que así cancelamos el primer término. A continuación, recursivamente podremos ir hallando los a_k de forma única, imponiendo que se anulen todos los coeficientes de la serie $L(w)$, es decir, que

$$f(r+j)a_j = g_j, \ j \geq 1.$$

El obstáculo posible para este procedimiento aparece cuando f se anula en alguno estos puntos $r+j$, ya no podemos continuar el proceso. Entonces, cuando hay raíces de f que distan un entero aparecerá una dificultad que aparcaremos momentáneamente.

De igual manera, si la multiplicidad k de r es mayor que 1 tendremos que la función $v = w(z)\log^l(z)$, para $l < k$, es una solución. Basta aplicar $L(w)$

$$L(w(z)) = f(r)\, z^r = 0,$$

derivando l veces respecto a r a ambos lados, obtenemos

$$L(v(z)) = \frac{\partial^l (f(r)\, z^r)}{\partial r^l} = 0,$$

pues r es raíz de multipliciadad $k > l$ de f, luego anula su derivada l-ésima. Por lo tanto, hemos encontrado las soluciones de la forma

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_j \log(z)^j (\sum_{m=0}^{\infty} w_m z^{m+r+j}),$$

donde r es raíz de f de multiplicidad k.

El algoritmo de resolución es el siguiente:

1. Resolvemos $f(r) = 0$, que tiene grado n y por tanto n soluciones contando con su multiplicidad.

2. Comprobamos que dos soluciones no distan un entero.

3. Por cada raíz r de f tenemos que hallar cada término a_k de w_r, con el procedimiento recursivo expuesto antes.

4. Tenemos que $v = w_r(z) \log^l(z)$ será también solución para l menor que la multiplicidad de r.

Aún así esto garantiza la existencia de n soluciones formales, es el momento de comprobar la existencia de soluciones holomorfas independientes. Es decir, basta analizar la convergencia de la serie y la independencia de las mismas.

En cuanto a la convergencia de la serie tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.10. Consideramos el problema modificado (3.8), y la solución formal buscada por el método de Frobeniüs para r, la raíz de mayor parte real de f. Entonces la solución es holomorfa en el mayor disco punteado donde lo sean las funciones que definen el problema (3.8).

Demostración:
Tomamos la solución hallada anteriormente $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^{r+k}$, con

$$a_s f(r+s) + a_{s-1} f_1(r+s-1) + \cdots + a_0 f_s(r) = 0,$$

perfectamente definida puesto que $f(r+s)$ no se anula por ser r la raíz de parte real mayor. Recordemos que $f_s(r) = \sum_{i=0}^{n} Q_s^i(r) \cdots (r-i+1)$, un polinomio de grado n en r; a su vez, $f(r)$ es un polinomio de grado n.

Utilizamos ahora que para cada $\rho < R$, con R el radio máximo de convergencia del problema, tenemos que $\max\{|Q^i_m|,\ i = 1,\ldots,m\} \leq \frac{K\rho^{-m}}{m}$, aplicando esto deducimos

$$|a_s| \leq M \sum_{m=1}^{s} \frac{|a_{s-m}|\, K\rho^{-m}\, S(s)}{m\, f(r+s)},$$

con S un polinomio adecuado de grado $n-1$. Ahora como el grado de f es n, entonces asintóticamente, cuando $s \to \infty$, $\frac{S(s)}{f(r+s)}$ se comporta como $1/s$. Tomando M suficientemente grande se puede afirmar que

$$|a_s| \leq M \sum_{m=1}^{s} \frac{|a_{s-m}|\, K\rho^{-m}}{m\, s}.$$

Si probamos por inducción que $|a_s| \leq C\rho^{-s}$, para una cierta constante C tendríamos terminada la demostración. Si suponemos cierto para $t < s$ que $|a_t| \leq C\rho^{-t}$, entonces

$$|a_s| \leq M \sum_{m=1}^{s} \frac{C\, K\rho^{-s}}{m\, s} = M\, C\, K\rho^{-s} \frac{\sum_{m=1}^{s} \frac{1}{m}}{s}.$$

Teniendo en cuenta que el comportamiento asintótico de $\sum_{m=1}^{s} \frac{1}{m}$ es básicamente logarítmico, entonces podemos afirmar que existe s_0 tal que para $s > s_0$ se tiene que $M\, K \frac{\sum_{m=1}^{s} \frac{1}{m}}{s} \leq 1$. Luego si tomamos $C = \max\{a_i\, \rho^i,\ i = 0,\ldots,s_0\}$ entonces se verifica la inducción para los primeros s_0, es decir, $|a_i| \leq C\rho^{-i}$ si $s \leq s_0$. Para el resto, $s > s_0$, aplicamos la hipótesis de inducción. $\square$

Sea r raíz de f, ahora la prueba se extiende fácilmente si $r+s$ no es raíz de f, para todo entero no nulo s, y obtenemos el mismo resultado.

Teorema 3.11. Consideramos el problema modificado (3.8), y la solución formal buscada por el método de Frobeniüs para r, tal que para todo entero s se tiene que $r+s$ no es raíz de f. Entonces la solución es holomorfa en el mayor disco punteado donde lo sean las funciones que definen el problema (3.8) y además independiente de la anteriormente citada.

Demostración:
Probar la convergencia de la serie es repetir el razonamiento anterior, ya que no usábamos el hecho de ser la de mayor parte real.

Sean $r_1,\ldots,r_s$ raíces de f, ordenadas en sentido creciente de su parte real. Demostremos que las soluciones de la forma anterior que podemos escribir como $w_i\, z^{r_i}$, siendo $w_i(z)$ una función holomorfa en 0, son linealmente independientes. Supongamos que tenemos que

$$w_s\, z^{r_s} = \sum_{i=1}^{s-1} A_i\, w_i\, z^{r_i},$$

entonces

$$w_s = \sum_{i=1}^{s-1} A_i\, w_i\, z^{r_i - r_s}.$$

Observamos que w_s es holomorfa en cero, luego el miembro derecho debería serlo, pero $z^{r_i - r_s}$ tiende a infinito en cero, por ser r_s mayor en parte real, y además las $w_i(0)$ valen distinto de cero luego no influyen en el tratamiento infinitesimal. Se deduce que el miembro derecho tiende a infinito en cero, lo cual es absurdo $\square$

Hemos analizado en el caso de series formales el tratamiento a seguir cuando la raíz de f tiene multiplicidad mayor que 1, trasladar el resultado a la holomorfía es sencillo con los teoremas anteriores.

