Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

HACIA UNA SUPERGRAVEDAD DE EINSTEIN/NEWTON EN $(\mathbf{3}+\mathbf{1})+\mathbf{1}$ DIMENSIONES

Autor:
Daniel González Fernández

Tutor:
José Manuel Izquierdo

Índice general

Capítulo 1

Abstract

Maxwell's work in electromagnetism rised a boom in attempts to unify theories in physics. In this sense, unification theories such as supersymmetric theories and the M-theory have emerged, which we deal with certain concepts in this work. In the context of the M-theory, it can be seen that it is possible to construct a theory considering the two time physics. This theory must have at the lowest energy limit a supergravity model, which is a case of supersymmetry that depends on the space-time point. Therefore, we explore a model obtained from supergravity in 3+2 dimensions in such a way that there is an absolute time. In this development we will use a known expansion method of Lie algebras that allows us to obtain new algebras from a given one. Our work leaves perspectives to continue in the study of the considered model.

Capítulo 2

Resumen

Después del trabajo de Maxwell con el electromagnetismo, hubo un auge en la física en los intentos de unificar teorías. En este sentido, han surgido teorías de unificación tales como las teorías supersimétricas y la teoría M, de las cuales tratamos ciertos conceptos en este trabajo. En el contexto de la teoría M, se puede ver que es posible construir una teoría considerando la física de los dos tiempos. Esta teoría ha de tener como límite de bajas energías un modelo de supergravedad, que es un caso de supersimetría que depende del punto del espacio-tiempo. Por tanto, nosotros exploramos un modelo obtenido a partir de la supergravedad en $3+2$ dimensiones, de modo que un tiempo sea absoluto. Para este desarrollo utilizaremos un conocido método de expansión de álgebras de Lie que nos permite obtener nuevas álgebras a partir de una dada. Nuestro trabajo deja perspectivas para continuar con el estudio del modelo considerado.

Capítulo 3

Introducción

3.1. Supersimetría y supergravedad

Por definición, la supersimetría es una simetría entre bosones y fermiones. Los modelos supersimétricos surgen del intento de unificar las cuatro interacciones fundamentales. En este tema jugó un papel importante el artículo que publicaron en 1967 Coleman y Mandula (C-M)[7], que fue ampliamente entendido para demostrar que es imposible, dentro del marco teórico de la teoría de campos relativista, unificar simetrías espacio-temporales con simetrías internas. Más concretamente, el teorema dice que un grupo conexo de simetría G de la matriz S; que sea invariante Lorentz, involucre un número finito de partículas, permita scattering elástico con amplitudes de scattering analíticas y los núcleos de sus generadores sean distribuciones; es localmente isomorfo al producto directo del grupo de Poincaré y un grupo de simetría interna. El resultado de este teorema supone un problema para unificar la gravedad con el resto de interacciones, dado que la primera es una teoría gauge basada en simetrías espacio-temporales mientras que las otras tres se basan en simetrías internas.

Sin embargo, esto fue lo que acabó llevando a las teorías supersimétricas como las únicas candidatas para dicha unificación. Fue unos años más tarde cuando Haag, Lopuszański y Sohnius [11] publicaron el documento en el que realizaron una extensión de los resultados de C-M al considerar operaciones de simetría que obedecieran la estadística de Fermi. Al hacer esto, introdujeron operadores de simetría fermiónicos Q de espín $1/2$, que al aplicarlos realizan transformaciones que cambian el espín. Estos operadores deben obedecer ciertas relaciones de anticonmutación, que junto con las de conmutación, dan lugar a las llamadas 'superálgebras' o 'álgebras de Lie graduadas', que son las álgebras que obedecen las teorías supersimétricas. Clasificaron todas las álgebras supersimétricas de la matriz S que pueden desempeñar un papel importante en la teoría de campos. De esta manera, llegaron al resultado de que al considerar estas teorías se pueden agrupar partículas con espín diferente en los multipletes, lo que permite relacionar las simetrías espacio-temporales con las simetrías internas. Por tanto, se soluciona el problema inicial y se concluye que para la unificación debemos considerar la supersimetría. Esto se verá más claro en la subsección de este primer apartado en la que describiremos de manera explícita la estructura de las superálgebras. Ahora vamos a esbozar los elementos esenciales de estas.

Antes de nada, cabe decir que actualmente la física de partículas entiende la descomposición de la materia en quarks y leptones (fermiones) y describe las fuerzas fundamentales en términos de partículas de intercambio (bosones). Entonces, como las teorías supersimétricas permiten agrupar partículas con diferente espín en el mismo multiplete, es decir, agrupan bosones y fermiones en supermultipletes, se elimina la distinción entre interacción y materia.

Las transformaciones de supersimetría son generadas por operadores cuánticos Q que cambian los estados fermiónicos en bosónicos y viceversa,

$$Q|fermion\rangle = |boson\rangle; \; Q|boson\rangle = |fermion\rangle \tag{3.1}$$

Por definición, los Q cambian la estadística y el espín de los estados. Al estar el espín relacionado con las rotaciones espaciales, la supersimetría es, en cierto modo, una simetría espacio-temporal. Sin embargo, los Q también afectan a algunos de los números cuánticos internos de los estados. Esta propiedad de combinar ambos comportamientos es lo que mencionamos más arriba que le da ese interés especial a estas teorías. Como una simple ilustración de las propiedades espacio-temporales no triviales de los Q, se puede demostrar fácilmente que bajo rotaciones de 360º se transforman de la siguiente manera

$$UQU^{-1} = Q \tag{3.2}$$

Como cabía esperar el generador de supersimetría toma un signo menos tal como haría un operador fermiónico. Se puede extender este análisis y mostrar que el comportamiento de los Q bajo cualquier transformación de Lorentz es el de un operador espinorial. Hablando más técnicamente, se transforman como operadores tensoriales de espín 1/2 y no conmutan con las transformaciones de Lorentz. Por otro lado, también se puede demostrar que los Q son invariantes bajo traslaciones, lo que se traduce en la siguiente expresión

$$[Q, E] = [Q, \mathbf{P}] = 0 \tag{3.3}$$

Es decir, conmutan con el cuadrimomento.

En el caso de la supersimetría el anticonmutador de dos Q es un generador de simetría, pero es un generador de naturaleza bosónica. Consideremos el siguiente anticonmutador, $\{Q, Q^\dagger\} \equiv QQ^\dagger + Q^\dagger Q$, que es un operador hermítico con valores propios definidos positivos:

$$\langle ...|QQ^\dagger|...\rangle + \langle ...|Q^\dagger Q|...\rangle = |Q^\dagger|...\rangle|^2 + |Q|...\rangle|^2 \geq 0 \tag{3.4}$$

Esto solo puede ser nulo para todos los estados $|...\rangle$ si $Q = 0$. Una investigación más detallada muestra que $\{Q, Q^\dagger\}$ debe ser una combinación lineal de los operadores momento y energía:

$$\{Q, Q^\dagger\} = \alpha E + \beta \mathbf{P} \tag{3.5}$$

Esta relación indica que la operación de dos transformaciones supersimétricas finitas inducirán una traslación en el espacio y el tiempo de los estados sobre los que operan. Otra consecuencia importante es que sumando a todos los Q

$$\sum_{all\ Q} \{Q, Q^\dagger\} \propto E \tag{3.6}$$

Dependiendo del signo del factor de proporcionalidad de esta relación, el espectro de energías tendría que ser, o bien ≥ 0 o ≤ 0, debido a la desigualdad (3.4). Si definimos al menos un límite de bajas energías, para que la teoría sea físicamente razonable, el factor de proporcionalidad será positivo.

Las ecuaciones (3.3) a (3.6) son propiedades cruciales de los generadores de supersimetría y muchas de las características más importantes de las teorías supersimétricas pueden ser derivadas de ellas. Una de estas características es la positividad de la energía como puede verse de las ecs. (3.4) y (3.6).

Como ya hemos mencionado antes, en las teorías supersimétricas se agrupan las partículas en supermultipletes. El concepto de supermultiplete es análogo al del ya conocido multiplete de la física atómica por ejemplo, salvo que en nuestro caso los estados tienen la misma masa pero diferente espín. Entonces, en estos supermultipletes las partículas elementales (tanto bosones como fermiones) han de ir acompañadas de otras conocidas como 'supercompañeros', que poseen la misma masa y difieren en el espín en 1/2. Por convenio, la nomenclatura de estas nuevas partículas es la siguiente: El 'supercompañero' de un bosón es un fermión con el prefijo 's-', 'sfermion' ("squark, slepton, ..."); mientras que el de un fermión es un bosón con el sufijo '-ino', 'bosino' ("gravitino, fotino,..."). El descubrimiento de estas partículas establecería la supersimetría como una propiedad importante de la naturaleza más que como una atractiva hipótesis. Sin embargo, los experimentos no muestran partículas elementales acompañadas de estos supercompañeros, así que las teorías supersimétricas siguen siendo solo modelos. Además, si consideramos la supersimetría fundamental para la naturaleza, debido a esto, debe ser una simetría con ruptura espontánea, lo que implica que el estado fundamental no puede ser invariante bajo transformaciones supersimétricas y la energía del vacío no puede ser nula.

Además de la unificación de las interacciones fundamentales, hay otra razón para el estudio de estas teorías. Esta razón es que en teoría de campos algunas divergencias desaparecen cuando se considera supersimetría. Esto despertó cierto interés en el problema de jerarquías de las GUTs, los trece órdenes de magnitud entre la masa GUT de 10^{15} GeV/c^2 y la masa del bosón W. Normalmente, un gap de esta magnitud no es estable en teoría de perturbaciones y solo puede ser mantenido por repetición de ajuste fino hasta órdenes altos en la expansión de la perturbación. Considerando supersimetría, se puede evitar la mezcla en masa y el ajuste fino consiguiente, y la jerarquía, una vez establecida, se estabiliza.

Como hemos dicho la supersimetría debe romperse. Dicha ruptura espontánea puede levantar la degeneración de la masa de los supermultipletes dando diferentes masas a diferentes miembros de estos, manteniendo intacta su estructura. Deberíamos poder encontrar supercompañeros para todas las partículas elementales, aunque deben ser muy pesados para poder obtenerlos experimentalmente, dado que todavía no los hemos visto. Estos supercompañeros tienen un nuevo número cuántico (carga R). Una estricta ley de conservación de este número cuántico está estrechamente ligada con una propiedad de los modelos superGUT que estabiliza la jerarquía GUT.

Los modelos supersimétricos pueden, como teorías gauge, considerarse con supersimetría global o local, dependiendo de si dependen o no del punto del espacio-tiempo. Los que dependen del punto poseen supersimetría local y se conocen como modelos de supergravedad. Estos modelos incluyen necesariamente la interacción gravitatoria.

Los modelos de supergravedad siempre contienen al gravitón, que sería el bosón con espín $s = 2$ que describe la interacción gravitatoria, y cuyo supercompañero sería el gravitino, que también debería estar presente y tiene espín $s = 3/2$. En las teorías gauge de las interacciones fuerte y electrodébil, el espín de los campos no puede ser mayor que 1, lo que limita el número de supersimetrías a 4. De las teorías de Yang-Mills, el caso con más supersimetrías de super-Yang-Mills correponde a 4 supersimetrías. Para el caso de la supergravedad, el espín está limitado por un valor de 2, por lo que el número máximo de supersimetrías es 8. Este modelo de supergravedad con 8 supersimetrías representa un modelo de supergravedad en 11 dimensiones. Esto es importante en el contexto de la teoría M, dado que esta posee esta supergravedad como límite de bajas energías. (De esto daremos más detalles más adelante).

3.1.1. Generadores de supersimetría y su álgebra

El generador de una simetría es un operador G en el espacio de Hilbert que reemplaza un estado de una partícula entrante o saliente por otro y además "deja la física invariante". Recordando que estamos en el marco de la teoría de campos relativista, en nuestro contexto traducimos dejar la física invariante por la conmutación de G con la matriz S, $[G, S] = 0$.

Cualquier G puede descomponerse en una parte par B y otra impar F,

$$G = B + F \tag{3.7}$$

Los B pueden cambiar el espín por cantidades enteras o no cambiarlo, son operadores bosónicos; mientras que los F lo cambian por una cantidad semientera (1/2 concretamente), por lo que son generadores de simetría fermiónicos, es decir, generadores de supersimetría. A partir de ahora, a los F los llamaremos Q, tal como se les suele llamar. También merece la pena mencionar que los B hacen referencia a simetrías internas.

De un análisis de las posibles álgebras supersimétricas que puede tener el grupo de Poincaré como simetría del espacio-tiempo, se concluye que las ecuaciones del álgebra más general son las siguientes:

$$\begin{gathered}
[P_\mu, P_\nu] = 0 \ ; \ [P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho) \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}) \\
[B_r, B_s] = ic_{rs}^{\ \ t}B_t \ ; \ [B_r, P_\mu] = [B_r, M_{\mu\nu}] = 0 \\
[Q_{\alpha i}, P_\mu] = [\bar{Q}^i{}_{\dot\alpha}, P_\mu] = 0 \\
[Q_{\alpha i}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_{\beta i} \ ; \ [\bar{Q}^i{}_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}\bar{Q}^i{}_{\dot\beta}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \\
[Q_{\alpha i}, B_r] = (b_r)_i{}^j Q_{\alpha j} \ ; \ [\bar{Q}^i{}_{\dot\alpha}, B_r] = -\bar{Q}^j{}_{\dot\alpha}(b_r)_j{}^i \\
\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j{}_{\dot\beta}\} = 2\delta^j{}_i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}P_\mu \\
\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}Z_{ij} \ con \ Z_{ij} = a^r_{ij}B_r \\
\{\bar{Q}^i{}_{\dot\alpha}, \bar{Q}^j{}_{\dot\beta}\} = -2\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}Z^{ij} \ con \ Z^{ij} = (Z_{ij})^\dagger \\
[Z_{ij}, \ 'todo'] = 0
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Resulta conveniente realizar algunas aclaraciones sobre la notación seguida en el álgebra, así como alguna breve explicación de algunos términos que todavía no se ha hecho.

