UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

Introducción a la geometría de las cónicas y su relación con los procedimientos en dibujo técnico

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Francisco Javier Garach Sánchez

Tutor: José María Cano Torres

Valladolid, junio 2018.

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN

Las disciplinas de Matemáticas y Dibujo Técnico intervienen de manera muy destacada en los desarrollos curriculares de las carreras universitarias de Arquitectura y de todas las ramas de Ingeniería. Además, ambas disciplinas, no solamente tienen muchos contenidos comunes, sino que a veces es difícil, y nada deseable, implantar fronteras entre ellas, ya que la creación de nexos de unión entre distintos enfoques de un mismo concepto conducirá a un aprendizaje significativo.

En este Trabajo de Fin de Máster (TFM, abreviadamente) se presentarán algunos tópicos que abarcan ambas disciplinas en la enseñanza de bachillerato, pero tratados desde diferentes perspectivas. En los tiempos que corren para la enseñanza, es más necesario que nunca luchar contra la falta de motivación, tanto del alumnado como del profesorado, aplicando en dicha profesión características esenciales como creatividad, rigor y afán por hacer cosas nuevas. Una de estas innovaciones es la que implica la colaboración entre profesores de distintas materias que, ayudados de la gran aportación de las nuevas tecnologías, deben intentar despertar una inquietud intelectual en los alumnos.

La pretensión de este trabajo es construir puentes entre las asignaturas de Dibujo Técnico y Matemáticas de forma que los estudiantes interesados en explorar esta doble vertiente puedan manejar una pequeña guía que les ayude a explotar las posibilidades de un doble enfoque analítico y sintético.

El ser humano es eminentemente imaginativo, cualidad ésta que le confiere una capacidad creativa, concibiendo siempre su existencia entre su espacio interior y el espacio exterior que le rodea. La exploración continua y progresiva de ambos espacios ha generado el desarrollo de dos ciencias: la Filosofía, cuyo objeto es el estudio de su espacio interior y la Geometría, cuyo objeto es el estudio del espacio exterior.

La no existencia de documentos de la época prehistórica hace imposible establecer una teoría sobre los conocimientos geométricos de la humanidad; sin embargo, los estudios llevados a cabo sobre los dibujos del hombre neolítico revelan que éste tenía ya una cierta predisposición por las relaciones espaciales, siendo algunos de ellos claros ejemplos de simetrías y proporciones geométricas.

Los alumnos actuales son conscientes de que tienen a su disposición una serie de recursos tecnológicos que, de una forma automática, y casi con voluntad propia, son capaces de dibujar con tal precisión y rapidez un conjunto de figuras geométricas que, sin los cuales,

les exigiría un mayor esfuerzo para llegar al final al mismo resultado, pero con menor precisión y menor rapidez. O, de forma análoga, son capaces de resolver ecuaciones algebraicas que difícilmente se podrían resolver sin la utilización de dichos recursos. Naturalmente, la constante evolución de tales máquinas, al alcance de una mayoría de la población, hace que sea casi una aberración no ser un enfervorizado adicto de ellas.

Ahora bien, cuando la persona está en fase de formación, existe el peligro de que la tecnología acabe manejando a la persona y no al revés. Es pues necesario trasmitir al alumno con toda claridad la idea de que los recursos que ha de utilizar en sus actividades son sus aliados pero que en ninguna ocasión y bajo ningún concepto pueden ni deben sustituirle.

En el caso particular del Dibujo Técnico, el alumno debe conocer en toda su extensión cuales son, cómo trabajan y qué posibilidades y limitaciones tienen estas herramientas, que únicamente dibujarán lo que él quiere que dibujen, y que debe ser él quien tiene que saber qué es lo que quiere dibujar, y sobre todo por qué y para qué debe dibujar una determinada figura geométrica y no otra. De ahí la importancia de un enfoque global junto con las Matemáticas, que le permita no sólo saber qué dibujar sino también el conocimiento y las propiedades de los elementos geométricos. Por ejemplo, un Ingeniero de Caminos difícilmente podrá realizar, con todo el éxito que de él se espera, el diseño de un puente de directriz parabólica si desconoce qué es geométricamente una parábola, y aún conociéndola, no le será posible utilizarla de la forma más apropiada a las necesidades físicas y mecánicas que tenga que satisfacer si no domina sus propiedades y características geométricas.

Por consiguiente, gracias a este enfoque global de la Geometría se puede conseguir que el binomio funcione satisfactoriamente, ya que realiza al mismo tiempo ambas facetas: proporcionar conocimientos y enseñar a razonar.

Además, se podrían apuntar otras cuatro razones que apoyan este doble enfoque de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría:

- En primer lugar, porque la Geometría está presente en múltiples ámbitos de nuestras actuales sociedades: industrial, diseño, arquitectura, topografía, astronomía, óptica...
- En segundo lugar, porque la formación geométrica representa un aspecto importante en el estudio de los elementos de la naturaleza.
- En tercer lugar, porque la Geometría es un componente esencial de las artes plásticas.

- Y, en cuarto lugar, porque el conocimiento básico de la forma geométrica es indispensable para el desenvolvimiento en la vida cotidiana: para orientarse reflexivamente en el espacio; para hacer estimaciones sobre formas y distancias; para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio…

La característica fundamental que tienen las figuras del Dibujo Técnico es que representan los objetos tridimensionales esquemáticamente; es decir, son figuras geométricas planas, las cuales están constituidas por elementos geométricos que han de ser materializados o trazados sobre un plano, para lo cual se hace imprescindible tener conocimiento de los trazados geométricos, en cuya realización se distinguen dos fases:

- Una primera fase, de conocimiento de los datos previos, en la que hay que poseer toda la información necesaria relativa a los elementos geométricos que constituyen la figura a dibujar, aspecto adquirido al estudiar la geometría analítica (las matemáticas).

- Y una segunda, de construcción de operaciones gráficas, en la que hay que situar racionalmente los elementos geométricos sobre el plano a fin de que su configuración sea la de la figura que se quiere dibujar. Para esto, es necesario saber las propiedades matemáticas de dichos elementos en virtud de sus magnitudes y de las posiciones relativas entre ellos.

Por otra parte, el Dibujo Técnico, lenguaje gráfico específico del mundo de la técnica, tanto la relativa a la industria en cualquiera de sus modalidades, como a la construcción civil, a la arquitectura, o a la topografía, etc., ha de satisfacer unos requisitos como son la claridad, la legibilidad y el carácter de universalidad, necesarios para poder cumplir con su objetivo primordial: transmitir información que pueda ser interpretada fielmente para su posterior materialización. Es en definitiva un medio para conseguir un fin práctico desde el punto de vista social, por lo que no sólo contribuye a la adquisición de las competencias a la comunicación lingüística, matemática y básica en ciencia y tecnología, sino que también conlleva la habilidad y capacidad para utilizar los conocimientos y actitudes sobre la sociedad (competencia social y cívica).

Pero, desgraciadamente, "la enseñanza de la geometría, desde el punto de vista del dibujo y de las matemáticas, adolece de una falta de relación altamente empobrecedora", tal y como escribe M. J. Luelmo en su libro "Construcciones geométricas: Una experiencia interdisciplinar de autoformación". Desde la perspectiva del dibujo, se trabajan una serie de construcciones geométricas que no aportan demasiada comprensión a las definiciones y propiedades. Y, desde las matemáticas, los objetos geométricos se plasman en ecuaciones o expresiones algebraicas sin aparente relación con el proceso de construcción del dibujo.

Es evidente que este enfoque global puede tropezar para su puesta en práctica con determinados factores como la falta de tiempo y la rigidez de los programas, en un ya más que apretado currículo, sobre todo en segundo de bachillerato, y el recelo de muchos profesores: los matemáticos, por su falta de destreza manual para el dibujo, y los de dibujo, por el olvido o desconocimiento de expresiones geométricas elementales y por la falta de interés en transmitir un enfoque analítico de los dibujos geométricos.

2.- LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y ANALÍTICA

2.1.- EL PROCESO EDUCATIVO

En todo proceso de comunicación o de transmisión de conocimientos, ideas, métodos, procedimientos, etc. intervienen varios elementos, pero de entre todos ellos tres son los más importantes: el emisor, el receptor y el mensaje. Para el caso que nos ocupa, no analizaremos cuál es el orden de prelación entre ellos, sino simplemente cómo están relacionados.

En la actividad educativa tiene lugar también, por supuesto, un proceso de comunicación, en el que el emisor es el profesor o docente; el mensaje está constituido, principalmente, por los contenidos de las materias que se imparten; y el receptor es el alumno que, en este caso, sí es el primero y más importante de todos los factores que están implicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Tanto es así que en dicho proceso educativo todos los demás giran, o deberían girar, alrededor suyo, y acomodarse en cada situación a sus características.

Y la ciencia que estudia las cuestiones derivadas del binomio enseñanza-aprendizaje es la didáctica. La palabra didáctica, en la cuarta acepción del diccionario de la lengua española, tiene el significado de arte de enseñar. No obstante, dicho vocablo también se utiliza dentro del ámbito docente, para definir o designar la ciencia que enseña o instruye; ciencia que está íntimamente vinculada a otras ciencias de la educación, como la pedagogía y la psicología, hasta tal punto que, en ciertos casos, resulta difícil establecer una separación entre ellas.

No se pretende contemplar a la didáctica como instauradora de normas y principios de la enseñanza en general, estudiando sus fenómenos y leyes, sino, preferentemente, como ciencia que estudia las cuestiones que plantean todos los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje de la Geometría en sus dos vertientes: por un lado, la descriptiva, sintética o la del dibujo técnico, y por otro, la analítica, la matemática. Es decir, lo que en una dimensión más moderna de la misma, se conoce con el nombre de "didáctica diferencial", y que tiene en cuenta, apoyándose en la también denominada "pedagogía diferencial", las características evolutivas de los educandos y las condiciones del medio en los que se encuentran.

2.2.- TEORÍAS DEL APRENDIZAJE

La psicología ofrece unas teorías sobre el aprendizaje que, de una forma general y resumida, se pueden agrupar en tres, correspondientes a las tres grandes escuelas de pensamiento: conductismo, cognitivismo y humanismo.

En el conductismo, en el que destacaron figuras como, por ejemplo, John B. Watson, Jacob R. Kantor o Albert Bandura, la conducta humana se explica a partir de cómo la persona responde a los estímulos del medio en el que está, es decir, de lo que hace y no hace, de lo que siente o piensa. El conocimiento se basa en la experiencia y se adquiere por medio de los sentidos. Por lo tanto, la persona es un sujeto pasivo sometido a las influencias del mundo exterior actuando sobre ella, que nace como una "memoria" vacía que se va llenando de conocimientos cada vez más complejos a través de la experiencia.

Trasladada esta forma de pensamiento al sistema educativo, la estructura se correspondería con la escuela tradicional, en la que el alumno es un sujeto pasivo que reacciona y obedece a las exigencias del objetivo fundamental: la adquisición de contenidos por medios expositivos. Y que se motiva mediante una disciplina coercitiva que recompensa a la minoría más exitosa. Es decir, el alumno se modela para adaptarse a la estructura del sistema educativo.

La psicología humanista, cuyo principal precursor fue Jean Jacques Rousseau, es una teoría que surge como rechazo a las formas materialistas y rígidas de lo establecido, y que resalta los sentimientos por encima del pensamiento o de la acción, así como las relaciones interpersonales, el mutuo respeto y la cooperación.

Su modelo educativo se basa en una mínima estructuración en todas las áreas y en estimular a la persona a desarrollar su propio potencial, pero manteniendo el respeto a los demás. Sus objetivos se centran en el dominio afectivo, ya que el aprendizaje cognitivo se dará por sí mismo si el alumno se encuentra bien y siente una necesidad personal de solucionar un problema. La metodología utilizada estriba en los centros de interés, actuando el docente como animador del alumno y proporcionándole información si éste lo requiere.

El cognitivismo es un modelo de pensamiento en el que destacaron Alan Baddeley, George A. Miller, David Ausubel y Jean Piaget, que surge como reacción al conductismo, y en el que el individuo da sentido al medio en el que está, más que reaccionar ante él sin comprender nada. Es decir, el medio es un conjunto de información que se debe procesar, de forma tal que es tratado de un modo discriminado, no prestando igual atención a todos los aspectos del mismo: considera unos y desconsidera otros. Piensa sobre los que ha considerado, extrae su significado, resuelve los problemas que dichos aspectos le hayan podido plantear y toma decisiones al respecto.

Por lo tanto, una característica fundamental de esta escuela es la consideración de los factores innatos de la persona y el estudio de sus procesos internos, así como el del desarrollo intelectual. A medida que la persona crece, sus estructuras mentales se van haciendo más complejas y le van ayudando a extraer del medio que le rodea significados más ricos y profundos cada vez. Esta escuela tiene sus raíces filosóficas en el racionalismo, según el cual la razón está por encima de la experiencia en la formación del conocimiento, sosteniendo incluso que, sin experiencia previa alguna, la persona posee a priori, de forma innata, algunos de estos conocimientos.

Todos los modelos educativos basados en esta teoría, dan más importancia al aprendizaje de procedimientos que al aprendizaje de contenidos y, en consecuencia, valoran más el cómo el alumno soluciona un problema y toma sus decisiones que si los resultados a los que ha llegado son correctos. Por lo tanto, al ser el objetivo fundamental la adquisición de procedimientos y no la de contenidos, la metodología no está basada en las exposiciones magistrales del profesor, sino que se centra en la actividad del alumno, ya sea solo o en grupo: por un lado, el alumno fija sus puntos de interés, discute sobre ellos con el resto del grupo y realiza las tareas que ha elegido personalmente; y, por otro, el docente debe propiciar el descubrimiento y la investigación por parte del alumno.

Naturalmente este proceso de aprendizaje exige una estructuración más abierta que la de la metodología conductista-empirista, lo que conduce a que no se pueda determinar por adelantado que es lo que el alumno va a aprender. Además, ha de estar diseñada muy cuidadosamente por el equipo docente para que el alumno pueda llevarla a cabo con éxito.

Estos modelos educativos tienen su principal soporte teórico en Piaget, para quien el aprendizaje se construye sobre los siguientes postulados: el constructivismo psicológico, el conflicto cognitivo como promotor del desarrollo, el respeto a los niveles de desarrollo y los diferentes tipos de conocimiento.

En sus comienzos, la persona conoce e interpreta el medio en función de unos conocimientos innatos y de unas estructuras intelectuales distintas según su momento evolutivo. Lo que va a poder aprender del medio depende de su nivel de desarrollo, ya que asimila e introduce la información nueva, suministrada por dicho medio, en sus estructuras previas, al mismo tiempo que acomoda y modifica sus conocimientos anteriores de acuerdo a los nuevos datos. De esta forma, cuando en su experiencia cotidiana encuentra problemas y contradicciones entre estos nuevos datos y su repertorio de conocimientos ya elaborados, cambia sus esquemas y transforma sus formas de pensar y se produce el avance en su desarrollo cognitivo.

Otro aspecto importante de esta teoría es cómo establece las diferencias entre el conocimiento físico, el conocimiento social y el conocimiento lógico-matemático. Califica a los dos primeros, como conocimientos empíricos, ya que el físico tiene sus orígenes en los objetivos exteriores y el social en el intercambio con las demás personas, requiriendo ambos la abstracción de propiedades observables exteriores a la propia persona. Sin embargo, el conocimiento lógico-matemático se construye sobre la actividad de la propia persona. Es decir, es una actividad interna que establece relaciones entre propiedades observables, pero a partir de la coordinación de sus propias acciones. Es un tipo de conocimiento que no se puede enseñar directamente, sino que debe ser creado por cada persona.

Estas ideas de Piaget condujeron a Ausubel a distinguir entre diferentes tipos de aprendizajes:

- receptivo, obtenido a partir de las lecciones del profesor o de lecturas escogidas,
- adquirido por descubrimiento;
- mecánico, cuando el alumno aprende de forma arbitraria
- aprendizaje significativo, cuando las tareas están relacionadas de forma congruente y el sujeto decide aprender así.

Las características fundamentales que diferencian al <u>aprendizaje significativo</u> del aprendizaje repetitivo y mecánico se pueden resumir en las siguientes:

- Aprendizaje significativo
  - Se integra fácilmente en la persona que aprende.
  - Se relaciona estrechamente con los esquemas cognitivos de la persona.
  - Adquiere sentido en la persona que aprende y de hecho llega a ser utilizado.
  - Genera un conocimiento funcional en relación con la vida real y con la práctica.
- Aprendizaje repetitivo y mecánico
  - Queda difícilmente integrado en el sujeto que aprende.
  - Se limita a la memorización.
  - Solo es recordado de forma anecdótica.
  - Es fácilmente olvidado.

Fundamentalmente, el aprendizaje significativo se desarrolla a partir de los siguientes principios didácticos generales:

- Estimular al alumnado a identificar y hacer explícitas sus ideas y conocimientos previos sobre el objeto de estudio.

- Favorecer la autonomía del aprendizaje, estimulando el planteamiento y la resolución de problemas y aportando para ello contenidos e informaciones relevantes.

- Utilizar diversas estrategias metodológicas en función de informaciones, datos o cuestiones estudiadas y de los intereses y motivaciones de los alumnos.

- Potenciar la utilización de los conceptos adquiridos en este proceso de aprendizaje y su transferencia a nuevas situaciones.

- Facilitar la reflexión y evaluación de lo aprendido, así como del proceso que se ha seguido, de las estrategias empleadas y de los resultados alcanzados.

- Presentar situaciones que permitan contrastar tales ideas con otras, sean científicas o espontáneas, que se propongan oportunamente.

- Promover la emisión de hipótesis y la formulación de explicaciones, confrontándolas con modelos y teorías preexistentes.

En base a estos principios se proponen realizar las siguientes actividades:

A. Selección de contenidos de acuerdo a los siguientes criterios:
    1. Los contenidos han de ser significativos y funcionales, que tengan sentido para los alumnos en el momento que se les presentan.
    2. Los contenidos deben presentarse gradualmente de acuerdo a su dificultad.
    3. Se deben establecer vínculos asequibles entre los nuevos contenidos y los conocimientos previos, atendiendo a las capacidades cognitivas de los alumnos.
    4. Se han de desarrollar aspectos relevantes sin perderse en detalles intrascendentes y buscando en cambio los fundamentales, los que corresponden a la trama conceptual de la materia.
    5. Atender a su carácter aplicado, subrayando los contenidos con el mundo real y/o sus implicaciones prácticas en la sociedad.
B. Especificación de rutinas de trabajo:

1. Estimulando la explicación de los conocimientos previos por parte del alumnado respecto al tema que se trate y análisis y discusión de los mismos, de forma que el alumno:
   - Tome conciencia del tema.
   - Se interese en el proceso de aprendizaje.
   - Modifique y/o complete sus ideas previas.
   - Construya nuevos conocimientos.
2. Facilitando el trabajo autónomo del alumno, sólo o en grupo, lo cual permitirá:
   - Al profesor a planificar actividades distintas en algún momento del curso.
   - Al profesor a estimular en los alumnos métodos diferentes de trabajo.
   - A que el alumno aprenda a aprender para aumentar así su autonomía.
3. Potenciando las técnicas de indagación e investigación entendidas en sentido amplio, de forma que el alumno:
   - Busque respuesta a preguntas formuladas en torno a algún problema.
   - Emita hipótesis y conclusiones.
   - Lleve a cabo un tratamiento de la información.
   - Aplique los resultados a otros casos.
4. Poniendo en práctica lo aprendido:
   - Transfiriéndolo a otras situaciones.
   - Vinculándolo con el mundo real y su entorno.

C. <u>Definición de actividades por parte del equipo docente</u>:

1. Planificar, organizar y coordinar las actividades de los alumnos. para conseguir que éstos compartan la responsabilidad sobre su aprendizaje con el equipo docente.
2. Coordinar la actividad de cada profesor con el resto de profesores del equipo docente, fijando criterios y pautas de actuación, facilitando una programación conjunta y fomentando la actitud disciplinar necesaria entre ellos para el tratamiento de contenidos transversales.
3. Utilizar una amplia gama de estrategias didácticas, con lo cual incrementa su eficiencia al lograr un aprendizaje real por parte de los alumnos, respondiendo a sus motivaciones e intereses.
4. Flexibilizar el proceso de enseñanza atendiendo a la variedad de los estilos cognitivos de los alumnos, de sus ritmos y de sus posibles problemas de aprendizaje.
5. Favorecer la autonomía y trabajo individual o en grupo de los alumnos.

2.3.- EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

No es fácil determinar cuál de estas teorías del aprendizaje es la más idónea de aplicación al caso concreto de la Geometría ya que, por una parte, los distintos tipos de aprendizaje que preconizan las diferentes teorías no se dan aislados en la realidad y, por otra, las características intrínsecas de la propia ciencia introducen aspectos muy singulares en el aprendizaje de la misma.

La Geometría es la ciencia cuyo objeto es el estudio del espacio exterior a la persona y, por lo tanto, analiza, organiza y sistematiza los conocimientos espaciales. Se establece así, de forma implícita, que en su aprendizaje tiene lugar la adquisición de tales conocimientos espaciales, lo cual es uno de los aspectos que más caracterizan a dicho aprendizaje.

Existen dos formas de adquisición de estos conocimientos espaciales: la de naturaleza visual, que se realiza de forma directa a través de la intuición geométrica, y la de naturaleza verbal, que se realiza de forma reflexiva a través de la lógica. Ambas formas son a la vez distintas y complementarias: la primera, creativa y subjetiva, y la segunda, analítica y objetiva; y pueden ser consideradas como dos fases secuenciales de construcción del conocimiento geométrico.

En la primera fase, a través de la intuición geométrica, tiene lugar lo que se denomina la percepción espacial, y en ella se adquiere la noción de espacio y la construcción de las relaciones espaciales. Al hablar de la noción de espacio hay que diferenciar los siguientes tipos, según sea la forma en que se aborde su tratamiento: de forma filosófica, desde un aspecto físico o desde una perspectiva psicológica.

- De forma filosófica, podemos distinguir:
  - Espacio absoluto: es aquel en el que, según Platón, los objetos y sus relaciones son independientes de la existencia del propio espacio. En este espacio se fundamentó Newton para sentar las bases de la mecánica clásica.

  - Espacio relativo: es aquel que, según Kant y Leibniz, queda determinado por medio de las relaciones de posición de los objetos. Fue utilizado por Einstein en su mecánica relativista.
- Desde un punto de vista físico:
  - Espacio físico: es el entorno físico que rodea a la persona.
- Desde una perspectiva psicológica:

- Espacio psicológico: es cualquier espacio representado en la mente de la persona, de forma tal que si no hay mente no hay espacio, existiendo respecto al mismo tres teorías:
  - Teoría empirista: el espacio psicológico se deriva directamente de la experiencia del espacio físico.
  - Teoría nativista: el espacio psicológico es determinado por la herencia congénita y constitucional de cada persona.
  - Teoría constructivista: el espacio psicológico es activamente construido por la persona en un proceso de interacción entre los factores hereditarios (teoría nativista) y experimentales (teoría empirista).

Sobre las bases de esta teoría constructivista, enunció Piaget su hipótesis respecto a los distintos niveles de organización espacial y su correspondencia con las cuatro fases genéticas del desarrollo intelectual de la persona:

- En la primera fase, mediante las percepciones sensoriales de las relaciones espaciales, la persona adquiere una visión egocéntrica del espacio.
- En la segunda fase, la persona realiza representaciones intuitivas en el nivel de organización del espacio.
- En la tercera fase, la persona realiza operaciones reversibles con diferentes materiales concretos.
- En la cuarta y última fase, la persona realiza representaciones formales y abstractas, es decir está situada en el nivel de organización del espacio abstracto, correspondiente a las Geometrías deductivas de Euclides y Hilbert.

En resumen, a través de su capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en su entorno, efectuando desplazamientos, medidas y cálculos espaciales, la persona construye su espacio intuitivo y sensorio-motor. Y a través de su capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y manipulando mentalmente, construye su espacio conceptual y abstracto.

Se llega, siguiendo esta teoría, a que la construcción del espacio y por lo tanto la adquisición de los conocimientos espaciales está íntimamente relacionada tanto con las características cognitivas particulares de cada persona como con la influencia que su entorno físico, social, cultural, histórico, etc., ejerce sobre ella. En consecuencia, el tipo de aprendizaje más idóneo para esta teoría será aquel que se estructure teniendo en cuenta todos y cada uno de los aspectos que lo condicionan.

Conseguir un modelo de aprendizaje de la Geometría acorde con todas las teorías y aplicable a cualquiera de las etapas educativas se podría calificar de utopía. No obstante, un modelo que tiene una gran aceptación por una inmensa mayoría de los equipos docentes de Geometría es el basado en los diferentes niveles de razonamiento que van alcanzado los alumnos, y cuyas características fundamentales son:

- En el razonamiento de los estudiantes de Geometría, y en general de Matemáticas, se pueden encontrar diferentes niveles de perfección.
- El alumno sólo podrá comprender realmente aquellas partes de la materia que le sean presentadas de forma adecuada a su nivel de razonamiento.
- Cuando una parte de la materia no pueda ser presentada al alumno de forma adecuada al nivel de razonamiento en el que está, se deberá esperar a que éste alcance el nivel de razonamiento superior para presentársela.
- El alumno sólo aprende a razonar a través de su propia experiencia, y no se le puede enseñar a razonar de una forma predeterminada; aunque mediante el proceso adecuado se le puede ayudar a adquirir la experiencia necesaria para lograrlo cuanto antes.

2.4.- LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Ya hemos advertido que aprender y enseñar son dos actividades que van íntimamente unidas, que se interrelacionan en una profunda conexión, no pudiendo existir la una sin la otra. Hasta ahora hemos hablado del aprendizaje, como actividad del alumno, situándola en primer lugar, de acuerdo con mi convicción de que, en la educación, ante todo y por encima de todo, está el alumno. No quiere ello decir que el profesor no sea importante, pero sí que no debe atribuírsele un protagonismo egocéntrico; ni tampoco que se tenga que limitar a ser una persona de actitud bondadosa que además de saber guardar el orden en clase sabe enseñar. Ser profesor entiendo que es adoptar una postura en la vida que responda a una vocación impregnada de un profundo espíritu de servicio y de ayuda a los demás, que exige, por otra parte, una gran dosis de liderazgo y, por supuesto, unos profundos conocimientos de la materia a impartir y unas aptitudes pedagógicas mínimas.

Consecuentemente, la actividad de enseñar lleva consigo una serie de exigencias para el docente que se pueden resumir en dos palabras: planificación y predisposición.

Por una parte, es necesario efectuar una buena planificación en cuanto a métodos de trabajo, procedimientos de comunicación, selección de problemas, evaluaciones, etc.; es decir, diseñar una buena metodología didáctica acorde con la materia. Por otra parte, se ha de tener una predisposición personal continua para la adaptación, graduación, formación, cambio y autoevaluación. Y todo ello se ha de realizar teniendo en cuenta la existencia de factores que condicionan la práctica docente, tales como:

- La situación de la etapa docente dentro del proceso general y la necesidad de enlazarla con la etapa anterior para profundizar, ampliar y consolidar los conocimientos adquiridos en aquella.
- El carácter formativo y orientador de la misma.
- El estadio evolutivo del alumnado que accede a dicha etapa.

Además, en el diseño de la metodología didáctica, se deberán tener en cuenta tres aspectos fundamentales: los problemas planteados en el aprendizaje de la materia, las estrategias de enseñanza y la evaluación.

A. Problemas planteados en el aprendizaje de la materia

Son los problemas detectados a través de la investigación didáctica, tales como las ideas previas, la motivación, la actitud y las expectativas de los alumnos respecto a la materia.

B. Las estrategias de enseñanza

Son las operaciones o actividades didácticas a realizar para dar respuesta a los problemas anteriores. En su diseño deberán tenerse en cuenta los siguientes factores:

- Las características del alumnado y sus diversos orígenes, situaciones, intereses, capacidades y motivaciones, en definitiva, la diversidad del grupo de alumnos, y entre las que se pueden encontrar sus expectativas académicas, profesionales y/o vitales. En base a ellas se podrán llegar a programar actividades de profundización, refuerzo, apoyo y recuperación para el alumnado que lo necesite.
- El carácter práctico y de aplicación de los contenidos. En base al mismo se tendrá que potenciar la vertiente práctica de los mismos, su transferencia a otras situaciones y la vinculación de los contenidos con la dimensión profesionalizadora de la materia.
- Las actividades relacionadas con el entorno físico y del mundo que nos rodea.
- Los contenidos transversales, que de una u otra forma están o pueden estar incluidos también en otras materias.
- Las formas de organización del aula, de los espacios y de los tiempos.
- Los tipos de recursos materiales y sus características deseables, así como la necesidad de coherencia entre estos y las estrategias didácticas, sus criterios de elección y de utilización.

C. La evaluación.

La evaluación debe ser una actividad realizada de forma continua que permita regular el proceso enseñanza-aprendizaje, estando abierta a la participación del alumnado de tal forma que fomente en él la autoevaluación y la coevaluación, bajo la responsabilidad colectiva del equipo docente. Como cualquier otra actividad, necesita para su desarrollo una buena planificación, en la cual deben plantearse las siguientes cuestiones: ¿qué evaluar?, ¿cómo evaluar?, ¿cuándo evaluar? y ¿para qué evaluar?

¿Qué evaluar?:

Se deberá evaluar todo aquello que forma parte del proceso enseñanza-aprendizaje. Los referentes para la comprobación del grado de adquisición de las competencias y el logro de los objetivos de la etapa en las evaluaciones continua y final de las materias de los bloques de asignaturas troncales y específicas, serán los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que figuran en los anexos I y II del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre y en la Orden EDU 363-2015, de 4 de mayo, para los alumnos de bachillerato.

La evaluación del aprendizaje del alumnado de bachillerato será continua y diferenciada según las distintas materias, tendrá un carácter formativo y será un instrumento para la mejora tanto de los procesos de enseñanza como de los procesos de aprendizaje.

El profesorado evaluará tanto los aprendizajes del alumnado como los procesos de enseñanza y su propia práctica docente, para lo que establecerá indicadores de logro en las programaciones didácticas.

Una evaluación así planificada permite:

- La autocorrección.

- La retroalimentación continua del proceso, desde la situación de partida y a lo largo de cada una de las fases posteriores del mismo.

- La recogida de información sobre los procesos que tienen lugar en el aula.

- Mostrar claramente al alumno a qué se da realmente importancia en el aprendizaje.

¿Cómo evaluar?:

- Con métodos e instrumentos de evaluación que estén acordes con las actividades didácticas desarrolladas, entre los cuales están: la <u>observación directa del trabajo</u>

realizado por los alumnos, mediante registros más o menos sistematizados, entrevistas, etc.; las encuestas individuales o colectivas en clase sobre la actividad llevada a cabo en la misma; los cuestionarios de evaluación; las pruebas escritas; las pruebas orales; los cuadernos de trabajo de clase a lo largo del curso; los trabajos monográficos realizados individualmente o en grupo; etc.

- De forma explícita, concretando previamente: qué se espera obtener de los alumnos, qué actividades se realizarán en la evaluación y con qué criterios se juzgará la eficacia de esas actividades.

Las pautas habituales de un proceso de evaluación serán:

- Establecer unas técnicas de análisis de resultados que permitan valorar cualitativa y/o cuantitativamente la evolución del alumno y la elaboración posterior del correspondiente informe.
- Fomentar en el alumnado la concienciación y participación en el proceso de evaluación.
- Adoptar estrategias diferentes de acuerdo a los instrumentos usados en la evaluación, que permitan evaluar los aspectos conceptuales, procedimentales o actitudinales, según interese en cada caso.
- Dar a conocer a los alumnos los resultados de la evaluación cuanto antes sea posible, para que mediante la información que se les traslada, sean capaces de autorregular su proceso de aprendizaje, corrigiendo sus ideas iniciales.

¿Cuándo evaluar?

En tres fases, de forma continua: evaluación inicial, evaluación durante el aprendizaje, y evaluación sumativa o de final del aprendizaje.

- La evaluación inicial permite conocer la situación de partida del alumno, sus conocimientos e ideas previas, así como sus posibilidades de incorporarse al nivel de aprendizaje propuesto. Esta evaluación tiene un carácter planificador, y sus resultados permiten confirmar o reforzar la acción didáctica previamente planificada.

- La evaluación durante el aprendizaje permite seguir de cerca el trabajo realizado y reorientarlo si fuere preciso. Esta evaluación tiene un carácter regulador, orientador y autocorrector.

- La evaluación sumativa o de final del aprendizaje permite medir los resultados de la tarea realizada, valorar de mayor a menor el éxito o fracaso del proceso y su grado de consecución, y comprobar que la adquisición de las competencias es adecuada para promocionar al alumno a otro nivel superior.

¿Para qué evaluar?

- Para dirigir y orientar el proceso de aprendizaje de los alumnos.

- Para orientar la manera de superar los fallos.

- Para proporcionar una orientación relacionada con la elección vocacional de futuras actividades profesionales.

2.5.- METODOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

La aplicación de todas estas consideraciones al caso particular de la enseñanza de la Geometría, hace que la metodología a seguir en la misma, tanto para su planificación como en su realización, presente unas características muy singulares respecto a la de otras materias.

Así, la enseñanza de la Geometría se ha de planificar de acuerdo con el aprendizaje del individuo, tan íntimamente ligado a su desarrollo progresivo por lo que la planificación deberá ser progresiva y cíclica, de forma que favorezca dicho desarrollo. Por otro lado, teniendo en cuenta las actividades que implican el citado desarrollo, tendrá que ser activa, propiciando la actuación del alumno; comunicativa, favoreciendo la comunicación tanto oral como gráfica; y fenomenológica, posibilitando un conocimiento tanto intelectual como instrumental y práctico.

Todo lo planificado se habrá de realizar mediante un conjunto de estrategias que aseguren la formación de conceptos y el desarrollo de habilidades y procesos espaciales; teniendo en cuenta aspectos como:

- Relacionar el estudio de la Geometría con el mundo real.

- Favorecer la interacción entre actividad espacial y representación mental del espacio.

- Partir de unas situaciones informales y conocidas por el alumno, que le posibiliten llevar a cabo un descubrimiento activo, un razonamiento inductivo y un desarrollo de la percepción visual y de la imaginación espacial.

- Analizar los puntos de partida de la instrucción: contexto, vocabulario y representación; fenomenología didáctica; matematización analítica progresiva y gradual; aspectos del lenguaje (competencia lingüística) y aspectos sociales (competencia cívica y social).

- Explicitación del curriculum, concretando los objetivos instructivos y expresivos.

- Diseño de la evaluación.

- Desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje, en el que están incluidos: la progresiva estructuración de actividades, el proceso de adquisición de estándares de aprendizaje, la representación espacial y la evaluación.

Limitar a un único modelo la enseñanza de la Geometría que garantice la consecución de los objetivos previstos condenaría al fracaso a un determinado número de alumnos por carencias visuales, carencias cognitivas, carencias deductivas, etc., por lo que debemos albergar diferentes modelos resolutivos, adaptarlos al contexto que nos ocupa, a la diversidad de la clase, y seleccionar el más idóneo dependiendo del conjunto de variables expuestas anteriormente.

Un primer modelo es el que consiste en la **resolución de ejercicios**, tarea en la que los estudiantes deben aplicar lo que se les ha enseñado recientemente en el aula, así como saber utilizar procedimientos básicos y rutinarios. Los ejercicios constituyen la mayor parte de las tareas que se proponen escolarmente. Existe una extensa bibliografía de libros con ejercicios, tanto de dibujo técnico, como de geometría analítica, por lo que, en muchos docentes, se produce un uso abusivo y, a veces, exclusivo, de los mismos en la enseñanza, convirtiéndose en un proceso rutinario y tedioso que trae como consecuencia el rechazo de los alumnos.

Un segundo modelo consiste en la **resolución de problemas** geométricos conjugando simultáneamente los aspectos derivados del dibujo técnico con los fundamentos basados en la geometría analítica. Para llevar a cabo correctamente este tipo de tareas deberán seguirse unas mínimas pautas:

- Seleccionar el tipo de problema en función de los conceptos que se quieran enseñar.
- Secuenciar los problemas de acuerdo con el nivel progresivo de aprendizaje del alumno.
- Definir eficientemente las variables de presentación de cada problema de acuerdo con la estrategia adoptada para llegar a los fines propuestos.

La resolución de problemas, en particular los geométricos, exige el uso de una metodología apropiada. Se propone como guía la metodología propuesta por George Pólya, que presentó en su libro "Cómo plantear y resolver problemas" (en inglés, How to solve it), y que consta de cuatro fases, que aplicadas a nuestro caso particular se podrían enunciar del siguiente modo:

1. Comprensión del problema mediante una lectura atenta del enunciado:
    a. Aclarando el significado de los términos que se ignoren de los incluidos en el mismo.
    b. Replanteando el problema con nuestras propias palabras.
    c. Relacionando el problema con otros que ya se hayan solucionado.
    d. Traduciendo el problema al lenguaje geométrico.
    e. Distinguiendo datos de incógnitas.
    f. Separando las constantes de las variables.
    g. Identificando y fijando los símbolos utilizados y a utilizar.
2. Configuración de un plan:
    a. Realización de una figura, dibujo, diagrama o esquema a mano alzada.
    b. Establecer las relaciones conocidas y las que hay que hallar.
    c. Búsqueda de un patrón, de una fórmula, de un modelo.
    d. Observación de la utilización de simetrías y/o de coordenadas.
    e. Resolución de problemas equivalentes, pero más sencillos.
    f. Aplicar el principio de la reducción al absurdo.
3. Acometer la estrategia seleccionada:
    a. Poner en práctica las estrategias escogidas hasta solucionar completamente el problema o hasta que dicha práctica sugiera tomar un camino diferente.
    b. Concederse un tiempo razonable para resolver el problema. Si el alumno no tiene éxito tras dicho período de tiempo, deberá solicitar una sugerencia al docente.
    c. No tener miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia nos lleven al éxito.
4. Verificación de la solución hallada:
    a. Comprobación de que la solución satisface lo establecido en el problema.
    b. Reflexionar sobre la posibilidad de que exista una solución más sencilla.
    c. Intentar extender la solución como resolución de un caso general.

Las **investigaciones** constituyen una tercera fuente de recursos para la enseñanza de la geometría. Se trata de una tarea similar a la de resolución de problemas estando básicamente la diferencia entre ambas en que la primera suele hacer referencia a un contexto real mientras que la investigación prescinde de dicha situación. Es una tarea poco utilizada porque hay muchos docentes que consideran las investigaciones poco prácticas y que deben estar sólo destinadas a aquellos alumnos que realmente les gusta tanto las matemáticas como el dibujo técnico. Sin embargo, la profundización en investigaciones conlleva grandes ventajas:

- De tipo práctico: las investigaciones desarrollan competencias que luego pueden aplicarse de manera directa a los problemas.
- Los problemas ocultan, a veces, la estructura matemática que hay detrás mientras que las investigaciones van al foco de la cuestión en estudio.
- Todos los alumnos tienen derecho a conocer qué hay detrás de las investigaciones matemáticas.
- El descubrimiento y cultivo del talento geométrico es un aspecto de la enseñanza de las matemáticas y del dibujo técnico, aunque no sea el ideal a proponer a todos los estudiantes.

Las pautas fundamentales que deben seguirse en todo trabajo de investigación consisten en:

1. Disponer de un espacio soporte organizado y equipado de acuerdo a las actividades de investigación que se llevarán a cabo.
2. Presentar y graduar consecuentemente las actividades de investigación para lograr un progreso gradual de etapas:
    - Estudiando las ideas fundamentales de cada nivel y de su conjunto.
    - Adecuando que el alumno acceda a cada idea según su propio nivel cognitivo.
    - Propiciando que los conocimientos de los conceptos que tiene el alumno respecto a una idea se plasmen en acciones y lenguaje.
    - Trabajando y aplicando un mismo concepto a diferentes situaciones.
    - Relacionando el concepto objeto de estudio con los restantes conceptos ya asimilados, para su definitiva consolidación y aplicación.
3. Fomentar el trabajo en grupo de los alumnos, tanto en las fases de experimentación como en las de comunicación y explicación de conceptos y resultados.
4. El profesor debe actuar como un promotor de investigación que presenta, organiza y orienta de acuerdo al siguiente esquema de trabajo:
    - Introducir el tema, para situar al alumno.
    - Dar a conocer los objetivos, para enmarcar las acciones a realizar.

