Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL

GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

TRABAJO FIN DE GRADO

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS. INTERVENCIÓN SOBRE LA DIVISIBILIDAD A TRAVÉS DE PIEZAS LEGO E INICIACIACIÓN A LA MAGIA MATEMÁTICA.

Presentado por NOEMI ÁLVAREZ OTERO

Dirigido por MARIA DEL CARMEN MARTÍN YAGÜE

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es conseguir que los alumnos tengan una visión diferente de las matemáticas, y a su vez despertar su interés hacia estas. Para ello, me he centrado en los números primos y compuestos, múltiplos y divisores, mínimo común múltiplo y máximo común divisor; todo ello desarrollado y explicado con material manipulativo, más específicamente con piezas Lego. Este trabajo, ha sido desarrollado en un aula de 6º de Primaria, donde a través de dos controles, uno antes de iniciar las sesiones y otro al finalizar las sesiones, he analizado los resultados de los alumnos, así como su disposición durante las sesiones. El trabajo en el aula ha constado de cuatro sesiones prácticas donde los alumnos, mediante piezas Lego, asimilaban conceptos sobre los números primos y compuestos y los ponían en práctica.

Por otra parte, se llevó a cabo una sesión práctica en el mismo aula sobre la visión lúdica en la matemáticas, más específicamente sobre la divisibilidad del 9. En esta sesión llevé a cabo una serie de trucos de magia de la divisibilidad del 9, donde los propios alumnos eran los protagonistas, y donde ellos veían que las Matemáticas no solo se encuentran expuestas en un libro de forma monótona.

PALABRAS CLAVE

Matemáticas, números primos, números compuestos, aprendizaje, material manipulativo, divisibilidad, Educación primaria.

ABSTRACT

The purpose of this work is to get the students have a diferent vision of mathematics and the curiosity in them. For it, I put attention in prime numbers, compound numbers, multiples, dividers, maximun common divider and minimum common multiple. All of, it is explained and developed with manual or manipulative materials, specific with Lego pieces. This work had been developed in one class of sixth grade of elementary school, where I analyzed the results and the provision during the sessions throught two exams, one of them before the content was explained and the other at the end of explained. The work with the students has entered of four practical sessions where the students throught Lego pieces assimilated the concepts and put it into practise.

On the other hand, I perform other practical session on the same classroom about playful vision of Mathematics, specific about divisibility of the number nine. In this sesion I did some magic tricks and the students are the protagonist of them and they can see the Mathematics can appear on more ways then in a monotonous book.

KEYBOARDS

Mathematics, prime numbers, compound numbers, learning, manipulative material, divisibility.

INDICE

1. INTRODUCCIÓN.

El presente Trabajo Fin de Grado se encuentra destinado a realizar una investigación sobre la introducción de los números primos y la divisibilidad con material manipulativo. También se centra en cómo la divisibilidad del número puede unirse a una actividad lúdica como la magia.

Para ello me he basado en la introducción de material manipulativo en la enseñanza de las matemáticas en el curso de 6º de Educación Primaria, rompiendo las barreras de la escuela tradicional, porque hay estudios que demuestran que hay personas que tienen temor por las matemáticas y esto se debe a que no ha despertado en ellos ningún tipo de interés o nadie ha hecho que les despierte interés. Utilizando material manipulativo se ven las matemáticas de otra forma y a partir de ello se pueden anclar conocimientos abstractos.

Teniendo en cuenta lo anterior he desarrollado un trabajo experimental que consiste en la introducción de los números primos y compuestos mediante piezas Lego; este se ha llevado a cabo en el aula de 6ºB de Educación Primaria del Colegio Santa María La Real De Huelgas. Su puesta en práctica constaba de 6 sesiones dedicadas a los números primos y compuestos con material manipulativo, y 1 sesión dedicada a la introducción de magia con la divisibilidad del número 9.

He dividido el documento en varias partes. En una primera parte se hace un recorrido histórico por matemáticos que tuvieron un gran interés por los números primos, y descubrieron diversos métodos para averiguar números primos que todavía utilizamos hoy en día.

Una segunda parte trata sobre la importancia que tienen los números primos y la divisibilidad en nuestra vida cotidiana, para qué se utilizan y porqué se les da tanta importancia.

La tercera parte consiste en el desarrollo de las ventajas de utilizar material manipulativo en el aula, es decir, qué beneficios se obtiene en el alumnado cuando utilizamos material manipulativo, así como porqué debemos utilizarlo.

Finalmente se encuentra desarrollado el trabajo experimental al completo así como los resultados obtenidos, y las conclusiones obtenidas tras finalizar las sesiones llevadas a cabo.

Por otro lado, realicé una sesión de introducción de la visión lúdica en Matemáticas, enfocada en la divisibilidad del 9, a los mismos alumnos con los que previamente había desarrollado la Unidad Didáctica de los números primos. Esta sesión está basada en diferentes trucos de magia con la divisibilidad del 9, donde los alumnos vuelven a romper las barreras del aprendizaje tradicional. Al realizar los diversos trucos de magia, se despierta un gran interés por parte de los alumnos de saber cómo se realizan esos trucos de magia y porqué se obtienen siempre esos resultados.

2. JUSTIFICACIÓN.

Este trabajo de fin de grado está basado en el área de Matemáticas, y más concretamente en la utilización de material manipulativo, porque durante el transcurso de unas prácticas en un aula de 6º de Educación Primaria, observé que los alumnos veían las Matemáticas como algo abstracto, sin aplicación en la vida real. Muchos alumnos las temían, no querían que llegara la hora de Matemáticas, y al preguntarles su respuesta era que no se les daban bien y no las entendían.

Por ello, decidí que mi trabajo se iba a basar en intentar cambiar esa percepción que algunos de los alumnos tenían sobre las matemáticas; para ello quise hacerles ver que el mundo de las matemáticas no es tan abstracto sino que puede ser mucho más accesible, manipulativo y dinámico.

El elegir el tema de los números primos y compuestos fue debido a que, dentro de los distintos tipos de números, me resultaban los más atractivos para hacer llegar a los alumnos, debido a su abundante información o lo curioso que resultan en nuestro día a día.

La utilización de piezas Lego para explicar los números primos y compuestos, me parece una forma muy positiva para llamar la atención de los alumnos, ya que a estos les gusta salirse de lo común, investigar y hacer prácticas diferentes a lo que hacen en el día a día.

La magia con la divisibilidad del 9, me pareció un tema acorde con lo visto anteriormente de números primos y compuestos, y sus múltiplos y divisores. Así los alumnos pudieron ver otra forma de entender las matemáticas.