Los Z_{ij} y su conjugado hermítico son las denominadas cargas centrales. Dicho nombre se ve de la última relación de conmutación de (3.8), dado que conmutan con todo lo demás.

Los P_μ y $M_{\mu\nu}$ son los generadores de simetría del grupo de Poincaré. De lo relacionado con este grupo y su álgebra de Lie, daremos más explicaciones en otro capítulo.

Respecto a los generadores de supersimetría habría que destacar que ahora llevan dos índices, uno griego y otro latino. Los griegos hacen referencia a que se comportan como espinores de cuatro componentes (debido a las cuatro dimensiones espacio-temporales), por lo que toman cuatro valores, uno por dimensión. Los índices griegos de los demás elementos también toman esos cuatro valores. Los índices latinos denotan el número de supersimetrías que hay, recorriendo N valores enteros. Por tanto, el resto de índices latinos de los demás elementos, recorren los mismos valores. Finalmente, se definen $\bar{Q}^i{}_{\dot{\alpha}} = (Q_{\alpha i})^\dagger$.

De las relaciones que aparecen, podemos observar que se cumple lo que dijimos antes sobre los anticonmutadores de dos Q, además de que se cumple que el conmutador de un generador bosónico con uno fermiónico da un generador fermiónico.

Por último, los coeficientes de las relaciones de conmutación y anticonmutación del álgebra son matrices hermíticas que aquí únicamente mencionamos. Para más detalles de todo esto consultar [21].

3.2. Teoría M

Continuando en la línea de modelos que tratan el tema de la unificación de las fuerzas de la Naturaleza, toca hablar ahora de la teoría de cuerdas. La premisa de la teoría de cuerdas, a un nivel fundamental, es que la materia no consiste en partículas puntuales, sino mas bien en pequeñas cuerdas. A partir de este comienzo, surgen las leyes de la física. La Relatividad General, el electromagnetismo y las teorías gauge de Yang-Mills, todas aparecen de manera sorprendente. Sin embargo, vienen con equipaje. La teoría de cuerdas da lugar a una gran cantidad de otros ingredientes, como las dimensiones espaciales extra más allá de las tres que observamos.

La teoría de cuerdas es una ciencia especulativa, no hay evidencia experimental que la confirme como una correcta descripción del universo. Sin embargo, es un modelo que tiene mucho trabajo en progreso y todavía nos queda para escribir su formulación final. Entonces, merece la pena comentar las razones de peso por las que se estudia la teoría de cuerdas. Primeramente, representa un modelo de gravedad cuántica. Aunque la escala de energías en las que se da es mucho más grande que lo que solemos medir por varios órdenes de magnitud, del orden de la masa de Planck $M_{Pl} \approx 2 \cdot 10^{18}\ GeV$, la teoría de cuerdas elimina las divergencias y proporciona una gravedad cuántica finita. Además, en esa escala de energías las constantes de acoplo de las otras tres interacciones convergen, por lo que es posible que la teoría de cuerdas pueda unificar las cuatro. Otra razón es que proporciona nuevas perspectivas de las teorías guage. En principio, la teoría de cuerdas nació para explicar la interacción fuerte, pero se abandonó en lugar de la Cromodinámica Cuántica (QCD) que fue más sencilla de formular y tuvo un gran éxito. Sin embargo, al recuperar la teoría de cuerdas se vio que proporciona herramientas que permiten comprender mejor ciertos aspectos de las teorías gauge cuánticas. La más asombrosa es la correspondencia AdS/CFT que proporciona una relación entre las teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas y la gravedad en mayores dimensiones. Estas ideas han sido aplicadas en un rango de áreas desde la física nuclear hasta la física de la materia condensada y han proporcionado ideas cualitativas (y discutiblemente cuantitativas) en los fenómenos fuertemente acoplados. Finalmente, la teoría de cuerdas también ha proporcionado nuevos resultados en matemáticas, de los cuales el más conocido es la 'simetría de espejo' que establece una relación entre variedades de Calabi-Yau [1] topológicamente diferentes.

A un nivel básico, las características más esenciales de las cuerdas son las siguientes. Son objetos unidimensionales, pudiendo considerar objetos en más dimensiones que serían las branas (viene de membranas). En función de las dimensiones p de las branas se denominan $p-$branas, siendo las cuerdas $1-$branas. El por qué de usar cuerdas en lugar de branas en más dimensiones es que estas últimas presentan varios problemas al desarrollar la teoría. A pesar de esto las branas se utilizan dentro de la teoría de cuerdas para tratar ciertos temas, de alguno esbozaremos algún detalle importante a continuación. Otra propiedad de las cuerdas es que estas pueden ser cerradas o abiertas (Figura 3.1). Aunque los extremos de las cuerdas abiertas, en principio, son libres, estableciendo determinadas condiciones de contorno se llega a que pueden estar conectados a algo, a $D-$branas, cuando ese extremo de las cuerdas satisface una condición de contorno de Dirichlet. La necesidad de considerar las D-branas fue sugerida por Polchinski [18], basándose en la existencia de dualidades entre teorías de cuerdas [14]. Más explícitamente, la dualidad T, que relaciona teorías de cuerdas compactificadas en radios distintos, también convierte las condiciones de contorno de Neumann en condiciones de Dirichlet.

Figura 3.1: a) Cuerda cerrada. b) Cuerda abierta.

En la literatura, se suele introducir al estudio de las cuerdas empezando por el desarrollo de la teoría para la cuerda bosónica, que sería el caso más sencillo. Sin embargo, el caso de interés es el de las teorías de cuerdas supersimétricas, del cual vamos a dar unas nociones básicas. Esta idea requiere una generalización del marco de referencia, aumentando el álgebra restringida de la 'hoja de universo' [2]. Esta idea surge de forma natural si tratamos de incluir fermiones espaciotemporales en el espectro y por conjeturas nos conduce a simetría superconforme. El álgebra superconforme con $N = 1$ (1 supersimetría) lleva asociadas las supercuerdas tipo I y II (que se dividen en tipos IIA y IIB), cuya estructura en gran parte es directamente paralela a la de la cuerda bosónica. Realizando una mezcla (heterosis) entre la cuerda bosónica y la supercuerda tipo II se llega a las supercuerdas heteróticas, siendo las únicas libres de anomalías gauge la $E_8 \otimes E_8$ y la $SO(32)$, cuyas diferencias residen en el grupo de gauge que llevan en sus nombres. Esto supuso la primera revolución de las supercuerdas.

[1]Son variedades unitarias, integrables y compactas que admiten una métrica con curvatura de Ricci nula, lo que quiere decir que también son planas.

[2]La hoja de universo de una cuerda, a un nivel fundamental, se entiende como una generalización a dos dimensiones del concepto de línea de universo de una partícula puntual en Relatividad. Hablando más técnicamente, representa una variedad bidimensional que describe la inmersión de una cuerda en el espacio-tiempo.

Después de esa primera revolución, eran cinco las teorías de supercuerdas que 'vivían' en 10 dimensiones, las cinco que hemos descrito. De ellas cuatro son de cuerdas cerradas, las tipo IIA, IIB y las dos heteróticas, mientras que la tipo I es de cuerdas abiertas y cerradas. Estas teorías aparentemente eliminaban todas las divergencias de gravedad cuántica, apuntando a la unificación de gravedad y mecánica cuántica. Sin embargo, el hecho de que las teorías consistentes fueran cinco ya planteaba un problema, al menos desde un punto de vista estético. Estas cinco teorías de supercuerdas poseen los siguientes límites a bajas energías:

- Supercuerda tipo IIA, se reduce a supergravedad IIA no quiral con $N = 2$.
- Supercuerda tipo IIB, se reduce a supergravedad IIB quiral con $N = 2$.
- Supercuerda heterótica $E_8 \otimes E_8$, se reduce a supergravedad con $N = 1$ y grupo interno $E_8 \otimes E_8$.
- Supercuerda heterótica $SO(32)$, se reduce a supergravedad con $N = 1$ y grupo interno $SO(32)$.
- Supercuerda tipo I, se reduce a supergravedad con $N = 1$ y grupo interno $SO(32)$.

De las dos últimas, viendo que a bajas energías conducen al mismo límite, se piensa que en realidad corresponden al mismo tipo de supercuerda.

La situación cambió con el descubrimiento de las mencionadas dualidades que existían entre las distintas teorías, lo que dio lugar a la segunda revolución de las cuerdas. Se descubrió entonces que todas las teorías de cuerdas estaban relacionadas entre sí a través de ciertas dualidades, denominadas S,T y U (que unifica las dualidades S y T). La existencia de las dualidades se pudo explicar suponiendo que las cinco teorías de supercuerdas se podían considerar como "vértices" de una teoría única en once dimensiones, a la que se dio el nombre de teoría M y que tiene como límite de baja energía supergravedad en 11 D. El descubrimiento de estas dualidades de las cuerdas ha cambiado de forma espectacular nuestro conocimiento sobre teorías de cuerdas y supercuerdas, además de la distinción entre efectos perturbativos y no perturbativos.

Sin embargo, a diferencia de otras teorías como la electrodébil, la QCD o la Relatividad General, la teoría M no está basada en un Lagrangiano definido, o en una descripción mediante la matriz S, sino que está definida por sus distintos límites perturbativos y a bajas energías, además de las dualidades que existen entre estos. Entonces, dichas dualidades deben ser simetrías de la teoría M, de modo que el conjunto de todas las supersimetrías de la teoría M debería incluir esas dualidades y dar cuenta de las simetrías de las cinco teorías de supercuerdas y los límites a bajas energías, los modelos de supergravedad.

Esas supergravedades han probado ser una herramienta muy importante para el estudio de distintos fenómenos en teoría de cuerdas. Muchas características de la teoría M o de las teorías de cuerdas están presentes en sus correspondientes supergravedades, por ejemplo las $D-$branas aparecen como soluciones supersimétricas de las ecuaciones de supergravedad IIA, y la dualidad U fue descubierta en un contexto de supergravedad.

3.3. Física 2-T

En el primer apartado mencionamos que el máximo número de supersimetrías para un modelo de supergravedad, en el que el espín de los estados está limitado por un valor de $s = 2$, es $N = 8$, pero esto lo dijimos considerando solamente una dimensión, por lo que si consideramos cuatro este valor sería $N = 32$. Entonces, el número máximo de dimensiones para una teoría supersimétrica, con una única dimensión temporal, sería 11, ya que en 11 D tenemos espinores de 32 componentes reales. Sin embargo, en 12 D espacio-temporales con signatura $(10, 2)$ hay espinores de Majorana-Weyl, que tendrían también 32 componentes reales, por lo que en principio podríamos definir la teoría en un espacio-tiempo de 12 D tomando dicha signatura. Además la M-álgebra (que sería el álgebra de supersimetrías de la teoría M) tiene un grupo de isomorfismos que incluye $SO(10, 2)$, lo que puede interpretarse como que está actuando sobre un espacio de 12 D con signatura $(10, 2)$. La posibilidad de que haya dimensiones espacio-temporales ocultas en teoría M está reforzada por la estructura de simetrías ocultas en la red de dualidades que involucran a las D-branas, como en teoría F [25] y en teoría S [3].

En este contexto surgió la teoría de dos tiempos, que es una reformulación general de la física de un tiempo que muestra inadvertidas simetrías ocultas en sistemas dinámicos unitemporales y establece relaciones previamente desconocidas de tipo dualidad entre ellos. Esto puede desempeñar un papel en la visualización de las simetrías y la construcción de la dinámica de sistemas poco entendidos, como la teoría M. Aunque la física de dos tiempos se define en $D + 2$ dimensiones hay suficiente simetría gauge para compensar la dimensión espacial y la dimensión temporal extra, de forma que los grados de libertad físicos son equivalentes a los de las teorías físicas con un único tiempo en D dimensiones.

La simetría gauge fundamental de la física de dos tiempos es $Sp(2, R)$ que actúa sobre el espacio de fases. Una consecuencia importante de esta teoría gauge es que el momento y la posición se hacen indistinguibles en cualquier instante. La transformación de X^M, P_M es generalmente una transformación que puede darse explícitamente en presencia de campos de fondo, pero en ausencia de estos se reduce a la acción lineal de $Sp(2, R)$ sobre el par (X^M, P^M) para cada valor del índice M. El espacio de fases físico será el subespacio invariante gauge bajo $Sp(2, R)$. Una vez fijada la simetría gauge, el subespacio resultante que proviene del espacio de fases X^M, P_M en $D + 2$ dimensiones es el espacio de fases x^μ, p_μ en $(D-1)+1$ dimensiones. Sin embargo, hay otras posibles maneras de incluir el espacio de fases en $(D - 1) + 1$ dimensiones en el de $D + 2$, y esto se realiza mediante distintas elecciones de gauge de la simetría $Sp(2, R)$. En el sistema resultante con un tiempo, una vez fijado el gauge, el tiempo y el hamiltoniano y en general el espacio-tiempo curvo, son conceptos emergentes. El hamiltoniano, y por tanto la dinámica, son diferentes en función del gauge escogido, dependiendo de los grados de libertad gauge fijados. De este modo, una única acción en $D + 2$ dimensiones da lugar a diferentes sistemas dinámicos en espacios de $(D - 1) + 1$ dimensiones.