Teorema 3.12. Consideramos el problema modificado (3.8), y la solución formal $w_r(z)$, buscada por el método de Frobeniüs para r, tal que para todo entero s se tiene que $r + s$ no es raíz de f, y además r tiene multiplicidad k. Entonces la función $v(z) = w_r(z) \log^l(z)$, con $l < k$, es solución de la ecuación.

Demostración:
La demostración es sencillamente aplicar exactamente el mismo procedimiento que cuando suponemos que $Q_j(z)$ son constantes. $\square$

En general, el método de Frobeniis es difícil de aplicar para ecuaciones de orden mayor que 2. Daremos en la sección siguiente una construcción completa y demostrada del problema más sencillo, a la par que más común en las ciencias aplicadas, es decir, cuando tenemos a lo sumo grado dos.

3.3. Problema de orden dos

En primer lugar, definamos de nuevo el problema (3.1) para sistemas bidimensionales.
Sean $a_k(z)$, con $1 \leq k \leq 2$ funciones holomorfas, en el sentido clásico

de variable compleja, en un dominio $G \subset \mathbb{C}$, buscamos $u(z)$, una función holomorfa tal que cumpla:

$$u''(z) + a_1(z)\, u'(z) + a_2(z)\, u(z) = 0, \quad \text{para } z \in G. \tag{3.9}$$

Como en la introducción del método de Frobeniüs, supondremos que estamos ante un problema que tenemos una singularidad de primer tipo en un entorno de cero.
Al igual que en el caso general, conviene modificar el problema, es decir buscar $w(z)$ solución de

$$z^2 w''(z) + Q_1(z) z\, w'(z) + Q_2(z) w(z) = 0, \tag{3.10}$$

en donde tenemos

$$Q_j(z) = a_j(z)\, z^j.$$

Por hipótesis los coeficientes Q_j son holomorfos en $z = 0$.

Aplicaremos los resultados anteriores al caso particular de dimensión dos, con el polinomio $f(r)$, que ahora es mucho más sencillo. Denotando

$$p_0 = Q_1(0), \quad q_0 = Q_2(0),$$

el polinomio indicial f es de la forma

$$f(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0. \tag{3.11}$$

Es evidente, por el teorema fundamental del álgebra, que tendremos dos raíces complejas para $f(r) = 0$, denominándolas como r_1, r_2, es momento de recordar algunos teoremas ya demostrados e indagar un poco más en esa casuística que no hemos podido abordar en el caso general.

Teorema 3.13. Consideramos el problema modificado (3.10), y la solución formal buscada por el método de Frobeniüs para r, la raíz de mayor parte real de $f(r)$. Entonces la solución es holomorfa en el mayor disco punteado donde lo sean las funciones que definen el problema (3.10).

Si suponemos que $Re(r_1) \geq Re(r_2)$, entonces, sin más que recordar la construcción formal realizada por el método de Frobeniüs, tendremos que existe una solución de la forma

$$w_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_0 \neq 0.$$

Ahora bien, r_2 tiene varias opciones, puede no distar un entero de r_1, puede distar un entero y ser distinto o bien puede que la multiplicidad de la única raíz que tendría $f(z)$ fuera dos.

Teorema 3.14. Consideramos el problema modificado (3.8), $r_1,\ r_2$ las raíces del polinomio indicial, si además $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, entonces existe una solución de la forma

$$w_2(z) = z^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad b_0 \neq 0.$$

Independiente de la solución w_1 citada anteriormente.

Este teorema es justamente la consecuencia del teorema 3.12, pero aplicado a nuestro caso particular.

A partir de aquí abordaremos los dos casos que nos quedan desde una perspectiva propia de este problema.

Teorema 3.15. Consideramos el problema modificado (3.10), sea $w(z)$ una solución no trivial del mismo. Entonces se verifica que $\mu(z) = w(z)\int^z v(u)du$ es otra solución no trivial de (3.8), si y solamente si $v(z)$ es de la forma

$$v(z) = w(z)^{-2}\exp(-\int^z \frac{Q_1(u)}{u}du) = w(z)^{-2}z^{r_1+r_2-1}\exp(U(z)),$$

con $U(z)$ analítica en cero.

Demostración:
Empecemos suponiendo que $v(z)$ es de la forma

$$v(z) = w(z)^{-2}\exp\left(-\int^z \frac{Q_1(u)}{u}du\right).$$

Entonces la función dada por

$$\mu(z) = w(z)\int^z v(u)du = w(z)\int^z w(v)^{-2}\exp\left(-\int^v \frac{Q_1(u)}{u}du\right)dv,$$

se puede derivar, obteniendo que

$$\mu'(z) = w'(z)\int^z w(v)^{-2}\exp\left(-\int^v \frac{Q_1(u)}{u}du\right)dv + w(z)^{-1}\exp\left(-\int^z \frac{Q_1(u)}{u}du\right),$$

$$\mu''(z) = w''(z)\int v(z) + w'(z)v(z) - w'(z)v(z) - v(z)\frac{Q_1(z)}{z}.$$

Veamos que ν satisface la ecuación (3.8):

$$
\begin{aligned}
& z^2\mu''(z) + Q_1(z)z\,\mu'(z) + Q_2\mu(z) \\
& = z^2 w''(z)\int^z v(u)du - zv(z)Q_1(z) \\
& + Q_1(z)z(w'(z)\int v(z) + w(z)v(z)) + Q_2 w(z)\int^z v(u)du \\
& = \left(\int^z v(u)du\right)\left[z^2w''(z) + Q_1(z)zw'(z) + Q_2w(z)\right] + \\
& + v(z)\left[-zv(z)Q_1(z) + zw(z)v(z)\right] = 0,
\end{aligned}
$$

puesto que $w(z)$ era ya una solución del problema.