3. OBJETIVOS.

3.1. OBJETIVOS GENERALES.

La propuesta general que se presenta a continuación tiene como principal objetivo despertar el interés y la motivación de los alumnos hacia las Matemáticas mediante el material manipulativo. En concreto me he centrado en la comprensión de los números primos y compuestos, así como sus múltiplos y divisores; y el mínimo común múltiplo y máximo común divisor, a través del uso de piezas Lego. Otro objetivo general está enfocado a que los alumnos adquieran y desarrollen la competencia matemática.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

En cuanto a los objetivos específicos del trabajo podríamos dividirlos en varios apartados.

Uno de estos objetivos es que los alumnos entiendan porqué son útiles los números primos, así como los múltiplos y divisores en nuestro día a día, y de esta manera comprendan porqué debemos conocerlos.

El siguiente objetivo es que los alumnos aprendan a diferenciar números primos de números compuestos, saber hallar los múltiplos y divisores, el mínimo común múltiplo y máximo común divisor de varios números; todo ello utilizando piezas lego, y que de esta forma puedan anclar mejor dichos conocimientos y habilidades.

Otro objetivo es intentar despertar el interés por las matemáticas a aquellos alumnos a los que no les gusta esta asignatura, dándoles otra visión de la misma.

4. COMPETENCIAS.

Las competencias básicas que se han llevado a cabo en este trabajo han sido de forma explícita y de forma implícita.

De forma explícita se encuentra la competencia matemática, ya que el trabajo realizado y su puesta en práctica están relacionados con el área de matemáticas. Esta competencia es la capacidad de realizar tareas con éxito, relacionar saberes matemáticos, aplicación de estas a la vida real, etc. Todas ellas puestas en práctica en el aula.

De forma implícita podemos observar diferentes competencias. Una de ellas sería la competencia en comunicación lingüística, esta competencia se da siempre en un aula, ya que el lenguaje es un instrumento para comunicarnos que utilizamos constantemente. Otra sería la competencia para aprender a aprender, que implica que el alumno desarrolle su capacidad para iniciar el aprendizaje y persistir en él, organizar sus tareas y tiempo, y trabajar de manera individual o colaborativa para conseguir un objetivo. Esta competencia hace hincapié en que no hay solo una forma adecuada de hacer las cosas, en este caso de aprender los números primos y compuestos. También aparece de forma implícita la competencia de autonomía e iniciativa personal, donde los alumnos trabajan de forma individual llegando ellos mismos a sus propias conclusiones y a los resultados.

Por otra parte, en el transcurso de mis estudios, he adquirido una serie de competencias generales relacionadas con este trabajo:

1. Dispongo de conocimientos y comprensión para la aplicación de aspectos como:
   - Aspectos de terminología específica en la educación.
   - Características psicológicas, sociológicas y pedagógicas, de carácter fundamental, del alumnado en las distintas etapas y enseñanzas del sistema educativo.
   - Objetivos, contenidos curriculares y criterios de evaluación en relación con los que conforman el currículo de Educación Primaria.
   - Principales técnicas de enseñanza-aprendizaje.
2. Dispongo de competencias que me permiten aplicar los conocimientos de una forma profesional, mediante la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de la educación. Esta competencia se ha desarrollado mediante las siguientes habilidades:

- Capacidad de reconocer, planificar, llevar a cabo y valorar buenas prácticas de enseñanza-aprendizaje.
- Capacidad de analizar críticamente y argumentar las decisiones que justifican la toma de decisiones en contextos educativos.

3. He adquirido habilidades de reunir e interpretar datos esenciales para emitir juicios y reflexiones sobre diferentes temas, mediante:

- Interpretación de datos derivados de las observaciones en contextos educativos para juzgar su relevancia en una adecuada praxis educativa.
- Reflexión sobre el sentido y la finalidad de la praxis educativa.
- Utilización de procedimientos de búsqueda de información.

4. Poseo la capacidad de transmitir información tanto a un público especializado como no especializado.

5. Por último, he desarrollado las habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía. Esto ha implicado el desarrollo de:

- Capacidad de actualización de los conocimientos en el ámbito socioeducativo.
- Adquisición de estrategias y técnicas de aprendizaje autónomo.
- Capacidad para iniciar actividades de investigación.
- Fomento del espíritu de iniciativa y de una actitud de innovación y creatividad en el ejercicio de su profesión.

5. DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS NÚMEROS PRIMOS.

La búsqueda de números primos ha sido y sigue siendo uno de los retos más destacados de la historia de la ciencia. A lo largo de la historia, se han ido creando una serie de conjeturas. Euclides, Fermat, Euler, Gauss, Riemann, etc. son matemáticos importantes en la historia de los números primos, todos ellos buscaron una regla de formación para averiguar que números eran primos, pero ninguno lo consiguió.

Los números primos tuvieron un nacimiento que vino dado con los números naturales, pero se nombraron como "números especiales". Los números naturales podrían entenderse como los números que surgen de inmediato en nuestra mente sin necesidad de reflexión, pero esta deliberación es una tarea más compleja. La introducción de un sistema de numeración es uno de los procesos que requiere grandes esfuerzos mentales al igual que el aprendizaje de la lengua.

Cuando hablamos de números primos nos referimos a ellos como divisores, es decir, decimos que 3 es divisor de 12, o 7 es divisor de 21. Con esto, queremos decir que cuando hablamos de los divisores de un número, como puede ser 20, son 1, 2, 4, 5, 10, 20 ya que al dividirlo obtenemos de resultado un número exacto. El 1 siempre es divisor de todos los números, tanto primos como compuestos; al igual que el propio número, es decir, en el caso anterior 20 es divisor de 20 porque al dividirlo su resultado es un número exacto.

Los números primos son aquellos números que solo son divisibles entre sí mismos y la unidad.

Lo primero que se supo de los números primos es que no podían ser números pares, ya que estos serían divisibles entre 2. Euclides demostró que los números primos eran infinitos, por tanto se encontraban en cuadro de honor de las matemáticas como objeto de estudio.

<u>El hueso de Ishango</u>

Este hueso podría asociarse al del peroné de un babuino, el cual fue encontrado cerca del nacimiento del Nilo, pertenecía a una sociedad tribal que a causa de una erupción volcánica quedó enterrada. Se podría decir que este hueso tiene una antigüedad de aproximadamente 20.000 años.