Uno de los aspectos más sorprendentes de la teoría de dos tiempos es el hecho de que esta teoría en $D + 2$ dimensiones tiene muchas imágenes holográficas en $(D - 1) + 1$ dimensiones. Cada una de esas imágenes tiene el mismo contenido de grados de libertad que la teoría matriz, pero desde el punto de vista de la física unitemporal cada imagen aparece como un sistema dinámico distinto con un único tiempo. De ese modo se consiguen unificar muchos sistemas unitemporales en una familia, correspondientes a la misma teoría matriz bitemporal en $D + 2$ dimensiones. Debido a esto, los miembros de dicha familia obedecen de forma natural relaciones de dualidad entre ellos, además de que comparten muchas propiedades comunes, como la misma simetría global que puede estar oculta de forma no lineal en $(D-1)+1$ dimensiones.

Entonces, recordando lo que se ha dicho más arriba, en el contexto de la teoría M se podría construir una teoría en $10+2$ D (debido a la presencia del $SO(10,2)$ en la M-álgebra) teniendo en cuenta la teoría de dos tiempos sobre la que acabamos de discutir. De la misma forma que la teoría M (11 D) tiene como límite a bajas energías la supergravedad en 11 D, la teoría en $10+2$ D debe tener como límite a bajas energías una supergravedad en $10+2$ D. Esto no se ha encontrado, por lo que habría que romper la simetría Lorentz del $SO(10,2)$ de manera que de lugar al $SO(10,1)$.

Finalmente, un trabajo interesante por realizar sería la búsqueda de dicho modelo de supergravedad en 12 dimensiones con dos de ellas temporales. Pero la formulación de tal modelo supone un reto (aunque emocionante por una parte) bastante complejo con cálculos muy extensos. Debido a ello, en el presente trabajo optamos por empezar por un modelo más sencillo de dimensionalidad más baja, con el propósito de simplificar las cosas. Aunque el caso más sencillo con 2 tiempos sería el de $2+2$ dimensiones, se ha elegido el modelo con $3+2$ dimensiones que posee la ventaja de que tenemos las 3 dimensiones espaciales de nuestro espacio real.

Capítulo 4

Aspectos técnicos de Teoría de Grupos

Para el desarrollo del trabajo van a ser de importancia los grupos de Galileo y de Poincaré, junto con sus álgebras de Lie asociadas. Debido a ello, en el presente apartado vamos a realizar una descripción de los aspectos teóricos más relevantes en lo referente a estos temas.

4.1. El Grupo de Galileo y su álgebra de Lie

El grupo de Galileo G (que según vamos a describirlo nosotros, lo denotamos por $G(n)$ con $n = 3$) es el grupo de transformaciones que conectan sistemas de referencia inerciales. Tales sistemas de referencia pueden trasladarse en el espacio el uno respecto del otro, pueden tener desplazamientos (shifts) temporales entre ellos, pueden rotarse en el espacio, y finalmente, pueden moverse con velocidad relativa constante. Estas transformaciones de Galileo cambian el vector de coordenadas $\mathbf{x}$ y el tiempo t por $\mathbf{x}'$ y t', cumpliendo las siguientes relaciones

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{u} \\ t' = t + \tau \end{cases} , \tag{4.1}$$

donde R es una transformación propia ortogonal en el espacio tridimensional que corresponde a las rotaciones, $\mathbf{v}$ es el vector velocidad constante, $\mathbf{u}$ es el vector que describe la traslación del sistema y τ es el desplazamiento temporal. Las transformaciones de Galileo puras son las transformaciones,

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t \\ t' = t \end{cases} . \tag{4.2}$$

Como las rotaciones R están descritas por tres parámetros, $\mathbf{v}$ por tres, $\mathbf{u}$ por tres y τ por uno, el grupo de Galileo G es un grupo de Lie de 10 parámetros. Si denotamos los elementos (4.1) de G por $(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u})$, la ley de multiplicación es

$$(R', \tau', \mathbf{v}', \mathbf{u}') \cdot (R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = (R'R, \tau + \tau', R'\mathbf{v} + \mathbf{v}', R'\mathbf{u} + \mathbf{u}' + \mathbf{v}'\tau) \tag{4.3}$$

y se puede representar por la multiplicación de matrices 5×5

$$\begin{pmatrix} R & \mathbf{v} & \mathbf{u} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{4.4}$$

El elemento unitario de G es el $(1,0,0,0)$ y el inverso de $(R,\tau,\mathbf{v},\mathbf{u})$ es $(R^{-1},-\tau,-R^{-1}\mathbf{v},-R^{-1}\{\mathbf{u}-\mathbf{v}\tau\})$. Las matrices infinitesimales tienen la forma

$$\begin{pmatrix} S & \mathbf{k}' & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \phi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

donde S es una matriz 3×3 antisimétrica, $\mathbf{k}'$ y $\mathbf{k}$ son vectores columna arbitrarios y ϕ es un número real. Denotamos los elementos de la base del álgebra de Lie asociada al grupo por X_{ij} (generadores de rotaciones [1]) y P_i (generadores de traslaciones, momento lineal), las transformaciones de Galileo puras por G_i (generadores de los 'boosts' de Galileo) y el desplazamiento temporal por H (Hamiltoniano), que son generadores infinitesimales. Las relaciones de conmutación son:

$$\begin{gathered} [X_{ij},X_{kl}] = \delta_{jk}X_{il} - \delta_{ik}X_{jl} + \delta_{il}X_{jk} - \delta_{jl}X_{ik} \\ [X_{ij},P_k] = \delta_{jk}P_i - \delta_{ik}P_j;\ [P_i,P_j]=0 \\ [X_{ij},G_k] = \delta_{jk}G_i - \delta_{ik}G_j;\ [P_i,G_j]=0;\ [G_i,G_j]=0 \\ [X_{ij},H]=0;\ [P_i,H]=0;\ [G_i,H]=P_i \end{gathered} \tag{4.6}$$

Con lo que quedan descritos el Grupo de Galileo y su álgebra de Lie asociada. El grupo de Galileo se puede entender como el límite clásico del grupo de Poincaré (que describimos a continuación).

4.2. El Grupo de Poincaré y su álgebra de Lie

El grupo de Poincaré es el grupo que describe las simetrías espacio-temporales en un espacio de 4 D ($3+1$, las tres espaciales y la temporal). Vamos a introducir este grupo en el marco de la Relatividad Especial, por lo que el espacio-tiempo será un espacio plano de Minkowski $\mathcal{M}$. La métrica de este espacio viene dada por (nosotros tomamos la signatura $\eta_{\mu\nu}\equiv(-,+,+,+)$)

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

El cuadrivector que describe las coordenadas de un suceso es $x^\mu=(x^0,x^1,x^2,x^3)=(x^0,x^i)$, donde 0 indica la coordenada temporal y las otras tres las espaciales. Seguiremos el convenio de Einstein de sumación en índices repetidos. Además, los índices griegos recorren desde 0 hasta 3 y los latinos de 1 a 3.

En dos sistemas de referencia diferentes las coordenadas de un mismo suceso vendrán dadas por los cuadrivectores x^μ y x'^μ, donde la relación entre ambos vendrá dada por

$$x'^\mu = a^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{4.8}$$

donde los a^μ hacen referencia a las traslaciones y las $\Lambda^\mu{}_\nu$ a las transformaciones de Lorentz de la Relatividad Especial. Estas últimas tienen que cumplir la relación

[1]Estos generadores están relacionados con el momento angular de la siguiente manera: $L_i=\varepsilon_{ijk}X_{jk}$, donde ε_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico.

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{4.9}$$

El conjunto de transformaciones (a, Λ) que satisfacen (4.9) es el grupo de Lorentz inhomogéneo, es decir, el grupo de Poincaré $\mathcal{P}$.

4.2.1. El grupo de Lorentz

Si en (4.8) hacemos $a^{\mu} = 0,\ \forall\mu$, nos queda el conjunto de transformaciones $(0, \Lambda) \equiv \Lambda$ que forman un subgrupo conocido como grupo de Lorentz (homogéneo) $\mathcal{L}$, de forma que

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\mu} \tag{4.10}$$

donde las Λ siguen cumpliendo (4.9). Además, se tiene que

$$det\Lambda = \pm 1. \tag{4.11}$$

La relación (4.9) solo suministra 10 condiciones sobre los 16 elementos de la matriz Λ, ya que ambos miembros en dicha ecuación son matrices simétricas. Esto quiere decir que cada elemento del grupo de Lorentz quedará caracterizado por 6 parámetros independientes, es decir, $\mathcal{L}$ será un grupo de Lie de dimensión 6.

Un ejemplo de transformaciones de Lorentz es de las que extienden las rotaciones R en el espacio tridimensional euclídeo en este nuevo espacio. La forma matricial es

$$\Lambda(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Las transformaciones de Lorentz puras (que mezclan la coordenada temporal con las espaciales) en términos del parámetro η [2] vienen dadas, según la dirección del espacio en la que se considere la transformación, por las siguientes matrices

$$\Lambda(e_1,\eta) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \operatorname{senh}\eta & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \Lambda(e_2,\eta) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & \operatorname{senh}\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\eta & 0 & \cosh\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \Lambda(e_3,\eta) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & \operatorname{senh}\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{senh}\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

donde los $e_i,\ i = 1, 2, 3$, son los vectores unitarios respectivos a la dimensión espacial en la que se considera la transformación.

Se observa que las transformaciones de Lorentz puras vienen descritas por matrices simétricas, pero como el producto de dos matrices simétricas no es una matriz simétrica, las transformaciones de Lorentz puras no forman un subgrupo de $\mathcal{L}$.

Como espacio topológico, $\mathcal{L}$ no es conexo, sino que tiene 4 componentes en función de si $det\Lambda = \pm 1$ y si $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ o $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. Entre ellas, solo la componente que contiene a la identidad

[2] En Relatividad Especial el parámetro η se conoce como rapidez y viene dado por $\tanh\eta = v/c$, donde v es la velocidad y c la velocidad de la luz en el vacío.

($det\Lambda = 1$ y ${\Lambda^0}_0 \geq 1$), $\mathcal{L}_0$, es un subgrupo que además es normal.

Cualquier transformación Λ de $\mathcal{L}_0$ se puede factorizar de la siguiente manera

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{n}, \eta)\Lambda(R) \tag{4.14}$$

donde $\Lambda(\mathbf{n}, \eta)$ es una transformación de Lorentz pura en una dirección $\mathbf{n}$ arbitraria.

4.2.2. El grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré, como hemos dicho, viene dado por el conjunto de las transformaciones (a, Λ) que cumplen (4.9). Si aplicamos dos veces estas transformaciones como en (4.8) obtenemos la ley de composición del grupo, que se puede escribir de la siguiente forma

$$(a_2, \Lambda_2)(a_1, \Lambda_1) = (a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2\Lambda_1) \tag{4.15}$$

que es asociativa.

El elemento neutro es el $(0, I)$, mientras que el inverso de (a, Λ) es $(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})$.

Además, como hemos visto en la subsección anterior, el conjunto de los elementos de la forma $(0, \Lambda)$ es el subgrupo $\mathcal{L}$, el grupo de Lorentz. El de las traslaciones (a, I) también es un subgrupo, normal en $\mathcal{P}$, siendo expresable cada elemento (a, Λ) de manera única como un producto

$$(a, \Lambda) = (a, I)(0, \Lambda). \tag{4.16}$$

Estas propiedades expresan de forma explícita la estructura de $\mathcal{P}$ como producto semidirecto

$$\mathcal{P} = \mathcal{T}_4 \odot \mathcal{L} \tag{4.17}$$

y en particular, si nos restringimos a la componente conexa, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{T}_4 \odot \mathcal{L}_0$. Además, nótese que la relación

$$(0, \Lambda)(a, I)(0, \Lambda^{-1}) = (\Lambda a, I) \tag{4.18}$$

nos indica que el morfismo de $\mathcal{L}$ en un grupo de automorfismos de $\mathcal{T}_4$ es la acción natural.

A diferencia del grupo de Lorentz, el grupo de Poincaré no puede representarse por matrices reales 4×4, debido a que su acción sobre las coordenadas espacio-temporales no es lineal sino afín. Como alternativa se le puede representar por matrices reales 5×5

$$(a, \Lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

que actúan sobre un vector de 5 componentes $(x, 1)$, de forma que

$$\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda x + a \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

4.2.3. Álgebra de Lie del grupo de Poincaré

El álgebra de Lie del grupo de Poincaré viene dada por las relaciones de conmutación entre los generadores de simetría del grupo de Lorentz junto con los del grupo de las traslaciones en cuatro dimensiones.

Los generadores infitesimales de las transformaciones de Lorentz son los $M_{\mu\nu}$, mientras que los generadores de las traslaciones son los P_μ. Por tanto, el álgebra de Poincaré viene dada por

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [P_\mu, M_{\rho\sigma}] &= \eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} \end{aligned} \tag{4.21}$$

donde la última de las relaciones define por separado el álgebra de Lie, $\mathfrak{L}_0$, del grupo de Lorentz, $\mathcal{L}_0$.

Capítulo 5

Versión dual de un álgebra de Lie

Las álgebras de Lie admiten, además de la expresión en términos de campos vectoriales, una versión dual en términos de formas diferenciales (ecuaciones de Maurer-Cartan).

Entonces, vamos a desarrollar los conceptos necesarios del cálculo de variedades y del lenguaje de formas diferenciales para introducir la versión dual de un álgebra de Lie, dado que el método de expansión que vamos a usar para el desarrollo del trabajo se formula en dicha versión dual del álgebra.