- Presentar las investigaciones a realizar induciendo al alumno a manipular, construir, observar, explicar, expresar conjeturas y descubrir distintas relaciones sobre el concepto a tratar, mediante hojas de trabajo que consten de los apartados siguientes: trabajo a realizar, material a utilizar, explicación de lo que se ha hecho y descubrimientos realizados.
- Evaluar los registros escritos y orales de cada alumno, así como su grado de participación en las actividades de investigación propuestas.

Otras propuestas de trabajos para el aprendizaje de la geometría pueden ser: las **experiencias**, aprendizaje basado en la observación de los fenómenos; los **juegos**, que promueven la creatividad y la iniciativa y enseñan a adoptar decisiones mediante la elección de estrategias, que ponen en acción operaciones cognitivas de grados medio y superior; y, por último, las **actividades de síntesis y de elaboración de la información**, que permiten comprender el texto del que se parte y asentar las ideas rápidamente "de un vistazo".

2.5.1.- APLICACIONES DE LAS TIC A LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Hoy en día existen cada vez mayor número de centros educativos en los que la implantación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) son un hecho palpable, incorporando en las propias aulas ordenadores de sobremesa conectados a la red wifi del centro, cañones proyectores que muestran la pantalla del ordenador sobre una pizarra digital interactiva, portátiles o tabletas para el manejo de programas interactivos entre el profesor y los alumnos, plataformas de aprendizaje basadas en entorno moodle, software de toda índole (programas de tratamiento de imágenes, de presentaciones, de elaboración de páginas web, etc.)

La evolución de los softwares asistentes de dibujo técnico nos permite encontrarnos en el mercado una gran fuente de programas de geometría interactiva siendo AUTOCAD uno de los más conocidos y desarrollados. Pero su utilización requiere de licencias costosísimas que hacen impensable su aplicación al mundo de la educación, por lo que se han desarrollado programas como DiedriCad que permite la determinación de elementos geométricos básicos y la resolución de problemas sencillos de paralelismos, perpendicularidad, etc., o AutoDim, que permite la acotación de modelos croquizados.

Más actuales son otro tipo de programas como Derive, Maple u otros, que permiten la experimentación, a bajo coste, de distintas estrategias para la resolución de problemas geométricos, facilitando la tarea de abordar la geometría de forma analítica, automatizando los cálculos y trasladando los resultados de forma inmediata a la pantalla.

Y de forma recíproca, los sistemas de dibujo geométrico utilizan los aspectos analíticos de los objetos geométricos para la obtención de las representaciones gráficas.

También existen en el mercado otros softwares de geometría interactiva como Regla y Compás, Cabri o Cinderella, mucho más flexibles desde un punto de vista de manejo de elementos geométricos elementales, por lo que resultan más exitosos para la utilización por parte de los profesores o de los alumnos en los ámbitos de la educación.

Pero, sin duda, dada la existencia de una versión gratuita del programa **Geogebra**, ha sido espectacular el creciente empleo de este software en diferentes ámbitos educativos, no sólo en las etapas de la educación secundaria y bachillerato, sino también en determinados niveles universitarios.

Geogebra intenta acercar las posibilidades gráficas y algebraicas mostrando un entorno de trabajo muy sencillo: ofrece dos ventanas, una algebraica y otra geométrica, que se corresponden la una con la otra. Esto es, una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. Por tanto, consta de dos secciones bien definidas desde las que se puede, por un lado, dibujar todo tipo de formas y figuras geométricas, así como, por otra, realizar cálculos de áreas, perímetros, vectores, etc. Además, se trata de un programa de geometría dinámica o interactiva que permite dibujar elementos básicos de la geometría: puntos, rectas, semirrectas, circunferencias, cónicas, … También permite trazar algunos elementos que se derivan de los anteriores: rectas perpendiculares, mediatrices, polígonos, etc., e incluso, resolver ecuaciones y funciones de todo tipo de complejidad, así como crear gráficas y calcular todo tipo de logaritmos, raíces, etc. Pero la característica principal de este programa es que una vez completado el dibujo, podemos mover los elementos independientes variando consecuentemente los dependientes. Así, por ejemplo, si dibujamos un triángulo y las mediatrices de sus lados, podremos ver que se cortan en un mismo punto, punto que se mantiene al variar la posición de los vértices.

También dispone de otras herramientas como sistemas de coordenadas, medida de distancias y ángulos, transformaciones geométricas (simetrías, homotecias, inversiones, etc.) Desde un punto de vista didáctico, resulta muy interesante la posibilidad de ocultar o hacer visibles algunos elementos del dibujo, lo que permite entre otras cosas presentar las construcciones por pasos.

Debido a todas estas ventajas, ha sido la herramienta que he utilizado para el desarrollo de todos los ejemplos, ejercicios y problemas que se exponen en este TFM y que se materializan a partir del siguiente punto: "3.- Construcciones geométricas y desarrollos analíticos."

Este software libre puede descargarse de la propia página web https://www.geogebra.org/.

2.5.2.- CONTEXTO EDUCATIVO DE APLICACIÓN

Dado que no es hasta segundo curso de bachillerato cuando el currículo fija la impartición en la asignatura Dibujo Técnico II de las transformaciones geométricas (homología, afinidad, potencia, inversión, …) y el trazado de las curvas cónicas, principales fundamentos en los que hemos basado este TFM, los contenidos y métodos que se desarrollan van destinados al alumnado de dicho nivel. Los conocimientos de geometría analítica de dicho alumnado entiendo que son más que suficientes puesto que se utilizarán conceptos básicos de trigonometría, teoremas empleados en la resolución de triángulos (teoremas del seno y del coseno, teorema de Pitágoras), en la semejanza de triángulos (Tales, principalmente), etc., contenidos desarrollados por el currículo de matemáticas en distintos niveles de secundaria y en primero de bachillerato.

He realizado una revisión de las fuentes bibliográficas y de internet, así como una extensa búsqueda entre conocidos, familiares, amigos, profesores del propio máster…y en diferentes comunidades autónomas (Castilla y León, Extremadura y Andalucía), para conocer los libros de texto (en papel o digitales) que se utilizan actualmente en los centros educativos para la enseñanza y el aprendizaje del dibujo técnico en segundo curso de bachillerato, intentando al menos conseguir un par de fuentes de referencia para desarrollar el trabajo, pero todas las gestiones confluían en el mismo libro de texto, ya fuere en versión clásica, o en versión digital, completo o diseccionado en apuntes. Por ello, el guión de este TFM es el libro "Dibujo Técnico II: 2º Bachillerato de F. Javier Rodríguez de Abajo, Víctor Álvarez Bengoa y Joaquín Gonzalo Gonzalo. Editorial Donostiarra. 2011". Para un mejor seguimiento de los puntos analizados, se ha mantenido la misma designación de temas y epígrafes que los empleados por el libro de texto.

Este es el libro utilizado en el Colegio Nuestra Señora de Lourdes, institución educativa católica perteneciente a los Hermanos de las Escuelas Cristianas, congregación religiosa fundada en el siglo XVII por San Juan Bautista de La Salle, centro en el que he realizado mis prácticas educativas. Se trata de un centro concertado en las etapas de educación infantil, primaria y secundaria y privado en Bachillerato, por lo que el marco socio-cultural en el que está inmerso este TFM se caracteriza por:

1. El colegio se encuentra en la zona centro de Valladolid, donde existe una amplia franja de población de clase media-alta y con numerosos recursos de todo tipo. Es una zona de tendencia conservadora, con una media de edad elevada, escasa presencia de inmigrantes y sin graves problemáticas sociales.
2. En cuestiones económicas, se aprecia una gran diversidad de situaciones, predominando un nivel medio-alto. Un porcentaje muy elevado de los padres tiene estudios superiores y universitarios, lo que favorece que sus hijos también aspiren a ellos y tengan altas expectativas. En la mayoría de los hogares trabajan ambos progenitores, principalmente como funcionarios, empleados o en profesiones liberales.
3. En aspectos académicos, las familias de los alumnos prestan bastante colaboración y apoyo al colegio en el proceso educativo de sus hijos. Aprecian el trabajo que realizamos los profesores y se sienten protagonistas de esa labor. Generalmente están bien informados y son demandantes de información. Acuden con normalidad a las reuniones que tratan temas que afectan a sus hijos, aunque menos a otro tipo de convocatorias.
4. En el centro son conscientes de que los motivos religiosos ya no son la razón principal por la que las familias llevan a sus hijos a las aulas lasalianas, pero sí aprecian la formación religiosa que se imparte y demandan una educación en valores como el esfuerzo, el trabajo, la constancia, el orden, la disciplina o la responsabilidad.
5. En lo que respecta a aspectos sociales, aún se mantiene el modelo tradicional de las familias, si bien se van haciendo más habituales los casos de familias desestructuradas. No se perciben familias con graves problemas sociales. Suelen ser respetuosas, poco conflictivas, solidarias, generosas. Por el contrario, son proteccionistas con sus hijos y les ofrecen numerosas posibilidades de todo tipo (viajes, estudios...), lo que en ocasiones hace que sean muy consumistas y estén a la última en todo tipo de productos (móviles, ordenadores, ropa...). Algunos padres ejercen un escaso control del uso que hacen sus hijos de las Nuevas Tecnologías y delegan parte de su responsabilidad educativa en el colegio.

Las principales características académicas de los alumnos de segundo de bachillerato pueden resumirse en:

1. Los alumnos son cercanos y respetuosos, educados, espontáneos, naturales y directos. Guardan bien las formas y no suelen ser conflictivos. Son creativos y tienen gran sentido de pertenencia al centro. Tienen buenas capacidades

intelectuales y por lo general, buen ritmo de trabajo, con algún altibajo durante el curso. Son dóciles, receptivos, correctos y afectivos. Son sensibles a la solidaridad y a la justicia, y no rechazan la colaboración. Responden positivamente cuando se les hacen propuestas.

2. Sintonizan con el fenómeno ecológico y las ONG's. Responden bien a las campañas y están dispuestos al voluntariado. Son respetuosos ante el tema religioso, aunque un tanto indiferentes en su respuesta.
3. Presentan poca problemática social, sin casos de absentismo y una escasa presencia de trastornos y deficiencias (mínima presencia de alumnos con necesidades educativas especiales).
4. Tienen un fácil acceso a las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación, así como a la cultura en general.
5. Participan de la sociedad a la que pertenecen, y no son del todo críticos con la realidad, aunque sí reivindicativos. Les cuesta distinguir situaciones y se refugian en la masa en ciertos momentos. Se hallan muy influidos por los medios de comunicación y por las marcas. Son cómodos y caprichosos y, en ocasiones, no valoran lo que tienen y abusan de las Nuevas Tecnologías. Buscan la utilidad inmediata, son pragmáticos y competitivos, y tienden a no asumir responsabilidades. Exigen más sus derechos que sus deberes.
6. Muestran gran preocupación por los estudios, con poca resistencia al fracaso y a la frustración.

Los recursos materiales que dispone el centro son extraordinarios puesto que tanto las aulas como otras salas comunes (aulas de informática, bibliotecas, aulas materia, etc.) están dotadas de una tecnología vanguardista destacando la presencia de medios informáticos y audiovisuales innovadores: Pizarra Digital Interactiva (P.D.I.), conectada a un proyector, ordenador (conectado a la red wi-fi) y a un equipo audiovisual formado por DVD, video, reproductor de CD, home-cinema y salidas de radio y televisión conectadas a antena parabólica, ordenadores portátiles, página web del centro (http://www.colegiolourdes.es), gestor educativo "Sallenet" (plataforma vía web de información, de encuentro y relación de toda la comunidad educativa).

Sin embargo, muy a mi pesar, no he podido trasladar los desarrollos de mi TFM a los alumnos de 2º de bachillerato puesto que, por un lado, mis prácticas educativas sólo se centraron en 2º curso de ESO ya que mi tutor de prácticas sólo impartía matemáticas en ese nivel y, por otro lado, porque el Centro no admitió mi solicitud de asistir a otros cursos superiores para, al menos como oyente, apreciar y participar de otras facetas de la enseñanza, con diferentes profesores y alumnos. Por ello, no he podido implementar esta forma de enseñar el dibujo técnico complementado con una base analítica y matemática, ni obtener registros, pruebas o cualquier otro documento que hubiera sido incluido en este TFM.

Por ello, y como complemento de la resolución de ejercicios y problemas desarrollados en cada apartado, se ha confeccionado lo que he llamado "Ficha de actividad", en la que incluyo un planteamiento metodológico en una situación académica particular y su forma de resolución con la definición de una adaptación curricular (en el caso de ser necesaria), los preceptivos conocimientos previos en los alumnos, los objetivos específicos, los contenidos a impartir, los criterios de evaluación, los recursos necesarios y una propuesta de ejercicios y problemas de dos niveles de dificultad. Dada la homogeneidad de los alumnos encontrados en el centro de prácticas, y la gran cantidad de recursos tecnológicos, la clase "tipo" para la que se desarrollan las fichas es prácticamente la misma, a excepción de la confeccionada para el tema de potencias, para el que se han elaborado dos: una, como las demás, y otra, con una adaptación curricular significativa.

En conclusión, el proceso que se ha seguido para el desarrollo de los contenidos prácticos de este TFM ha sido el siguiente:

- Lectura pausada y reflexiva de cada uno de los enunciados y explicaciones plasmadas en el libro de referencia.
- Consideraciones acerca de la necesidad complementaria de una explicación matemática.
- Desarrollo analítico de dichos fundamentos matemáticos, como si se tratara de un ejercicio o un problema, explicando cada uno de los pasos que se van dando, procurando desarrollar varios procedimientos de resolución cuando el ejercicio lo admite, así como todas las configuraciones posibles.
- En complemento con el punto anterior, confección de un dibujo o una figura aclaratoria y descriptiva del desarrollo analítico, mediante el software académico y de licencia libre GeoGebra versión 5.0.
- Y, por último, confección de la ficha de actividad, recurso que además de guiar al docente, ayudará al estudiante a practicar y profundizar sobre los ejercicios explicativos expuestos en cada tema.

3.- CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS Y DESARROLLOS ANALÍTICOS

3.1.- TEMA 1: TRAZADOS EN EL PLANO

3.1.1.- TRAZADO DE LA PERPENDICULAR A UNA SEMIRRECTA EN SU EXTREMO

El procedimiento para trazar una recta perpendicular a otra ya dada, t, por uno de sus extremos, O, consiste en formar un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice O. Para ello, vamos a tomar los segmentos que se identifican en la figura 1: $\overline{ON}$, de dimensión 3, $\overline{OP}$, de dimensión 4, y $\overline{NP}$, de dimensión 5, y vamos a utilizar la propiedad de estos números llamados pitagóricos puesto que verifican la igualdad $3^2+4^2=5^2$. Trazando las circunferencias de centros O y N, y radios las magnitudes de los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{NP}$, se obtienen dos puntos de intersección de ambas circunferencias (P y P'). La recta que une los puntos O, P y P' es la perpendicular que se estaba buscando. Bastaba con encontrar uno cualquiera de los dos puntos (o P o P'), pero obsérvese que el libro de texto que estamos estudiando sólo hacen mención a la solución P.

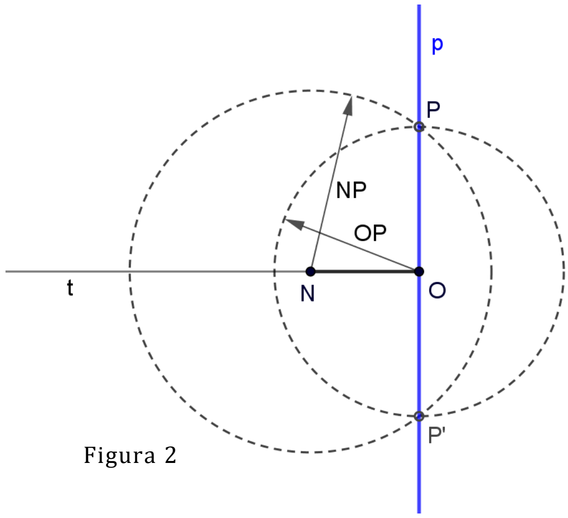


Figura 2

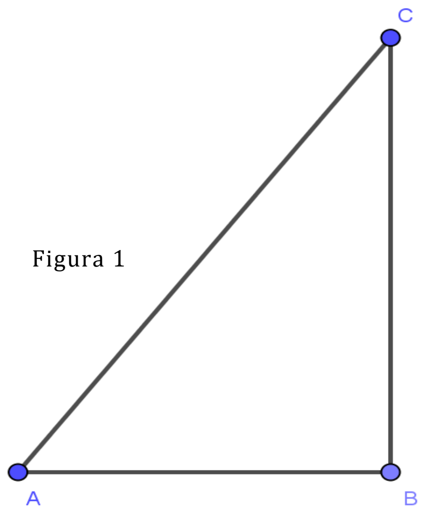


Figura 1

Pero no es tan evidente que cumpliéndose el teorema de Pitágoras se pueda construir siempre un triángulo rectángulo; es decir, dando por supuesta la igualdad $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ (obsérvese la figura 2), ¿es rectángulo en B el triángulo ABC? O bien, ¿por qué el triángulo es rectángulo con el ángulo recto en el vértice B?

Debemos plantear en los alumnos este tipo de cuestiones continuamente para que puedan fundamentar todos sus aprendizajes de dibujo con los adquiridos en matemáticas, y así comprender, además, la transversalidad de las ciencias.

Tras preguntar a los alumnos si entienden la cuestión planteada, es decir, ¿si se tiene la expresión $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, implica la existencia de un ángulo recto en el vértice B?, les mostramos una de las posibles soluciones mediante el desarrollo del *teorema del coseno*. Por dicho teorema podemos escribir:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{BC}\right|\cos\hat{B}$$

En el triángulo de la misma figura anterior, podemos descomponer el vector $\overline{AC}$ como suma de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Por lo que $\overline{AC}^2$ se puede expresar, haciendo uso del producto escalar que denotamos con el símbolo "$*$", como:

$$\overline{AC}^2 = (\overline{AB} + \overline{BC}) * (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{AB} * \overline{AB} + \overline{AB} * \overline{BC} + \overline{BC} * \overline{AB} + \overline{BC} * \overline{BC} =$$

Agrupando los términos y puesto que $\overline{BC} * \overline{AB} = \overline{AB} * \overline{BC}$ tenemos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} * \overline{BC}$$

Sustituyendo esta última expresión obtenida para $\overline{AC}^2$ en la hipótesis de inicio:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,\overline{AB} * \overline{BC}$$

Y simplificando nos quedará:

$$0 = 2\,\overline{AB} * \overline{BC}$$

Es decir, el producto escalar de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ debe ser nulo y, por consiguiente, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares en el punto B. Y, por tanto, siempre que dispongamos de la expresión o fórmula de Pitágoras $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ implicará que el triángulo formado por los tres vértices A, B y C forman un triángulo rectángulo en B.

3.1.2.- TRAZADO DE LAS RECTAS PARALELAS A OTRA A UNA DISTANCIA DADA

En geometría descriptiva, tal y como se representa en la figura 3, dada la recta r, deben trazarse las rectas s y u paralelas a ella a una distancia t. Para ello, se toman dos puntos cualesquiera R y S en r y se traza por cada uno de ellos la perpendicular a r. En Geogebra, utilizaremos la herramienta "recta perpendicular". Con la ayuda del compás, trazamos los arcos de circunferencia de radio t y centros R y S, que cortarán a las perpendiculares en los puntos E, F, G y H. Y, por último, utilizando la escuadra y el cartabón se dibujan las rectas s, que pasa por E y F, y u, que pasa por G y H, que son las rectas pedidas.

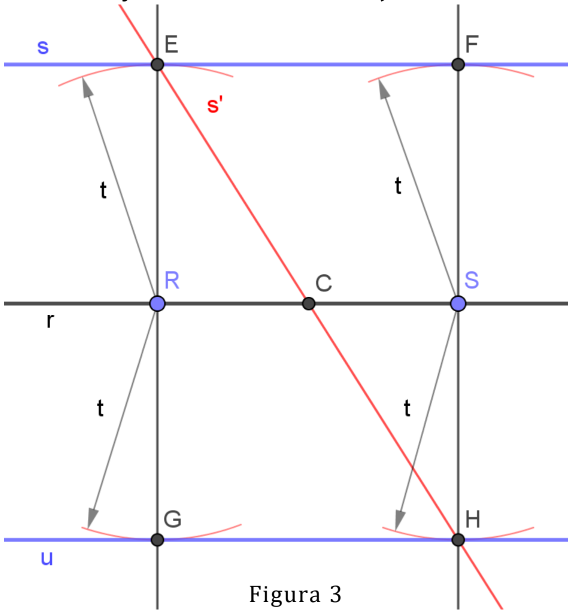


Figura 3

Veamos qué razonamiento podemos seguir para que los alumnos comprendan esta descripción de dibujo técnico.

En este problema aparecen dos cuestiones a resolver:

- Por un lado, la ambigüedad de la división de un plano por una recta en dos semiplanos, cuestión que requiere la aplicación de unas matemáticas de un nivel superior a segundo de bachillerato y que, por tanto, no puede ser objeto de este TFM.
- Y, por otro lado, la demostración rigurosa y analítica que permite concluir que, efectivamente, la recta que se obtiene es paralela a la recta dada, r. La desarrollamos a continuación.

Mediante la demostración por reducción al absurdo veremos que la recta s', que une los puntos E y H, puntos ambos que cumplen las condiciones de estar en la perpendicular a r y a una distancia t, no puede ser una recta paralela a la recta r, y que las únicas soluciones son las rectas s y u.

Supongamos que tenemos dos rectas que no son paralelas y que se cortan en un punto "C" suficientemente alejado de R, S, E y F como para que podamos imaginar que las rectas r y s son paralelas y separadas una magnitud t al igual que antes (figura 4).

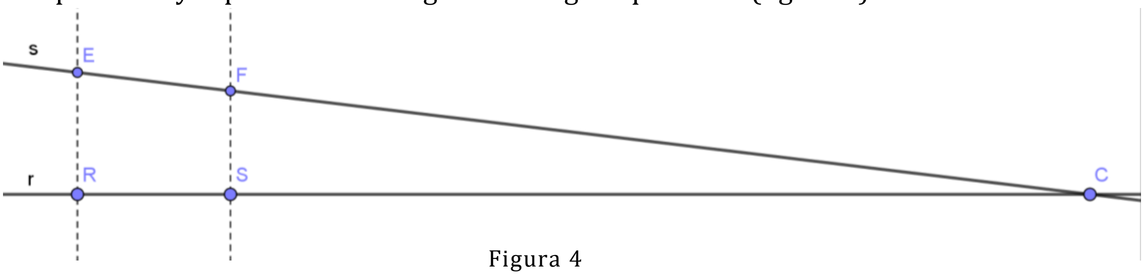


Figura 4

Aplicando el teorema de Tales o la semejanza de los triángulos ERC y FSC., podemos deducir la proporcionalidad entre los distintos segmentos en las rectas r y s,

$$\frac{\overline{CS}}{\overline{SF}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{RE}} \Longrightarrow \overline{CS} = \overline{CR} \text{ porque } \overline{SF} = \overline{RE} = t.$$

De ambas figuras anteriores, 3 y 4, pueden interpretarse dos casos:

1. El punto de corte de las rectas no está en el segmento RS (figura 4); es decir, el punto C cumplirá que:

$C \notin [R,S] = \{Q \mid \overline{RQ} = \boldsymbol{\lambda} * \overline{RS}, 0 \leq \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{1}\}$

Utilizando el concepto de distancia entre dos puntos, tenemos que la distancia de C a R será, o bien:

$$d\,(C, R) = d\,(C, S) + d\,(S, R)$$

o bien

$$d\,(C, R) = d\,(C, S) - d\,(S, R)$$

y como S y R son dos puntos cualesquiera y distintos tomados en la recta inicial r, sabemos que d (S, R) ≠ 0 y, por tanto, d (C, R) ≠ d (C, S), que es una contradicción con el hecho anteriormente probado $\overline{CS} = \overline{CR}$.

2. El punto de corte de las rectas r y s, C, se encuentra dentro del segmento $\overline{\text{RS}}$ (figura 3, rectas r y s'); es decir:

$$C \in [R,S] \quad \text{o bien} \quad C \in r.$$

Por la aplicación del Teorema de Tales habíamos obtenido la igualdad de los segmentos $\overline{CS} = \overline{CR}$; es decir, C debe estar en el segmento $\overline{SR}$ y a la misma distancia de S que de R. Por tanto, a C no le queda más solución que ser el punto medio del segmento $\overline{SR}$.

En la figura 4, como ya dijimos antes, también podemos observar cómo los triángulos ERC y FSC son semejantes puesto que las amplitudes de los tres ángulos de cada triángulo son iguales y, por tanto, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CR}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CS}}$$

y como $\overline{CS} = \overline{CR}$ deducimos también que $\overline{CE} = \overline{CF}$. Como el punto C está en la recta que pasa por los puntos E y F por definición, entonces C es el punto medio de E y F. Como además E y F han de estar en el mismo semiplano abierto definido por la recta r, entonces los puntos de dicho segmento $\overline{EF}$ están en el mismo semiplano. Es decir:

$$C \in [E, F] \implies C \notin r$$

Y, por tanto, llegamos a una contradicción puesto que C es el punto intersección de las rectas r y s.

3.1.3.- ARCO CAPAZ

Escribimos inicialmente en este punto una exposición similar del texto que figura en el libro de dibujo técnico de segundo de bachillerato que estamos tomando como referencia, en el que se limita a expresar la operativa a seguir para la construcción de un arco capaz bajo un determinado ángulo, sin distinguir las diferentes configuraciones posibles:

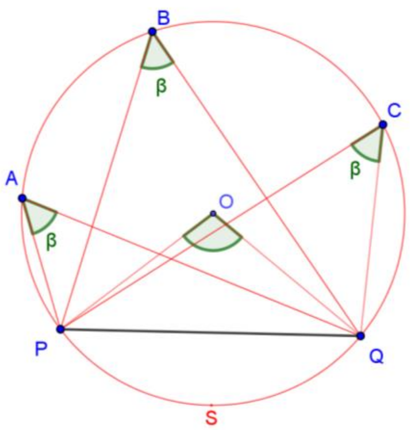


Figura 5

Supongamos la circunferencia de centro O y, en ella, una cuerda $\overline{PQ}$ (figura 5). Si tomamos puntos de esta circunferencia, tales como A, B, C, etc., y los unimos con P y Q, tenemos una serie de ángulos inscritos que son todos iguales (β) porque sus extremos abarcan el mismo arco de circunferencia $\widehat{PSQ}$.

Se define arco capaz de un segmento $\overline{PQ}$ bajo un ángulo β al lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve este segmento bajo el ángulo β.

Para la finalidad de este TFM, proponemos al alumno el reto de justificar con rigor dicha definición. Para ello, proponemos el guión que se establece a continuación.

Primeramente, debe apreciarse que la recta que contiene al segmento $\overline{PQ}$ divide a la circunferencia en dos partes, cada una de ellas contenida en el semiplano que define, por lo que deben diferenciarse dos arcos de la circunferencia, uno pequeño y que distinguiremos como $\widehat{PQ}^{-}$ para que sea una designación breve y comprensiva, y el otro, mayor, que llamaremos $\widehat{PQ}^{+}$. En el caso en que los puntos P y Q estén en el mismo diámetro, elegiremos indistintamente al inicio del proceso uno de los arcos, al que denominaremos $\widehat{PQ}^{-}$, y al otro, $\widehat{PQ}^{+}$.

En segundo lugar, deben considerarse las diferentes configuraciones que se originan según adoptemos la posición de los puntos A, B, C… desde los que se ve el segmento $\overline{PQ}$, y estudiarse cada una de ellas por separado. Analicemos todos estos casos:

1º Tomamos un punto A en la zona del arco $\widehat{PQ}^{-}$.

Observando la figura 6, consideramos los puntos “A” bajo los cuales se observa el segmento $\overline{PQ}$ bajo un ángulo β. El lugar geométrico de dichos puntos será el arco capaz

$\widehat{PQ}-$. Veamos qué relación encontramos, tras planteárselo a los alumnos, entre los ángulos $\beta, \alpha\ y\ \gamma$ de la citada figura 6.

Puesto que O es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos P y Q, los segmentos $\overline{OP}, \overline{OQ}$ y $\overline{OA}$ son iguales, de tal manera que los triángulos AOP, AOQ y POQ son isósceles, por lo que se tienen las igualdades de ángulos reflejados en la figura:

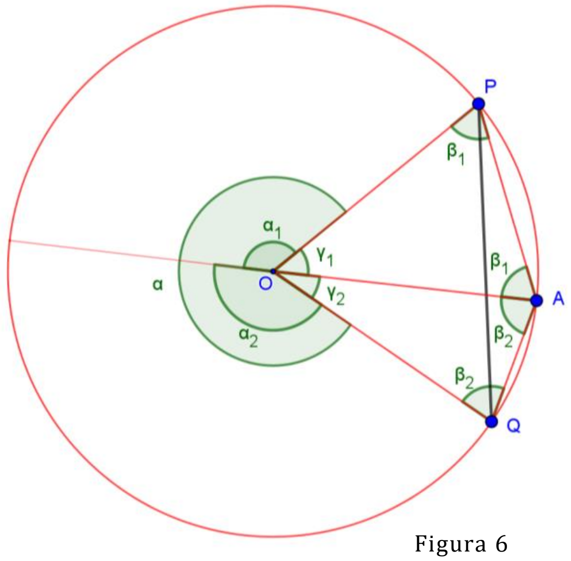


Figura 6

En el triángulo AOP: $\widehat{P} = \widehat{A} = \beta_1$
Y en el triángulo AOQ: $\widehat{Q} = \widehat{A} = \beta_2$

En estos mismos triángulos citados deducimos que:

$$\Upsilon_1 + 2\beta_1 = \pi$$

$$\Upsilon_2 + 2\beta_2 = \pi$$

Llamando

$$\Upsilon = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 \quad y \quad \beta = \beta_1 + \beta_2$$

y sumando las dos expresiones anteriores obtenemos:

(1) $\Upsilon + 2\beta = 2\pi$

Y, por otro lado, observando los ángulos centrales:

$$\alpha_1 + \Upsilon_1 = \pi$$

$$\alpha_2 + \Upsilon_2 = \pi$$

Llamando, igualmente $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ y volviendo a sumar las últimas dos fórmulas:

(2) $\alpha + \Upsilon = 2\pi$.

Restando las ecuaciones (1) y (2):

$$2\beta - \alpha = 0$$

$$2\beta = \alpha$$

Es decir, que el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central. De esta manera queda demostrado que en los puntos "A" situados en el arco capaz $\widehat{PQ}-$. lugar geométrico desde los que se ve el segmento $\overline{PQ}$ bajo un ángulo determinado, dicho ángulo es la mitad que visto el mismo segmento desde el centro de la circunferencia (ángulo central).

2º Tomamos un punto A en la zona del arco $\widehat{PQ}^{+}$.

A su vez, debemos hacer otras dos diferenciaciones (observar la figura 7):

2.1. Puntos comprendidos entre los diámetros que pasan por P y Q ("A").

2.2. Resto de puntos que componen el arco $\widehat{PQ}$+ (puntos como B o C).

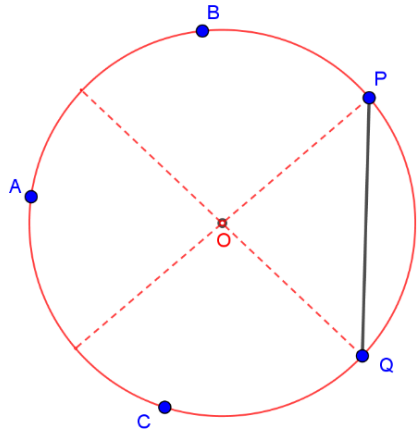


Figura 7

2.1. Puntos comprendidos entre los diámetros que pasan por P y Q.

Al igual que obtuvimos anteriormente, los triángulos AOP y AOQ de la figura 8 son isósceles, por lo que se deduce de ellos que:

$$2\beta_1+ \Upsilon_1=\pi$$

$$2\beta_2 +\Upsilon_2= \pi$$

Y utilizando las mismas notaciones del caso 1:

$$(1)\ \Upsilon+2\beta = 2\pi$$

e igualmente para los ángulos centrales, se obtiene

$$(2)\ \alpha+\Upsilon=2\pi$$

y restando las ecuaciones (1) y (2)

$$\alpha = 2\beta$$

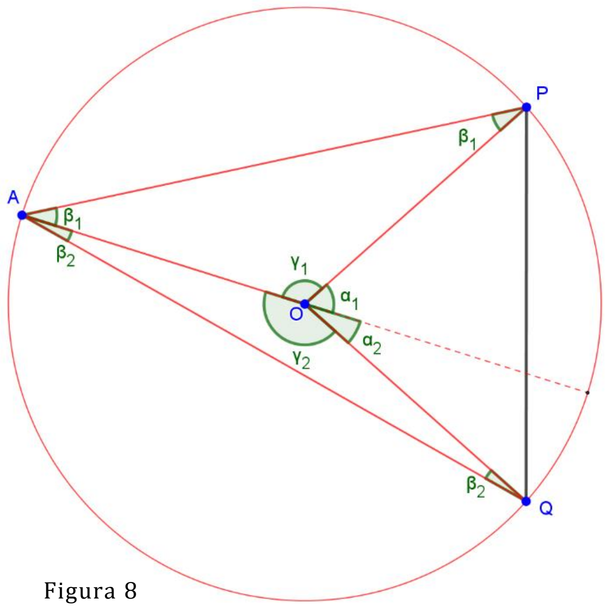


Figura 8

obteniéndose, por consiguiente, una conclusión idéntica a la del caso 1.

2.2. Resto de puntos que componen el arco $\widehat{PQ}$+.

Tomamos un punto A como en la figura 9 y procedemos de forma análoga a los puntos anteriores:

Los triángulos AOP y AOQ son isósceles y, por tanto:

$$2\beta_1+ \Upsilon_1=\pi$$

$$2\beta_2 +\Upsilon_2= \pi$$

Obsérvese ahora que el ángulo β bajo el que se ve el segmento $\overline{PQ}$ desde A es $\beta=\beta_1-\beta_2$ y no la suma de los ángulos, como ocurría en los casos anteriores.

Por tanto, ahora llamaremos

$$\beta = \beta_1 - \beta_2$$

$$\Upsilon = \Upsilon_2 - \Upsilon_1$$

y restando las dos fórmulas anteriores se tiene:

$$2\beta_1 - 2\beta_2 + \Upsilon_1 - \Upsilon_2 = 0$$

$$2\beta = \Upsilon$$

Y de la observación de los ángulos centrales, con $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$

$$\Upsilon_1 + \alpha_1 = \pi$$

$$\Upsilon_2 + \alpha_2 = \pi$$

$$\alpha = \Upsilon \Longrightarrow \alpha = 2\beta$$

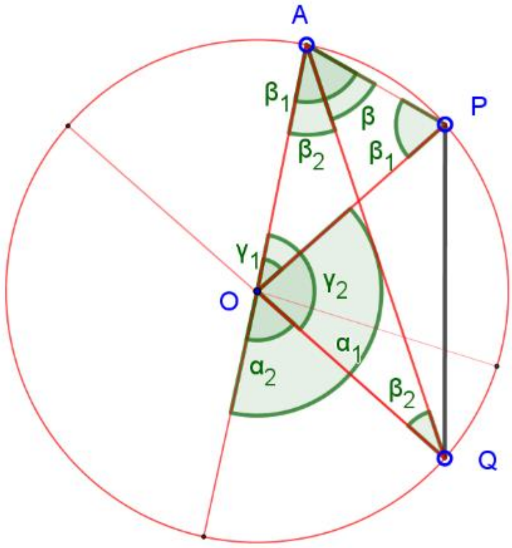


Figura 9

Y, por consiguiente, volvemos a obtener la misma propiedad.

3º Por último, consideremos aquellos puntos A que coinciden con P o con Q.

En este caso, uno de los lados del triángulo APO de los casos anteriores se ha convertido en la recta tangente a la circunferencia de centro O en el punto A, tal y como se puede apreciar en la figura 10.

Dicha recta tangente y el segmento OP forman, por tanto, un ángulo recto:

$$(1)\ \beta + \Upsilon = \frac{\pi}{2}$$

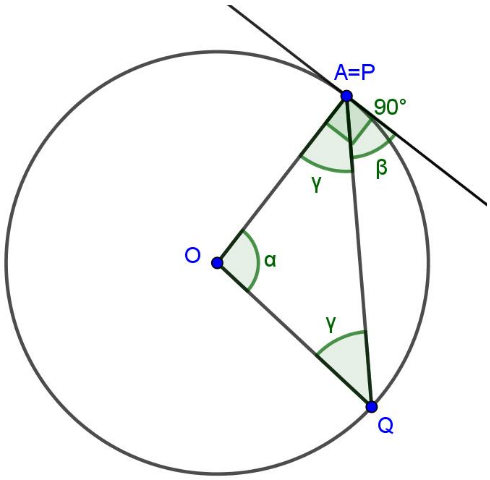


Figura 10

y el triángulo OPQ es isósceles, por lo que:

$$\alpha + 2\Upsilon = \pi$$

Dividiendo por 2 la última fórmula:

$$(2)\ \frac{\alpha}{2} + \Upsilon = \frac{\pi}{2}$$

Restando las expresiones (2) y (1) nos quedará:

$$\frac{\alpha}{2} - \beta = 0$$

$$\alpha = 2\beta$$

Por tanto, se ha demostrado que el valor del ángulo β, semiinscrito, es igual a la mitad del ángulo central α, ángulo $\widehat{POQ}$. Y como tanto el ángulo inscrito como el semiinscrito son la mitad del ángulo central, también queda demostrado que el ángulo inscrito y el semiinscrito son iguales.

Condición necesaria.

En todas las configuraciones anteriores hemos visto que, si un punto está en la circunferencia, entonces está en el arco capaz. Nos faltaría ver que, si el punto está en el arco capaz, necesariamente está en la circunferencia. Para ello, proponemos una sencilla demostración que exponemos a continuación.

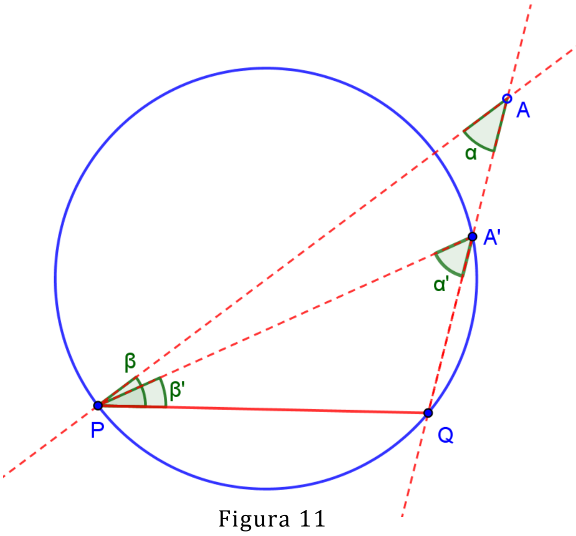


Figura 11

Supongamos que el punto A no está en la circunferencia y consideramos, como se reproduce en la figura 11, el punto A', que está en la intersección de la circunferencia y la recta que une a los puntos A y Q. Fijémonos en los ángulos $\beta = \measuredangle QPA$ y $\beta' = \measuredangle QPA'$. Como el punto A' está entre los puntos A y Q, si β' fuese igual a β, entonces A' y A serían el mismo punto, A=A', por lo que $\beta' \neq \beta$ y, por consiguiente, el punto A no está en el arco capaz.

3.1.4.- APLICACIÓN DEL ARCO CAPAZ EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO

En la aplicación del arco capaz para la obtención de un triángulo se observa que, como en otros casos, no se aportan todas las soluciones posibles sino sólo las más evidentes. El problema que nos sugiere este procedimiento desarrollado en el libro es precisamente encontrar esas otras posibles soluciones. En concreto, como se puede apreciar en la figura 12, no se ha considerado la figura simétrica con respecto al eje de simetría que pasa por los puntos B y C. Se debe ser totalmente riguroso en la exposición de todas las soluciones posibles para un correcto aprendizaje de los alumnos, que como veremos, tampoco genera mayor dificultad.