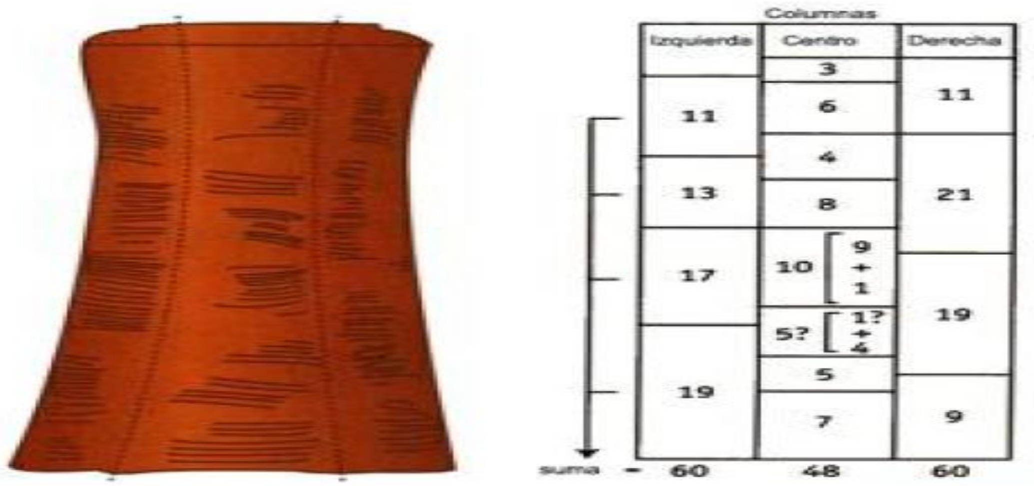

Figura 1, Hueso de Ishango

En el hueso aparecen unas muescas rectilíneas, dichas muescas están divididas en tres columnas, podrían haberlo utilizado como herramienta para realizar cálculos matemáticos, o más bien podría tratarse de un sistema de numeración que les permitiera contar. El orden de las muescas en la columna expone operaciones en un sistema de numeración con base 12. Si observamos la columna de la derecha podemos apreciar que todos los números que la formas son impares, y todos los números de la columna de la izquierda son primos. Esto no podría tratarse de azar ya que los números primos como dijimos anteriormente es un proceso que va más allá de un simple recuento.

<u>La criba de Eratóstenes</u>

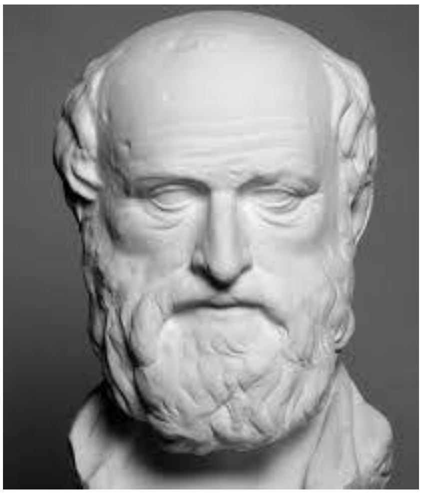
Figura 2. Eratóstenes de Cirene

Eratóstenes de Cirene (273-194 a.c.) era un matemático, astrónomo y geógrafo griego, el cual fue director de la biblioteca de Alejandría. Dicho matemático fue el creador de la conocida "criba de Eratóstenes", la cual está formada por una tabla con números naturales del 1 al 100. Consiste en averiguar todos los números primos comprendidos entre 1 y 100, para ello se tachan los números compuestos, mediante una serie de pasos.

- El primer paso es la eliminación de todos los múltiplos de 2, estos están formados por todos los números pares, excepto el 2.
- El segundo paso consiste en la eliminación de todos los múltiplos de 3.

- El tercer paso consiste en eliminar todos los múltiplos de 5.
- En el cuarto y último paso, eliminamos los múltiplos de 7.

Una vez seguidos estos cuatro pasos, quedarían únicamente sin eliminar números primos. Para averiguar los números primos menores que un número N, se podrían hallar mediante la criba para números primos iguales o menores a $\sqrt{N}$. Gracias a la criba podemos averiguar los números primos que se encuentran entre los mil primeros números naturales.

Euclides descubrió otro razonamiento para averiguar números primos, dicho razonamiento consistía en hacer el producto de números primos y sumarle 1 al resultado, de esta manera nos saldría un número primo, pero esto no siempre es así. Euclides ya había demostrado que los números naturales podían descomponerse como producto de factores primos, por tanto si los aplicamos a un número que al hacer el producto de números primos y sumarle 1 nos da un número compuesto, es porque en dicha descomposición factorial faltarían números primos. Por tanto este razonamiento, está compuesto de dos posiciones, la primera es descubrir un nuevo número primo, y la segunda es un números compuesto que al descomponerlo descubrimos nuevos números primos.

Primos gemelos

Como ya hemos comentado, no hay una ley general por la que podamos descubrir números primos, pero si se ha estudiado el comportamiento de algunos números primos que adquieren características exclusivas. Es el caso de los números primos gemelos, esto surge al pensar que los números primos están separados unos de otros, nunca son consecutivos, excepto el 2 y 3 porque 2 es el único número par primo. Por tanto, los matemáticos llamaron números primos gemelos a aquellos números primos que están únicamente separados por un número par ya que todos los números primos son impares, como es el caso de 11 y el 13, el 17 y 19, etc.

Los números gemelos contestan a la siguiente estructura $(p,\ p + 2)$, donde p es un número primo.

También se observó el grupo de números primos formados por 3, 5 y 7; llamado "triplete". Formados por la siguiente estructura $(p,\ p + 2,\ p + 4)$, pero estos tres números son la única excepción.

Marín Mersenne

Mersenne (1588-1648). En 1604 accedió en la Fleche (colegio fundado por Enrique IV y dirigido por los jesuitas), durante este periodo mantuvo una gran amistad con Descartes, que duró toda su vida. En 1611 se licenció en teología en La Soborna, para ingresar en la Orden de los Mínimos. Fue nombrado presbítero en el convento de la Anunciación (París).

Los números de Mersenne, *Cogitata Physico-Mathematica (1644)*, fue la gran obra matemática de este matemático. Mersenne aseguró que el número $2^p - 1$ es primo si p corresponde a los números 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Antes de Mersenne, ya se conocía la formula $2^p - 1$ asociando p al siguiente listado de números: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127. Podemos ver que en la lista original sobran dos números y faltaban tres, aun así se les llama "números de Mersenne".

Pierre de Fermat

Figura 3. Pierre de Fermat

Fermat (1601-1665), nació en una familia acodada, desempeñó l cargo de funcionario en la Consejería Real del Parlamento local de Toulouse. Fermat ha pasado a la historia de las matemáticas como "príncipe de los aficionados". Este matemático en escasas ocasiones explicaba como obtenía sus resultados, pero si mostraba los resultados.