Para ello, vamos a partir del hecho de que el espacio-tiempo puede ser descrito por una variedad diferenciable. El concepto de variedad generaliza el concepto de superficie o curva en $\mathbb{R}^3$, y por tanto, el concepto de variedad diferenciable generaliza el concepto de superficie diferenciable en $\mathbb{R}^3$, esto es una superficie con un plano tangente en cada punto.

5.1. Formas diferenciales exteriores

5.1.1. Formas diferenciales y producto exterior

Un campo tensorial de orden p totalmente antisimétrico se denomina p-forma [1] (diferencial exterior).

El espacio de p-formas de clase C^k en una variedad suave [2] X es un submódulo $\Lambda^p(X)$ del módulo, sobre el anillo de funciones C^k, de todos los campos tensoriales C^k covariantes en X: la suma de dos p-formas es una p-forma, el producto de una p-forma y una función f es una p-forma. $\Lambda^p_x(X)$ es el espacio de p-formas en x. Una forma de grado p superior a la dimensión n de la variedad en la cual está definida es idénticamente nula porque las únicas componentes no nulas del campo tensorial totalmente antisimétrico de orden p son aquellas en las cuales todos los índices son diferentes, una situación que nunca puede darse si $p > n$.

El producto exterior (producto de Grassman) de una p-forma y una q-forma es una aplicación

$$\wedge : (\Lambda^p(X), \Lambda^q(X)) \to \Lambda^{p+q}(X) \tag{5.1}$$

[1] forma de grado p.

[2] Suave significa de clase C^r, con r lo suficientemente grande como para que el enunciado tenga significado. Aquí, $r \geq k+1$.

de $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ con $\alpha \wedge \beta$ definido por

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, ..., v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi} (sign\ \pi)\pi[\alpha(v_1, ..., v_p)\beta(v_{p+1}, ..., v_{p+q})] \tag{5.2}$$

donde $v_i \in T(X)$, que es el espacio tangente a la variedad, y π representa las permutaciones de $(1, 2, ..., p+q)$.

De la definición del producto exterior se siguen las siguientes propiedades: es asociativo, bilineal y en general no conmutativo, de manera que

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha;\ si\ \alpha \in \Lambda^p, \beta \in \Lambda^q. \tag{5.3}$$

Siendo $T^*(X^n)$ el espacio dual a $T(X^n)$, cuya base está formada por el producto exterior de p 1-formas, es posible expresar una p-forma en dicha base. Denotamos la base por

$$\{\theta^{i_1} \wedge ... \wedge \theta^{i_p};\ i_j = 1, ..., n\} \tag{5.4}$$

entonces, la p-forma se escribe

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{p!} \alpha_{k_1,...,k_p} \theta^{k_1} \wedge ... \wedge \theta^{k_p} \\ &= \alpha_{K_1,...,K_p} \theta^{K_1} \wedge ... \wedge \theta^{K_p} \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde los índices con letras mayúsculas siguen el orden de los números naturales, $K_j < K_{j+1}$.

El conjunto de todas las formas de todos los grados en X junto con el producto exterior forman el álgebra exterior, álgebra de Grassman, que se denota por $\Lambda(X)$ o simplemente Λ.

5.1.2. Diferenciación exterior

Sea α una p-forma diferencial de clase C^k ($\alpha_{I_1,...,I_p}(x)$ son funciones diferenciables de x de clase C^k).

El operador diferencial exterior d transforma una p-forma α de clase C^k en una $(p+1)$-forma $d\alpha$ de clase C^{k-1}, llamada derivada exterior de α, de la siguiente manera

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_{I_1,...,I_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{I_1} \wedge ... \wedge dx^{I_p} \tag{5.6}$$

donde dx^i es la base del espacio dual, según las coordenadas empleadas.

El diferencial exterior tiene las siguientes propiedades:

1. d es lineal: $d(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda d\alpha + \mu d\beta$, donde λ, μ son constantes.

2. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (1)^p \alpha \wedge d\beta$, donde p es el grado de α.

3. $d^2 = 0$.

4. Si f es una 0-forma, df es el diferencial ordinario de f.

5. La operación d es local: si α y β coinciden en un conjunto abierto U, $d\alpha = d\beta$ en U; esto es, el comportamiento de α fuera de U no afecta a $d\alpha$ en U, $(d\alpha)|_U = d(\alpha|_U)$.

Las propiedades 1 a 4 definen de manera única al operador d.

5.1.3. Producto interior

El producto interior de una forma ω y un vector v se denota por $i_v\omega$, a veces, también se denota por $v\lrcorner\omega$ o $i(v)\omega$. El operador i_v transforma una p-forma en una $(p-1)$-forma y en la base canónica de las coordenadas de la variedad, el producto interior se expresa de la siguiente manera

$$i_v\omega = \frac{1}{(p-1)!} v^j \omega_{ji_2\dots i_p} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = v^j \omega_{jI_1\dots I_{p-1}} dx^{I_1} \wedge \dots \wedge dx^{I_{p-1}} \tag{5.7}$$

donde ω es la p-forma y sus componentes tienen que ser antisimetrizadas, si es necesario.

Las propiedades del producto interior son las siguientes:

1. $i_v^2 = 0$.
2. $di_v + i_v d = \mathscr{L}_v$, es la derivada de Lie respecto de v.
3. $[\mathscr{L}_v, i_w] \equiv \mathscr{L}_v i_w - i_w \mathscr{L}_v = i_{[v,w]}$.
4. $d\omega(v_0, v_1 \dots v_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i v_i(\omega(v_0, \dots \hat{v}_i, \dots v_p)) + \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_0 \dots \hat{v}^i, \dots \hat{v}^j, \dots v_p)$.
5. $\mathscr{L}_{[u,w]} = [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_w]$.

5.1.4. Formas definidas en un grupo de Lie

Consideremos una variedad G que además es un grupo de Lie. Una forma diferencial ω de G es invariante por la izquierda si [3]

$$L_g^* \omega(L_g h) = \omega(h) \tag{5.8}$$

donde $L_g h = gh$, $g, h \in G$.

Como se explica para el caso de campos vectoriales en G [6], ω es invariante por la izquierda si y solo si $L_g^*\omega(g) = \omega(e)$ donde e es el elemento neutro de G. Las p-formas diferenciales invariantes por la izquierda en G forman un espacio vectorial de dimension $\binom{n}{p}$. Una forma diferencial invariante por la derecha se define de manera similar.

Si ω es una forma diferencial invariante por la izquierda (derecha), entonces $d\omega$ es invariante por la izquierda (derecha):

$$L_g^* d\omega = dL_g^*\omega = d\omega. \tag{5.9}$$

Ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan. El dual $\mathscr{G}^*$ del álgebra de Lie $\mathscr{G}$ de G es el espacio de las formas lineales [4] invariantes por la izquierda en G. Sean (v_α) y (θ^β) bases duales en

[3] Aquí $\omega(g)$ significa $\omega_g \in T_g^*(G)$.

[4] Forma lineal es otra manera de denotar una 1-forma.

$\mathscr{G}$ y $\mathscr{G}^*$ respectivamente. Como $d\theta^\alpha$ es también invariante por la izquierda, puede expresarse en la base $(\theta^B \wedge \theta^\Gamma)$ en el espacio de las 2-formas invariantes por la izquierda, de la siguiente manera

$$d\theta^\alpha = -c^\alpha_{B\Gamma}\theta^B \wedge \theta^\Gamma = -\frac{1}{2}c^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta \wedge \theta^\gamma \tag{5.10}$$

que son las ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan, donde las $c^\alpha_{\beta\gamma}$ son las constantes de estructura del grupo de Lie G, definidas por las relaciones de conmutación de elementos del grupo $[v_\beta, v_\gamma] = c^\alpha_{\beta\gamma}v_\alpha$.

5.2. Conexiones en un fibrado principal

Desde hace unos años el papel fundamental de los campos gauge en física se ha visto incrementado, así como la posibilidad de describirlos en términos de conexiones en fibrados principales. Debido a ello, lo que vamos a describir en esta sección podría entenderse como *la geometría de los campos gauge*.

Dado que vamos a desarrollar un modelo de supergravedad en términos de formas diferenciales (descritas en la sección anterior), resulta conveniente describir aspectos relevantes de este formalismo.

5.2.1. Fibrados

Un haz es una terna (E, B, π) que consiste en dos espacios topológicos E y B y una aplicación continua sobreyectiva $\pi : E \to B$, donde B se conoce como la base. Los haces se han introducido para generalizar los productos topológicos.

Nos restringiremos al caso en el que los espacios topológicos $\pi^{-1}(x),\ \forall x \in B$ son homomorfos a un espacio F. Entonces, llamamos a $\pi^{-1}(x)$ fibra en x, y la denotamos por F_x, donde F es una fibra 'típica'. Si además, el haz tiene una estructura adicional que incluye un grupo de homomorfismos de F y una cobertura de B por conjuntos abiertos, entonces se conoce como fibrado. Si F es un espacio vectorial y el grupo es el grupo lineal, el fibrado se llama haz vectorial.

Un fibrado (E, B, π, G) es un haz junto con una fibra F, un grupo topológico G de homomorfismos de F sobre sí mismo y una cobertura de B por una familia de conjuntos abiertos $\{U_j\}$, tales que:

a) Localmente el haz es trivial, es decir, es homomorfo al producto de haces. De manera más precisa, la fibra $\pi^{-1}(U_j)$ es homomorfa al producto topológico $U_j \times F,\ \forall j$. El homomorfismo $\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times F$ toma la forma

$$\varphi_j(p) = (\pi(p), \hat{\varphi}_j(p)). \tag{5.11}$$

Los pares $\{U_i, \varphi_i\}$ se conocen como familia de trivializaciones locales del haz.

b) Hay una correlación entre los subhaces definidos en los conjuntos abiertos U_j que cubren la base. Sea $x \in U_j \cap U_k$. La relación entre las aplicaciones $\hat{\varphi}_{j,x}$ y $\hat{\varphi}_{k,x}$ da la estructura del fibrado. El homomorfismo $\hat{\varphi}_{k,x} \cdot \hat{\varphi}^{-1}_{j,x} : F \to F$ es un elemento del grupo estructural G, $\forall x \in U_j \cap U_k$ y todos j, k. Si G tiene un único elemento en el haz es trivializable.

Finalmente, un fibrado en el que la fibra F y el grupo estructural G son isomorfos y G actúa sobre F como acción por la izquierda, se conoce como fibrado principal.

5.2.2. Conexión en un fibrado principal

Definimos una conexión en un fibrado principal (P, X, π, G) como una 1-forma en P con valores en el espacio vectorial $\mathscr{G}$, tales que

1. $\omega_p(u) = \hat{u}$, donde $u \in V_p$ y $\hat{u} \in \mathscr{G}$ están relacionados por $\hat{u}(g) = L'_g(e)u(e)$.
2. ω_p tiene una dependencia diferencial en p.
3. $\omega_{\tilde{R}_g p}(\tilde{R}'_g v) = Ad(g^{-1})\omega_p(v)$, donde $\tilde{R}'_g$ es una acción por la derecha (definida de manera similar a la acción por la izquierda L'_g) y $Ad(g^{-1})$ es la representación adjunta del elemento g^{-1}.

Definimos los subespacios horizontales como los núcleos de las aplicaciones $\omega_p : T_p(P) \to \mathscr{G}$, como

$$H_p = \{v \in T_p(P);\ \omega_p(v) = 0\}. \tag{5.12}$$

Se puede demostrar que dada una trivialización $\{U_i, \phi_j\}$ del haz P y una conexión ω en P, entonces hay una única familia $\{\bar{\omega}_i\}$ de conexiones de 1-formas en la variedad base.

5.2.3. Derivada exterior covariante, Curvaturas y ecuaciones estructurales de Cartan

Sea (P, X, π, G) un fibrado principal con una conexión H_p definida por la 1-forma ω en P con valores en $\mathscr{G}$. Sea $h : T_p(P) \to H_p$ una aplicación tal que $v \mapsto v_h$. Entonces, la derivada exterior covariante $D\phi$ de una r-forma $\phi = \phi^\alpha \otimes e_\alpha$ con valores en algún espacio vectorial con base (e_α) se define mediante la relación

$$D(\phi)(v_1, ..., v_{r+1}) = d\phi(hv_1, ..., hv_{r+1}) \tag{5.13}$$

donde $d\phi = (d\phi^\alpha) \otimes e_\alpha$ (ver [6]).

Se define la forma de curvatura de la conexión ω (conexión H_p) como la 2-forma $\Omega = D\omega$ con valores en $\mathscr{G}$. Una conexión ω se denomina plana si $\Omega \equiv 0$. La ecuación estructural de Cartan se escribe

$$\Omega(u, v) = d\omega(u, v) + [\omega(u), \omega(v)]. \tag{5.14}$$

En términos de la base (e_α) de $\mathscr{G}$ la ecuación estructural de Cartan se expresa

$$\Omega^\alpha = d\omega^\alpha + \frac{1}{2}c^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma \tag{5.15}$$

donde las $c^\alpha_{\beta\gamma}$ son las constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathscr{G}$ del grupo G de la fibra, definidas por $[e_\alpha, e_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta}e_\gamma$.

Una conexión lineal en una variedad suave X es una conexión en el fibrado principal $F(X)$ de los marcos en X. Sea $\Phi_p : T_x(X^n) \to \mathbb{R}^n$, $p = (x, \rho_x)$, la aplicación que transforma un vector en $T_x(X^n)$ en sus componentes respecto al marco ρ_x. En otras palabras, si $\rho_x = (e_i)$, entonces $\Phi_p u = (\theta^i(u))$, donde θ^i es la base dual de (e_i). La 1-forma θ en $F(X)$ con valores en $\mathbb{R}^n$ definida por

$$\theta_p(v) = \Phi_p \pi' v, \ \textit{con}\ v \in T_p F(X) \tag{5.16}$$

se denomina forma canónica de X.

