UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales,
Sociales, y de la Matemática

DOCERE CALCULUS, ¿QUO VENIS? ¿QUO VADIS?

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en
Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.
Especialidad de Matemáticas

Alumna: Mª Astrid Cuida Gómez

Tutor: Edgar Martínez Moro

Valladolid, junio de 2018

RESUMEN

Actualmente, el concepto de límite en el bachillerato abarca más de las dos terceras partes del tiempo de clase y de los alumnos en la enseñanza del cálculo. En este trabajo nos cuestionamos acerca del verdadero propósito de introducir los límites en este nivel y, si el “producto final” en la comprensión de la derivada podría lograrse de una mejor manera, sin introducir los límites o al menos, haciéndolo más tarde. Para dar respuesta a tales interrogantes, indagamos acerca de los procedimientos algebraicos y geométricos utilizados en el pasado para calcular la recta tangente y las asíntotas en una curva racional adaptándolos al lenguaje geométrico y algebraico, así como al uso de CAS en la enseñanza. Como conclusión podemos decir que los límites ocultaron la comprensión de las derivadas, así como, el sistema de coordenadas cartesianas ocultaba la comprensión de las cónicas. También se hace una aproximación a algunas funciones trascendentales a través del cálculo visual.

Palabras clave: Didáctica del cálculo; Educación Secundaria; Historia de la Matemática; Sistemas de Cálculo Simbólico; Cálculo visual.

ABSTRACT

Nowadays the concept of limit in certain advanced secondary school courses covers more than two thirds of the classroom and student time when learning calculus. In this work we inquire ourselves what is the real purpose for introducing limits in this type of courses and, if the "final product" of understanding the derivative could be accomplished better without introducing limits or at least doing it later. In order to accomplished this we explore the geometric and algebraic procedures used in the past for computing the tangent line and asymptotes to a (rational) curve and adapt them to the geometric and algebraic language as well as to the use of CAS in teaching. As a conclusion we may say that limits buried the understanding of derivatives and asymptotes as it was also that Cartesian coordinate system buried the understanding of conics. Also an approach to some transcendental function is done through visual calculus.

Keywords: Calculus Education; Upper Secondary Education; History of Mathematics; Symbolic Computer System; Visual Calculus.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Desde mis años infantiles he amado el estudio. Desde que me persuadieron de que estudiando se podrían adquirir unos conocimientos claros y seguros de lo que es útil a la vida, el estudio fue mi ocupación favorita.

René Descartes.

Rachel Crowell presenta en un artículo publicado el 5 de junio del presente año en la página web de la Sociedad Matemática Americana (AMS), a modo de réplica de las ideas plasmadas en (Sparks, 2018), evidencias de los enormes problemas subyacentes a la enseñanza-aprendizaje del cálculo de acuerdo con un informe[1] del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) y de la Asociación Americana de Matemáticas (MAA). En particular, se están empezando a plantear cuestiones relacionadas con la utilidad de los cursos actuales de cálculo en el bachillerato.

El uso omnipresente de datos en todo, desde la física y las finanzas hasta la política y la educación, está ayudando a crear un impulso para un nuevo camino en las matemáticas de la escuela secundaria. Muchos expertos aún están debatiendo acerca de la mejor manera de integrar un nuevo enfoque en un currículo de la escuela secundaria que se supone completo. Según David Bressoud (profesor de matemáticas en Macalester College y ex presidente de la Asociación Matemática de América, que ha examinado la evolución de estudios de cálculo) el cálculo se consideró como un curso de educación superior, principalmente para aquellos interesados en las matemáticas, la física u otras ciencias puras, y luego eso comenzó a cambiar cuando los reformadores escolares se aferraron al cálculo como un ejemplo temprano de un curso riguroso, preparatorio para la universidad. Los expertos están analizando posibles rutas a seguir para superar las enormes deficiencias en el aprendizaje del cálculo en estos niveles.

Desde cualquiera de los dos puntos de vista que se exponen en los artículos de dichas autoras, resulta ser una tarea compleja sacar conclusiones sobre el papel que desempeña el cálculo del bachillerato en la preparación de los estudiantes para los cursos universitarios, tanto dentro como fuera de las matemáticas. Surgen incluso interrogantes relacionados con los estudiantes que luchan para comprender el cálculo: ¿está su dificultad de comprensión estrechamente vinculada con el momento de su aprendizaje o la forma en que se presentan los conceptos? Si el momento es el problema

[1] The Role of Calculus in the Transition from High School to College Mathematics. Report of the workshop held at the MAA Carriage House Washington, DC, March 17–19, 2016.

retrasar la introducción al cálculo podría ser la solución, pero si el enfoque es el problema, cambiar el tiempo no lo resuelve.

Esta última acotación es el eje en torno al cual se desarrolla el presente trabajo, el enfoque de la enseñanza-aprendizaje del cálculo en el bachillerato.

En el avance del trabajo se muestran evidencias de las dificultades inherentes a la comprensión de conceptos propios del cálculo y, en particular de la noción de límite (ya que no es un problema exclusivo de la educación americana). La literatura ya ha puesto de relieve que, también futuros profesores de Educación Secundaria muestran carencias en la comprensión de conceptos relacionados con dicho concepto.

Desafortunadamente, el cálculo puede resumir un poco muchos de los aspectos que están fallando en la Educación Matemática. En su gran mayoría, tanto los libros de texto como lo que se plasma a través de las evaluaciones de acceso a la universidad dan cuenta de lecciones que se imparten con ejemplos artificiales, pruebas arcanas y memorización que llegan a desviar el camino de la intuición y del entusiasmo de los discentes.

La dificultad en el estudio del cálculo parece radicar en su misma naturaleza. El cálculo nace en el interior de una época conocida como modernidad. El trabajo de Descartes es, para muchos, el hito que marca el inicio de esta nueva era en la que floreció el pensamiento que, basado en la razón, profundizó y enriqueció la filosofía, la ciencia y las matemáticas. Con una profunda confianza en la razón humana, Descartes se propuso hallar un método que le permitiera construir un conocimiento basado en la razón y la ciencia en reemplazo del que había dominado la época anterior basado en la fe ciega en los dogmas de la Iglesia. La filosofía sigue un orden y en este es importante establecer la existencia, o no, de los entes sobre los que pretende reflexionar. Descartes acude a la duda sobre nuestra percepción ya que los sentidos son falibles y pueden comunicarnos falsas sensaciones. Además lo que consideramos la realidad puede no ser más que un sueño o el fruto de una alucinación. Sin embargo, esta misma duda que parece haberlo arrinconado proporcionó a Descartes una certeza irrefutable: si dudaba era porque existía. Certeza que se resume en su famoso cogito, ergo sum. Filósofos posteriores, de la misma línea de Descartes, como Hume, hacían caer en cuenta de que hechos como el que siempre hemos presenciado que una piedra al ser dejada en libertad cae hacia el centro de la tierra, no es garantía de que la próxima vez ocurrirá lo mismo, ya que no conocemos la razón por la cual la piedra ha tenido este comportamiento y por lo tanto podría modificarlo alguna vez.

En este ambiente hace su aparición el cálculo infinitesimal cuya base era un concepto primitivo de límite (que posteriormente fue establecido de manera rigurosa) que dejaba muchos flancos vulnerables a los ataques de espíritus alertas que no estaban dispuestos a pasar por alto inconsistencias conceptuales de ningún tipo. Son famosas las objeciones que hizo el obispo anglicano Berkeley a las debilidades de estos primeros procesos de cálculo. En palabras de Carl Boyer: "La descripción que hace Berkeley del método de las fluxiones es totalmente correcta y sus críticas están bien fundamentadas. En ellas hacía notar que al calcular o bien las fluxiones o las razones de las diferenciales, los matemáticos suponen en primer lugar que se les da ciertos incrementos no nulos a las variables, para eliminarlos más tarde suponiéndolos iguales a cero. Explicado el cálculo de esta manera le parecía a Berkeley simplemente un juego de compensación de errores, y así «en virtud de un doble error se llega, aunque no a la ciencia, si a la verdad». Berkeley condena incluso la explicación de Newton de las fluxiones en términos de las razones primeras y últimas negando la posibilidad de una velocidad literalmente «instantánea» en la que los incrementos de la distancia y el tiempo se han desvanecido para dejar en su lugar el cociente sin sentido 0/0." (Boyer, 1959)

Como ya mencionamos, posteriormente el concepto de límite fue establecido de manera rigurosa. Con esto se dio tranquilidad a los matemáticos profesionales, pero las dificultades didácticas continuaron. Una razón para ello puede ser el hecho de que este concepto implica que cierta distancia "puede hacerse tan pequeña como se quiera", lo que da la idea de un comportamiento dinámico, no estático. Sabemos que $2 + 2 = 4$. Eso es una certeza. Pero que la pendiente de una recta tangente se obtenga como un límite cuyo valor es 4 puede dar a entender que dicha pendiente se "acerca a 4 tanto como se quiera", pero no es claro que ese valor sea, exactamente, 4.

En matemáticas existe el concepto de "economía de pensamiento" (una especie de navaja de Ockham) según el cual se debe privilegiar el concepto que más hechos explica. Por otra parte, si a una persona sólo se le presenta una herramienta trata de utilizarla siempre (si sólo tengo un martillo todos los problemas son clavos). En este orden de ideas, el concepto de límite sirvió para resolver una gran cantidad de problemas nuevos, así como otros que ya habían sido resueltos con métodos que no lo empleaban, y en tal virtud, su estudio se impuso sobre el de otras ideas que habían funcionado pero que no tuvieron la generalidad de este. Este hecho ha tenido una consecuencia no muy positiva en el estudio del cálculo, ya que si por un lado los límites constituyen una base sólida para este estudio, también posee, para muchos estudiantes, un alto grado de "oscuridad". Este trabajo rescata algunos de estos métodos con los que se obtuvieron resultados propios del cálculo pero con herramientas puramente algebraicas. ¿Cuáles son los beneficios de este enfoque? En principio entrar en contacto con ideas diferentes a las que son propias del cálculo con las que se resuelven problemas inherentes a este, y que poseen, sin embargo, una claridad meridiana. Además, el obtener por métodos diferentes, unos que emplean límites y otros que no lo hacen, los mismos resultados, hace que quienes no han sido convencidos por los argumentos que sustentan el cálculo, aumenten de esta manera su confianza en los procedimientos propios de este.

Por otra parte también se incluyen procedimientos que, si bien usan límites, lo hacen con un enfoque diferente al que usualmente se suele trabajar. O se presentan resultados, como son las derivadas de las funciones seno y coseno desde un punto de vista que explota el hecho de que la derivada representa la velocidad instantánea.

El objetivo del estudio de las matemáticas no es el adquirir destrezas en la aplicación de unos procedimientos algorítmicos de los que ya se conoce su efectividad, sino desarrollar habilidades que nos permitan modelar y resolver problemas con los cuales nunca antes nos hayamos enfrentado. Por lo tanto, además del estudio clásico del cálculo, que nos introduce en un mundo conceptual rico y versátil, el contacto con trabajos de esta naturaleza nos pone en contacto con ideas y métodos de alto valor como herramientas de ingenio y, además, con una belleza propia.

En un típico curso introductorio de cálculo (en España, este curso se imparte en el penúltimo curso de la escuela secundaria justo antes de acceder a la universidad), la cantidad de tiempo dedicado al aprendizaje de límites es agotador para los estudiantes. Se les enseñan los "trucos" del cálculo de límites (desde límites de sucesiones hasta límites de funciones) y cuando uno le pregunta al profesor la respuesta habitual para hacerlo es similar a "... somos matemáticos y necesitamos una definición [definición de derivada como un límite] para desarrollar nuestro material ... "Como es el caso en todo el mundo, la mayoría de estos estudiantes eligen este curso para cumplir con algunos requisitos universitarios para estudios técnicos y, por lo tanto, se sienten realmente frustrados incluso enojados cuando, al final del curso, la mayoría de las derivadas que utilizan se computan usando una tabla bastante pequeña que deben aprender, es decir, sin límites. Nótese también que, entre aquellos estudiantes que finalmente ingresan a los estudios enfocados en STEM[2] en la universidad, el concepto de línea tangente no se entiende con éxito, tanto a nivel matemático como gráfico. Vincent, LaRue, Sealey, & Engelke (2015)

Los documentos de (Grabiner, 1983), (McAndrew, 2010), (Suzuki, 2005) y (Sangwin, 2011) nos dieron una visión histórica del desarrollo del concepto de "recta tangente" y también se puede construir un concepto de derivada sin límite al menos para funciones algebraicas. Las ideas de este documento tienen una gran influencia en el subtítulo del artículo de Grabiner: "Primero se utilizó la derivada, luego se descubrió, se exploró y se desarrolló, y solo entonces, se definió". Se debe tener en cuenta que la mayoría de los

[2] Acrónimo de los términos en inglés Science, Technology, Engineering and Mathematics.

objetos utilizados en matemáticas siguen la misma descripción y muchas veces cuando llegamos a una definición formal perdemos algunas “perlas” bonitas que fueron construidas en el pasado, como ejemplo mencionamos en abstracto que también en el sistema de coordenadas cartesianas está enterrada la comprensión de las cónicas, ¿cómo pueden saber nuestros alumnos que una parábola es algo más que un polinomio de grado dos?

Este "enfoque de retrospectiva" no es nuevo en la enseñanza de las matemáticas, Klein propuso un ordenamiento genético para la enseñanza, véase, por ejemplo, Schubring (2011), a diferencia de la enseñanza formal sistemática tradicional. Se debe tener en cuenta que su concepción de la genética está más cerca de lo que uno puede reclamar como evolución natural del campo conceptual. Desafortunadamente muchas veces este tipo de procedimiento ha sido descrito como falta de rigor sin tener en cuenta que en muchas de estas situaciones los objetos utilizados y las soluciones a los problemas planteados eran completamente correctos para aquellos objetos que querían estudiar. Cuando el cálculo se presenta por primera vez a los estudiantes, la mayoría de los cursos fomenta una comprensión clara del lenguaje *épsilon-delta* y, por lo tanto, de límites que no es la forma natural en que el concepto ha evolucionado a lo largo de la historia.

La educación matemática también ha sufrido su propia inercia. De acuerdo con las investigaciones de (Nardi & Steward, 2003), (Stacey, 2010), y (Ball & McDiarmid, 1990), el enfoque procedimental en el que se enseñan las matemáticas en el bachillerato está afectando los niveles de conocimiento y las prácticas de enseñanza de los futuros profesores de educación secundaria. Ante tal perspectiva, O’mehara (2017), hace evidente la necesidad de que estos futuros profesores adopten un nuevo conjunto de estrategias de enseñanza que quizás no hayan visto antes. Esta propuesta, va en la misma línea que sugiere el uso de definiciones de comprensión matemática más allá de la “maestría en la manipulación de procedimientos simbólicos”[3] (Schoenfeld, 1988). Quizás, una de estas posibles estrategias a las que hace referencia O’mehara es implementar este “enfoque de retrospectiva” que permita a los futuros profesores construir una base conceptual para la comprensión y, que es el objeto de esta investigación.

En particular, la importancia adscrita a la visualización y su influencia en el pensamiento matemático de los estudiantes ha conectado con nuestro interés de hacer las matemáticas avanzadas[4] más accesibles a través de la intuición. Esta investigación

---

[3] Traducción propia "mastering symbol manipulation procedures".

[4] Matemáticas propias del nivel universitario, o que requieren procesos de pensamiento más complejos (Tall, 1991).

tiene como intención potenciar la comprensión de conceptos matemáticos propios de la línea del pensamiento avanzado con dos aspectos fundamentales que centran nuestro foco de atención: la visualización y una propuesta de mejora de la enseñanza.

Nuestro trabajo es fundamentalmente una declaración de intenciones que pretende aportar a la mejora de la enseñanza-aprendizaje del cálculo. La noción de doble contacto requiere que el discente tenga en su haber cognitivo un elemento básico de la educación secundaria: si un polinomio f tiene un cero en a entonces $f(x) = q(x)(x - a)$ en donde q también es otro polinomio. En este sentido, partimos de aprendizajes básicos que luego consideramos generarán otros nuevos, pero de manera significativa.

EL CONCEPTO DE LÍMITE EN EL BACHILLERATO

En este capítulo se presentan los resultados de algunas investigaciones que justifican la necesidad de plantear nuevas propuestas curriculares en la enseñanza del cálculo. Se enuncian los objetivos tanto generales como específicos del trabajo, así como, aspectos a tener en cuenta en el contexto que nos ocupa.

Justificación y objetivos del trabajo

La literatura especializada (Artigue, 1995, 2001; Bajracharya & Thompson, 2014; Barjracharya, 2012; Jones, 2013; Orton, 1983; Rasslan & Tall, 2002; Sealey, 2006; Tall, 1992; Thomas & Hong, 1996) y nuestra experiencia evidencian que la mayoría de los estudiantes no poseen una comprensión conceptual de la *integral definida*, de nociones que le subyacen, ni de cómo interactúan o, en el mejor de los casos, su comprensión se reduce al desarrollo de habilidades procedimentales, en palabras de Skemp, poseen una comprensión *instrumental* y no *relacional*[5].

El bajo rendimiento de los estudiantes en los cursos de cálculo[6] también ha sido objeto de estudio. Por ejemplo, (Turégano, 1998) localizó las causas subyacentes de tales resultados en los terrenos epistemológico, didáctico y psicológico. En su trabajo Turégano (1993, 1998, 2007), después de caracterizar la complejidad del concepto de *integral definida* estableció una secuencia curricular del cálculo y un enfoque de la integración, desde su perspectiva, coherentes con la génesis histórica de ambos. Según la autora, su propuesta pasa por comenzar la teoría de la integración independiente de la diferenciación y como primera introducción al concepto de *límite*.

Los estudios sobre obstáculos y dificultades muestran que, en síntesis, estas causas pueden atribuirse a los conflictos cognitivos, obstáculos epistemológicos o el uso de un lenguaje matemático que requiere minimizar la ambigüedad del lenguaje natural. Respecto de las dificultades, Gonzalez-Martín & Camacho-Machín (2005) consideran que existen cuatro elementos básicos como generadores de éstas en el currículo de matemáticas: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemáticas, la necesidad de contenidos

---

[5] Véase por ejemplo (Skemp, 1978) para las nociones de comprensión instrumental y relacional.

[6] Una de las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades en aprender un objeto en cálculo es la deficiencia en el entendimiento conceptual. De acuerdo con un estudio de Aspinwall & Miller (1997), los estudiantes efectúan los cálculos de forma mecánica, desarrollando escasamente el conocimiento conceptual.

anteriores, el nivel de abstracción y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares. Estas dificultades se relacionan y forman redes en las que se refuerzan, concretándose en la práctica en forma de obstáculos y manifestándose en forma de errores.

Son justamente los tres últimos elementos señalados por Gonzalez-Martín & Camacho-Machín los que han motivado el desarrollo de este trabajo. Los avances que ha tenido la investigación en educación matemática muestran la urgencia de realizar cambios en la enseñanza de las matemáticas en general y del cálculo, en particular.

Según Skemp (1978) entender algo significa asimilarlo en un esquema apropiado. Ya sea un concepto, un grupo de conceptos, o un símbolo, se deben asimilar en un esquema adecuado. Lo que significa formar conexiones entre ideas, hechos o procedimientos, que son en general aceptados. Un concepto se construye a partir de datos recogidos, y luego se relaciona con otros conceptos para crear otro concepto más complejo. La obra de Skemp distingue entre el conocimiento y la comprensión, y contempla dos categorías de comprensión, la relacional y la instrumental. La primera de ellas se refiere a la relevancia que tiene tanto el saber "qué se hace" como el "porqué se hace". La comprensión instrumental va más encaminada a las "reglas sin razones". Mediante la comprensión instrumental se accede de forma rápida a las respuestas de manera que tiende a promover una recompensa inmediata. Por su parte, la comprensión relacional proporciona una base para realizar una transferencia de aprendizajes más eficiente, de tal forma que se facilite el crecimiento de la comprensión.

Es precisamente esa comprensión relacional la que se pretende desarrollar con la propuesta curricular que se propone en el presente trabajo. Una comprensión que va ligada a las conexiones históricas de los conceptos propios del cálculo, en particular los que se tratan en Bachillerato. Nuestra propuesta está encaminada a trabajar a partir de un esquema relacional, coherente con el conocimiento de contenidos previos, con el nivel de abstracción y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, el presente trabajo, fin de máster, pretende dar una alternativa curricular en la enseñanza del cálculo en el bachillerato, que elimine la enseñanza mecánica o, en palabras de Skemp, que no se quede en la mera comprensión instrumental. Una enseñanza que deje de estar embebida por la ejecución de procedimientos o "reglas sin razón" (de nuevo en palabras de Skemp) que en la mayoría de los casos son asumidas y, desafortunadamente, valuadas de forma holística como el propio conocimiento.

Objetivos generales

1. Estudiar algunos métodos para la construcción de elementos propios del cálculo, previos a la formalización del concepto de límite.

2. Presentar una secuencia curricular que trascienda a la realidad del aula en sus alumnos de bachillerato, y que permita a los profesores de educación secundaria tener la oportunidad de:

   – "Hacer matemáticas" (Holm & Kajander, 2012; Toumasis, 1992).
   – Pensar y razonar matemáticamente (Schoenfeld, 1988, 2000, 2009).
   – Conocer un nuevo marco de referencia curricular (Hopper, 1999; Kennedy, 1999; Toumasis, 1992).

Objetivos específicos

1. Considerar las pautas del marco legislativo y curricular.
2. Presentar notas históricas del desarrollo de algunos conceptos propios del cálculo.
3. Estudiar en la literatura la construcción de los conceptos que nos permitan cubrir temas propios del bloque de análisis, sin que sea necesario introducir el concepto de límite.
4. Estudiar la integración de todos los contenidos en una secuencia que incluya el uso de las TICs en el aula.

Algunos aspectos de la enseñanza del cálculo en España

La Ley General de Educación del año 1970 (Jefatura del Estado, 2013) es un hito normativo para la historia del sistema educativo español. Esta ley, es la primera que en el siglo XX regula y estructura todo el sistema educativo español. Desde entonces, España ha sufrido muchos cambios en educación, como dan cuenta de ello las siete leyes educativas que se han ido aprobando hasta el momento. Pese a los diversos cambios que se han suscitado, en lo referente a los contenidos relacionados con el cálculo, no se ha evidenciado ninguno significativo.

En el año 2013, el Gobierno promulga la *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa* (Jefatura del Estado, 2013) implantada desde el curso 2015-2016. La primera concreción del currículo de Bachillerato para esta nueva legislación se encuentra en el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (Ministerio de Educación, 2015) publicado a principios de enero de 2015. El Bachillerato constituye una etapa de la Educación Secundaria de carácter no obligatoria y se estructura en dos cursos para que, salvo excepciones, los alumnos realicen estos estudios entre los 16 y los 18 años. Como novedad respecto de las concreciones curriculares precedentes, se incorporó un bloque transversal en todas las asignaturas de Matemáticas denominado *Procesos, métodos y actitudes hacia las matemáticas* (Tabla 1 y Tabla 2) que se articula sobre procesos propios del quehacer matemático: la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos.

Las modalidades de enseñanza de las Matemáticas para esta etapa son dos: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas (Ciencias), o bien Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas (CCSS). Los programas son muy precisos en términos de contenido, pero los profesores deben determinar la metodología. Al respecto, los documentos oficiales señalan: "En el actual proceso de inclusión de las competencias como elemento esencial del currículo, es preciso señalar que cualquiera de las metodologías seleccionadas por los docentes para favorecer el desarrollo competencial de los alumnos y alumnas debe ajustarse al nivel competencial inicial de estos". Con lo cual, las metodologías deben procurar la adquisición de competencias pero no da pautas ni líneas de actuación al profesorado, para que lleven a cabo dicha tarea. Desafortunadamente, el carácter propedéutico del nivel escolar que consideramos, hace que los profesores tengan poco margen para desarrollar su creatividad y diseñar itinerarios didácticos para la enseñanza del cálculo, y, a menudo parece que el debate de la educación matemática sobre los problemas de aprendizaje de este tema no ha influido en la práctica del aula.

Tabla 1. Bloques de contenido de Ciencias

Bloques de contenidos	
Matemáticas I Ciencias	**Matemáticas II Ciencias**
Procesos, métodos y actitudes hacia las matemáticas	
Aritmética y Álgebra	Álgebra
Trigonometría y números complejos	Geometría
Geometría Analítica Plana	Análisis
Análisis	Probabilidad
Estadística	

Tabla 2. Bloques de contenido de CCSS

Bloques de contenidos	
Matemáticas CCSS I	**Matemáticas CCSS II**
Procesos, métodos y actitudes hacia las matemáticas	
Aritmética y Álgebra	Álgebra
Análisis	Análisis
Estadística y probabilidad	Estadística y probabilidad

La cantidad de tiempo dedicado al aprendizaje de los conceptos relacionados con los límites es de más de una tercera parte del total del curso. En el caso de las Matemáticas II de Ciencias, más del 70% del curso.

Usualmente se aborda el concepto de límite a partir de una definición ingenua (aproximarnos "tanto como queramos") sin introducir el concepto. Posteriormente se consideran ejemplos concretos y se elabora una tabla de valores en la cual se muestra la "aproximación" al límite de la función cuando se varían adecuadamente los valores del dominio. El paso a seguir suele ser estudiar el concepto de límite en el infinito con un soporte gráfico. Luego, se presenta la definición métrica, y, en el mejor de los casos, se hace alguna explicación que más bien consiste en intentar "traducir" del lenguaje simbólico al lenguaje cotidiano. Tan pronto se ha presentado la definición formal de límite, inmediatamente se da el salto al cálculo de límites de manera puramente algebraica.

En un estudio exhaustivo relacionado con la evolución histórica de la demostración en torno al concepto de límite en los libros de texto (Conejo, 2015) evidencia cómo en algunas editoriales se ha aumentado el número de resultados en torno a este concepto y, sin embargo, las justificaciones no. Señala la autora, igualmente editoriales en las cuales ha aumentado el número de resultados no justificados y, en muchos casos, en los que se justifican, pero no se observa continuidad.