Fermat propuso una conjetura muy famosa en la historia, si $n > 2$, no existe números enteros x, y, z distintos de 0 que cumplan la igualdad $x^n + y^n = z^n$, más conocido como "último teorema de Fermat". Fue demostrada en 1995 por el británico Andrew John Wiles. Dos años antes, el británico presentó una primera demostración, en la que, sin embargo, se reveló un error que posteriormente fue capaz de corregir.

El pequeño teorema de Fermat, dice que si p es un número primo y a cualquier otro número, por tanto que a y p sean primos entre sí, se cumple que $a^p - a$ es divisible por p. Fue Euler en 1736 quien publicó la demostración del pequeño teorema de Fermat. Se llamó pequeño teorema de Fermat debido a que este método solo es cierto si se aplica a números muy grandes.

Los números de Fermat son los que corresponden con la forma $2^{2n} + 1$, estos se simbolizan con la letra F (Fermat) y subíndice n (número del que se trata). Fermat conjeturó que todos los resultados de esta forma correspondían a números primos. Este matemático no tenía medios para saber si los números superiores a mil millones eran primos; pero Euler sí, y fue el que demostró la falsa conjetura de Fermat.

Leonhard Euler

Figura 4. Leonhard Euler

Euler (1707-1783), fue uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, después de su muerte, aparecieron escritos suyos que fueron publicados por la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

Este matemático creo tablas para averiguar números primos entre 1 y 100.000, elaborando fórmulas para ello, una de las más destacables fue $x^2 + x + q$, esta fórmula facilita números primos para valores de x distintos de 0 e inferiores a $q - 2$, dando a q los valores de 2, 3, 5, 11 y 27.

Euler no ocultaba sus demostraciones; introdujo la letra sigma del alfabeto griego (Σ), también introdujo la "función zeta de Euler" (actualmente recibe el nombre de "función zeta de Riemann") fue definida con la letra griega ζ (zeta).

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots$$

Demostró la discrepancia de la suma de los inversores de los números primos, descubriendo la conexión entre la función zeta y los números primos, es decir, que cada fracción de la función zeta podría expresarse de tal forma que en el denominador solo figurasen números primos. Esto resultaría como una ecuación en la que aparecería una suma de infinitos números a la izquierda y un producto de números infinitos en la derecha. Esta expresión es conocida como “producto de Euler”, principio básico para que Riemann pusiera un orden a los números primos.

<u>La conjetura de Goldbach</u>

Christian Goldbach (1690-1764), matemático que mantuvo una fuerte correspondencia con Euler. En 1752, Goldbach envió una carta a Euler donde le decía que todo número par que fuera mayor que 2 podía escribirse como una suma de dos números primos; Euler le contestó que esto era cierto hasta el número 2500. La conjetura está aún por demostrar, se considera como uno de los problemas más complejos de la historia de la ciencia por la comunidad matemática.

<u>Johann Carl Friedrich Gauss</u>

Figura 5. Johann Carl Friedrich Gauss

Gauss (1777-1855), desde niño era un alumno especialmente dotado, estudió en el Liceo. Le concedieron el título de catedrático de astronomía y director del observatorio astronómico de la Universidad

La primera conjetura, Gauss no se dedicó a buscar fórmulas para buscar el siguiente número primo, si no que a lo que se dedicó fue a calcular los números primos que había entre dos números dados, o entre los diez, cien, mil, diez mil primeros números; y así hallar el número de veces que aparecían números primos en una serie de números naturales. Para averiguar esto, Gauss ideo la función *k(x)*, con la forma *n(x) = la cantidad de números primos que son menores que x.*

Este matemático creo una tabla formada por dos columnas, donde la primera columna estaba formada por las potencias de 10 y en la segunda columna el valor de *n(x)*. Según van aumentando las cifras de la primera columna, aumentan las de la segunda, pero esto no dice nada imprescindible, por lo que se añadió una tercera columna para obtener los números primos menores que otro número dado, con la siguiente forma $\frac{\pi(x)}{x}$. Con esta tercera columna se puede observar que la frecuencia de números primos va disminuyendo según vamos bajando en la columna, es decir, cuando los números son más grandes. La tercera columna que Gauss introdujo no fue la que se obtenía el cociente, si no que fue la inversa $\frac{x}{\pi(x)}$, de tal forma que nos indica la distancia probable entre números primos. Gauss descubrió que esta columna aumentaba en torno a dos unidades cada vez que avanzaba la fila. Este matemático había creado una tabla de logaritmos y otra de números primos en un mismo tono. Cuando la base del logaritmo correspondía al número 10, cuando se multiplicaba por 10, los logaritmos con decimales crecen de uno en uno, y este tomo la decisión de atribuir los logaritmos en base e, cuyo valor es 2,7182818284590452354…, es decir, es una expresión decimal infinita. Cuando se habla de logaritmos en base e se llaman “logaritmos naturales”. Si hablamos de atribuir valores altos de x, el valor de $\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln x}$ proporciona un resultado de una aproximación de la frecuencia con la que surgen los números primos en la sucesión de números naturales.

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Figura 6. Bernhard Riemann

Bernhard Riemann (1826 - 1866) fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general.

Riemann se dio cuenta de que existe una relación entre la distribución de los números primos y el número de ceros de la función zeta.

Pero no todos los ceros son iguales. Los hay que no aportan información alguna sobre los números primos y aparecen al prolongar la función al plano complejo: son los ceros triviales, que están sobre todos los números enteros pares negativos.

Los ceros «no triviales» parece que corresponden a números complejos de la forma $s = \frac{1}{2} + ib$, es decir, con parte real ½.

La conjetura o hipótesis de Riemann dice exactamente «La parte real de todo cero no trivial de la función zeta es 1/2». Si la hipótesis es cierta, significa que todos los números primos se distribuyen de una forma regular, o, mejor dicho, de la forma más regular posible.

6. LOS NÚMEROS PRIMOS Y LA DIVISIBILIDAD EN EL DÍA A DÍA.

Tanto los números primos, como la divisibilidad tienen una gran importancia en nuestra vida cotidiana. La divisibilidad está presente en el cine en cuanto a la velocidad a la que transcurren las imágenes, en el carbono 14, a la hora de crear calendarios, incluso cuando hablamos de música.

Los números primos son imprescindibles en nuestra vida cuando hablamos de codificar mensajes, es decir, son importantes cuando mandamos un mensaje y queremos que dicho mensaje llegue a una persona en concreto.