Se define la forma de torsión de una conexión lineal en X como la 2-forma $\Theta = D\theta$. La ecuación estructural de Cartan se expresa

$$\Theta(u, v) = d\theta(u, v) + \omega(u)\theta(v) - \theta(v)\omega(u) \tag{5.17}$$

donde ω es la conexión en $F(X)$ que define la derivada exterior covariante y $\omega(u)\theta(v)$ denota la acción de $\omega(u) \in \mathscr{GL}(n)$ [5] en $\theta(v) \in \mathbb{R}^n$.

La ecuación estructural de la torsión también puede escribirse, en términos del conmutador, de la siguiente manera

$$\Theta = d\theta + [\omega, \theta]. \tag{5.18}$$

5.3. Versión dual de álgebras relevantes

Para el presente trabajo van a ser relevantes las álgebras de Poincaré y de Galileo, que ya las hemos descrito en el capítulo anterior. Por tanto, vamos a finalizar este capítulo presentando la versión dual de estas álgebras, lo cual será de interés más adelante.

5.3.1. Versión dual del álgebra de Poincaré

Los generadores de simetría del grupo de Poincaré son los operadores momento P_μ y los generadores de Lorentz $M_{\mu\nu}$, como podemos recordar del capítulo anterior.

Para escribir la versión dual del álgebra de Poincaré tenemos que asociar formas diferenciales a estos generadores, además de una curvatura a cada forma. Entonces, escribimos las ecuaciones del álgebra tal y como se ha descrito en este capítulo.

Comenzamos asociando a cada generador de simetría una forma diferencial. Entonces, a cada uno le corresponde la siguiente 1-forma,

$$\begin{cases} M_{\mu\nu} \to \omega^A{}_B \\ P_\mu \to e^A \end{cases} . \tag{5.19}$$

Por tanto, asociando a cada forma las curvaturas $R^A{}_B$ y T^A, respectivamente, se tiene la siguiente expresión del álgebra

[5] $\mathscr{GL}(n)$ es el álgebra de Lie del grupo lineal general $GL(n)$.

$$\begin{cases} R^A{}_B = d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B \\ T^A = de^A + \omega^A{}_B \wedge e^B \end{cases} , \tag{5.20}$$

que es la versión gauge del álgebra de Poincaré. Las curvaturas $R^A{}_B$ y T^A corresponden, respectivamente, a las formas de curvatura y torsión, antes descritas.

5.3.2. Versión dual del álgebra de Galileo

De la misma manera que para el álgebra de Poincaré, asociamos a cada generador del grupo de Galileo una 1-forma [6],

$$\begin{cases} X_{ij} \to \omega^a{}_b \\ G_i \to g^a \\ P_i \to e^a \\ H \to \phi \end{cases} . \tag{5.21}$$

Las curvaturas asociadas a cada forma serán, $R^a{}_b$, G^a, T^a y Ω, respectivamente.

Entonces, el álgebra de Galileo en su versión gauge se expresa,

$$\begin{cases} R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b + g^a \wedge g_b \\ G^a = dg^a + \omega^a{}_b \wedge g^b \\ T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^a + g^a \wedge \phi \\ \Omega = d\phi + g_b \wedge e^b \end{cases} . \tag{5.22}$$

Esta álgebra se puede ver como un splitting del álgebra gauge de Poincaré, de manera que se han separado en las ecuaciones las tres dimensiones espaciales de la temporal.

[6] En las 1-formas (en las curvaturas también) usamos en este caso índices minúsculos para distinguir del caso de Poincaré descrito arriba.

Capítulo 6

Método de expansión de una (super-)álgebra

Es de interés en física y matemáticas buscar relaciones entre álgebras de Lie o derivar nuevas álgebras de ellas, lo cual se remonta al problema de mezclar simetrías y a los inicios de la supersimetría. Sin entrar en detalle, cabe mencionar tres métodos para ello, los cuáles son, la contracción de İnönü-Wigner (IW) [15], la deformación de álgebras [8] y la extensión de un álgebra a partir de otra [1].

El método del que vamos a partir es el de la expansión de un álgebra [2], basado en el propuesto por primera vez por Hatsuda y Sakaguchi [13] en un contexto menos general, que consiste en buscar un álgebra $\mathscr{G}$ descrita en términos de formas de Maurer-Cartan (MC) en la variedad asociada al grupo G y, después de reescalar algunos parámetros del grupo por un factor λ, en expandir las formas de MC en series de potencias de λ.

Este método es aplicable a la supergravedad en tres dimensiones. En este contexto, cabe destacar teorías de gravedad Galileana como la propuesta por Bergshoeff y Rosseel [5], cuyos resultados se pueden duplicar con el uso de las expansiones como se puede ver en el trabajo desarrollado por Diego Gútiez [10]. En este último se utiliza el método de las expansiones para separar la coordenada temporal de las espaciales en la superálgebra de Poincaré y relacionar la gravedad relativista con la galileana.

En el presente documento, lo que se pretende es buscar una supergravedad con dos coordenadas temporales y separar una de ellas, de manera que uno de los dos tiempos sea absoluto. Para ello, tendremos que realizar algunas modificaciones del método para adaptarlo a nuestro caso.

Comenzamos con una descripción general de las expansiones, aplicable a la supergravedad tridimensional, que particularizaremos para nuestro caso.

6.1. Método de expansiones

6.1.1. Reescalado de algunos parámetros del grupo

Recordando los resultados de la subsección 5.1.4, en el párrafo sobre las ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan, vemos que, denotando las coordenadas locales del grupo de Lie G por g^i, las bases del álgebra $\mathscr{G}$ y su dual $\mathscr{G}^*$ por $\{X_i\}$ y $\{\omega^i(g)\}$ respectivamente, con $i = 1, ..., r = dimG$, cuando $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$, las ecuaciones de Maurer-Cartan se escriben

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j, \;\; i, j, k = 1, ..., r. \tag{6.1}$$

Se puede mostrar que se pueden obtener nuevas álgebras mediante una redefinición $g \to \lambda g^l$ de algunos parámetros del grupo, examinando expansiones en series de potencias de λ de las 1-formas resultantes $\omega^i(g, \lambda)$.

Las formas $\omega^i(g)$ se pueden expandir como polinomios en las coordenadas del grupo g^i:

$$\omega^i(g) = \left[\delta^i{}_j + \frac{1}{2} c_{jk}^i g^k + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} c_{jk_1}^{h_1} c_{h_1 k_2}^{h_2} ... c_{h_{n-1} k_{n-1}}^{h_{n-1}} c_{h_{n-1} k_n}^{i} g^{k_1} g^{k_2} ... g^{k_{n-1}} g^{k_n}\right] dg^j \tag{6.2}$$

donde se ve que la redefinición

$$g \to \lambda g^l \tag{6.3}$$

de algunas coordenadas g^l producirá una expansión de las 1-formas de Maurer-Cartan $\omega^i(g, \lambda)$, como una suma de 1-formas $\omega^{i,\alpha}(g)$ en G, multiplicadas por las correspondientes potencias λ^α de λ.

Finalmente, queda sustituir las expresiones desarrolladas de $\omega^i(g, \lambda)$ en el álgebra e igualar los términos con la misma potencia de λ. De este modo obtenemos las nuevas álgebras.

6.1.2. Casos de interés

A continuación, describimos casos de interés que dan álgebras relevantes en teorías como la de la supergravedad en tres dimensiones que mencionábamos al principio de este apartado.

Álgebras de Lie $\mathscr{G}(N)$ generadas por $\mathscr{G} = V_0 \oplus V_1$

Considerando una división de $\mathscr{G}^*$ como la suma de dos subespacios vectoriales (arbitrarios),

$$\mathscr{G}^* = V_0^* \oplus V_1^* \tag{6.4}$$

donde cada uno de ellos es generado por las formas de MC $\omega^{i_0}(g)$ y $\omega^{i_1}(g)$ de $\mathscr{G}^*$ con índices correspondientes, respectivamente, a los parámetros no-modificados y modificados,

$$\begin{cases} g^{i_0} \to g^{i_0}; \;\; i_0 = 1, ..., dimV_0 \\ g^{i_1} \to \lambda g^{i_1}; \;\; i_1 = 1, ..., dimV_1 \end{cases} . \tag{6.5}$$

Las ecuaciones de MC que describen la nueva álgebra se escriben ahora de la siguiente manera

$$d\omega^{k_s,\alpha} = -\frac{1}{2} C^{k_s,\alpha}_{i_p,\beta\ j_q,\gamma} \omega^{i_p,\beta} \wedge \omega^{j_q,\gamma}, \tag{6.6}$$

cuyos coeficientes toman la forma,

$$C^{k_s,\alpha}_{i_p,\beta\ j_q,\gamma} = \begin{cases} 0, & si \quad \beta+\gamma \neq \alpha \\ c^{k_s}_{i_p j_q}, & si \quad \beta+\gamma = \alpha \end{cases} \qquad con,\ \alpha,\beta,\gamma = 1,...,N;\ p,q,s = 0,1. \tag{6.7}$$

Caso en el que V_1 es un conjunto cociente

Particularizando para el caso en el que $V_1 = \mathscr{G}/\mathcal{L}_0$ [1] es un conjunto cociente simétrico (coset), es decir,

$$[V_0, V_0] \subset V_0; \quad [V_0, V_1] \subset V_1; \quad [V_1, V_1] \subset V_0; \tag{6.8}$$

Esto se aplica, por ejemplo, a todas las superálgebras donde V_0 es el subespacio bosónico y V_1 el subespacio fermiónico.

En este caso el reescalado conduce a series de potencias pares (impares) en λ para las formas de MC $\omega^{i_0}(g,\lambda)(\omega^{i_1}(g,\lambda))$, que expresamos de la siguiente manera

$$\begin{cases} \omega^{i_0}(g,\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{2\alpha} \omega^{i_0,2\alpha}(g) \\ \omega^{i_i}(g,\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \lambda^{2\alpha+1} \omega^{i_1,2\alpha+1}(g) \end{cases} . \tag{6.9}$$

6.2. Método seguido

En nuestro caso, si tratamos de realizar las expansiones del álgebra por el método que acabamos de dar, tendremos algunas formas diferenciales que estarán contenidas en V_0 y otras en V_1, pero para que las ecuaciones sean consistentes, los campos espinoriales que aparecen deben tener un desarrollo en series de potencias semienteras de λ. Por tanto, habría que realizar una división del álgebra en más subespacios, en concreto, en cuatro ($\mathscr{G}^* = V_0^* \oplus V_{1/2}^* \oplus V_1^* \oplus V_{3/2}^*$). Debido a esto, también habría que hacer modificaciones en la parte en la que se describe el coset.

Al hacer la expansión de los espinores surge otra complicación en los subespacios que dan lugar a los desarrollos con potencias semienteras. Esta complicación se basa en que, para que las ecuaciones sigan siendo consistentes, las potencias de λ en estos subespacios han de aumentar en dos unidades por cada término, en lugar de en una.

Debido a estos problemas, se ha optado por omitir la construcción general relativa a la descomposición en cuatro subespacios. Nos limitaremos a estudiar únicamente el caso que nos ocupa, *i.e.*, el álgebra de super-Poincaré correspondiente a la supergravedad en $3+2$ dimensiones. Entonces, del método general tomamos los desarrollos en series de potencias pares o impares de las formas diferenciales que los admiten y, finalmente, tomamos el desarrollo de los campos espinoriales de manera que se adapten a las ecuaciones requeridas.

[1] $\mathcal{L}_0$ es una subálgebra $\mathcal{L}_0 \subset \mathscr{G}$ que corresponde a V_0.

Esto se desarrolla en el capítulo siguiente. Aquí solo hacemos los comentarios necesarios para introducir el método final que se ha seguido para expandir el álgebra.

Capítulo 7

Expansión de la superálgebra de la supergravedad en $D = 3 + 2$

Ahora ya estamos en disposición de desarrollar los cálculos de nuestro modelo. Pero antes de empezar, haremos unas últimas aclaraciones de la manera más breve posible.

Primeramente, queremos realizar la expansión de modo que resulte un álgebra de supersimetría con el anticonmutador $\{Q, Q\} = \gamma^a P_a$, (esquemáticamente) con $a = 0, 1, 2, 3$, en lugar de imponer que sea $\{Q, Q\} = P^{\bar{0}}$, como correspondería a la supergravedad Galileana. Si hubiéramos intentado encontrar la supergravedad Galileana, la expansión habría sido distinta [10].

Finalmente, el modelo que vamos a desarrollar es en 5 dimensiones espacio-temporales, de forma que tenemos 3+2 D, es decir, hacemos distinción entre las tres espaciales y las dos temporales. Pero recordando lo que mencionamos en el método de las expansiones, vamos a hacer una separación de una de las dimensiones temporales, de modo que tendremos $(3 + 1) + 1$ dimensiones, es decir, las cuatro espacio-temporales típicas y la temporal extra que caracteriza nuestro modelo. Por tanto, usaremos índices con letras mayúsculas (A,B,...) cuando hagamos referencia a las cinco dimensiones, mientras que emplearemos índices en minúsculas (a,b,...) para hacer referencia a las cuatro dimensiones usuales por separado y denotaremos por $\bar{0}$ al índice de la dimensión temporal extra. Entonces, los índices mayúsculos tomarán los valores $A = \bar{0}, 0, 1, 2, 3$, y los minúsculos $a = 0, 1, 2, 3$.

La métrica utilizada en el desarrollo tiene la signatura $\eta^{AB} \equiv (-, -, +, +, +)$.