Según (Zamora, 2014), en su estudio sobre el currículo, en el proceso de evaluación de las competencias matemáticas implícitas en los enunciados propuestos en las distintas Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios (PAEU) desde 1995 a 2009, los contenidos del examen de matemáticas han bajado en extensión y la dificultad de las pruebas está en una línea regresiva. No aumenta el nivel de exigencia de los centros educativos, sino que, en cierto modo, se busca el éxito en las pruebas independientemente de la formación. Las pruebas que se presentan en los exámenes de la PAEU se basan en conocimientos procedimentales, se construyen de forma artesanal por un grupo de "expertos" y, en teoría, tienen en cuenta los resultados de años anteriores. Para Zamora (2014), "mayoritariamente, en las pruebas que se han propuesto se concede total importancia a los problemas de solución única e inmediata, enfatizan en la mecanización de algoritmos y procedimientos y dan escasa importancia al pensamiento y al razonamiento matemático". Específicamente en lo que se refiere al concepto de límite en las pruebas de los 15 años estudiados aparecen 25 enunciados. 21 de estos enunciados están asociados a la utilización de la regla de L'Hôpital. Los cuatro restantes, son ejercicios de reproducción del conocimiento estudiado, reconocimiento de equivalentes, ejecución de problemas rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, manejo de expresiones y fórmulas establecidas y realización de cálculos.

En cuanto al análisis de los enunciados de los problemas que se plantean, la autora señala evidencias que muestran por una parte, que tanto los enunciados como las cuestiones propuestas suscitan el planteamiento de situaciones de aprendizaje orientados a técnicas y operaciones, centradas en la ejecución de tareas que, en su mayoría plantean aspectos matemáticos, escasamente en contextos reales, mediante enfoques rutinarios que no favorecen a la formación de las competencias matemáticas avanzadas. Se incide en ejecutar procedimientos y técnicas de cálculo y pocas veces se da la oportunidad para que los alumnos deduzcan o comprueben. En cuanto a las preguntas teóricas "aparecen fugazmente". Por otra parte, observa la escasa exigencia de un razonamiento lógico-formal, de argumentación o demostración. A pesar de que en los Decretos 70/2002, del 23de mayo (BOCYL 29 de mayo 2002) y 42/2008, de 5 de junio (BOCYL 11 de junio 2008), por los que ese establece el Currículo de Bachillerato de Castilla y León (CBCyL) manifiestan como objetivos a alcanzar: utilizar estrategias representativas de la investigación científica y los procedimientos propios de las matemáticas, como son plantear y resolver problemas, formular y contrastar hipótesis, justificar procedimientos utilizando un vocabulario específico de notaciones y términos matemáticos que les permita comunicarse con eficacia y precisión, expresándose correctamente de forma oral, escrita y/o gráfica, en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, con argumentaciones razonadas y demostraciones rigurosas. Es decir, estos objetivos no se tienen en cuenta en el diseño de las propuestas de problemas y ejercicios de las PAEU.

Aunque las evidencias se han descrito con respecto a las PAEU, en el nuevo formato de pruebas de acceso a la universidad, denominada prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU) se ha comprobado que en cuanto a las matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas el formato no ha cambiado en ninguno de los aspectos que se han mencionado.

Desde distintos aspectos hemos señalado el fomento de un enfoque de la enseñanza centrado en las habilidades procedimentales en lugar de las habilidades conceptuales en el aula. Por una parte, la camisa de fuerza que supone el currículo establecido. En segundo lugar, la influencia de los libros de texto que incrementan el uso de "reglas sin razón". Por último, el carácter propedéutico del Bachillerato, que está convirtiendo el examen de acceso a la universidad en un mero trámite que consiste en poner una puntuación para distribuir a los alumnos en los estudios universitarios.

El presente trabajo es un intento por encauzar el enfoque que se ha venido instaurando en la enseñanza del cálculo. Plantear una propuesta que permita estudiar temas propios del bloque de análisis (asíntotas, derivadas, recta tangente) del currículo de Bachillerato pudiendo así dar un enfoque constructivista y globalizador a la enseñanza de las Matemáticas en esta etapa. Dado el carácter teórico del trabajo y teniendo en cuenta que es una primera aproximación queda pendiente su contraste en el aula con posibles grupos de control.

Marcos teórico y metodológico

El objetivo de este capítulo es mostrar los aspectos y resultados de investigaciones relevantes para este estudio. Se han revisado las aportaciones en torno a las dificultades y obstáculos que tienen los estudiantes para comprender en general conceptos relacionados con el cálculo y en particular, con el concepto de límite. Por otra parte, se señalan algunas investigaciones que sugieren aproximaciones a la enseñanza de conceptos propios del cálculo con enfoques distintos al tradicional. Se establece la metodología, la justificación del trabajo, los objetivos de investigación, y por último, una breve aproximación a la visualización en Educación Matemática y al uso de Sistemas de Cálculo Simbólico (SCS)[7] en dicho contexto.

La enseñanza del cálculo

En un estudio temprano Orton (1983) evidenció dificultades que tienen algunos estudiantes con el aprendizaje del cálculo. En su trabajo utilizó el sistema de clasificación de errores[8] de (Donaldson, 1963) con estudiantes británicos, 60 de bachillerato y 50 universitarios, para determinar el grado de comprensión, los errores comunes y las dificultades relacionados con procesos infinitos (*sucesiones, límites, sumas y aproximaciones)* que ellos tenían. Por su parte, Artigue (1995) señala algunos resultados de diferentes investigadores (Cornu, 1991; Schneider, 1991; Sierpińska, 1985) que evidencian algunas dificultades en el aprendizaje de conceptos propios del cálculo y las clasifica en tres tipos: las que subyacen a complejidad de los objetos básicos del cálculo, las que tienen que ver con la conceptualización y formalización de la noción de límite y las vinculadas a la ruptura álgebra/cálculo.

En la literatura se ha constatado ampliamente la deficiencia del conocimiento matemático general, que tienen los estudiantes al iniciar sus estudios universitarios (Crowther, Thompson, & Cullingford, 1997; Gill, O'Donoghue, Faulkner, & Hannigan, 2010; Hourigan & O'Donoghue, 2007; O'Meara, Fitzmaurice, & Johnson, 2017) y del cálculo, en particular (Artigue, 1995, 2001; Bajracharya & Thompson, 2014; Barjracharya, 2012; Jones, 2013; Orton, 1983; Rasslan & Tall, 2002; Sealey, 2006; Tall, 1992; Thomas & Hong, 1996). En una investigación temprana Schwarzenberger y Tall (1978) señalaron que un gran número de estudiantes destacados en matemáticas que seguían estudios en la universidad asumían que si $s_n \longrightarrow s$, entonces s_n nunca sería igual a s. Aquí la imagen conceptual, que incluye el hecho de que $s_n \neq s$, no forma parte de la definición conceptual, y ella sobrevive a ésta, pese a la instrucción prolongada de las

[7] Acrónimo correspondiente a Symbolic Computer System en inglés.

[8] Estructurales, operativos y arbitrarios.

matemáticas formales. En un seminario impartido por Tall y dirigido a futuros profesores de matemáticas, cuatro estudiantes interesados insistían en que s_n nunca es igual a s.

Según Orton (1983), los estudiantes no dimensionan el alcance que subyace a los procesos de paso al límite en matemáticas. Orton reflexiona además acerca de las reacciones que tienen los profesores frente a las dificultades relacionadas con la comprensión de la integral como límite de una suma, y distingue entre aquellos que asumen un currículo que omita tópicos que exijan el uso de procesos de paso al límite, los que introducen la integral como una primitiva y, por último, los que tratan de mejorar la comprensión del concepto de límite y sus fundamentos algebraicos con la esperanza de que los estudiantes sean capaces de enfrentar los retos que tendrán en su encuentro con el cálculo infinitesimal. Asimismo, Tall (1980c y 2001) encuentra que las ideas de *límites* e *infinito,* suelen considerarse conjuntamente, y a la vez referirse a paradigmas distintos y opuestos.

De acuerdo con Cornu (1981 y 1983), los estudiantes tienen una idea de la palabra "límite" que proviene de la vida cotidiana; en el lenguaje habitual es evocado con distintos significados y, en la mayoría de ocasiones con significados que difieren del matemático. El estudiante, que trae asumido el concepto de límite a través de *modelos espontáneos* entra en conflicto cuando le es enseñado el *modelo matemático*, que será en adelante el protagonista de muchos de los conceptos a desarrollar en el curso de análisis. Estos dos modelos cohabitarán en las ideas del alumno, derivaran mezclas que darán lugar a adaptaciones denominadas *modelos propios.* De hecho, hay estudiantes que tiene distintas ideas sobre un mismo concepto, que pueden resultar (y con frecuencia) matemáticamente incorrectas. Para Cornu, la mayor parte de los errores que cometen los estudiantes cuando se enfrentan a un problema son efectos lógicos derivados de las ideas inherentes a sus modelos propios.

En relación al término "límite" y a la expresión "tender a" Cornu señala:

- Respecto a la expresión "tender a", los alumnos tienen las siguientes concepciones: aproximarse, aproximarse sin llegar, aproximarse hasta que alcanza, semejanza (sin variación como en la expresión "este azul tiende a violeta").
- Respecto al límite aparecen: límite inmóvil alcanzable, punto al que uno se acerca sin alcanzarlo, punto al que uno se acerca y alcanza, máximo o mínimo, límite inferior o superior, intervalo, lo que viene "inmediatamente después" de lo que se puede alcanzar, restricción, fin.

Fernández (2015) en su estudio con alumnos de Bachillerato, realiza un análisis conceptual de los términos asociados al concepto de límite finito de una función en un punto, los significados de los estudiantes, las definiciones personales, la estructura conceptual y los razonamientos que utilizaban a partir de sus definiciones. Otra vez se corroboraron las enormes dificultades asociadas a este concepto y se confirman los significados ya señalados por Cornu.

En su trabajo Williams (citado en Blázquez, 1999) de acuerdo con los modelos recopilados del trabajo de Cornu sugiere que los estudiantes establecen y dan sentido a las nociones informales del concepto de límite a través de extensiones metafóricas de las experiencias físicas (e.g., moverse a través de un camino, aproximarse a una pared, o dibujar una gráfica que se vaya acercando a una asíntota). Williams concluye que las concepciones dinámicas y la de límite como valor inalcanzable coexisten con la definición formal, lo que significa que los alumnos describen su comprensión sobre el límite en términos de dos o más modelos informales y que aceptan diferentes descripciones de límites como válidas.

Sierra, González, y López (1998) señalan que existe una identificación de las concepciones históricas con las concepciones de los alumnos, y recalcan que de las respuestas analizadas evidencian otras concepciones como la geométrico-gráfica. Encontraron igualmente, que tras la introducción formal del concepto, la concepción numérica estática predomina sobre la dinámica, contrariamente a lo que suele suceder inicialmente, seguramente por el cálculo algorítmico de límites, que se trabaja al margen del concepto de aproximación y se desarrolla en el contexto puramente algebraico. Que es el que en última instancia prevalece en el desarrollo de las actividades que subyacen a las unidades didácticas relacionadas con el tema en el nivel del bachillerato en España.

Un cambio de enfoque

Como se puede observar, las dificultades que subyacen al aprendizaje del concepto de límite no son nuevas. Es apenas lógico vislumbrar que comprender la definición formal del concepto de límite es sumamente complejo ya que, de acuerdo con las concepciones de límite desde las perspectiva de criterios de justificación histórica de Sierra, González, y López (1998) la formalización del concepto está relacionada con el proceso de aritmetización del análisis que se da en la segunda mitad del siglo XIX.

La formalización del concepto de límite supuso un enorme salto no sólo a nivel temporal, sino también en lo que se refiere a los niveles de abstracción requeridos para su comprensión. Por ello, se han planteado diversas propuestas para abordar los conceptos de cálculo sin tener que acudir al concepto de límite (McAndrew, 2010; Range, 2014; Sangwin, 2011; Schubring, 2011; Suzuki, 2005; Vinsonhaler, 2016).

Una propuesta que se ha planteado en torno a la conceptualización del límite, y que surge de un análisis sobre el aprendizaje de los alumnos se encuentra en un estudio realizado por Blázquez, Ortega, Gatica, & Benegas (2006). Los autores definen el concepto de límite a partir de la noción de aproximación óptima. En este estudio se evidencian además algunos problemas que tienen los alumnos al enfrentarse con la conceptualización métrica de límite, ya que "su formalismo les impide entender el significado y se enfrentan a mayores obstáculos al interpretar las desigualdades de los valores absolutos" (p.204).

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas también se han evidenciado en los estudiantes que se preparan para ser profesores de enseñanza secundaria. De acuerdo con las investigaciones de Nardi & Stewart (2003), Stacey (2010), y Ball & Mc Diarmid (1990), el enfoque procedimental en el que se enseñan las matemáticas en el bachillerato está afectando los niveles de conocimiento y las prácticas de enseñanza de los futuros profesores de educación secundaria. Ante tal perspectiva, O'Meara et al. (2017), hacen evidente la necesidad de que estos futuros profesores adopten un nuevo conjunto de estrategias de enseñanza que quizás no hayan visto antes. Esta propuesta, va en la misma línea que sugiere el uso de definiciones de comprensión matemática más allá de "dominar los procedimientos y la manipulación simbólica" Schoenfeld (1988).

La propuesta presentada por Blázquez plantea rasgos característicos facilitadores del aprendizaje de la primera conceptualización de límite para mejorar su comprensión, esta podría ser una de estas posibles estrategias a las que hacen referencia O'Meara et al. (2017). Otra podría ser implementar este "enfoque de retrospectiva" que presentamos y que esperamos permita a futuros profesores construir una base conceptual para la comprensión y, que es el objeto de esta investigación.

En concordancia con la visión ideal que tiene Gómez (2007, p.30) de cómo se deberían diseñar y llevar a la práctica actividades de enseñanza y aprendizaje hemos planteado en el siguiente apartado la metodología que sustenta el desarrollo de nuestra propuesta didáctica.

Un procedimiento para organizar la enseñanza de las Matemáticas

Este descriptor que se ha tomado como punto de partida para detallar la metodología es el que aparece en la tesis doctoral de Gómez (2007) para denominar lo que define como *análisis didáctico.* No encontramos mejor manera de concretar el diseño metodológico que hemos seguido en la elaboración del presente trabajo. Como señala el autor, el análisis didáctico se ubica en un nivel local del currículo y se centra en el procedimiento en virtud del cual el profesor planifica, lleva a la práctica y evalúa una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos, una hora de clase o una porción de clase.

El análisis didáctico según Rico & Fernández-Cano (2013) es un método que ofrece un modo de entender y abordar el trabajo de investigación. Igualmente señalan que el análisis conceptual, desde la perspectiva de las Ciencias de la Educación, es una herramienta metodológica que permite controlar la complejidad semántica, seleccionar las opciones idóneas y disponer del aparato teórico adecuado para una investigación educativa. Igualmente, en Educación Matemática el análisis de contenido se ha venido utilizando como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto (discurso del profesor, textos escolares y producciones escolares). Es desde este contexto de la educación matemática que se ha planteado la metodología del análisis didáctico para el desarrollo de la secuencia curricular que se ha diseñado.

La aproximación al análisis didáctico (Luis Rico & Fernández-Cano, 2013) desde la Didáctica de la matemática se contempla como un procedimiento cíclico con cinco componentes: análisis conceptual, análisis de contenido matemático escolar, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis evaluativo, que según los autores acontecen de modo completo o parcial, transcurren de manera diacrónica o sincrónica y sostienen una dialéctica de análisis-síntesis. Los distintos análisis propios del ciclo, conciernen a los distintos organizadores curriculares que se analizan en los contenidos de las matemáticas escolares en los programas de formación inicial de profesores de secundaria (L. Rico et al., 1997).

En el presente estudio, particularmente se consideran las cuatro primeras componentes de dicho ciclo. Para su desarrollo, se han tenido en cuenta los rasgos relevantes de la conceptualización del análisis didáctico. Dada la naturaleza y la finalidad del presente estudio, no se desarrollan de manera profusa las categorías ni funciones en las que se sustenta el método.

Aunque de alguna manera el trabajo engloba todos los rasgos relevantes de la conceptualización del análisis didáctico en mayor o menor medida, pensamos que destacan los siguientes:

– Profundizar sobre los conceptos, usar técnicas de escrutinio para conseguir precisión y dominio en su descripción y empleo.

– Complementar los procesos de análisis con los de síntesis, según su finalidad educativa para organizar, secuenciar información y tomar decisiones.

– Trabajar desde unas dimensiones curriculares sobre las cuales erige sus componentes y elabora unas categorías que sustentan y renuevan el discurso matemático escolar.

La visualización en Educación Matemática

El recorrido que ha tenido la investigación en visualización desde sus inicios en la década de los 80 se puede estudiar con profusión en dos documentos que presentan el estado de la cuestión: (Fernández, 2013) y (Presmeg, 2006). El alcance del presente trabajo en este sentido no es el de destacar la importancia de la visualización, que ya se ha hecho evidente en muchos estudios en general, y en el ámbito del análisis en particular (Guzmán, 1996, 2002; Zimmerman & Cunningham, 1991) sino, el palabras de Miguel de Guzmán, " tratar de transmitir no solamente la estructura formal y lógica del quehacer matemático en este campo en particular, sino también, y seguramente con mucho más énfasis, estos aspectos estratégicos e intuitivos, que, por otra parte, son probablemente mucho más difíciles de hacer explícitos y asimilables para los estudiantes, precisamente por encontrarse muchas veces situados en los sustratos menos conscientes de la propia actividad del experto" (Guzmán, 1996, p.35).

Decidimos plantear la propuesta, teniendo en cuenta el rol de la visualización en la educación matemática, ya que la consideramos fundamental en nuestro "quehacer matemático". Hemos situado el trabajo tomando esencialmente como punto de referencia los trabajos de Guzmán (1996, 2001, 2002) y de otros autores que han puesto en un primer plano la visualización en la enseñanza de las matemáticas (Fernández, 2013; González-Martín & Camacho, 2004; Kidron & Tall, 2015; Presmeg, 2006; Zimmerman & Cunningham, 1991).

La necesidad de "ver" las matemáticas no es una cuestión reciente. Desde la última década del siglo pasado Guzmán (1996) apostaba por reivindicar la visualización de conceptos y destrezas del análisis: "las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas de campo” (p.16).

El abandono injustificado al que se ha enfrentado la geometría intuitiva en los programas curriculares actuales debido a la corriente que acompañó la matemática moderna debe contrarrestarse, según Guzmán (2001), recuperando el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática, ya no solamente en lo que tiene que ver con la geometría. Siendo coherentes con esta perspectiva, el desarrollo que se hace de la tangente a una curva en un punto se puede visualizar geométricamente utilizando el software de GeoGebra para luego establecer su desarrollo algebraico. El alumno puede visualizar ampliamente el objeto de estudio a partir de su construcción. En este caso, el GeoGebra como software de matemáticas dinámicas lo hemos utilizado para facilitar, desde el punto de vista geométrico, la idea de punto de doble contacto.

En cuanto a la presentación que se hace de la derivada del seno y del coseno, el enfoque que se presenta sigue las ideas de la geometría dinámica. En el seminario de Innovación Docente[9] el profesor Ortega puso de manifiesto la importancia de las pruebas visuales y el potencial que éstas entrañaban en la enseñanza de las matemáticas en secundaria. En este mismo sentido se ha querido destacar la importancia del cálculo visual en el desarrollo del tema.

Los Sistemas de Cálculo Simbólico en la Educación Matemática

> *Se trata, en primer lugar, de ponernos en contacto con la realidad matematizable que ha dado lugar a los conceptos matemáticos que queremos explorar con nuestros alumnos. Para ello deberíamos conocer a fondo el contexto histórico que enmarca estos conceptos adecuadamente. ¿Por qué razones la comunidad matemática se ocupó con ahínco en un cierto momento de este tema y lo hizo el verdadero centro de su exploración tal vez por un período de siglos? Es extraordinariamente útil tratar de mirar la situación con la que ellos se enfrentaron con la mirada perpleja con que la contemplaron inicialmente. La visión del tema que se nos brinda en muchos de nuestros libros de texto se parece en demasiadas ocasiones a una novela policiaca que aparece ya destripada desde el principio por haber comenzado contando el final. Contada de otra forma más razonable podría ser verdaderamente apasionante.*
>
> (Guzmán, 2001, p.11)

[9] En el contexto del Máster de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas de la Universidad de Valladolid (MUPES) del curso 2017/2018.

No se puede ser indiferente a los enormes cambios que la revolución tecnológica ha supuesto en la sociedad actual. Ya desde principios del siglo XXI, Guzmán advertía la necesidad de atender a los nuevos instrumentos proporcionados por los avances tecnológicos en lo que tenía que ver con la enseñanza de las matemáticas. La revolución digital en realidad, ha supuesto cambios no sólo en la vida cotidiana, también la educación está sufriendo transformaciones progresivas.

El propio Guzmán manifestaba su "presentimiento" de los drásticos cambios y reformas que se presentarían no sólo en la forma de enseñar y de aprender matemáticas sino también, en los propios contenidos. Por ello remarcaba, dada la inminente transformación que se avecinaba, la necesidad de poner el acento en la comprensión de los procesos matemáticos más bien que en la ejecución de ciertas rutinas que en nuestra situación actual ocupan gran parte de la energía de los alumnos, con el consiguiente sentimiento de esterilidad del tiempo que en ello emplean.

El uso de los ordenadores en el aula no sólo va a posibilitar tener un medio con el cual facilitar el aprendizaje sino que al mismo tiempo exige por parte del profesor diseñar propuestas de enseñanza coherentes con dicho aprendizaje. Para ello, como bien remarca Guzmán (2001), debemos conocer a fondo el contexto histórico que enmarca estos conceptos adecuadamente. Como se puede intuir, la creatividad y el conocimiento juegan un papel importante en el diseño y uso de actividades que requieran la implementación de Sistemas de Cálculo Simbólico.

La propuesta que se ha hecho para introducir la noción de tangente a una curva ha puesto el acento en la comprensión de los procesos matemáticos, el coste operativo que supone el método lo hemos presupuestado y, en concordancia con las ideas de Guzmán, después de modelizar, al trabajar con estructuras matemáticas que son reconocibles para los estudiantes, el uso de un SCS resultaría más que natural en el entorno digital que se movilizan.

La idea principal es poner delante de los estudiantes las situaciones-problema que dieron lugar a la formación de las ideas que pretendemos trabajar. Cuando se les permite visualizar la construcción y estimulamos en ellos la búsqueda y descubrimiento progresivo de estructuras matemáticas sencillas con el sustrato cognitivo que traen consigo, quizás sea más plausible que comprendan en el futuro conceptos más abstractos y artificiales como es del límite.

Una mirada retrospectiva

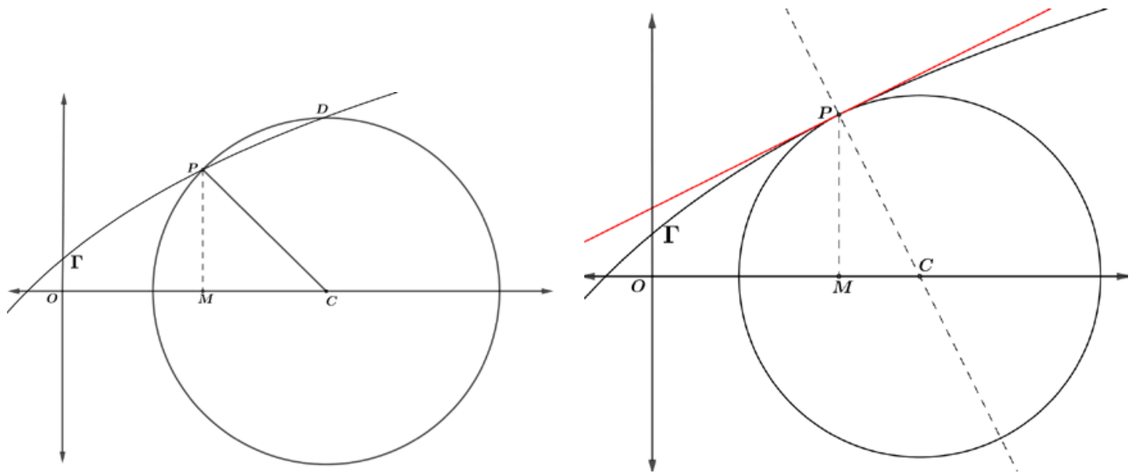
En esta sección se hace una breve exposición de descubrimientos pasados para estudiar las herramientas con las que otrora los matemáticos hicieron frente a los problemas relacionados con diversos conceptos propios del cálculo. El cálculo diferencial se desarrolló en el siglo XVII al resolver problemas fundamentales relacionados con la velocidad y su problema geométrico equivalente de encontrar tangentes a curvas generales. Las tangentes a curvas simples especiales se habían considerado en la antigüedad, sin embargo, sus construcciones sólo fueron posibles con la introducción de coordenadas, las cuales abrieron la posibilidad de utilizar herramientas algebraicas y analíticas en la descripción de propiedades geométricas.

El camino a seguir para trabajar un cálculo desde nuestro enfoque empieza con Descartes. Se expondrá su método para hallar tangentes, su vínculo con la velocidad variable y todas las reglas estándar de "diferenciación" a partir de métodos algebraicos elementales propios del nivel escolar que se contempla en este estudio.

La discusión se va a restringir a funciones *algebraicas* familiares (i.e. polinómicas, racionales, raíces de funciones y sus combinaciones elementales) y, posteriormente discutiremos acerca de las exponenciales, trigonométricas y otras funciones más generales. Si f es algebraica, en adelante lo notaremos: $f \in \mathcal{A}$.

La idea de punto de doble contacto

La idea que subyace al concepto de recta tangente es la de *punto de doble contacto.* Lo habitual, cuando se le pregunta a un alumno acerca de la definición de la recta tangente desde un punto de vista intuitivo, es que respondan cosas como "…es la recta que nunca toca a la gráfica pero se acerca a ella cada vez más…o…es la recta que toca a la función una sola vez…" Este error, aun cuando se restrinja la respuesta a una aproximación local es la causa de muchos de los problemas subyacentes a la comprensión del concepto de derivada como los señalan Vincent, LaRue, Sealey, & Engelke (2015). Parece paradójico que uno de los primeros acercamientos formales a este problema, el método de Descartes (ver Grabiner (1983) para una descripción de tal método en términos de la matemática moderna) explota el punto de doble contacto a una curva. La idea de Descartes de buscar la circunferencia con centro en el eje x y que localmente toque únicamente una vez a la curva, es puramente geométrica (Figura 1).