Incluso en el mundo de los insectos también nos encontramos a los números primos, más concretamente en cierta especie de cigarras, como veremos más adelante.

Cine y divisibilidad.

El cine es un medio de ocio y entretenimiento en el cual nunca nos hemos parado a pensar en su relación con las Matemáticas, en concreto con la divisibilidad.

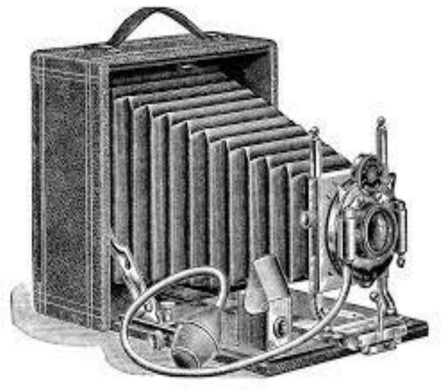

Figura 7. Cámara

Las películas de cine no solo han evolucionado en cuanto al sonido, sino también en cuanto a la rapidez con la que pasan las imágenes. Los fotogramas se toman a una velocidad de 24 imágenes por segundo, sin embargo, en el cine mudo se tomaban 16 imágenes por segundo. Tambien existen cámaras que tomas 8, 32, 64 y 500 imágenes por segundo.

Sí observamos las diversas velocidades de filmación de las imágenes tenemos que 8, 16, 24, 32, 64, 500 son múltiplos de 4; y excepto el 500, todos los demás son múltiplos de 8.

Carbono 14.

El carbono, como pasa con otros elementos químicos, se encuentra en forma de diversos compuestos formado parte de los seres vivos.

Cuando los seres vivos mueren el Carbono 14, uno de los isótopos del carbono, se destruye muy lentamente. Cuando pasan 5700 años el porcentaje de Carbono de los seres vivos se reduce a la mitad, y cuando pasan 11400 años queda una cuarta parte, así hasta que desaparece completamente. Así relacionamos los múltiplos de 5700 con la reducción del Carbono 14, en su mitad, cuarta parte, octava parte, etc.

Willard Libby (1908-1980), fue un norteamericano que creo el método de Carbono-14, y midió el porcentaje de Carbono-14 que posee una materia orgánica.

La música

La música siempre se ha relacionado con poseer un oído excelente, sin hablar de la relación de esta con las Matemáticas; por tanto se podría decir que las matemáticas y la música son inseparables desde tiempos pitagóricos.

Con los pentagramas aparece la primera relación de la música con la divisibilidad, refiriéndonos a las líneas divisorias del compás. El compás se trata de una división del tiempo en partes iguales.

La redonda (figura musical) es múltiplo de todas las demás figuras, esto también ocurre con la blanca respecto a todas, exceptuando la redonda.

1 Redonda = 2 Blancas
2 Blancas = 4 Negras
4 Negras = 8 Corcheas
8 Corcheas = 16 Semicorcheas
16 Semicorcheas = 32 Fusas
32 Fusas = 64 Semifusas

Figura 8. Equivalencia de figuras musicales

El compás; para pasar de un compás simple a su compás correspondiente compuesto, se multiplica el numerador por 3 y el denominador por 2. Si queremos pasar de un compuesto al simple hacemos la operación contraria.

Otros términos musicales que tienen una gran importancia con los múltiplos, divisores y descomposición son los tonos, semitonos, silencios, etc.

Los calendarios

La combinación de los días del año no es calculable con el número de días del mes. Para nivelar estos desajustes, se han ido utilizando diferentes métodos a lo largo de la historia.

I. En Babilonia se dividieron los espacios y el tiempo, el número 60 lo utilizaron como base, porque este número es divisible por más números que cualquier otro más bajo. El círculo se dividió en 360 grados, a su vez se dividió entre 12 que eran las secciones de la constelaciones del Zodiaco. Sin embargo, este calendario no se amoldaba a las etapas de las actividades laborales, por lo que se modificó el calendario con 12 ciclos lunares, lo cual desordenó más el calendario.
II. En el antiguo egipto, el año estaba formado por 365 divididos en 12 meses, donde cada mes estaba formado por 30 días, y 5 días de fiesta. Pero esta división traía un error que se corregía cada 1460 años.
III. En Grecia, en el siglo V en Atenas se llegó a un método, calculado por el astrónomo Metón, que se basaba en intercalar 7 meses cada 19 años, intentando que hubiera un número exacto de años solares y lunares, es decir, 19 años solares son 235 lunaciones, por tanto cada 19 años solares la luna volvía a pasar por las mismas fases
IV. Julio Cesar (100-44 a.c.), para corregir las arbitrariedades que habían hecho los romanos, estableció un nuevo calendario, añadiendo 3 meses en el año 46 a.c. “Año de la confusión”. Este calendario fue llamado “Juliano”, estaba formado por 365 días y 6 horas, cada año estaba formado por 12 meses desiguales en cuanto a duración, esto se deducía porque 365 no es divisible entre 12; lo cual se solucionaba intercalando cada 4 años un día en el mes de Febrero, de donde surgieron los años bisiestos.
V. El papa Gregorio XIII (1502-1585), en 1582 anuló el calendario juliano y estableció el 1 de Enero como principio del nuevo año, y le quito 10 días al calendario, del 4 de octubre pasó al 15 de octubre. Este nuevo sistema ideado por Luigi Lilio Ghiraldi(1510-1576) y Cristóbal Clavius (1537-1612), este sistema difiere del anterior en que los años que termina un siglo no son bisiestos a excepción de que sea divisible por 400, este calendario tiene error de un día cada 3000 años.

VI. El calendario gregoriano tiene ciertos errores, como el de no coincidir el día de la semana de una fecha con la del siguiente año. Actualmente se intenta crear un calendario que solucione los errores que poseen los anteriores, para ello se sugiere que el último día del año y el día bisiesto sean considerados "extrasemanales", los cuales se situarían al final de junio y diciembre.

El día de la semana correspondiente a cualquier fecha.

Gauss desarrollo una regla para resolver este error, que es válido para una fecha cualquiera de la era cristiana.

- d el número del día dentro del año.
- n el número del año menos uno.
- a el cociente de dividir n por 4.
- b el cociente de dividir n por 100.
- c el cociente de dividir n por 400.

e es n + d + a + c – b

Dividiendo e entre 7 será r, por lo tanto r es el día de la fecha, indicando el domingo con un 0, el lunes con un 1, el martes con un 2, etc.