7.1. Álgebra de partida y separación de índices

En términos de formas diferenciales, podemos escribir las ecuaciones del álgebra relacionando explícitamente las curvaturas con sus formas correspondientes, donde estas últimas representan a los diferentes campos que intervienen. Entonces, escribimos el álgebra de partida de nuestro modelo de esta manera

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = d\tilde{\psi} + \frac{1}{4}\Gamma^{AB}\tilde{\omega}_{AB} \wedge \tilde{\psi} \\ \tilde{R}^{A}{}_{B} = d\tilde{\omega}^{A}{}_{B} + \tilde{\omega}^{A}{}_{C} \wedge \tilde{\omega}^{C}{}_{B} \\ \tilde{T}^{A} = d\tilde{e}^{A} + \tilde{\omega}^{A}{}_{B} \wedge \tilde{e}^{B} + \bar{\tilde{\psi}}\Gamma^{A}\tilde{\psi} \\ \tilde{F}_{C} = d\tilde{C} + \bar{\tilde{\psi}} \wedge \tilde{\psi} \end{cases} . \tag{7.1}$$

Esta es la versión gauge del álgebra de super-Poincaré en $3+2$ dimensiones, a partir de la cual se obtienen las ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan anulando las curvaturas. En esta álgebra aparecen los siguientes elementos. $\tilde{\psi}$ es una 1-forma espinorial impar de Grassman, dual a las supertraslaciones. $\tilde{\omega}^{A}{}_{B}$ es la 1-forma dual a los generadores de Lorentz y $\tilde{e}^{A}$ representa la 1-forma dual a las traslaciones espacio-temporales. Como se ve de las ecuaciones, cada una de estas formas tiene asociada una curvatura, más una cuarta $\tilde{F}_C$ que tiene su propia forma asociada y que está directamente relacionada con los espinores $\tilde{\psi}$. Los elementos Γ^{A} son las matrices de Dirac, de las cuales diremos más cosas en la siguiente sección, aunque también mencionamos que Γ^{AB} es el producto antisimétrico de dos matrices Γ. También tenemos que, $\bar{\tilde{\psi}}$ representa el análogo al conjugado de Dirac en cinco dimensiones, por tanto, al definir este con una dimensión temporal a mayores se escribe $\bar{\tilde{\psi}} = \tilde{\psi}^{\dagger}\Gamma^{\bar{0}}\Gamma^{0}$. Finalmente, destacamos que, tanto las curvaturas como las formas diferenciales de los campos, están tildadas, lo que se debe a que tenemos que diferenciar estos elementos de los del álgebra expandida. Por tanto, cuando apliquemos el método de expansiones para nuestra álgebra y lleguemos a las ecuaciones finales, los elementos de la nueva álgebra irán sin tilde.

Ahora realizamos una separación de los índices (splitting) de la siguiente manera

$$A = (\bar{0}, a) \tag{7.2}$$

donde A y a toman los valores mencionados más arriba. Con esto diferenciamos la coordenada temporal extra de las otras cuatro. Aplicando el splitting a los elementos del álgebra tenemos que,

$$\begin{cases} \tilde{\omega}^{A}{}_{B} \to (\tilde{\omega}^{a}{}_{\bar{0}} = \tilde{g}^{a},\ \tilde{\omega}^{a}{}_{b}) \\ \tilde{e}^{A} \to (\tilde{e}^{\bar{0}} = \tilde{\phi},\ \tilde{e}^{a}) \\ \tilde{R}^{A}{}_{B} \to (\tilde{R}^{a}{}_{\bar{0}} = \tilde{G}^{a},\ \tilde{R}^{a}{}_{b}) \\ \tilde{T}^{A} \to (\tilde{T}^{\bar{0}} = \tilde{\Omega},\ \tilde{T}^{a}) \end{cases} . \tag{7.3}$$

Aunque sobre las matrices de Dirac hablaremos después, también se separan los índices en ellas:

$$\begin{cases} \Gamma^{AB} \to (\Gamma^{a\bar{0}},\ \Gamma^{ab}) \\ \Gamma^{A} \to (\Gamma^{a}, \Gamma^{\bar{0}}) \end{cases} . \tag{7.4}$$

Llevando estos resultados al álgebra, las ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = d\tilde{\psi} + \frac{1}{4}\Gamma^{ab}\tilde{\omega}_{ab} \wedge \tilde{\psi} + \frac{1}{2}\Gamma^{a\bar{0}}\tilde{g}_{a} \wedge \tilde{\psi} \\ \tilde{R}^{a}{}_{b} = d\tilde{\omega}^{a}{}_{b} + \tilde{\omega}^{a}{}_{c} \wedge \tilde{\omega}^{c}{}_{b} + \tilde{g}^{a} \wedge \tilde{g}_{b} \\ \tilde{G}^{a} = d\tilde{g}^{a} + \tilde{\omega}^{a}{}_{b} \wedge \tilde{g}^{b} \\ \tilde{T}^{a} = d\tilde{e}^{a} + \tilde{\omega}^{a}{}_{b} \wedge \tilde{e}^{b} + \tilde{g}^{a} \wedge \tilde{\phi} + \bar{\tilde{\psi}}\Gamma^{a}\tilde{\psi} \\ \tilde{\Omega} = d\tilde{\phi} + \tilde{g}_{b} \wedge \tilde{e}^{b} + \bar{\tilde{\psi}}\Gamma^{\bar{0}}\tilde{\psi} \\ \tilde{F}_{C} = d\tilde{C} + \bar{\tilde{\psi}} \wedge \tilde{\psi} \end{cases} . \tag{7.5}$$

Después del splitting del álgebra nos quedaría hacer la expansión. Pero, antes de realizar la expansión tenemos que hacer dos cosas: la primera es encontrar una representación de las matrices de Dirac adecuada para nuestro caso. La segunda es ver que forma tienen los espinores $\tilde{\psi}$ para que el álgebra y la expansión sean consistentes. Si echamos un vistazo a las ecuaciones, podemos ver que también tendremos que buscar la forma de la curvatura $\tilde{\rho}$ asociada a los espinores.

Las siguientes secciones las dedicaremos al tratamiento de estos temas.

7.2. Matrices Γ de Dirac

Las matrices de Dirac [1] son un juego de matrices que aparecen en la teoría de Dirac de la mecánica cuántica relativista. Estas matrices admiten diferentes representaciones y también dependen de la métrica escogida. Nosotros elegimos una representación que, junto con la métrica antes escogida, nos proporcione un juego de matrices adecuado para nuestro modelo. Se requiere que las matrices sean de orden par y traza nula [20]. Como tienen que ser de orden par, si se trabaja con dimensiones impares, estas son del orden par anterior. En nuestro caso serán 4×4.

Recordando el splitting, tenemos que

$$\Gamma^A \to (\Gamma^a,\ \Gamma^{\bar{0}}). \tag{7.6}$$

A las matrices con índices separados las denotamos de la siguiente manera,

$$\begin{cases} \Gamma^a = \gamma^a \\ \Gamma^{\bar{0}} = i\gamma^5 \end{cases}, \tag{7.7}$$

donde tenemos cinco matrices 4×4 que tomaremos reales por conveniencia.

Las matrices γ^a son las matrices γ de Dirac usuales en cuatro dimensiones, así como la matriz γ^5 también viene descrita en la misma teoría.

Primeramente, presentamos las propiedades esenciales de las matrices de cuatro dimensiones, las cuales son para las γ^a

$$\begin{cases} \{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}; \quad \eta^{ab} \equiv (-,+,+,+) \\ (\gamma^0)^2 = -1,\ (\gamma^i)^2 = 1; \quad i = 1,2,3 \\ (\gamma^0)^\dagger = -\gamma^0,\ (\gamma^i)^\dagger = \gamma^i \Rightarrow (\gamma^a)^\dagger = (\gamma^a)^{-1},\ (\gamma^a)^\dagger = \gamma^0\gamma^a\gamma^0 \end{cases}. \tag{7.8}$$

La matriz γ^5 viene definida por

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{7.9}$$

y tiene las siguientes propiedades,

$$\{\gamma^a, \gamma^5\} = 0;\ (\gamma^5)^2 = 1;\ (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5. \tag{7.10}$$

[1]Estas matrices forman un álgebra [20]

Extrapolando al caso de cinco dimensiones, nuestras matrices Γ^A han de cumplir las propiedades,

$$\begin{cases} \{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\eta^{AB} \\ (\Gamma^{\bar{0}})^2 = (\Gamma^0)^2 = -1, \; (\Gamma^i)^2 = 1 \\ (\Gamma^{\bar{0}})^\dagger = -\Gamma^{\bar{0}}, \; (\Gamma^0)^\dagger = -\Gamma^0, \; (\Gamma^i)^\dagger = \Gamma^i \Rightarrow (\Gamma^A)^\dagger = \Gamma^{\bar{0}}\Gamma^0\Gamma^A\Gamma^0\Gamma^{\bar{0}} \end{cases}. \tag{7.11}$$

Finalmente, la representación escogida es la de Majorana, debido a que en esta (con la métrica empleada) son matrices reales como se requiere. Entonces, vienen dadas por

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \; \Gamma^1 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}, \; \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \; \Gamma^3 = \begin{pmatrix} -\sigma^1 & 0 \\ 0 & -\sigma^1 \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

y

$$\Gamma^{\bar{0}} = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{7.13}$$

que por comodidad vamos a denotar de la siguiente manera $\Gamma^{\bar{0}} \equiv \gamma^{\bar{0}}$, ya que las otras cuatro las podemos denotar por γ^a.

Las matrices $\{\sigma^i\}$ son las matrices de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

7.3. Formas espinoriales $\tilde{\psi}$ y su curvatura $\tilde{\rho}$

De la tercera relación de las ecuaciones (7.1) obtenemos la siguiente ecuación de Maurer-Cartan (anulando $\tilde{T}^A$ y despejando),

$$d\tilde{e}^A = -\tilde{\omega}^A_{\ B} \wedge \tilde{e}^B - \bar{\tilde{\psi}}\gamma^A\tilde{\psi} \tag{7.15}$$

donde hemos cambiado Γ^A por γ^A [2]. En nuestro caso, recordamos que tenemos $A = \bar{0}, 0, 1, 2, 3$ con $\bar{0}$ y 0 los índices de las dos direcciones temporales, y

$$\bar{\tilde{\psi}} = \tilde{\psi}^\dagger\gamma^{\bar{0}}\gamma^0 \tag{7.16}$$

En $D = 3 + 2$ existen espinores reales (de tipo Majorana, no hay quiralidad en dimensiones impares), pero el bilineal en (7.16) se anula idénticamente en este caso porque la matriz $\gamma^{\bar{0}}\gamma^0\gamma^A$ es antisimétrica, y entonces,

$$\bar{\tilde{\psi}}\gamma^A\tilde{\psi} = \tilde{\psi}^t\gamma^{\bar{0}}\gamma^0\gamma^A\tilde{\psi} = \tilde{\psi}^t(\gamma^{\bar{0}}\gamma^0\gamma^A)^t\tilde{\psi} = -\bar{\tilde{\psi}}\gamma^A\tilde{\psi}. \tag{7.17}$$

Nótese que como son espinores reales se tiene que $\tilde{\psi}^\dagger = \tilde{\psi}^t$, donde t denota la traspuesta.

Por tanto, en este caso hay que considerar $N = 2$, esto es, espinores complejos, si queremos construir una supergravedad en $D = 3 + 2$.

[2]Esto lo hacemos por comodiad, ya que no hay problema de confusión entre γ^A y γ^a debido a que los índices son diferentes.

Entonces si los espinores tienen que ser complejos, han de poder ser descompuestos como suma de dos espinores reales, que lo vamos a discutir ahora. Debido a ello, como ambos espinores reales tienen que tener asociada una curvatura cada uno, también ρ se va a descomponer de esta manera, que también lo discutiremos.

7.3.1. Estructura de $\tilde{\psi}$

Como acabamos de concluir, las formas espinoriales $\tilde{\psi}$ tienen que ser espinores complejos, de manera que

$$\tilde{\psi} = \Re(\tilde{\psi}) + i\Im(\tilde{\psi}), \tag{7.18}$$

es decir, lo descomponemos en parte real y parte imaginaria. Vamos a descomponer los $\tilde{\psi}$ en términos de dos espinores reales, que llamaremos $\tilde{\psi}_1$ y $\tilde{\psi}_2$, del modo siguiente

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_1 = \Re(\tilde{\psi}) + i\gamma^5\Im\tilde{\psi} \\ \tilde{\psi}_2 = i\gamma^5\Re(\tilde{\psi}) + \Im\tilde{\psi} \end{cases} \tag{7.19}$$

Sumando y restando, de estas relaciones obtenemos que

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\tilde{\psi}_1 + \frac{i}{2}(1-\gamma^5)\tilde{\psi}_2. \tag{7.20}$$

De (7.16) obtenemos una relación similar para $\bar{\tilde{\psi}}$,

$$\bar{\tilde{\psi}} = -\frac{i}{2}\bar{\tilde{\psi}}_1(1-\gamma^5) + \frac{1}{2}\bar{\tilde{\psi}}_2(1+\gamma^5), \tag{7.21}$$

donde $\bar{\tilde{\psi}}_j = \tilde{\psi}_j^\dagger\gamma^0$, con $j = 1, 2$, es el conjugado de Dirac.

7.3.2. Estructura de $\tilde{\rho}$

Recordamos que $\tilde{\rho}$ cumple la ecuación

$$\tilde{\rho} = d\tilde{\psi} + \frac{1}{4}\gamma^{ab}\tilde{\omega}_{ab}\wedge\tilde{\psi} + \frac{1}{2}\gamma^{a\bar{0}}\tilde{g}_a\wedge\tilde{\psi}, \tag{7.22}$$

con $\gamma^{a\bar{0}} = i\gamma^a\gamma^5$.