Supongamos ahora que $\mu(z)$, descrito como $\mu(z) = w(z)\int^z v(u)du$, es solución del problema, entonces

$$
\begin{aligned}
\mu'(z) &= w'(z)\int^z v(u)du + w(z)v(z), \\
\mu''(z) &= w''(z)\int^z v(u)du + w'(z)v(z) + w'(z)v(z) + w(z)v'(z).
\end{aligned}
$$

Ahora bien, por hipótesis

$$
\begin{aligned}
0 =& z^2\mu''(z) + Q_1(z)z\mu'(z) + Q_2\mu(z) \\
=& z^2\left(w''(z)\int^z v(u)du + w'(z)v(z) + w(z)v'(z) + w(z)v'(z)\right) + \\
& Q_1(z)z\left(w'(z)\int^z v(u)du + w(z)v(z)\right) + Q_2w(z)\int^z v(u)du
\end{aligned}
$$

Agrupando al igual que antes, lo que acompaña a $\int v$ es cero, puesto que $w(z)$ era solución, y se ha de cumplir que

$$0 = 2z^2w'(z)v(z) + z^2w(z)v'(z) + zQ_1(z)w(z)v(z),$$

equivalentemente

$$0 = zw(z)v'(z) + (2zw'(z) + Q_1(z)w(z))v(z).$$

Es decir hemos llegado a una ecuación de grado uno, para resolverla podemos suponer que estamos en un abierto conexo, en el que no se anula ni $w(z)$, ni $v(z)$, luego transformamos la ecuación en la siguiente

$$\frac{v'(z)}{v(z)} + 2\frac{w'(z)}{w(z)} + \frac{Q_1(z)}{z} = 0.$$

Tomando primitivas

$$\log(v(z)) = -2\log(w(z)) - \int \frac{Q_1(z)}{z} dz,$$

y eligiendo una rama del logaritmo adecuada tenemos

$$v(z) = w(z)^{-2} \exp(-\int^z \frac{Q_1(u)}{u} du).$$

Con esto se concluye la prueba, salvo la última igualdad, la cual simplifica notablemente la expresión de $v(z)$.
El polinomio indicial desarrollado es de la forma

$$f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0,$$

aplicando la fórmula de Cardano-Vieta, es evidente que $r_1 + r_2 = -p_0 + 1$. Trabajando en el disco punteado donde el problema es singular regular, es decir donde Q_1 y Q_2 son holomorfas, tenemos

$$Q_1(z) = p_0 + z\, s(z),$$

siendo $s(z)$ holomorfa, luego admite primitiva $U^*(z)$. Entonces

$$\frac{Q_1(z)}{z} = \frac{p_0}{z} + s(z) = \frac{-1 + r_1 + r_2}{z} + s(z),$$

y tomando primitivas

$$\int \frac{Q_1(z)}{z} = \log(z)(1 - r_1 - r_2) + U^*(z) + C.$$

De aquí se deduce lo pedido tomando $U(z) = -U^*(z) - C$,

$$v(z) = w(z)^{-2} z^{-1+r_1+r_2} \exp U(z).$$

□

Ahora sabemos crear soluciones a partir de una dada; esto nos permite terminar el estudio de este tipo de ecuaciones mediante los dos próximos teoremas.

Teorema 3.16. Consideramos el problema modificado (3.10), supongamos que $r_1 = r_2$, es decir, $f(r)$ tiene una sola raíz de multiplicidad dos. Entonces existe una solución $y_2(z)$ independiente de $y_1(z)$ de la forma

$$y_2(z) = z^{r_1+1} b(z) + \log(z) y_1(z),$$

donde b es holomorfa en el disco.

Demostración:
Sabemos, según el teorema anterior, que existe una solución de la forma

$$\mu(z) = w_1(z) \int^z v(u)du,$$

siendo

$$v(z) = w_1(z)^{-2} z^{-1+2\,r_1} \exp U(z),$$

con U analítica en 0. Como bien hemos demostrado antes, $w_1(z) = a(z)z^{r_1}$, con a analítica en 0 y $a(0) \neq 0$, luego simplificamos

$$v(z) = a(z)^{-2} z^{-1} \exp U(z) = z^{-1} V(z),$$

donde V es analítica en 0 y $V(0) = K \neq 0$. Entonces, se obtiene que

$$v(z) = \frac{V(z)}{z} = \frac{K}{z} + V^*(z),$$

con V^* analítica en 0. Tomando primitivas, siendo $b^*(z)$ la primitiva de $V^*(z)$ tal que se anula en 0, tenemos que

$$\int^z v(u)du = \int^z \frac{K}{u} + V^*(u)du = K\log(z) + b^*(z).$$

Como $b^*(0) = 0$ entonces en un entorno de cero adecuado tendremos que $b^*(z) = zb^{**}(z)$, con $b^{**}(z)$ holomorfa, y resulta que

$$\mu(z) = w_1(z)K\log(z) + b(z)^{**} z w_1(z).$$

Recordando la forma que tiene $w_1(z) = a(z)z^{r_1}$, finalmente tenemos

$$\mu(z) = w_1(z)K\log(z) + b(z)^{**} z w_1(z) = w_1(z)K\log(z) + b(z)z^{r_1+1},$$

donde $b(z) = b(z)^{**} w_1(z)a(z)$, es holomorfa en el disco y no se anula en $z_0 = 0$. $\square$

Teorema 3.17. Consideramos el problema modificado (3.10), supongamos que $r_1 = r_2 + k$, con $k \in \mathbb{N}$ no nulo, es decir, $f(r)$ tiene dos raíces que distan un entero no nulo. Entonces existe una solución $y_2(z)$ independiente de $y_1(z)$ de la forma

$$y_2(z) = z^{r_2} b(z) + d\log(z)y_1(z),$$

donde b es holomorfa en el disco y no se anula en $z_0 = 0$ y $d \in \mathbb{C}$ es una constante arbitraria.

Demostración:
Procedemos, igual que en el caso precedente, a aplicar el teorema 3.15, es decir, consideramos la solución $w_1(z)$, asociada a r_1, y formamos una nueva solución en la forma

$$\mu(z) = w_1(z) \int^z v(u)du,$$

siendo

$$v(z) = w_1(z)^{-2} z^{-1+2\,r_1-k} \exp U(z), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como $w_1(z) = a(z) z^{r_1}$, simplificamos y escribimos

$$v(z) = a(z)^{-2} z^{-1-k} \exp U(z) = z^{-1-k} V(z), \quad k \in \mathbb{N},$$

donde $V(z)$ es holomorfa en D y no nula en cero. Realizamos ahora la integral de $v(z)$:

$$\int^z v(u)du = \int^z u^{-1-k} V(u)du.$$

Desarrollando $V(z)$ hasta el orden k, existen g holomorfa en un entorno de cero y constantes $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$, tales que.

$$V(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j + g(z) z^{k+1},$$

luego

$$\begin{aligned} \int^z v(u)du &= \int^z u^{-1-k} \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u^j + g(u) u^{k+1} \right) du \\ &= \int \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^{j-1-k} + g(z) \right) dz. \end{aligned}$$