Los guardianes de internet.

Los números primos son necesarios para que toda información que enviemos llegue al destinatario correcto, y no desparezca en el trayecto.

Los números primos solo pueden dividirse por ellos mismos, y por la unidad. Con ellos, se construyen todos los demás números compuestos, ya que un número compuesto se descompone como producto de números primos.

Los números primos son infinitos, pero cada vez es más complicado hallarlos. La forma en la que se distribuyen los números primos es de gran importancia para todo el mundo que utilice internet.

Podemos destacar el algoritmo criptográfico RSA, utilizado para asegurar la seguridad de enviar información en la red. Esto está basado en la factorización de números enteros en números primos. En el sistema RSA, los mensajes se representan con números primos grandes elegido al azar.

Para que el sistema criptográfico RSA funcione correctamente se necesita coger números primos de más de 100 cifras.

Este sistema, fue desarrollado en 1977 por Rivest, Shamir y Adleman.

Proyecto gimps.


Figura 9. Curtis Cooper

Curtis Cooper y la University of Central Missouris son los contribuyentes al proyecto GIMPS, el cual se trata de una cooperación en internet dedicada a la búsqueda de los números primos de Mersenne, donde cientos de voluntarios ceden la potencia de sus ordenadores para calcular números primos.

El último número primo encontrado está formado por 22 millones de dígitos. Cooper encuentra números primos elevados desde 2005, sin embargo, estos descubrimientos no serían posibles sin la ayuda de los voluntarios de GIMPS.
La red virtual de ordenadores llega a realizar 30 billones de operaciones por segundo. El servidor PrimeNet creado por Scott Kurowski es el que sostiene esta investigación.

Magicicada Septendecim


Figura 10. Cigarra Magicicada Septendecim

Esta cigarra vive 17 años bajo tierra, alimentándose de la savia de las raíces de los árboles. Cuando transcurren estos 17 años y ya es un insecto adulto, sale a la superficie donde se reproduce y unos días después muere.

Existe un parásito, enemigo de la cigarra, cuyo ciclo de vida es de 2 años. Esto quiere decir que como el ciclo de la cigarra es de 17 años, un número primo, la cigarra y el parasito coincidirán cada 34 años. También existen otras cigarras llamadas Magicicada Tredecim cuyo ciclo vital es de 13 años. Se piensa que lo hacen así para evitar a los parásitos que las matarían. Una vez más un número primo A pesar de que los números primos hayan sido creados por humanos, los matemáticos que los investigan pueden llegar a vivirlos.

7. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR.

Este trabajo va dirigido a los alumnos de 6º de Educación Primaria. El desarrollo del conocimiento del tema es la utilización de números primos con material manipulativo y la divisibilidad numérica.

Las matemáticas, en la etapa de Educación Primaria, es un área del bloque de contenidos de asignaturas troncales. Como dice el currículo (BOCYL, Decreto 26/2016, de 21 de Julio. Por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León), el aprendizaje de las matemáticas tiene una doble función: la primera es la utilización de estas en la vida cotidiana y la segunda es debido a que su aprendizaje contribuye al desarrollo cognitivo a través de los procesos de análisis, relación, estimación, etc.

En Educación Primaria se busca llegar a una eficaz alfabetización numérica, es decir, la capacidad de enfrentarse a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, como es el caso de los números primos.

La manipulación de material durante esta etapa es un principio metodológico básico y debe ser constante en la actividad matemática diaria. La utilización adecuada de recursos didácticos puede ser de gran utilidad y ser elementos motivadores.

Las matemáticas en Educación Primaria abarcan 5 bloques de contenidos:

1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
2. Números.
3. Medida.
4. Geometría.
5. Estadística y probabilidad.

Los números primos se encuentran en el bloque de contenido 2, *Números*.

Los contenidos que aparecen en el bloque *Números* relacionados con este trabajo práctico son:

- Números naturales, enteros, decimales y fracciones.
    - Divisibilidad: múltiplos, divisores, números primos y números compuestos.

- Cálculo:
    - Obtención de los primeros múltiplos de un número dado.
    - Obtención de los divisores de cualquier número menor que 100.

Los criterios de evaluación encontrados relacionados con esta Unidad Didáctica son:

- Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas.
- Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas, y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.

Los estándares de aprendizaje relacionados con esta Unidad Didáctica son:

- Identificar múltiplos y divisores, utilizando las tablas de multiplicar.
- Calcular los primeros múltiplos de un número dado.
- Calcular todos los divisores de cualquier número menor que 100.
- Calcular mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

La divisibilidad numérica se incorpora en el curso de 5º de Educación Primaria en el bloque 2 *Números*, en el apartado de contenidos *Divisibilidad. Múltiplos y Divisores.* En el curso de 6º de Educación Primaria, en el cual he basado mi trabajo, continua la divisibilidad en el bloque 2 *Números*, en el apartado de contenidos *Múltiplos y Divisores. Criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 9 y 10.*

Los números primos se incorporan en el curso de 6º de Educación Primaria en el bloque 2 *Números* en el apartado de contenidos *Números primos y compuestos*. En este curso continua la divisibilidad numérica en los siguientes apartados de contenidos, *Múltiplos y divisores, mínimo común múltiplo y máximo común divisor*.

8. VENTAJAS DE UTILIZACIÓN DE MATERIAL MANIPULATIVO EN MATEMÁTICAS.

Los materiales didácticos son recursos fascinantes para aumentar la calidad educativa, mejorando las competencias del alumnado. Así desarrollamos la capacidad de aprender a aprender. El objetivo final de los docentes es que los alumnos sean competentes y tengan interés por la vida que les rodea. Este interés parte de la motivación de los alumnos y lo que facilita el aprendizaje significativo. Por tanto, la utilización de material manipulativo como recurso didáctico en las aulas puede ser muy interesante.

Los modos de enseñanza cambian, por ello debemos ser conscientes de la importancia del material manipulativo en matemáticas, pues éste ayuda al alumno para que de lo concreto llegue a lo abstracto, teniendo en cuenta que la mente de los niños en ocasiones no está preparada para asimilar conceptos abstractos.

En el Real Decreto 1513/2006 se introdujo el nuevo currículo organizado por "competencias básicas", para dar una visión renovada de la Educación Primaria. Así dotar a los alumnos de habilidades y recursos que le atribuyan aptitudes para ser competentes. Una forma de hacerlo es enseñando al alumno paradigmas reales donde desarrollará sus habilidades.