Como se ha dicho, $\tilde{\rho}$ tiene que poder descomponerse del mismo modo que $\tilde{\psi}$. Por tanto, descomponemos $\tilde{\rho}$ en dos curvaturas, que llamamos $\tilde{\rho}_1$ y $\tilde{\rho}_2$, de forma que

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_1 = \Re(\tilde{\rho}) + i\gamma^5\Im(\tilde{\rho}) \\ \tilde{\rho}_2 = i\gamma^5\Re(\tilde{\rho}) + \Im(\tilde{\rho}) \end{cases} . \tag{7.23}$$

Sustituyendo en estas relaciones la expresión de $\tilde{\rho}$ de (7.22) y desarrollando los cálculos, teniendo en cuenta el hecho de que γ^{ab} e $i\gamma^5$ son reales, se llega finalmente a,

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_1 = d\tilde{\psi}_1 + \frac{1}{4}\gamma^{ab}\tilde{\omega}_{ab}\wedge\tilde{\psi}_1 + \frac{1}{2}\gamma^a\tilde{g}_a\wedge\tilde{\psi}_2 \\ \tilde{\rho}_2 = d\tilde{\psi}_2 + \frac{1}{4}\gamma^{ab}\tilde{\omega}_{ab}\wedge\tilde{\psi}_2 + \frac{1}{2}\gamma^a\tilde{g}_a\wedge\tilde{\psi}_1 \end{cases} . \tag{7.24}$$

7.4. Forma final del álgebra

Acabamos de descomponer $\tilde{\psi}$ en términos de $\tilde{\psi}_1$ y $\tilde{\psi}_2$. También hemos descompuesto la ecuación de $\tilde{\rho}$ en dos, la de $\tilde{\rho}_1$ y la de $\tilde{\rho}_2$, que se expresan en términos de los dos espinores reales descritos.

Finalmente, nos queda utilizar las relaciones halladas para los espinores, para expresar el resto de ecuaciones del álgebra en términos de $\tilde{\psi}_1$ y $\tilde{\psi}_2$, de forma que quede un álgebra consistente.

Entonces, recordando las ecuaciones de (7.5), tenemos que expresar, en función de los dos espinores reales, los siguientes términos,

$$\begin{cases} 1.\ \ \bar{\tilde{\psi}}\gamma^a\tilde{\psi} \\ 2.\ \ \bar{\tilde{\psi}}\gamma^{\bar{0}}\tilde{\psi} \\ 3.\ \ \bar{\tilde{\psi}}\wedge\tilde{\psi} \end{cases} . \tag{7.25}$$

Sustituyendo (7.20) y (7.21) en (7.25), y operando se llega a las relaciones buscadas. Resulta conveniente mencionar que en los cálculos para el primer término, por antisimetría del producto de tres matrices γ ($\gamma^5\gamma^a$, recordando la definición de γ^5 y las propiedades básicas de estas matrices), los términos que mezclan $\tilde{\psi}_1$ y $\tilde{\psi}_2$ no van a contribuir. En los cálculos de los otros dos términos, como $\tilde{\psi}_1$ y $\tilde{\psi}_2$ son espinores reales y 1-formas diferenciales, se cumple que, $\bar{\tilde{\psi}}_1\wedge\tilde{\psi}_2 = -\bar{\tilde{\psi}}_2\wedge\tilde{\psi}_1$ y $\bar{\tilde{\psi}}_1\gamma^5\tilde{\psi}_2 = -\bar{\tilde{\psi}}_2\gamma^5\tilde{\psi}_1$, lo que significa que las cancelaciones en estos casos se producen al contrario que en el anterior.

Por tanto, las expresiones finales son,

$$\begin{cases} 1.\ \ \bar{\tilde{\psi}}\gamma^a\tilde{\psi} = \frac{i}{2}(-\bar{\tilde{\psi}}_1\gamma^a\tilde{\psi}_1 + \bar{\tilde{\psi}}_2\gamma^a\tilde{\psi}_2) \\ 2.\ \ \bar{\tilde{\psi}}\gamma^{\bar{0}}\tilde{\psi} = i\bar{\tilde{\psi}}_2\wedge\tilde{\psi}_1 \\ 3.\ \ \bar{\tilde{\psi}}\wedge\tilde{\psi} = \bar{\tilde{\psi}}_2\gamma^5\tilde{\psi}_1 \end{cases} . \tag{7.26}$$

Finalmente, sustituimos todo esto en las ecuaciones del álgebra y expresamos esta en su forma final, antes de hacer la expansión. El resultado es el siguiente,

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_1 = d\tilde{\psi}_1 + \frac{1}{4}\gamma^{ab}\tilde{\omega}_{ab}\wedge\tilde{\psi}_1 + \frac{1}{2}\gamma^a\tilde{g}_a\wedge\tilde{\psi}_2 \\ \tilde{\rho}_2 = d\tilde{\psi}_2 + \frac{1}{4}\gamma^{ab}\tilde{\omega}_{ab}\wedge\tilde{\psi}_2 + \frac{1}{2}\gamma^a\tilde{g}_a\wedge\tilde{\psi}_1 \\ \tilde{R}^a{}_b = d\tilde{\omega}^a{}_b + \tilde{\omega}^a{}_c\wedge\tilde{\omega}^c{}_b + \tilde{g}^a\wedge\tilde{g}_b \\ \tilde{G}^a = d\tilde{g}^a + \tilde{\omega}^a{}_b\wedge\tilde{g}^b \\ \tilde{T}^a = d\tilde{e}^a + \tilde{\omega}^a{}_b\wedge\tilde{e}^b + \tilde{g}^a\wedge\tilde{\phi} + \frac{i}{2}(-\bar{\tilde{\psi}}_1\gamma^a\tilde{\psi}_1 + \bar{\tilde{\psi}}_2\gamma^a\tilde{\psi}_2) \\ \tilde{\Omega} = d\tilde{\phi} + \tilde{g}_b\wedge\tilde{e}^b + i\bar{\tilde{\psi}}_2\wedge\tilde{\psi}_1 \\ \tilde{F}_C = d\tilde{C} + \bar{\tilde{\psi}}_2\gamma^5\tilde{\psi}_1 \end{cases} . \tag{7.27}$$

Ahora ya tenemos el álgebra expresada del modo en el que podemos realizar la expansión.

7.5. Expansión y nueva álgebra

Tal y como hemos descrito anteriormente, el método a seguir es el siguiente. Primero, partimos de las 1-formas que admiten un desarrollo en serie de potencias, pares o impares, de λ, de modo que estos desarrollos se escriben [3],

$$\begin{cases} \tilde{\omega}^a{}_b = \omega^{a,(0)}_{\ b} + \lambda^2 \omega^{a,(2)}_{\ b} + ... \\ \tilde{\phi} = \phi^{(0)} + \lambda^2 \phi^{(2)} + ... \\ \tilde{e}^a = \lambda e^{a,(1)} + \lambda^3 e^{a,(3)} + ... \\ \tilde{g}^a = \lambda g^{a,(1)} + \lambda^3 g^{a,(3)} + ... \end{cases} . \tag{7.28}$$

Antes de continuar, es importante mencionar que vamos a tomar el desarrollo hasta λ^3, dado que a partir de este término dejan de ser relevantes. Esto tiene relación con la expansión de la acción, la cual por si misma da una expresión relevante hasta λ^4, que del modo en el que se construye dicha acción nos dice que en el álgebra tenemos que tomar hasta λ^3.

Dicho esto, continuamos con la expansión del álgebra. De las expansiones de las 1-formas que acabamos de realizar se obtiene para las siguientes curvaturas,

$$\begin{cases} \tilde{R}^a{}_b = R^{a,(0)}_{\ b} + \lambda^2 R^{a,(2)}_{\ b} \\ \tilde{\Omega} = \Omega^{(0)} + \lambda^2 \Omega^{(2)} \\ \tilde{T}^a = \lambda T^{a,(1)} + \lambda^3 T^{a,(3)} \\ \tilde{G}^a = \lambda G^{a,(1)} + \lambda^3 T^{a,(3)} \end{cases} , \tag{7.29}$$

que resulta de desarrollar los productos que aparecen de las 1-formas en las ecuaciones del álgebra y tomar los términos relevantes.

A continuación, para que haya consistencia tenemos que desarrollar los espinores de modo que, las relaciones de estos que aparecen en el álgebra, proporcionen resultados coherentes con los de las curvaturas que acabamos de hallar. Además, de aquí se va a extraer el desarrollo que admiten las curvaturas restantes.

Por tanto, vamos a mostrar que los espinores tienen que tener los siguientes desarrollos,

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(1+4n)/2} \psi_1^{((1+4n)/2)} \\ \tilde{\psi}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(3+4n)/2} \psi_2^{((3+4n)/2)} \end{cases} . \tag{7.30}$$

De las ecuaciones del álgebra (7.27) y de los desarrollos (7.29) se ve claramente que

$$\begin{cases} \bar{\tilde{\psi}}_1 \wedge \tilde{\psi}_1,\ \bar{\tilde{\psi}}_2 \wedge \tilde{\psi}_2 \Rightarrow \text{Tienen que dar potencias de } \lambda \text{ impares.} \\ \bar{\tilde{\psi}}_2 \wedge \tilde{\psi}_1 \Rightarrow \text{Tiene que dar potencias de } \lambda \text{ pares.} \end{cases} \tag{7.31}$$

Esto es muy sencillo de comprobar. Del producto $\lambda^n \lambda^m = \lambda^{n+m}$ se ve que, sustituyendo (7.30) en (7.31), tenemos [4]

[3] Las formas diferenciales del desarrollo las escribimos sin tilde.
[4] Escribimos únicamente la suma de los exponentes, que es lo que nos interesa.

$$
\begin{cases}
\dfrac{1+4n}{2}+\dfrac{1+4m}{2}=1+2(n+m)\Rightarrow \text{Es siempre impar.}\\
\dfrac{3+4n}{2}+\dfrac{3+4m}{2}=3+2(n+m)\Rightarrow \text{Es siempre impar.}\\
\dfrac{3+4n}{2}+\dfrac{1+4m}{2}=2(1+n+m)\Rightarrow \text{Es siempre par.}
\end{cases}
\tag{7.32}
$$

Con lo que concluimos que los desarrollos de los espinores son los que expresamos en (7.30). Para llegar hasta potencias de λ^3, los espinores se toman hasta,

$$
\begin{cases}
\tilde{\psi}_1=\lambda^{1/2}\psi_1^{(1/2)}+\lambda^{5/2}\psi_1^{(5/2)}\\
\tilde{\psi}_2=\lambda^{3/2}\psi_2^{(3/2)}+\lambda^{7/2}\psi_2^{(7/2)}
\end{cases}.
\tag{7.33}
$$

De todo esto se ve que la curvatura $\tilde{F}_C$ admite el siguiente desarrollo,

$$
\tilde{F}_C=F_C^{(0)}+\lambda^2F_C^{(2)}.
\tag{7.34}
$$

Por último, nos queda el desarrollo de las curvaturas $\tilde{\rho}_1$ y $\tilde{\rho}_2$. Estas han de admitir el mismo desarrollo que sus campos asociados, es decir, que los $\tilde{\psi}_1$ y $\tilde{\psi}_2$, respectivamente, como se puede ver del álgebra. Por tanto, dichos desarrollos serán,

$$
\begin{cases}
\tilde{\rho}_1=\lambda^{1/2}\rho_1^{(1/2)}+\lambda^{5/2}\rho_1^{(5/2)}\\
\tilde{\rho}_2=\lambda^{3/2}\rho_2^{(3/2)}+\lambda^{7/2}\rho_2^{(7/2)}
\end{cases}.
\tag{7.35}
$$