Por una parte, $g(z)$ tiene primitiva $G(z)$. Por otra parte, menos el último término del sumatorio, todos los demás admiten primitiva en un entorno que no contenga al cero, llamémosla $F(z)$. Podemos escribir entonces,

$$\int^z v(u)du = F(z) + G(z) + \alpha_k \int^z \frac{1}{u} du.$$

Tomando una rama apropiada del logaritmo llegamos a que

$$\int^z v(u)du = F(z) + G(z) + \alpha_k \log(z),$$

$$\mu(z) = w_1(z) \left(F(z) + G(z) + \alpha_k \log(z) \right).$$

Uno de los dos términos es claramente de los buscados, el otro lo desarrollamos en forma de serie, por construcción, si $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j$ es el desarrollo de $V(z)$ en torno a cero, tenemos

$$v(z) - \frac{\alpha_k}{z} = \sum_{j=0, j\neq k}^{\infty} \alpha_j z^{j-k-1},$$

cuya primitiva es

$$F(z) + G(z) = \sum_{j=0, j\neq k}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j-k} z^{j-k}.$$

Recuperando la forma de $w_1(z) = a(z)z^{r_1}$, deducimos que

$$\begin{aligned}
\mu(z) &= a(z) \sum_{j=0, j\neq k}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j-k} z^{j+r_1-k} + w_1(z)\alpha_k \log(z) \\
&= a(z) \sum_{j=0, j\neq k}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j-k} z^{j+r_2} + w_1(z)\alpha_k \log(z) \\
&= a(z) z^{r_2} \sum_{j=0, j\neq k}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j-k} z^{j} + w_1(z)\alpha_k \log(z) \\
&= z^{r_2} b(z) + w_1(z)\alpha_k \log(z),
\end{aligned}$$

siendo $b(z)$ holomorfa en 0, y este es justamente el resultado al cual queríamos llegar. $\square$

Apéndice A

TEOREMAS DE HOLOMORFÍA EN ESPACIOS DE BANACH

A.1. Resultados previos

Necesitamos tener un conocimiento mínimo en Análisis Funcional, el cual expondremos brevemente, obviando las demostraciones que no sean estrictamente el objeto de este texto.

Definición A.1. Sea (E, d) un espacio métrico sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, diremos que es completo cuando todas las sucesiones de elementos de E que sean de Cauchy convergen.

En nuestro caso, y de ahora en adelante, supondremos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definición A.2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, diremos que es un espacio de Banach si es completo en la topología inducida por la norma.

Considerando $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados, de ahora en adelante denotaremos por $L(E, F) := \{f : E \to F |\ f \ \text{ lineal } \ \text{y} \ \text{ continua}\}$. Sobre este espacio podemos definir una norma, la cual se puede probar que está bien definida:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}, \quad f \in L(E, F).$$

En el caso particular $L(E, \mathbb{K})$, lo llamaremos espacio dual y lo denotaremos como E'.

Teorema A.3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio normado, $(F, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, entonces $(L(E, F), \|\cdot\|_{L(E,F)})$ es espacio de Banach.

Como consecuencia directa de este teorema tenemos que $(E', \|\cdot\|)$ es espacio de Banach.

Teorema A.4 (Teorema de Hahn-Banach, versión analítica)**.** Sea E espacio métrico sobre K y M subespacio vectorial de E, y sea $p : E \to [0, \infty)$ una seminorma, es decir, una aplicación tal que

1. $p(tx) = |t|p(x)$, para todo $x \in E,\ t \in \mathbb{K}$.
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in E$.

Si f es una aplicación lineal definida de M en $\mathbb{K}$ tal que para todo $x \in M$ $|f(x)| \leq p(x)$, entonces existe F definida de E en $\mathbb{K}$, lineal, tal que $F(x) = f(x)$ para cada $x \in M$ y $|F(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Omitimos la demostración, que se puede consultar en, por ejemplo, [4].

Este corolario, que enunciaremos a continuación, en muchas ocasiones se le denomina también teorema de Hahn-Banach.

Corolario A.5 (Teorema de Hahn-Banach)**.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y M subespacio vectorial de E, y sea f una aplicación lineal y continua definida de M en $\mathbb{K}$. Entonces existe F definida de E en $\mathbb{K}$, lineal y continua, tal que $F(x) = f(x)$ para cada $x \in M$ y $\|F\| = \|f\|$.

Demostración:
Basta aplicar el teorema anterior tomando como seminorma la dada por $p(x) = \|f\|_M \|x\|$, se verifica que $|f(x)| \leq \|f\|_M \|x\|$ para todo $x \in M$, y que p cumple las dos condiciones del teorema. Entonces existirá F definida de E en $\mathbb{K}$, lineal, tal que $F(x) = f(x)$, para todo $x \in M$ y $|F(x)| \leq \|f\|_M \|x\|$, luego es continua y por definición $\|F\| \leq \|f\|_M$. Como coinciden en M,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \neq 0, x \in M} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0, x \in M} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|.$$

Por lo tanto $\|F\| = \|f\|$. $\square$

De este resultado se deduce el siguiente corolario, que es el que más nos interesa para los siguientes resultados.

Corolario A.6. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, y sea $x \in E$ tal que para todo funcional $F \in E'$ se tiene $F(x) = 0$, entonces x es nulo.

Demostración:
Probemos por contrarrecíproco, supongamos que tenemos $x \in E$ no nulo, entonces tomamos $M =< \{x\} >= \{tx | t \in \mathbb{K}\}$ y sea f definida de M en $\mathbb{K}$ por $f(a\,x) = a$, lineal y continua. Entonces por el teorema anterior existiría una extensión suya, F, a todo el espacio E tal que $F(x) = 1 \neq 0$, como queríamos demostrar. $\square$

Finalmente podemos enunciar este resultado de separación.

Corolario A.7. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, entonces E' separa puntos de E, es decir, si $x, y \in E$ son elementos distintos entonces existe $f \in E'$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Demostración:
Si tomo $x, y \in E$ distintos, entonces $x - y$ será no nulo, aplicando el corolario A.6 existirá $f \in E'$ tal que $f(x-y) \neq 0$, y por la linearidad de f se concluye.
$\square$

A.2. Holomorfía

Será interesante conocer de forma general, aunque sin proporcionar todos los detalles, los teoremas clásicos de variable compleja adaptados a las funciones definidas en abiertos de $\mathbb{C}$ y con valores en un espacio de Banach complejo. En lo que concierne a este trabajo, el caso más relevante será aquel en el que el espacio de Banach es $\mathbb{C}^\nu$ o $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ con $\nu \in \mathbb{N}$, es decir, el formado por los vectores o las matrices complejas de tamaño ν.

De ahora en adelante tomaremos $(\mathbb{E}, \|\cdot\|$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, y A un abierto de $\mathbb{C}$.

Definición A.8. Diremos que una función f definida de A, abierto de $\mathbb{C}$, en $\mathbb{E}$, es débilmente holomorfa si para toda función $\phi \in \mathbb{E}'$ se tiene que $\phi \circ f$ es holomorfa e el sentido clásico.