Entendemos como competencia matemática *"la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar matemáticas en una gran variedad de situaciones y contextos en los cuales la matemática juega, o podría jugar un papel importante"* (Niss, 2001, citado por Alsina et al, 2008).

Muchos son los libros de matemáticas que hablan del temor que crea en las personas las matemáticas. Como futuros docentes debemos plantearnos que es lo que sucede para que la gente tenga una experiencia negativa desde los primeros contactos con ellas. Por tanto, sería importante proponer cambios e innovar cuando hablamos de enseñanza. Esta propuesta puede llevarse a cabo con materiales didácticos.

El matemático Puig Adam en 1956 ya reivindicó la necesidad de instrumental didáctico-matemático en el aula, en su libro *Didáctica Matemática heurística*.

Maria Montessori, Edouard Claparède o el psicólogo Jean Piaget son otros matemáticos y pedagogos que han intentado difundir la idea de que los recursos materiales son una idea clave en el aprendizaje.

En la teoría constructivista de aprendizaje, Piaget percibe que la capacidad cognitiva y la intelectual están estrechamente ligadas al medio físico y social.
“La adaptación es el equilibrio entre el organismo y el medio” (Piaget, 1990, p.15).
“La organización y la adaptación con sus dos polos de asimilación y de acomodación, constituyen el funcionamiento que es permanente y común a la vida, pero que es capaz de crear formas o estructuras variadas” (Thong, 1981, p.26).

Piaget distingue varias etapas dependiendo la edad de los niños, en este caso nos centraremos en el periodo de las operaciones concretas de 7 a 12 años. En este periodo el niño puede llevar a cabo operaciones de primer grado sobre objetos, piensa hacia adelante y atrás, lo que Piaget llama reversibilidad. Esta aptitud ayuda a agilizar el pensamiento lógico y a llevar a cabo deducciones.

Piaget y Vygotsky tenían posturas diferentes en cuanto al pensamiento-lenguaje, pero se complementaban al aportar aspectos diferentes sobre ello. Piaget dice que el sujeto se relaciona con el objeto para así llegar a un conocimiento, sin embargo Vygotsky dice que el sujeto se relaciona con otros sujetos para alcanzar dicho conocimiento. Piaget explica que los niños dan sentido a las cosas mediante los objetos y su entorno, mientras que Vygotsky hace hincapié en la importancia de lo social y lo cultural.
Según Piaget *“El niño no almacena conocimientos sino que los construye mediante la interacción con los objetos circundantes”* (Maldonado, M.E., p.113).
En cambio Vygotsky afirmó *“Detrás de cada sujeto que aprende hay un sujeto que piensa”* (Maldonado, M.E., p.121).

La pedagogía Montessori atribuye gran relevancia a la educación sensorial, protagoniza el método. Ya en el siglo XVII se decía *“que el alumno aprenda a conocer las cosas visibles por la vista, el sonido por el oído”* (Yaglis, 2005., p. 34). *“todo conocimiento tiene su origen las percepciones”* (Soler, 1992., p. 30).
María Montessori elaboró sus propios métodos sensoriales, *“la educación de los sentidos tiene gran importancia pedagógica”* (Montessori, 1937., p. 168).

Nuestro cerebro está dividido en dos hemisferios, el izquierdo se centra en palabras y el derecho se centra en imágenes. Cuando trabajamos con material manipulativo estamos favoreciendo el desarrollo del hemisferio derecho ya que recreamos imágenes mentales de lo real, ayudándonos a trasladar información de un hemisferio a otro.

Por tanto, los alumnos que utilizan material manipulativo estimulan la actividad del hemisferio derecho y así potencian un desarrollo del cerebro global, por lo que pueden mejorar en el ámbito de las matemáticas.

9. TRABAJO EN EL AULA.

A continuación se encuentran desarrolladas las cuatro sesiones prácticas sobre los números primos y compuestos con material manipulativo. Posteriormente se encuentran expuestos los controles 1 y 2; el control 1 fue realizado antes de comenzar con las sesiones, y el control 2 se realizó al finalizar las cuatro sesiones.

9.1. Sesión 1.

En esta primera sesión se pretende introducir el tema de los números primos mediante su historia, y su utilidad en el día a día; definiendo lo que es un número primo. Una vez introducido esto, comenzamos con el proceso de la criba de Eratóstenes, donde todos los alumnos tienen su tabla con los 100 primeros números y todos juntos vamos siguiendo el proceso.

Los objetivos de esta sesión son:

- Recordatorio de los conocimientos sobre los números primos ya adquiridos anteriormente.
- Conocer de dónde proceden y porqué son útiles los números primos.
- Identificar los números primos del 1 al 100 mediante el método de la criba de Eratóstenes.

Actividad 1.

INTRODUCCIÓN DE LOS NÚMEROS PRIMOS

- ¿Qué es un número primo?

  Un número primo es aquel número natural que solo es divisible entre sí mismo y entre la unidad.
- ¿Cuándo surgieron?

  Estos números surgieron desde la antigüedad, donde nos llegó el método de la Criba de Eratóstenes.

  Los números primos se remontan al 300 a.c. en la antigua Grecia, en su estudio destaca Euclides con su obra “Los elementos de Euclides”
- Curiosidades de los números primos en la vida cotidiana

  Los números primos se utilizan en el día a día para multitud de cosas, una de ellas es para codificar mensajes, es decir, son esenciales para que cualquier información que enviemos llegue al destinatario correcto y no se “pierda” por el camino.

El último número primo descubierto está formado por 22 millones de dígitos, para averiguar estos números primos tan elevados se necesitan muchos ordenadores conectados entre sí, con una potencia elevada para que puedan trabajar a la vez.

Duración: 20 minutos.

En esta actividad se observa que la mayor parte de los alumnos sabe la definición de número primo, pero no saben de dónde proceden. Los alumnos desconocían totalmente la utilidad de los números primos en el día a día. En cuanto a la cuestión que se les planteó "*¿Creéis que se siguen buscando números primos?*" una mayoría contestaron que no, y otra parte de la clase no contestó puesto que expresaron que no sabían.

Actividad 2.

La criba de Eratóstenes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 11. Tabla de la Criba de Eratóstenes.

La criba de Eratóstenes consiste en buscar los números primos, en este caso del 1 al 100, para ello debemos seguir una serie de pasos.

1. Comenzamos con el número 2, y tachamos todos los múltiplos de 2.
2. Continuamos con el siguiente número que es el 3, y tachamos todos sus múltiplos.
3. El siguiente número no tachado es el 5, y tachamos todos sus múltiplos.
4. El siguiente número no tachado es el 7, y tachamos todos sus múltiplos.