(a) (b)

Figura 1. El método de Descartes.

El método de Descartes consiste en encontrar una circunferencia tangente a una curva Γ en algún punto P (vea la Figura 1a). Si se considera una circunferencia con centro C sobre algún eje de referencia a conveniencia (se puede pensar en el eje x, aunque en la práctica con cualquier recta completamente definida funciona) y que además pase por P, esta circunferencia puede pasar por otro punto sobre la curva cercano a P, digamos, el punto D. En efecto, esta circunferencia no es tangente a Γ. Pero por otra parte, si P es el único punto de contacto entre la circunferencia y la curva, entonces la circunferencia será tangente a la curva (vea la Figura 1b). Por lo tanto, el objetivo es sencillo: encontrar C de tal forma que la circunferencia con centro C y radio $r = CP$ corte a la curva en un solo punto, P.

El doble contacto es claro desde un punto de vista intuitivo. El método de Descartes incluso puede formalizarse fácilmente cuando se establece como un sistema algebraico de ecuaciones polinomiales para algunas curvas fáciles como elipses, parábolas... Hudde y Sluse, de una manera inteligente, extendieron esta noción de funciones definidas por polinomios y funciones racionales utilizando nuevamente una doble factorización en una propiedad puntual dando una generalización de lo que hoy se conoce actualmente como diferenciación formal en geometría algebraica. Range (2014) relaciona esta idea de doble punto con continuidad y está implícita en el concepto de diferenciabilidad dado por Carathéodory, más adelante detallaremos esto brevemente.

¿Y las funciones trascendentes? Parece que la mayoría de la maquinaria de los límites es necesaria una vez que presentamos las funciones $\sin(x)$, $\cos(x)$ y $\exp(x)$. Tanto el seno como el coseno pueden derivarse casi por un razonamiento geométrico, véase, por ejemplo, (Sridharma, 1999). En su demostración, el autor hace uso de los límites, pero el formalismo de su lenguaje podría evitarse utilizando simplemente que la tangente es el caso extremo de la secante (de nuevo surge la idea del punto doble ya que dos puntos se colapsan en uno). Acerca de $\exp(x)$ el problema principal es cómo introducir la función en general y podría ser parte de otros estudios; de hecho, una opción puede ser definirla como la función cuya pendiente de la tangente en un punto es la misma que el valor de la función en ese punto para, superar de esta manera los obstáculos que existen con las diferentes funciones que satisfacen esta condición, $\exp(0) = 1$. Volveremos sobre esto más adelante. De todos modos, una vez que introducimos estas tres funciones trascendentales, el conjunto de funciones disponibles ya no está más cerca de las operaciones deseadas (suma, composición e inversa) como en el caso de las funciones racionales (nótese que la raíz n-ésima también puede derivarse del método de Descartes) entonces uno tiene que moverse hacia el concepto de límite o ser valiente para moverse a infinitesimales como lo propone (Vinsonhaler, 2016).

Uno podría tener la tentación de decir que uno puede considerar la expansión en serie de las funciones trascendentes (esa es la idea de los geómetras algebraicos cuando avanzan desde las funciones racionales), pero esto va mucho más allá de un primer acercamiento a un módulo de cálculo y de hecho hace las tres funciones necesitaban más sombrías a primera vista.

Para motivar el concepto de doble contacto desde el método de Descartes, a los discentes se les puede mostrar explícitamente a través de variados ejemplos, cuál es el comportamiento de estas circunferencias para que usen heurísticas propias para hallar el centro correcto, C, o lo que en términos de Lockhart (2009) significaría crear patrones imaginarios. Posteriormente con la orientación del profesor y la presentación del método podrán elaborar la síntesis del concepto de doble contacto. A modo de ejemplo (se pueden plantear diversos ejemplos, de acuerdo con las características del grupo) hemos elaborado dos animaciones (Figuras 2 y 3):

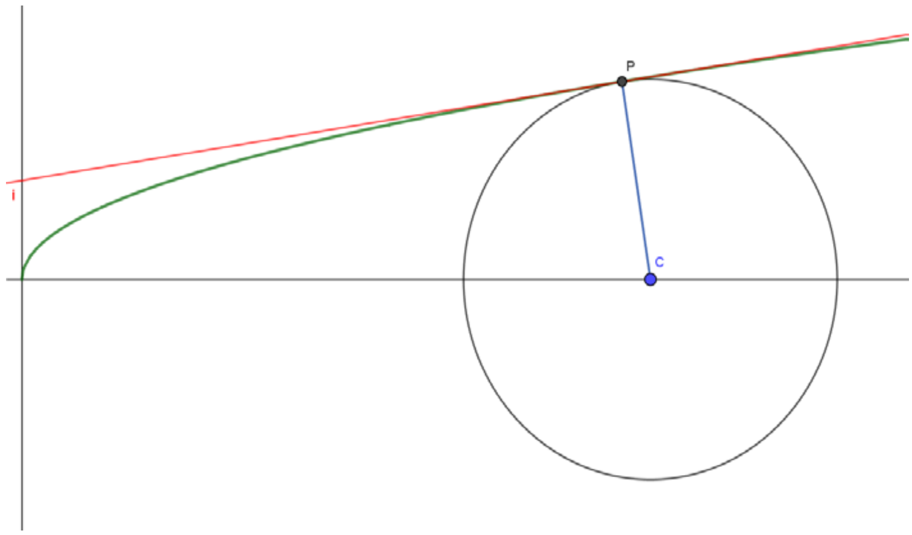


Figura 2. Método de Descartes. Para una animación pulsar aquí [Animación 1](#).

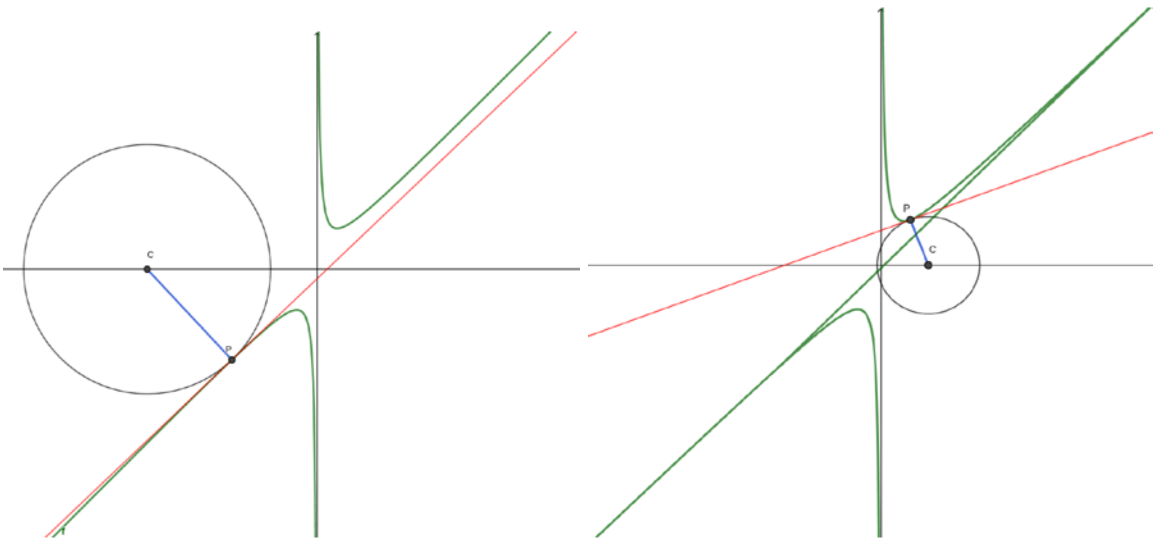


Figura 3. Doble Contacto. Para una animación pulsar aquí: Animación 2.

El doble contacto para la tangente

Algebraicamente, cualquier punto común a la curva y a la circunferencia corresponde a una solución del sistema de ecuaciones que representan a la curva y a la circunferencia. Si hay dos intersecciones distintas, el sistema tendrá dos soluciones distintas, por lo tanto, para que la circunferencia y la curva sean tangentes y tengan un único punto en común, el sistema debe tener un cero de orden 2, correspondiente al punto común P, en otras palabras, que P sea un punto de doble contacto (o de contacto de orden 2).

La definición de recta tangente que presenta Range (2016) va en concordancia con esta idea:

Definición 1. *Una tangente a una curva en el punto P es una recta que interseca a la curva en un punto con multiplicidad mayor o igual a dos, es decir, cualquier pequeña rotación de la recta en torno a P generará al menos otro punto de intersección distinto de P.* (p.5)

Se presenta un ejemplo del método, escrito en lenguaje moderno:

Ejemplo 1:

Supongamos que Γ es la curva $y = \sqrt{x}$, y que P es el punto (a^2, a). Tracemos la circunferencia que pasa por el punto (a^2, a) con radio r y centrada en el eje x en el punto $C(h, 0)$. Los valores a determinar son h y r, con la condición de que P sea un punto de doble contacto. La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-h)^2+y^2=r^2 \tag{1}$$

Expandiendo la ecuación e igualando a cero:

$$x^2-2hx+h^2+y^2-r^2=0 \tag{2}$$

Los puntos de intersección de la circunferencia y la curva corresponden a la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2-2hx+h^2+y^2-r^2=0 \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \tag{3}$$

Eliminando utilizando la sustitución $y=\sqrt{x}$ se tiene:

$$x^2+(1-2h)x+(h^2-r^2)=0 \tag{4}$$

Para que $P(a^2,a)$ sea punto de doble contacto y, el único común a la curva y la circunferencia, se debe cumplir:

$$x^2+(1-2h)x+(h^2-r^2)=(x-a^2)^2 \tag{5}$$

Expandiendo el miembro de la derecha y comparando los coeficientes, tenemos que:

$$1-2h=-2a^2 \tag{6}$$

Con lo cual, $h=a^2+1/2$. Por lo tanto la circunferencia con centro $(a^2+1/2\,,0)$ será tangente a la gráfica de la curva $y=\sqrt{x}$ en el punto (a^2,a).

El método de Descartes reduce el problema de las tangentes a encontrar el centro de la circunferencia tangente a la curva. En la actualidad, este problema se resuelve encontrando la pendiente de la recta tangente, mediante derivación. Está claro, desde el punto de vista de la geometría euclidiana, que los dos métodos están relacionados. Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de tangencia. En este caso, el radio PC está contenido en una recta cuya pendiente es $-2a$; por lo tanto, la tangente a la curva Γ que pasa por P es $1/2a$. Esto, de hecho coincide con lo que se obtiene utilizando la derivada, la diferencia radica en que aquí se han utilizado esencialmente propiedades algebraicas y geométricas de las ecuaciones y de las curvas, respectivamente.

El método funciona para todas las formas cuadráticas, y, en palabras de Suzuki (2005) es "muy elegante" . Desde el punto de vista didáctico se puede decir que se establecen aprendizajes significativos. Se construye el concepto con herramientas conceptuales que ya han trabajado suficientemente los alumnos y, desde la configuración de Skemp (1978), se puede señalar que se construye el concepto a partir de esquemas que permiten a los alumnos lograr una comprensión relacional.

Los avances de Descartes se vieron limitados por las dificultades para resolver sistemas de ecuaciones que excluían a las curvas más simples. Por ejemplo, si se quiere encontrar la tangente a la curva $y = x^3$, de manera análoga a la anterior, el lector se puede percatar de que resulta un sistema de cuatro ecuaciones polinomiales con cuatro incógnitas[10], lo cual aunque no supone dificultad alguna para estudiantes de estos niveles, el coste operativo que requiere el proceso es significativo. En la actualidad esto se puede simplificar abordado el problema desde un punto de vista analítico o, mediante el uso del ordenador. Esto, en el contexto de las exigencias curriculares actuales, daría una oportunidad realista a la integración de las TICs en el aula de matemáticas en el Bachillerato.

La dificultad que subyace al método de Descartes radica, esencialmente, en encontrar que la solución del sistema de ecuaciones que determinan las dos curvas (la circunferencia y la curva Γ) sea un punto de doble contacto (que es además, el punto de tangencia). Para solventar esta dificultad es conveniente tener un algoritmo eficiente para detectar raíces dobles de polinomios, ya que, sin lugar a dudas, disminuiría significativamente el coste operativo del método de Descartes. Aplicar el método de Descartes a una curva $y = f(x)$, en donde $f(x)$ es un polinomio de grado n, supone resolver un sistema polinomial de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas.

Esto se solventa hoy día fácil y eficientemente con un SCS. Basta introducir los datos de manera adecuada y seguir los pasos del método para encontrar el centro de la circunferencia, y de esta manera la pendiente de la normal a la curva que nos lleva a la de su tangente.

[10] Ya que en este caso hay que agregar un polinomio mónico de grado 4 para igualar cada miembro de la ecuación así: $x^6 + x^2 - 2xh + h^2 - r^2 = (x-a)^2(x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q)$.

Ejemplo 2. Aunque con nuestros estudiantes hablaremos básicamente de funciones, para mantener el lenguaje del método, hallaremos el centro de la circunferencia tangente a la curva $y = \frac{x^2}{x-1}$, con la idea de doble contacto y utilizando el software de Mathematica. Un programa muy intuitivo y que da un amplio margen para trabajar el cálculo simbólico. Al igual que en el ejemplo anterior, necesitamos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (x-h)^2 + y^2 = r^2 \\ y = \dfrac{x^2}{x-1} \end{cases} \tag{7}$$

Sustituyendo y en la primera ecuación tenemos:

$$(x-h)^2 + \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 = r^2 \tag{8}$$

Para $x \neq 1$, reduciendo queda:

$$(x-h)^2(x-1)^2 + x^4 - r^2(x-1)^2 = 0 \tag{9}$$

Como se requiere un doble contacto en $P\left(a, \frac{a^2}{a-1}\right)$, el miembro de la izquierda de (9) debe tener un cero de orden 2. Es decir debe ser de la forma $(x-a)^2(Ax^2 + Bx + C)$ ya que es de orden 4.

Llamando adecuadamente:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-h)^2(x-1)^2 + x^4 - r^2(x-1)^2 \\ g(x) &= (x-a)^2(Ax^2 + Bx + C) \end{aligned} \tag{10}$$

Para que P sea de doble contacto basta resolver el sistema de ecuaciones polinomiales que se generan cuando los coeficientes de $f(x) - g(x)$ sean cero, teniendo en cuenta que lo que se quiere es hallar el valor de h en términos de a, en el Mathematica se introducen de manera muy sencilla todas estas restricciones como aparece en la Figura 2.

Aunque hemos dado de manera muy detallada los pasos a seguir, desde el sistema (7) en adelante, a los alumnos se les va mostrando cada paso con el software, y, ellos mismos van a hacer sus propios cálculos. Estos no requieren más de 5 minutos desde el mismo momento en que han declarado f y g. En el anexo 1, presentamos el método utilizando otro software que alternativo, SAGE que es un software libre.

Esto se puede observar en la solución que presentamos en la figura 4, en donde se ha encontrado el centro $C(h,0)$ de la circunferencia, y con el propio programa, la pendiente de la normal y en consecuencia la de la tangente cuyos resultados son:

$$h = \frac{a(-1+3a-5a^2+2a^3)}{-1+3a-3a^2+a^3} \tag{11}$$

Ya teniendo la coordenada del centro de la circunferencia $C(h,0)$ y el punto de contacto $P\left(a, \frac{a^2}{a-1}\right)$, hallamos la pendiente de la normal a la curva:

$$n(a) = -\frac{(-1+a)^2}{(-2+a)a} \tag{12}$$

y, de manera automática, la pendiente de la tangente:

$$m(a) = \frac{(-2+a)a}{(-1+a)^2} \tag{13}$$

Que es la derivada de la curva en a.

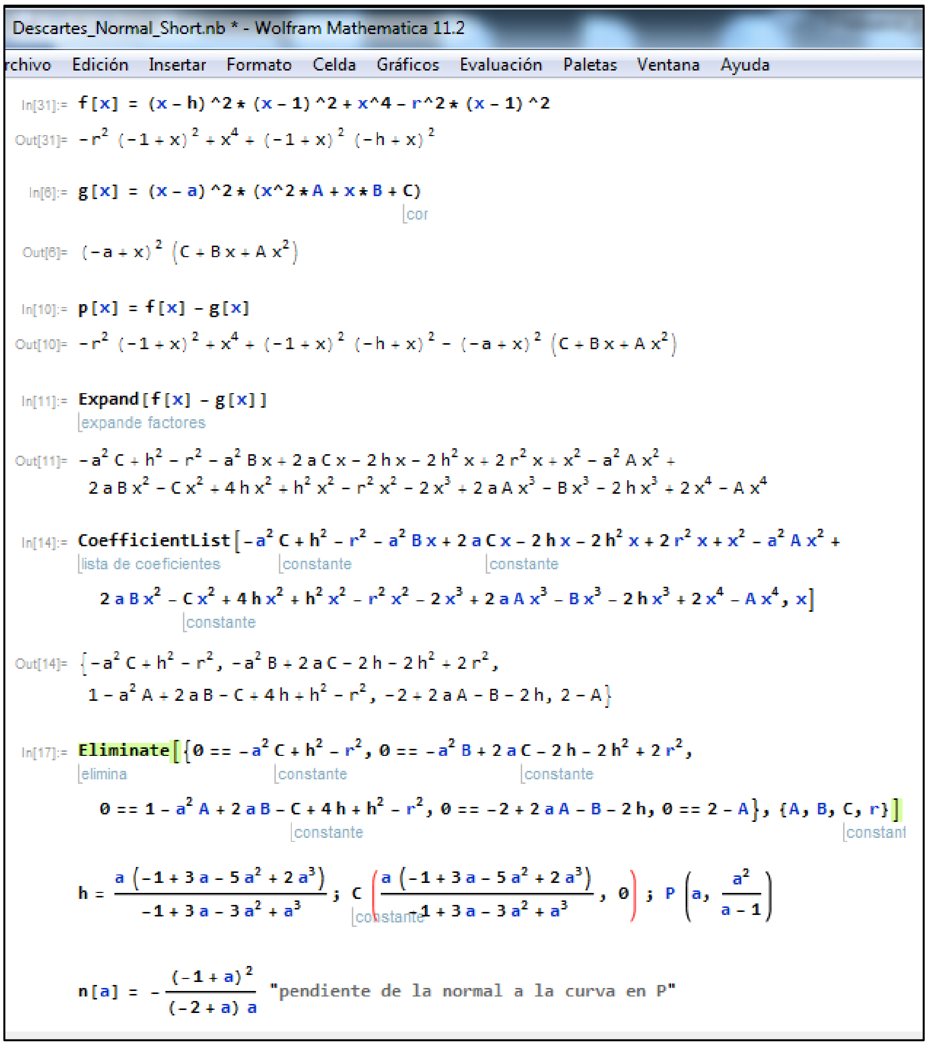


Figura 4. Método de Descartes con Mathematica. Un ejemplo.

Investigando las propiedades de las ecuaciones polinómicas con raíces dobles, el neerlandés Johannes Hudde hizo un importante descubrimiento. La clave de método de Hudde para encontrar raíces de multiplicidad mayor que 1 radica en la habilidad para encontrar el máximo común divisor (MCD) de dos polinomios. El trabajo de Hudde aparece en la segunda edición latina de la *Geometría* de Descartes en 1659 (Suzuki, 2005). Su propuesta es una variación del algoritmo de Euclides, pero su interés se focalizaba en los restos cuando se dividían los polinomios; en lugar de hacer la división, hallaba el resto módulo el divisor.

Como sólo estaba interesado en el resto cuando los polinomios se dividen, Hudde, en lugar de realizar la división, encontraba el módulo restante como divisor. El valor de encontrar el MCD se pone de manifiesto en la décima regla de Hudde, que se refiere a la reducción de ecuaciones con dos o más raíces iguales:

> *Si la ecuación propuesta tiene dos raíces iguales, se puede multiplicar por cualquier progresión aritmética que se quiera: es decir, [multiplicar] el primer término de la ecuación por el primer término de la progresión; el segundo término de la ecuación por el segundo término de la progresión, y así sucesivamente; y se establece el producto que resulta igual a 0. Luego, con las dos ecuaciones que ha encontrado, se usa el método explicado anteriormente para encontrar su divisor común más grande; y divide la ecuación original por la cantidad tantas veces como sea posible.*
>
> (Descartes, 1657 en Suzuki, 2005)

TEOREMA DE HUDDE: *Sea* $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *, y sea* $\{b_k\}_{k=0}^{n}$ *una progresión aritmética. Si* $x=r$ *es un cero de* $f(x)$ *con multiplicidad mayor que 1, entonces* $x=r$ *será un cero de* $g(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k a_k x^k$.

El polinomio $g(x)$ se conoce como *polinomio de Hudde*. Hudde además advirtió que si $f(x)$ tiene un cero en $x=a$ de multiplicidad n, entonces un polinomio de Hudde generado de $f(x)$ tendrá un cero $x=a$ de multiplicidad $n-1$.

El valor del método es indiscutible: si el polinomio original tiene términos con coeficiente 0 (términos faltantes que se suelen notar con $*$), la secuencia aritmética se puede construir para aprovechar la ausencia de estos términos.

Ejemplo 3:

Se tiene que $x=3$ es un cero de orden 2 de x^3-5x^2+3x+9, veremos que $x=3$ es un cero del polinomio de Hudde $g(x)=\sum_{k=0}^{3} b_k a_k x^k$ (tenga en cuenta que este polinomio no es único). En este caso, la progresión que escogimos es $\{b_k\}_{k=0}^{4}=\{-k\}_{k=0}^{3}$.

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & x^3 & - & 5x^2 & + & 3x & + \ 9 \\
 & 0 & & -1 & & -2 & -3 \\
\hline
g(x) = & & & 5x^2 & & -6x & -27
\end{array}
\tag{14}
$$

En efecto, se puede verificar que $x = 3$ es cero de $g(x)$. El método de Hudde simplifica de manera significativa el método de las tangentes de Descartes.

Si la progresión aritmética que se elige es la natural $\{k\}_{k=0}^{n}$ se puede notar en el lenguaje moderno que:

$$g(x) = xf'(x)$$

Lo que nos permite interpretar, en términos actuales que, si a es un cero de multiplicidad 2 de $f(x)$ entonces también será cero de $f'(x)$.

Nos detenemos aquí para insistir en lo que ya hemos señalado anteriormente en cuanto al uso de las TICs. Cabe destacar que el método de Hudde es implementable en cualquier SCS con lo cual, después de que los alumnos entiendan el método, a partir de ejemplos sencillos, pueden hallar los puntos de doble contacto utilizando estos sistemas de álgebra computacional. De hecho, esto les permitiría desarrollar las competencias básicas en ciencia y tecnología, pero no desde la mera utilización del ordenador como herramienta para calcular sino que se les muestra cómo se construye el algoritmo y a partir de ahí su aplicación. Por ello, la preocupación por la complejidad que puedan suscitar las cuentas que van resultando queda salvada con la implementación del SCS (Figura 5). Cabe igualmente señalar que las dificultades no son intrínsecas de este método, también sucede con la derivada vía límite. En este caso hemos hecho un programa en Octave para calcular la derivada de la función $y = f(x) = x^{p/q}$ con p y q naturales, $q \neq 0$. Como Anexo 2, damos el código del programa que diseñamos. Así que basta descargar este software que es libre para practicar con distintos valores un caso particular del método de Hudde.

```
Ventana de comandos
Este programa emplea el metodo de Descartes para calcular la
derivada de la funcion y = x^(p/q)
Introduzca los valores de p y q.
p = 2
q = 3

Punto (a^3, a^2)

Sistema:

y^3 = x^2
y = m(x-a^3)+a^2

Sistema despues de sustituir una ecuacion en la otra.
                                                     2
     6  2     3   /      2       \     2  3    /    2    \
  - a *m  - a *m*\- 2*a  + 2*y/ + m *y  - \- a  + y/

Sucesion de Hudde:    3   2   1   0

Polinomio de Hudde:
     2  3      2     /     3        2\
  3*m *y  - 2*y  + y*\- 2*a *m + 2*a /

Dividiendo por y:
       3        2      2  2
  - 2*a *m + 2*a  + 3*m *y  - 2*y

Sustituyendo y = a^2:
     4  2      3
  3*a *m  - 2*a *m

Despejando m =
  [ 0 ]
  [   ]
  [ 2 ]
  [---]
  [3*a]
>> |
```

Figura 5. Ejemplo del Método de Hudde compilado en Octave.

Ejemplo 4:

Encontrar la tangente a $y = x^3$ en $x = a$ con el método de Descartes, requiere encontrar un punto de doble contacto para la ecuación:

$$x^6 + x^2 - 2hx + (h^2 - r^2) = 0 \tag{15}$$

Como señalamos anteriormente, en principio, esto implicaba resolver un sistema polinomial de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Con el algoritmo de Hudde, si la ecuación (15) tiene un punto de doble contacto en $x = a$, entonces cualquier polinomio de Hudde asociado al polinomio $f(x) = x^6 + x^2 - 2hx + (h^2 - r^2)$ tendrá a $x = a$ como cero.

Utilizando la sucesión aritmética natural $\{0, 1, 2, 3, \ \dots\}$

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & x^6 & * & * & * & x^2 & -2hx & (h^2 - r^2) \\
 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \cline{2-8}
g(x) = & 6x^6 & & & & +\,2x^2 & -\,2hx &
\end{array}
\qquad (16)
$$

Si $f(x)$ tiene una cero de orden 2 en $x = a$, entonces el polinomio de Hudde $g(x)$, asociado a $f(x)$ tiene también un cero en $x = a$. Con lo cual, se debe cumplir que $6a^6 + 2a^2 - 2ah = 0$, es decir, $h = a + 3a^5$. De manera análoga a la del ejemplo 1, tenemos que la pendiente de la recta normal a $y = x^3$ en $(a,\ a^3)$ es $-1/3a^2$, y la de la tangente es $3a^2$.