Para poner en práctica dicha aplicación, se suponen conocidos dos lados de un triángulo, a y b (según los casos podrá valer b_1, b_2 o b_3), y el ángulo opuesto al lado a, α que como hemos visto antes, coincide con el ángulo semiinscrito. La obtención del triángulo se realiza construyendo el arco capaz del segmento a bajo el ángulo α (figura 12). Se realizan **tres hipótesis** distintas:

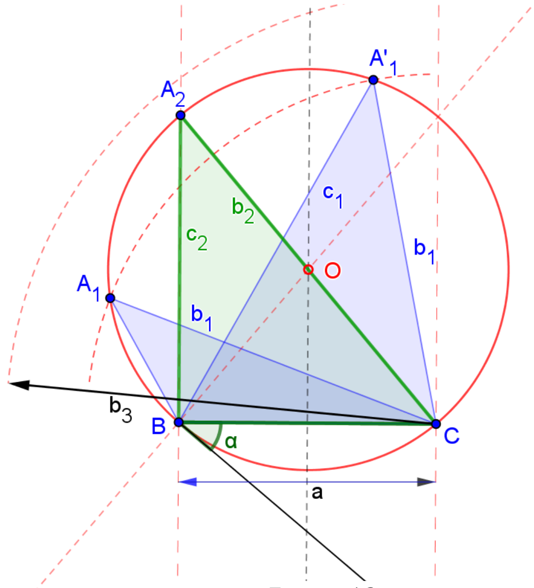


Figura 12

1ª Si b=b_1, hay ocho posibles soluciones (figura 13) y no sólo dos como se refleja en el libro de texto, que son los **triángulos:** ***A_1BC* y *A'_1BC***, habiéndose obtenido los puntos *A_1* y *A'_1* como intersecciones de un arco de circunferencia con centro en C y con radio b_1 al cortar el arco capaz, que es la circunferencia de centro O y radio $\overline{OB} = \overline{OC}$; los **triángulos *$A_2BC$* y *$A'_2BC$***, siendo *$A_2$* y *$A'_2$* las intersecciones del arco de centro en B y con el mismo radio b_1 con el arco capaz, que es la misma circunferencia anterior; y los **triángulos A_3BC y A'_3BC, y A_4BC y A'_4BC**, que son simétricos de los cuatro primeros respecto a la simetría que tiene por eje la recta que contiene el segmento $\overline{BC}$.

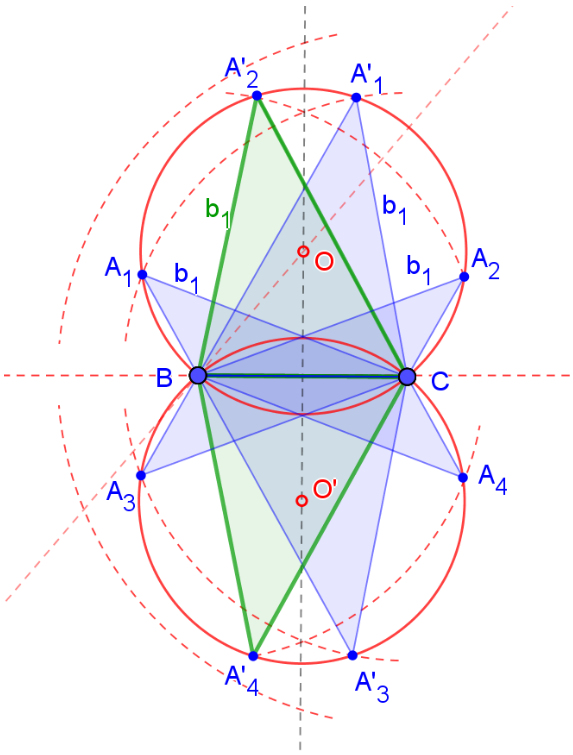


Figura 13

2ª Si b=b$_2$, es decir, igual al diámetro de la circunferencia que contienen el arco capaz, hay cuatro soluciones (figura 14), **triángulos A_5BC y A'_5BC**, y sus simétricos como en el caso anterior, **A_6BC y A'_6BC**.

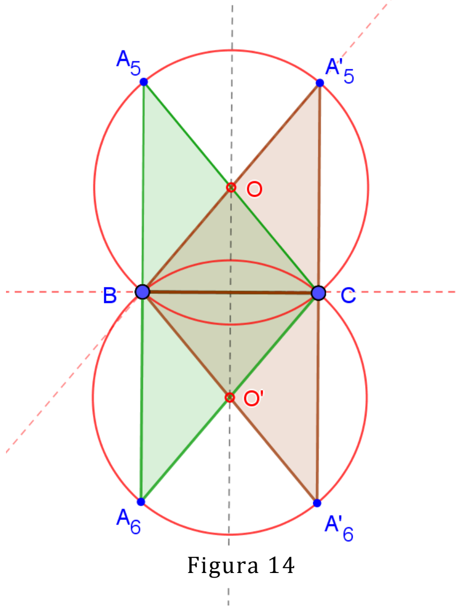


Figura 14

3ª Si b=b$_3$, mayor que el diámetro de la circunferencia, el problema **no tiene solución**, puesto que los arcos desde C o desde B nunca cortan el arco capaz (puede observarse en la figura 12).

3.1.5.- CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE EN UNA CIRCUNFERENCIA.

De la definición de arco capaz, el libro deduce que, por ejemplo, los arcos $\widehat{\text{BAD}}$ y $\widehat{\text{BCD}}$ (figura 15) son arco capaz de la diagonal $\overline{BD}$ y los vértices A y C, opuestos, tienen ángulos suplementarios, es decir, que suman 180º. También son suplementarios los ángulos de los vértices B y D.

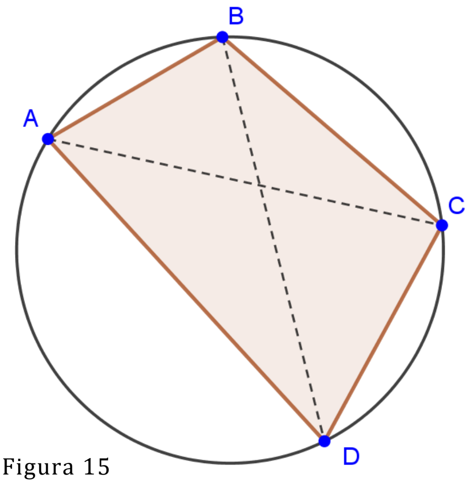


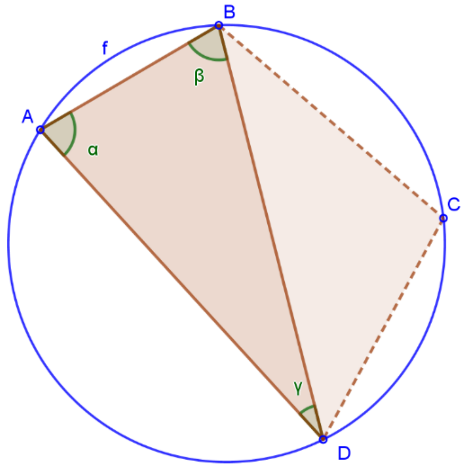
Figura 15

Y, a continuación, afirma: "Según esto se puede decir que todo cuadrilátero convexo cuyos ángulos opuestos son suplementarios es inscriptible". Esta afirmación nos sugiere provocar una reflexión en los alumnos y plantearles la siguiente pregunta: ¿Se puede realmente realizar esta afirmación? Probablemente sí, pero no porque se deduzca de la frase anterior. Este tipo de afirmaciones, en las que habiendo demostrado únicamente la implicación en un sentido, se entiende que se ha demostrado la doble implicación, son errores muy graves desde un punto de vista matemático.

Veamos cómo podría demostrarse. Es decir, queremos demostrar que, si los ángulos de dos vértices opuestos son suplementarios, el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia. Partimos, por tanto, de:

(1) $\hat{A} + \hat{C} = \pi$
(2) $\hat{B} + \hat{D} = \pi$

Por tres puntos cualesquiera de ellos, por ejemplo, A, B y D, pasa una circunferencia, al ser coplanarios y no estar alineados (figura 16). Sea f dicha circunferencia. $\overline{BD}$ es una cuerda de f y A ∈ f por construcción, pero no sabemos si la circunferencia f pasa por el punto C. Sí que podemos escribir que la circunferencia completa se divide en dos arcos, es decir:



$$\widehat{BAD} + \widehat{BD} = 2\pi$$

Figura 16

y, además, por las relaciones entre el arco capaz, el ángulo inscrito y el central, sabemos que $\hat{A} = \widehat{BAD} = \alpha$ es la mitad del arco $\widehat{BD}$ opuesto al vértice A; es decir, que la expresión anterior también se puede escribir como:

$$\widehat{BAD} + 2\hat{A} = 2\pi$$

Dividiendo por 2:

$$(3)\quad \frac{1}{2}\widehat{BAD} + \hat{A} = \pi$$

Restando las igualdades (1) y (3):

$$\hat{C} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$$

Lo que quiere decir que el punto C está en el arco de la circunferencia f opuesto al vértice A y, por tanto, C también pertenece a dicha circunferencia.

A continuación, prosigue: "En todo cuadrilátero inscrito, son iguales los ángulos que forman las diagonales con dos lados opuestos: $A_1=B_1$; $B_2=C_2$; $C_1=D_1$; $D_2=A_2$"

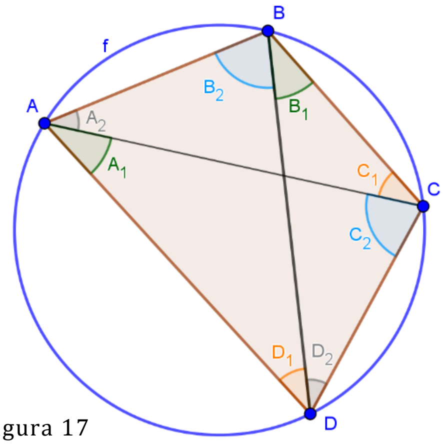


Figura 17

Si observamos la figura 17, es totalmente correcta la afirmación puesto que los ángulos iguales abarcan el mismo arco (para una mejor comprensión, los ángulos iguales se han marcado con el mismo color y tamaño).

Pero vuelve a reproducir el mismo error que antes al escribir: "Recíprocamente se puede decir que todo cuadrilátero convexo es inscriptible, ..." sin ningún tipo de demostración o al menos una explicación.

A los alumnos de bachillerato se les debe advertir y preguntar: ¿estáis de acuerdo con esta afirmación?, de forma que reflexionen y no cometan este tipo de errores, e incluso, sean capaces de razonar del siguiente modo:

En este caso partimos de la hipótesis $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ desconociendo si el cuadrilátero ABCD es inscriptible (figura 18).

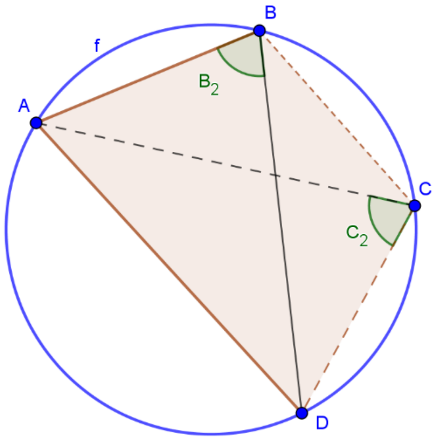


Figura 18

Al igual que antes, lo que sí podemos afirmar es que podemos construir una circunferencia f que inscriba a los puntos A, B y D, por ejemplo.

De las propiedades del arco capaz, podemos $\overset{\frown}{AD}$ afirmar que el ángulo $\hat{B}_2$ es la mitad del arco capaz Como $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ el punto C debe pertenecer al mismo lugar geométrico que B puesto que se cumple que la mitad del arco es la mitad del ángulo $\hat{C}_2$. Y, por tanto, C pertenece también a la circunferencia f.

Conclusión: todo cuadrilátero convexo es inscriptible en una circunferencia cuando cumple cualquiera de las dos propiedades demostradas anteriormente:

a) Que los ángulos de dos vértices opuestos son suplementarios.
b) Que los ángulos formados por las diagonales con dos lados opuestos son iguales.

3.1.6.- CONSTRUCCIÓN GRÁFICA DE LA MEDIA PROPORCIONAL A DOS SEGMENTOS

Aunque el empleo de los tres procedimientos utilizados en el libro de texto es correcto y está basado, cada uno de ellos, en teoremas que cita, no explica ninguno.

Debe fomentarse un tratamiento heurístico de los problemas y evitar que los alumnos realicen una memorización de teoremas (en este caso, teoremas del cateto y de la altura), teoremas que, por otra parte, pueden ser deducidos sin apenas dificultad de un mismo planteamiento general (la semejanza de triángulos). Por ello, nos parece mucho más acertado el empleo de dicho planteamiento general para la resolución de este tipo de ejercicios en vez de la mera enunciación de los teoremas sin ninguna explicación, tal y como hace el libro. Veámoslo:

1) Primer procedimiento

(figura 19).

Los triángulos ACD y CDB son semejantes puesto que tienen los tres ángulos iguales, como se puede apreciar en la figura y, por tanto, se cumple que:

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{a-b} = tg\ (\beta)$$

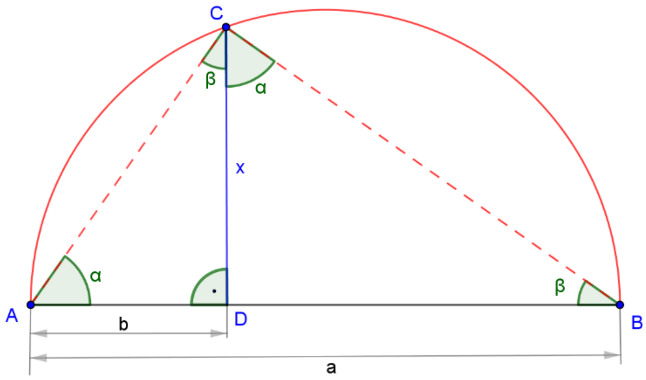


Figura 19

de donde deducimos

$$x^2 = (a-b) * b$$

que es el denominado **teorema de la altura**, es decir que, en cualquier triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es la media geométrica entre los segmentos en que la divide, que son a su vez, las proyecciones de dichos catetos sobre la hipotenusa. Una vez obtenido el valor de x (altura de la hipotenusa), podemos resolver y calcular el resto de las magnitudes en cada triángulo.

2) Segundo procedimiento.

De la misma forma que antes, podemos observar la semejanza de los triángulos ACD y ACB puesto que ambos tienen un ángulo recto (marcado en color naranja en la figura 20), y ser iguales los ángulos de los otros dos vértices (marcados como α y β en color verde en la figura citada). Por tanto, de la semejanza de dichos triángulos, podemos deducir:

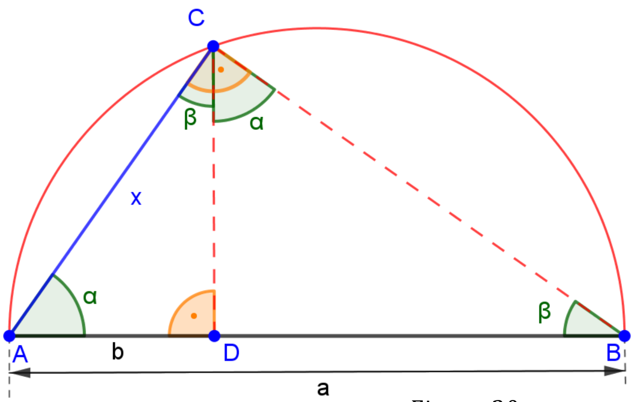


Figura 20

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{a} = sen\ (\beta)$$

y multiplicando en cruz

$$x^2 = a * b$$

que es el denominado **teorema del cateto**, el cual dice que, en todo triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

3.1.7.- PROBLEMA DE MÁXIMA DIFERENCIA DE DISTANCIAS

Literalmente, el libro de texto, basándose en la figura 21, dice:

"Dados dos puntos A y B y una recta r que los separa, encontrar en ésta el punto P tal que la diferencia $\overline{PA} - \overline{PB}$ *sea máxima."*

Y continúa:

"Se halla el simétrico del punto B respecto a la recta r, punto B', y se une con A. El punto P es el pedido y la diferencia máxima es $\overline{AB'}$*."*

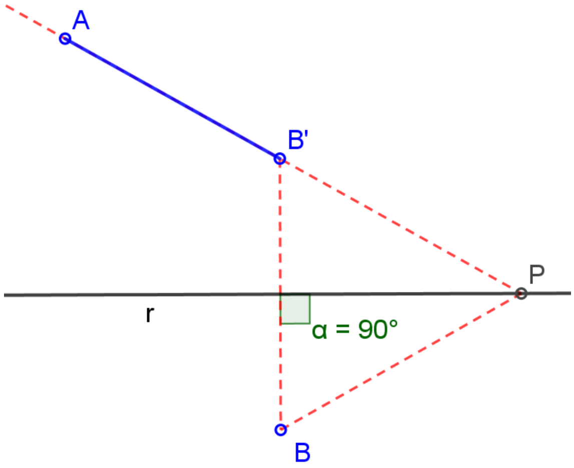


Figura 21

En otros apartados de este mismo capítulo nos hemos servido de la ausencia de razonamientos matemáticos que expliquen la configuración gráfica realizada, o la falta de las diferentes soluciones posibles de un ejercicio, o la aparición de implicaciones sin ningún tipo de demostración, etc. para proponer temas de reflexión a los alumnos. Pero, en este apartado concreto, se produce la confluencia de diversas situaciones, entre las que destacan: no resulta fácil la comprensión del problema a resolver; nula relación del ejercicio con los resueltos hasta ahora en este capítulo; ausencia de referencia a algún teorema o principio para proceder a su resolución; inexistencia de algún procedimiento de resolución; explicación de solución adoptada; etc.

En principio, lo primero que debemos advertir es que es necesario modificar el resultando a: "Dados los puntos A y B y una recta r que los separa, encontrar en ésta el punto P tal que ***el módulo de*** la diferencia $\overline{PA} - \overline{PB}$ sea máximo", pues de otra manera, una configuración como la de la figura 22 no tendría solución.

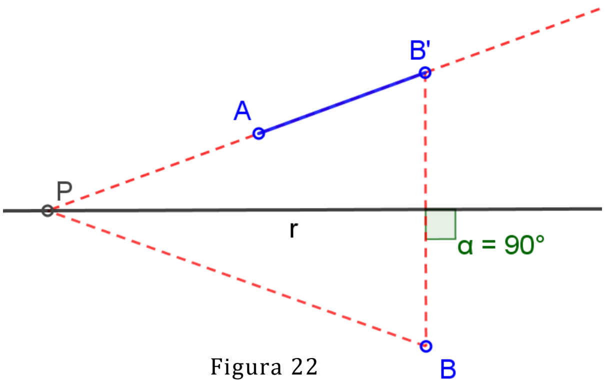


Figura 22

Se propone para la resolución de este ejercicio dos formas distintas, que expongo en orden a una escala de menor a mayor dificultad.

1º Quizás la más sencilla de comprender sea a través de la **resolución** de los **triángulos** que se forman en la disposición de la figura 23.

Tomemos un punto genérico, P', en la recta r y razonemos del siguiente modo: que el módulo de la diferencia $\overline{P'A} - \overline{P'B}$ sea máximo es idéntico a decir que sea máximo el módulo de la diferencia $\overline{P'A} - \overline{P'B'}$, siendo B'el punto simétrico de B respecto a una simetría axial cuyo eje sea la recta r. Consideremos el punto C en el segmento $\overline{P'A}$ de tal forma que $\overline{P'C} = \overline{P'B'}$. Entonces que el módulo de $\overline{P'A} - \overline{P'B'}$ sea máximo es lo mismo que decir que el módulo del segmento $\overline{AC}$ sea máximo ya que:

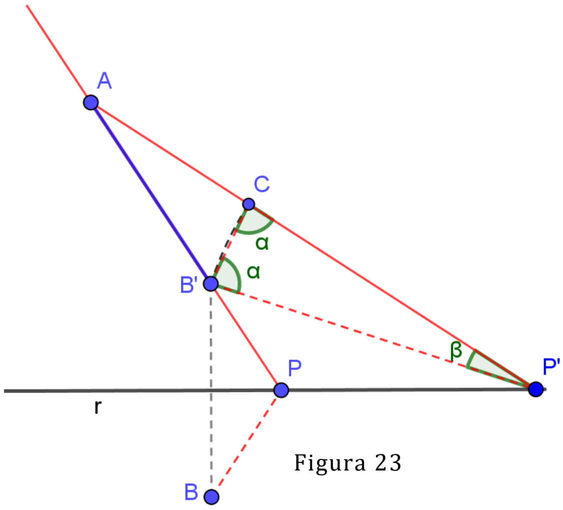


Figura 23

$$\overline{AC} = \overline{P'A} - \overline{P'C} = \overline{P'A} - \overline{P'B'}$$

Si ocurriese que $P' = P$, siendo P el punto intersección de las rectas r y la que une los puntos A y B', entonces $B' = C$, por lo que nos basta con demostrar que $\overline{AC} \leq \overline{AB'}$.

En la citada figura 23 se tienen dos triángulos: $P'CB'$ y ACB'. El triángulo $P'CB'$ es un triángulo isósceles ya que por construcción $\overline{P'C} = \overline{P'B'}$ por lo que los ángulos en B' y en C son iguales, α.

De la suma de los ángulos interiores del triángulo $P'CB'$ deduciremos que:

$$\propto + \propto + \beta = \pi$$

$$2\alpha + \beta = \pi$$

$$\propto = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$$

es decir, que el ángulo en C es menor que $\frac{\pi}{2}$ puesto que $\beta > 0$.

Para el triángulo ACB' (figura 24) podremos, por consiguiente, decir que la amplitud del ángulo en el vértice C es mayor que $\frac{\pi}{2}$, al ser suplementario del ángulo α deducido anteriormente. Si aplicamos ahora el teorema del coseno en este último triángulo, podemos escribir:

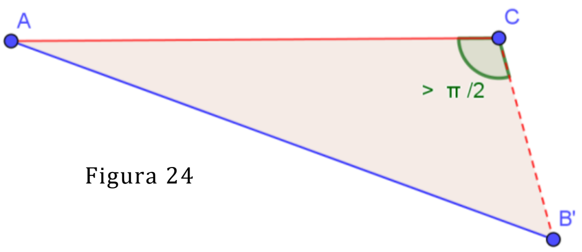


Figura 24

$$\overline{AB'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB'}^2 - 2\left[\overline{AC}\right]\left|\overline{CB'}\right|\cos(\widehat{C})$$

Como el ángulo en C es mayor que $\frac{\pi}{2}$, el coseno de dicho ángulo siempre será negativo y, por tanto, la expresión anterior cumple que

$$\overline{AB'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB'}^2 - 2\left[\overline{AC}\right]\left[\overline{CB'}\right]\cos(\widehat{C}) > \overline{AC}^2 + \overline{CB'}^2$$

Y como $C \neq B'$porque hemos partido de esa hipótesis, el segmento $\overline{CB'} > 0$ y, por tanto:

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB'}^2 > \overline{AC}^2$$

Con lo cual, hemos llegado a la conclusión

$$\overline{AB'}^2 > \overline{AC}^2$$

O bien:

$$\overline{AB'} > \overline{AC}$$

Por consiguiente, el módulo de la diferencia $\overline{PA} - \overline{PB}$ será máximo obteniendo el punto P en la intersección de la recta r con la recta que contiene a los puntos A y B'.

Se deja como ejercicio para la resolución de los alumnos la configuración descrita anteriormente en la figura 22, en la que la distancia del punto B a la recta r es menor que la distancia del punto A a dicha recta.

2º Trataremos de resolver el mismo ejercicio mediante la ubicación de todos los puntos en un **sistema de coordenadas cartesianas**, trabajando en el concepto de **ecuación de la recta** y en el **concepto de distancia entre dos puntos.** Vamos a suponer que ubicamos el problema en el plano cartesiano y que la recta r coincide con el eje de las abscisas. Con respecto a una base del sistema construida por los vectores ortonormales $\overrightarrow{e_1}$ y $\overrightarrow{e_2}$, podremos definir cada punto por sus respectivas coordenadas. Así tendremos que:

$$A = (a_1, a_2)$$
$$B = (b_1, b_2)$$

Como B'es el simétrico de B, sus coordenadas serán:

$$B' = (b_1, -b_2)$$

Por simplicidad en la notación vamos a llamar t a la primera coordenada del punto P; por tanto:

$$P = (t, 0)$$

Como A, B' y P están alineados, de la figura 25 podemos deducir que:

$$\frac{t-b_1}{+b_2}=\frac{t-a_1}{-a_2}$$

Operando obtenemos que t vale

$$t=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_2+b_2}$$

con lo que queda definido el punto P en función de las coordenadas de los puntos A y B.

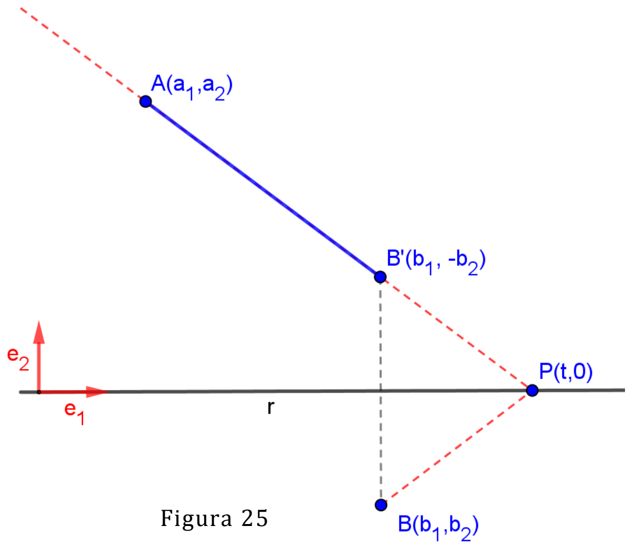


Figura 25

Una vez definidas las coordenadas de todos los puntos, haciendo uso del concepto de distancia, podemos escribir que la distancia del punto P al punto A vendrá dada por la expresión:

$$d(P,A)=\sqrt{(a_1-t)^2+a_2^2}$$

y la distancia de P a B' será:

$$d(P,B')=\sqrt{(b_1-t)^2+b_2^2}$$

Para que el módulo de la distancia $\overline{PA}-\overline{PB}$ sea máximo, deberá ser máxima la función que denominamos φ(t):

$$\varphi(t)=d(P,A)-d(P,B')=\sqrt{(a_1-t)^2+a_2^2}-\sqrt{(b_1-t)^2+b_2^2}$$

Obtengamos los puntos para los que la función anterior es máxima. Para ello, derivaremos la función, con lo que resulta:

$$\varphi'(t)=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(a_1-t)^2+a_2^2}}2(a_1-t)(-1)-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(b_1-t)^2+b_2^2}}2(b_1-t)(-1)$$

e igualando a cero obtenemos que:

$$\frac{a_1-t}{\sqrt{(a_1-t)^2+a_2^2}}=\frac{b_1-t}{\sqrt{(b_1-t)^2+b_2^2}}$$

Elevando al cuadrado cada miembro de la igualdad y multiplicando en cruz:

$$(a_1-t)^2[(b_1-t)^2+b_2^2]=(b_1-t)^2[(a_1-t)^2+a_2^2]$$

Operando las expresiones del interior del corchete y de los paréntesis:

$$(a_1^2-2a_1t+t^2)(b_1^2-2b_1t+t^2+b_2^2)=(b_1^2-2b_1t+t^2)(a_1^2-2a_1t+t^2+a_2^2)$$

Veamos las expresiones polinómicas que nos quedan como coeficientes de t^4, t^3, t^2, t y como término independiente:

$t^4: 0$

$t^3: 0$

$t^2: b_1^2 + b_2^2 - b_1 - a_2^2$

$t: 2b_1(a_1b_1 + a_1^2 + a_2^2) - 2a_1\,(a_1b_1 + b_1^2 + b_2^2)$

Término independiente: $a_1^2(b_1^2 + b_2^2) - b_1^2(a_1^2 + a_2^2)$

es decir, que la ecuación resultante es:

$$(b_1^2 + b_2^2 - b_1 - a_2^2)t^2 + [2b_1(a_1b_1 + a_1^2 + a_2^2) - 2a_1(a_1b_1 + b_1^2 + b_2^2)]t + a_1^2(b_1^2 + b_2^2) - b_1^2(a_1^2 + a_2^2) = 0$$

La ayuda de un software de ordenador nos permite resolver esta ecuación cuadrática en la incógnita t, resultando como soluciones:

$$t_1 = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_2 + b_2}$$

$$t_2 = -\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2 - b_2}$$

El valor de t_2 nos lleva a un absurdo puesto que tal y como hemos definido el sistema t no puede ser negativo, por lo que el único valor válido de t es t_1, que es el mismo valor de t que habíamos obtenido en el segundo procedimiento. Y, por consiguiente, queda definido el punto P buscado que hace máxima la diferencia de distancias $\overline{PA} - \overline{PB}$.

3.1.8.- PROBLEMA DE MÍNIMA SUMA DE DISTANCIAS

Análogamente al problema 3.1.7. anterior, el libro de texto, basándose en la figura 26, dice:

> *"Dados dos puntos A y B y una recta r tal que los dos puntos están en el mismo semiplano, encontrar en ésta el punto P tal que la suma $\overline{PA} + \overline{PB}$ sea mínima."*

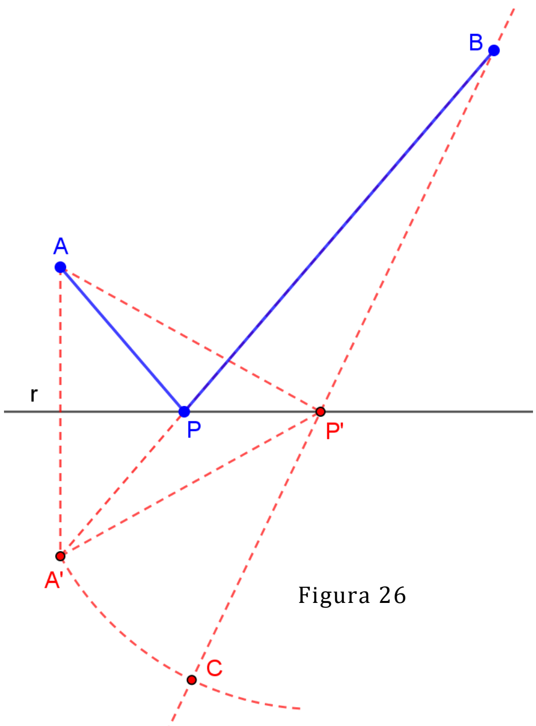


Figura 26

Y continúa:

"Se halla el simétrico del punto A respecto a r y se une con el punto B. El punto P es el pedido y la suma mínima es $\overline{PA} + \overline{PB}$*."*

Al igual que en el problema 3.1.7., el libro arroja una solución sin ningún tipo de demostración o referencia a algún teorema o postulado. Intuitivamente podríamos reflexionar en el sentido de que lo que se va buscando es un punto intermedio en la recta r y alineado con B y con el simétrico de A. Pero no todos los alumnos tienen las mismas capacidades de resolución gráfica para efectuar dicha interpretación. En cualquier caso, es necesario que los alumnos se cuestionen por qué y cómo debe resolverse este problema, actitud que no mostrarán cuando no se les induce a ello, presentando resoluciones sin la menor demostración. De esta forma, los alumnos memorizarán el procedimiento sin comprensión alguna, cuando lo que tratamos de provocar en ellos es un razonamiento deductivo.

No voy a plantear de nuevo los dos procesos utilizados en la resolución del problema 3.1.7., pues entiendo que aquellos procedimientos son directamente aplicables en este caso, resultando una mera repetición del anterior. Procederé de la forma más breve, que es la gráfica.

De la citada figura 26, deducimos que las magnitudes $\overline{P'A}$ y $\overline{P'A'}$ son iguales puesto que A' es el simétrico de A respecto de la simetría axial de eje la recta r y, por tanto, demostrar que la suma mínima es $\overline{PA} + \overline{PB}$ es lo mismo que demostrar que la suma mínima es $\overline{PA'} + \overline{PB}$. Para cualquier otro punto P' en la recta r, deberá de cumplirse, por tanto, que:

$$\overline{PA'} + \overline{PB} < \overline{P'A'} + \overline{P'B}$$

Si trazamos desde P' la altura "h" a la base $\overline{A'B}$ en el triángulo A'BP', formamos dos triángulos rectángulos tal y como se puede apreciar en la figura 27: A'MP' y BMP'. Para abreviar las expresiones hago las siguientes notaciones:

$$\overline{MA'} = P_1$$

$$\overline{MB} = P_2$$

$$\overline{P'A'} = c_1$$

$$\overline{P'B} = c_2$$

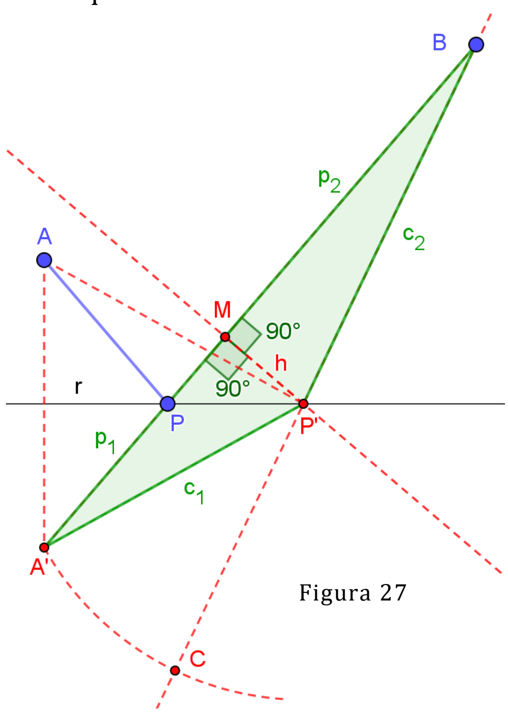


Figura 27

Del primer triángulo, A'MP', aplicando el teorema de Pitágoras:

$$p_1^2 + h^2 = c_1^2$$

Como siempre ocurre que $h \geq 0$ (será igual a 0 cuando P' sea P):

$$c_1^2 \geq p_1^2$$

y, por tanto:

$$c_1 \geq p_1$$

Del mismo modo, para el segundo triángulo BMP' llegamos a la conclusión:

$$c_2 \geq p_2$$

Y de las dos últimas expresiones, si las sumamos, obtenemos:

$$c_1 + c_2 \geq p_1 + p_2$$

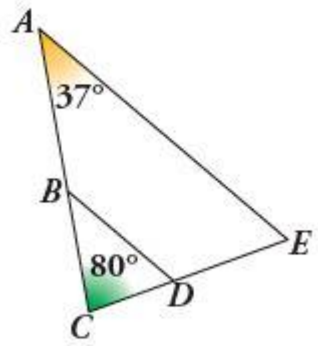
Con lo cual, dado cualquier otro punto P' sobre la recta r, la distancia a los dos puntos dados A y B, siempre será mayor que la de P a dichos puntos, por lo que la suma $\overline{PA} + \overline{PB}$ es mínima y P se obtiene en la intersección de la recta r con el segmento $\overline{A'B}$, siendo A' el simétrico de A respecto de la recta r.

3.1.9.- FICHA DE ACTIVIDAD SOBRE TRAZADOS FUNDAMENTALES EN EL PLANO

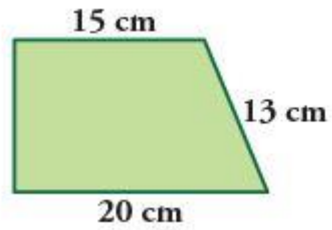
PROPUESTA DIDÁCTICA DEL TEMA 1.
Trazados fundamentales en el plano. Arco capaz. Cuadrilátero inscriptible. Teoremas del cateto y de la altura.
PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO
Se trata de realizar ejercicios y problemas de geometría utilizando las propiedades fundamentales en el plano en una clase de 30 alumnos de segundo de bachillerato. Suponemos un grupo homogéneo en el que no necesitamos realizar adaptaciones curriculares al no figurar entre los alumnos ninguno con necesidades educativas especiales. Para fomentar el trabajo en equipo, se trabajará la resolución de los ejercicios en grupo de tres alumnos en el aula, finalizando los mismos de forma individual, cada uno de ellos, en sus respectivos domicilios, como si de una tarea para casa (TPC) se tratara. Por último, se propondrá a los alumnos una serie de ejercicios y problemas para su resolución de forma individual.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS
▪ Completar los conocimientos adquiridos sobre trazados fundamentales en el plano en cursos anteriores. ▪ Formular geométricamente las hipótesis y restricciones indicadas en los ejercicios y problemas. ▪ Aplicar las técnicas gráficas tanto a mano alzada como con los medios tecnológicos apropiados como apoyo complementario a los ejercicios y problemas. ▪ Utilizar la notación alfanumérica más adecuada a cada contexto. ▪ Aplicar el concepto de valor absoluto para calcular distancias y manejar desigualdades. ▪ Seleccionar de manera adecuada y razonada ejes, unidades, vectores, etc., y reconocer e identificar los errores de interpretación derivados de una mala elección. ▪ Emplear el croquis y la perspectiva a mano alzada como medio de expresión gráfica en la resolución de ejercicios y problemas.

▪ Resolver problemas geométricos basados en contextos reales utilizando los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas. ▪ Realizar operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de módulo, dirección, sentido, producto escalar, ortogonalidad… ▪ Investigar utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría. ▪ Solucionar triángulos con la ayuda de los teoremas del seno, del coseno, y aplicando las propiedades de sus puntos notables y los principios geométricos elementales. ▪ Comprender la relación existente entre los ángulos y la circunferencia: concepto de arco capaz.
NECESIDAD DE CONOCIMIENTOS PREVIOS
▪ Conocer y manejar el sistema de referencia de coordenadas cartesianas. Bases ortogonales y ortonormales. ▪ Trazados geométricos elementales en el plano: circunferencia y círculo; operaciones con rectas, semirrectas, segmentos; conceptos de mediatriz, bisectriz, paralelismo y perpendicularidad; operaciones básicas con ángulos. ▪ Representación de figuras planas: proporcionalidad, igualdad y semejanza. Construcción y utilización de escalas gráficas. ▪ Ecuaciones de la recta: pendiente, ordenada en el origen, intersección con los ejes cartesianos.
CONTENIDOS
▪ Semejanza de triángulos: Proporcionalidad. Teorema del cateto y de la altura. Semejanza y equivalencia. Construcción de figuras planas equivalentes. ▪ Teorema de Tales. Aplicación a la división de segmentos. ▪ Arco capaz de un segmento bajo un determinado ángulo α. Relación entre los distintos ángulos existentes en una circunferencia y la propia circunferencia. Diferentes configuraciones posibles. Aplicación a la construcción de triángulos. ▪ Relación entre un cuadrilátero y su circunferencia circunscrita. ▪ Teorema de Pitágoras. Aplicación a la construcción de triángulos rectángulos. ▪ Resolución de problemas de maximizar diferencias o minimizar de distancias o segmentos de forma gráfica y analítica.
CRITERIOS ESPECÍFICOS DE EVALUACIÓN
▪ Resolver problemas geométricos en el plano y aplicación práctica en la construcción de triángulos, cuadriláteros, figuras semejantes, etc. ▪ Determinar las relaciones métricas de los ángulos de la circunferencia, describiendo sus propiedades e identificando sus posibles aplicaciones. ▪ Solucionar problemas mediante las propiedades del arco capaz. ▪ Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos geométricos. ▪ Desarrollar procesos de matematización en contextos prácticos y cotidianos a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad. ▪ Utilizar los teoremas del seno y del coseno las razones trigonométricas en la resolución de triángulos. ▪ Manejar la operación del producto escalar y sus consecuencias. Entender los conceptos de base ortogonal y ortonormal. ▪ Emplear con soltura el concepto de lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve un segmento bajo un ángulo α. ▪ Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas. ▪ Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico. ▪ Utilizar programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones geométricas, tanto en la resolución de problemas como en la investigación.