Definición A.9. Una función f definida de A, abierto de $\mathbb{C}$, en $\mathbb{E}$ es holomorfa en $z_0 \in A$ si existe y es finito

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Diremos que f es holomorfa en A si lo es en cada punto de A. Denotaremos por $\mathbf{H}(A, \mathbb{E})$ el conjunto de todas las funciones holomorfas definidas en el abierto A y con valores en E.

Lema A.10. Toda función $f : A \to E$ holomorfa en z_0 es débilmente holomorfa en z_0.

Demostración:
Tomamos f holomorfa en z_0, entonces existe y es finito

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Entonces, para cada $\phi \in E'$, se tiene que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(f(z)) - \phi(f(z_0))}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \phi(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}) = \phi(f'(z_0)),$$

donde la primera igualdad es por linealidad y la segunda por continuidad. Por lo tanto, $\phi \circ f$ es holomorfa en z_0, y f es débilmente holomorfa en z_0. $\square$

Teorema A.11 (Fórmula integral de Cauchy.)**.** Sea G una región simplemente conexa y $f : G \to \mathbb{E}$ continua. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) La función f es débilmente holomorfa en G.

b) La función f es holomorfa en G.

c) La integral de f sobre toda curva cerrada y diferenciable a trozos con soporte contenido en G es nula.

d) Para toda curva de Jordan γ diferenciable a trozos con soporte contenido en G, orientada positivamente y todo $z \in G \setminus \gamma^*$, es decir, perteneciente al complementario en G del soporte de la curva, se tiene que:

$$\eta(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw. \tag{A.1}$$

Demostración:
a) $\Leftrightarrow$ *c*) Sabemos que una función compleja g es holomorfa en G si y solo si $0 = \oint_\gamma g(z)\, dz$ para toda curva cerrada γ y diferenciable a trozos con

soporte contenido en G. Entonces $g = \phi \circ f$ será holomorfa en G si y solo si $0 = \int_\gamma (\phi \circ f)(z)\, dz$, para todo γ como antes. Ahora bien, la linealidad y continuidad de ϕ y la expresión de la integral como límite de sumas de Riemann permiten probar que esto equivale a

$$\phi(\int_\gamma f(z)\, dz) = \int_\gamma (\phi \circ f)(z)\, dz = 0,$$

para cualquier función ϕ del dual. Por el corolario A.6 podemos afirmar equivalentemente que $0 = \int_\gamma f(z)\, dz$, de aquí la doble implicación de a) y c).

a) $\Rightarrow$ *d)* Sea $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$.. Por hipótesis, para cada $\phi \in E'$ la función compleja $\phi \circ f$ es holomorfa en G y el resultado clásico permite asegurar que

$$\eta(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw,$$

o de otro modo,

$$\eta(\gamma, z) f(z) = \phi(\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw).$$

De nuevo el corolario A.6 permite concluir.
d) $\Rightarrow$ *b)* Se deduce del lema anterior.
b) $\Rightarrow$ *a)* Basta probar que f es derivable en cada punto de G. Sea $z_0 \in G$ y consideramos la circunferencia $C(z_0, r)$ centrada en z_0 y de radio $r > 0$ tal que $\bar{B}(z_0, r) \subset G$. Entonces, por hipótesis, para cada $z \in B(z_0, r)$ se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw,$$

expresión que se puede derivar bajo el signo integral para obtener

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw,$$

por lo que es holomorfa en G. $\square$

Teorema A.12 (Fórmula integral de Cauchy para las derivadas)**.** Para toda $f \in \mathbf{H}(G, \mathbb{E})$ se tiene que es indefinidamente derivable en G y

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw, \tag{A.2}$$

para cada γ, curva de Jordan diferenciable a trozos con soporte contenido en G, y cada $z \in \backslash\gamma^*$.

Demostración:
La demostración se realiza de forma inductiva, sin más que derivar bajo el signo integral en (A.1). □

Definición A.13. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, diremos que una función $f : A \to E$ es analítica en $z_0 \in A$ si existe $\delta > 0$ tal que $B(z_0, \delta) \subset A$ y una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$ convergente en $B(z_0, \delta)$, tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n, \text{ para todo } z \in B(z_0, \delta).$$

Se dice que f es analítica en A si lo es en todo punto de A.

Lema A.14. Una función $f : A \to E$ es analítica en A si y solo si es holomorfa en A.

Demostración:
Supongamos que f es analítica en A. Entonces para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que existe $\rho > 0$ tal que $B(z_0, \rho) \subset A$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(z - z_0)^n$, siendo esta una serie convergente para todo elemento $z \in B(z_0, \rho)$. Tomamos $\phi \in E'$, y aplicándola a ambos lados de la igualdad anterior tenemos, por linealidad y continuidad $\phi(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(f_n)\,(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\,(z - z_0)^n$, luego $\phi \circ f$ admite desarrollo en serie de potencias convergente en un entorno de z_0, es decir, $\phi \circ f$ es analítica en A, y por lo tanto holomorfa en A, por el resultado clásico. Equivalentemente, por ser $\phi \in E'$ arbitraria, f es débilmente holomorfa y se concluye aplicando el teorema A.12.

Para la otra implicación existe un r tal que para todo $z \in C(z_0, r/2)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Desarrollamos $\frac{1}{w-z}$ como suma de una serie geométrica que converge absolutamente en $z \in B(z_0, r/2)$, de razón $\frac{z-z_0}{w-z_0}$, de norma menor que uno:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z - z_0}{w - z_0}),$$

y obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0,r)} f(w) \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z - z_0}{w - z_0})\, dw.$$

Podemos intercambiar la suma y la integral, dada la convergencia uniforme de la serie, y escribir

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0,r)} f(w) \frac{1}{w-z_0} (\frac{z-z_0}{w-z_0})^n \, dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0,r)} f(w) \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{(w-z_0)^n} \, dw \right) (z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \, dw \right) (z-z_0)^n
\end{aligned}$$

que es su representación en serie de potencias. □

Corolario A.15 (Principio de identidad)**.** Consideramos G un abierto conexo de $\mathbb{C}$, f y g funciones holomorfas de G en E, tales que $f(z) = g(z)$ en un conjunto A, no vacío, que tiene al menos un punto de acumulación en G, entonces $f(z) = g(z)$ en G.