Descartes descubrió posteriormente una forma de simplificar su método a partir de la caracterización geométrica de Apolonio para construir tangentes a parábolas. La construcción de Apolonio para hallar la tangente a una parábola (ver Figura 6) en un punto P, consistía en identificar un punto Q sobre el eje de la parábola, cuya distancia al vértice V, de la parábola fuese igual que la proyección de P sobre el eje de la parábola. Es decir, encontrar Q, tal que $VQ = RQ = d$, con RQ la proyección de P sobre el eje de la parábola. Hallado Q, se tiene que la tangente a la parábola en P, es la recta que pasa por P y Q.

Con el método inicial que se fundamenta en la idea punto de doble contacto para hallar tangentes, y teniendo en mente el resultado geométrico de Apolonio, se puede construir la tangente a la parábola de nuevo desde un punto de vista algebraico. Se sitúa el vértice V de la parábola en el origen $O(0,0)$ de un sistema cartesiano y se escoge el eje de la parábola sobre el eje positivo de las ordenadas, (eje y). La ecuación de la parábola es entonces de la forma $y = \lambda x^2$ para algún $\lambda > 0$ que depende de la distancia del vértice al foco. Fijando un punto $P(a, b)$ sobre la parábola, sabemos que cualquier recta no vertical que pase por P tiene como ecuación $y = m(x - a) + b$. Las abscisas de los puntos de intersección con la parábola son las soluciones de

$$\lambda x^2 - b - m(x - a) = 0 \qquad (17)$$

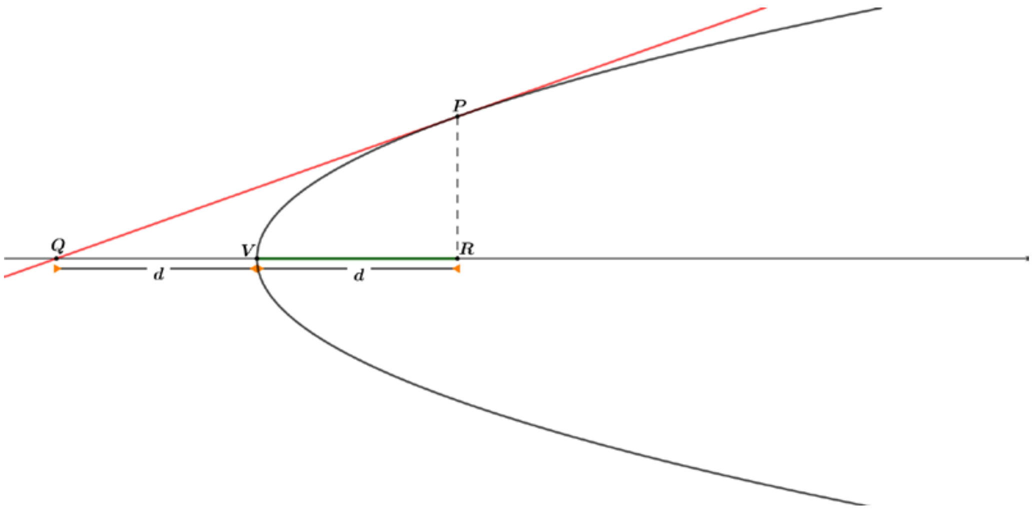


Figura 6. Método de Apolonio para construir tangentes a una parábola.

Sustituyendo $b = \lambda a^2$, ya que $P(a, b)$ está sobre la parábola, se tiene:

$$\lambda(x + a)(x - a) - m(x - a) = [\lambda(x + a) - m](x - a) = 0 \tag{18}$$

La ecuación (18) tiene como soluciones $x = a$ y $x = m/\lambda - a$. Por tanto, (a, b) será un punto de contacto de orden 2 con la recta de pendiente m si $a = m/\lambda - a$, o lo que es lo mismo, $m = 2\lambda a$.

Descartes extendió esta idea a otras curvas sustituyendo la circunferencia por la recta tangente y utilizando implícitamente la idea de pendiente (como la razón entre los lados de triángulos semejantes).

Generalizando, y en términos modernos: La ecuación de una recta que interseca a la curva $f(x, y) = 0$ en (a, b) es $y = b + m(x - a)$, en donde m es un parámetro desconocido. Para que la recta dada sea tangente, el sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y = m(x - a) + b \end{cases} \tag{19}$$

Debe tener un punto de doble contacto en $x = a$ (según sea el caso, en $y = b$).

Ejemplo 5:

Para encontrar la tangente a $y = x^3$ en (a, a^3) el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = m(x-a) + a^3 \end{cases} \tag{20}$$

Se reduce a la ecuación

$$x^3 - mx + ma - a^3 = 0 \tag{21}$$

a. Solución de la ecuación (21) sin el algoritmo de Hudde:

Para que la recta sea tangente $x = a$ debe ser un punto de doble contacto, lo que significa que $(x-a)^2$ es un factor del polinomio $x^3 - mx + ma - a^3$; si llamamos al otro factor $x - v$, podemos escribir

$$\begin{cases} x^3 - mx + ma - a^3 & = & (x-a)^2(x-v) \\ & = & x^3 - (v+2a)x^2 + (a^2 + 2av)x - a^2 v \end{cases} \tag{22}$$

Comparando los coeficientes tenemos el sistema

$$\begin{cases} v + 2a & = & 0 \\ a^2 + 2av & = & -m \\ -a^2 v & = & ma - a^3 \end{cases} \tag{23}$$

Resolviendo el sistema (23) tenemos que $m = 3a^2$. De hecho, es la misma respuesta que tendríamos derivando $y = x^3$, a diferencia, de que en este caso se ha hecho sin el concepto de límite.

b. Solución de la ecuación (24) utilizando el método de Hudde:

$$\begin{array}{rcccc} & x^3 & * & -\,mx & + \quad ma - a^3 \\ & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline g(x) = & 3x^3 & & -\,mx & \end{array} \tag{24}$$

Como $x = a$ es un punto de doble contacto, de acuerdo con el método de Hudde, $x = a$ es cero de $g(x)$, es decir $3a^3 - ma = 0$. Por tanto, $m = 3a^2$.

Los dos métodos de Descartes permiten encontrar tangentes a cualquier curva algebraica, incluso, cuando las curvas están definidas implícitamente.

Hasta aquí, se han estudiado los dos métodos de Descartes para hallar tangentes a una curva en un punto dado. Se han mostrado además distintas formas de utilizar estos métodos evidenciando las bondades del método de Hudde para encontrar raíces dobles de un polinomio.

Utilizando el método de Descartes y el algoritmo de Hudde, se hallará solución de lo que en términos de Zamora (2014) es una cuestión propuesta en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Castilla y León en la convocatoria de junio de 2008.

Ejemplo 6:

Determinar el valor de λ para que la recta tangente a la función $f(x) = x^3 + \lambda x$ en el punto $x = 0$ sea perpendicular a la recta $y + x = -3$.

Solución:

Con el método de Descartes tendríamos el sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 + \lambda x \\ y = m(x-a) + a^3 + \lambda a \end{cases} \tag{25}$$

Sustituyendo:

$$x^3 \quad + \quad * \quad + \quad (\lambda - m)x \quad + \quad am - a^3 - \lambda a = 0 \tag{26}$$

Utilizando el algoritmo de Hudde se multiplica la ecuación por la progresión aritmética natural:

$$\begin{array}{ccccccccc} x^3 & + & * & + & (\lambda - m)x & + & (am - a^3 - \lambda a) & = 0 \\ 3 & & 2 & & 1 & & 0 & = 0 \\ \hline 3x^3 & & & + & (\lambda - m)x & & & = 0 \end{array} \tag{27}$$

La condición de perpendicularidad con la recta $y + x = -3$ implica que $m = 1$, y, como $x = a$ es un punto de doble contacto, este punto debe satisfacer la ecuación de Hudde:

$$3a^3 \quad + \quad (\lambda - 1)a \quad = 0 \tag{28}$$

Simplificando:

$$a(3a^2 + \lambda - 1) = 0 \tag{29}$$

Despejando en el segundo factor de (29) $\lambda = 1 - 3a^2$ ya que $x = a = 0$, se tiene que $\lambda = 1$.

Desde el comienzo podíamos sustituir $m = 1$, pero, a efectos didácticos, preferimos hacerlo al final.

Hasta aquí, se han utilizado técnicas naturales para hallar tangentes a una curva. Los alumnos podrán asumir las etapas de generalización y síntesis, en el sentido de Sierpińska (1994) para comprender el concepto de derivada desde un marco puramente constructivista.

A partir de las idea de doble contacto, aunque ya tenemos técnicas naturales muy constructivas, somos conscientes, como ya lo hemos mencionado, del coste operativo. Aunque con las herramientas de las que disponemos actualmente esto no representaría ningún problema, vamos a ir un paso más adelante para quienes puedan aún considerar que esto no es así, opten por un método algebraico menos exigente a la hora de hacer cálculos.

El método al que nos referimos es el expuesto por Range (2016) en el cual, partiendo de las tangentes a las gráficas de funciones polinómicas, amplía el cálculo diferencial a funciones algebraicas. Utilizando solamente herramientas algebraicas. Por una parte el autor define un lema de factorización para polinomios y relaciona este concepto con la multiplicidad de los ceros. A partir de ahí con esas herramientas generaliza en forma natural y sistemática a todas las funciones que se pueden construir a partir de polinomios aplicando las operaciones algebraicas estándar, incluyendo la composición y tomando inversas, un número finito de veces.

La idea esencial de Range radica en la factorización algebraica que se presenta en el lema 7.1 (p.32) y que enunciamos a continuación:

Lema 7.1 (Lema de Factorización.) *Si* $f \in \mathcal{A}$ *y* a *está en el dominio de* f*, entonces existe* $q \in \mathcal{A}$ *definido sobre el dominio de* f *tal que*

$$f(x) - f(a) = q(x)(x - a), \tag{30}$$

el factor q es una función algebraica definida sobre el dominio de f y el valor $q(a)$ de q en a es la pendiente de la recta que interseca a la gráfica de f en un único punto $(a, f(a))$ cuyo orden de contacto es mayor que uno. Es decir, el valor $q(a)$ es la *derivada* $D(f)(a)$ de f en a. Se debe tener en cuenta que los valores críticos de una función f deben excluirse del dominio de su inversa. La condición $f'(a) \neq 0$ es necesaria para garantizar una apropiada factorización, por tanto para ser derivable en el punto $b = f(a)$. La función q en principio se puede calcular explícitamente, y, lo más importante está bien definida en a por una fórmula algebraica unificada.

A partir del resultado de la factorización, se generaliza la noción de multiplicidad de un cero a al caso de una función $f \in \mathcal{A}$. La sucesiva aplicación del lema de factorización en este tipo de funciones implica el siguiente resultado que es, la versión algebraica de la definición 1:

Definición 2. *Dada* $f \in \mathcal{A}$ *y la factorización* (30), *entonces*

$$f(x) - [f(a) + m(x - a)] = (q(a) - m)(x - a) + k(x)(x - a)^2 \tag{31}$$

para alguna otra $k \in \mathcal{A}$, *definida sobre el dominio de* f.

Geométricamente, esto significa que la recta descrita por la función lineal $y = m(x - a)$ intersecta a la gráfica de $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ con multiplicidad al menos dos si y solo si $m = q(a)$. Por tanto, la recta dada por $y = f(a) + q(a)(x - a)$ es la ***tangente*** a la gráfica de f en $(a, f(a))$. Esto muestra que la función $f \in \mathcal{A}$ es algebraicamente diferenciable en a, con derivada $D(f)(a) = f'(a) = q(a)$, en donde q está definida por (30). Ya se atisba la proximidad de la diferencial, eso establecería que en el caso de una variable derivabilidad equivaldría a diferenciabilidad (cosa que no ocurre en varias variables).

Para demostrar algunas reglas de diferenciación como la de la potencia, linealidad, inversa, producto y cociente se utilizan únicamente factorizaciones y combinaciones algebraicas (apropiadas) de las funciones y factores que surgen. Si las funciones que se trabajan están en $\mathcal{A}$, sus combinaciones resultan ser también funciones algebraicas. Es decir, todas las reglas de diferenciación establecidas a partir del lema de factorización resultan ser válidas para funciones algebraicas en todos los puntos del domino de la respectiva función.

De manera análoga a la tradicional, todas las fórmulas de diferenciación estándar se verifican de modo directo. En particular, se puede destacar que la deducción de la regla de la cadena (vista usualmente como la más profunda y compleja en la diferenciación), con este enfoque resulta ser más sencilla.

Vamos a hallar a partir de un ejemplo, la derivada utilizando el *lema de factorización* de Range. A efectos de comparar los distintos métodos que involucran el doble contacto, hallaremos la derivada del mismo ejemplo anterior $f(x) = x^3 + \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 7: Hallar la derivada de $f(x) = x^3 + \lambda x$.

Utilizando el lema de factorización, debemos hallar $q(x)$ tal que

$$f(x) - f(a) = q(x)(x - a) \tag{32}$$

Hallamos el valor de $f(x) - f(a)$, así:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= x^3 + \lambda x - a^3 - \lambda a \\ &= x^3 - a^3 + \lambda x - \lambda a \\ &= (x^2 + ax + a^2 + \lambda)(x - a) \end{aligned} \tag{33}$$

Con lo cual, $q(x) = x^2 + ax + a^2 + \lambda$ y, para cualquier $a \in \mathrm{Dom}f$, $q(a) = 3a^2 + \lambda$, esto es, $D(f)(a) = 3a^2 + \lambda$.

Como mencionamos anteriormente, este método para hallar la derivada a partir del doble contacto tiene un coste operativo menor, sin embargo, nuestra intención en el desarrollo del tema para los alumnos es que el tiempo se dedique a la comprensión del concepto y no que se pierdan en cálculos y operaciones que a día de hoy y con las herramientas que se tienen a mano, les van a permitir ver el todo del concepto desde la génesis de la idea Descartes.

Teniendo esto en mente, y, observando que para hallar la derivada algebraicamente en el tipo de funciones que estamos trabajando, el desarrollo del tema en el aula se apoyará en cualquier SCS, en este caso, hemos trabajado con Mathematica. Elaboramos los ejemplos con algunas de las funciones algebraicas que aparecen en las PAEU desde 1995 a 2009, cuyas cuentas con lápiz y papel en realidad no resultan complejas. Los propios alumnos se percataran de ello y, seguramente su inquietud les llevará a plantear derivadas de funciones más complejas ya que tienen a mano una herramienta que hace todas las cuentas por ellos.

Ejemplo 8: Hallar la derivada de $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 4}$.

Al programa se le introduce la función y se ejecuta la factorización de la expresión $f(x) - f(a)$ de tal forma que al suprimir el factor $(x - a)$ el otro factor se declara como $q(x)$. A partir de ahí, hallando $q(a)$ se tiene la derivada de la función en cualquier $a \in \mathrm{Dom}\, f$. (Véase Figura 7).

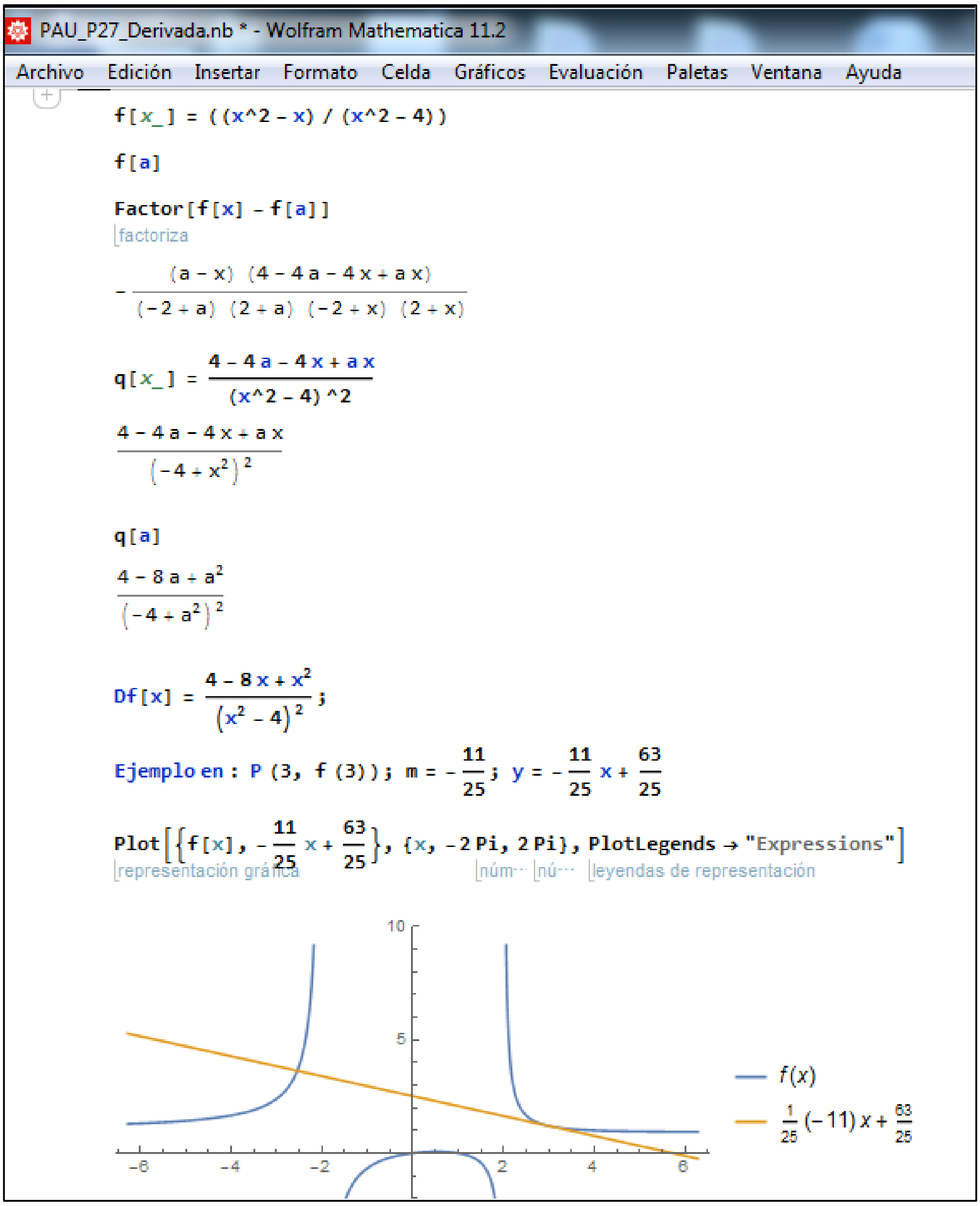


Figura 7. Ejemplo 8 de derivada con el lema de factorización usando Mathematica.

Ejemplo 9: Hallar la derivada de $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$. (Figura 8)

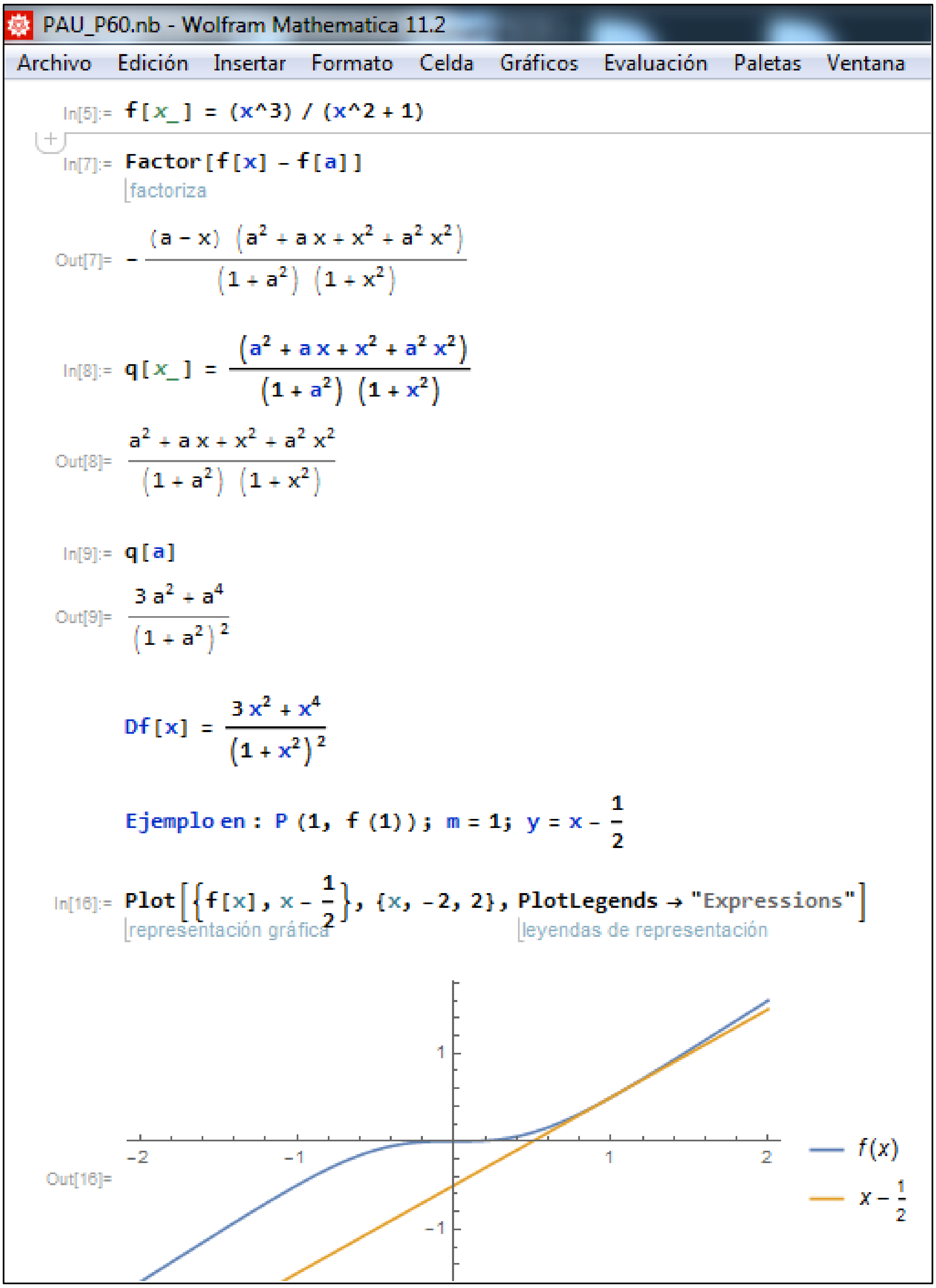


Figura 8. Ejemplo 9 de derivada con el lema de factorización usando Mathematica.

Al igual que en el ejemplo anterior se ha encontrado la derivada de la función dada con el lema de factorización.

Ejemplo 10: *Utilizando el lema de factorización, se hallará el valor de la derivada de la función* $\frac{1}{f(x)}$ en $x = a$, *siendo* $f(x)$ *derivable en* a, *y* $f(a) \neq 0$.

Solución:

Como f es derivable en $x = a$, según la definición 2, consideremos a $q(x)$ el factor racional apropiado que satisface $f(x) - f(a) = q(x)(x - a)$, es decir que, $q(a) = f'(a)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)} &= \frac{-q(x)(x-a)}{f(x)f(a)} \\ &= -\frac{q(x)}{f(x)f(a)}(x-a) \end{aligned} \tag{26}$$

De esta factorización se deduce la regla de la recíproca:

$$\begin{gathered} \left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{q(a)}{f(a)f(a)} = -\frac{f'(a)}{[f(a)]^2} \\ D\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{Df}{f^2} \end{gathered} \tag{27}$$

Con la noción de punto de doble contacto de Descartes y los métodos de simplificación de Hudde, se pueden deducir las reglas de diferenciación de funciones algebraicas (McAndrew, 2010; Range, 2016). Un estudio profuso del tema, y el uso de herramientas tecnológicas adecuadas proporcionarán a los alumnos de Bachillerato una oportunidad de lograr aprendizajes significativos relacionados con el concepto de tangente.

Aunque el anterior ejemplo se ha resuelto utilizando un método algebraico a partir del lema de factorización. Con esta noción de derivada y las consecuentes reglas de derivación ya demostradas a partir de la idea de doble contacto, se espera que el alumno resuelva el problema exactamente con el mismo conocimiento procedimental aunque no relacional, en el sentido de Skemp (1978), al finalizar el curso.

Relación entre la tangente trigonométrica y la pendiente de la recta tangente

La definición estándar de tangente es la recta que "adopta" la pendiente de la curva en un punto P sobre la curva. Desde el enfoque del doble contacto, la recta tangente es la que "adopta" la tangencia a la curva y a la circunferencia de referencia, es decir, esta idea no está lejos de la perspectiva estándar. Por otra parte, la pendiente de una recta se asocia a la tangente trigonométrica, así que, utilizando la construcción geométrica que se ha tomado como punto de partida (ver Figura 9), se puede apreciar la relación entre la pendiente de la tangente y la pendiente de la curva:

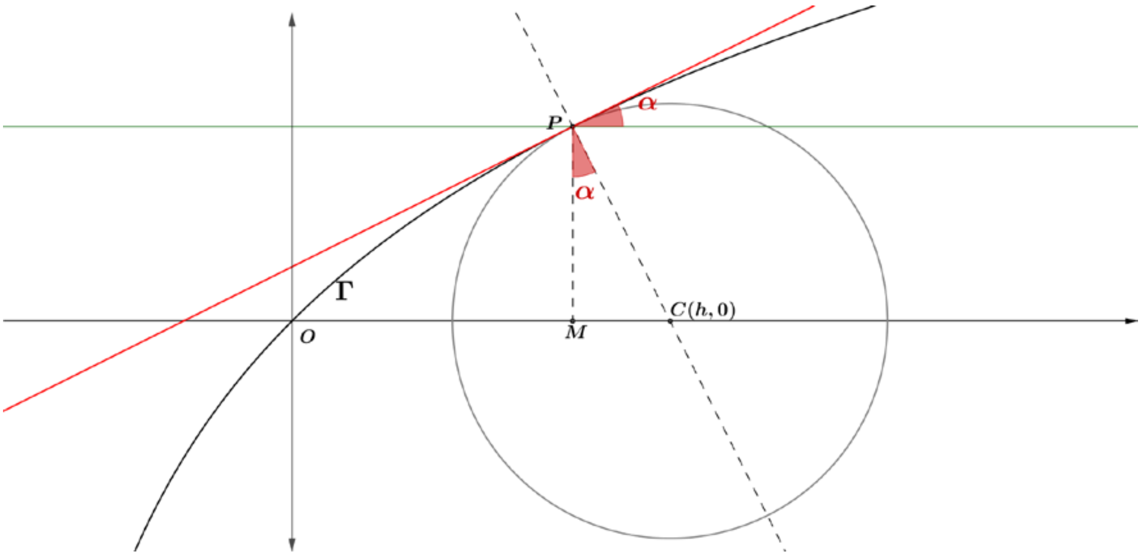


Figura 9. Relación entre tangente trigonométrica y pendiente de la tangente.