RECURSOS DIDÁCTICOS
▪ Libros de texto, apuntes de clase y otros documentos recomendados por el profesor de entre una bibliografía. ▪ Útiles de dibujo técnico habituales: regla, escuadra, cartabón, compás y transportador de ángulos, lápices de diferentes colores, folios blancos DINA4. ▪ Pizarra convencional y empleo de tizas de yeso de diferentes colores. ▪ Pizarra digital inteligente y uso de rotuladores de diferentes colores. ▪ Utilización del software Geogebra en los diferentes ejercicios propuestos.
EJERCICIOS PROPUESTOS
▪ Los vértices de un cuadrilátero son los puntos (1. 3), (7, 3), (9, 8) y (3, 8) . Demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo y calcular su área. ▪ Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos (- 1, 1) y (3, 1). Hallar las coordenadas del tercer vértice (dos soluciones) y calcular el área. ▪ Los vértices de un triángulo son A (3, 8), B (2, - 1) y C (6, -1). Si D es el punto medio del lado BC, calcular la longitud de la mediana AD. ▪ Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45º. La recta inicial pasa por los puntos (- 2, 1) y (9, 7) y la recta final pasa por el punto (3, 9) y por el punto A cuya abscisa es - 2. Hallar la ordenada de A. ▪ Hallar el ángulo agudo del paralelogramo cuyos vértices son A(-2, 1), B(l, 5), C(10, 7) y D(7, 3). ▪ Hallar y dibujar el triángulo rectángulo del que se conoce la altura h = 3 cm y la proyección m = 2,5 cm de uno de los catetos sobre la hipotenusa. ▪ Calcular el triángulo rectángulo sabiendo que los segmentos en que su altura divide a la hipotenusa valen 3 y 5 cm. ▪ Empleando el software Geogebra y basándose en la teoría del arco capaz, construir un triángulo cuyos datos son: un lado vale a = 3 cm, otro lado, b = 4,5 cm, y el ángulo opuesto al primer lado vale $\hat{A} = 30º$. ▪ Dibujar con Geogebra un triángulo isósceles del que se conocen el lado desigual a= 4,5 cm y el ángulo desigual A = 50º. Razona la resolución efectuada. ▪ La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y la proyección de un cateto sobre ella 10,8 cm. Hallar el otro cateto. ▪ Una escalera de 7.3 m de altura se apoya con el pie a 4.8 m de la pared para arreglar un problema que hay en la azotea de una casa. ¿A qué altura se encuentra la azotea? ○ En un triángulo ABC, rectángulo en A, se conoce el lado b=40 cm y la proyección de dicho lado sobre la hipotenusa, b’= 32 cm. Calcular la hipotenusa, a, el otro cateto, c, la proyección del cateto c sobre la hipotenusa y, por último, la altura. ○ En un triángulo rectángulo, calcula la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa si ésta mide 50 cm y el cateto mayor, 40 cm. ○ Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que la altura relativa a la hipotenusa mide 6 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, 4,5 cm. ○ Calcular el cateto mayor de un triángulo rectángulo si la hipotenusa mide 25 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, 9 cm. ○ Observa la figura adjunta. Si BD es paralelo a AE, y AC = 15 cm, CE = 11 cm y BC = 6,4 cm: a) Calcula CD. b) ¿Podemos saber cuánto vale AE sin medirlo directamente? c) Si $\hat{A}$ = 37° y $\hat{C}$ = 80°, calcula $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.



- Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base mayor de este trapecio rectángulo y que se obtiene al prolongar los lados no paralelos hasta que se corten.



- ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?

- Nota. - Los ejercicios marcados con esta simbología son de un grado de dificultad superior.

3.2.- TEMA 2: POTENCIAS

3.2.1.- CONCEPTO DE "POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA"

Las rectas a y b, secantes a la circunferencia de centro O y que pasan por el punto P, cortan a la circunferencia en los puntos A, A' y B, B', respectivamente, como se puede apreciar en la figura 28.

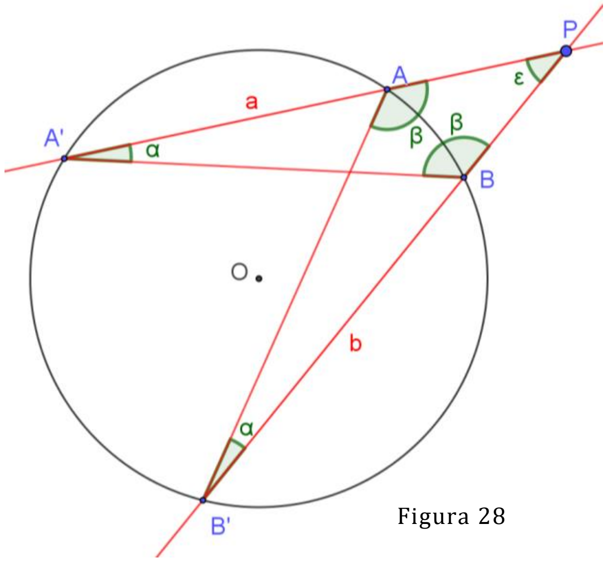


Figura 28

De dicha figura se puede deducir que los triángulos PAB' y PBA' son semejantes ya que tienen los ángulos iguales:

- P es vértice común de ambos triángulos, y el ángulo en dicho vértice, ε, es igual en los dos triángulos.
- Los ángulos en A' y B' son iguales por ser ángulos inscritos a la circunferencia y abarcar el mismo arco, $\widehat{AB}$, de ella.
- Por tanto, los ángulos en A y B, al ser suplementarios de los dos anteriores, también deben ser iguales.

De la semejanza de los triángulos PAB' y PBA', por tanto, podemos concluir que los lados serán proporcionales, y se cumple:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}}$$

que es lo mismo que escribir:

$$\overline{PA} * \overline{PA'} = \overline{PB} * \overline{PB'}$$

Si generalizamos la expresión anterior para el haz de rectas secantes a la circunferencia que pasa por P, se obtiene (figura 29):

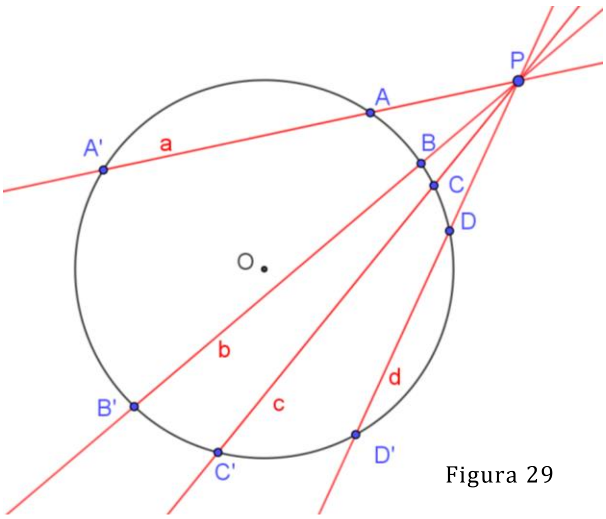


Figura 29

$$\overline{PA} * \overline{PA'} = \overline{PB} * \overline{PB'} = \overline{PC} * \overline{PC'} = \overline{PD} * \overline{PD'} = \cdots = K$$

Siendo K la constante que da el valor de la potencia del punto P respecto de la circunferencia de centro O.

Del haz de rectas anterior, podemos resaltar las rectas tangentes t_1 y t_2 como casos particulares de las rectas secantes (véase la figura 30), en la que los puntos de corte con la circunferencia son coincidentes, T_1 y T_2. Por lo tanto, también se cumplirá que:

$$\overline{PT_1} * \overline{PT_1} = \overline{PT_2} * \overline{PT_2} = \overline{PT_1}^2 * \overline{PT_2}^2 = K,$$

o también

$$\overline{PT_1} = \overline{PT_2} = \sqrt{K}$$

Del análisis de las figuras 29 y 30 y de las expresiones deducidas de cada una de ellas, resulta:

$$\overline{PA} * \overline{PA'} = \overline{PT_1}^2 = K$$

Que puede también escribirse como

$$\frac{\overline{PA}}{\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{K}}{\overline{PA'}}$$

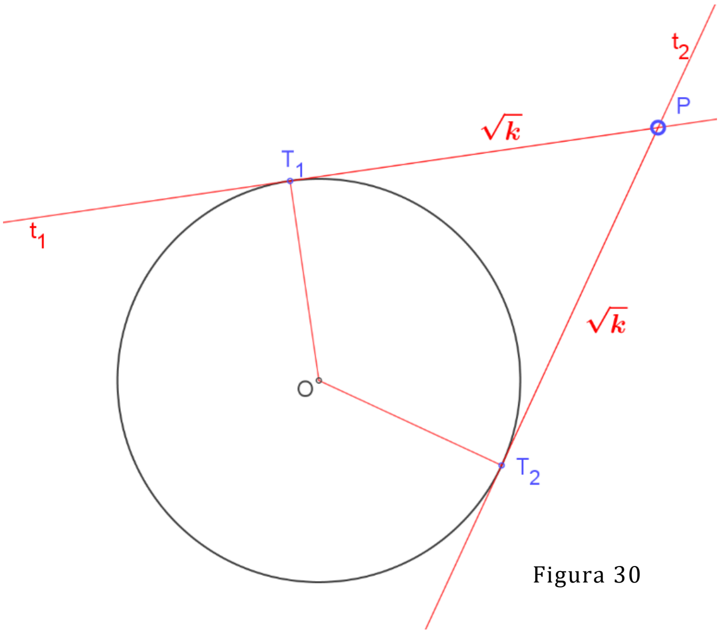


Figura 30

Es decir, que el segmento $\sqrt{K}$ es media proporcional entre los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PA'}$, y también entre $\overline{PB}$ y $\overline{PB'}$, $\overline{PC}$ y $\overline{PC'}$ ...

En resumen:

La potencia K de un punto P exterior a una circunferencia respecto de ésta es un valor positivo igual al producto de los segmentos que se determinan en cualquier secante trazada desde P, o bien, al cuadrado del segmento tomado sobre una de las rectas tangentes trazadas desde P y cutos extremos son el propio punto P y el punto de tangencia.

Del conjunto del haz de rectas que pasan por el punto P, se encuentran las rectas tangentes t_1 y t_2, rectas tangentes a la circunferencia en los puntos T_1 y T_2, como ya hemos dicho anteriormente. El libro de texto dice que como casos particulares de las rectas secantes se cumplirá que:

$$\overline{PT_1} * \overline{PT_1} = \overline{PT_2} * \overline{PT_2} = \overline{PT_1}^2 = \overline{PT_2}^2 = K$$

Dado el razonamiento paso a paso que se ha hecho parece muy intuitivo que debería ser cierta la última igualdad, pero no existe ninguna demostración de ello. De nuevo, debemos “alimentar” en los alumnos el pensamiento reflexivo que les provoque para que intenten llevar a cabo la obtención de dicha demostración; es decir, un proceso inductivo que les conduzca a una generalización del caso. Veamos cómo podríamos hacerlo.

Gracias a las demostraciones desarrolladas en el apartado 3.1.3, y apoyándonos en la figura 31, podemos escribir que, para la recta tangente t_1 y en el punto de tangencia T_1:

- $\measuredangle AT_1P = \frac{1}{2}\ \widehat{AT_1} = \gamma,$ por la definición de arco capaz en la posición límite
- $\measuredangle AA'T_1 = \frac{1}{2}\ \widehat{AT_1} = \gamma,$ por definición de arco capaz
- $\measuredangle A'AT_1 = \frac{1}{2}\ \widehat{T_1A'} = \alpha,$ por definición de arco capaz
- $\measuredangle A'T_1Q = \frac{1}{2}\ \widehat{T_1A'} = \alpha,$ por definición de arco capaz en la posición límite.

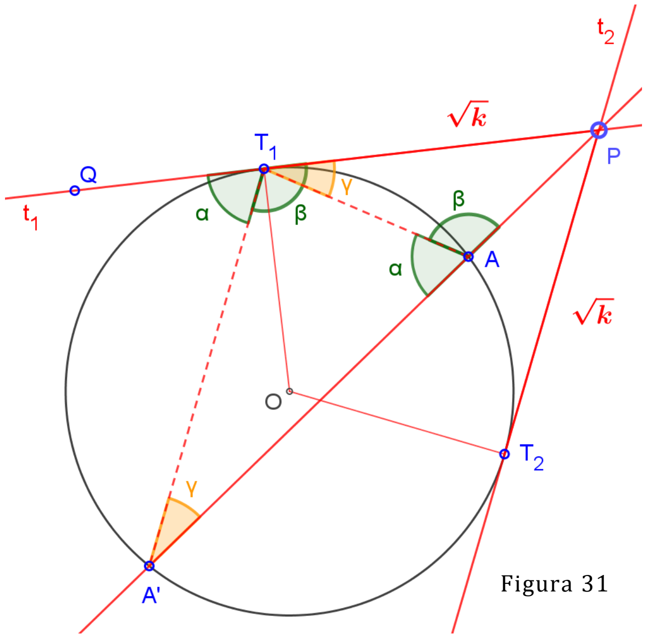


Figura 31

Al ángulo suplementario de α lo llamamos β. Dada la igualdad de todos los ángulos anteriores, podemos decir que los triángulos PAT_1 y $PA'T_1$ son semejantes, por lo que podemos establecer la proporcionalidad entre sus lados de la forma siguiente:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT_1}} = \frac{\overline{PT_1}}{\overline{PA'}}$$

o lo que es lo mismo que:

$$\overline{PA} * \overline{PA'} = \overline{PT_1}^2 = K$$

que es la expresión de la potencia de un punto respecto a una circunferencia utilizando una de las rectas tangentes. De forma análoga se podría demostrar para la recta tangente t_2, lo que se propone como ejercicio para los alumnos.

A modo de proporcionar entre los alumnos una demostración analítica, además de la sintética anteriormente expuesta, indicamos los cálculos y pasos a seguir para comprobar lo engorroso que puede llegar a ser.

Suponemos que O es el origen de un sistema de coordenadas cartesianas cuyo eje de abscisas es la recta que une a los puntos O y P y el eje de ordenadas, el perpendicular y que pasa por el punto O. Igualmente suponemos que el sistema está perfectamente definido puesto que además del origen O disponemos de una base construida por el conjunto ortonormal de vectores $\overrightarrow{e_1}$ y $\overrightarrow{e_2}$. Por consiguiente, las coordenadas del punto P serán P (p, 0), las de O (0,0), etc.

El haz de rectas secantes a la circunferencia que pasa por P queda definido por el ángulo α que forma cada recta con el eje de abscisas (figura 32), por lo que estas rectas tendrán una expresión de la forma:

$$y = \mathrm{tg}(\alpha) * (x - p)$$

Si denominamos por simplificar $\beta = tg(\alpha)$ y sustituimos en la expresión anterior, nos quedará:

$$y = \beta * (x - p)$$

En los puntos genéricos (x, y) de intersección de una recta cualquiera del haz con la circunferencia, éstos cumplirán la ecuación de la circunferencia puesto que pertenecen a ella.

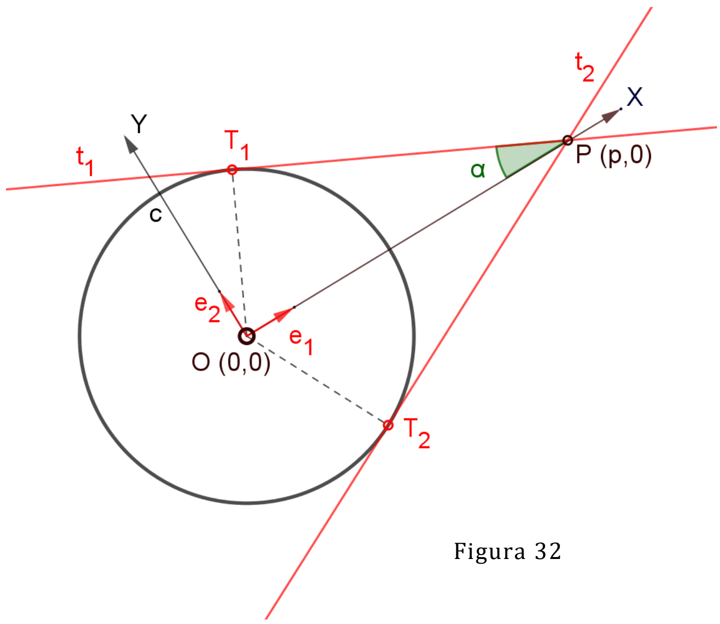


Figura 32

Sea la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = R^2$$

donde, sustituyendo el valor de y obtenido, resultará

$$x^2 + \beta^2(x - p)^2 = R^2$$

Desarrollando esta expresión llegamos a:

$$(\beta^2 + 1)x^2 - 2\beta^2 px + \beta^2 p^2 - R^2 = 0$$

ecuación cuadrática en x que tiene dos soluciones

$$x_1 = \frac{\beta^2 p + \sqrt{R^2\left(\beta^2 + 1\right) - \beta^2 p^2}}{\beta^2 + 1}$$

$$x_2 = \frac{\beta^2 p - \sqrt{R^2\left(\beta^2 + 1\right) - \beta^2 p^2}}{\beta^2 + 1}$$

Evidentemente, estas dos soluciones se corresponden con los dos puntos de intersección que toda recta del haz tiene con la circunferencia. Pero, ¿qué ocurre en la recta límite? Es decir, ¿qué ocurre en las rectas tangentes $t_1 y\ t_2$?

Prosiguiendo con el razonamiento analítico, x_1 y x_2 serán soluciones de nuestro problema siempre que la raíz cuadrada tenga solución y, para ello, deberá cumplirse que el radicando de las expresiones de x_1 y de x_2 sea positivo; es decir que:

$$R^2(\beta^2 + 1) - \beta^2 p^2 \geq 0$$

O lo que es lo mismo que decir que β^2 deberá estar comprendido entre los valores:

$$0 \leq \beta^2 \leq \frac{R^2}{p^2 - R^2}$$

correspondiéndose el valor de

$$\beta^2 = \frac{R^2}{p^2 - R^2}$$

a aquel que define exactamente las posiciones de las rectas $t_1\ y\ t_2$ tangentes a la circunferencia.

Para finalizar la demostración, de la relación $y^2 = R^2 - x^2$ obtenemos para cada x_i dos valores de $y_i = \pm\sqrt{R^2 - x_i^2}$ con i=1,2 que podemos relacionar con el valor de β (que define la posición de la recta) y calcular el producto de las distancias entre el punto P y los (x_i, y_i) para demostrar que es independiente del valor de β, es decir, que la potencia de un punto respecto de la circunferencia es independiente de la recta, cálculos que desarrollamos en las dos siguientes secciones.

3.2.2.- POTENCIA Y TEOREMA DE LA ALTURA

Como ejercicio para que los alumnos puedan seguir reflexionando e investigando, podríamos proponerles ahora una aplicación del teorema de la altura, que ya vimos en el tema anterior, de forma que encuentren la misma solución que la obtenida en el apartado anterior. Es decir, pretendemos la realización de un problema en el que se interrelacionen el parámetro β de la recta secante a la circunferencia y las coordenadas de los puntos (x_i, y_i) intersección de dicha recta con la circunferencia.

Para ello, si nos fijamos en la figura 33, como T_1 es el punto de tangencia de la recta tangente t_1 , esta recta y la que contiene a los puntos O y T_1 son perpendiculares. Por tanto, el triángulo $0T_1P$ es un triángulo rectángulo, formándose el ángulo recto en el vértice T_1, cuyas coordenadas, para el mismo sistema cartesiano que ya habíamos planteado anteriormente, son $T_1(x_1, y_1)$. Y utilizando el concepto de arco capaz, ya estudiado en el tema anterior, desde T_1 observamos al segmento $\overline{OP}$ bajo un ángulo de 90°, por lo que $\overline{OP}$ será el diámetro del lugar geométrico (circunferencia) de los puntos que cumplen esa condición, y del teorema de la altura podemos deducir que:

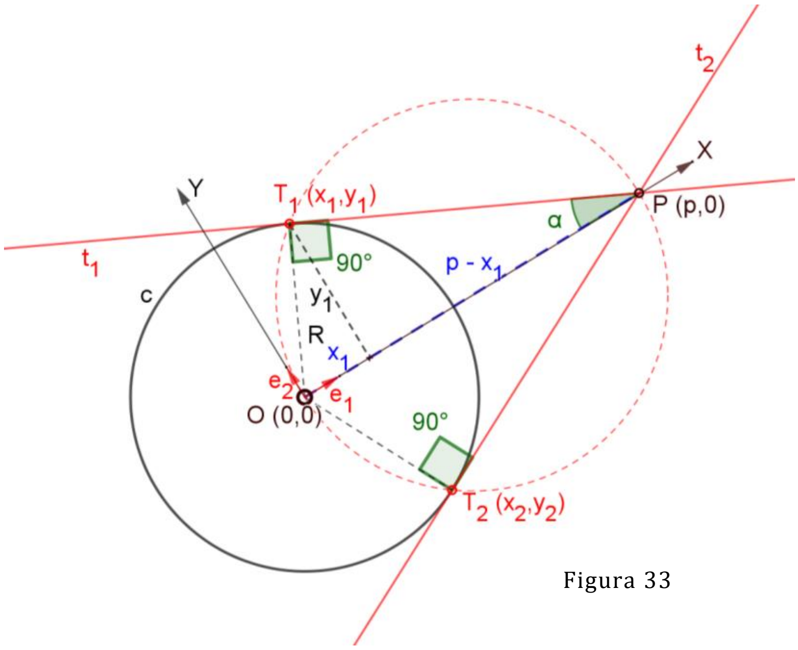


Figura 33

$$y_1^2 = x_1 * (p - x_1)$$

La recta t_1 viene definida por el parámetro α, como se puede apreciar en la misma figura 33; es decir:

$$\beta = tg(\alpha) = \frac{y_1}{p - x_1}$$

Y, por lo tanto:

$$\beta^2 = \frac{y_1^2}{(p - x_1)^2}$$

Sustituimos y_1^2 por la expresión obtenida anteriormente:

$$\beta^2 = \frac{x_1 * (p - x_1)}{(p - x_1)^2} = \frac{x_1}{p - x_1}$$

y veamos que es totalmente equivalente al valor obtenido de β en el razonamiento analítico obtenido en el apartado 3.2.1 desarrollado anteriormente, y que era:

$$\beta^2 = \frac{R^2}{p^2 - R^2}$$

La relación entre R, x_1 e y_1 es: $R^2 = x_1^2 + y_1^2$, por lo que sustituyendo nos quedará:

$$\beta^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{p^2 - (x_1^2 + y_1^2)} = \frac{x_1^2 + x_1 * (p - x_1)}{p^2 - x_1^2 - x_1 * (p - x_1)} = \frac{x_1}{p - x_1}$$

tal y como queríamos demostrar.

Idénticamente se puede proceder para la obtención de las coordenadas del otro punto de tangencia $T_2(x_2, y_2)$, lo que se puede dejar a los alumnos como ejercicio para que ellos practiquen.

3.2.3.- POTENCIA Y PUNTOS DE TANGENCIA

Ahora bien, hemos obtenido la función del haz de rectas secantes a la circunferencia que pasan por P y los valores de β (o de α) para los cuales existe dicha función. Pero, ¿qué ocurre con la potencia del punto P respecto a la circunferencia en los puntos de tangencia?

El haz de rectas es una función del ángulo α y la potencia será continua dentro del dominio $\left(\frac{-R}{\sqrt{p^2-R^2}}, \frac{R}{\sqrt{p^2-R^2}}\right)$. Debemos demostrar que justamente en los puntos de tangencia también se cumple que el valor de la potencia es una constante y que, por tanto, no depende del valor de α.

Hemos dicho que el libro de texto expone sin demostración que la potencia K cumple que

$$K = \overline{PA} * \overline{PA'} = \overline{PT_2} * \overline{PT_2} = \overline{PB} * \overline{PB'} \qquad (1)$$

Partamos por tanto de

$$y = \beta * (x - p)$$

y tomemos, por ejemplo, la recta secante que pasa por los puntos P, B y B' de la figura 34, siendo las coordenadas de cada uno, con respecto a la misma referencia ya definida en los casos anteriores, las siguientes:

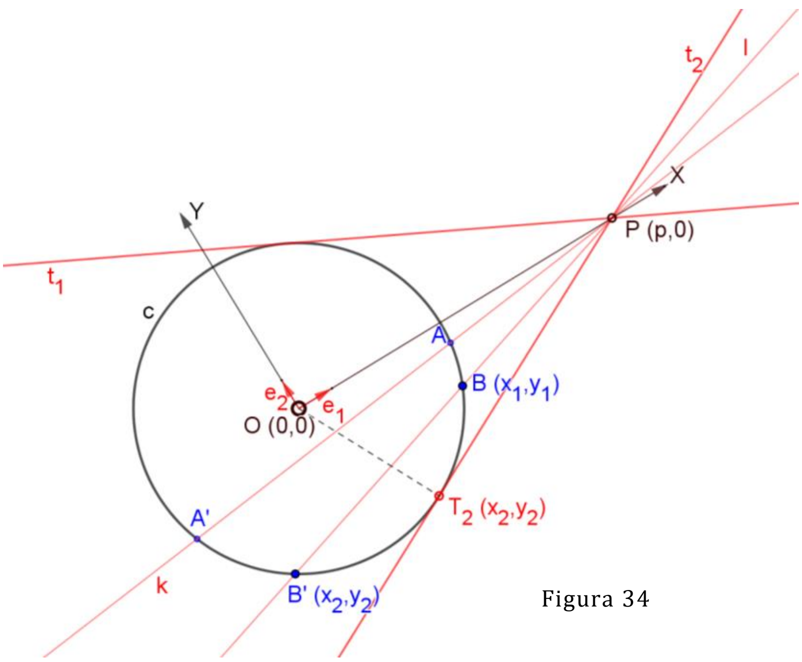


Figura 34

$$P(p,0), B(x_1,y_1), B'(x_2,y_2)$$

Que es lo mismo que:

$$P(p,0), B(x_1, \beta * (x_1 - \mathrm{p})), B'(x_2, \beta * (x_2 - \mathrm{p}))$$

Cada factor de la potencia en la expresión (1) será:

$$\overline{PB} = dist(P,B) = \sqrt{(x_1-p)^2 + (\beta^2(x_1-p)^2 - 0)^2} = (x_1-p)\sqrt{1+\beta^4(x_1-p)^2}$$

$$\overline{PB'} = dist(P,B') = \sqrt{(x_2-p)^2 + (\beta^2(x_2-p)^2 - 0)^2} = (x_2-p)\sqrt{1+\beta^4(x_2-p)^2}$$

Y la potencia, por consiguiente, será:

$$K = \overline{PB} * \overline{PB'} = (x_1-p) * (x_2-p) * \sqrt{1+\beta^4(x_1-p)^2}\sqrt{1+\beta^4(x_2-p)^2}$$

Primeramente, la potencia debe existir y los radicandos, por tanto, deben ser mayores o iguales a cero:

$$1 + \beta^4(x_i - p)^2 \geq 0, \text{ siendo i=1, 2}$$

Por tanto: $1 \geq -\beta^4(x_i-p)^2$ que se cumple siempre puesto que tanto β^4 como $(x_i-p)^2$ son siempre positivos al ser potencias con exponente par.

Y, en segundo lugar, sustituyendo las expresiones obtenidas para x_1 y x_2 en la expresión de la potencia (y trabajando mejor con la potencia elevada al cuadrado) y simplificándola mediante el programa gratuito “Máxima” llegamos a la siguiente solución:

$$(Potencia\ (P,c))^2 = R^4 - 2p^2R^2 + p^4 = (R^2-p^2)^2 = (R+p)^2 * (R-p)^2$$

Por lo que, obteniendo la raíz cuadrada en ambos términos, llegamos definitivamente a

$$Potencia\ (P,c) = (R+p) * (R-p)$$

En conclusión, hemos llegado a una expresión de la potencia que no depende ni del valor de β ni de los puntos de intersección B y B’, ni de los puntos de tangencia T_1 y T_2, por lo que podemos afirmar, como ya sabíamos, que la potencia de un punto respecto de una circunferencia es siempre una constante.

3.2.4.- POTENCIA Y ARCO CAPAZ

En el tema anterior, cuando hablábamos del arco capaz en el punto 3.1.3 y distinguíamos las diferentes configuraciones que se podían considerar, en la tercera de dichas situaciones, demostrábamos que, cuando uno de los extremos del segmento coincidía con el punto desde el cual se observa dicho segmento bajo un determinado ángulo β, la amplitud de dicho ángulo equivalía a la mitad de la amplitud del ángulo central, o lo que es lo mismo, a la mitad del arco que abarca el ángulo central. Aunque ha quedado suficientemente explicado de aquella forma sintética, es interesante, desde un punto de vista de las matemáticas, explicar un razonamiento distinto desde un punto de vista analítico, de forma que los alumnos puedan enfocar los problemas que les surgirán en los entornos reales de cualquiera de las dos formas posibles, según les convenga y dependiendo de las circunstancias.

Pues bien, podemos realizar un estudio analítico del arco capaz en la posición límite mediante la aplicación del concepto de potencia que estamos viendo en este tema. Se trataría, como se dibuja en la figura 35, de un caso particular en el que el punto P se encuentra en la propia circunferencia. Si observamos un primer arco $\widehat{AB}$, la amplitud del ángulo ∡APB, deberá ser la mitad del ángulo central ∡AOB, como ya habíamos demostrado en el tema 1. Si fijamos los puntos A y P y vamos moviendo el punto B de forma que va ocupando las posiciones sucesivas, C, D… hasta ocupar la posición E, que coincide con P, llegaremos a la singularidad que estábamos buscando, en la cual la recta que une el punto E con el punto P se ha transformado en la recta tangente a la circunferencia en dicho punto.

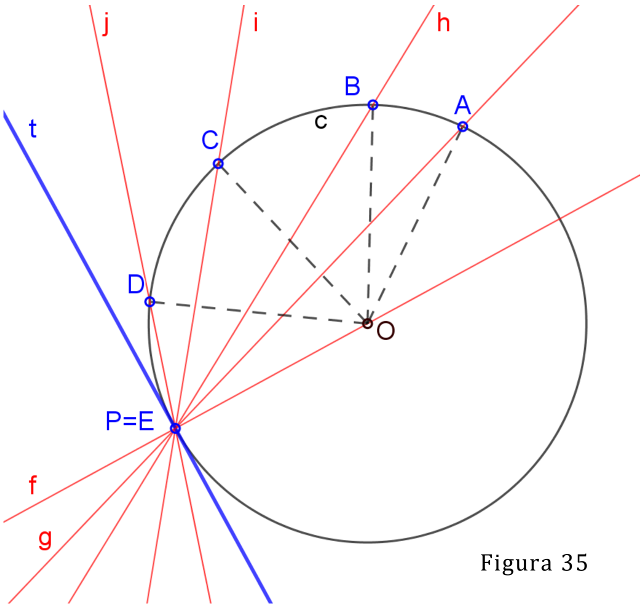


Figura 35

Para resolver esta singularidad vamos a utilizar un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el punto P, y en el que uno de los ejes (X) será la recta tangente, y el otro eje (Y), la recta perpendicular (obsérvese que este otro eje coincide con la recta que une P con el centro de la circunferencia O).

Suponemos igualmente unas bases ortonormales de vectores $\vec{e_1}$ y $\vec{e_2}$ sobre dichos ejes.

En una posición intermedia entre la inicial y la final, según indicamos en la figura 36, podemos considerar la recta que pasa por los puntos B y P y demostrar que el ángulo β que forma la tangente con dicha recta es la mitad del ángulo central γ = ∡POB, o la mitad del arco $\widehat{POB}$.

La expresión del haz de rectas que pasa por P será de la forma:

$$y - y_0 = \beta * (x - x_0)$$

en donde x_0 e y_0 son las coordenadas del punto P respecto al sistema de ejes definidos en este caso. Por tanto, como las coordenadas de P son P (0,0), la ecuación del haz de rectas quedará simplificado a la expresión:

$$y = \beta * x$$

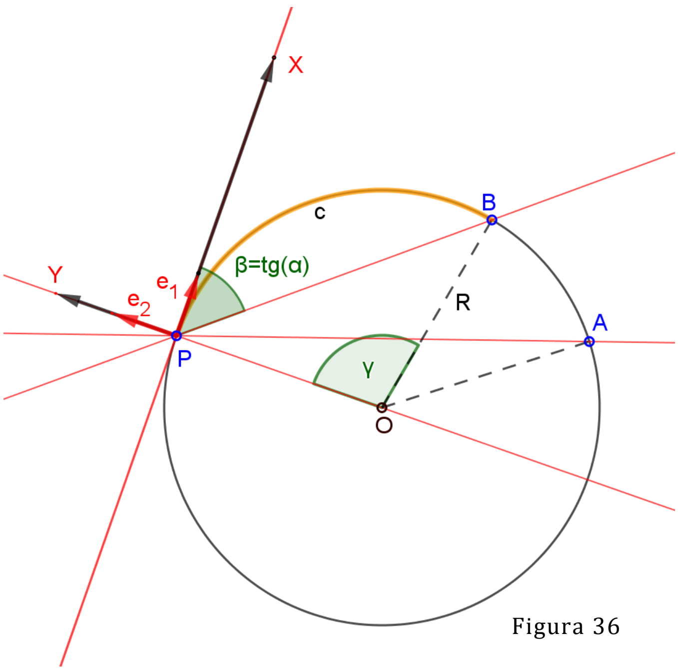


Figura 36

La ecuación de la circunferencia, c, con centro en O y radio R = $\overline{OP}$ será:

$$C = x^2 + (y + R)^2 = R^2$$

Sustituyendo *y* en esta última expresión:

$$x^2 + (\beta * x + R)^2 = R^2$$

Operando:

$$x^2 + \beta^3 x^2 + 2\beta R x + R^2 = R^2$$

$$x^2 * (1 + \beta^2) + 2\beta R x = 0$$

ecuación de la que se obtienen dos soluciones:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{2\beta R}{\beta^2 + 1}$$

Y los valores de *y* serán:

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = \beta * x_2 = -\frac{2\beta^2 R}{\beta^2+1}$$

Utilizando los conocimientos del producto escalar de dos vectores, el cos(Υ) se podrá expresar como:

$$\cos(\Upsilon) = \frac{<\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OB}>}{|\overrightarrow{OP}| * |\overrightarrow{OB}|}$$

expresión en la que cada uno de los factores se puede obtener como se indica a continuación:

$\overrightarrow{OP}$: coordenadas del punto P menos las coordenadas del punto O, es decir, $\overrightarrow{OP} = (0,0) - (0, -R) = (0, R)$.

$|\overrightarrow{OP}|$: el módulo de $\overrightarrow{OP}$ coincide exactamente con el radio, R, de la circunferencia, $|\overrightarrow{OP}| = R$

$|\overrightarrow{OB}|$: ídem anterior, $|\overrightarrow{OB}| = R$

$\overrightarrow{OB}$: coordenadas de B menos las de O, siendo las coordenadas del punto B, las obtenidas en el desarrollo anterior, $B(x_1, y_1)$ en función del ángulo β. Pero recordemos que $\beta = tg\ \alpha$, por lo que podemos cambiar x_1 e y_1, y escribirlas en función de α como hacemos a continuación:

$$x_1 = \frac{-2\beta R}{\beta^2 + 1} = \frac{-2sen(\alpha)R}{\cos(\alpha)\left(\frac{sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} + 1\right)} = -2R\ sen(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$y_1 = \frac{-2\beta^2 R}{\beta^2 + 1} = \frac{-2sen^2(\alpha)R}{cos^2(\alpha)\left(\frac{sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} + 1\right)} = -2R\ sen^2(\alpha)$$

El vector $\overrightarrow{OB}$, por tanto, será:

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (-2R\ sen(\alpha)\cos(\alpha), -2R\ sen^2(\alpha) + R)$$
$$= R(-2\ sen(\alpha)\cos(\alpha), 1 - 2sen^2(\alpha))$$

Usando las relaciones existentes entre las razones trigonométricas del ángulo simple y del ángulo doble simplificamos la expresión a:

$$\overrightarrow{OB} = R\ (-sen(2\alpha), \cos(2\alpha))$$

Una vez obtenidos todos los factores, podemos volver a la expresión inicial del cos(ϒ) y ver qué relación nos queda entre ϒ y α:

$$\cos(\Upsilon) = \frac{<(0,R),[-R\ sen(2\alpha), R\cos(2\alpha)]>}{R \text{ x } R} = \frac{R^2\cos(2\alpha)}{R^2} = \cos(2\alpha)$$

como queríamos demostrar.

Es decir, que para cualquier punto B, definido por sus ángulos β_B y Υ_B como se indica en la figura 35, siempre existe una continuidad de la función que define la posición de dicho punto, pudiendo ocupar cualquier posición de la circunferencia, y no existiendo ninguna posición que quede sin definir. Es decir, la función que asigna mediante el ángulo β_B un valor del ángulo Υ_B o un valor del arco $\widehat{PB}$ es continua y queda perfectamente definida incluso en los puntos en los que B coincide con P. El dominio de dicha función será el intervalo [0,-π] y siempre se cumple que

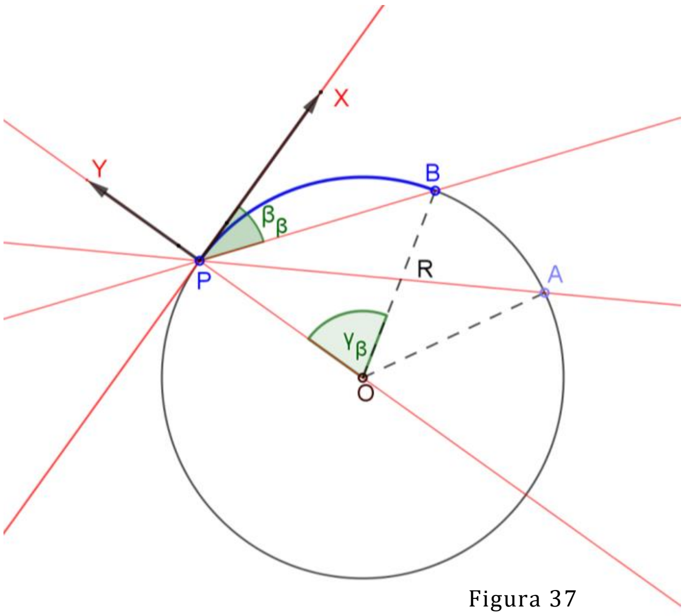


Figura 37

$$\beta_B \rightarrow \frac{1}{2}\,\Upsilon_B = \frac{1}{2}\widehat{PB}$$

demostración denominada argumento de la posición límite.

La potencia, por consiguiente, de un punto con respecto a una circunferencia es siempre una función continua, por el razonamiento anterior, y válida para todos los puntos de la circunferencia, incluso en los puntos de tangencia, T_1 y T_2, de las rectas t_1 y t_2, respectivamente.

3.2.5.- POTENCIA DE UN PUNTO INTERIOR O SITUADO EN LA PROPIA CIRCUNFERENCIA

En el caso de que el punto, que ahora denominaremos Q, sea interior a la circunferencia, c, se obtiene un resultado análogo, salvo que el valor de la constante es negativo, -K, ya que al ser Q el origen de todos los segmentos, si a uno de ellos, factor de un producto, se le considera positivo, el otro, que tiene sentido contrario, debe ser negativo. Véase la figura 38.

Por tanto:

$$\overline{QA} * \overline{QA'} = \overline{QB} * \overline{QB'} = \cdots = -K$$

De donde se deduce que:

La potencia de un punto Q interior a una circunferencia respecto de ésta es negativa.

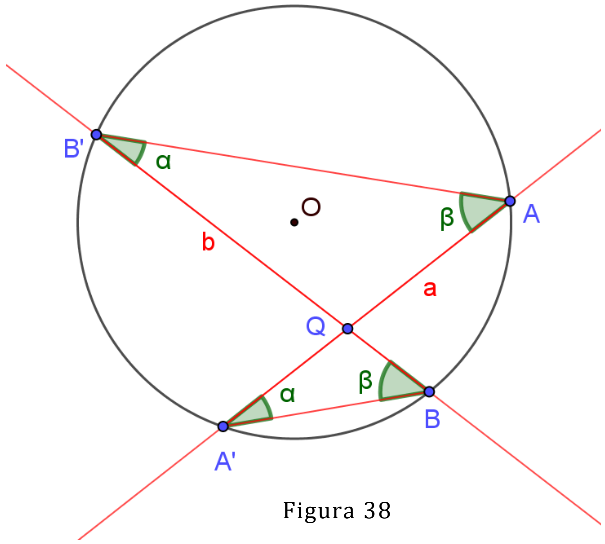


Figura 38

Por último, cuando el punto no es exterior ni interior a la circunferencia, sino que pertenece a ella, el valor de la potencia de dicho punto respecto de ésta será cero, puesto que uno de los segmentos es nulo. Esta conclusión no contradice las deducciones anteriores, porque, en este caso, la potencia del punto P, respecto a la circunferencia de centro O, c, también es una constante. Un caso límite puede ser considerado cuando la circunferencia tiene radio cero, es decir, es un punto. En este caso, la potencia de un punto P respecto de otro O es el cuadrado de la distancia entre ambos (figura 39) ya que se cumplirá que:

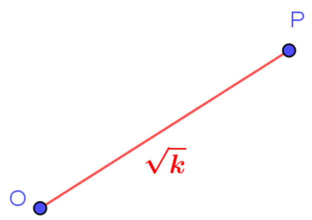


Figura 39

$\overline{PO} * \overline{PO} = K$, o bien, $\overline{PO} = \sqrt{K}$

3.2.6.- EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Se define eje radical de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de ambas.