Demostración:
En estas condiciones tomamos $\phi \in E'$ y tendremos que $\phi(f(z)) - \phi(g(z)) = 0$ en un conjunto A no vacío, que tiene al menos un punto de acumulación en G, luego $\phi(f(z)) - \phi(g(z)) = 0$ en G según el principio de identidad clásico, lo cual implica, gracias al corolario A.7, que $f(z) = g(z)$ en G. □

A.3. Prolongación analítica

Un problema que nos encontraremos en el estudio de ODEs es la prolongación o continuación analítica de las soluciones, para ello definiremos este concepto y demostraremos un teorema de suma importancia.

Definición A.16. Un germen es un par ordenado (f, U), donde U es un disco $D(z, r)$ y f es una función holomorfa definida en U.

Definición A.17. Sean dos gérmenes (f, U), (g, V), diremos que (g, V) es prolongación analítica directa de (f, U) si $U \cap V$ es no vacío, y f y g coinciden en $U \cap V$. Evidentemente (g, V) es prolongación analítica directa de (f, U) si y solo si (f, U) es prolongación analítica directa de (g, V).

Definición A.18. Sea (f, D) un germen, con z_0 centro de D. Consideramos la familia finita de gérmenes $\{(f_k, D_k)\}_{k=1,\ldots,n}$, se dice que (f_n, D_n) es una prolongación analítica de (f, D) si $D = D_1$, $f = f_1$, y (f_k, D_k) es prolongación analítica directa de (f_{k-1}, D_{k-1}), para $k = 2, \ldots, n$.

Evidentemente (f, D) es prolongación analítica de si mismo. Si (g, V) es prolongación analítica de (f, D), entonces invirtiendo el orden de la familia, (f, D) es prolongación analítica de (g, V). Si (h, U) es prolongación analítica de (g, V) y además (g, V) es prolongación analítica de (f, D), entonces, concatenando las dos familias obtenemos que (h, U) es prolongación analítica de (f, D).
Esto nos garantiza que podemos definir una relación de equivalencia entre los gérmenes

$$(f, D) \equiv (g, V) \Leftrightarrow (g, V) \text{ es prolongación analítica de } (f, D).$$

A las clases de equivalencia se les denomina funciones globalmente analíticas.

A.3.1. Prolongación analítica sobre una curva

Definición A.19. Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ una curva y sea (f, D) un germen tal que $\gamma(0)$ es el centro del disco D. Diremos que una familia de gérmenes $\{(f_t, D_t)\}_{t\in[0,1]}$ es una prolongación analítica de (f, D) a lo largo de γ si verifica:

1. $(f_0, D_0) = (f, D)$.
2. Para cada $t \in [0, 1]$ se tiene que $\gamma(t)$ es el centro del disco D_t
3. Para cada $t \in [0, 1]$ existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $s \in [0, 1]$, con $|s - t| < \epsilon$, se cumple que:
   - $\gamma(s) \in D_t$ con lo que $D_t \cap D_s$ es no vacío.
   - f_t coincide con f_s en $D_t \cap D_s$, es decir, (f_s, D_s) es una continuación analítica directa de (f_t, D_t).

Gracias a la compacidad del soporte de la curva, γ^*, se puede demostrar que la siguiente definición equivale a la anterior.

Definición A.20. Sean $(f, B(z_0, r))$ y γ una curva parametrizada por $z(t)$, $0 \le t \le 1$ con $z(0) = z_0 \in B(z_0, r)$ y $z(1) = z_1 \notin B(z_0, r)$. Diremos entonces que f admite prolongación analítica a lo largo de γ si existen una partición

$0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$ y $\epsilon > 0$ tal que $|z(t) - z(t_k)| < \epsilon$ para cada $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, $1 \leq k \leq m$, y existen gérmenes $(f_k, B(z_k, \epsilon))$ de modo que la familia $\{(f_k, B(z_k, \epsilon))\}_{k=0,...,n}$ es una prolongación analítica de $(f, B(z_0, \epsilon))$.

A.3.2. Monodromía

Teorema A.21 (Teorema de monodromía)**.** Sea $G \in \mathbb{C}$ un dominio arbitrario y $z_0 \in G$, tomamos $D = D(z_0, \rho) \subset G$ y $f \in \mathbf{H}(D, \mathbb{E})$. Además suponemos que (f, D) admite prolongación analítica a lo largo de cualquier curva γ, continua, que empiece en z_0 y con soporte contenido en G . Entonces se verifica:

a) Si dos curvas γ_0 y γ_1 continuas cuyo soporte está contenido en G, que terminen en el mismo punto $z_1 \in G$, son homotópicas en G, entonces la continuación de f por ambas curvas cumple que $f(z_1)$ toma el mismo valor.

b) Si G es simplemente conexo, entonces $f \in \mathbf{H}(G, \mathbb{E})$.

Demostración:
Tomamos dos curvas γ_0 y γ_1 que cumplan la hipótesis (a). Entonces tenemos que existe $F : [0,1] \times [0,1] \to G$ continua tal que

($*$) $F(0,t) = \gamma_0(t)$ y $F(1,t) = \gamma_1(t)$.

($**$) Para cada $s \in [0,1]$ $F(s, \cdot)$ parametriza una curva γ_s que comienza en z_0 y termina en z_1.

Por hipótesis f puede ser continuada por cualquiera de las curvas γ_s y denotamos $f_s(z_1)$ al valor obtenido al confinuar f por esta curva y evaluar en z_1. Por definición de continuación analítica existirá $\epsilon_s > 0$ tal que:

1. γ_s es cubierto por finitos discos de radio ϵ_s.

2. Cada disco contiene el centro del anterior.

3. f es holomorfa en cada disco.

La continuidad de F implica que existe δ_s tal que si $|d - s| < \delta_s$ entonces γ_d tiene su soporte contenido en el recubrimiento de bolas de γ_s, lo cual implica sin más que aplicar el principio de identidad que $f_s(z_1)$=$f_d(z_1)$. Ahora mediante compacidad tenemos lo buscado.
En cuanto a la prueba de (b), como en un simplemente conexo todas las curvas contenidas en el son homotópicamente equivalentes, entonces concluimos aplicando (a). □

Apéndice B

ESPACIOS DE MATRICES

Suponemos conocido en todo momento los resultados correspondientes a espacios de matrices, donde se pueden definir diferentes normas, las que provienen de normas vectoriales, la de Frobenius, etc. También supondremos conocidos todos los conocimientos relativos a la construcción y existencia de la forma de Jordan en $\mathbb{C}$.

Nos centraremos sobre todo en las funciones matriciales y en ciertas ecuaciones matriciales de gran importancia en el desarrolllo de los capítulos del trabajo.