En el caso del ejemplo 1, la pendiente m de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto $P(a^2, a)$ resultó ser $m = 1/2a$. Por otra parte se encontró que $h = a^2 + 1/2$. Al hacer los respectivos cálculos de la tangente del ángulo α, tenemos que $\tan\alpha = \frac{1/2}{a} = \frac{1}{2a}$.

De lo anterior, cabe señalar que los alumnos pueden vislumbrar la conexión entre la tangente trigonométrica y la pendiente de la recta tangente a una curva de una manera muy natural y en total conexión con la definición de tangente que se ha dado (Definición 1).

Se puede vincular posteriormente con la definición de derivada que se ha presentado (Definición 2) y de manera natural se conecta la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función algebraica $f(x)$ en $x = a$ con la derivada de f en a.

Tangentes y subtangentes: un problema exponencial

Desafortunadamente, las funciones algebraicas y las técnicas algebraicas que hemos estudiado como un *preludio* del cálculo tienen bastantes limitaciones en la aplicación de muchos fenómenos fundamentales de la vida real que se explican a través de las funciones exponenciales, trigonométricas o logarítmicas. En el camino recorrido para profundizar en la comprensión de estas cuestiones, algunas mentes crearon nuevas funciones y extraordinarios conceptos que van mucho más allá de las herramientas algebraicas consideradas hasta ahora, y que -en sus raíces- requieren una extensión sofisticada del concepto de número que deriva en el constructo de los números reales. Desde nuestra perspectiva, los alumnos debieran iniciarse en el cálculo diferencial cuando se quiere ir más allá de las funciones algebraicas, es decir cuando se requiere trabajar con funciones trascendentes. En particular, una función no algebraica es la función exponencial.

A través de la técnica de diferenciación algebraica no se han podido considerar estas funciones así que, para trabajar su derivada, plantearemos un enfoque que evoca las ideas de Apolonio.

En los libros de texto de Educación Secundaria que hemos revisado[11] se introduce el concepto de función exponencial a partir de su expresión funcional y, salvo la base que se toma (2 o e por ejemplo), o los valores que se introducen en una tabla de a lo más 10 valores, para ver el comportamiento de la función, no difieren en más aspectos. A partir de ello generalizan el comportamiento, dominio, recorrido, gráfica y un par de aplicaciones (todo ello en dos páginas). Inmediatamente se introduce la función logarítmica, también a partir de valores que se encuentran utilizando la calculadora con la función ya implementada. Cuando ya se han calculado los "suficientes valores" para ver la regularidad y se ha hecho la respectiva gráfica en el plano cartesiano, se señala al logaritmo como la función inversa de la exponencial, a partir de los datos que arrojan las respectivas abscisas y ordenadas de cada una de ella y, se ratifica con la simetría de las dos curvas con respecto a la recta $y = x$.

Quizás, en la caracterización de la función exponencial está la respuesta al problema que ha supuesto hallar algebraicamente la derivada de esta función en un punto dado.

Cuando Descartes y Fermat comienzan a aplicar la geometría analítica, redefinen conceptos antiguos, que ya había trabajado Apolonio por ejemplo, adaptándolos a su nueva geometría. Conceptos como los de *subtangente* y *subnormal* sobre los que posteriormente Leibniz planteó algunas cuestiones.

---

[11] Anaya, Santillana, Vicens-Vives, SM y Edelvives de 4º de la ESO opción B.

Si L es la recta tangente a la curva Γen el punto $P(a,b)$, y $(x_T,0)$ es la abscisa al origen de dicha recta, la *subtangente* se define como el segmento de recta entre los puntos $(x_T,0)$ y $(a,0)$, es decir la proyección del segmento cuyos extremos son el punto de tangencia y el punto de corte de la tangente con el eje x (véase la Figura 10). De manera análoga, la *subnormal* es el segmento de recta entre el punto donde la recta normal corta al eje x, $(x_N,0)$, y el punto $(a,0)$; en otras palabras, la proyección del segmento cuyos extremos son el punto de tangencia y el punto de corte de la normal con el eje x.

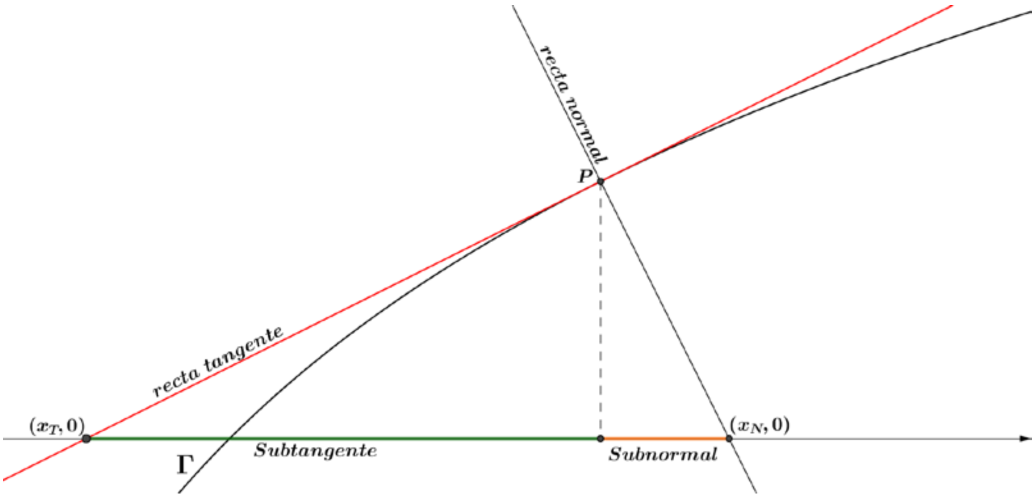


Figura 10. Subtangente y subnormal.

Las curvas exponenciales fueron introducidas en 1684 cuando Leibniz (1646-1716) planteó el problema de encontrar todas las curvas con subtangentes constantes. La solución a tal problema son las curvas exponenciales. Es decir, para una constante $b \neq 0$, se verifica que:

$$f(x) = ke^{\frac{x}{b}}$$

para alguna constante $k \neq 0$, si y sólo si la subtangente de la curva es constante.

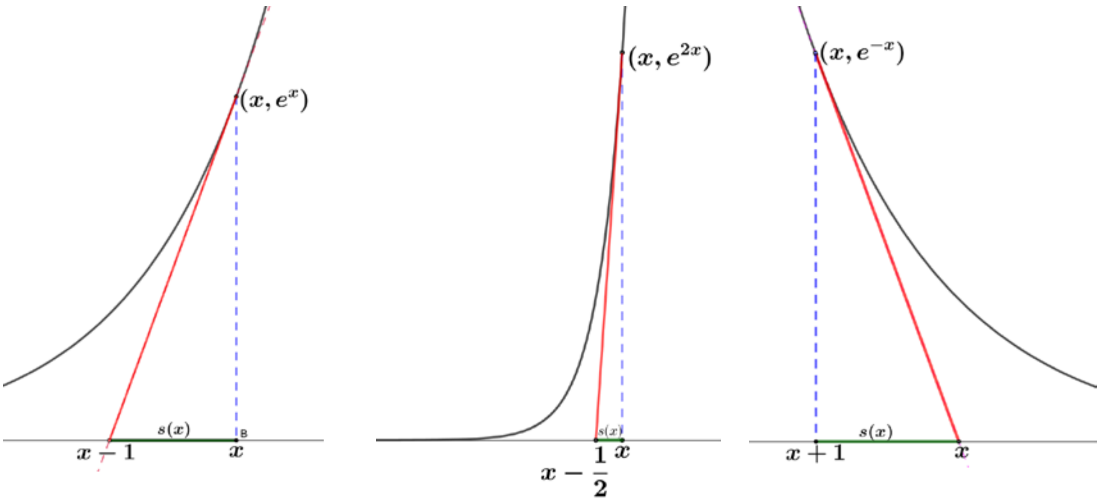


Figura 11. Subtangentes de funciones exponenciales.

A partir de la noción de subtangente, $s(x)$, se puede caracterizar a las funciones exponenciales. Esta construcción se puede hacer de manera muy visual utilizando software que ya está al alcance tanto de los estudiantes como de los propios profesores (véase la Figura 11).

Sin embargo, dicho lo anterior, si en el cuarto curso de Educación Secundaria no se define la función exponencial como lo hizo Leibniz, y, la noción de recta tangente se trabaja posteriormente en 1º de Bachillerato, entonces, ¿cómo "allanar el terreno" para poder caracterizar la función exponencial de esta forma?

La propuesta es básicamente definir la función exponencial después de que se haya trabajado el concepto de límite. Como mencionamos anteriormente, pareciera que la función exponencial estuviese puesta "con calzador" y sin conexión en los libros de texto. Su tratamiento en el avance de los cursos se ve muy alejado de su contexto de aplicación.

Si se pretende plantear la función exponencial ya desde los elementos del cálculo diferencial, nos parece oportuno hacer alusión a la conexión que, por lo menos en las funciones algebraicas se puede establecer entre la tangente desde el doble contacto y la tangente desde el punto de vista del cálculo diferencial. Este apunte se esboza en el siguiente apartado.

Tangentes y diferenciabilidad

La existencia de la recta tangente y la diferenciabilidad de una función es, en las aproximaciones formales por *definición,* la misma noción. Los alumnos después de enfrentarse al concepto de límite inminentemente se encontrarán con tal aproximación. Este no es el caso de la noción que hemos dado de recta tangente. La conexión con la derivada en este sentido es la expondremos a continuación.

Si ya tenemos la definición de recta tangente desde el doble contacto ¿cómo enlazar esta definición con la diferenciabilidad de la función en el punto de doble contacto?

Por una parte, la forma de "diferenciabilidad" que se ha definido (30) y en la cual la factorización juega un papel fundamental, se sigue que si f es diferenciable en a entonces su dervada $f'(a) = q(a)$ es una buena aproximación por los valores de $q(x)$ cuando $x \neq a$ y $x \to a$, esto es, por la razón de cambio $[f(x) - f(a)]/(x - a)$ para $x \neq a$. En particular se puede observar la equivalencia de esta definición con la estándar en términos de cociente de diferencias. Aunque la definición de diferenciabilidad que se ha planteado se conoce y se ha usado ocasionalmente por muchos autores desde hace varios años, aún no ha sido difundida ampliamente. Según Range (2016), desde su conocimiento, el primero en introducirla fue Carathéodory (1873-1950) en su texto cásico *Funktionentheorie* (1950) y ha sido utilizada en muchos textos de análisis real y complejo germanos desde mediados de los 60's. Sin embargo, desde la traducción al inglés de esta obra en 1956, el primer texto de habla inglesa que utiliza esta formulación se publica hasta 1996. En diversos libros que posteriormente se publicaron y que hacen uso de la formulación de Carathéodory está probada la equivalencia entre la diferenciabilidad de la definición (30) y la dada vía cociente de diferencias.

Por otra parte, en el trabajo de Bivens (1986) se encuentra un teorema que también da la respuesta a tal cuestión. Aunque el autor introduce el concepto de tangente desde un punto de vista geométrico y analítico y, como el mismo autor afirma "motivaría la conceptualización de la derivada en la forma usual", la parte que nos interesa resaltar es la conexión que él hace entre el concepto de tangente a una función en un punto P de la gráfica y la pendiente de dicha tangente. Tenemos claro que Bivens establece la tangente como la recta que "más se parece" a la curva en el punto, y que se explica de manera profusa. En el mismo artículo Bivens establece la relación entre la derivada y la recta tangente a partir de un teorema con el cual luego se hace la conexión que mencionamos anteriormente.

Pensamos que esta perspectiva de "mejor aproximación" pretende concretar la idea de Newton en el libro I, Sección I, Lema I de los Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1689): "Las cantidades, y las razones de cantidades que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales" Fragmento tomado de Saiz (2004, p.109).

Según señala el autor: "es una aproximación natural que posteriormente se podrá conectar con fluidez con la derivada". Para Bivens, la noción de "máximo parecido" significa que la recta tangente en un punto es la mejor aproximación lineal a la curva en ese punto. Según señala Bivens, su enfoque es intuitivo, y contempla aspectos geométricos y analíticos. Sin embargo, nosotros ya hemos planteado un acercamiento geométrico y algebraico de la recta tangente desde la noción de punto de doble contacto.

Cualquiera de las dos perspectivas establece igualmente la derivada como la pendiente de la recta tangente a un punto P de la gráfica de una función algebraica, así que, desde la nuestra, queremos señalar la conexión entre la existencia de la recta tangente y la diferenciabilidad de la función (con la aproximación usual vía límite) que se expone a los alumnos después de que han tenido contacto con el concepto de límite.

Para ello, recurrimos al enunciado del Teorema 1 de Bivens (p.139):

Teorema 1. *La gráfica de una función* $y = f(x)$ *tiene una recta tangente* L *en* $P = (a, f(a))$ *si y sólo sí* $f'(a)$ *existe y es igual a la pendiente de* L.

La demostración de este teorema se encuentra en la misma referencia.

Este enfoque enseña a la recta tangente como un objeto geométrico en sí mismo, e independiente de la derivada en el sentido del cálculo diferencial.

Teniendo ya en mente la introducción del cálculo *infinitesimal* a partir del concepto de límite y la conexión con la recta tangente, la subtangente y la derivada, se puede dar la caracterización de función exponencial que dio Leibniz.

En adelante, la conexión entre la pendiente de la recta tangente y la derivada en una función exponencial seria evidente, y la posterior conexión con la derivada también.

De hecho se tiene que si la subtangente $s(x)$ es constante en las funciones exponenciales, los propios alumnos pueden observar que la pendiente de esa tangente coincide con la derivada y, que está dada por:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{s(x)} \tag{28}$$

El doble contacto para extremos

El trabajo de Hudde es uno de esos casos en los que ciertos recursos algorítmicos preceden a la definición de conceptos que hoy conocemos como su fundamento. En lo que se refiere a los máximos y mínimos, en su trabajo Hudde incluye una prueba puramente algebraica y, rigurosa para los estándares modernos y contemporáneos de que su método puede usarse para encontrar valores extremos (Suzuki, 2005). Todos los métodos de Hudde están basados en su teorema y ninguno de ellos hace o requiere apelar a los límites. De acuerdo con lo que se ha señalado hasta el momento, ciertas transformaciones de funciones algebraicas han permitido evidenciar y emplear lo que hoy conocemos como función derivada antes de que ésta fuese introducida de la manera estándar.

Para hallar valores extremos Hudde empieza su prueba considerando un polinomio $P(x)$ que es el producto de dos polinomios. Uno de tercer grado: $x^3 + px^2 + qx + r$ y uno de segundo grado con un cero de orden 2 $x^2 - 2xy + y^2$ (en donde $x = y$ es el cero de orden 2). Por lo tanto, los ceros de $P(x)$ satisfacen:

$$\begin{aligned} P(x) = (x^2 - 2xy + y^2)x^3 \\ + (x^2 - 2xy + y^2)px^2 \\ + (x^2 - 2xy + y^2)qx \\ + (x^2 - 2xy + y^2)r = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

En donde por conveniencia se designa el polinomio $(x^2 - 2xy + y^2)$ como el "*coeficiente*" de los términos del polinomio cúbico.

Se puede observar que los términos x^2, $-2xy$, e y^2 de los coeficientes corresponden a términos de grado descendente en $P(x)$; por tanto, cuando un polinomio de Hudde se forma a partir de él, los coeficientes se multiplicarán por términos sucesivos en la sucesión aritmética a, $a + b$,$a + 2b$, para que resulte:

$$ax^2 - (a + b)2yx + (a + 2b)y^2, \tag{30}$$

Si $x = y$, este coeficiente será

$$ay^2 - (a + b)2y^2 + (a + 2b)y^2, \tag{31}$$

El cual es exactamente cero. Por tanto, todos los coeficientes del polinomio de Hudde serán cero cuando $x = y$, con lo cual, $x = y$ será un cero del polinomio de Hudde. De manera análoga, se puede probar para polinomios de por lo menos quinto grado. Al hacer la extensión para polinomios de cualquier grado (Marín, 2007), de manera similar, se esperaría que dicho procedimiento quede suficientemente claro.

Geométricamente, la aplicación del teorema de Hudde para encontrar el valor extremo de una función polinómica es evidente: Suponiendo que $f(x)$ tiene un valor extremo en $x = a$, con $f(a) = Z$. Entonces, $f(x) - Z$ tendrá un cero de orden 2 en $x = a$, y, el correspondiente polinomio de Hudde tendrá un cero en $x = a$. Podría pensarse que el método requiere conocer el valor del extremo Z para encontrar el valor extremo, sin embargo, si $f(x)$ es una función polinómica, la sucesión aritmética puede elegirse a conveniencia, de tal forma que el término constante (y por lo tanto Z) quede multiplicado por 0. Por ejemplo, para encontrar los valores extremos del polinomio $4x^3 - 21x^2 + 18x - 254$, supongamos conocido el valor extremo y, que dicho valor es Z y esto ocurre cuando $x = a$; por tanto, el polinomio $4x^3 - 21x^2 + 18x - 254 - Z$

tendrá un cero de orden 2 en $x = a$. Al multiplicar por la sucesión aritmética que termina en cero, se elimina el valor de Z:

$$
\begin{array}{cccccc}
4x^3 & - & 21x^2 & + & 18x & 254 - Z \\
3 & & 2 & & 1 & 0 \\
\hline
g(x) = 12x^3 & - & 42x^2 & + & 18x &
\end{array} \qquad (32)
$$

En este proceso de eliminación se puede reconocer el polinomio de Hudde $g(x)$ como $x \cdot f'(x)$. Hudde no dio detalles pero presumiblemente se pueden localizar los valores extremos hallando los ceros de $g(x)$. A la ecuación $g(x) = 0$ se del denomina ecuación de Hudde. Desde el principio se ha asumido que $x = a$ es un cero de orden 2 del polinomio original, así, por el teorema de Hudde, $x = a$ es también solución de la ecuación de Hudde, es decir, $x = a$ es solución de $12x^3 - 42x^2 + 18x = 0$. Como las soluciones de esta ecuación son $x = 0$, $x = 3$ y $x = 1/2$, al menos una de ellas debe coincidir con el cero de orden 2 del polinomio original para el valor apropiado de Z; según corresponda, se debe realizar el respectivo cálculo para verificar cuál (si lo hay) corresponde de hecho a un extremo. En este caso, en $x = 1/2$ se tiene un máximo local, en $x = 3$ se encuentra un mínimo local y, en $x = 0$, en la época contemporánea se diría que es un punto extraño, y, en términos modernos que es un punto de inflexión.

En la última parte del trabajo de Hudde en la *Geometría* de Descartes aplicó su método a extremos restringidos ampliando el método a funciones definidas implícitamente, con lo cual, todas las funciones algebraicas pueden ser tratadas utilizando sus métodos (Suzuki, 2005).

Una aproximación natural a las derivadas del seno y el coseno

En el seminario de Innovación Docente que se ha mencionado anteriormente[12], también señaló el profesor Ortega la importancia de mostrarles a los alumnos en estos niveles la relación entre la representación de las funciones seno y coseno y la representación del seno y el coseno en la circunferencia goniométrica. En palabras del propio profesor, se debe "establecer la relación que guardan, ya que, parece que cuando lo estudiamos en el instituto son cosas totalmente distintas y en muchas ocasiones con una explicación gráfica todo cobra sentido".

Teniendo en cuenta este enfoque didáctico para el desarrollo de las funciones seno y coseno dado por el profesor Ortega, la toma de contacto que ya han realizado los alumnos con la geometría analítica y las aplicaciones a la física, la perspectiva que

[12] En el contexto del MUPES.

planteamos para que los alumnos *vean* de forma natural la derivada del seno y el coseno, que parte de estos constructos, como bien señala el título de este apartado, *vendrá de forma natural.* Los estudiantes no necesitan asumir conceptos nuevos ni mover algún tipo de maquinaria cognitiva especial para poder acceder a la noción de derivada de estas funciones desde el enfoque visual que expondremos a continuación y que se basa en el artículo de Palais (2001).

Las funciones seno y coseno aparecen de manera natural en el estudio de la geometría de los triángulos. Además su ámbito de influencia se extiende por muchos campos de la matemática y la física. Sirven para modelar, entre otros, el movimiento armónico simple y el comportamiento de circuitos eléctricos. Sin embargo, su definición es bastante sencilla: si se tiene una circunferencia de radio 1, centrada en el origen del plano cartesiano, las funciones seno y coseno de un ángulo θ se obtienen de la siguiente manera: se considera un rayo que parte del origen y que forma un ángulo θ medido en el sentido contrario al de las agujas del reloj, con el semieje positivo de las x. Este rayo interseca la circunferencia mencionada en un punto P, la abscisa y la ordenada del punto P son precisamente el coseno y el seno del ángulo θ (Figura 12).

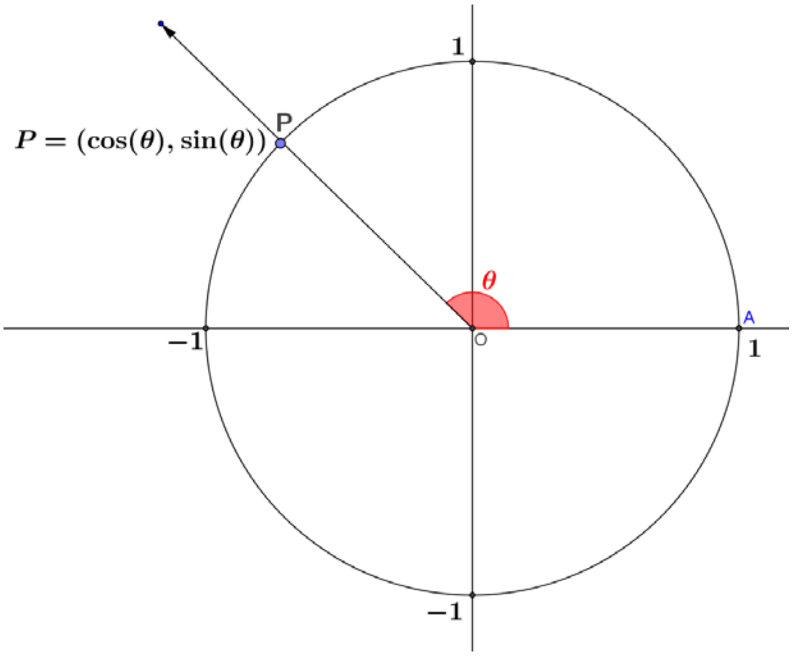


Figura 12. Definición del seno y el coseno en la circunferencia goniométrica.

La determinación clásica de las derivadas del seno y del coseno se inicia con el cálculo del límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1 \tag{33}$$

Este cálculo emplea una construcción geométrica y el teorema del “emparedado”. Las fórmulas de área involucradas se valen del hecho de que el ángulo x esté medido en radianes. Por lo tanto el límite, así como sus consecuencias: las derivadas de las funciones seno y coseno (y por lo tanto, las de las demás funciones trigonométricas) son válidas solo cuando los ángulos son medidos en radianes. Este enfoque resulta “poco natural” y rodea de un manto de confusión, para muchos estudiantes, la comprensión de los resultados obtenidos.

El enfoque aquí presentado sigue las ideas de la geometría dinámica. Considera puntos en movimiento y velocidades. Como las coordenadas de un punto pueden ser visualizadas como proyecciones sobre los respectivos ejes, podemos visualizar los movimientos simultáneos de un punto que gira sobre la circunferencia de radio 1 y los de los puntos proyección sobre los ejes x e y que representan, respectivamente, el coseno y el seno del ángulo correspondiente. Se puede observar un par de instantáneas del movimiento en la Figura 13.

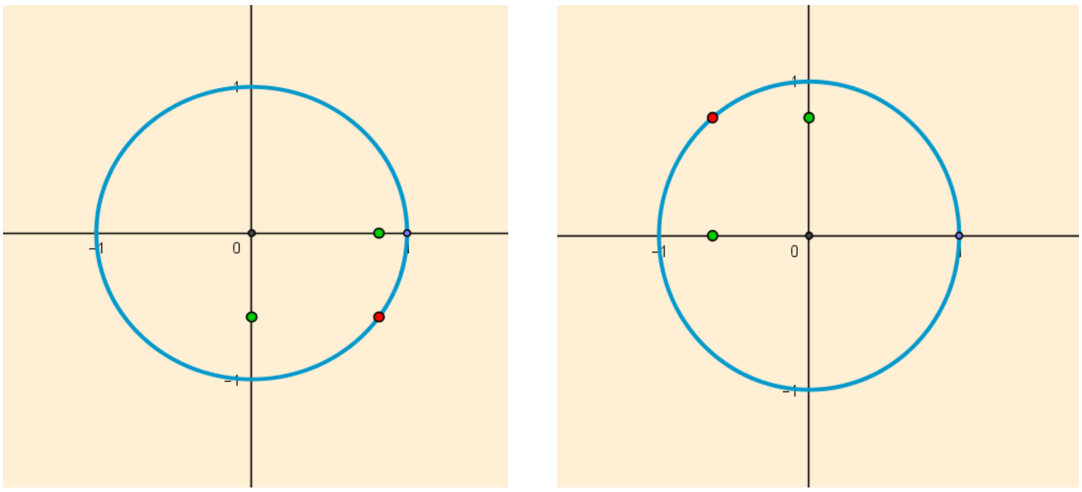


Figura 13. Punto que gira sobre la circunferencia. Para una animación pulsar aquí [Animación 3](#).