Atendiendo a la figura 40 demostraremos que dicho lugar geométrico es una recta.

Sea d_1 la distancia del punto Q al centro de la circunferencia c_1, de centro $O_1(x_1, y_1)$ y de radio r_1; análogamente, d_2, la distancia de Q al centro de la circunferencia c_2, de centro $O_2(x_2, y_2)$ y de radio r_2. Por definición de potencia de un punto respecto de una circunferencia, se tiene que la potencia del punto Q respecto a las circunferencias c_1 y c_2 será:

$$Pot\ (Q, c_1) = \overline{QA_1} * \overline{QA_1'} = (d_1 - r_1)(d_1 + r_1) = d_1^2 - r_1^2$$

$$Pot\ (Q, c_2) = \overline{QB_1} * \overline{QB_1'} = (d_2 - r_2)(d_2 + r_2) = d_2^2 - r_2^2$$

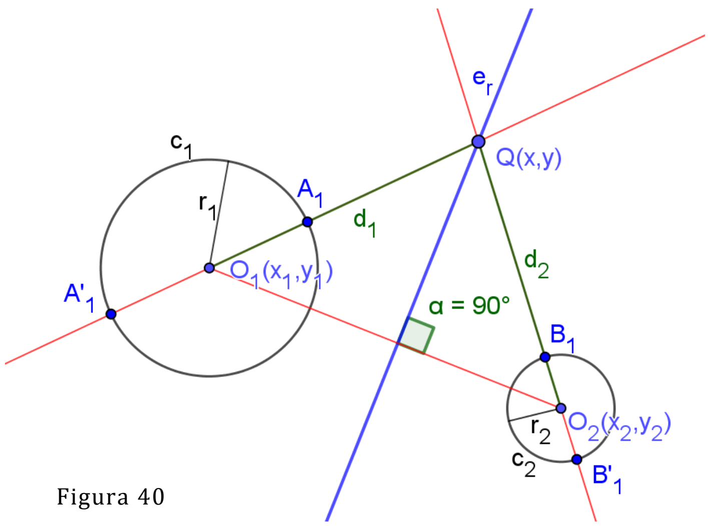


Figura 40

Por otro lado, por definición de distancia se tiene que los valores de d_1 y d_2 serán:

$$d_1 = dist(Q, O_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$d_2 = dist(Q, O_2) = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

Por definición de eje radical, los puntos "A" del eje radical cumplirán que:

$$Pot\ (Q, c_1) = Pot\ (Q, c_2)$$

O, dicho de otro modo:

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$$

Sustituyendo los valores de $d_1\ y\ d_2$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2$$

Dejando los valores de x e y a un lado de la ecuación, y los valores de r al otro, nos quedará:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - [(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2] = r_1^2 - r_2^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado:

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 - (x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2) = r_1^2 - r_2^2$$

Y dejando a un lado de la igualdad los términos en "x" e "y":

$$(x_2 - x_1) * x + (y_2 - y_1) * y = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)$$

El segundo miembro de la igualdad es una constante que podemos llamar C; esto es:

$$C = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)$$

Y la expresión que nos queda es la ecuación de una recta de la forma:

$$(x_2 - x_1) * x + (y_2 - y_1) * y = C$$

Por lo que hemos demostrado que el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de dos circunferencias es una recta; es decir, que el eje radical es una recta.

En dicha recta, el coeficiente en "x" es la diferencia de las abscisas de los centros de ambas circunferencias, y el coeficiente en "y" es la diferencia de las ordenadas de dichos centros. Y como precisamente el segmento de la recta que contiene los centros de ambas circunferencias, $\overline{O_1O_2}$, se puede escribir como:

$$\overline{O_1O_2} = O_2 - O_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

que representan una dirección ortogonal a la dirección de la recta "eje radical", pues también queda demostrado que el eje radical es perpendicular a la recta que une los centros de ambas circunferencias.

3.2.7.- FICHAS DE ACTIVIDAD SOBRE POTENCIAS

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL TEMA 2 (1ª)
Potencias. Potencia de un punto respecto de una circunferencia.
PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO
Se trata de realizar ejercicios y problemas de potencias mediante un desarrollo paralelo entre una resolución analítica y gráfica a un grupo de 30 alumnos de segundo de bachillerato. Vamos a suponer que el grupo está constituido por estudiantes de las siguientes características: 3 de ellos requieren necesidades educativas especiales, estando en un nivel de competencia curricular de 4º curso de secundaria; 2 son alumnos repetidores, que están aproximadamente en la media del nivel general del curso; otros 2 alumnos son de altas capacidades intelectuales, y el resto, dispone de un nivel de competencia habitual en cursos de segundo de bachillerato. Para fomentar el trabajo cooperativo y colaborativo, se trabajará la resolución de los ejercicios en grupos de tres alumnos en el aula, finalizando los mismos de forma individual, cada uno de ellos, en sus respectivos domicilios, como si de una tarea para casa (TPC) se tratara. Por último, se propondrá a los alumnos una serie de ejercicios y problemas para su resolución de forma individual.
CONSIDERACIONES PREVIAS
Deben plantearse dos modelos diferentes para la impartición de esta actividad. La primera está destinada a los alumnos de 2º de bachillerato que no requieren una adaptación curricular, y la segunda, a aquellos alumnos con necesidades educativas especiales al disponer de un nivel educativo inferior al del grupo. Tanto a los alumnos repetidores como a los de altas capacidades se les complementará con actividades específicas para ellos, no requiriendo adaptaciones curriculares significativas.
1º SIN ADAPTACIÓN CURRICULAR SIGNIFICATIVA.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Adquirir con claridad el concepto de potencia de un punto respecto de una circunferencia.
- Identificar la estructura geométrica de curvas en el plano, señalando sus elementos básicos y determinando las principales relaciones de proporcionalidad.
- Aplicación a la resolución de problemas geométricos el concepto de potencia a figuras planas compuestas por puntos, rectas y circunferencias.
- Interesarse por las nuevas tecnologías y los programas de cálculo, disfrutando con su utilización y valorando sus posibilidades en la realización de planos, en la resolución de largos desarrollos algebraicos, etc.
- Elaboración y presentación oral y/o escrita de un informe sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un enunciado.
- Emplear el croquis y la perspectiva a mano alzada como medio de expresión gráfica y conseguir la destreza y la rapidez necesarias.
- Deducir con soltura las diferentes expresiones de la potencia de un punto respecto de una circunferencia.

NECESIDAD DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Conocer y manejar el sistema de referencia de coordenadas cartesianas.
- Ecuaciones de la recta: pendiente, ordenada en el origen, intersección con los ejes cartesianos.
- Concepto geométrico de distancia entre dos puntos.
- Trazados fundamentales en el plano. Circunferencia y círculo. Operaciones con segmentos. Mediatriz. Paralelismo y perpendicularidad. Operaciones con ángulos. Determinación de lugares geométricos.
- Reproducir figuras proporcionales.
- Identificar las relaciones existentes entre puntos de tangencia, centros y radios de circunferencias, analizando figuras compuestas por enlaces entre líneas rectas y arcos de circunferencia.
- Aplicar con rigor y exactitud la utilización de los recursos gráficos para destacar claramente el trazado principal elaborado de las líneas auxiliares utilizadas.
- Diseñar, a partir de un boceto previo, figuras planas que contengan enlaces entre líneas rectas y arcos de circunferencia, indicando gráficamente la construcción auxiliar utilizada, los puntos de enlace y la relación entre sus elementos.

CONTENIDOS

- Resolución de problemas geométricos: Proporcionalidad. Aplicaciones.
- Potencia de un punto respecto a una circunferencia. Determinación y propiedades.
- Resolución de problemas de tangencias y sus aplicaciones.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE EVALUACIÓN

- Utilizar los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de potencias.
- Resolver problemas de tangencias mediante la aplicación de las propiedades de la potencia de un punto respecto de una circunferencia.
- Determinar lugares geométricos de aplicación al Dibujo Técnico aplicando los conceptos de potencia.

RECURSOS DIDÁCTICOS

- Libros de texto, apuntes de clase y otros documentos recomendados por el profesor de entre una bibliografía.
- Útiles de dibujo técnico habituales: regla, escuadra, cartabón, compás y transportador de ángulos, lápices de diferentes colores, folios blancos DINA4.
- Pizarra convencional y empleo de tizas de yeso de diferentes colores.
- Pizarra digital inteligente y uso de rotuladores de diferentes colores.
- Proyección de exposiciones con obras de arte como recapitulación de los conceptos adquiridos.
- Proyección de dibujos técnicos para apreciar las diferentes posiciones de las rectas secantes a la circunferencia y la posición límite en los puntos de tangencia.
- Utilización del software Geogebra en los diferentes ejercicios propuestos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Hallar la potencia del punto P (3, 4) respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$
- Calcular la potencia de los puntos A (-2, 1), B (0, 8) y D (1, -2) respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8y = 0$. De acuerdo con los resultados obtenidos decide la posición relativa de cada punto con respecto a la circunferencia. Representa mediante un boceto cada situación.
- El punto A (10,1) ¿está en el interior de la circunferencia $x^2+y^2-10x-2y-4=0$? Razona tu respuesta.
- Determinar el lugar geométrico de todos los puntos del plano que tienen respecto de una circunferencia de 2,5 cm de radio una potencia de k = 9 cm²
- Calcular una circunferencia de centro O_2 que tenga la misma potencia respecto de un punto P que otra dada de centro O_1. Datos:
    - O_1-O_2 = 3,7 cm
    - O_1-P = 3,3 cm
    - P-O_2 = 4,2 cm
    - Radio de la circunferencia dada = 1,6 cm.

  Utilizando la aplicación informática Geogebra, una vez resuelto el problema de forma analítica, resuélvelo gráficamente.

2º ADAPTACIÓN NIVEL CURRICULAR: 4º CICLO DE SECUNDARIA.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Utilizar las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.
- Establecer correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.
- Calcular la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.
- Conocer el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.
- Calcular la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.
- Reconocer distintas expresiones de la ecuación de una recta y utilizarlas en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.
- Utilizar recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.
- Resolver problemas básicos de tangencias y enlaces.
- Analizar y solucionar problemas de configuración de formas geométricas planas.
- Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación para la creación de diseños geométricos sencillos.

NECESIDAD DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Geometría del plano. Lugar geométrico. Mediatriz, bisectriz, circunferencia. Otros lugares geométricos que den lugar a rectas, segmentos y arcos de circunferencia.
- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas. Aplicación a la resolución de problemas.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas.

CONTENIDOS

- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
- Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
- Iniciación a la geometría analítica en el plano: coordenadas. Vectores. Definiciones geométricas y analíticas de las operaciones: suma de vectores y producto de un número por un vector. Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua y general o implícita. Paralelismo, perpendicularidad: condiciones de las coordenadas de los vectores.

- Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.
- Radian. Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.
- Razones trigonométricas de ángulos agudos y de ángulos cualesquiera. Relaciones entre ellas. Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, opuestos y que se diferencian en uno y dos rectos.
- Construcciones geométricas y resolución de problemas. Tangencias y enlaces. Curvas cónicas.
- Aplicación de la geometría plana en el mundo del diseño.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE EVALUACIÓN

- Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.
- Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas en situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.
- Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.
- Analizar la configuración de diseños realizados con formas geométricas planas creando composiciones donde intervengan diversos trazados geométricos, utilizando con precisión y limpieza los materiales de dibujo técnico.
- Utilizar diferentes programas de dibujo por ordenador para construir trazados geométricos.
- Reconocer la utilidad del dibujo de representación objetiva en el ámbito de las artes, la arquitectura, el diseño y la ingeniería.

RECURSOS DIDÁCTICOS

- Tanto los alumnos como el profesor podrán emplear los mismos recursos que los citados en la programación sin adaptación curricular.
- En algún caso particular pueden desarrollarse pequeñas maquetas mediante el empleo de cartón, cartulinas, tijeras, pegamento…

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto miden los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52 m?
- En una circunferencia de radio 6 cm tenemos un arco de longitud 4,5 cm. ¿Cuántos radianes mide el ángulo central que determina dicho arco? Expresa la misma amplitud del ángulo en grados sexagesimales.
- Calcular el vector unitario de los siguientes vectores: $\vec{v}(6,0)$, $\vec{u}(1,-2)$, $\vec{w}(-3,-4)$.
- Hallar el producto escalar de dos vectores sabiendo que el primero tiene de módulo 4, el segundo, 5, y forman un ángulo de 60º.
- Calcular x e y para que los vectores $\vec{u}(2, y)$ y $\vec{v}(x, 1)$ formen un ángulo de 90º.
- Demostrar que los vectores $\vec{u}(\cos(a), -\text{sen}(a))$ y $\vec{v}(\text{sen}(a), \cos(a))$ son perpendiculares y unitarios.
- Dada la recta r: x+3y+2=0, en forma implícita, escribirla en forma explícita, paramétrica y continua.
- ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (2,2) y B (0,4)? Escribe las ecuaciones explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos P (1,4) y Q (2,3).
  - Determinar el valor de k para que los puntos A (2,-1), B (1,4) y C(k,9) estén alineados.
  - Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular a r: x+y-1=0 en el punto de abscisa x=3.

Nota. - Los últimos ejercicios, marcados con otra simbología, son de un grado de dificultad superior.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL TEMA 2 (2ª)

Potencias. Potencia y arco capaz. Potencia y tangencias. Eje radical.

PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO

Se trata de realizar ejercicios y problemas de potencias mediante un desarrollo paralelo entre una resolución analítica y gráfica a un grupo de 30 alumnos de segundo de bachillerato. Vamos a suponer que el grupo está constituido por estudiantes de las siguientes características: 3 de ellos son alumnos de altas capacidades intelectuales; 22 de los alumnos son estudiantes normales que han ido promocionando los cursos anteriores sin anomalías reseñables, 4 alumnos requieren clases de apoyo y refuerzo en la asignatura de matemáticas, hay un alumno que es repetidor y no existen alumnos con necesidades educativas especiales. En esta ocasión se plantea que, voluntariamente, los alumnos que lo soliciten, salgan a la pizarra para explicar los ejercicios y problemas propuestos por el profesor, de forma que se puntualicen los procesos de resolución de este tipo de problemas, desde el enfoque inicial con las posibles alternativas de resolución, hasta la obtención de una solución final. Por último, se propondrá a los alumnos una serie de ejercicios y problemas para su resolución de forma individual.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Adquirir con claridad la relación existente entre el concepto de potencia de un punto respecto de una circunferencia y los puntos de tangencia de las rectas tangentes.
- Identificar de forma analítica las rectas tangentes y los puntos de tangencia del conjunto del haz de rectas que pasan por un punto exterior a la circunferencia y son secantes a dicha circunferencia.
- Aplicación a la resolución de problemas geométricos del concepto de potencia a figuras planas compuestas por puntos, rectas y circunferencias.
- Motivar al alumno en su interés por las nuevas tecnologías y los programas de cálculo, disfrutando con su utilización y valorando sus posibilidades en la resolución de problemas de potencias.
- Saber elaborar y presentar, de forma oral y/o escrita, un informe sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un enunciado.
- Emplear el croquis y la perspectiva a mano alzada como medio de expresión gráfica y base de apoyo para la resolución de problemas.
- Reconocer la relación existente entre el teorema de la altura y el concepto de potencia.
- Resolver problemas de potencias empleando las propiedades del arco capaz.
- Manejar con destreza los conceptos de potencia y de distancia entre puntos.

NECESIDAD DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Conocer y manejar el sistema de referencia de coordenadas cartesianas.
- Ecuaciones de la recta: pendiente, ordenada en el origen, intersección con los ejes cartesianos.
- Concepto geométrico de distancia entre dos puntos.
- Trazados fundamentales en el plano. Circunferencia y círculo. Operaciones con segmentos. Paralelismo y perpendicularidad. Operaciones con ángulos.
- Determinación de lugares geométricos fundamentales: mediatriz, bisectriz, circunferencia, etc.
- Saber reproducir figuras proporcionales.

CONTENIDOS

- Resolución de problemas geométricos: Proporcionalidad. Teorema del cateto y de la altura. Aplicaciones a la resolución de problemas.
- Relación entre los ángulos y la circunferencia. Arco capaz. Aplicaciones.
- Determinación y propiedades del eje radical y del centro radical.
- Resolución de problemas de tangencias y sus aplicaciones.
- Determinación analítica de los puntos de tangencia como posición límite del haz de rectas secantes a la circunferencia.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE EVALUACIÓN

- Utilizar los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de potencias.
- Resolver problemas de tangencias mediante la aplicación de las propiedades del arco capaz, de los ejes y centros radicales, indicando gráficamente la construcción auxiliar utilizada, los puntos de enlace y la relación entre sus elementos.
- Determinar lugares geométricos de aplicación al Dibujo Técnico aplicando los conceptos de potencia.

RECURSOS DIDÁCTICOS

- Libros de texto, apuntes de clase y otros documentos recomendados por el profesor de entre una bibliografía.
- Útiles de dibujo técnico habituales: regla, escuadra, cartabón, compás y transportador de ángulos, lápices de diferentes colores, folios blancos DINA4.
- Pizarra convencional y empleo de tizas de yeso de diferentes colores.
- Pizarra digital inteligente y uso de rotuladores de diferentes colores.
- Proyección de exposiciones con obras de arte como recapitulación de los conceptos adquiridos.
- Proyección de dibujos técnicos para apreciar las diferentes posiciones de las rectas tangentes, normales y las funciones.
- Utilización del software Geogebra en los diferentes ejercicios propuestos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Hallar el eje radical de las circunferencias:

  c_1: $x^2 + y^2 - 6x + 4y – 11 = 0$

  c_2: $x^2 + y^2 + 8x - 2y – 1 = 0$

- Hallar el eje radical de las siguientes circunferencias:

  c_1: $x^2 + y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$

  c_2: $x^2 + y^2 + 5x = 0$

  Comprueba que es una recta perpendicular a la línea de sus centros.

- Calcular los ejes radicales y el centro radical de las circunferencias:

  c_1: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

  c_2: $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 49 = 0$

  c_3: $x^2 + y^2 - 14x + 4y + 37 = 0$

  Representa gráficamente en un sistema de coordenadas cartesiano los ejes radicales y el centro radical.

○ Dada la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$, calcular las rectas tangentes a ella que son paralelas a la recta de ecuación $x + y + 4 = 0$.

○ Mediante la ayuda del software de dibujo técnico Geogebra, determinar una circunferencia de centro O_2 que tenga la misma potencia que la de centro O_1 dada respecto del punto P.

  Datos:

  O_1-O_2 = 37 mm

  O_1-P = 33 mm

  P-O_2 = 42 mm

  Radio de O_1: r_1 = 16 mm.

Nota. - Los últimos ejercicios, marcados con otra simbología, son de un grado de dificultad superior.

3.3.- TEMA 3: INVERSIÓN

3.3.1.- INTRODUCCIÓN

La inversión es una transformación geométrica que hace corresponder a un punto A otro cualquiera A' de forma que se cumplen las siguientes condiciones:

1º A y A' están alineados con otro punto fijo, O, llamado centro de inversión.

2º El producto escalar de las distancias de ambos puntos al citado centro de inversión es un valor constante, K, llamado potencia de inversión; es decir:

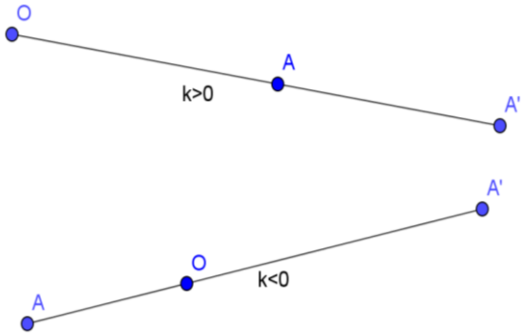


Figura 41

$\overline{OA} * \overline{OA'} = K$

que también lo podemos expresar con la notación:

$<\overline{OA}, \overline{OA'}> = K.$

Para valores positivos de K una pareja de puntos inversos se halla al mismo lado de O, y se trata de una inversión positiva. Mientras que, si K es negativo, los puntos A y A' se encuentran uno a cada lado del centro y se dice entonces que la inversión es negativa (obsérvese la figura 41).

3.3.2.- PAREJAS DE PUNTOS INVERSOS

Se ha observado una adecuada presentación de la inversión en el libro de texto que estamos analizando, así como de la exposición de los elementos y figuras dobles, hasta encontrar la afirmación: *"... dos parejas de puntos inversos son concíclicos ..."*

Entendemos que debe abordarse una pequeña explicación de dicha afirmación, aunque, quizás, el autor haya pretendido dejarlo como una reflexión para los alumnos. No obstante, y dado el objetivo que nos hemos propuesto en este TFM de invitar constantemente al alumno a una reflexión multidisciplinar, nos planteamos cuestionar al alumno sobre la justificación rigurosa enunciada en el párrafo anterior. Fijémonos, para ello, en la figura 42.

Dadas dos parejas de puntos inversos siempre hay una circunferencia que contiene a los cuatro, puesto que, si tomamos la circunferencia C que pasa por tres de ellos cualesquiera, por ejemplo, A, A' y B, para A y A' deberá cumplirse que: $<\overline{OA}, \overline{OA'}> = K$, puesto que A y A' son inversos. Entonces, K es la potencia de O respecto de la circunferencia c.

¿Y qué ocurre para el punto B? Pues supongamos que siendo B y B' inversos, existe otro punto B'' que también fuese inverso de B, con lo cual se cumplirían dos igualdades:

$$\overline{OB} * \overline{OB'} = K$$

$$\overline{OB} * \overline{OB''} = K$$

Dividiendo una entre otra:

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB''}} = 1$$

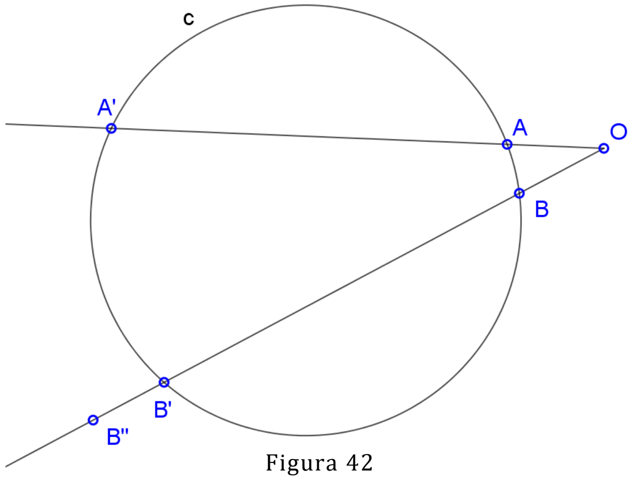


Figura 42

Es decir,

$$\overline{OB'} = \overline{OB''}$$

Y por consiguiente B'' = B'

Es decir, dos parejas de puntos inversos son concíclicos. Además, puede observarse también una clara relación existente entre potencia e inversión: el valor de la potencia de un punto (O) respecto de una circunferencia equivale a la potencia de inversión de dos puntos cualesquiera de la misma (A y A', B y B', ...) alineados con O.

3.3.3.- RECTAS ANTIPARALELAS

El libro de texto analizado expone en este capítulo de inversión el concepto de rectas antiparalelas. Y dice textualmente así: "Pero también se puede obtener una pareja de triángulos semejantes al cortar a dos rectas concurrentes, a y b, por dos rectas no paralelas, m y n, que se denominan antiparalelas respecto de las a y b, que, a su vez, son antiparalelas de m y n."

Aparentemente, por el dibujo que apoya a dicha exposición (y que reproduzco en la figura 43), trata de explicar que las rectas m y n que resultan al unir dos parejas de puntos concíclicos, son antiparalelas.

Se trata de una explicación totalmente imprecisa desde el punto de vista matemático, puesto que, por ejemplo, no emplea en ningún momento la propiedad de que las parejas de puntos inversos son concíclicos.

La definición que nos parece la más adecuada de rectas antiparalelas es la que se establece en el libro de Puig Adam: "Si dos rectas a, b secantes en O se cortan por otras dos, r y r' respectivamente en A, B y A', B', de modo que los dos pares AA' y BB' estén a un mismo lado o a distinto lado de O, y que el ángulo OAB sea igual al OB'A', diremos que las rectas r y r' son antiparalelas respecto a las a y b."

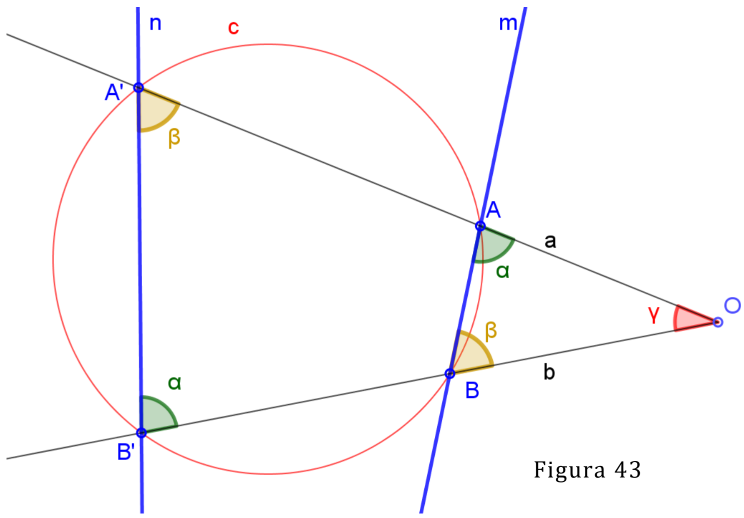


Figura 43

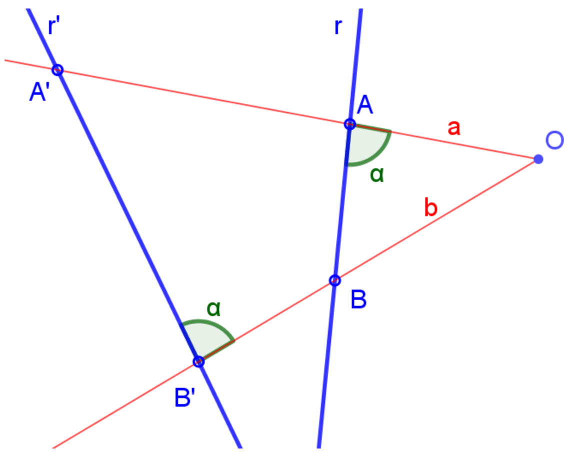


Figura 44

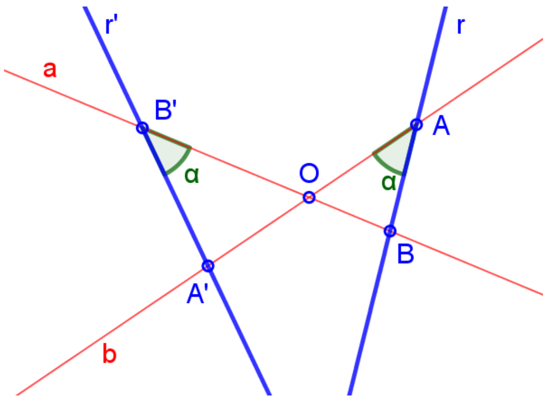


Figura 45

Tal y como se dice en dicho libro, si nos fijamos en los triángulos que se forman OAB y OA'B' de las figuras 44 y 45, y dado que los ángulos en el vértice O (mismo vértice en ambos triángulos) y en los vértices A y B' son iguales, también serán iguales los ángulos de los vértices A' y B porque son los suplementarios de las sumas de los anteriores; es decir:

$\widehat{A}' + \widehat{B}' + \widehat{O} = \pi$, en el triángulo OA'B'

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{O} = \pi$, en el triángulo OAB

Por tanto, los triángulos OAB y OA'B' son semejantes por tener respectivamente iguales los ángulos homólogos, de donde podemos expresar que

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \text{, o bien, } \overline{OA} * \overline{OA'} = \overline{OB} * \overline{OB'}$$

Es decir, dos rectas concurrentes en O son cortadas por dos antiparalelas respecto de ellas en puntos cuyo producto de distancias al punto O es el mismo en ambas rectas.

Y, precisamente, dicho producto de distancias coincide con la potencia de inversión de centro O, por lo que las parejas de puntos A, A' y B, B', al ser inversos, son concíclicos, quedando, ahora sí, correctamente enlazadas las explicaciones dadas en el libro de dibujo técnico y en el de Puig Adam.

3.3.4.- FICHA DE ACTIVIDAD SOBRE INVERSIÓN

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL TEMA 3
Inversión. Definición y tipos. Puntos concíclicos. Rectas antiparalelas.
PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO
Se trata de realizar ejercicios y problemas de inversiones de forma gráfica y analítica utilizando los conceptos y propiedades de las citadas transformaciones geométricas a un grupo de 30 alumnos de segundo de bachillerato. Suponemos un grupo homogéneo en el que no necesitamos realizar adaptaciones curriculares al no figurar entre los alumnos ninguno con necesidades educativas especiales. Para fomentar el trabajo en equipo, se trabajará la resolución de los ejercicios en grupo de tres alumnos en el aula, finalizando los mismos de forma individual, cada uno de ellos, en sus respectivos domicilios, como si de una tarea para casa (TPC) se tratara. Por último, se propondrá a los alumnos una serie de ejercicios y problemas para su resolución de forma individual.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS
▪ Introducir a los alumnos en el concepto de proyectividad, básicamente en el de inversión, y en el de sus propiedades, al ser de gran aplicación en estudios superiores. ▪ Emplear el croquis y la perspectiva a mano alzada como medio de expresión gráfica y conseguir la destreza suficiente en los diferentes problemas. ▪ Determinar lugares geométricos aplicando los conceptos de inversión. ▪ Transformar por inversión figuras planas compuestas por puntos, rectas y circunferencias describiendo sus posibles aplicaciones a la resolución de problemas geométricos. ▪ Seleccionar estrategias para la resolución de problemas geométricos complejos, analizando las posibles soluciones y transformándolos por analogía en otros problemas más sencillos. ▪ Diseñar a partir de un boceto previo figuras planas complejas, indicando gráficamente la construcción auxiliar utilizada para la resolución del problema. ▪ Dar a conocer a los alumnos el concepto de rectas antiparalelas. ▪ Relacionar y comprender los conceptos de inversión aplicados en Física y, más en concreto, en el mundo de la electrostática.

NECESIDAD DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Conocer y manejar el sistema de referencia de coordenadas cartesianas.
- Trazados fundamentales en el plano. Circunferencia y círculo. Operaciones con segmentos. Mediatriz. Paralelismo y perpendicularidad. Operaciones con ángulos.
- Transformaciones geométricas elementales: Giros, traslaciones y simetrías.
- Lugares geométricos básicos del plano: mediatriz, bisectriz, circunferencia…

CONTENIDOS

- Inversión. Determinación de figuras inversas. Aplicación a la resolución de tangencias.
- Elementos de una inversión.
- Figuras dobles.
- Rectas antiparalelas.
- Puntos concíclicos.
- Propiedades de las imágenes inversas: igualdad de ángulos, puntos de intersección y puntos de tangencia ente curvas. Desigualdad de proporciones.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE EVALUACIÓN

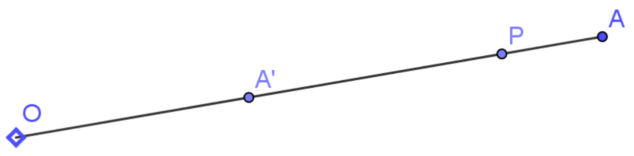
- Resolver problemas de tangencias mediante la transformación de circunferencias y rectas por inversión, indicando gráficamente la construcción auxiliar utilizada, los puntos de enlace y la relación entre sus elementos.
- Relacionar las transformaciones de inversión con sus aplicaciones a la geometría plana, valorando el proceso analítico y exactitud en los razonamientos utilizados.
- Utilizar correctamente el concepto de rectas antiparalelas y su aplicación a la resolución de triángulos.
- Manejar las propiedades de los puntos concíclicos en la resolución de ejercicios.

RECURSOS DIDÁCTICOS

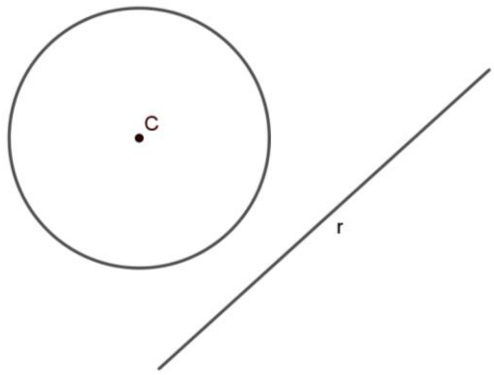
- Libros de texto, apuntes de clase y otros documentos recomendados por el profesor de entre una bibliografía.
- Útiles de dibujo técnico habituales: regla, escuadra, cartabón, compás y transportador de ángulos, lápices de diferentes colores, folios blancos DINA4.
- Pizarra convencional y empleo de tizas de yeso de diferentes colores.
- Pizarra digital inteligente y uso de rotuladores de diferentes colores.
- Proyección de dibujos técnicos para apreciar las diferentes transformaciones por inversión de figuras planas.
- Utilización del software Geogebra en los diferentes ejercicios propuestos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Calcular el inverso del punto P en una inversión de la que se conocen el centro O y la pareja de puntos inversos A y A’ (ver la figura adjunta).



- Dibujar la circunferencia de puntos dobles de la inversión que transforma la recta r en la circunferencia de centro C.



- Determinar el lugar geométrico de los puntos inversos de sí mismos en una inversión positiva cuya potencia de inversión vale 9. Represéntala gráficamente mediante la herramienta Geogebra utilizando el comando lugar geométrico.

- En la inversión determinada por su centro O y el par de puntos inversos A-A’, hallar B’ (punto inverso de B).

3.4.- TEMA 4: TANGENCIAS

3.4.1.- INTRODUCCIÓN

La utilización de las propiedades geométricas que se derivan de los conceptos de potencia e inversión, permiten resolver problemas de tangencias de mayor complejidad. Debido a ello, nos parecen escasas las referencias hechas en el libro de referencia, en los capítulos de potencia e inversión, a los casos específicos de tangencias.

La noción de tangencia a una curva en general no es abordable con los conocimientos que los alumnos tienen en segundo de bachillerato, necesitándose para ello contenidos que se desarrollan en estudios superiores de grado de algunas carreras universitarias. Por ello, en este capítulo no se va a desarrollar el caso de una recta tangente a una curva en general, definida por una ecuación implícita, o por unas ecuaciones paramétricas, ni se podrán emplear justificaciones tan exhaustivas y rigurosas como en las demás secciones de este TFM.

Nos ocuparemos exclusivamente de dos apartados:

1. Recta tangente a la gráfica de una función derivable, en el que sólo recordaremos algunos aspectos primordiales.
2. Recta tangente a una circunferencia.

3.4.2.- RECTA TANGENTE AL GRAFO DE UNA FUNCIÓN

El primer ejemplo con el que se encuentran los alumnos de bachillerato cuando se enfrentan al estudio de las tangencias es la recta tangente a la gráfica de una función diferenciable. Recordaremos brevemente esta noción.

Para determinar la recta tangente a la gráfica de una función cualquiera en un punto se emplea el concepto de límite, con el fin de determinar la pendiente de la recta tangente en dicho punto. Después, la ecuación de la recta quedará definida por dicha pendiente y el punto de tangencia.

Consideremos una función genérica, f, continua en x_1, y queremos averiguar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto P $(x_1, f(x_1))$. Pensemos que x_1 está incluido en un intervalo I en el que la función está definida. Tomemos otro punto genérico Q $(x_2, f(x_2))$ sobre la gráfica de f de tal forma que x_2 también está en I. La recta que une los puntos P y Q es una recta secante puesto que ambos puntos pertenecen a la curva de la función.

Representando esta descripción en un sistema de coordenadas cartesianas obtenemos la figura 46. En dicha figura se observa la diferencia de las abscisas, es decir, las coordenadas de "x", de P y Q, que se denota como Δx, de tal forma que $\Delta x = x_2 - x_1$, así como la diferencia de las ordenadas, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

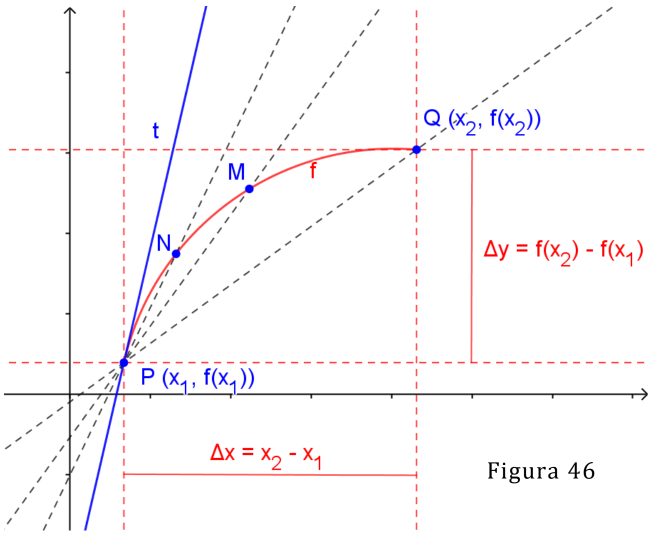


Figura 46

La pendiente de la recta que pasa por P y Q está determinada por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Y como $x_2 = x_1 + \Delta x$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Consideremos ahora que el punto P se mantiene fijo, mientras que el punto Q va ocupando sucesivas posiciones (M, N…) dentro de la gráfica de manera que se va aproximando a P. Entonces podremos decir que Q tiende a P o que se aproxima a P, que equivale a decir que Δx tiende a cero.

La recta secante llegará a una posición límite, en la que Q coincide con P, que es la que tratamos de determinar como **recta tangente** a la gráfica de la función f en el punto P. Es decir, que lo que se está buscando es el límite de la pendiente m_{PQ} conforme Δx tiende a cero, si dicho límite existe. Por consiguiente, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$ es la recta que pasa por el punto P y tiene por pendiente

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$, si este límite existe.

Y si, además:

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = -\infty$$

entonces la recta que pasa por P y Q tenderá a la recta que pasa por P y es paralela al eje Y; es decir, que la ecuación de la recta tangente será la de ecuación $x = x_1$.

En la figura 47 se muestra la recta t tangente vertical en el punto (x_1, f (x_1)) y en la figura 48, la gráfica de una función f y su recta tangente t cuando m(x_1) existe.

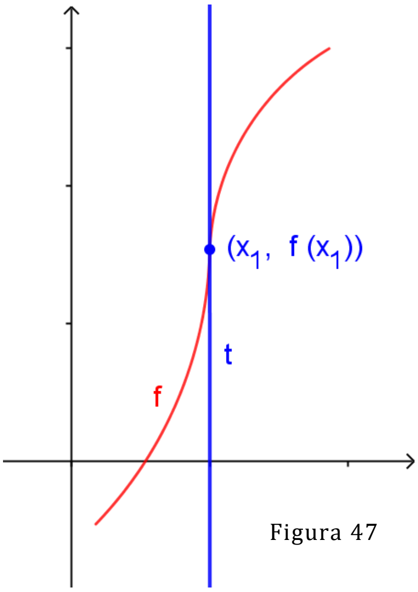


Figura 47

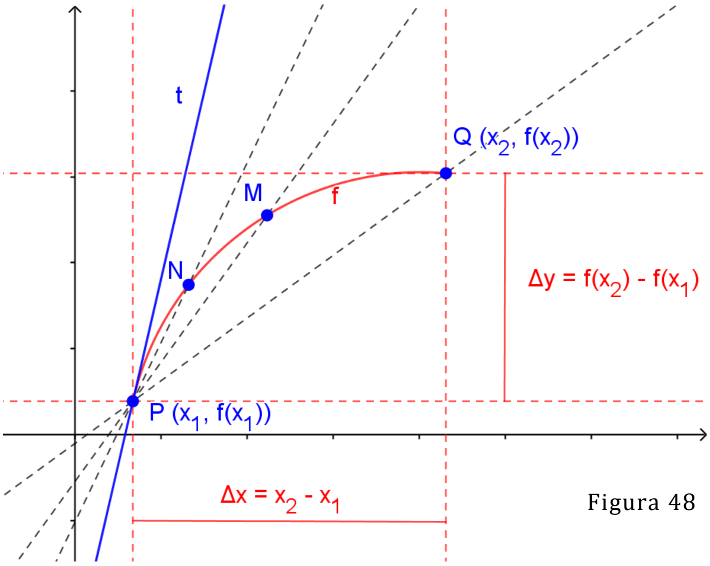


Figura 48

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto se denomina pendiente de la gráfica en dicho punto. Y la **recta normal** a una gráfica en un punto dado es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

Obsérvese que el tipo de límite que se ha utilizado para definir la pendiente de la recta tangente es el mismo que el utilizado para definir la función derivada. La **derivada** de una función en un punto concreto x_1 de su dominio es aquella otra función denotada por f' tal que su valor en el punto del dominio viene dado por:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f\{x_1\}}{\Delta x} \text{ si existe este límite}$$

Al comparar esta última fórmula con la dada anteriormente para m(x_1), se observa que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto (x_1, f(x_1)) es precisamente la derivada de la función f valorada en dicho punto, f'(x_1).