Desarrollando los cálculos, tomando los términos relevantes (hasta λ^3) e igualando, la expansión queda

$$
\begin{aligned}
&1.\ \ \lambda^{1/2}\rho_1^{(1/2)}+\lambda^{5/2}\rho_1^{(5/2)}=\lambda^{1/2}d\psi_1^{(1/2)}+\lambda^{5/2}d\psi_1^{(5/2)}+\frac{1}{4}(\lambda^{1/2}\gamma^{ab}\omega_{ab}^{(0)}\wedge\psi_1^{(1/2)}+\lambda^{5/2}\gamma^{ab}\omega_{ab}^{(0)}\wedge\psi_1^{(5/2)}\\
&+\lambda^{5/2}\gamma^{ab}\omega_{ab}^{(2)}\wedge\psi_1^{(1/2)})+\frac{1}{2}\lambda^{5/2}\gamma^a g_a^{(1)}\wedge\psi_2^{(3/2)}\\
&2.\ \ \lambda^{3/2}\rho_2^{(3/2)}+\lambda^{7/2}\rho_2^{(7/2)}=\lambda^{3/2}d\psi_2^{(3/2)}+\lambda^{7/2}d\psi_2^{(7/2)}+\frac{1}{4}(\lambda^{3/2}\gamma^{ab}\omega_{ab}^{(0)}\wedge\psi_2^{(3/2)}+\lambda^{7/2}\gamma^{ab}\omega_{ab}^{(0)}\wedge\psi_2^{(7/2)}\\
&+\lambda^{7/2}\gamma^{ab}\omega_{ab}^{(2)}\wedge\psi_2^{(3/2)})+\frac{1}{2}(\lambda^{3/2}\gamma^a g_a^{(1)}\wedge\psi_1^{(1/2)}+\lambda^{7/2}\gamma^a g_a^{(1)}\wedge\psi_1^{(5/2)}+\lambda^{7/2}\gamma^a g_a^{(3)}\wedge\psi_1^{(1/2)})\\
&3.\ \ R^{a,(0)}_{\ \ b}+\lambda^2R^{a,(2)}_{\ \ b}=d\omega^{a,(0)}_{\ \ b}+\lambda^2d\omega^{a,(2)}_{\ \ b}+\omega^{a,(0)}_{\ \ c}\wedge\omega^{c,(0)}_{\ \ b}+\lambda^2\omega^{a,(0)}_{\ \ c}\wedge\omega^{c,(2)}_{\ \ b}+\lambda^2\omega^{a,(2)}_{\ \ c}\wedge\omega^{c,(0)}_{\ \ b}+\lambda^2g^{a,(1)}\wedge g_b^{(1)}\\
&4.\ \ \lambda G^{a,(1)}+\lambda^3G^{a,(3)}=\lambda dg^{a,(1)}+\lambda^3dg^{a,(3)}+\lambda\omega^{a,(0)}_{\ \ b}\wedge g^{b,(1)}+\lambda^3\omega^{a,(0)}_{\ \ b}\wedge g^{b,(3)}+\lambda^3\omega^{a,(2)}_{\ \ b}\wedge g^{b,(1)}\\
&5.\ \ \lambda T^{a,(1)}+\lambda^3T^{a,(3)}=\lambda de^{a,(1)}+\lambda^3de^{a,(3)}+\lambda\omega^{a,(0)}_{\ \ b}\wedge e^{b,(1)}+\lambda^3\omega^{a,(0)}_{\ \ b}\wedge e^{b,(3)}+\lambda^3\omega^{a,(2)}_{\ \ b}\wedge e^{b,(1)}+\lambda g^{a,(1)}\wedge\phi^{(0)}\\
&+\lambda^3g^{a,(1)}\wedge\phi^{(2)}+\lambda^3g^{a,(3)}\wedge\phi^{(0)}+\frac{i}{2}(-\lambda\bar{\psi}_1^{(1/2)}\gamma^a\psi_1^{(1/2)}+\lambda^3\bar{\psi}_2^{(3/2)}\gamma^a\psi_2^{(3/2)})\\
&6.\ \ \Omega^{(0)}+\lambda^2\Omega^{(2)}=d\phi^{(0)}+\lambda^2d\phi^{(2)}+\lambda^2g_b^{(1)}\wedge e^{b,(1)}+i\lambda^2\bar{\psi}_2^{(3/2)}\wedge\psi_1^{(1/2)}\\
&7.\ \ F_C^{(0)}+\lambda^2F_C^{(2)}=dC^{(0)}+\lambda^2dC^{(2)}+\lambda^2\bar{\psi}_2^{(3/2)}\gamma^5\psi_1^{(1/2)}.
\end{aligned}
\tag{7.36}
$$

Finalmente, igualando los términos con la misma potencia de λ obtenemos las nuevas álgebras relevantes.

Para los términos de orden más bajo el álgebra es

$$
\begin{cases}
\rho_1^{(1/2)} = d\psi_1^{(1/2)} + \frac{1}{4}\gamma^{ab}\omega_{ab}^{(0)} \wedge \psi_1^{(1/2)} \\
\rho_2^{(3/2)} = d\psi_2^{(3/2)} + \frac{1}{4}\gamma^{ab}\omega_{ab}^{(0)} \wedge \psi_2^{(3/2)} + \frac{1}{2}\gamma^a g_a^{(1)} \wedge \psi_1^{(1/2)} \\
R^{a,(0)}_{\ \ b} = d\omega^{a,(0)}_{\ \ b} + \omega^{a,(0)}_{\ \ c} \wedge \omega^{c,(0)}_{\ \ b} \\
G^{a,(1)} = dg^{a,(1)} + \omega^{a,(0)}_{\ \ b} \wedge g^{b,(1)} \\
T^{a,(1)} = de^{a,(1)} + \omega^{a,(0)}_{\ \ b} \wedge e^{b,(1)} + g^{a,(1)} \wedge \phi^{(0)} - \frac{i}{2}\bar{\psi}_1^{(1/2)}\gamma^a\psi_1^{(1/2)} \\
\Omega^{(0)} = d\phi^{(0)} \\
F_C^{(0)} = dC^{(0)}.
\end{cases} \tag{7.37}
$$

Para los términos de orden más alto el álgebra queda

$$
\begin{cases}
\rho_1^{(5/2)} = d\psi_1^{(5/2)} + \frac{1}{4}(\gamma^{ab}\omega_{ab}^{(0)} \wedge \psi_1^{(5/2)} + \gamma^{ab}\omega_{ab}^{(2)} \wedge \psi_1^{(1/2)}) + \frac{1}{2}\gamma^a g_a^{(1)} \wedge \psi_2^{(3/2)} \\
\rho_2^{(7/2)} = d\psi_2^{(7/2)} + \frac{1}{4}(\gamma^{ab}\omega_{ab}^{(0)} \wedge \psi_2^{(7/2)} + \gamma^{ab}\omega_{ab}^{(2)} \wedge \psi_2^{(3/2)}) + \frac{1}{2}(\gamma^a g_a^{(1)} \wedge \psi_1^{(5/2)} + \gamma^a g_a^{(3)} \wedge \psi_1^{(1/2)}) \\
R^{a,(2)}_{\ \ b} = d\omega^{a,(2)}_{\ \ b} + \omega^{a,(0)}_{\ \ c} \wedge \omega^{c,(2)}_{\ \ b} + \omega^{a,(2)}_{\ \ c} \wedge \omega^{c,(0)}_{\ \ b} + g^{a,(1)} \wedge g_b^{(1)} \\
G^{a,(3)} = dg^{a,(3)} + \omega^{a,(0)}_{\ \ b} \wedge g^{b,(3)} + \omega^{a,(2)}_{\ \ b} \wedge g^{b,(1)} \\
T^{a,(3)} = de^{a,(3)} + \omega^{a,(0)}_{\ \ b} \wedge e^{b,(3)} + \omega^{a,(2)}_{\ \ b} \wedge e^{b,(1)} + g^{a,(1)} \wedge \phi^{(2)} + g^{a,(3)} \wedge \phi^{(0)} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_2^{(3/2)}\gamma^a\psi_2^{(3/2)} \\
\Omega^{(2)} = d\phi^{(2)} + g_b^{(1)} \wedge e^{b,(1)} + i\bar{\psi}_2^{(3/2)} \wedge \psi_1^{(1/2)} \\
F_C^{(2)} = dC^{(2)} + \bar{\psi}_2^{(3/2)}\gamma^5\psi_1^{(1/2)}.
\end{cases} \tag{7.38}
$$

Capítulo 8

Conclusiones y perspectivas

Podemos comparar nuestro caso con el de $D = 10+2$ y el de $D = 2+2$, de manera que vamos a ver las dificultades que presenta construir un modelo de supergravedad en $D = 10+2$ con espinores de Majorana-Weyl (reales y quirales). Cualquier modelo de supergravedad realiza localmente el álgebra de la supersimetría que, como ya hemos visto, incluye en su formulación dual una ecuación estructural de Maurer-Cartan de la forma de (7.15). En el caso de 12 dimensiones tenemos que, $A = \bar{0}, 0, ..., 10$, siendo $\bar{0}$ y 0 los índices para las dos dimensiones temporales, y recordando que

$$\bar{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\gamma^{\bar{0}}\gamma^{0}. \tag{8.1}$$

Además, en este caso ψ es de tipo Majorana-Weyl, es decir, se puede tomar real y cumple la condición $\gamma_{*}\psi = \psi$, donde $\gamma_{*} = \gamma^{\bar{0}}\gamma^{0}\gamma^{1}\cdots\gamma^{10}$. En esas condiciones el bilineal en (8.1) se anula idénticamente,

$$\bar{\psi}\gamma^{A}\psi = \bar{\psi}\gamma^{A}\gamma_{*}\psi = -\bar{\psi}\gamma_{*}\gamma^{A}\psi = -\overline{\gamma_{*}\psi}\gamma^{A}\psi = -\bar{\psi}\gamma^{A}\psi, \tag{8.2}$$

donde se ha usado que $\gamma_{*}\gamma^{A} = -\gamma^{A}\gamma_{*}$.

Por supuesto, si considerásemos espinores de Majorana no quirales, esto es, $N = 2$, entonces el bilineal no se anula. El problema es que, como se ha mencionado anteriormente, el número de componentes reales del espinor no puede ser mayor que 32, porque de otro modo no se puede construir un modelo consistente de interacción con la gravedad, de modo que es imposible construir una supergravedad en ese caso.

En $D = 2+2$ existe una situación análoga a la que se da en $D = 10+2$: de hecho es sabido que las propiedades de los espinores se repiten módulo 8. La ventaja que tiene este caso es que sí se puede construir fácilmente una supergravedad con $N = 2$ porque los espinores son de 4 componentes reales. En nuestro caso, $D = 3+2$, tal y como hemos visto ocurre algo parecido, aunque la situación es algo diferente. Recordando el principio de la sección 7.3 y echando un vistazo a los resultados obtenidos para las álgebras a lo largo de ese capítulo, concluimos que efectivamente hace falta considerar espinores complejos para construir un modelo de supergravedad en $D = 3+2$.

Ha sido relativamente sencillo encontrar álgebras relevantes por medio del método de las expansiones propuesto realizando estas consideraciones, de modo que tenemos resultados consistentes para el caso $N = 2$.

Como hemos concluido, existe el modelo con $N = 2$, por lo que hemos escrito el álgebra para este y hemos considerado el límite no relativista $(3 + 2) \to (3 + 1) + 1$. Esto lo hacemos para pasar del caso de $N = 2$ al $N = 1$, para el cual tenemos que romper la simetría Lorentz, es decir, esta es la razón por la que consideramos que uno de los tiempos sea absoluto. Entonces, sería relativamente sencillo, a partir de nuestros resultados, construir una acción invariante gauge local con $N = 2$ en nuestro caso.

Dicho esto, este trabajo deja abierta la posibilidad de continuar con la exploración de este modelo. Sería de interés construir la acción y desarrollarla hasta λ^4, que como dijimos es hasta donde tiene relevancia. De aquí habría que estudiar las ecuaciones y la supersimetría, de modo que con uno de los tiempos absoluto, en el límite considerado, debería llegarse al resultado de torsión nula, es decir, $T^a = 0$ y $\Omega = 0$.

Bibliografía

[1] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, *Lie groups, Lie Algebras, Cohomology and some Applications in Physics*, Cambridge University Press, 1995.

[2] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, M. Picón, O. Varela, *Generating Lie and gauge free differential (super)algebras by expanding Maurer-Cartan forms and Chern-Simons supergravity*, Nucl. Phys. B662, 185, 2003. arXiv:hep-th/0212347

[3] I. Bars, *S-Theory*, Phys. Rev. D55 2373, 1997. arXiv:hep-th/9607112

[4] I. Bars, *Survey of two-time physics*, Class. Quantum Grav. 18, 3113, 2001. arXiv:hep-th/0008164

[5] E. Bergshoeff, J. Rosseel, *Three-Dimensional Extended Bargmann Supergravity*, Phys.Rev.Lett. 25, 116, 2016. arXiv:1604.08042 [hep-th]

[6] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics. Part I: Basics*, Revised Edition, North-Holland, 1982.

[7] S. Coleman, J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S-matrix*, Phys. Rev. 159, 1251, 1967.

[8] M. Gerstenhaber, *On the deformations of rings and algebras*, Ann. Math. 79, 59, 1964.

[9] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, John Wiley & Sons, 1974.

[10] D. Gútiez, *Supergravedad Galileana en* 2+1 *dimensiones*, Trabajo Fin de Grado, Universidad de Valladolid, 2017. http://uvadoc.uva.es/handle/10324/25606

[11] R. Haag, J. T. Lopuszański, M. F. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the S-matrix*, Nucl. Phys. B88, 257, 1975.

[12] M. Hamermesh, *Group Theory and its applications to physical problems*, Addison-Wesley, 1962.

[13] M. Hatsuda, M. Sakaguchi, *Wess-Zumino term for the AdS superstring and generalized Inönü-Wigner contraction*, Prog.Theor.Phys. 109, 853, 2003. arXiv:hep-th/0106114

[14] C. M. Hull, P. K. Townsend, *Unity of Superstring Dualities*, Nucl. Phys. B438, 109, 1995. arXiv:hep-th/9410167

[15] E. İnönü, E. P. Wigner, *On the contraction of groups and their representations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, 39, 510, 1953.

[16] M. A. del Olmo, *Introducción a la Teoría de Grupos en Física*, 2018.

[17] M. R. Picón, *Symmetry aspects of supergravity and M-theory*, Tesis Doctoral, Universitat de València, 2006.

[18] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond charges*, Phys. Rev. Lett. 75, 4724, 1995. arXiv:hep-th/9510017

[19] J. Polchinski, *String Theory. Vol. I. An Introduction to the Bosonic String and Vol. II. Superstring Theory and Beyond*, Cambridge University Press, 1998.

[20] M. Santander, *La ecuación de Dirac libre*, 2000. https://unavistacircular.wordpress.com/presentaciones varias/notas-de-clases/mecanica-cuantica-relativista/

[21] M. F. Sohnius, *Itroducing Supersymmetry*, Physics Reports 128, 39, 1985.

[22] D. Tong, *String Theory*, 2012. arXiv:0908.0333 [hep-th]

[23] P. K. Townsend, *Four lectures on M-Theory*, 1997. arXiv:hep-th/9612121

[24] W. K. Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific, 1985.

[25] C. Vafa, *Evidence for F-Theory*, Nucl. Phys. B469 403, 1996. arXiv:hep-th/9602022

[26] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd edition, Princeton University Press, 1992.