Los hechos de que el seno sea la ordenada del punto P, y que coincida el ángulo θ con el arco recorrido por el punto P, desde el punto (0, 1) hasta su posición actual, pueden ser ilustrados mediante la animación cuya instantánea está en la Figura 14.

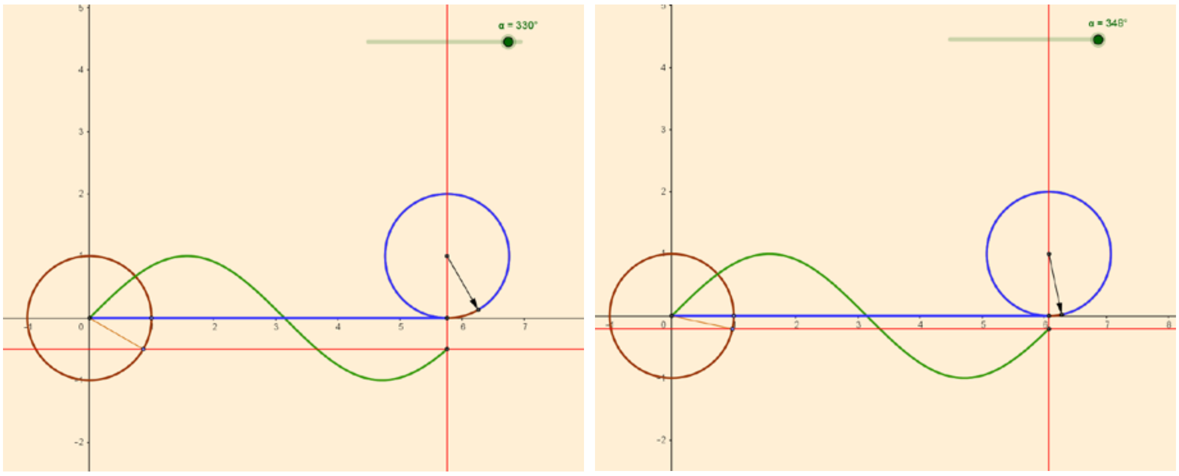


Figura 14. Construcción dela función seno. Para una animación pulsar aquí: [Animación 4](#).

El coseno, al ser la abscisa de P, se mide en el eje x, es decir es una medida horizontal. Para poder visualizar su gráfica de manera análoga a como se hizo con el seno es necesario rotar los ejes un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Véase en la Figura 15 dos momentos de la animación.

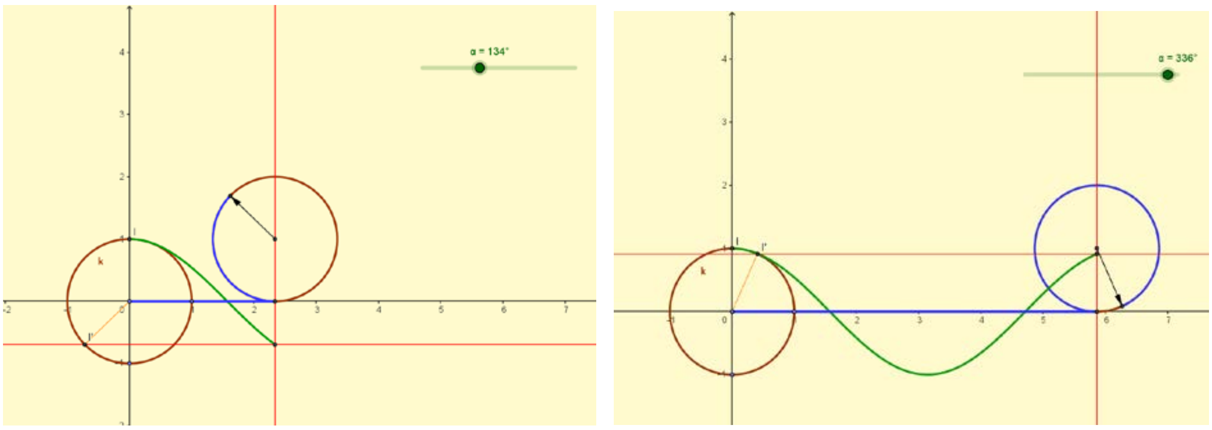


Figura 15. Construcción de la función coseno. Para una animación pulsar aquí: [Animación 5](#).

Ahora visualizamos de manera simultánea las dos animaciones anteriores (Figura 16).

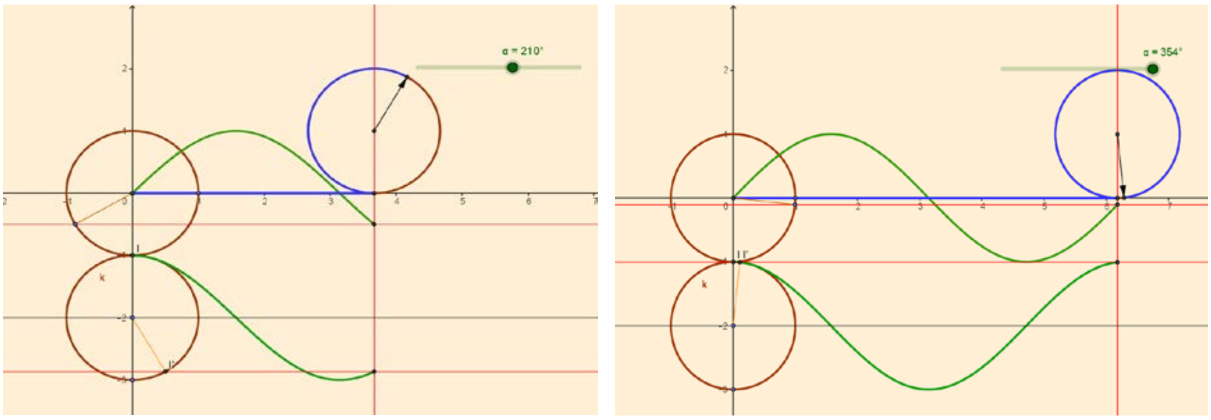


Figura 16. Construcción simultánea del seno y coseno. Para animación pulsar aquí: [Animación 6].

Para obtener, en cada punto, una recta con pendiente igual a coseno de θ, se emplea un punto que esté una (1) unidad a la izquierda del punto que representa a θ, y se une con el punto cuya altura es coseno de θ. Ver Figura 17.

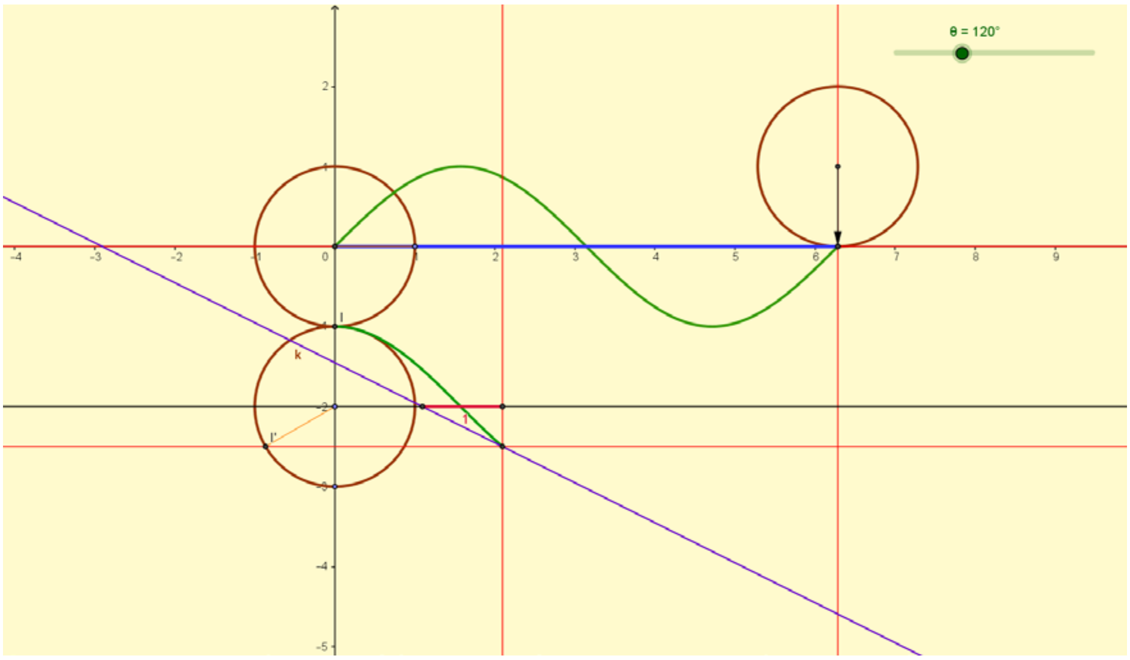


Figura 17. Construcción de rectas con pendiente $\cos\theta$. Pulsar aquí: [Animación 7].

Finalmente trazamos una recta paralela a la anterior que pase por el punto correspondiente pero ahora en la gráfica del seno (Figura 18), se evidencia que la recta con pendiente coseno es tangente a la curva $y = sen(x)$.

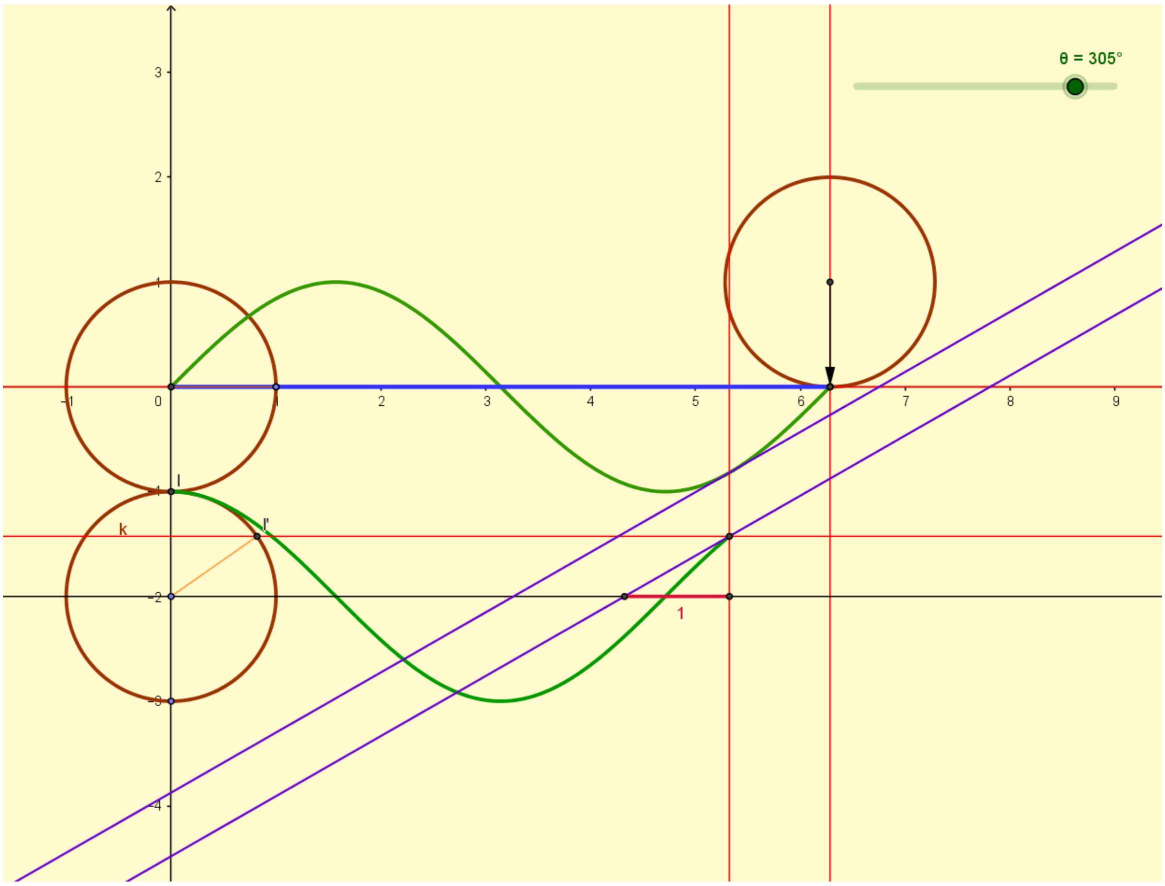


Figura 18. La recta con pendiente coseno es tangente a $y = \sin(x)$. Pulsar aquí: Animación 8.

Por último, la forma natural de ver las derivadas de seno y coseno desde un punto de vista dinámico considera la parametrización de un punto que se mueve sobre la circunferencia de radio 1. (Figura 19).

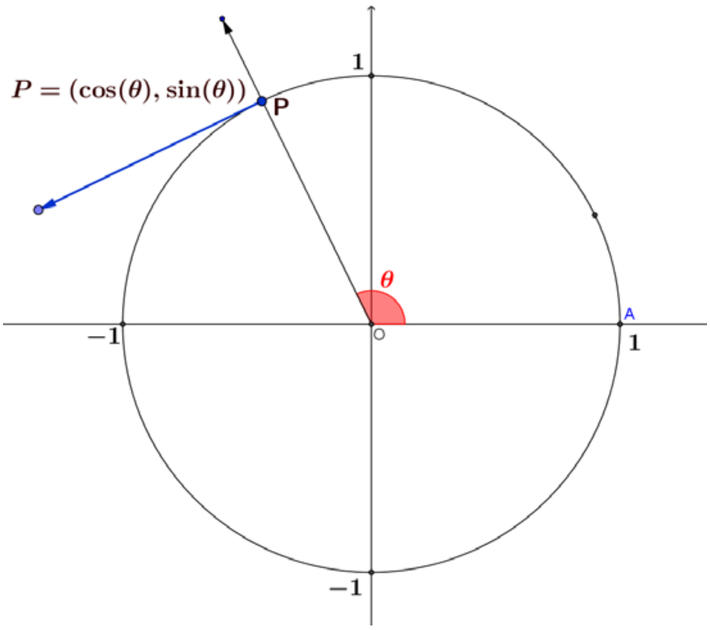


Figura 19. Movimiento de un punto sobre la circunferencia goniométrica.

La parametrización correspondiente es $x = \cos(\theta)$ e $y = \mathrm{sen}(\theta)$. Como el punto siempre está a la misma distancia del centro su vector de velocidad no tiene componente en la dirección del radio, por lo tanto es perpendicular a este. Además, al coincidir el ángulo, que es el parámetro, y el arco que es la trayectoria seguida por el punto la velocidad es 1. Así que, el vector velocidad es tangente a la circunferencia y tiene norma 1. Si lo trasladamos paralelo al origen vemos que presenta un desfase de $\frac{\pi}{2}$ en relación al ángulo θ. (Véase Figura 20).

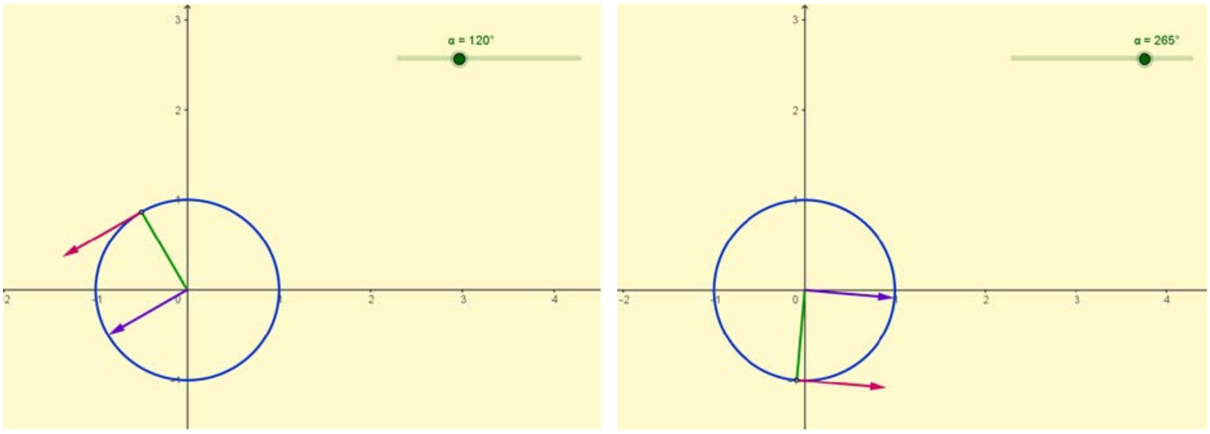


Figura 20. Vector velocidad. Para una animación pulsar aquí: Animación 9.

Por lo tanto, las componentes del vector velocidad serían $\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \mathrm{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Pero, según se evidencia en la Figura 21,

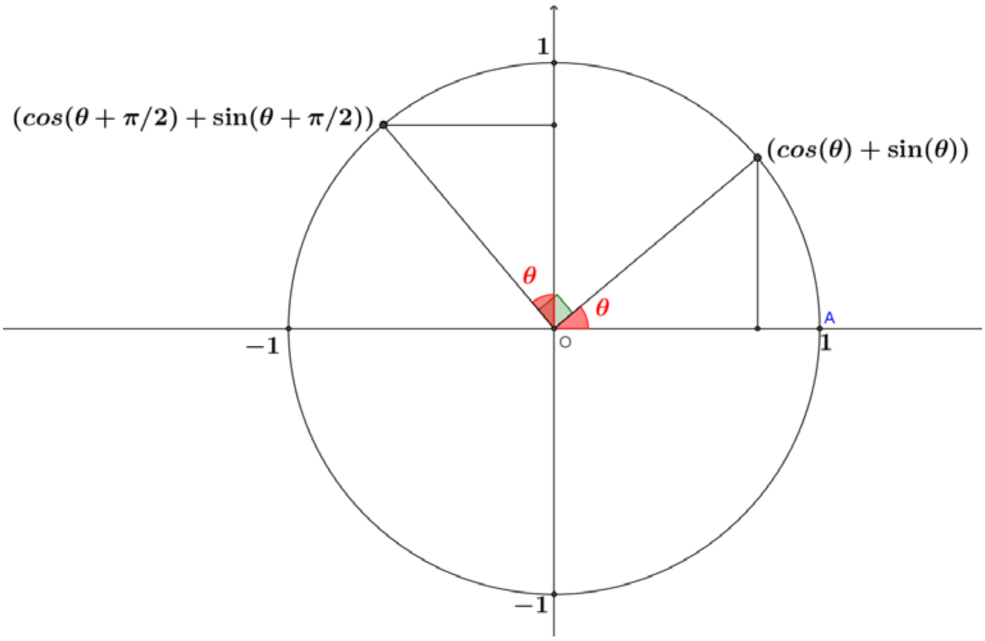


Figura 21. Componentes del vector velocidad.

se tiene,

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(\theta) \tag{34}$$

y

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta) \tag{35}$$

Con lo cual, $(\cos(\theta))' = -\operatorname{sen}(\theta)$ y $(\sin(\theta))' = \cos(\theta)$.

Para terminar, se puede visualizar en un mismo eje tanto la gráfica de la curva $y = \operatorname{sen}(\theta)$ como la de su derivada (Figura 22), que, como mencionamos anteriormente evidencia que la recta con pendiente coseno es tangente a la curva $y = sen(x)$.

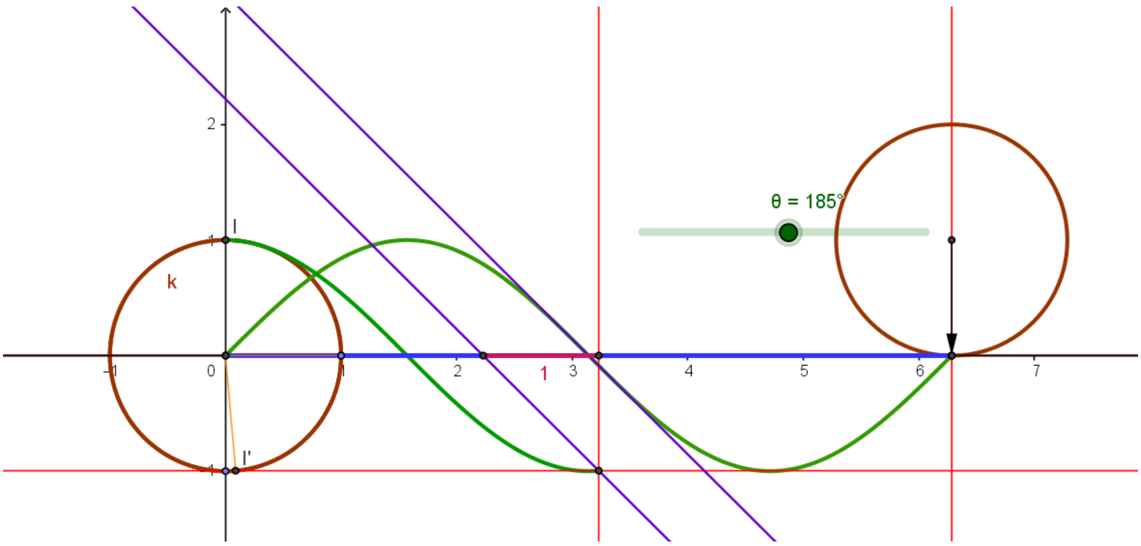


Figura 22. Curva $y = sen(\theta)$ y su derivada. Para una animación pulsar aquí: Animación 10.

Las asíntotas: una evidencia de los "*límites*" de lo algebraico

Como se mencionó antes, la idea de un curso de nociones propias del cálculo sin recurrir al concepto de límite no es nueva, ya se ha demostrado en (McAndrew, 2010; Sangwin, 2011; Suzuki, 2005). En esta sección sin embargo, en nuestro intento por plantear una visión global a la vez que constructivista, y, teniendo como referente la competencia profesional del docente de matemáticas desde los elementos de concreción en el modelo del "Conocimiento matemático para la enseñanza" (Hill, Ball, & Schilling, 2008), MKT (Mathematical knowledge for teaching), queremos plantear una propuesta de enseñanza de las asíntotas que pensamos, cubre las distintas componentes de dicho marco de referencia.

Nuestro objetivo no es profundizar en la parte teórica de dicho marco, sino más bien exponer una propuesta que consideramos tiene en cuenta las distintas categorías que contempla dicho modelo.

En este apartado partimos de la necesidad de introducir las ideas de lo infinitamente pequeño e indefinidamente pequeño que dan lugar al adjetivo de *infinitesimal* del cálculo de Leibniz y Newton. En Saiz (2004) se encuentran de manera bastante detallada muchas de las polémicas que se levantaron en torno a los controvertidos conceptos de lo infinito y lo infinitamente pequeño. Discusiones, cartas entre matemáticos ilustres y posturas a favor y en contra de tales ideas primitivas. Gran parte de la dificultad residía en la ausencia del concepto de límite, que impedía establecer el concepto de convergencia y divergencia o, concretamente de infinitésimo e infinito. Según señala Saiz, fue d'Alembert (1717-1783) quien, aparte de que ante una fundamentación tan oscura del nuevo cálculo aconsejaba a sus alumnos: "persistid y os llegará la fe", avanzó más en este problema. Apunta igualmente el autor que, fue el propio d'Alembert, quien dio una correcta aproximación de la definición actual del límite.

Desde nuestro quehacer como profesores como hemos señalado en la parte de los antecedentes las enormes dificultades que subyacen a la comprensión de conceptos propios del cálculo. Somos conscientes a la luz de las evidencias, que si tales nociones han suscitado tanta controversia y han tenido en sus desarrollos tanto detractores como defensores desde el conocimiento de las matemáticas puras es de esperarse que, para los niveles en los que se introducen dichas nociones surjan de forma tácita dificultades de comprensión. Como un apunte curioso, a este respecto, Saiz habla de cuatro matemáticos que cita Bails, de los cuales afirma (al referirse a las nociones de lo infinito y lo infinitamente pequeño) "su aportación al esclarecimiento de dichos conceptos es nula”. Un indicio más de la gran dificultad que supone el trabajar con los fundamentos del cálculo infinitesimal.

Cuando estudiamos la forma en que se presenta en los libros de texto de bachillerato el concepto de asíntota, nos encontramos básicamente con tres enunciados que más allá de plantear una explicación, ya sea geométrica, algebraica, analítica (o con una posible combinación de ellas), tan sólo da la definición en términos del límite. De comprensión relacional con los conceptos que previamente se han estudiado, no encontramos evidencia más allá del cálculo de límites y de secuencias de ejercicios que, a modo de ejemplo muestran los pasos que se han de seguir para hallar tales asíntotas. Pensamos que dadas las definiciones a partir de los límites, el docente juega un papel muy importante a la hora de explicar por qué las asíntotas se definen de ese modo, o, por lo menos conectar con los conceptos previos relacionados con los elementos que intervienen en su definición.

En un intento por aportar una perspectiva de la enseñanza de las asíntotas en conexión con los conocimientos previos establecidos en el currículo oficial, planteamos una primera propuesta de enseñanza del concepto de asíntota desde el currículo y desde el enfoque de doble contacto que hemos planteado.