Otras notaciones también muy empleadas para la derivada son y' y $\frac{dy}{dx}$, de tal forma que en esta ocasión $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo para la derivada y no debe considerarse como una razón, aunque sí que indica que se trata de la razón entre el incremento en la variable y respecto del incremento en la variable x. De hecho, se considera $\frac{d}{dx}$ como un operador (un símbolo para la operación de calcular la derivada), y cuando se escribe $\frac{dy}{dx}$, significa $\frac{d}{dx}(y)$, esto es, la derivada de y respecto de x.

3.4.3.- TANGENCIA ENTRE RECTA Y CIRCUNFERENCIA

Como ya hemos indicado en la introducción, la noción de recta tangente a una curva en el caso general no es directamente abordable con los conocimientos de secundaria o de primero de bachillerato. Sin embargo, en muchos e importantes casos particulares, sí que es posible tratar esta noción. En esta sección pretendemos hacer una reflexión al alumno sobre una de las propiedades de la recta tangente a una circunferencia que consiste en la noción de "**orden de contacto.**"

La primera dificultad con la que nos encontramos es con la propia definición de recta tangente en un punto a una curva. En el caso de tangencia entre una recta y una circunferencia, observando las distintas posiciones relativas que pueden existir entre ellas (observar la figura 49), de forma intuitiva definimos que una recta será tangente a una circunferencia si corta a ésta en un único punto.

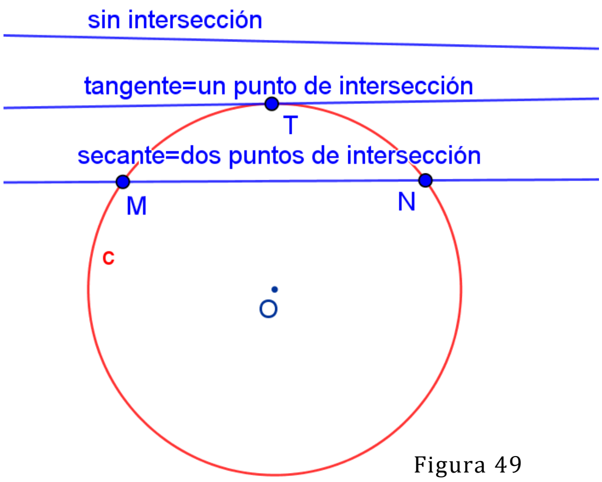


Figura 49

Rápidamente nos damos cuenta de que esta definición será incorrecta en el caso de recta y curva en general como se muestra en la figura 50, donde la recta t es tangente a la curva *f* en el punto P, pero corta en al menos dos puntos a dicha curva.

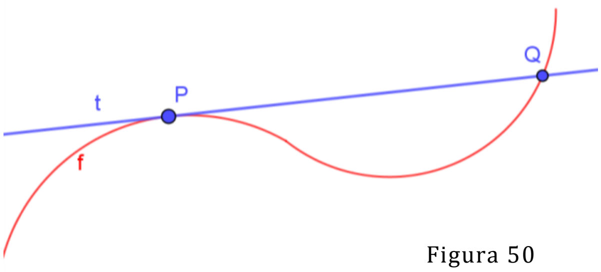


Figura 50

Una de las razones por las cuales la anterior definición de recta tangente es incorrecta estriba en la necesidad de un conocimiento global de la recta y de la curva, mientras que la noción de tangencia es una cuestión local.

Nuestro objetivo es simplemente precisar algunas de las propiedades geométricas locales que cambian cuando la recta *t* es tangente o secante a una circunferencia en un punto P, procurando describir con mayor precisión la noción de orden de contacto en estos casos.

La noción de recta tangente a la gráfica de una curva vista en la sección anterior, induce a pensar que podríamos definir la recta tangente a una curva en un punto P como el límite de las rectas secantes a la curva que pasan por dicho punto. Una descripción gráfica de esta noción la podemos ver en la figura 51.

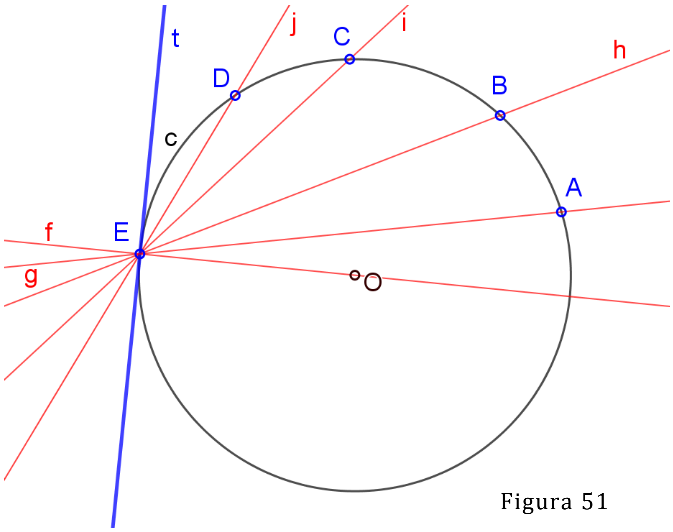


Figura 51

Sin embargo, en esta memoria no vamos a desarrollar este camino, y nos limitaremos al estudio del orden de contacto entre una recta y una circunferencia.

Analíticamente, podemos considerar una recta definida por sus ecuaciones paramétricas y una circunferencia definida de forma implícita, considerando un sistema de coordenadas cartesiano que nos permita identificar todos los puntos del plano por sus coordenadas. Así, la ecuación de la recta que pasa por un punto P de coordenadas $P(p_1, p_2)$ y que tiene como vector director el vector $\vec{v}$ de componentes (v_1, v_2) y el parámetro "t", será:

$$r \equiv \begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases}$$

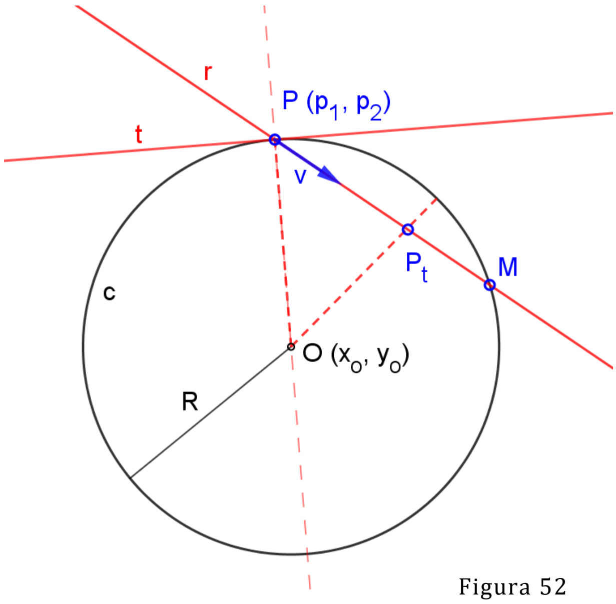


Figura 52

y la ecuación de la circunferencia de radio R y centro en O (x_0, y_0):

$$c \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$$

(ver figura 52).

Sea P_t el punto de la recta r de coordenadas P_t $(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2$. Sustituyendo las coordenadas de P_t en la ecuación de la circunferencia, nos quedará una expresión algebraica en función del parámetro t que denominamos f(t):

$$f(t) = (p_1 + tv_1 - x_0)^2 + (p_2 + tv_2 - y_0)^2 - R^2$$

Obsérvese que la función anterior se anula, f(t)=0, si y sólo si el punto P_t está en la circunferencia, es decir, cuando ocupa las posiciones de los puntos P y M de la figura 52.

Para desarrollar la expresión f(t), denominamos:

$$a = p_1 - x_0$$

$$b = p_2 - y_0$$

con lo que la función f(t) nos quedará:

$$f(t) = (a + tv_1)^2 + (b + tv_2)^2 - R^2$$

que desarrollada nos arroja la siguiente expresión cuadrática en t:

$$f(t) = (v_1^2 + v_2^2)t^2 + 2(av_1 + bv_2)t + a^2 + b^2 - R^2$$

en donde:

- el coeficiente en t^2 es el cuadrado del módulo del vector director, $\vec{v}$, de la recta r, y que es siempre positivo al ser la suma de dos términos de potencia con exponente par;
- el coeficiente en t es el doble del producto escalar del vector $\overrightarrow{OP}$ $(p_1 - x_0, p_2 - y_0)$ por el vector director de la recta $\vec{v}(v_1, v_2)$;
- y el término independiente es el cuadrado de la diferencia de los módulos de los segmentos $\overrightarrow{OP}$ y R, y cuyo valor es 0 puesto que el punto P pertenece a la circunferencia.

Denominando a cada uno de estos términos α_2 , α_1 y α_0 , es decir:

$$\alpha_2 = v_1^2 + v_2^2 > 0$$

$$\alpha_1 = 2(av_1 + bv_2)$$

$$\alpha_0 = a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

simplificamos la ecuación cuadrática a una expresión dependiente del parámetro t de la forma:

$$f(t) = \alpha_2\, t^2 + \alpha_1\, t$$

que resulta ser la ecuación de una parábola, cuya representación gráfica variará en función de los coeficientes α_2 y α_1 (ver figura 53).

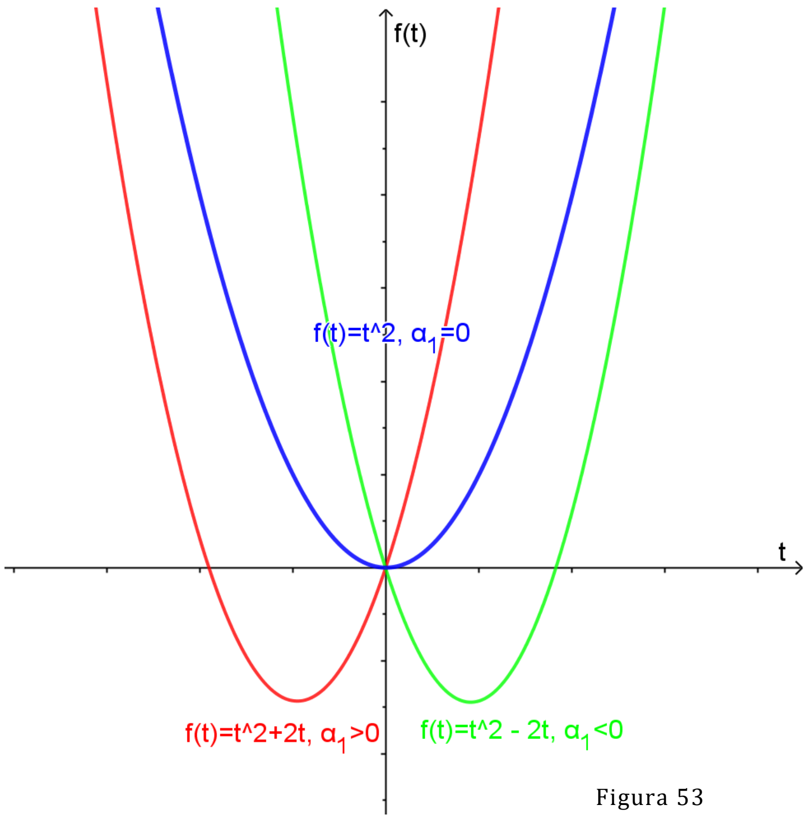


Figura 53

Vamos a tratar ahora de dar una definición de orden de contacto de una curva c a una recta r en un punto P. Para ello, observando la figura 54, destacamos los siguientes elementos:

- Un punto Q en la circunferencia c.
- La magnitud de la distancia entre el punto Q y la recta r: d(Q, r).
- La magnitud de la distancia entre los puntos Q y P: d(Q, P).

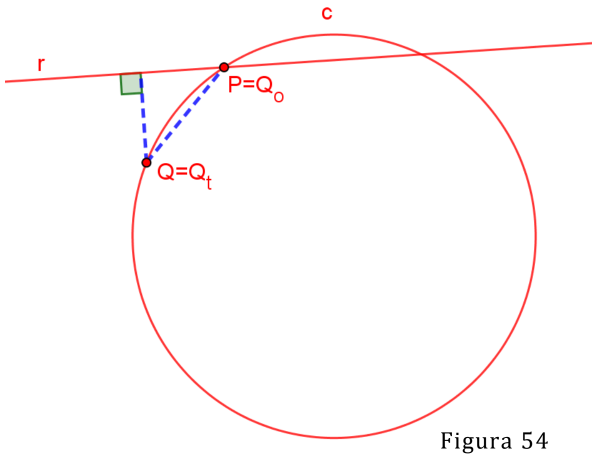


Figura 54

Si hacemos tender el punto Q hacia el punto P a lo largo de la circunferencia c, el orden de contacto es el límite de la razón de los órdenes de magnitud existentes entre d(Q, r) y d(Q, P). De forma más precisa, si $(\mathrm{x(t)}, \mathrm{y(t)}) = Q_t$ es una parametrización de c en un entorno de P, esto es, $\big(\mathrm{x}(0), \mathrm{y}(0)\big) = Q_0 = P$ el orden de contacto entre c y r en el punto P se puede escribir como:

$$Orden\ de\ contacto\ entre\ c\ y\ r\ en\ el\ punto\ P = \lim_{t \to 0} \frac{\log(d(Q_t, r))}{\log(d(Q_t, P))}$$

Debe observarse, aunque no lo demostramos, que esta definición es simétrica si intercambiamos los “papeles” entre la recta r y la circunferencia c.

Esto nos da pie a recordar que el orden de magnitud de una cantidad viene dado por el logaritmo, y a relacionarlo con la notación científica de los números.

Para realizar una estimación del **“orden de contacto”** entre la recta r y la circunferencia c asumimos la siguiente afirmación como cierta: “el orden de contacto entre r y c en el punto P es igual al orden de contacto entre la gráfica de f(t) y el eje de las abscisas en el punto (0,0)”. Podríamos aportar la siguiente justificación advirtiendo de su falta de rigor: a cada valor de t le corresponde un punto P_t de la recta r. Si la función f(t) es grande, P_t está alejado de la circunferencia y si f(t) es pequeña, P_t está cerca de la circunferencia. Así f(t) “mide” la distancia entre el punto P_t y la circunferencia c.

Si aplicamos esta definición de orden de contacto al caso de la gráfica de una función diferenciable f(t), en la que se cumple que f (0) = 0, y como recta r el eje de las abscisas (figura 55)

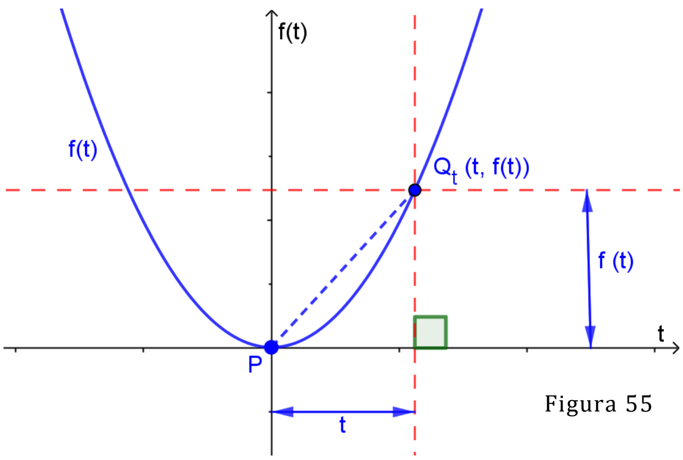


Figura 55

y tomamos la parametrización de la curva c de forma que a cada t se le hace corresponder un (t, f(t)), podemos escribir que:

$$d(Q_t, r) = |f(t)|$$

$$d(Q_t, P) = \sqrt{t^2 + f(t)^2}$$

Así, el orden de contacto de $c = f(t)$ a $r \equiv y = 0$ en el punto P (0,0) viene dado por:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(|f(t)|)}{\log(\sqrt{t^2 + f(t)^2})}$$

Para resolver este límite, deben diferenciarse dos casos:

a) $\lim_{t \to 0} \frac{|f(t)|}{t} = 0 = f'(0)$ ya que por definición de derivada se tiene que

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$$

b) $\lim_{t \to 0} \frac{|f(t)|}{t}$ cuando $f'(0) \neq 0$, caso análogo al a) y que, por ello, no vamos a detallar.

En el caso a) anterior queremos demostrar que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(|f(t)|)}{\log(\sqrt{t^2 + f(t)^2})} = \lim_{t \to 0} \frac{\log(|f(t)|)}{\log(|t|)}$$

Veamos qué ocurre con el denominador, por tanto:

$$\log(\sqrt{t^2 + f(t)^2}) = \frac{1}{2}\log(t^2 + f(t)^2) = \frac{1}{2}\log\left[t^2\left(1 + \frac{f(t)^2}{t^2}\right)\right]$$

que transformado a suma de logaritmos resulta:

$$(1) \qquad \frac{1}{2} 2\log(|t|) + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{f(t)^2}{t^2}\right)$$

como estamos suponiendo que $f'(0) = 0$ entonces:

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(t)|}{t} = 0, \text{ o también que } \lim_{t \to 0} \frac{f(t)^2}{t^2} = 0$$

por lo que, aplicando límites al segundo sumado de la expresión obtenida en (1) nos quedará:

$$\lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{f(t)^2}{t^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\log(1) = 0$$

y dado que el límite del primer término tiende a $-\infty$, esto es:

$$\lim_{t\to 0} \log(|t|) = -\infty$$

entonces podremos despreciar el segundo término de (1) frente al primero cuando apliquemos $\lim_{t\to 0}$ y, por lo tanto, nos quedará:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(|f(t)|)}{\log(\sqrt{t^2+f(t)^2})} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(|f(t)|)}{\log(|t|)+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{f(t)^2}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(|f(t)|)}{\log(|t|)}$$

como queríamos demostrar.

Como hemos dicho anteriormente, no exponemos la definición de “orden de contacto” de forma precisa y rigurosa. Si f(t) es una función con f (0) = 0, el “orden de contacto” de la gráfica de f(t) con el eje de las abscisas es el límite cuando t tiende a 0 de los “órdenes de magnitud” de f(t) respecto del “orden de magnitud” de t. Nos limitamos a representar este orden de contacto para los casos de las gráficas 56, 57 y 58.

Centrándonos, por tanto, en la hipótesis de estimar la función f(t) en un entorno de la raíz de la parábola, t=0, obtendremos las siguientes figuras:

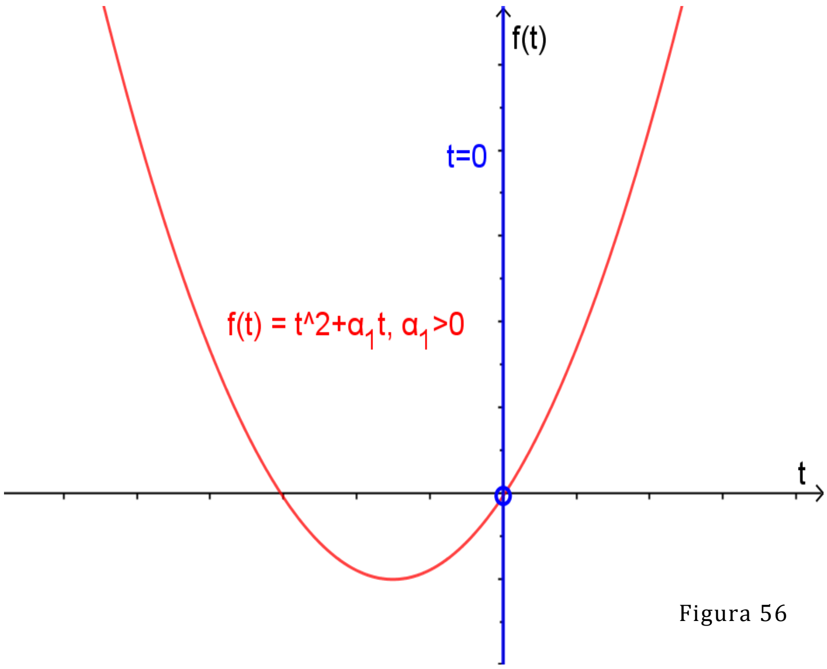


Figura 56

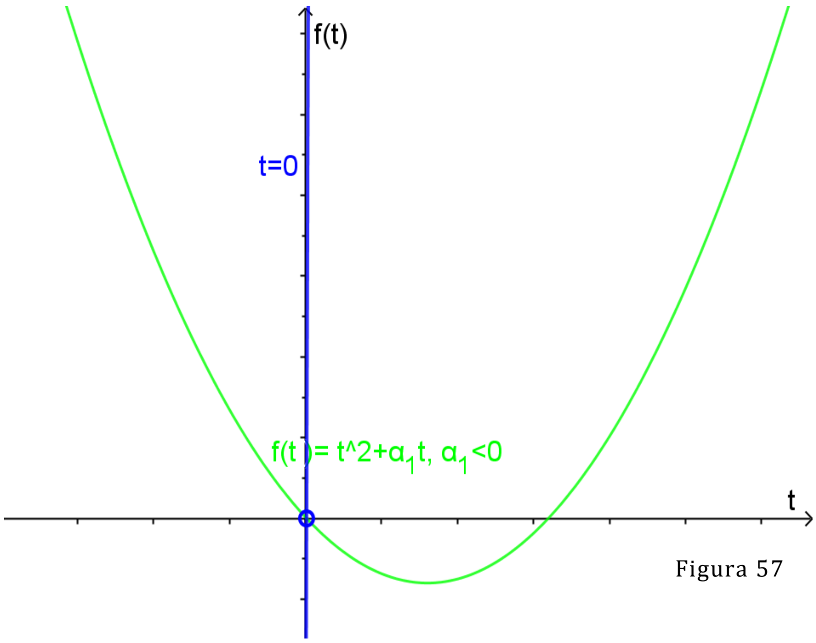


Figura 57

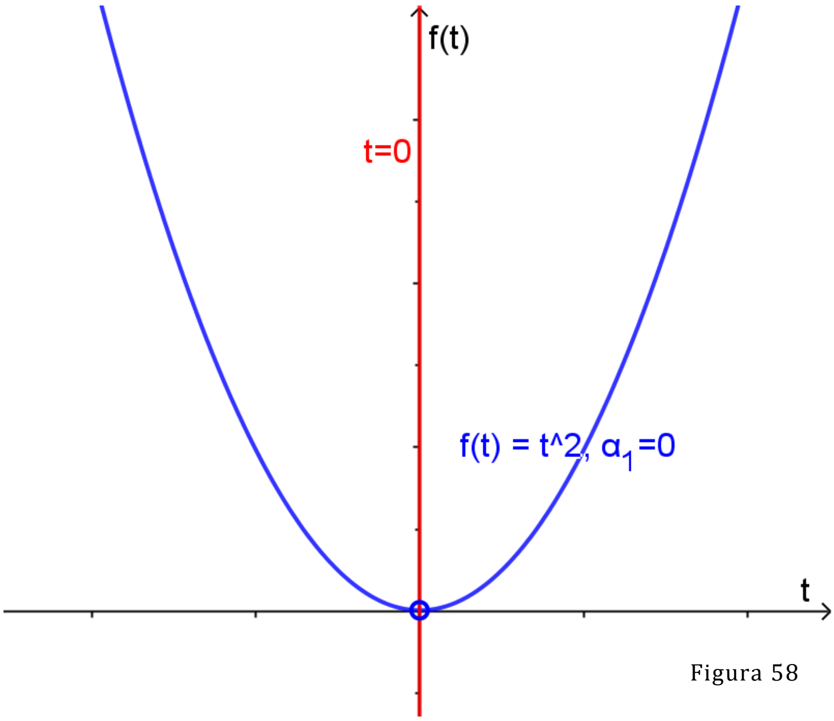


Figura 58

Para que los alumnos puedan interiorizar mejor este concepto de "orden de contacto", proponemos realizar una tabla de valores, en la que se puede observar cómo para un mismo valor de t, por muy grande que sea el valor de α_2 , siempre la ordenada arrojada por $\alpha_1\, t + \alpha_2\, t^2$ es mayor que la ordenada calculada para $\alpha_2\, t^2$.

t	$\boldsymbol{\alpha_1\, t + \alpha_2\, t^2}$	$\boldsymbol{\alpha_2\, t^2}$
$1/2$	$\alpha_1 * \frac{1}{2} + \alpha_2 * \frac{1}{4}$	$\alpha_2 * \frac{1}{4}$
$1/10$	$\alpha_1 * \frac{1}{10} + \alpha_2 * \frac{1}{100}$	$\alpha_2 * \frac{1}{100}$
$1/100$	$\alpha_1 * \frac{1}{100} + \alpha_2 * \frac{1}{1000}$	$\alpha_2 * \frac{1}{1000}$
$1/1000$	$\alpha_1 * \frac{1}{10^3} + \alpha_2 * \frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^6}$
…	…	…
${}^{1}/_{10^{12}}$	$\alpha_1 * \frac{1}{10^{12}} + \alpha_2 * \frac{1}{10^{24}}$	$\frac{1}{10^{24}}$
…	…	…
${}^{1}/_{10^{24}}$	$\alpha_1 * \frac{1}{10^{24}} + \alpha_2 * \frac{1}{10^{48}}$	$\frac{1}{10^{48}}$
…	…	…
${}^{1}/_{10^{n}}$	$\alpha_1 * \frac{1}{10^{n}} + \alpha_2 * \frac{1}{10^{2n}}$	$\frac{1}{10^{2n}}$

Observamos así como el orden de contacto de la gráfica de la función $\alpha_1\, t + \alpha_2\, t^2$ cuando $\alpha_1 \neq 0$ es 1, ya que el término en α_2, al tener siempre un exponente doble del de α_1, es despreciable frente a aquél, y por eso decimos que es de orden 1. Mientras que si $\alpha_1 = 0$, el orden de contacto es 2, caso este último que se corresponde con la recta tangente. Por otro lado, también constatamos que el hecho de la tangencia no es sólo tener en cuenta un punto de intersección, sino que, además, se produce un cambio drástico cuando vemos la geometría (las distancias) de la tangente frente a la secante.

La representación gráfica, tan intuitiva tantas veces, en este caso no va a arrojar resultados perceptibles puesto que los valores que se manejan son muy pequeños. Pero, utilizando programas de ordenador que permitan un cambio en la escala, sí que podrían verse todos estos resultados gráficamente. Sería una bonita labor de investigación para proponer a los alumnos de segundo de bachillerato en una actividad en el aula de informática de los centros educativos, por ejemplo, utilizando el software Geogebra, programa que también posibilita la realización de modificaciones en los ejes cartesianos, sin más que ir a preferencias, señalizar vista gráfica dentro de las opciones que se despliegan y dentro de la pestaña “básico” introducir la relación deseada entre el eje X y el eje Y en la zona “dimensiones”.

3.4.4.- FICHA DE ACTIVIDAD SOBRE TANGENCIAS.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL TEMA 4
Tangencias. Definición. Interpretación geométrica.
PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO
Se trata de realizar ejercicios y problemas de tangencias mediante un desarrollo paralelo de una resolución analítica y gráfica a un grupo de 30 alumnos de segundo de bachillerato. Suponemos un grupo homogéneo en el que no necesitamos realizar adaptaciones curriculares al no figurar entre los alumnos ninguno con necesidades educativas especiales. Para fomentar el trabajo en equipo, se trabajará la resolución de los ejercicios en grupo de tres alumnos en el aula, finalizando los mismos de forma individual, cada uno de ellos, en sus respectivos domicilios, como si de una tarea para casa (TPC) se tratara. Por último, se propondrá a los alumnos una serie de ejercicios y problemas para su resolución de forma individual.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS
▪ Comprender el concepto de recta tangente y punto de tangencia. ▪ Apreciar la diferencia entre recta tangente a una curva cualquiera y a una circunferencia. ▪ Aprender a relacionar los conceptos de tangencia, pendiente y derivada de una función en un punto particular. ▪ Interpretar adecuadamente el significado de la pendiente de la recta tangente y su aplicación a la resolución de problemas. ▪ Representar gráficamente las rectas tangentes y normales en los puntos de tangencia mediante las herramientas adecuadas. ▪ Aplicar los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados a la resolución de problemas. ▪ Emplear el croquis y la perspectiva a mano alzada como medio de expresión gráfica en los planteamientos de resolución de problemas de tangencias. ▪ Resolver problemas de tangencias aplicando las propiedades necesarias, indicando los puntos de tangencia entre los elementos.
NECESIDAD DE CONOCIMIENTOS PREVIOS
▪ Conocer y manejar el sistema de referencia de coordenadas cartesianas. ▪ Ecuaciones de la recta: pendiente, ordenada en el origen, intersección con los ejes cartesianos. ▪ Trazados fundamentales de la geometría métrica plana: Circunferencia y círculo. Operaciones con segmentos. Mediatriz. Paralelismo y perpendicularidad. Operaciones con ángulos y distancias. ▪ Lugares geométricos básicos del plano: mediatriz, bisectriz, circunferencia…
CONTENIDOS
▪ Límite de una función en un punto y en el infinito. Continuidad de una función en un punto. ▪ Noción de derivabilidad. Función derivada. ▪ Estudio local y representación gráfica de funciones básicas. ▪ Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. ▪ Rectas tangentes y normal a una función en un punto. ▪ Resolución de problemas de tangencias y sus aplicaciones.
CRITERIOS ESPECÍFICOS DE EVALUACIÓN
▪ Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y su relación con la pendiente de la gráfica de dicha función. ▪ Relacionar el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos de tangencias. ▪ Interpretar los dominios en los que una función tiene pendiente positiva o negativa, así como los puntos en los que se produce el cambio de una a otra. ▪ Utilizar los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de tangencias.

- Resolver problemas de tangencias de forma aislada o como solución global de un problema aplicando los conceptos de límite y/o de derivada.

RECURSOS DIDÁCTICOS

- Libros de texto, apuntes de clase y otros documentos recomendados por el profesor de entre una bibliografía.
- Útiles de dibujo técnico habituales: regla, escuadra, cartabón, compás y transportador de ángulos, lápices de diferentes colores, folios blancos DINA4.
- Pizarra convencional y empleo de tizas de yeso de diferentes colores.
- Pizarra digital inteligente y uso de rotuladores de diferentes colores.
- Proyección de dibujos técnicos para apreciar las diferentes posiciones de las rectas tangentes, normales y las funciones.
- Utilización del software Geogebra en los diferentes ejercicios propuestos.
- En algún caso particular pueden desarrollarse pequeñas maquetas mediante el empleo de cartón, cartulinas, tijeras, pegamento…

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Aplicando la definición de derivada para las siguientes funciones, hállala en los puntos indicados:
  a) $f(x)=2x^2-3x$, en $x = -1$ y en $x = 2$.
  b) $f(x)=x^3+x-5$, en $x = 0$ y en $x = 5$.
- Aplicando la definición de derivada, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=1/x$ en el punto P (2,1/2). Dibuja en un mismo sistema de ejes la curva y la tangente obtenida.
- Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x=2$.
- Obtener la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=x^2+5x-2$, en $x = -2$, y representa gráficamente la función y la recta obtenida. ¿Responde la recta obtenida a la idea intuitiva de tangente?
- Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x)=x3-3x en un punto genérico (x, y). Determinar los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal y utilice esos puntos para dibujar la gráfica de f.
- Dada la función $f(x)= 1/(x-1)$ calcular la recta tangente y la recta normal en el punto $x=2$. Dibuje un boceto con las tres funciones.
- ○ Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-8x-6y+20=0$ en el punto de coordenadas (3,5).
- ○ Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-10x+2y+18=0$ y que tiene de pendiente 1.
- ○ Dada la circunferencia $x^2+y^2=5$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x-2y+k=0$:
  a) Cortan a la circunferencia en dos puntos diferentes
  b) Son tangentes a la circunferencia
  c) O no tienen ningún punto en común con la circunferencia.
- ○ Hallar el ángulo agudo que forman las circunferencias $x^2 + y^2 = 17$ y $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 11 = 0$ en su intersección.
- ○ Demostrar que la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2+ y^2 = r^2$ en el punto de contacto P_1 (x_1, y_1) es $x_1x + y_1y = r^2$.

Nota. - Los últimos ejercicios, marcados con otra simbología, son de un grado de dificultad superior.

3.5.- TEMA 5: CÓNICAS

3.5.1.- INTRODUCCIÓN

En este tema voy a dar una explicación de las principales propiedades de estas curvas (definición como lugar geométrico, vértices, focos, simetrías que presentan, etc.) ya que todos los ejercicios y problemas geométricos relacionados con ellas se resolverán basándonos en dichas propiedades.

El libro de texto de referencia directamente procede a la resolución de ejercicios sin ni siquiera una breve introducción de las propiedades de las cónicas, dando por sentado que el alumno ya las sabe.

En mi opinión, y con el propósito que venimos continuamente repitiendo en este trabajo, de albergar en el alumno la capacidad de disponer de un enfoque global de la geometría, se debería, al menos, enunciar las características más importantes de las cónicas puesto que dada la diversidad de alumnos en las aulas, no todos dispondrán de los conocimientos previos necesarios para continuar en la profundización del estudio de estas curvas.

Por tanto, procedo a ello.

3.5.2.- SECCIONES CÓNICAS

Supongamos la existencia de una circunferencia en un determinado plano α. Dibujamos la recta, e, perpendicular a dicho plano por el centro de la circunferencia, y tomamos un punto sobre ella, V. La recta s, que gira alrededor del eje e, al que corta en el punto V, engendra una superficie cónica de revolución, siendo e el eje de la citada superficie, s la generatriz y V el vértice (ver figura 59).

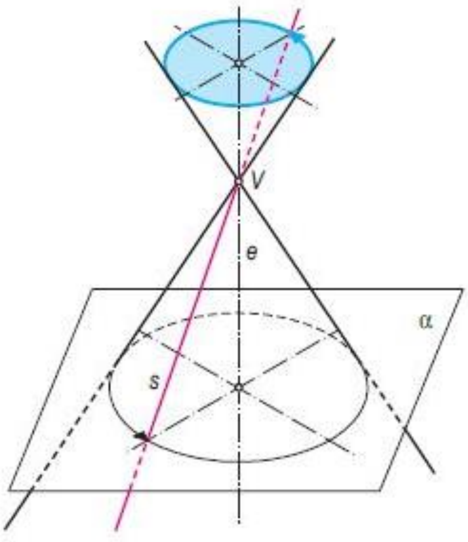


Figura 59 - Tomada del libro "Dibujo Técnico I 1ºbachillerato. F. Javier Rodríguez de Abajo y Víctor Álvarez Bengoa. Editorial Donostiarra. 2008".

Desde otro punto de vista, la superficie está formada por infinitas rectas llamadas generatrices, que pasan por V y forman el mismo ángulo con el eje e, siendo una de ellas la recta s.

Se denomina sección cónica, o simplemente cónica, a cualquiera de las curvas resultantes de las diferentes intersecciones entre una superficie cónica y un plano.

3.5.3.- CLASES DE CÓNICAS

- Si el plano secante que corta a la superficie cónica contiene al vértice, la sección obtenida es una **cónica degenerada** (ver la figura 60).
  Según la relación que haya entre el ángulo α, que forman las generatrices con el eje, y el ángulo β, que forma el plano secante con el eje, se diferencian:

  A) Un punto ($\alpha < \beta$)
  B) Una recta ($\alpha = \beta$)
  C) Un par de rectas secantes ($\alpha > \beta$)

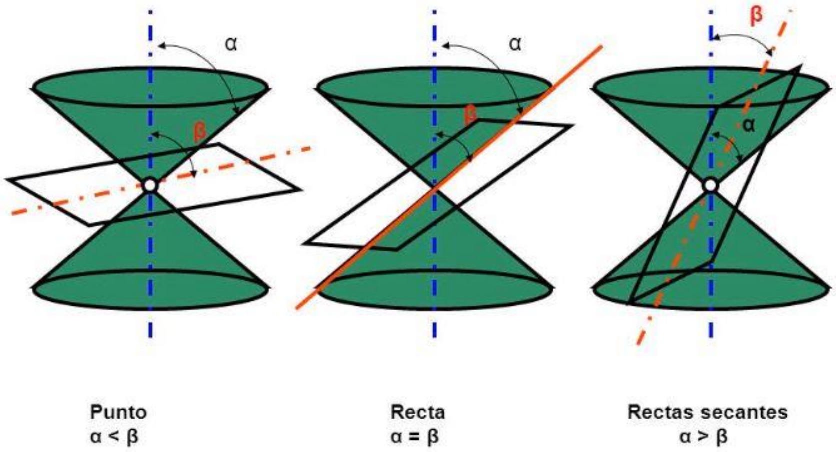


Figura 60 - Imagen tomada del vídeo de la siguiente dirección web
http://slideplayer.es/slide/21192/

- Si el plano secante no contiene al vértice, se obtienen las **cónicas no degeneradas** (ver la figura 61). Dependiendo, al igual que antes, de los ángulos α y β, se pueden distinguir cuatro casos:

  A) Circunferencia ($\beta = 90°$)
  B) Elipse ($\alpha < \beta$)
  C) Hipérbola ($\alpha > \beta$)
  D) Parábola ($\alpha = \beta$)

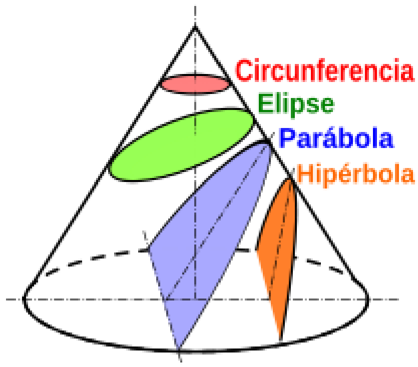


Figura 61 - Obtenida de
https://es.wikipedia.org/wiki/sección_cónica

3.5.4.- CARACTERÍSTICAS DE LAS CÓNICAS

3.5.4.1.- La Elipse

- Definición: es una curva cerrada y plana que se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

- Elementos de la elipse

  (ver figura 62)

  Centro: O

  Eje mayor: $\overline{AA'} = 2a$

  Eje menor: $\overline{BB'} = 2b$

  Distancia focal: $\overline{FF'} = 2c$

  Vértices: A, A', B y B'

  Focos: F y F'.

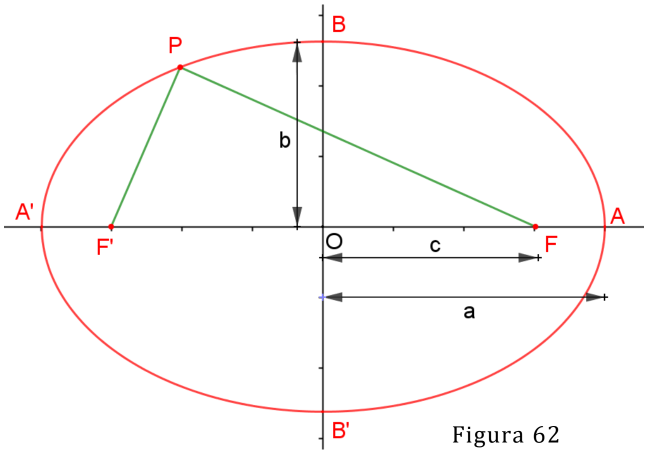


Figura 62

- Relación fundamental

  1º Si particularizamos la definición de la elipse en el vértice A, tendremos:

$$\overline{\boldsymbol{PF}} + \overline{\boldsymbol{PF'}} = \overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{F'A'} + \overline{AF'} = \overline{AA'} = \mathbf{2}\boldsymbol{a}$$

Es decir, la elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los focos es constante, y de valor, la magnitud del eje mayor de la elipse.