B.1. Ecuaciones matriciales

Como habremos observado, una ecuación que ha aparecido continuamente en la resolución de EDO, es la siguiente.

* Sea $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $B \in \mathbb{C}^{j\times j}$ y $C \in \mathbb{C}^{k\times j}$, para k, j números naturales dados. Queremos encontrar $X \in \mathbb{C}^{k\times j}$ tal que

$$A\,X - X\,B = C \tag{B.1}$$

Daremos condiciones de unicidad y existencia de las soluciones mediante el siguiente resultado:

Lema B.1. Supongamos que $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ y $B \in \mathbb{C}^{j\times j}$, con $k, j \in \mathbb{N}$ tienen espectro disjunto, es decir, no tienen autovalores en común. Entonces para cualquier $C \in \mathbb{C}^{k\times j}$ el sistema (B.1) tiene solución única $X \in \mathbb{C}^{k\times j}$.

Demostración:
Sea T una matriz $j \times j$ invertible, tal que $J = T^{-1}\,B\,T$ está en la forma

canónica de Jordan. Entonces transformamos la ecuación, haciendo el cambio $Y = X\,T$ obtenemos

$$CT = AXT - XTB = AY - TJ = AY - YJ,$$

es decir,

$$CT = AY - YJ. \tag{B.2}$$

Como C es arbitraria entonces D también lo será. Si se resuelve (B.2) para todo D, $X = YJ^{-1}$ resuelve (B.1) para todo C.
Entonces bastará con demostrarlo para matrices B en la forma de Jordan con diagonal $\lambda_1, ..., \lambda_j$. Denotamos las columnas de X y de C respectivamente como $\mathbf{x}_s$ y $\mathbf{c}_s$, observamos que el sistema (B.1) equivale a

$$(A - \lambda_s\, I)\,\mathbf{x}_s = \mathbf{c}_s + \delta_s\,\mathbf{x}_{s+1}, \quad 1 \leq s \leq j,$$

donde δ_s, puede ser cero o uno, en particular $\delta_j = 0$. Como $(A - \lambda_s I)$ siempre es invertible ya que A y B no tienen autovalores en común, entonces, recursivamente, empezando por j y acabando en 1, tenemos el resultado. □

B.2. Funciones de matrices

En primer lugar sabemos que el espacio $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, en la cual podemos definir diferentes normas matriciales. Veamos unos ejemplos:

Sea $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq\nu, 1\leq j\leq\nu} \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, se definen:

- Norma de Frobeniüs:

$$\|A\|_{Fro} = \sqrt{\sum_{i=1,j=1}^{N} |a|_{i,j}^2}.$$

- Norma derivada de la vectorial: Sea $\|\cdot\|$ una norma de $\mathbb{C}^\nu$, entonces definimos

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Sabemos, en teoría de variable compleja elemental, que toda función holomorfa en toro a 0 puede expresarse localmente como serie de potencias convergente, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^n$. De manera similar podemos llevar funciones clásicas, como la exponencial o el logaritmo, al dominio de las matrices definiendo para una matriz A la expresión $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, A^n$.

B.2.1. Función exponencial

Definición B.2. Dada una matriz A cuadrada definimos

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

entendiendo que $A^0 = I$ y $A^n = A \cdot ... \cdot A$, n veces.

Proposición B.3. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $(\mathbb{C}^{\nu\times\nu}, \|\cdot\|)$, entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$ implica que $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es convergente.

Demostración:
Basta verificar que si la sucesión $(R_m)_{m\in\mathbb{N}} = (\sum_{n=0}^{m} \|A_n\|)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ entonces $(S_m)_{m\in\mathbb{N}} = (\sum_{n\leq m} A_n)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. Esta afirmación es cierta sin más que aplicar la desigualdad triangular. □

A partir de este resultado deducimos que para analizar la convergencia basta ver que $\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} < \infty$. Ahora listaremos algunas de las propiedades de la función exponencial.

Propiedades B.4 (Propiedades de la función exponencial)**.**

1. Para A, $T \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, T invertible, tenemos

$$\exp[T^{-1}\, A\, T] = T^{-1} \exp[A]\, T.$$

2. Para D diagonal $D = \text{diag}[d_1, .., d_v]$, tenemos

$$\exp[D] = \text{diag}[e^{d_1}, ..., e^{d_v}].$$

3. Para una matriz triangular por bloques A y bloques diagonales A_k, la matriz $\exp[A]$, es también triangular por bloques y sus bloques diagonales son $\exp[A_k]$, en el mismo orden.

4. Para A, $B \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ que cumplen que $A\, B = B\, A$, tenemos

$$\exp[A + B] = \exp[A]\ \exp[B];$$

   esta regla no es cierta en general si A y B no conmutan.

5. Para toda matriz A cuadrada, la inversa, en el producto, de e^A existe y es e^{-A}

Definición B.5. Dada una matriz A cuadrada y $z \in \mathbb{C}$ no nulo, definimos

$$z^A = \exp[A\ \log(z)]$$

que es evidentemente una función multivaluada, pues depende de la rama elegida para el $\log z$, pero una vez elegida, con respecto a A la función no tiene ambigüedad.

Evidentemente si A es diagonalizable y todos los autovalores son enteros entonces la función es univaluada respecto a z. Para derivar esta función con respecto a z, usando la derivación en series, se tiene que:

$$\frac{d}{dz} z^A = A\, z^{A-I} = z^{A-I}\, A,$$

independientemente de la rama del logaritmo escogida.
Efectivamente, desarrollando

$$z^A = \exp[A\ \log(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A\ \log(z))^n}{n!},$$

derivando en cada término de la serie obtenemos:

$$\begin{aligned}(z^A)' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(A\ \log(z))^{n-1}\frac{A}{z}}{n!} \\ &= \frac{A}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A\ \log(z))^n}{n!} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A\ \log(z))^n}{n!})\frac{A}{z} = A\, z^{A-I} = z^{A-I} A.\end{aligned}$$

B.2.2. Función logaritmo

Para definir correctamente el logaritmo de una función tenemos que buscar, evidentemente, para cada A matriz otra matriz X que resuelva la ecuación $e^X = A$. Parece claro que no toda matriz admite logaritmo, ya que si $\det A = 0$, entonces no se puede tener esta relación. Definiremos el logaritmo como sigue:

Definición B.6. Dada una matriz A cuadrada, cuyos autovalores sean $\lambda_1, ..., \lambda_s$, todos ellos no nulos, definimos, eligiendo una rama conveniente del logaritmo,

$$\log\ A = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\ z\,(z\, I - A)^{-1}\, dz, \tag{B.3}$$

donde γ es una concatenación de circunferencias positivamente orientadas alrededor de cada autovalor y de modo que ninguna rodea al origen.