Aunque pensábamos que solo se contemplaba “el conocimiento en el horizonte” del MKT, para una segunda propuesta de la enseñanza del concepto de asíntota, hemos vislumbrado que en realidad aborda, en cierto modo, todas las dimensiones de dicho marco. Esta segunda iniciativa viene motivada por varias razones. Una de ellas es la que tiene que ver con el desarrollo epistemológico del concepto de asíntota desde la aparición del cálculo diferencial. Pese a que L’Hôpital (1661-1704) ni siquiera da una definición de asíntota, como dice en su *Analyse des infiniment petit* “uso el cálculo diferencial para encontrar las tangentes a cualquier curva” (Citado en Saiz, 2004, p. 504) y, tampoco concede demasiada importancia a la definición del concepto de asíntota, halla asíntotas a ciertas curvas utilizando la noción de subtangente. Su formación Leibniziana de manos de Jean Bernoulli le influenció para hacer sus cálculos apoyándose en el triángulo diferencial y en términos de $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$. Bézout en su *Cours de mathématiques* siguió el método establecido por L’Hôpital con una novedad, que es, el que con la notación actual y el conocimiento de la derivación implícita queremos exponer desde una perspectiva didáctica y relacional. Otra razón es la que tiene que ver con el conocimiento en el horizonte, es “la conciencia de cómo los temas matemáticos están relacionados en todo el trayecto curricular en donde las matemáticas están incluidas” (Loewenberg Ball, Thames, & Phelps, 2008, p.400). Los alumnos en el currículo ven tangentes a funciones y desde esta base la noción se puede aplicar a ciertas curvas de manera natural. Según está establecido el currículo oficial, los alumnos ven asíntotas a funciones antes que a curvas (si es que alcanzan a verlas) y, esto no es acorde con la episteme del concepto, sin embargo, consideramos que este es uno de esos ejemplos en los que una secuencia curricular no necesariamente debe desarrollarse en función de la gnoseología del concepto. Una motivación más que hemos de añadir es que aunque el tema de derivación implícita no está contemplado en la LOMCE algunos institutos destacados como el IES Marqués de Lozoya de Segovia lo mantienen en su proyecto curricular. Cabe anotar que el tema estaba incluido LOGSE y quizás parte del profesorado es consciente de la necesidad de no excluirlo del currículo institucional. Igualmente queremos subrayar que, en el Bachillerato internacional (BI) la derivación implícita es un tema que se incluye en la programación curricular.

Primer enfoque: un traje hecho a la medida del currículo

Como se ha mencionado anteriormente, esta etapa educativa tiene un carácter propedéutico, eso se manifiesta no sólo en los formatos que presentan los libros de texto sino muchos de los profesores en ejercicio, quienes manifiestan que deben dedicar mucho tiempo en preparar a los alumnos para los temas propios de la EBAU. Esto, a nuestro modo de ver “boicotea” de alguna forma la esencia del aprendizaje significativo.

Para la realización de las dos propuestas para hallar asíntotas estudiamos, según el currículo oficial, los temas previos relacionados, en algunos libros de texto de distintas editoriales y el desarrollo histórico del concepto de asíntota desde la aparición del cálculo diferencial.

Estudiamos igualmente todos los ejercicios de las PAEU desde 1995 a 2009, en los que piden a los alumnos hallar las asíntotas de funciones, en total de 15 (Zamora, 2014). Siete de ellos tenían que ver con funciones racionales, 5 con funciones exponenciales de base e y los restantes con funciones logarítmicas (todas con el logaritmo natural). En el desarrollo de tales ejercicios, basta “recordar” los procedimientos que se deben seguir según la definición de asíntota que, como ya mencionamos, se da en los textos. Es un proceso que más bien parece algorítmico, como bien se puede evidenciar en los procedimientos para dar solución a cada ejercicio resuelto en los libros de texto. No cuestionamos el que en últimas, haya que seguir tales procedimientos sino todo el tratamiento que se da al concepto desde su propia definición. Somos conscientes que después de presentar nuestro planteamiento también se sigue una secuencia de procesos, pero la idea es que los alumnos los desarrollen con un preámbulo que les permita relacionar tales procedimientos con una idea clara del concepto que trabajan.

Sabemos que los problemas de tangentes y cuadraturas eran los que dominaban en la época de Barrow (1630-1677), ocupan un lugar destacado en sus *Lectiones geometicae*

(1670). Barrow explica un método para hallar tangentes “que es prácticamente idéntico al que se usa en el cálculo diferencial” (Boyer, 1999) y es, básicamente idéntico al de Fermat, a diferencia de que en él aparecen dos cantidades (en términos modernos Δx y Δy) en lugar de una (E en el caso de Femat). Según Boyer, de los matemáticos que participaron en el preludio del cálculo diferencial, ninguno se aproximó tanto como Barrow al nuevo análisis que estaba al caer.

Pero ¿por qué hablamos del método de las tangentes de Barrow si ya hemos presentado el método de Descartes? La respuesta reside en que Barrow determina la subtangente y a partir de ella la tangente. En últimas, lo que queremos destacar, es que desde las diversas construcciones de la tangente que tienen en cuenta la noción de subtangente se puede entender mejor a posteriori (desde nuestro enfoque) la noción de asíntota.

La propuesta se va a plantear para funciones algebraicas. Esto lo hacemos teniendo en mente dos aspectos fundamentalmente. El primero de ellos es el que tiene que ver con la contextualización desde la perspectiva del marco del MKT, las dimensiones que hacen referencia al conocimiento común del contenido, el conocimiento del horizonte matemático, el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento de la enseñanza del contenido y el conocimiento curricular. El segundo tiene que ver tanto con el carácter propedéutico del nivel y de nuevo con la última dimensión que hemos mencionado. Es evidente por el estudio profuso que ha realizado la profesora Zamora (2014) que se debe trabajar más el conocimiento relacional. Somos conscientes de que la amplitud de temas y los estándares que se deben cumplir dejan poco margen a profundizar en ciertas ideas, y es precisamente por ello que pensamos que nuestra propuesta es sencilla, y, por el carácter de conexión que se hace tanto con los conocimientos previos como con la visualización del método, los alumnos de alguna manera podrán hacer sus propias conexiones entre conceptos y los procesos.

Los griegos ya daban significado a la palabra “asíntota” ($A\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\tau o\iota =$ no caer juntos) aunque era más amplio que el actual, pues se referían a cualquier línea que no se puede tocar en cualquier dirección que se presente. Apolonio, en *Las Cónicas*, restringe el sentido de recta que se aproxima cada vez más a la hipérbola, tendiendo la distancia a cero. Podemos repasar los significados de Euler, las tres de d’Alembert, y algunas otras realmente interesantes, pero no es el objeto de nuestro estudio.

La propuesta didáctica comienza exponiéndoles a los alumnos la definición de asíntota que guarda cierta relación con una definición que da Castel en su libro *Mathematique universelle abrégée* (1758) : “Una asíntota es imaginada como una tangente que alcanza a la curva en el infinito, es decir, infinitamente lejos, o si se quiere no la alcanza, pero se aproxima siempre, como una tangente a la que no le falta más que el último punto de contacto" (citado en Saiz, 2004). (Figura 23). En esta parte nos centraremos en la perspectiva de Ricatti ante esta situación. Ricatti parte de lo que sucede con la pendiente de la recta tangente a la curva en el infinito, siendo las asíntotas las rectas con tal pendiente pero que tengan finita una de las coordenadas en el origen. Aunque también tendremos en cuenta lo que sucede con la pendiente de la tangente en el infinito, no lo haremos del mismo modo que lo hizo Ricatti, que es, bastante similar al actual (Saiz, 2004).

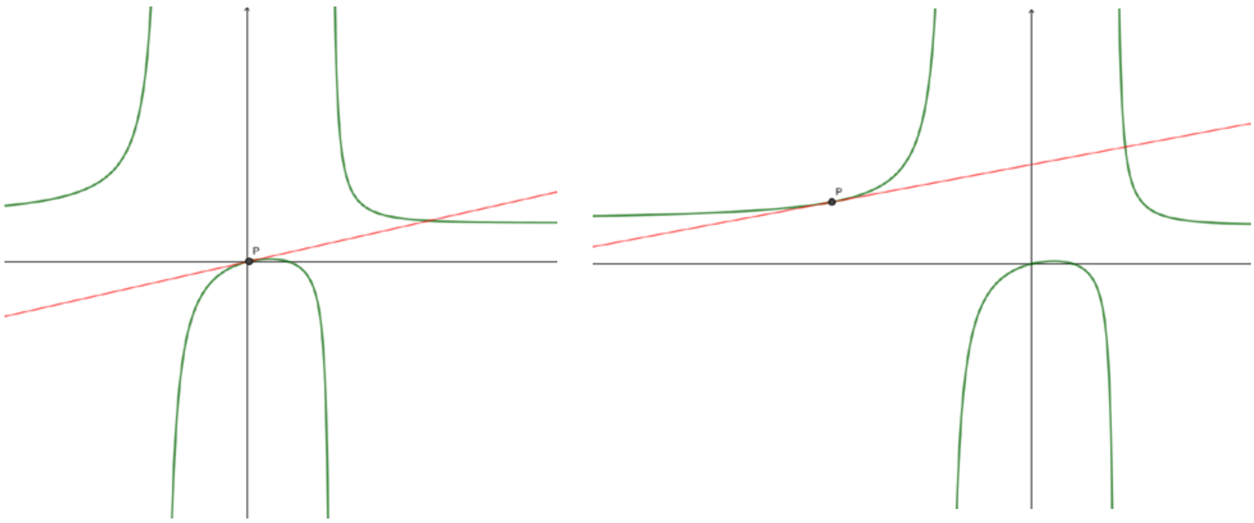


Figura 23. Interpretación de asíntota según Castel. Para una animación pulsar aquí: Animación 11.

A partir de aquí, damos por sentado que los alumnos han tenido contacto con el concepto de límite, e igualmente, haciendo la equivalencia que mencionamos anteriormente entre la tangente desde el doble contacto, la derivada y la pendiente de la recta a la gráfica de una función en un punto dado en el Teorema 1, tienen las nociones que subyacen a nuestro planteamiento. También se tiene en cuenta que pueden hallar la ecuación de una recta teniendo la pendiente y un punto de la recta. No haremos referencia a las asíntotas verticales y en este nivel nos parece pertinente la definición usual:

"La recta $x = k$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ sii alguno de los límites laterales de la función en $x = k$ es infinito"

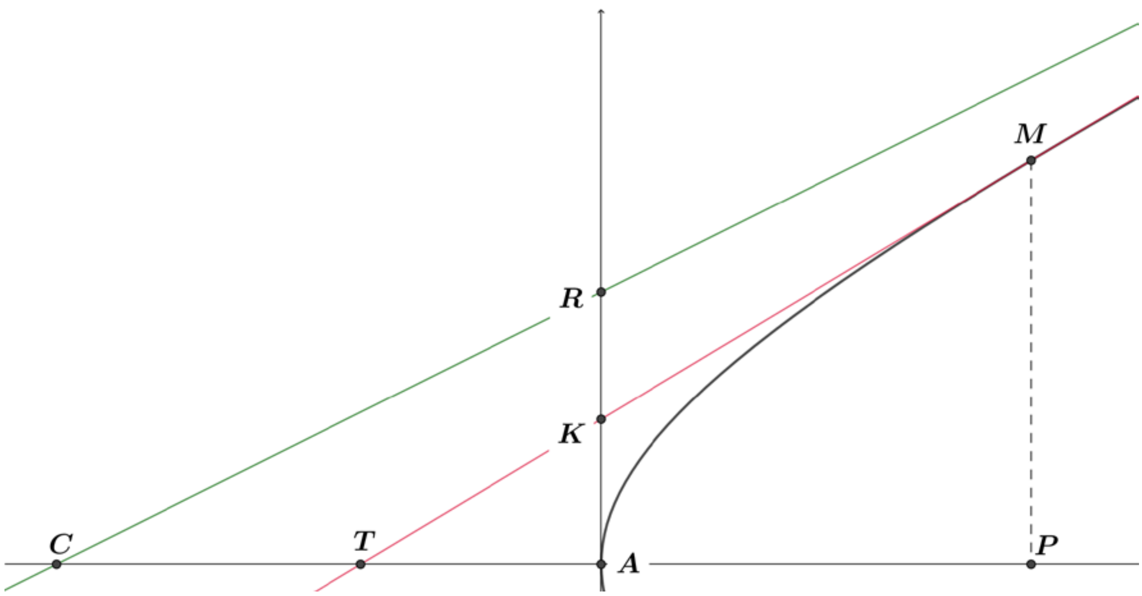


Figura 24. Método para hallar tangentes de Bézout.

Nuestra definición para funciones algebraicas, viene inspirada por la definición de Bézout, que, en resumen, estudia lo que sucede con la subtangente y la ordenada al origen cuando la tangente se va "tirando" hacia el infinito. En términos actuales, consiste en calcular las coordenadas en el origen de la recta tangente en el infinito, si es finito alguno de los límites $AC = \lim_{x\to\infty} AT$ y $AR = \lim_{x\to\infty} AK$. (véase Figura 24 y para ver animación pulsar en Animación 12).

Según Bézout : *"Una curva tiene una asíntota rectilínea cuando la tangente 'tirada' desde el extremo de algún ramo infinito de la curva encuentra al eje de abscisas u ordenadas a una distancia finita del origen"*

En el caso del nivel en lugar de curva, se adapta la definición, a *la gráfica de la función.* Aunque el profesor puede puntualizar a los alumnos que esto se puede generalizar por ejemplo a curvas que ya han trabajado, como las hipérbolas, y les puede mostrar otros ejemplos que seguramente les permitirán ver, como hemos señalado anteriormente, el *horizonte del contenido.*

Nuestra idea en esencia es que los alumnos hallen las asíntotas horizontales u oblicuas a partir de su pendiente y su ordenada al origen. Desde este enfoque, si $m(x) = f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente en cualquier punto sobre la curva, entonces, la pendiente de la asíntota de la curva estará dada por el

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} m(x)$$

y la ordenada al origen, n, la encontramos en el punto en el cual la diferencial coincide con la función, es decir, estará dada por

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

Es un cambio sutil con respecto a la definición usual que se suele dar para el cálculo de las asíntotas, pero no se están utilizando más que los elementos que ya son familiares al alumno: la pendiente de la recta tangente y la ordenada al origen.

Sin hacer ninguna secuencia de casos previos, haciendo lectura de los posibles resultados, si los dos límites existen y $m \neq 0$. La función tendrá una asíntota oblicua, y si $m = 0$ la asíntota será horizontal. En el caso de no existir ninguno de los límites, la curva no tendrá asíntotas horizontales ni oblicuas.

Cabe anotar, que para funciones trascendentes no oscilantes este método también funciona; con él, hemos resuelto los 15 ejercicios propuestos en las PAEU desde 1995 a 2009. Pensamos que es una manera natural de dar el salto a las asíntotas en estos niveles, más aún cuando son este tipo de funciones en las que se plantean usualmente hallar las asíntotas tanto en los libros de texto como en las pruebas de selectividad.

Cuando ya los alumnos tienen estructuras más formales relacionadas con las funciones trascendentes oscilantes, se les puede plantear la definición de asíntota desde el enfoque tradicional. Damos a continuación u ejemplo del método.

Ejemplo 10: *Halla las asíntotas de la función* $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

$$\begin{gathered} m = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = 1 \\ n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-2x} - x\right) = -1 \end{gathered} \tag{36}$$

Las asíntotas son oblicuas, una de ellas la recta $y = x - 1$. Cuando $x \to -\infty$, con el proceso análogo resulta la otra asíntota oblicua $y = -x + 1$, que mostramos en la Figura 13.

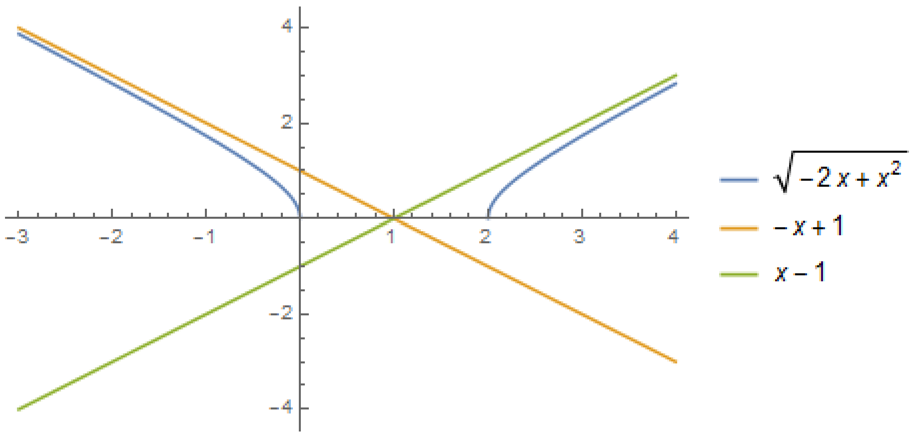


Figura 25. Gráfica y asíntotas del ejemplo 10.

Ejemplo 11: Ejercicio de las PAEU. *Halla las asíntotas de la función* $f(x) = e^{2x-x^2}$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} e^{2x-x^2}(2-2x) = 0 \\ n &= \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left(e^{2x-x^2}-0\right) = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

La asíntota es horizontal y es la recta $y = 0$. Se puede ver en la figura 14.

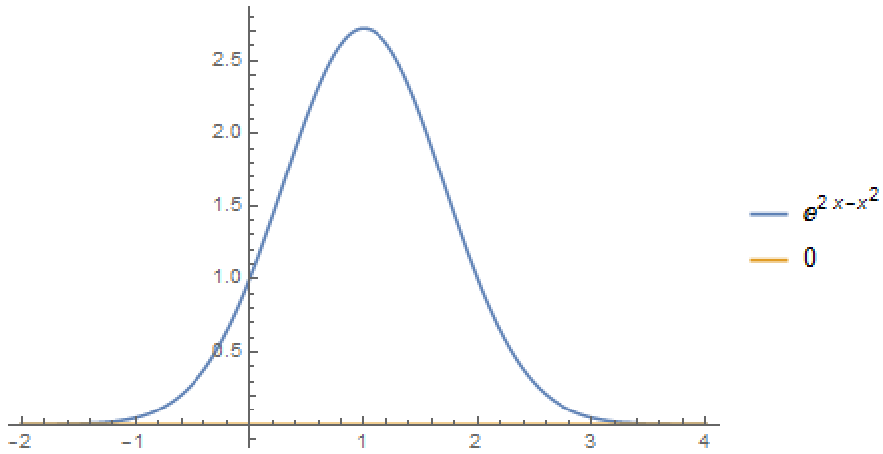


Figura 26. Gráfica de la función del ejemplo 11 sacado de las PAEU.

Podemos observar que aunque esta no es una función algebraica es trascendente no oscilante, y, como mencionamos anteriormente, el método funciona.

Muchos procesos naturales se pueden describir mediante una función que describe la evolución temporal desde unos niveles bajos al inicio hasta acercarse a un clímax después de transcurrido cierto tiempo. Una función que permite observar este comportamiento y que se les puede enseñar como una buena aplicación a la vida real a los alumnos es la *función sigmoide*, cuya gráfica presentamos en la figura 15.

La función sigmoide está dada por $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ y estudiaremos su comportamiento asintótico con el mismo método que venimos trabajando:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = 0 \\ n &= \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - 0\right) = 1 \end{aligned} \tag{38}$$

Cuando $x \to \infty$, tenemos como asíntota horizontal la recta $y = 1$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = 0 \\ n &= \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - 0\right) = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Cuando $x \to -\infty$, tenemos como asíntota horizontal la recta $y = 0$.

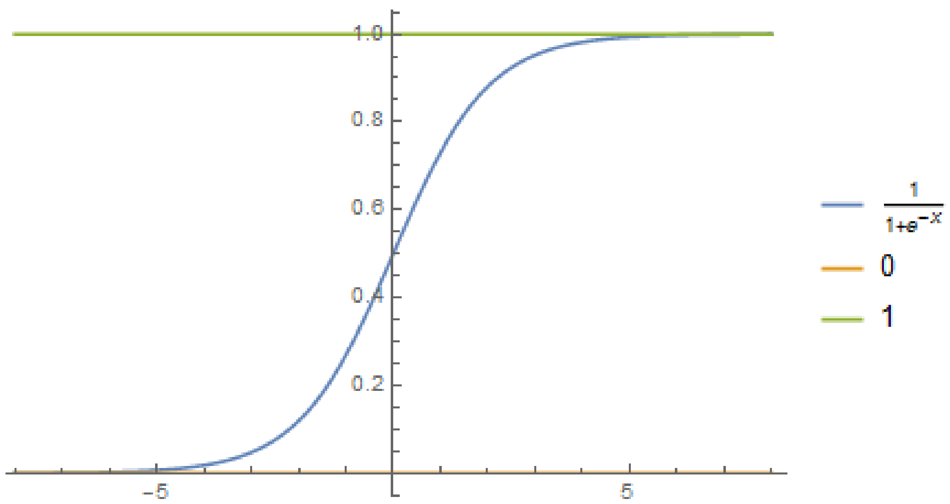


Figura 27. Sigmoide con sus asíntotas.

Este es otro ejemplo de función que no es algebraica, y siendo trascendente es no oscilante. Como hemos insistido previamente, este método es pertinente para el tipo de funciones que usualmente se trabaja en el currículo y que, pensamos cubren satisfactoriamente los estándares de aprendizaje y competencias marcadas a nivel oficial.

Segundo enfoque: Atención a la diversidad con la mirada puesta en el MKT

Siguiendo con la perspectiva de Bézout, y con la notación propia de la derivación implícita seguiremos la definición pero ya no desde el punto de partida de Riccati (con la mirada puesta en la pendiente de la recta tangente) sino desde el cálculo de las coordenadas en el origen de la recta tangente en el infinito, un enfoque que nos ha parecido muy intuitivo y cuyo camino fue marcado por L'Hôpital. Aunque ya lo mencionamos anteriormente a manera introductoria, en términos actuales, la idea es calcular las coordenadas en el origen de la recta tangente en el infinito, si es finito alguno de los límites $AC = \lim_{x\to\infty} AT$ y $AR = \lim_{x\to\infty} AK$. (de nuevo véase Figura 12). En caso de existir uno sólo de los límites, se tendrá una recta paralela al eje horizontal, si los dos existen, la asíntota será oblicua.

En la notación actual, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ si $y = f(x)$.

Pero aquí ya estamos bajo el supuesto que los alumnos han trabajado derivación implícita y que saben hallar dada la ecuación de una curva tanto $\frac{dy}{dx}$ como $\frac{dx}{dy}$ y se les ha enseñado su relación.

Pues bien, partiendo del hecho de que ya saben hallar la ordenada al origen de la asíntota de una función mediante el límite:

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

Utilizando la notación de L'Hôpital pero para curvas, se tendría:

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[y - \frac{dy}{dx}\cdot x\right]$$

igualmente, para hallar la abscisa al origen de la asíntota a la curva, llamándola t como lo hizo Bézout:

$$t = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x - \frac{dx}{dy}\cdot y\right]$$

Así, las coordenadas de las respectivas ordenada y abscisa al origen de las asíntotas a las curvas están dadas por $(0, n)$ y $(t, 0)$ en caso de que estas existan. Como ya hemos mencionado anteriormente, caso de existir uno sólo de los límites, se tendrá una recta paralela al eje x, si los dos existen, la asíntota será oblicua.

Debemos tener en cuenta, que no en todas las curvas se pueden expresar los límites en términos de x, sin embargo, las que se plantean en estos niveles (e inclusive otras que van un poco más allá) sí que se pueden dar explícitamente en dicha variable.

A los alumnos se les debe insistir en que lo que se pretende es hallar dos puntos de la asíntota para luego hallar su ecuación. Los casos de la existencia o no de los límites también se les puede plantear de manera muy visual, pero profundizaremos en ello.

Hemos encontrado un caso especial, en el cual, los dos límites coinciden y son cero. Esto en efecto, significa que se trata de una asíntota oblicua que pasa por el origen. Al tener un solo punto, en este caso, basta calcular el límite de la pendiente de la tangente en el infinito con los dos puntos, $\left(0, y - \frac{dy}{dx} \cdot x\right)$ y $\left(x - \frac{dx}{dy} \cdot y, 0\right)$. Esto es, hallar:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \left(- \frac{y - \dfrac{dy}{dx} \cdot x}{x - \dfrac{dx}{dy} \cdot y} \right)$$

Veremos lo sencillo que resulta aplicar el método para hallar asíntotas en curvas que en muchos casos, parecían estar fuera del alcance de los alumnos.

Ejemplo 12: Se puede plantear el mismo ejercicio del ejemplo 10, para que ellos analicen los resultados y comparen sus resultados. *Halla las asíntotas de la función* $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

La función se puede dar de manera implícita como $y^2 = x^2 - 2x$, con $y > 0$.

Vamos a hallar los cortes de las asíntotas con el método de Bézout:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to \infty} \left(y - \frac{dy}{dx} \cdot x \right) = -1 \\ t &= \lim_{x \to \infty} \left(x - \frac{dx}{dy} \cdot y \right) = 1 \end{aligned} \tag{40}$$

Vemos que cuando $x \to \infty$, los puntos de corte con los ejes son $(0, -1)$ y $(1,0)$, con estos dos puntos los alumnos ya pueden hallar la ecuación de la asíntota. De igual forma se halla la asíntota cuando $x \to -\infty$ y vemos en los dos casos coinciden con el resultado del ejemplo 10.

Ejemplo 13: Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Tenemos que $y = \frac{x^2+1}{x}$, con lo cual

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty}\left(y - \frac{dy}{dx}\cdot x\right) = 0 \\ t &= \lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{dx}{dy}\cdot y\right) = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

Vemos que cuando $x \to \infty$, el punto de corte con los ejes es el mismo $(0,0)$. Este es el caso que mencionamos anteriormente, por tanto, basta hallar:

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{y - \frac{dy}{dx}\cdot x}{x - \frac{dx}{dy}\cdot y}\right) = 1$$

Por tanto, la asíntota pasa por el punto $(0,0)$ y tiene pendiente 1, con lo cual, es la recta $y = x$.

Con este método los alumnos pueden hallar asíntotas de un gran número de curvas, no sólo de funciones, como mencionamos anteriormente, por ejemplo hemos hallado por el método las asíntotas de la sigmoide inclusive. Lo haremos pero ya con las simplificaciones en los cálculos:

Ejemplo 14: Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Tenemos que $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$, con lo cual:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty}\left(y - \frac{dy}{dx}\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}(1 + e^x - x) = \infty \\ t &= \lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{dx}{dy}\cdot y\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x(1 + e^x - x)}{(1 + e^x)^2} = 1 \end{aligned} \tag{42}$$

Como existir uno sólo de los límites, se tendrá una recta paralela a alguno de los ejes, en este caso, al eje x y la asíntota es horizontal y está dada por la ecuación $y = 1$. De igual modo, al calcular los límites cuando $x \to -\infty$, resultará igualmente la otra asíntota horizontal $y = 0$.