2º Si particularizamos ahora la definición para el vértice B, se verificará la relación anterior, es decir:

$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$

y como $\overline{BF} = \overline{BF'}$ (ver figura 63) resultará que $\overline{BF} = \overline{BF'} = a$, por lo que aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OBF se obtiene la **relación fundamental de la elipse:**

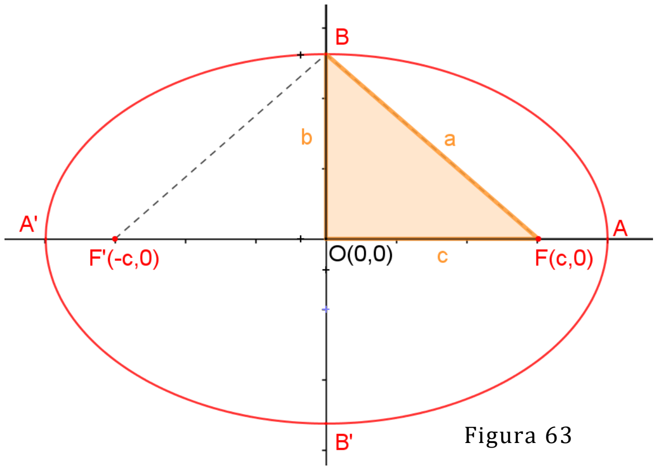


Figura 63

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$$

- Ecuación de la elipse

  Supongamos que la elipse está centrada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, con los focos situados en los puntos F'(-c,0) y F(c,0), según se representa en la figura 64. Consideramos un punto genérico de la elipse, $P(x, y)$, y le obligamos a cumplir la definición; es decir:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a \quad (1)$$

Los segmentos $\overline{PF}$ y $\overline{PF'}$ tienen una magnitud que puede ser expresada en función de la distancia entre dos puntos, por lo que valdrá:

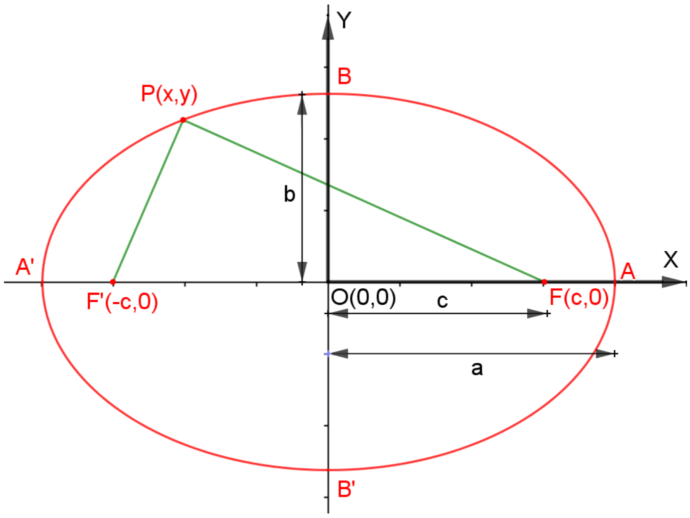


Figura 64

$$\left|\overline{PF}\right| = dist(P,F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left|\overline{PF'}\right| = dist(P,F') = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

y sustituyendo en (1) nos quedará:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Restando en ambos miembros de la ecuación la expresión $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ nos quedará:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado dos veces seguidas y simplificando términos semejantes:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como por la relación fundamental de la elipse, tenemos que $b^2 = a^2 - c^2$, podemos simplificar la expresión anterior, quedando

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

que al dividir por a^2b^2 da:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que es la **ecuación reducida de la elipse**.

En el caso particular en que $a = b = r$, es decir, los semiejes de la elipse son iguales, tendremos la ecuación de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio r.

Si la elipse no estuviese centrada en el origen de coordenadas, sino en un centro genérico de coordenadas C (c_1, c_2) obtendríamos la ecuación general:

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2}+\frac{(y-c_2)^2}{b^2}=1$$

- Excentricidad de la elipse.

La excentricidad de una elipse se define como el cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor; es decir:

$$e=\frac{c}{a}$$

y como en una elipse siempre se cumple que c<a, su excentricidad siempre es menor que 1, $0 \leq e < 1$. La excentricidad indica la forma de la elipse, que será más redondeada cuanto más se aproxime su excentricidad al valor cero.

Cada foco F de la elipse está asociado con una recta paralela al semieje menor llamada directriz, d (ver figura 65), de tal modo que la relación existente entre la distancia de cualquier punto P de la elipse hasta el foco F y la distancia ortogonal de ese punto P a la directriz es una constante de valor la excentricidad e de la elipse:

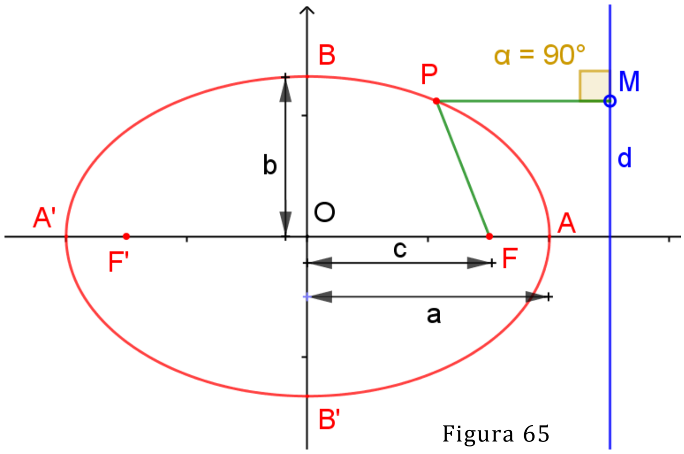


Figura 65

$$e=\frac{\overline{PF}}{\overline{PM}}$$

- Simetrías en la elipse.

La elipse es simétrica respecto de sus dos ejes pues resulta que la ecuación de la cónica es invariante en las dos simetrías:

x ⟹ -x

y ⟹ -y

y, por lo tanto, también lo es respecto del centro O.

3.5.4.2.- La hipérbola

- Definición: Es una curva plana con dos ramas que se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante.
- Elementos de la hipérbola (ver figura 66)

  Centro: O

  Eje real: $\overline{AA'} = 2a$

  Eje imaginario: $\overline{BB'} = 2b$

  Distancia focal $\overline{FF'} = 2c$

  Focos: F y F'

  Vértices: A y A'

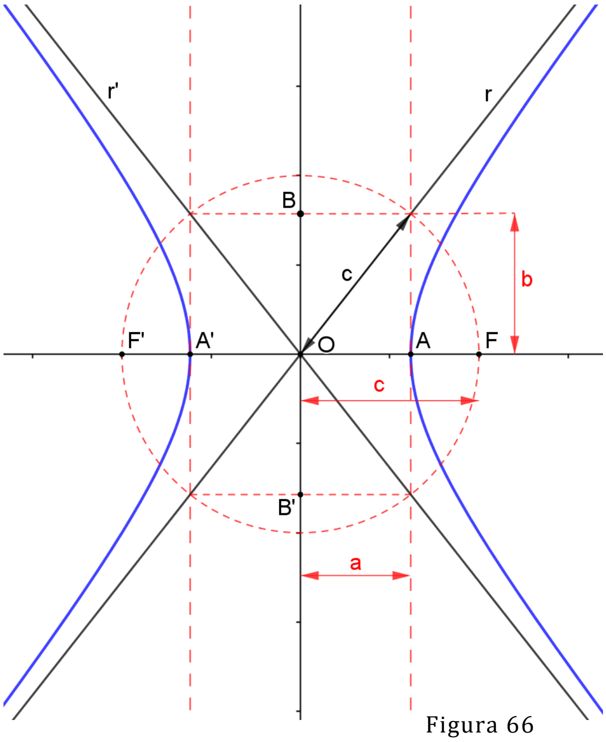


Figura 66

- Relación fundamental

  1º Particularizando la definición de la hipérbola en el vértice A, se cumplirá que:

  $\left|\boldsymbol{\overline{PF'}} - \boldsymbol{\overline{PF}}\right| = \left|\overline{AF'} - \overline{AF}\right| = \left|\overline{AF'} - \overline{A'F'}\right| = \left|\overline{AA'}\right| = \boldsymbol{2a}$

  Es decir, la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los focos es constante y de valor la magnitud del eje real.

  2º Observando la figura 67, por construcción de la hipérbola se cumple que $\overline{AB} = c$, por lo que aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$ que es la **relación fundamental de la hipérbola**.

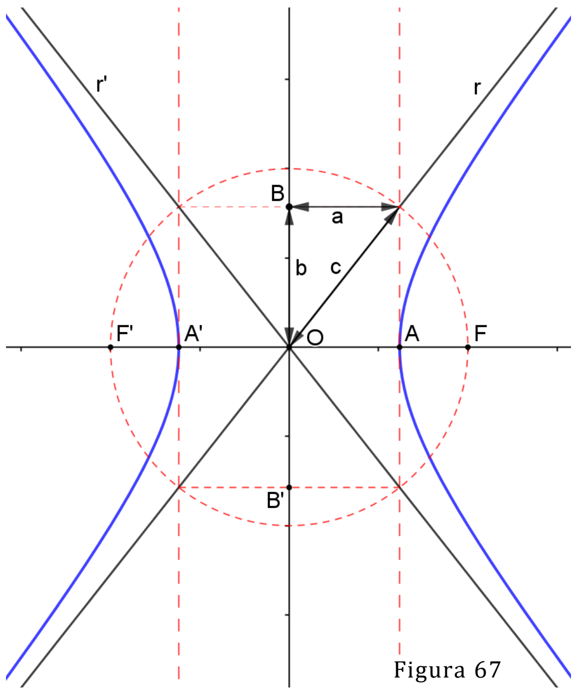


Figura 67

- Asíntotas de la hipérbola

  Son las rectas r y r' que pasan por el centro de la hipérbola y verifican que se acercan a las ramas de la misma tanto más cuanto más nos alejamos del centro de la hipérbola.

Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola con los focos en el eje de abscisas son:

$$r: y = \frac{b}{a}x \qquad\qquad r': y = -\frac{b}{a}x$$

- <u>Ecuación de la hipérbola</u>

Al igual que hicimos para la elipse, vamos a obtener la expresión analítica reducida o canónica de la hipérbola, suponiéndola centrada en el origen de coordenadas y con los focos situados en el eje de abscisas, por lo que sus coordenadas serán $F(c,0)\ y\ F'(-c,0)$ (Ver figura 68.

Consideramos un punto genérico de la hipérbola $P(x,y)$, por lo que deberá cumplir la condición de pertenencia a la misma, es decir:

$$\left|\overline{PF'} - \overline{PF}\right| = 2a \qquad (1)$$

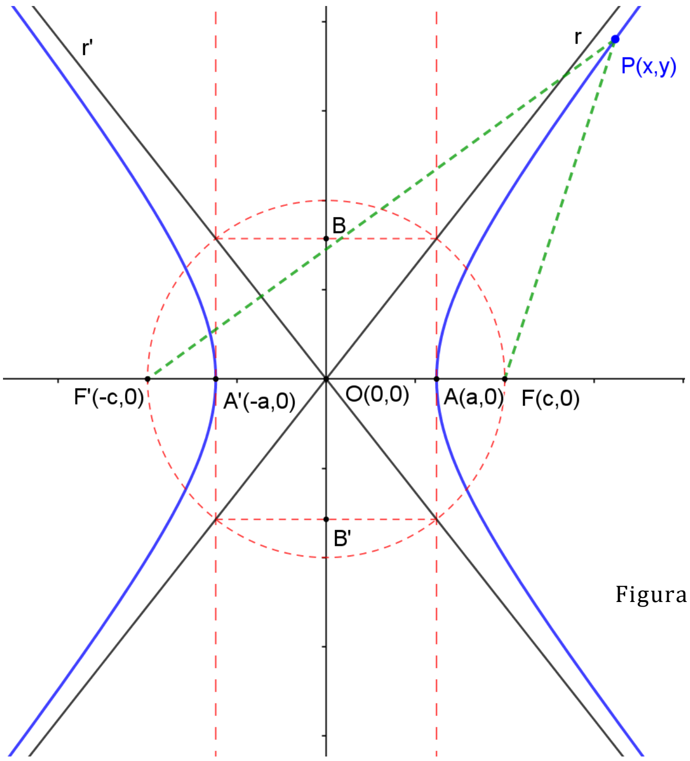


Figura 68

Los valores de $\overline{PF'}$ y $\overline{PF}$ se pueden expresar en función de la distancia entre dos puntos, por lo que tendremos:

$$\left|\overline{PF'}\right| = dist(P,F') = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\left|\overline{PF}\right| = dist(P,F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

expresiones que sustituidas en (1) nos dan:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

o lo que es lo mismo:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2+x^2-2xc+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Simplificando términos semejantes llegamos a:

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

y volviendo a elevar al cuadrado ambos miembros:

$$c^2x^2+a^4-2a^2cx=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

que ordenada y simplificada quedará:

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \qquad (2)$$

Por la relación fundamental de la hipérbola se tiene que:

$$c^2=a^2+b^2$$

y, por tanto:

$$c^2-a^2=b^2$$

sustituyendo en (2)

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

y dividiendo ambos miembros de la ecuación por a^2b^2:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

que es la **ecuación reducida o canónica de la hipérbola**.

En el caso particular de que los semiejes real e imaginario fuesen iguales ($a=b=K$), la ecuación reducida queda de la forma:

$$x^2-y^2=k^2$$

donde se dice que la hipérbola es equilátera y las asíntotas se corresponden con las bisectrices de los ejes de coordenadas, es decir:

$$r\equiv y=x$$

$$r'\equiv y=-x$$

Si la hipérbola no estuviese centrada en el origen de coordenadas, sino en un centro genérico de coordenadas C (c_1, c_2) obtendríamos la ecuación general:

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2}-\frac{(y-c_2)^2}{b^2}=1$$

cuyas asíntotas tendrían como ecuaciones:

$$r\equiv(y-c_2)=\frac{b}{a}(x-c_1)$$

$$r' \equiv (y - c_2) = -\frac{b}{a}(x - c_1)$$

- <u>Excentricidad de la hipérbola.</u>

  La excentricidad de una hipérbola se define como en la elipse; es decir:

$$e = \frac{c}{a}$$

  y como en una hipérbola siempre se cumple que c>a, su excentricidad siempre es mayor que la unidad, e > 1.

  La excentricidad e, es igual al cociente entre las distancias (en verde en la figura 69) desde un punto P de la hipérbola a uno de los focos y su correspondiente directriz:

$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PM}}$$

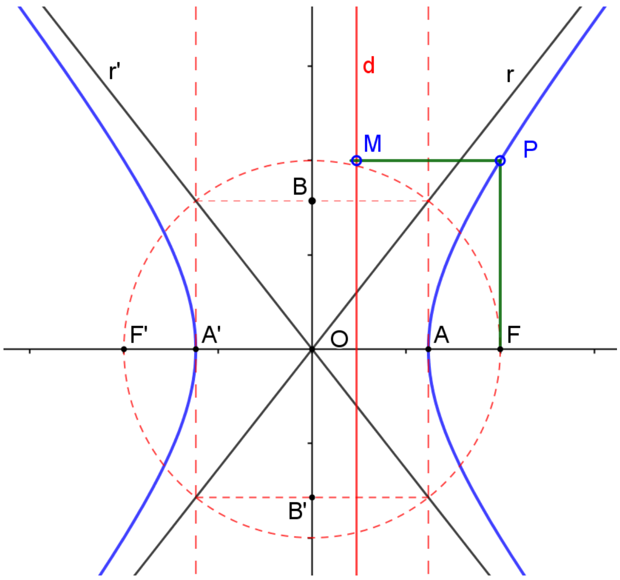


Figura 69

- <u>Simetrías en la hipérbola.</u>

  La hipérbola, al igual que la elipse, es simétrica respecto de sus dos ejes ya que también es invariante con respecto a las simetrías de eje X y de eje Y y, por lo tanto, también lo es respecto del centro O.

3.5.4.3.- La parábola

- <u>Definición</u>: Es una curva plana, abierta y de una sola rama que se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado foco, y de una recta fija d, llamada directriz.
- <u>Elementos de la parábola</u>

  Consideramos la parábola de la figura 70, cuyo foco se encuentra en la parte positiva del eje de ordenadas a una distancia $\frac{P}{2}$ del origen y cuya directriz, d, es la recta horizontal $y = -\frac{P}{2}$.

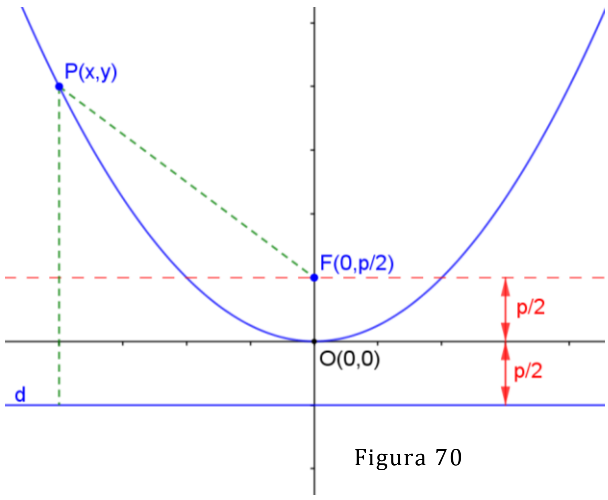


Figura 70

Se observan los siguientes elementos en la parábola:

Vértice: O (0,0)

Foco: $F\ (0, p/2)$

Directriz:

$d \equiv y = -\frac{P}{2}$

Parámetro: p, distancia entre el foco y la directriz.

- Ecuación de la parábola

Considerando un punto genérico P en la parábola con coordenadas $P(x, y)$, como el de la citada figura 64, deberá cumplir la condición de pertenencia a la curva; es decir:

$$dist(P, F) = dist(P, d)$$

Sustituyendo cada una de estas distancias por sus correspondientes expresiones analíticas, se tendrá:

$$\sqrt{x^2 + (y - \frac{P}{2})^2} = \left|y + \frac{P}{2}\right|$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$x^2 + y^2 - py + \frac{P^2}{4} = y^2 + py + \frac{P^2}{2}$$

simplificando nos queda:

$$\boldsymbol{x^2 = 2py}$$

que es la **ecuación reducida de la parábola.**

Si la hipérbola no estuviese centrada en el origen de coordenadas, sino en un centro genérico de coordenadas C (c_1, c_2) obtendríamos la ecuación general:

$$(x - c_1)^2 = 2p(y - c_2)^2$$

- Excentricidad de la parábola.

Por la definición que hemos dado, la parábola es la única sección cónica que tiene excentricidad e=1.

- Simetrías en la parábola.

La parábola tiene un eje de simetría que pasa por el vértice y por el foco y es perpendicular a la directriz.

3.5.5.- CURVAS CÓNICAS COMO PROYECCIONES DE UNA CIRCUNFERENCIA

Supongamos la superficie cónica de revolución tal y como se ha definido en el inicio del punto "3.5.2.- SECCIONES CÓNICAS".

Consideremos que dicha superficie de revolución cónica es cortada por **el plano π que interseca a todas las generatrices y que no es perpendicular al eje de simetría del cono**. Imaginemos la existencia de dos esperas interiores dentro del cono, una por encima del plano π, G1, y otra por debajo, G2, de tal forma que toquen al plano en un punto de éste (F1 y F2, respectivamente), tal y como se ilustra en la imagen de la figura 71, y que sean tangentes a la superficie de revolución cónica.

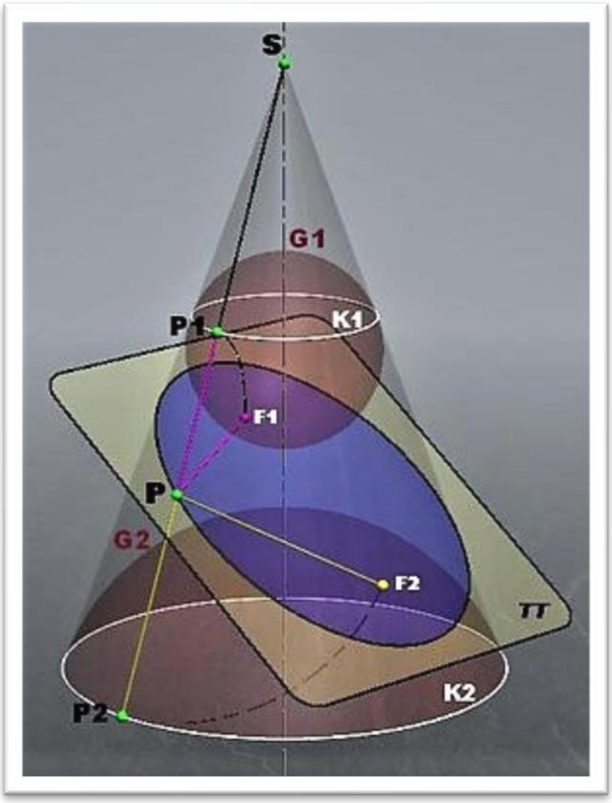


Figura 71 - obtenida de la página web "https://es.wikipedia.org/wiki/Esferas_de_Dandelin"

La esfera G1, por construcción, contacta con el cono en una circunferencia K1, e igualmente, la esfera G2, lo hace en la circunferencia K2.

Tomemos un punto arbitrario, P, en la curva de intersección entre el plano π y el cono. Este punto, además de pertenecer a la curva, también pertenece al cono, en concreto a la generatriz PS. Dicha generatriz interseca con las esferas inscritas en el cono en los puntos P1 y P2, pertenecientes respectivamente a las circunferencias K1 y K2.

Como los puntos P1 y F1 son dos puntos de tangencia, los segmentos de las rectas tangentes a la esfera G1 trazadas desde el mismo punto exterior, P, serán iguales. Es decir: $\overline{P\,P1} = \overline{P\,F1}$

Y en la esfera G2, siguiendo un razonamiento análogo, deduciremos que: $\overline{P\,P2} = \overline{P\,F2}$.

Por consiguiente, la suma de distancias del punto P a los puntos de tangencia F1 y F2 será:

$$\overline{P\,F1} + \overline{P\,F2} = \overline{P\,P1} + \overline{P\,P2} = \overline{P1\,P2}$$

Y $\overline{P1\,P2}$ resulta ser el segmento de la generatriz existente entre los dos planos perpendiculares al eje del cono, y su longitud no depende de la elección del punto P.

Es decir que, la suma de las distancias de un punto cualquiera de la curva, P, a los puntos F1 y F2 del mismo plano, es una constante, que es la propiedad característica de los puntos de una elipse. Y, por tanto, la intersección del cono con el plano π es una elipse.
Además, la relación existente entre los semiejes depende únicamente de la pendiente del plano que, obviamente puede tomar cualquier valor (entre los valores en los que el ángulo del plano con el eje sea mayor que el ángulo que forman las generatrices con el eje del cono). Y, por tanto, una elipse puede ser obtenida como una proyección central de una circunferencia.
De forma similar, podemos demostrar que, si **el plano secante es paralelo a dos generatrices** del cono, entonces la sección intersección es una hipérbola (ver figura 72, reformada por mí de una inicial extraída del libro "Geometry of Conics, de A. V. Akopyan y A. A. Zaslavsky, American Mathematical Society, 2.008"). Las esferas G1 y G2 contactan con el cono en las circunferencias que contienen a los puntos Y_1 y Y_2 como se puede apreciar en la figura. Y el plano secante al cono es tangente en F1, a la esfera G1, y en F2, a la esfera G2. Tomando un punto P genérico en cualquiera de las dos ramas de la curva intersección entre el plano y el cono, se tiene que:

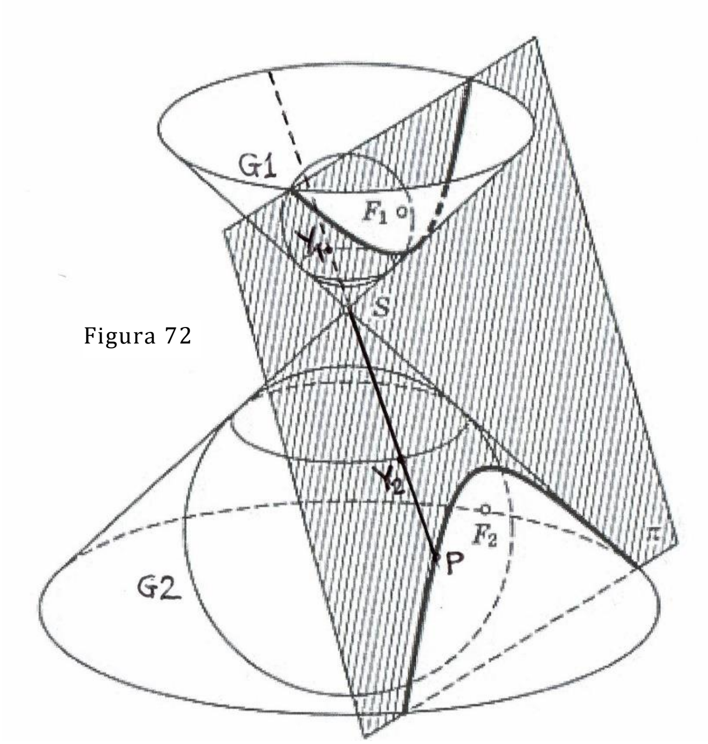


Figura 72

- Por un lado, $\overline{PF_2}$ es un segmento incluido en el plano π (puesto que tanto P como F_2 pertenecen a dicho plano), plano tangente a la esfera G2 en el punto F_2, por lo que $\overline{PF_2}$ también es tangente a G2; y $\overline{PY_2}$ es un segmento incluido en una generatriz del cono, por lo que $\overline{PY_2}$ también es tangente a la esfera G2. De ambos se deduce, por tanto, que $\overline{PF_2} = \overline{PY_2}$.
- Y, por otro lado, $\overline{PF_1}$, es un segmento del plano π, por lo que será tangente a la esfera G1; y $\overline{PY_1}$ es un segmento de una recta generatriz del cono, por lo que también será tangente a la esfera G1. De estas afirmaciones se deduce la igualdad de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PY_1}$.

La diferencia de las distancias (en valor absoluto) será, por tanto:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PY_1} - \overline{PY_2}| = \overline{Y_1Y_2}$$

Que vuelve a no depender del punto P seleccionado y que cumple con la condición de los puntos pertenecientes a la hipérbola, es decir, que la diferencia en valor absoluto de las distancias a dos puntos fijos es constante. Por consiguiente, podemos afirmar que la intersección del cono con el plano π es una hipérbola cuando el plano secante es paralelo a dos generatrices del cono.

Finalmente, consideremos el caso en el que **el plano secante es paralelo a una generatriz** (ver figura 73, modificada por mí de una inicial extraída del libro "Geometry of Conics, de A. V. Akopyan y A. A. Zaslavsky, American Mathematical Society, 2.008").

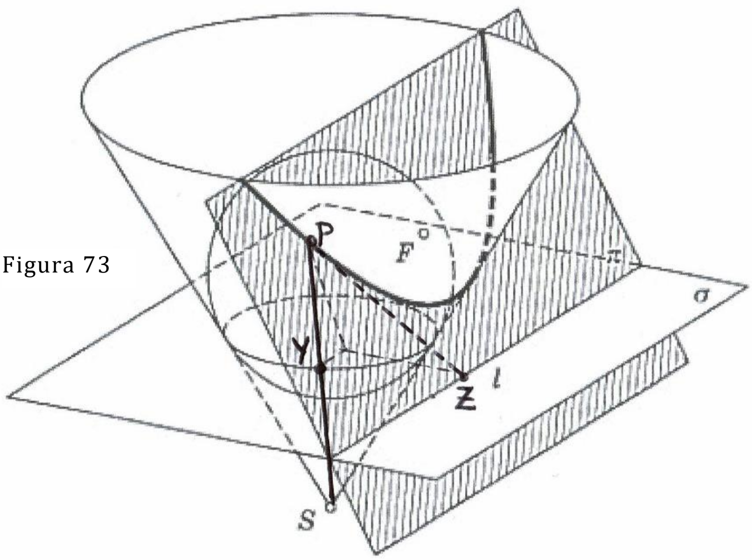
Como se aprecia en la citada figura, inscribimos en el cono una esfera tangente al plano π en el punto F. Dicha esfera es tangente al cono en la circunferencia que se encuentra en el plano σ.

Para un punto arbitrario P de la curva sección del cono y del plano π, tomemos un punto Y como intersección de la generatriz que pasa por S y P con el plano σ. Y sea el punto Z la proyección ortogonal del punto P sobre la recta l (intersección de los planos π y σ).

El punto F es un punto de tangencia con la esfera, al igual que Y, por lo que se tiene que $\overline{PF} = \overline{PY}$

Por otro lado, Y y Z están en el plano σ, por lo que el ángulo entre la recta que pasa por P e Y, y el plano σ es igual al ángulo entre una generatriz y un plano perpendicular a su eje. Y el ángulo entre la recta que pasa por P y Z con el plano σ es el mismo ángulo que el que forman los planos π y σ. Como hemos elegido a π para que sea paralelo a una generatriz, entonces los ángulos anteriores son iguales y, por consiguiente, los segmentos $\overline{PY}$ y $\overline{PZ}$ son iguales puesto que forman el mismo ángulo con el plano σ. Con lo cual se tiene que:

Figura 73



$$\overline{PF} = \overline{PY} = \overline{PZ}$$

es decir, que el punto genérico tomado cumple que está a la misma distancia a un punto fijo y a una recta, por lo que pertenecerá a una parábola con foco en F y directriz la recta l. Por consiguiente, cualquier curva no degenerada de orden dos puede ser obtenida como una sección del cono. Y debido a ello, tales curvas son también denominadas secciones cónicas o simplemente cónicas.

3.5.6.- LA PROPIEDAD ÓPTICA DE LAS CÓNICAS

3.5.6.1.- En la elipse

Supongamos una recta l que es tangente a la elipse en un punto P. Diremos, por definición, que una recta l es tangente a una elipse si dicha recta interseca en un único punto con la elipse. Entonces, l es la recta bisectriz del ángulo exterior F_1PF_2 (obsérvese la figura 74). Vamos a demostrar que el punto de la recta *l* en el que se alcanza el mínimo de la suma de las distancias a los focos, F_1 y F_2, es precisamente el punto P, el único punto de intersección entre la recta l y la elipse. Una vez demostrado esto, utilizando los resultados del apartado 3.1.8 de este TFM, entonces diremos que el punto P es la intersección de la recta *l* con la recta que pasa por los puntos F_1 y F'_2, siendo F'_2 el punto simétrico de F_2 respecto a la simetría axial de eje *l*. Al ser F2 y F'2 puntos simétricos se cumple que $\measuredangle MPF_2 = \measuredangle MPF_2'$ y que $\measuredangle MPF_2' = \measuredangle F_1PX$, siendo X y M dos puntos de la recta l tomados arbitrariamente como se indica en la figura 74. Esta igualdad de ángulos demuestra que la recta l tangente a la elipse es la bisectriz del ángulo exterior F_1PF_2. Veamos, por tanto, cómo podemos demostrar que el punto de *l* donde se alcanza el mínimo de la suma de las distancias a los focos es P. Se propone la siguiente demostración matemática:

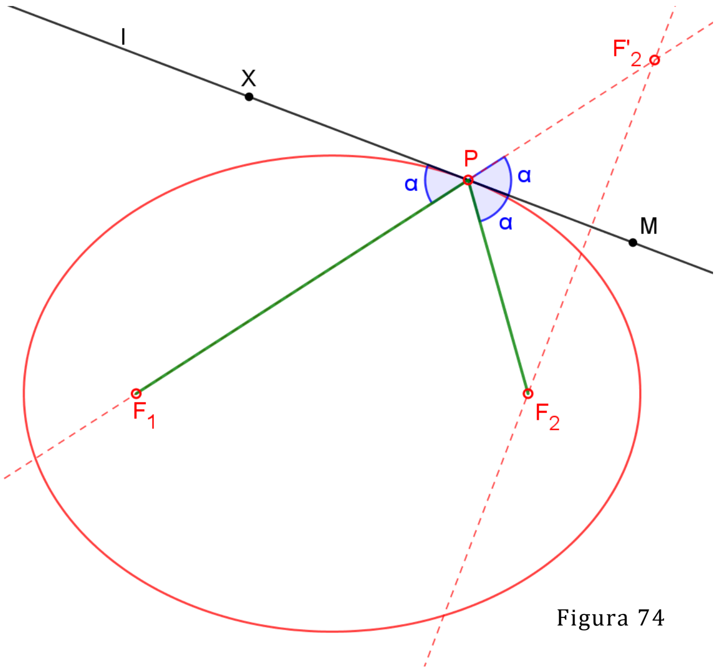


Figura 74

Parametrizamos la recta *l*, de forma que un punto genérico X_t de dicha recta será de la forma: $X_t = P + t\vec{v}$. Definimos la función *h(t)* como $h(t) = X_tF_1 + X_tF_2$. Se trata de demostrar que la función *h(t)* tiene un mínimo en el punto t=0, pues en este caso aplicamos el resultado obtenido en el punto 3.1.8 del tema 1 de este mismo trabajo al punto $X_0 = P$, que sería la solución que estamos buscando.

La función h(t) es una función definida en los números reales, siempre es positiva puesto que estamos hablando de la suma de distancias entre dos puntos, y es continua en todo el dominio de definición. Es obvio que la función h(t) tiende a $+\infty$ tanto cuando $t \to +\infty$ como cuando $t \to -\infty$. Gracias al razonamiento del apartado 3.1.8 sabemos que existe un punto $Q = T_{X_0}$ tal que la función $h(t_0)$ es un valor mínimo de la función h(t) y, por tanto, $h(0) \geq h(t_0)$.

Si ocurriese la igualdad, es decir, $h(0) = h(t_0)$, siendo $t_0 \neq 0$, entonces la recta *l* y la elipse se intersecarían en al menos dos puntos, en 0 y en t_0, en contra de que la recta l es tangente a la elipse y sólo tiene un punto de intersección con ella. Luego, no se puede dar la igualdad.

Si $h(0) > h(t_0)$, suponemos que $0 < t_0$ y llamamos $h(0) = M$, como el $\lim_{t \to \infty} h(t) = +\infty$ existe un punto t_1 tal que $h(t_1) > h(0) = M$, o lo que es lo mismo $h(t_0) < M < h(t_1)$. Aplicando el teorema de Bolzano, entonces existe otro punto t_2 que pertenece al intervalo cerrado $[t_0, t_1]$ tal que $h(t_2) = M$, así que $t_2 \neq 0$ pues tenemos que $0 < t_0 \leq t_2 \leq t_1$.

Entonces se tiene que, por un lado:

$$h(t_2) = M = h(0) = X_0F_1 + X_0F_2 = PF_1 + PF_2$$

y por otro

$$h(t_2) = M = X_{t_2}F_1 + X_{t_2}F_2$$

de las que podemos deducir, por tanto, que el punto X_{t_2} está en la elipse, puesto que cumple con la definición dada para estas cónicas. Y, además, X_{t_2} es un punto de la recta *l* y, $P \neq X_{t_2}$ pues $t_2 \neq 0$ y, por consiguiente, tanto el punto P como el punto X_{t_2} pertenecen a la intersección de la recta con la elipse, en contradicción con que la recta l es tangente a la cónica y, por lo tanto, sólo tiene un único punto de corte con ella. En definitiva, nuestro supuesto $t_0 \neq 0$ es falso, por lo que $t_0 = 0$ y en P se alcanza el mínimo de la suma de distancias.

Dejamos como ejercicio para el alumno el caso en el que se tenga que $h(0) > h(t_0)$ y $0 > t_0$, que se resuelve de forma idéntica a como acabamos de proceder.

3.5.6.2.- En la hipérbola

Diremos que una recta *l* es tangente a una hipérbola si corta a ésta en un único punto P. La propiedad óptica para las hipérbolas consiste en que la recta l es la bisectriz del ángulo que forman las rectas que unen el punto P con los focos F_1 y F_2 (obsérvese la figura 75).

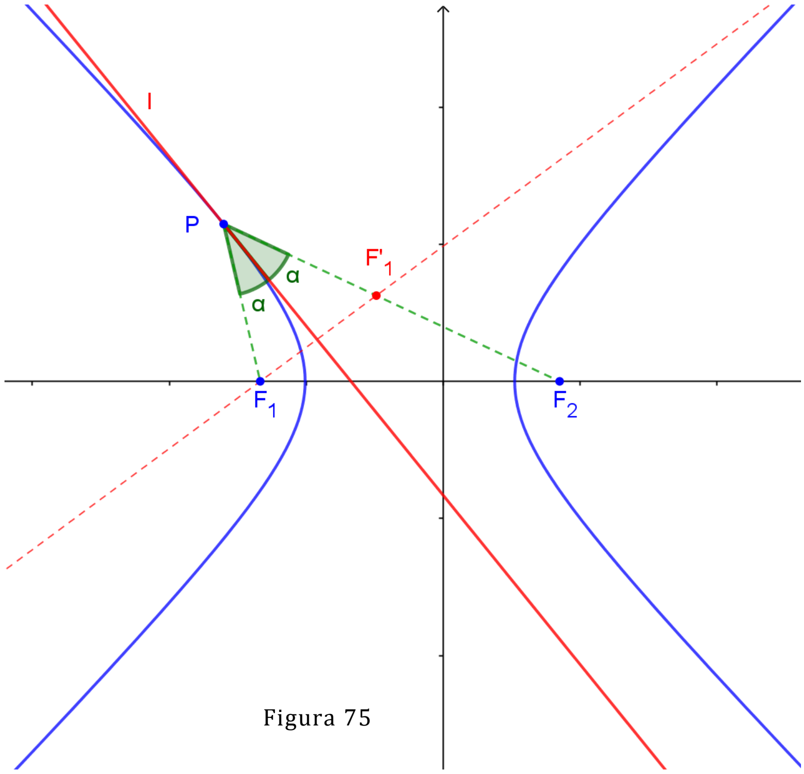


Figura 75

La demostración de la citada propiedad consiste en probar que P es el punto de la recta l en el que se alcanza el máximo del módulo de las diferencias de las distancias de dicho punto a los focos de la hipérbola, lo cual se demuestra de forma análoga al caso de la elipse utilizando el teorema de Bolzano y el hecho de que la recta l contiene un único punto de la hipérbola. En este caso, utilizamos el resultado obtenido en la sección 3.1.7 del tema 1, al ser una diferencia de distancias, gracias al cual se demuestra que P está en la recta que une los puntos F'_1 y F_2, siendo F'_1 el simétrico de F_1 respecto de la simetría axial de eje l, lo que prueba que dicha recta l es la bisectriz del ángulo $\measuredangle F_1 P F_1'$, que es la propiedad óptica en las hipérbolas.

3.5.6.3.- En la parábola

Supongamos una recta tangente $\boldsymbol{l}$ a la parábola en un punto $\boldsymbol{P}$. Consideremos un punto $\boldsymbol{P'}$ como la proyección ortogonal de P sobre la directriz de la parábola. Entonces se cumple que la recta *l* es la bisectriz del ángulo formado por los puntos $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{P'}$ (observar la figura 76).

Pensemos que la bisectriz del ángulo FPP', y que llamamos l', corta a la parábola en cualquier otro punto, por ejemplo, Q, cuya proyección ortogonal sobre la directriz denominaremos Q'. Al ser Q otro punto de la parábola, también cumplirá la propiedad que caracteriza a los puntos de este tipo de cónicas, es decir, $\overline{FQ} = \overline{QQ'}$. Por otro lado, para el punto P podemos afirmar lo mismo que para Q puesto que también es un punto de la parábola; esto es, $\overline{PF} = \overline{PP'}$, por lo que el triángulo FPP' es un triángulo isósceles y la bisectriz correspondiente al vértice P pasará por el punto medio del segmento $\overline{FP'}$ y es perpendicular a dicho segmento. Por consiguiente, para cualquier punto Q de la bisectriz tendríamos $\overline{QP'} = \overline{QF} = \overline{QQ'}$, lo cual es imposible ya que Q' es el único punto de la directriz de la parábola para el que se cumple que la distancia a Q es mínima.