Veamos que efectivamente esta definición es correcta, que cumple que es la inversa de la exponencial. Por inducción sobre la dimensión de A, para dimensión 1 es simplemente la fórmula integral de Cauchy, luego se cumple. Supongamos que para dimensión N se cumple, sea A de dimensión $N+1$, como estamos en $\mathbb{C}$, A tendrá algún autovalor λ, es decir,

$$A = T^{-1} \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right] T,$$

donde B tiene dimensión N. Aplicando exp a (B.3) tenemos:

$$\begin{aligned}
\exp\,\log\,A &= \exp(T^{-1}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\,z\,(z\,I - \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right])^{-1}\,dz\,T) \\
&= T^{-1}\,\exp(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\,z\,(z\,I - \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right])^{-1}\,dz)\,T \\
&= T^{-1}\,\exp(\frac{1}{2\pi i}\left[\begin{array}{c|c} \int_\gamma \log\,z\,(z-\lambda)^{-1}\,dz & 0 \\ \hline 0 & \int_\gamma \log\,z\,(z\,I - B)^{-1}\,dz \end{array}\right])\,T \\
&= T^{-1} \\
&\exp(\left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\,z\,(z-\lambda)^{-1}\,dz) & 0 \\ \hline 0 & \exp(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\,z\,(z\,I - B)^{-1})\,dz \end{array}\right]\,T).
\end{aligned}$$

Aplicando la formula de Cauchy en dimensión uno obtenemos:

$$\exp\,\log\,A = T^{-1}\left[\begin{array}{c|c} \exp\log\,\lambda & 0 \\ \hline 0 & \exp(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\,z\,(z\,I - B)^{-1})\,dz \end{array}\right] T.$$

Por hipótesis inductiva llegamos al resultado

$$\begin{aligned}
\exp\,\log\,A &= T^{-1}\left[\begin{array}{c|c} \exp\log\,\lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right] T \\
&= T^{-1}\left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right] T = A.
\end{aligned}$$

Propiedades B.7 (Propiedades de la función logaritmo para matrices)**.** En esta lista se recogen varias propiedades fundamentales del logaritmo.

1. Si $B = T^{-1}\,A\,T$, entonces

$$\log(B) = T^{-1}\,\log(A)\,T$$

2. Si A y B conmutan y son invertibles, entonces

$$\log(A\,B) = \log(A) + \log(B)$$

se verifica salvo una matriz constante, la que corresponde a elegir la rama correcta del logaritmo.

3. Para una matriz invertible triangular por bloques A y bloques diagonales A_k, la matriz $\log[A]$, es también triangular por bloques y sus bloques diagonales son $\log[A_k]$, en el mismo orden.

Demostración:

Procederemos a demostrar propiedad a propiedad.

1. Sea $B = T^{-1}\,A\,T$ entonces

$$\begin{aligned}\log\ B &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\ z\,(z\,I - B)^{-1}\,dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\ z\,(z\,I - T^{-1}\,A\,T)^{-1}\,dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\ z\,(z\,T^{-1}T - T^{-1}\,A\,T)^{-1}\,dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log\ z\,(T^{-1}(z\,I - A)T)^{-1}\,dz\\ &= T^{-1}\ \log(A)\,T.\end{aligned}$$

2. Si A y B conmutan y son invertibles, entonces se puede aplicar la propiedad de la exponencial $\exp[A+B] = \exp[A]\ \exp[B]$ y deducir esta propiedad.

3. Como en la propiedad anterior, utilizaremos otra propiedad de la exponencial, en este caso la propiedad 3, que trata exactamente este tipo de matrices con bloques. $\square$

Teorema B.8. Dada una matriz invertible C, entonces existen matrices M tal que $\exp(2\pi i M) = C$. Además si C es triangular por bloques, entonces M será triangular por bloques, teniendo la misma estructura. Los autovalores de dos M diferentes, tomando otra rama, solo pueden diferir números enteros, luego solo hay una matriz M que tenga los autovalores con parte real en el intervalo $[0, 1)$.

Demostración:
La demostración es justamente producto de las propiedades anteriores, empezando por que toda matriz invertible admite logaritmo, entonces si C es invertible existe alguna matriz M tal que $\exp(2\pi i M) = C$.

Si la matriz C es triangular por bloques, en virtud de la propiedad 4 también lo será M.
Supongamos que existe otra matriz, N, tal que $\exp(2\pi i N) = C$,

$$N = T^{-1} D\, T, \ M = S^{-1} E\, S,$$

por hipótesis obtenemos,

$$C = \exp(2\pi i M) = S^{-1} \exp(2\pi i E)\, S,$$

luego $U_M = \exp(2\pi i E)$ es una matriz diagonal cuyos elementos son justamente los autovalores de C y S la matriz de paso correspondiente. De forma análoga, $U_N = \exp(2\pi i D)$ es una matriz diagonal cuyos elementos son justamente los autovalores de C y T la matriz de paso correspondiente.
Ahora bien,

$$S\, C\, S^{-1} = \exp(2\pi i E),$$

pero también se verifica que:

$$\begin{aligned} S\, C\, S^{-1} &= S\ \exp(2\pi i N)\, S^{-1} = S\, T^{-1} \exp(2\pi i D)\, T\, S^{-1} \\ &= (T\, S^{-1})^{-1} \exp(2\pi i D)\, T\, S^{-1}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que, al ser las dos matrices diagonales, entonces son iguales salvo el orden.
Entonces tenemos la correspondencia siguiente, por cada λ autovalor de M existe β autovalor de N tal que $\exp(2\pi i \lambda) = \exp(2\pi i \beta)$. Conocido es el hecho de que esta igualdad se cumple si y solo si λ y β distan un entero.

La última afirmación es evidente a partir de lo anterior, si tuviéramos dos entonces distarían un entero, luego una de las dos no estaría en el intervalo $[0, 1)$. $\square$

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, Ed. Reverté, 1976.

[2] R. B. Ash R.B., W.P. Novinger, *Complex Variables*, Ed. Dover, 2007.

[3] W. Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer, 2000.

[4] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[5] R. E. Greene, S. G. Krantz, *Function Theory Of One Complex Variable*, Wiley-Interscience, 1997.

[6] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis Power Series. Vol.1. Integration, Conformal Mapping, Location of Zeros*, John Wiley and Sons, 1974.

[7] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, John Wiley and Sons Inc, 1976.

[8] J. R. Munkres, *Topología, 2a Edición*, Pearson Educación, 2002.

[9] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Dover, 1987.