Secuencia de la propuesta

A lo largo del trabajo se han planteado diversos enfoques constructivos para abordar conceptos propios del cálculo. Destacamos que en todos los casos utilizamos un SCS como herramienta de apoyo a la docencia. Nuestra propuesta en esencia plantea a modo de declaración de intenciones adoptar la siguiente secuencia curricular:

Antes del límite:

- Definición de tangente a partir del método de Descartes.
- Método de Hudde para hallar puntos de doble contacto y extremos.
- Lema de factorización para hallar la derivada desde el punto de vista algebraico.
- Cálculo visual para la determinación de la derivada de las funciones seno y coseno.

Después del límite:

- Hallar asíntotas horizontales y oblicuas a partir de la noción de subtangente, con la definición de Bézout desde dos enfoques:
  - A partir de la pendiente de la recta (Versión Riccati)
  - A partir de los puntos de la ordena y la abscisa al origen de la asíntota (Bézout)
- Plantear la definición de función exponencial caracterizándola a partir de la subtangente como lo planteó Leibniz.

Conclusiones

Al iniciar un trabajo se tienen algunas ideas, un material, un plan de trabajo. Sin embargo, en el desarrollo del trabajo en sí, se producen cambios en la perspectiva a medida que se va profundizando en la apropiación tanto de los conceptos, los procedimientos, así como de las ideas ajenas.

El empleo de software para trabajar aquellos procedimientos que, por su extensión, se vuelven tediosos y el encontrar en el artículo de Miguel de Guzmán la frase "*Aunque parece bastante obvio que el sabor de la matemática del futuro será bastante diferente del actual por razón de la presencia del ordenador, aún no se ve bien claro cómo esto va a plasmarse en los contenidos de la enseñanza primaria y secundaria"* (Guzmán, 2001). Hace que se sienta que se está formando parte activa de ese proceso de modernización de la matemática. El trabajo con el ordenador en aquellas partes de la matemática que podemos llamar clásicas es, en ocasiones, un tanto mecánico, ya que muchos de estos procedimientos ya se encuentran automatizados como es el caso, por ejemplo, del cálculo de derivadas o integrales. Sin embargo, cuando estas mismas herramientas se emplean para facilitar cálculos como los que requieren el método de Descartes o el de Hudde, se hace necesaria una participación más activa, ya que estos procesos, poco conocidos, no se encuentran automatizados y por lo tanto se requiere un trabajo que podemos llamar "de bajo nivel".

El poder transmitir estas mismas inquietudes y necesidades de construcción a los estudiantes hace que el proceso sea sumamente enriquecedor.

Desde un punto de vista didáctico, hay una enorme recompensa al llevar a cabo procedimientos que si bien resultan pobres en el sentido de su relativa poca capacidad de generalización son, en compensación, ricos en las posibilidades de comprensión, debido a su estructura más sencilla. Es probable que en el pasado se haya abandonado el trabajo sobre estos métodos en razón a la desproporción entre el ingente trabajo de cálculos mecánicos requeridos en ocasiones, frente a los escasos problemas en los que se pueden aplicar. Este panorama cambia al hacer su aparición la tecnología. En este caso el trabajo engloba tres aspectos: en primer lugar el abordaje de los aspectos teóricos que son, en general, más sencillos que los del contenido clásico. En segundo lugar el que tiene que ver con la implementación de estos procesos (de manera total o parcial) en los diferentes SCS y, por último, el que provee de una base nueva como punto de apoyo de los resultados más clásicos.

Aclaramos el párrafo anterior refiriendo sus elementos al caso particular de la obtención de la recta tangente a una curva mediante los puntos de doble contacto. Este problema se resuelve de manera clásica calculando la derivada y evaluándola en el punto en cuestión. Los SCS hacen este cálculo de forma automática. En cambio, al emplear el método de Descartes, es necesario construir un polinomio adecuado que equilibre los grados de los polinomios a izquierda y derecha del igual. Las ecuaciones resultantes pueden ser resueltas empleando el SCS. Se obtienen las coordenadas del centro de la circunferencia tangente, se puede graficar esta y obtener la recta tangente como la perpendicular al radio en el punto de tangencia. Hay más trabajo para hacer pero a la vez se fijan más las ideas involucradas. El empleo de construcciones más complejas en el graficador del SCS hace que se vaya consiguiendo mayor destreza en su manejo. Por último, se hace un trabajo en un nivel de transición entre el álgebra y el cálculo en el que, con recursos de aquella se resuelven problemas propios de este. Esto se constituye en un tránsito más suave y natural de un nivel al otro, ya que se comienza con la manipulación de algunos objetos propios del cálculo pero empleando exclusivamente las familiares herramientas del álgebra, apoyándose, cuando los cálculos se tornen tediosos, en un SCS que ayuda a que lo complejo de los cálculos no ensombrezca la sencillez del método.

Gauss dijo, refiriéndose a su manía de cubrir los pasos intermedios que le habían permitido lograr algunos de sus formidables resultados, que "*el arquitecto retira los andamios, una vez construido el edificio*" aquí hemos intentado lo contrario, reconstruir algunos andamios buscando que el trabajo matemático sea más enriquecedor y por lo tanto esté más en consonancia con su misión de facultar a quien lo ejerce para resolver problemas que requieren una alta dosis de ingenio.

La LOMCE en su Decreto (Ministerio de Educación, 2015) establece unos contenidos básicos de aprendizaje, que hemos abordado desde un enfoque distinto al que tradicionalmente se plantea en el currículo y, por ende en los libros de texto de Matemáticas para el Bachillerato.

La historia que empieza con el antiguo problema de hallar las tangentes en su evolución ha conducido a la construcción de herramientas matemáticas muy potentes que han permitido un amplio espectro de aplicaciones en su largo recorrido.

Estudiando una primera aproximación algebraica al problema de las tangentes desde la idea seminal de doble contacto que dio Descartes, se ha presentado una propuesta para abordar el concepto de derivada en funciones algebraicas para que los alumnos puedan entender y practicar las fórmulas de diferenciación antes de enfrentarse al concepto de límite. Desde nuestra perspectiva, esta es una aproximación elemental que facilita la posterior introducción del cálculo diferencial. La definición de derivada que se ha dado y que es puramente algebraica se puede conectar posteriormente de una manera natural con la idea de la derivada como el "límite" de un cociente de diferencias utilizando el lema de factorización (30). Un estudio más profuso de cómo seguir por este camino de tal forma que se logre ampliar a funciones más generales, como las exponenciales, trigonométricas y otras funciones trascendentales, se encuentra en Range (2016).

Los estudiantes pueden aprender todas las reglas de derivación y algunas aplicaciones estándar en un contexto que les es familiar y prescindiendo de conceptos nuevos y abstractos que subyacen al concepto de límite y que supone la propia comprensión de dicho concepto.

Aunque no se hace la demostración en el documento, la regla de la cadena, es decir la más importante de las fórmulas de diferenciación, se puede deducir de una manera completamente natural y elemental y se puede demostrar previamente a la regla del cociente y del producto. Esto, en el contexto de enseñanza-aprendizaje, acerca mucho a los alumnos a adquirir un aprendizaje significativo desde el propio concepto de derivación y, desde el enfoque competencial del currículo a potenciar habilidades para la adquisición de conceptos más abstractos.

Estudiar la derivada desde el doble contacto abre una vía de acceso a tópicos propios del análisis que involucran funciones reales. La versión de Carathéodory de diferenciabilidad se puede usar de forma más amplia en los textos de cálculo y análisis. Es una generalización natural del método de punto doble contacto, y permite realizar pruebas simples de teoremas estándar del cálculo tradicional.

A lo largo del documento se ha hecho evidente la forma en que, a cada paso conceptual se avanzó incorporando sistemas de cálculo simbólico que, más allá de ser uno más de los estímulos tecnológicos a los que están expuestos los estudiantes en su vida cotidiana, ha supuesto una herramienta que les permite evidenciar cuál es en verdad la función principal de la tecnología en el mundo real, no sólo en el aula. Aquí ya están trabajando en un contexto STEM, un nuevo enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas de manera integrada.

Gracias a las implementaciones que hemos diseñado la competencia aprender a aprender se trabaja de manera profusa con los discentes, ya que, ellos no sólo serán receptores de información sino que se plantearán nuevas formas de abordar y resolver problemas que otrora estaban fuera del alcance de todo aquel que no estuviese ligado asiduamente al estudio de la Matemática.

Los investigadores en Educación Matemática en general conocen la importancia que tiene la visualización en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Por ello, y siendo conscientes de que en el currículo se ven muchos conceptos desligados tanto de los conocimientos previos como de los interdisciplinares, hemos hecho una adaptación de la propuesta de la derivada del coseno y del seno de Palais (2001), utilizando el cálculo visual. En este caso, los conceptos previos a los que nos referimos son aquellos que tienen que ver con la geometría analítica, y, la interdisciplinariedad, con la física.

El presentar una propuesta de definición asíntota alternativa a la que tradicionalmente se muestra en los libros de texto, no es más que una perspectiva propia de la coherencia que debe existir entre los conocimientos previos de los estudiantes y los nuevos. Esta es, desde nuestro punto de vista un enfoque que les afianzará conceptos y les permitirá un aprendizaje significativo desde la idea inicial de subtangente. Al igual que en los conceptos previos, las animaciones que hemos diseñado les permitirá a los discentes "ver" el concepto y de alguna manera entender el porqué de algunos procesos que en muchas ocasiones realizan, en términos de Skemp, sin un conocimiento relacional.

Para atender a la diversidad, nos decantamos por presentar en un lenguaje actual, la propuesta de asíntota de Bézout, un método que viene de la idea precursora de L'Hôpital. Subyace a este método el concepto básico de hallar la ecuación de una recta teniendo dos de sus puntos. Tras de sí nuevamente la idea del comportamiento de la subtangente cuando el punto de tangencia se "tira" hacia el infinito. Aquí ya, con la idea previa de ordenada al origen en la asíntota para funciones, el aparataje que trae consigo el concepto de límite y la noción de derivación implícita, para los discentes será una manera natural de ver las asíntotas a curvas y, seguramente verán "con otros ojos" la ecuación de las asíntotas a hipérbolas que se asumen por "acto de fe" cuando trabajan previamente las cónicas como lugares geométricos a partir de 3º de la ESO.

El mundo de los "límites" nos fuerza a considerar el concepto de número más allá de lo que les es "familiar" a los estudiantes pero se debe allanar el terreno, una buena opción es mostrarles primero resultados a partir de su bagaje cognitivo de forma constructivista para luego ampliar el horizonte a terrenos, que nada tienen que ver con la intuición. Por ejemplo, ¿qué de natural tiene la base "natural" e para funciones exponenciales? Es por ello que nuestra secuencia propone introducir el concepto de función exponencial después de que se ha trabajado el concepto de límite desde la caracterización que dio Leibniz. En este sentido resaltamos la coherencia con los conocimientos previos del alumno.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In M. Artigue, R. Douday, L. Moreno, & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 97–140). México D. C.: "una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 207–220). Netherlands: Springer.

Aspinwall, L., & Miller, L. D. (1997). Students' Positive Reliance on Writing as a Process to Learn First Semester Calculus. *Journal of Instructional Psychology*, *24*(4), 253.

Bajracharya, R., & Thompson, J. R. (2014). Student understanding of the fundamental theorem of calculus at the mathematics-physics interface. In *Proceedings of the 17th special interest group of the Mathematical Association of America on research in undergraduate mathematics education.* Denver (CO).

Ball, D. L., & McDiarmid, G. W. (1990). The subject matter preparation of teachers. *Handbook of Research on Teacher Education*, 437–449.

Barjracharya, R. (2012). *Student Understanding of Definite Integrals with Relevance to Physics Using Graphical Representation.*

Bivens, I. (1986). What a tangent line is when it isn´t a limit. *The College Mathematics Journal*, *17*(2), 133–143.

Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. (Spanish). *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *9*(2), 189–209.

Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development.* Dover, New York.

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Conejo, L. (2015). Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la ley general de educación a la ley orgánica de educación. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: Modèles spontanés et modèles propres. In *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME* (pp. 322–326).

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Université I de Grenoble.

Cornu, B. (1991). Limits. In *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153–166).

Crowther, K., Thompson, D., & Cullingford, C. (1997). Engineering Degree Students are Deficient in Mathematical Expertise - Why? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.*

Donaldson, M. (1963). *A study of children's thinking.* London: Tavistock.

Fernández, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto.* Universidad de Granada.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. In *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19–42).

Gill, O., O'Donoghue, J., Faulkner, F., & Hannigan, A. (2010). Trends in performance of science and technology students (1997-2008) in Ireland. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(3), 323–339.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de Matemáticas de Secundaria.* Universidad de Granada.

González-Martín, A., & Camacho, M. (2004). Legitimization of the Graphic Register in Problem Solving at the Undergraduate Level: The Case of the Improper Integral. *International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Gonzalez-Martín, A. S., & Camacho-Machín, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. *Enseñanza de Las Ciencias*, *23*(1).

Grabiner, J. V. (1983). The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, *56*(4), 195–206.

Guzmán, M. de. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático Elementos del Análisis.* Madrid: Pirámide.

Guzmán, M. de. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma: Revista de Matemáticas= Matematika Aldizkaria*, *19*, 5–25.

Guzmán, M. de. (2002). The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (al the undergraduate level).* Grecia: University of Crete.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400.

Holm, J., & Kajander, A. (2012). "I Finally Get It!": Developing mathematical understanding during teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(5), 563–574.

Hopper, T. F. (1999). The grid: Reflecting from pre-service teachers' past experiences of being taught. *JOPERD*, *70*(7), 53–59.

Hourigan, M., & O'Donoghue, J. (2007). Mathematical under-preparedness: The influence of the pre-tertiary mathematics experience on students' ability to make a successful transition to tertiary level mathematics courses in Ireland. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(4), 461–476.

Jefatura del Estado. (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletin Oficial Del Estado*. de 10 de diciembre de 2013.

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 122–141.

Kennedy, M. M. (1999). The role of preservice teacher education. *Teaching as the Learning Profession: Handbook of Teaching and Policy*, 54–86.

Kidron, I., & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 183–199. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9567-x

Lockhart, P. (2009). A Mathematician's Lament. *Devlin's Angle March*, *1*(March), 1–25. Retrieved from https://bit.ly/2tsqXQq

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*.

Marín, Á. (2007). Las reglas nos guían hacia los conceptos. *Suma*, *55*, 61–66.

McAndrew, A. (2010). An elementary, limit-free calculus for polynomials. *The Mathematical Gazette*, *94*(529), 67–83.

Ministerio de Educación, C. y D. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletin Oficial Del Estado*. de 7 de septiembre de 2001.

Nardi, E., & Steward, S. (2003). Is mathematics T.I.R.E.D? A profile of quiet disaffection in the secondary mathematics classroom. *British Educational Research Journal*.

O'Meara, N., Fitzmaurice, O., & Johnson, P. (2017). Old habits die hard: An uphill struggle against rules without reason in mathematics teacher education. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *5*(1), 91–109.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1–18.

Palais, R. (2001). The Natural Cosine and Sine Curves. *Journal of Online Mathematics and Its Applications(JOMA).*

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future. PME 1976-2006* (pp. 205–235). Sense Publishers.

Range, R. M. (2014). Descartes's double point method for tangents: An old idea suggests new approaches to calculus. *Notices of the AMS*, *61*(4).

Range, R. M. (2016). *What is Calculus? From Simple Algebra to Deep Analysis.* World Scientific.

Rasslan, S., & Tall, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 89–96.

Rico, L., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., & Socas, M. (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L., & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. In L. Rico, J. Lupiáñez, & M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular.* Granada: Comares, S.L.

Saiz, L. (2004). *Aproximación desde la antigüedad a través de los textos de geometría al cálculo diferencial contenido en los "elementos de matemática" de Benito Bails. Generación y primeros pasos del nuevo Cálculo.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Sangwin, C. J. (2011). Limit-free derivatives. *Mathematical Gazette*, *95*(534), 469–482.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des" découpages infinis" des surfaces et des solides. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *11, 241–29*(2/3), 241–294.

Schoenfeld, A. H. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of "Well-Taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, *23*(2), 145–166.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS (American Mathematical Society)*, *47*(6), 641–649.

Schoenfeld, A. H. (2009). Working with schools: The story of a mathematics education collaboration. *American Mathematical Monthly*, *116*(3), 197–217.

Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning-epistemology, history, and semiotics interacting: To the memory of Carl Menger (1902-1985). *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 79–104.

Schwarzenberger, R. L. E., & Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *82*, 44–49.

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 46–53).

Sierpińska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *6*(1), 5–67.

Sierpińska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* London: The Falmer Press.

Sierra, M., González, M. T., & López, M. del C. (1998). Límite funcional y continuidad: desarrollo histórico y concepciones de los alumnos. In *Actas del V Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática.* Toro: SCLPM.

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9–15.

Sparks, S. (2018, May 22). Move Over, Calculus. Statistics Is on the Rise. *Educación Week*. Retrieved from https://bit.ly/2MApEZM

Sridharma, S. (1999). The derivative of Sin theta. *The College Mathematics Journal*, *30*(4), 314.

Stacey, K. (2010). Mathematics teaching and learning to reach beyond the basics.

Suzuki, J. (2005). The lost calculus (1637-1670): Tangency and optimization without limits. *Mathematics Magazine*, *78*(5), 339–353.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 271–284.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* (Vol 11). Springer Science & Business Media.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. *… of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 495–511.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 199–238.

Thomas, M. O. J., & Hong, Y. Y. (1996). The Riemann integral in calculus: Students' processes and concepts. *Technology in Mathematics Education (Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Research Group of Australasia)*, 572–579.

Toumasis, C. (1992). Problems in training secondary mathematics teachers: The Greek experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(2), 287–299.

Turégano, P. (1993). *Los Conceptos en torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*. Universidad de Valencia.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación Y Experiencias Didácticas*, *16*(2), 233–250.

Turégano, P. (2007). Imágenes del concepto de integral definida. *Ensayos: Revista de La Facultad de Educación de Albacete*, (22), 17–57.

Vincent, B., LaRue, R., Sealey, V., & Engelke, N. (2015). Calculus students' early concept images of tangent lines. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(5), 641–657.

Vinsonhaler, R. (2016). Teaching Calculus with Infinitesimals. *Journal of Humanistic Mathematics*, *6*(1), 249–276.

Zamora, M. (2014). Análisis de las pruebas de acceso a las universidades de Castilla y León (Matemáticas II). Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Zimmerman, W., & Cunningham, S. (Eds). (1991). *Visual thinking in calculus. Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Anexos

1. Procedimiento para hallar la derivada de $y = \frac{x^2}{x-1}$ con el método de Descartes utilizando el Sistema de Cálculo Simbólico de **SAGE**. En el cuerpo del trabajo se expuso la solución del mismo ejercicio con **Mathematica**.
2. Código en Octave para calcular la derivada de la función $y = f(x) = x^{p/q}$ con p y q naturales $(q \neq 0)$, mediante el método de Hudde. Al compilar sólo se introducen los valores de p y q el programa arroja el polinomio de Hudde y la derivada.
3. Animación 1: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** del método de Descartes.
4. Animación 2: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** de la interpretación de doble contacto.
5. Animación 3: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebr**a de las proyecciones sibre los ejes de un punto que se mueve sobre la circunferencia goniométrica.
6. Animación 4: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** de la construcción de la función seno a partir de la circunferencia goniométrica.
7. Animación 5: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** de la construcción de la función coseno a partir de la circunferencia goniométrica.
8. Animación 6: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar simultáneamente las animaciones 4 y 5.
9. Animación 7: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar en cada punto, la recta con pendiente igual al coseno.
10. Animación 8: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar que a recta con pendiente coseno es tangente a la curva $y = \sin(x)$.
11. Animación 9: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar el vector tangente a la circunferencia de radio 1 y su relación con la velocidad.
12. Animación 10: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar simultáneamente la función $y = \sin(x)$ y su derivada.
13. Animación 11: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar la noción de asíntota desde la definición de Castel.
14. Animación 12: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar la noción de asíntota desde la definición de Bézout.

Anexo 1:

Procedimiento para hallar la derivada de $y = \frac{x^2}{x-1}$ con el método de Descartes utilizando el Sistema de Cálculo Simbólico de **SAGE**. En el cuerpo del trabajo se expuso la solución del mismo ejercicio con Mathematica.

```
a,r,h,A,B,C= SR.var('a,r,h,A,B,C')
f(x)=(x-h)^2*(x-1)^2+x^4-r^2*(x-1)^2
f.expand()
```

$$x \mapsto h^2x^2 - r^2x^2 - 2\,hx^3 + 2\,x^4 - 2\,h^2x + 2\,r^2x + 4\,hx^2 - 2\,x^3 + h^2 - r^2 - 2\,hx + x^2$$

```
g(x)=((x-a)^2*(x^2*A+x*B+C))
g.expand()
```

$$x \mapsto Aa^2x^2 - 2\,Aax^3 + Ax^4 + Ba^2x - 2\,Bax^2 + Bx^3 + Ca^2 - 2\,Cax + Cx^2$$

```
p(x)=f-g
p.expand()
```

$$x \mapsto -Aa^2x^2 + 2\,Aax^3 - Ax^4 - Ba^2x + 2\,Bax^2 + h^2x^2 - r^2x^2 - Bx^3 - 2\,hx^3 + 2\,x^4 - Ca^2 + 2\,Cax - 2\,h^2x + 2\,r^2x - Cx^2 + 4\,hx^2 - 2\,x^3 + h^2 - r^2 - 2\,hx + x^2$$

```
p.coefficients(x)
```

$$[[x \mapsto -Ca^2 + h^2 - r^2, x \mapsto 0], [x \mapsto -Ba^2 + 2\,Ca - 2\,h^2 + 2\,r^2 - 2\,h, x \mapsto 1], [x \mapsto -Aa^2 + 2\,Ba + h^2 - r^2 - C + 4\,h + 1, x \mapsto 2], [x \mapsto 2\,Aa - B - 2\,h - 2, x \mapsto 3], [x \mapsto -A + 2, x \mapsto 4]]$$

```
R.<a,r,h,A,B,C> = QQ[]
J=ideal(-C*a^2 + h^2 - r^2,-B*a^2 + 2*C*a - 2*h^2 + 2*r^2 - 2*h, -A*a^2 + 2*B*a + h^2 - r^2 - C + 4*h + 1,2*A*a - B - 2*h - 2,-A+2 )
```

```
J1=J.elimination_ideal([A,B,C,r])
J1
```

$$(2a^4 - a^3h - 5a^3 + 3a^2h + 3a^2 - 3ah - a + h)\mathbf{Q}[a, r, h, A, B, C]$$

```
H(h)=J1.gen(0)
H.collect(h)
```

$$h \mapsto 2\,a^4 - 5\,a^3 + 3\,a^2 - (a^3 - 3\,a^2 + 3\,a - 1)h - a$$

Por lo tanto la tangente es la recta perpendicular a la que pasa por $P = (h, 0) = (\frac{a^4 - 5\,a^3 + 3\,a^2 - a}{(a^3 - 3\,a^2 + 3\,a - 1)}, 0)$ y por $Q = (a, \frac{a^2}{a-1})$ en el punto Q.

Anexo 2.

Código en Octave para calcular la derivada de la función $y = f(x) = x^{p/q}$ con p y q naturales $(q \neq 0)$, mediante el método de Hudde. Al compilar sólo se introducen los valores de p y q el programa arroja el polinomio de Hudde y la derivada.

Editor

Archivo Editar Ver Depurar Ejecutar Ayuda

Doblecontacto.m

```
clc
clear all
syms x a m y A C r s
clc
printf("\nEste programa emplea el metodo de Descartes para calcular la\nderivada de la funcion y = x^(p/q)\n");
disp('Introduzca los valores de p y q.');
p=input('p = ');
q=input('q = ');
printf("\nPunto (a^%d, a^%d)\n\n",q,p)
C=0;
disp("Sistema: ")
printf('\ny^%d = x^%d\n',q,p)
printf('y = m(x-a^%d)+a^%d\n\n',q,p)
r=y-a^p;
s=m*a^q;
for i=1 : p+1
  C=C+nchoosek(p,i-1)*r^(p-(i-1))*s^(i-1);
endfor
C=m^p*y^q-C;
printf('Sistema despues de sustituir una ecuacion en la otra.\n');
disp(C);
c=sym2poly(C,y);
s=size(c)(2);
for i=s:-1:1
  H(i)=s-i;
endfor
printf('\nSucesion de Hudde: ');
disp(H);
C=0;
for i=1:s
    c(i)=c(i)*(s-i);
    C=C+c(i)*y^(s-i);
endfor
printf('\nPolinomio de Hudde:\n')
disp(C)
C=0;
for i=1:s-1
    C=C+c(i)*y^(s-i-1);
endfor
printf('\nDividiendo por y:\n')
disp(C)
C=subs(C,y,a^p);
printf('\nSustituyendo y = a^%d:\n',p)
disp(C)
printf('\nDespejando m = \n')
s=solve(C==0,m);
disp(s)
```

Anexos 3 al 14

Anexo 3. Animación 1: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** del método de Descartes.

Anexo 4. Animación 2: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** de la interpretación de doble contacto.

Anexo 5. Animación 3: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebr**a de las proyecciones sibre los ejes de un punto que se mueve sobre la circunferencia goniométrica.

Anexo 6. Animación 4: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** de la construcción de la función seno a partir de la circunferencia goniométrica.

Anexo 7. Animación 5: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** de la construcción de la función coseno a partir de la circunferencia goniométrica.

Anexo 8. Animación 6: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar simultáneamente las animaciones 4 y 5.

Anexo 9. Animación 7: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar en cada punto, la recta con pendiente igual al coseno.

Anexo 10. Animación 8: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar que a recta con pendiente coseno es tangente a la curva $y = \sin(x)$.

Anexo 11. Animación 9: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar el vector tangente a la circunferencia de radio 1 y su relación con la velocidad.

Anexo 12. Animación 10: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar simultáneamente la función $y = \sin(x)$ y su derivada.

Anexo 13. Animación 11: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar la noción de asíntota desde la definición de Castel.

Anexo 14. Animación 12: Video PM4 de animación elaborada en **Geogebra** para visualizar la noción de asíntota desde la definición de Bézout.