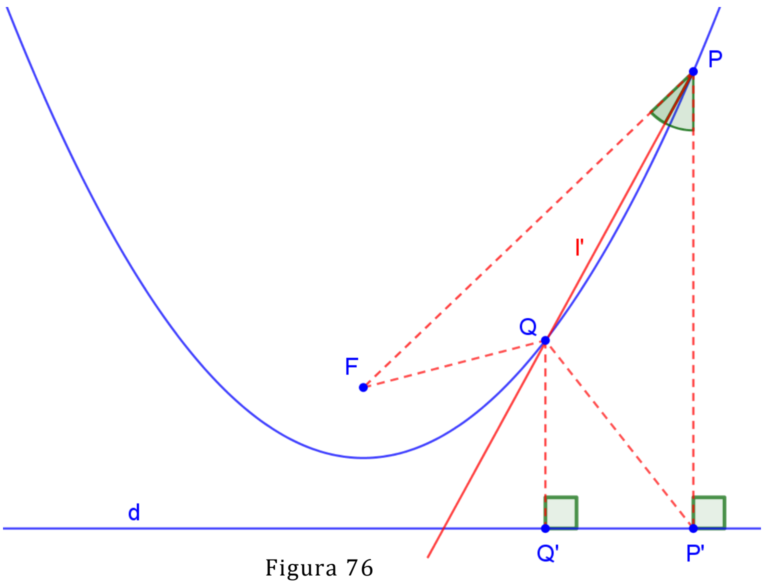


Figura 76

Por tanto, la recta tangente a la parábola en el punto P es la bisectriz del ángulo formado por los puntos F, P y P', como queríamos demostrar.

3.5.7.- RELACIÓN ENTRE EL FOCO DE UNA ELIPSE Y LAS CUERDAS QUE PASAN POR DICHO FOCO

Supongamos una elipse definida por sus ejes y con focos F_1 y F_2. Tomemos la cuerda que pasa por los puntos P y Q y que contiene además al foco F_1. Las rectas tangentes a la elipse en los puntos P y Q se cortan en el punto R, tal y como se puede apreciar en la figura 77. Entonces, se puede demostrar que el punto R es el centro de la circunferencia exterior al triángulo F_2PQ y que el foco F_1 es el punto de tangencia de la circunferencia con el segmento $\overline{PQ}$. Veámoslo.

Debido a la propiedad óptica de las elipses vista anteriormente en el punto 2.4.1., las rectas que pasan por los puntos P y R, y Q y R, son las bisectrices de los ángulos exteriores al triángulo F_2PQ. Por lo tanto, R es el centro de una circunferencia. Pero, ¿cuál es el punto de tangencia? Supongamos que sea un punto distinto a F_1 y que denotamos por F_1'.

Este último punto, F_1', dividirá al perímetro del triángulo F_2PQ en dos partes iguales puesto que se cumplirá que $\overline{F_2P} + \overline{F_1'P} = \overline{F_1'Q} + \overline{QF_2}$

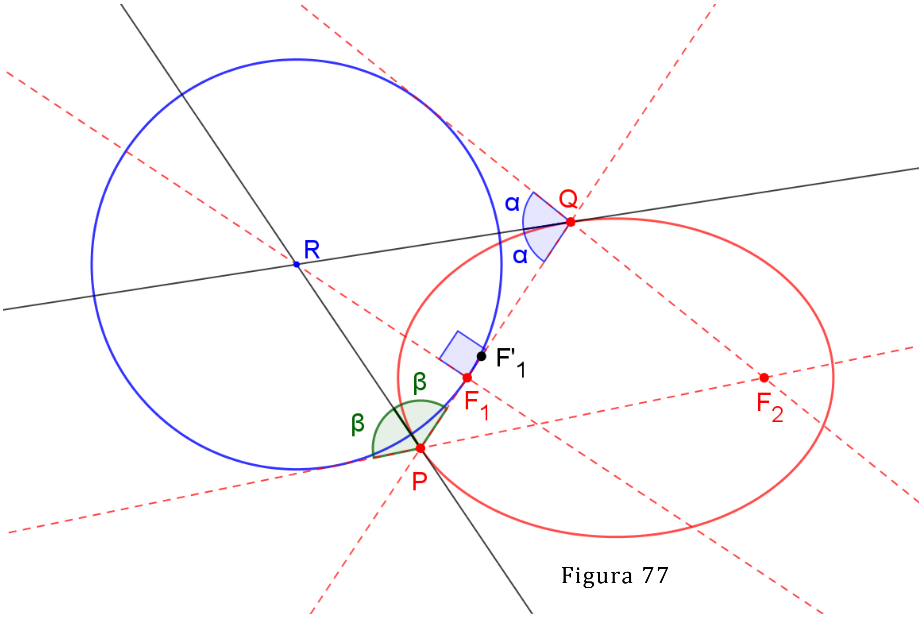


Figura 77

Y, por otro lado, el punto F_1, por ser uno de los focos de la elipse, tiene la propiedad que $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{F_1Q} + \overline{F_2Q}$, por lo que, de estas dos últimas ecuaciones deducimos que el punto F_1' coincide con F_1 y sólo puede ser éste el punto de tangencia.

También podemos escribir esta propiedad diciendo que la recta que une uno de los focos de la elipse con el punto de intersección de las tangentes a la elipse en los extremos de una cuerda que contiene al foco, es perpendicular a dicha cuerda.

3.5.8.- PROPIEDAD DE ÁNGULOS IGUALES EN LAS CÓNICAS

3.5.8.1.- En la elipse

Supongamos una elipse definida por sus ejes y cuyos focos son F_1 y F_2. Desde cualquier punto exterior, P, a la elipse, trazamos las tangentes con puntos de tangencia X e Y. Entonces los ángulos F_1PX y F_2PY son iguales.

Para desarrollar esta propiedad nos basamos en la figura 78 en la que hemos situado el simétrico de F_1 respecto de la recta que pasa por P y X, F_1' , y el simétrico de F_2 respecto del eje de simetría que pasa por P e Y, F_2'.

Debido a las simetrías tenemos que:

$$\overline{PF_1} = \overline{PF_1'} \text{ y que } \overline{PF_2} = \overline{PF_2'}.$$

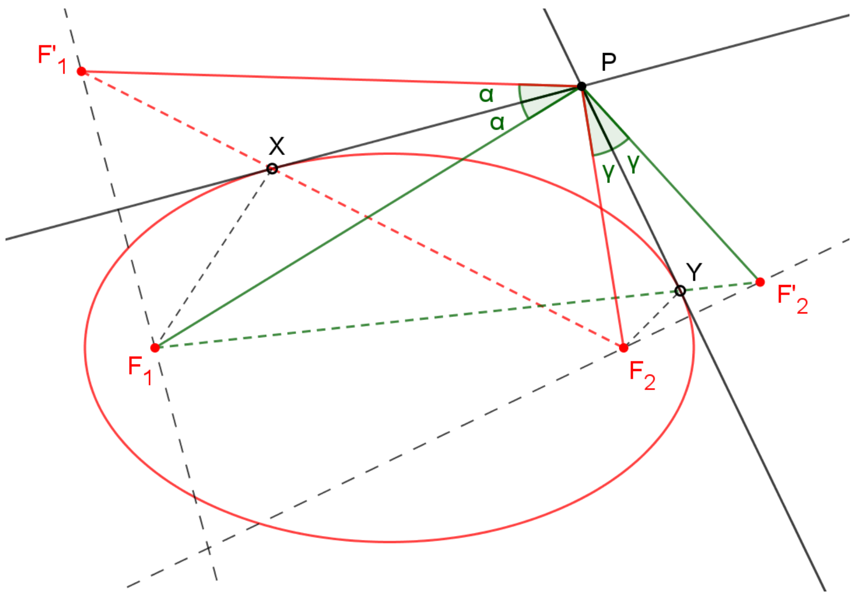


Figura 78

Además, los puntos F_1, Y y F_2' están en la misma línea recta por la propiedad óptica de las cónicas, al igual que los puntos F_2, X y F_1'.

Por consiguiente:

$$\overline{F_2F_1'} = \overline{F_2X} + \overline{XF_1'} = \overline{F_2X} + \overline{XF_1}$$

y por la propiedad de ser puntos de la elipse también se tiene que:

$$\overline{F_2X} + \overline{XF_1} = \overline{F_2Y} + \overline{YF_1}$$

y el lado derecho de la ecuación se puede escribir como

$$\overline{F_2Y} + \overline{YF_1} = \overline{YF_2'} + \overline{YF_1} = \overline{F_2'F_1}$$

es decir que ambos segmentos miden lo mismo:

$$\overline{F_2F_1'} = \overline{F_2'F_1}$$

lo que quiere decir que los triángulos $F_1F_2'P$ y $F_2F_1'P$ son iguales puesto que tienen los tres lados iguales ($\overline{F_2F_1'} = \overline{F_2'F_1}$, $\overline{PF_1} = \overline{PF_1'}$ y $\overline{PF_2} = \overline{PF_2'}$).

Si son iguales los triángulos, el ángulo en el punto P será también igual; es decir:

$$(\measuredangle F_1PF_2) + 2(\measuredangle F_2PY) = (\measuredangle F_2PF_1) + 2(\measuredangle F_1PX)$$

de donde se deduce que:

$$\measuredangle F_2PY = \measuredangle F_1PX$$

que era el resultado al que queríamos llegar.

3.5.8.2.- En la hipérbola

En la hipérbola podrían diferenciarse dos configuraciones diferentes: que los puntos de tangencia estén en la misma rama de la curva o que estén un punto en cada rama. Nos ceñiremos al primero de los casos, por no hacer demasiado tediosa esta propiedad, y dejaremos al estudiante de bachillerato la posibilidad de desarrollar el segundo como ejercicio, sin más que seguir los pasos que voy indicando en el primero.

Apoyándonos en la figura 79 podemos mostrar que la propiedad de los ángulos iguales también se cumple en la hipérbola.

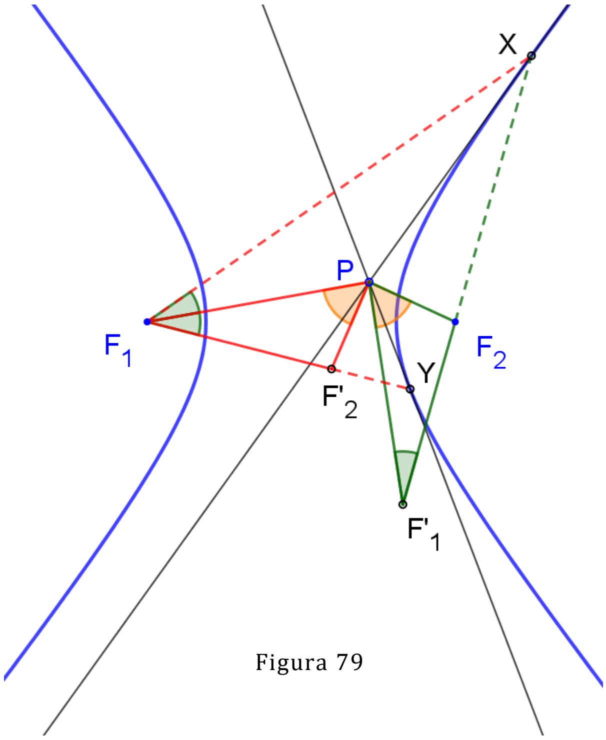


Figura 79

Al igual que antes, debido a las simetrías tenemos:

$$\overline{PF_1} = \overline{PF_1'} \ \text{ y } \ \overline{PF_2} = \overline{PF_2'}.$$

Los puntos F_1, Y y F_2' están alineados, al igual que los puntos X, F_2 y F_1' como consecuencia de la propiedad óptica de las hipérbolas.

Por consiguiente:

$$\overline{F_2F_1'} = \overline{XF_1'} - \overline{XF_2} = \overline{XF_1} - \overline{XF_2}$$

y como tanto X como Y pertenecen a la hipérbola:

$$\overline{XF_1} - \overline{XF_2} = \overline{YF_1} - \overline{YF_2}$$

que también podemos escribir como

$$\overline{YF_1} - \overline{YF_2} = \overline{YF_1} - \overline{YF_2'} = \overline{F_1F_2'}$$

es decir, que:

$$\overline{F_2F_1'} = \overline{F_1F_2'}$$

lo que nos conduce a poder afirmar que los triángulos $F_1F_2'P$ y $F_2F_1'P$ son iguales puesto que tienen tres lados iguales:

$$\overline{F_2F_1'} = \overline{F_1F_2'}, \quad \overline{F_2P} = \overline{F_2'P} \quad \text{y} \quad \overline{F_1'P} = \overline{F_1P}$$

por lo que el ángulo en el punto P también será igual en ambos triángulos. Es decir:

$$\measuredangle F_2PY = \ \measuredangle F_1PX,$$

como queríamos demostrar.

3.5.9.- CIRCUNFERENCIA FOCAL Y PRINCIPAL EN LAS CÓNICAS

Tanto la elipse como la hipérbola también se pueden definir como el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un foco y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

La circunferencia focal, como su propio nombre indica, es la que tiene su centro en uno de los focos de la cónica y radio el eje mayor. Y, por tanto, ambas cónicas tienen dos circunferencias focales.

La circunferencia principal es la que tiene por centro el de la cónica y radio el semieje mayor, caso de la elipse, o el semieje real, caso de la hipérbola. Y se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las rectas tangentes.

En el caso de la parábola, la directriz de la curva hace de circunferencia focal, en este caso de radio infinito. Por ello, la directriz es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco respecto de la tangente.

Y la tangente en el vértice hace de circunferencia principal, por lo que también se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por el foco a cada una de las rectas tangentes.

Veamos, como aplicación práctica, cómo podemos demostrar la definición nueva dada para la elipse: **lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un foco y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco**. Es decir, vamos a demostrar que para todo punto P perteneciente a la elipse, la circunferencia con centro en P, Cp, y que pasa por el foco F_1 de la elipse, es tangente a circunferencia CF_2 con centro en el otro foco de la elipse, F_2 (observar la figura 80). Se procede de la siguiente forma:

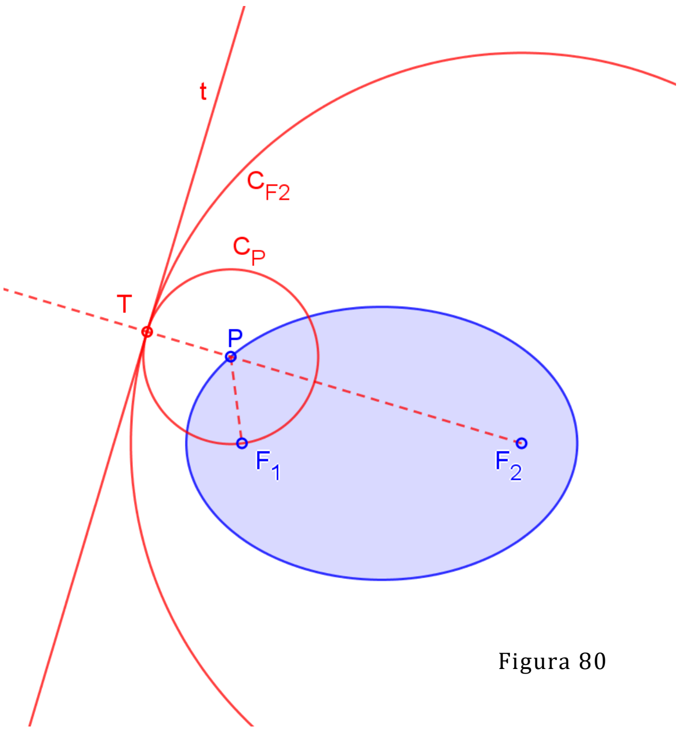


Figura 80

- Primero: tomamos la semirrecta con origen en F_2 y que pasa por P.
- Segundo: seleccionamos el punto T en la semirrecta anterior de forma que diste $|\overline{TF_2}| = 2a$ del punto F_2, que es equivalente a decir que T pertenece a la circunferencia focal CF_2.
- Tercero: como el punto T pertenece a la circunferencia CF_2 se cumplirá que:

$$|\overline{TP}| = |\overline{TF_2}| - |\overline{PF_2}|$$

y $|\overline{TF_2}| = 2a$ por definición del punto T, por lo que:

$$|\overline{TP}| = 2a - |\overline{PF_2}|$$

y como P es un punto de la elipse pues cumplirá que:

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$$

por lo que nos quedará que:

$$|\overline{TP}| = |\overline{PF_1}|$$

de donde podemos deducir que T también pertenece a la circunferencia Cp.

- Cuarto: como el punto T pertenece a ambas circunferencias y también pertenece a la semirrecta que partiendo de F_2 pasa por P y T, entonces la recta ortogonal a dicha semirrecta en el punto T es la recta tangente "t" a ambas circunferencias, por lo que las circunferencias Cp y CF_2 también son tangentes en el mismo punto T.

Y ahora vamos a demostrar la implicación en el otro sentido, es decir, que si las circunferencias Cp y CF_2 son tangentes en un punto T entonces el punto P pertenece a la elipse. Para ello partimos de la misma configuración dibujada en la figura 74 y procedemos como sigue a continuación:

- Primero: Sea "t" la recta tangente en el punto T a las circunferencias Cp y CF_2. La recta perpendicular a dicha tangente por el punto T pasará por los centros de dichas circunferencias, es decir, pasa por P y por F_2. Por consiguiente, T, P y F_2 están alineados.
- Segundo: por definición, el radio de la circunferencia focal CF_2 es el eje mayor de la elipse, es decir:

$$|\overline{TF_2}| = 2a \qquad (1)$$

y, por otro lado, el segmento $\overline{TF_2}$ se puede descomponer como:

$$\overline{TF_2} = \overline{TP} + \overline{PF_2}$$

Como $|\overline{TP}| = |\overline{PF_1}|$ que es el radio de la circunferencia Cp, podemos escribir entonces que:

$$|\overline{TF_2}| = |\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| \qquad (2)$$

Por consiguiente, de las ecuaciones (1) y (2) se tiene que:

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$$

Es decir que la suma de las distancias desde el punto P a los focos es una constante y vale 2a y, por tanto, P es un punto de la elipse, tal y como queríamos demostrar.

Y, por último, vamos a realizar la demostración de que la circunferencia principal (Cp) también se define como el **lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las rectas tangentes**.

Si observamos la figura 81, basta con demostrar que el punto H pertenece a la circunferencia principal, Cp, siendo H el punto de intersección de la recta, t, tangente a la elipse en el punto M y la recta perpendicular a la tangente que pasa por el foco F.

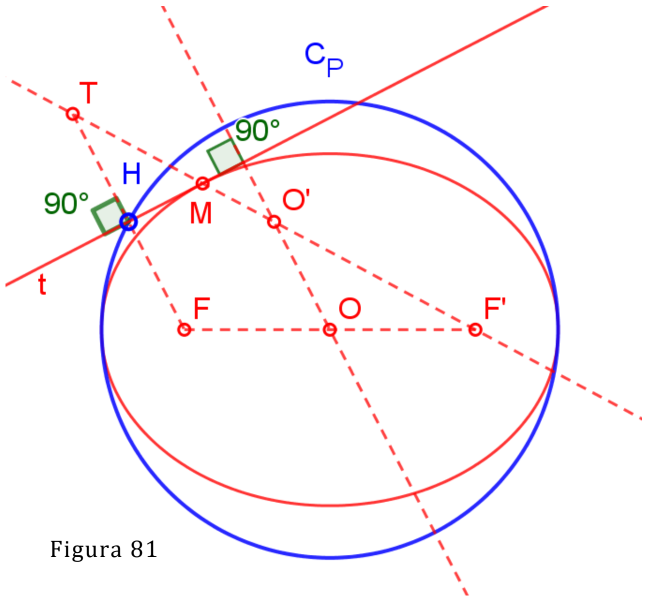


Figura 81

Para demostrar que el punto H pertenece a la circunferencia principal podemos seguir dos procedimientos:

- Uno, más farragoso por las expresiones algebraicas que se deben manejar, que consiste en calcular la intersección de las dos rectas citadas anteriormente.
- Otro, mucho más rápido y comprensible, mediante la aplicación del teorema de Tales, que es el que se va a desarrollar.

Fijémonos en los siguientes puntos de la figura 81:

- T: punto simétrico de F con respecto a la simetría axial de eje la tangente t.
- M: punto de tangencia de la tangente t a la elipse
- F, F': focos de la elipse
- O: centro de la elipse

Por las propiedades vistas anteriormente en este capítulo, sabemos que T, M y F' están alineados, y que al ser M un punto de la elipse se cumple que,

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = 2a$$

Y también que, como T es el simétrico de F:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{MT} + \overline{MF'} = \overline{TF'} = 2a$$

Si trazamos por el punto O una recta perpendicular a la recta tangente t, obtendremos el punto O' como intersección de dicha perpendicular con la recta que pasa por los puntos T, M y F'.

Tenemos entonces la siguiente configuración (figura 82) y por el teorema de Tales podemos expresar que, como O es el punto medio del segmento $\overline{FF'}$, y $\overline{OO'}$ es paralelo a $\overline{TF}$:

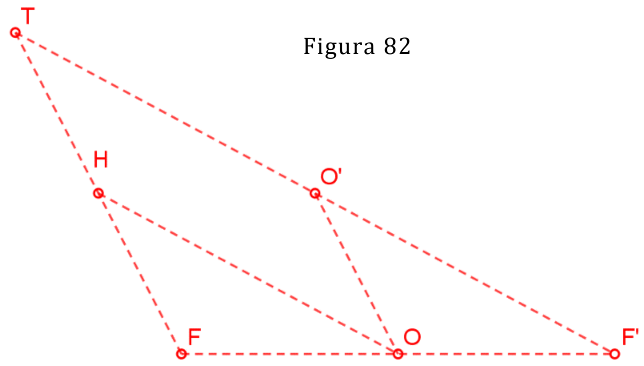


Figura 82

$$\overline{TO'} = \overline{O'F'} = a$$

Si trazamos ahora el segmento $\overline{HO}$, como H es el punto medio de $\overline{TF}$ y O es el punto medio de $\overline{FF'}$, $\overline{HO}$ es paralelo a $\overline{TF'}$ y, por consiguiente, se cumple que:

$$\overline{HO} = \overline{TO'} = a$$

Es decir, que el punto H se encuentra a una distancia a del centro de la elipse, por lo que pertenece a la circunferencia que tiene su centro en O y radio a, que es, precisamente, la circunferencia principal Cp. Y, por tanto, el pie de la perpendicular trazada por el foco a recta tangente pertenece a Cp, como queríamos demostrar.

3.5.10.- FICHA DE ACTIVIDAD SOBRE CÓNICAS

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL TEMA 5
Cónicas. Obtención. Clases. Definiciones. Elementos. Ecuaciones canónicas. Propiedades fundamentales. Otras propiedades menos conocidas y aplicación a la resolución de problemas.
PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO
Se trata de realizar ejercicios y problemas de cónicas mediante un desarrollo paralelo de una resolución analítica y gráfica a un grupo de 30 alumnos de segundo de bachillerato. Suponemos un grupo homogéneo en el que no necesitamos realizar adaptaciones curriculares al no figurar entre los alumnos ninguno con necesidades educativas especiales. Para fomentar el trabajo en equipo, se trabajará la resolución de los ejercicios en grupo de tres alumnos en el aula, finalizando los mismos de forma individual, cada uno de ellos, en sus respectivos domicilios, como si de una tarea para casa (TPC) se tratara. Por último, se propondrá a los alumnos una serie de ejercicios y problemas para su resolución de forma individual.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS
▪ Definición rigurosa de cónica o sección cónica. ▪ Distinción de los diferentes tipos de cónicas y clasificación en función de la posición del plano que intersecta al cono. ▪ Identificación de las cónicas: definición, elementos, relación fundamental, ecuación reducida y propiedades más importantes. ▪ Representación gráfica de las cónicas y de sus elementos principales. ▪ Utilización de los medios tecnológicos adecuados para representar y analizar los diferentes tipos de cónicas. ▪ Aplicación del concepto lugar geométrico en la resolución de los diferentes problemas asociados a las cónicas.

- Emplear el croquis y la perspectiva a mano alzada como medio de expresión gráfica en la resolución de ejercicios y problemas.
- Resolver problemas de tangencias aplicando las propiedades de las cónicas, indicando los puntos de enlace y la relación entre sus elementos.
- Relacionar y comprender las propiedades de las cónicas en las diferentes ciencias y en la naturaleza (astronomía, cinemática, dinámica, óptica, telecomunicaciones…)

NECESIDAD DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Conocer y manejar el sistema de referencia de coordenadas cartesianas. Bases ortogonales y ortonormales.
- Vectores libres en el plano. Operaciones con vectores. Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores.
- Ecuaciones de la recta: pendiente, ordenada en el origen, intersección con los ejes cartesianos.
- Fundamentos de la geometría métrica plana: distancias y ángulos.
- Lugares geométricos básicos del plano: mediatriz, bisectriz, circunferencia…

CONTENIDOS

- Elipse: elementos, relación fundamental, ecuación y propiedades fundamentales.
- Hipérbola: elementos, relación fundamental, asíntotas, ecuación y propiedades fundamentales.
- Parábola: elementos, ecuación y propiedades fundamentales
- Circunferencia principal y circunferencia focal en las cónicas.
- Propiedades ópticas de las cónicas.
- Propiedad de igualdad de ángulos en las cónicas.
- Tangencias y puntos de intersección con una recta.
- Relación entre el foco de una elipse y las cuerdas que pasan por dicho foco.
- Curvas cónicas como proyecciones de una circunferencia.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE EVALUACIÓN

- Identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos usuales, estudiando las ecuaciones reducidas de las cónicas y analizando sus propiedades métricas.
- Utilizar los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de cónicas.
- Resolver problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico, utilizando las características fundamentales de las cónicas.
- Interpretar de forma adecuada las diferentes clases de cónicas razonando las distintas ubicaciones posibles en las que un plano puede cortar a un cono.
- Resolver problemas de tangencias de forma aislada o insertados en la definición de una figura mediante la aplicación de las propiedades de las cónicas, indicando gráficamente las propiedades y la relación entre sus elementos.
- Emplear el vocabulario y la notación adecuadas para la descripción de las diferentes situaciones en las que se cortan una superficie de revolución cónica y un plano.
- Conocer el significado de lugar geométrico, identificando los lugares más usuales en geometría plana, así como sus características, y saber deducir las expresiones analíticas de las mismas.

RECURSOS DIDÁCTICOS

- Libros de texto, apuntes de clase y otros documentos recomendados por el profesor de entre una bibliografía.
- Útiles de dibujo técnico habituales: regla, escuadra, cartabón, compás y transportador de ángulos, lápices de diferentes colores, folios blancos DINA4.
- Pizarra convencional y empleo de tizas de yeso de diferentes colores.
- Pizarra digital inteligente y uso de rotuladores de distintos colores.
- Utilización del software Geogebra en los diferentes ejercicios propuestos.
- En algún caso particular pueden desarrollarse pequeñas maquetas mediante el empleo de cartón, cartulinas, tijeras, pegamento…

- Exposición de diferentes fenómenos de la naturaleza (movimientos planetarios, construcción de antenas de telecomunicación, fabricación de lentes en instrumentos ópticos, etc.) y relación con las propiedades de las cónicas.

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Dada la elipse $4x^2+9y^2=36$, determinar el valor de sus semiejes, semidistancia focal, excentricidad, focos y vértice.
- Hallar la ecuación de la elipse centrada en el origen de coordenadas si un foco está en F (0,-6) y el valor de la excentricidad es e=0,6.
- Razona y contesta eligiendo la respuesta adecuada:
  La elipse $2x^2+y^2-4x-4y=0$ verifica que:
  A. Su centro es el punto C (1,2)
  B. Su eje mayor es paralelo al eje X.
  C. Su excentricidad vale $\sqrt{3}$.
  D. Pasa por el punto P (2,4).
- ○ Dada la expresión analítica de la elipse $3x^2+2y^2+18x-8y+29=0$ calcular: los valores de los semiejes, de la distancia focal, la posición de los focos y los vértices. Dibuja la elipse mediante el software Geogebra y señala todos sus elementos.
- ○ Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto A(-1,0) sea la mitad de la distancia a la recta r: x=2.
- Dada la ecuación de la hipérbola $x^2-9y^2=9$, determinar el valor de sus semiejes, semidistancia focal, excentricidad, focos y vértice.
- Calcular la ecuación de una hipérbola si 3y-4x=0 es una asíntota, F (0,10) es un foco y el eje imaginario es paralelo al eje Y.
- Expresa la ecuación canónica de la hipérbola que:
  a) Su excentricidad vale 1,5 y el semieje real es 4.
  b) Un foco está situado en F (2,0) y pasa por P (2,3).
- Determinar la parábola con vértice en V (-2,4), eje paralelo al eje Y, y la distancia entre su foco y su directriz es de 3 unidades.
- Dada la hipérbola x2-y2-2y-2=0, dibújala, y calcula el centro, los semiejes, la semidistancia focal, los focos, los vértices y la excentricidad. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola que tiene los mismos elementos, pero cuyo centro es el origen de coordenadas?
- ○ Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano P (x, y) que verifican que el producto de las distancias a las rectas r: y=2x y s: y= -2x es 5.
- Para las siguientes parábolas, halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz:
  a) $y^2=10x$
  b) $x^2=2y$
  c) $(y-1)^2=8(x-1)$
  d) $x^2=-3y$
- Dada la parábola $y^2-2y-4x+9=0$:
  a) Calcula su foco y directriz, y dibújala.
  b) Calcula la abscisa del punto cuya ordenada es y=5 y comprueba que la distancia de este punto al foco coincide con la distancia a la directriz.
- ○ Reconocer y clasificar las cónicas dadas por las siguientes expresiones analíticas:
  a) $x^2+10y^2=10$
  b) $y^2+2y-2x-3=0$
  c) x^2+y2-2y+5=0
  d) $3x^2-2y^2-6x-8y-11=0$
- ○ Calcular la ecuación de la tangente a la hipérbola $x^2/16-y^2/9=1$ en el punto P (5,9/4). Calcular también la recta normal a la curva en ese punto y representa las tres funciones gráficamente.

- ○ Nota. - Los ejercicios marcados con esta simbología son de un grado de dificultad superior.

4.- CONCLUSIONES.

Es importante prestar atención al proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y, en particular, de la Geometría. Pero no es menos interesante analizar las dificultades de aprendizaje que nos encontramos en los alumnos cuando se imparte dicha materia y los obstáculos para enseñar con los que se topan los docentes.

Un resumen de las dificultades más importantes podría ser el siguiente:

1. Insuficientes libros de texto para la impartición de los contenidos y procedimientos mínimos necesarios para que los alumnos alcancen los estándares de aprendizaje definidos en el currículo, aunque sí existen numerosos libros (convencionales y digitales) y páginas web en internet de ejercicios y problemas resueltos.
2. Los contenidos del currículo son muy amplios y el tiempo programado para su impartición es muy ajustado. La realidad en las aulas, que requiere una adecuada atención a la diversidad de todos sus alumnos, transforma ese ajuste en una planificación prácticamente imposible de cumplir en la mayoría de los casos.
3. No parece del todo acertada la manera de presentar la Geometría a jóvenes estudiantes cuando se hace desde un punto de vista puramente axiomático. Muchos de dichos axiomas están mal enunciados; otros realizan implicaciones en ambos sentidos, como si fueran condiciones necesarias y suficientes, cuando solamente se cumple una de dichas condiciones; algunos, ni especifican el principio o teorema que aplican; y, la gran mayoría de ellos, sin explicaciones analíticas o, al menos, referencias a dichas demostraciones para que el alumno pueda completar voluntariamente un aprendizaje mucho más profundo.
4. En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría no existe un enfoque interdisciplinar porque, además de la falta de tiempo y la rigidez de los programas, en un ya más que apretado currículo, existe el recelo de muchos profesores a emplearlo: los matemáticos, por su falta de destreza manual para el dibujo, y los de dibujo, por el olvido o desconocimiento de expresiones geométricas elementales y por la falta de interés en transmitir un enfoque analítico de los dibujos geométricos.
5. En la clase se establece poca relación entre la Geometría y las otras partes de las Matemáticas y los profesores tienen gran dificultad para plantear situaciones y actividades donde se vinculen conceptos geométricos con otras áreas del conocimiento, como el Arte, la Historia, la Física, etc.

6. Ligada con la anterior, coincido con la perspectiva de plantear la Geometría de un modo dinámico, mediante el uso racional de las TIC y en conexión con nuestro entorno más cercano, la vida cotidiana, la historia y el arte.
7. Cuando nos estamos refiriendo a una figura o cuerpo geométrico, nos limitamos a presentar sólo dibujos en la pizarra digital (visitando páginas webs, proyectando presentaciones preparadas, etc.) o realizando pequeños gráficos en la pizarra convencional. Sería recomendable el empleo de recursos manipulativos (geoplanos, figuras geométricas, esferas de Dandelin…) que mitiguen la escasez o falta de perspectiva visual y espacial de algunos alumnos, e incluso, de algunos profesores.
8. Inexperiencia y falta de formación del profesorado en la aplicación de las nuevas tecnologías. Si disponemos de todos los medios, pero no sabemos qué hacer con ellos, no estaremos cumpliendo con el objetivo prioritario, formar a nuestros alumnos mediante el uso del medio informático.
9. Las experiencias con TIC en el ámbito de la Geometría se limitan a actividades propuestas orientadas a la visita de determinadas páginas web, y a buscar, ampliar o relacionar información extraída de Internet. Las WebQuest cuentan con pocos adeptos, aunque a medida que el profesorado comienza a usarlas, incrementa tanto su motivación como la del alumnado.

Ahora bien, no todo son inconvenientes, pudiendo resaltarse las siguientes ventajas:

1. El doble enfoque de la geometría favorece la motivación e interés del alumnado, en general, y permite aprendizajes mucho más amplios y profundos a aquellos alumnos que lo demandan.
2. El uso de herramientas tecnológicas, como el software Geogebra, facilita una enseñanza interactiva, dinámica, participativa y colaborativa, en el momento en el que el alumno puede mantener un feedback con el ordenador, corrigiendo los errores de manera inmediata y trabajando junto a un grupo de compañeros que tienen un objetivo común y compartido.
3. El manejo de las TIC, como recurso básico para un enfoque global de la geometría, permite acceder a mayor cantidad de información y de forma más rápida. Además, se tiene la posibilidad de almacenar y recuperar dicha información. Los documentos y programas educativos pueden guardarse en la propia memoria de los ordenadores o portátiles, en unidades externas (básicamente en pendrive ya que el CD-ROM está en desuso), o en la nube (Google Drive, Dropbox, iCloud…), ocupando un espacio mínimo a pesar de tener cientos de páginas almacenadas.

4. Permite el aprendizaje por simulación, en el momento en el que, gracias a la tecnología, somos capaces de mostrar situaciones inverosímiles en la realidad, bien por su peligrosidad, bien por nuestras limitaciones visuales u otras.
5. La enseñanza multidisciplinar de la geometría ayuda a mejorar la calidad educativa, ya que permite adaptarse a distintos ritmos de aprendizaje dando a cada alumno lo que necesita. Esto favorecerá el rendimiento de los mismos, viéndose altamente beneficiados.
6. La enseñanza de la geometría desde una doble vertiente despierta el interés y motivación del profesorado para formarse en las nuevas tecnologías. La necesidad de trabajar con el ordenador en el aula hace que el profesorado esté en un reciclaje constante y una actitud abierta para manejar nuevos softwares específicos y nuevas formas de trabajo colaborativo entre colegas con los mismos objetivos y necesidades.
7. Las TIC en Geometría no pueden ni deben sustituir la figura del docente, sino que debemos considerarlas como un recurso que nos va a ayudar en nuestra labor docente gracias a la reducción del tiempo que hay que dedicarle a la materia para su impartición, al trabajo interdisciplinar, al desarrollo de actividades fuera del horario lectivo, al autoaprendizaje y a la visión espacial que las TIC ofrecen. Las TIC deben incorporarse a las Matemáticas en un porcentaje adecuado que sea fruto de la reflexión, adecuado a las necesidades de los alumnos y a las posibilidades del centro y del profesorado.
8. Mediante el empleo de Geogebra podremos comprobar las innumerables características y propiedades de los trazados en el plano, de las tangencias, de las cónicas… ya que el estudio geométrico convencional de estos temas no permite al alumno tales descubrimientos ya sea por falta de capacidad, por falta de medios o por falta de tiempo.
9. El enfoque interdisciplinar de la geometría permite justificar con rigor todos los procedimientos utilizados en los temas correspondientes del bloque de "geometría y dibujo técnico" de la asignatura dibujo técnico de segundo de bachillerato.

5.- BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

5.1.- LEGISLACIÓN

- LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.
- ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.
- ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

5.2.- LIBROS DE TEXTO

- Dibujo Técnico II 2º bachillerato. F. Javier Rodríguez de Abajo, Víctor Álvarez Bengoa, Joaquín Gonzalo Gonzalo. Editorial Donostiarra. 2011.
- Dibujo Técnico I 1º bachillerato. F. Javier Rodríguez de Abajo, Víctor Álvarez Bengoa. Editorial Donostiarra. 2008.
- Matemáticas I 1 bachillerato. Fernando Alcaide, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano, Luis Sanz. Editorial SM. 2015.
- Dibujo Técnico y Matemáticas: una consideración interdisciplinar. Julián Aguirre Estibález, Eduardo Artamendi Franco, Isabel García García, Alfonsa García López, Antonio Nevot Luna, Javier Peralta Coronado, Roberto Rodríguez del Río, Jaime Santa Cruz Astorqui, Fernando Valero Burguete. Secretaría General Técnica, Subdirección General de Información y Publicaciones, Ministerio de Educación y Ciencia. 2008.
- Curso de geometría métrica, tomo I Fundamentos. Pedro Puig Adam. 15ª edición. 1980.
- Geometry of Conics. A. V. Akopyan, A. A. Zaslavsky. AMS American Mathematical Society. 2007.
- El Cálculo. Louis Leithold. Oxford University Press. 7ª edición. 1998.
- Geometría analítica. Charles H. Lehmann. Noriega editores. Editorial Limusa. 1989.
- Problemas de oposiciones. Matemáticas. Tomo 5 (2006 a 2012). Braulio de Diego Martín, Agustín Llerena Achútegui, Francisco José Baena Muñoz, María Belén Rodríguez Rodríguez, José Manuel Gamboa Mutuberría, José María Lorenzo Magán, Bruno Salgueiro Fanego. Editorial Deimos. 2013.
- Didáctica de las Matemáticas. Volumen II. Goñi Zabala, Jesús María; Penalva Martínez, M. Carmen; Llinares Ciscar, Salvador; Valls González, Julia; López-Goñi, Irene; Corbalán Yuste, Fernando; Giménez Rodríguez, Joaquín; Planas Raig, Nuria; Vanegas Muñoz, Yuly Marsela. Editorial Graó. 2011.

5.3.- TESIS DOCTORALES Y TRABAJOS FIN DE MÁSTER

- Tesis doctoral "Análisis de los conocimientos geométricos preuniversitarios y su influencia en la formación de los alumnos de las escuelas técnicas. Tomo I." Luis Méndez Valentín. 1996.
- Tesis doctoral "Metodología didáctica para enseñanzas de geometría descriptiva basada en un tutor-evaluador y en un generador de ejercicios integrados en un entorno de propósito constructivo general." Antonio María Carretero Díaz. 2001.
- Tesis doctoral "Enseñanza de la geometría con TIC en educación secundaria obligatoria." Adoración Peña Mecina. 2010.
- Trabajo fin de máster "Educación interdisciplinar en las asignaturas de Dibujo Técnico y Matemáticas." Gloria Mazo Olarte. Universidad de La Rioja. 2015.

5.4.- OTRAS PUBLICACIONES

- Construcciones geométricas: una experiencia interdisciplinar de autoformación. María Jesús Luelmo. 1997.
- Enseñar Geometría en Secundaria. Manuel Barrantes López, Idalgo Balletbo Fernández, Miguel Ángel Fernández Leno. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. 2014.

5.5.- REFERENCIAS DE INTERNET

- https://www.sangakoo.com/
- http://trazoide.com/
- http://calculo.cc/temas/temas_geometria_analitica/recta/ind_recta.html
- https://es.wikipedia.org/wiki/Secci%C3%B3n_c%C3%B3nica
- https://es.wikipedia.org/wiki/Esferas_de_Dandelin.
- https://albeniz-4-matematicas.wikispaces.com/Ejercicios+resueltos+4%C2%BA+ESO+matem%C3%A1ticas+Academicas