Una vez realizados estos 4 pasos, ya tendremos sin tachar todos los números primos comprendidos entre el 1 y el 100.

Duración: 35 minutos.

En esta actividad, cada alumno tenía un folio con el cuadro de los 100 números mostrado en la parte superior. Todos juntos íbamos siguiendo los pasos y anotándolos en la parte inferior del folio.

9.2. Sesión 2.

En esta segunda sesión, comenzamos a introducir las piezas lego, asociando a cada pieza lego un número primo. Construyendo así números primos y compuestos, y a crear múltiplos y divisores.

Objetivos de esta sesión:

- Aprender a diferenciar los números primos y compuestos mediante material manipulativo.
- Facilitar el aprendizaje de números primos y compuesto mediante piezas Lego.
- Comprender los múltiplos y divisores de los números mediante piezas Lego.

Presentación Power Point (anexo I)

Figura 12. Piezas de Lego

Actividad 1

Cada pieza Lego corresponde a un número primo, por tanto los número compuestos están formados con 2 o más piezas Lego (números primos).

- Práctica 1.

Cuántas piezas Lego y de qué colores necesito para formar los siguientes números:

NÚMERO	PIEZAS LEGOS	COLORES
6	3 x 2	1 Azul y 1 Amarillo
8	2 x 2 x 2	3 Amarillos
12	2 x 2 x 3	2 Amarillos y 1 Azul
30	2 x 3 x 5	1Amarillo, 1 Azul y 1 Rojo

Duración: 25 minutos

Una vez que hemos asociado una pieza Lego a cada número primo comenzamos a formar números compuestos. Primero creamos números compuestos todos juntos, y después por grupos de 4 personas, formando así 6 grupos en total, estos grupos son los mismos en los que están sentados en el resto de clases, realizan la práctica 1.

Actividad 2

<u>Múltiplos</u>

1. Ponemos piezas de lego, unas encima de otras.
2. Cuando tengamos nuestra torre, multiplicamos todos los números primos que la forman.
3. Ese número compuesto será múltiplo de todos los números primos o compuestos que forman esa torre.

- Práctica 2.

Calcula mediante piezas lego sí…

45 es múltiplo de 3	Sí, porque tiene una pieza lego azul
49 es múltiplo de 3	No, porque no tiene una pieza de lego azul
48 es múltiplo de 4	Sí, porque tiene dos piezas de lego amarillas
91 es múltiplo de 7	Sí, porque tiene una pieza de lego blanca

Duración: 15 minutos.

En esta segunda actividad, donde ya conocemos los números primos y compuestos con material manipulativo, comenzamos a reconocer múltiplos. Creamos una torre de piezas Lego, una vez construida reconocemos el número que es, mediante la multiplicación de los números primos que la forman, y mediante la teoría explicada anteriormente identificamos los múltiplos.

Actividad 3

Divisores

1. Ponemos una torre de piezas lego (números primos).
2. Rompo la torre por donde quiera.
3. Todas las partes en las que puedo romper la torre son divisores del número que forman la torre completa.

- Práctica 3.

  Calcula todos los divisores de 30.

Divisores de 30	1, 2, 3, 5, 10, 15, 30

Duración: 15 minutos.

En esta actividad realizamos lo mismo que en la anterior, es decir, creamos nuestra torre de piezas lego, construyendo un número compuesto, una vez construido, multiplicamos los números primos que lo forman para averiguarlo y mediante la explicación teórica (anexo I), identificamos los divisores.

9.3. Sesión 3.

En esta sesión, vamos un paso más allá, y comenzamos con el máximo común divisor, debido a que esta sesión solo era de media hora.

Objetivos de esta sesión:

- Facilitar los conocimientos previos adquiridos sobre el M.C.D mediante material manipulativo.
- Descomponer números compuestos mediante piezas Lego.
- Corregir fallos en la descomposición factorial cometidos en el control 1 (anexo), mediante la utilización del método de piezas Lego.

Presentación Power Point (anexo I)

Actividad 1.

<u>Máximo común divisor</u>

1. Formamos varias torres de piezas Lego.
2. Cuando tenemos su valor.
3. Cogemos los colores comunes entre las diferentes torres.

➢ Práctica 1

Calcula el M.C.D de (20, 30)

NÚMERO	PIEZAS LEGO	COLORES
20	2 x 2 x 5	2 Amarillos y 1 Rojo
30	2 x 3 x 5	2 Amarillos, 1 Azul y 1 Rojo

M.C.D (20, 30) = 5 x 2 = 10, porque el 2 (amarillo) y 5 (Rojo) son las pieza que se repite en las dos torres.

➢ Práctica 2

Calcula el M.C.D de (20, 24, 36)

NÚMERO	PIEZAS LEGO	COLORES
20	2 x 2 x 5	2 Amarillos y 1 Rojo
24	2 x 2 x 2 x 3	3 Amarillos y 1 Azul
36	2 x 2 x 3 x 3	2 Amarillos y 2 Azules

M.C.D (20, 24, 36) = 2^2 = 4, porque 2^2 (amarillo) es la única pieza que se repite en las tres torres.

Duración: 30 minutos.

En esta actividad, nos centramos en el M.C.D. Los alumnos comienzan a tener algunas dificultades a la hora de identificar las piezas comunes en varias torres. Los alumnos comprenden que para identificar el máximo común divisor de varios números deben seleccionar el color común en todas las torres de números compuestos que queremos identificar. Un ejemplo es que, en la Práctica 2, es al identificar el M.C.D (20, 24, 36) coinciden en que el color amarillo es el que se repite en las tres torres, pero al preguntar que cuántas veces está repetido, un error muy común que se observa es que ellos cuentan todas las piezas amarillas que hay en total entre las tres torres, sin identificar que solo está repetido 2 veces en cada torre.

9.4. Sesión 4.

Con esta sesión ponemos fin a la teoría de los números primos y compuestos mediante material manipulativo con el mínimo común múltiplo.

Objetivos de esta sesión:

- Facilitar los conocimientos previos adquiridos sobre el m.c.m. mediante material manipulativo.
- Descomponer números compuestos mediante piezas Lego.
- Corregir fallos en la descomposición factorial cometidos en el control 1 (anexo), mediante la utilización del método de piezas Lego.

Presentación Power Point (anexo I)

Actividad 1.

Mínimo común múltiplo

1. Formamos varias torres de piezas Lego.
2. Cuando tenemos su valor.
3. Cogemos los colores comunes y no comunes al mayor exponente, es decir, el mayor número de veces que está repetido el color en las diferentes torres. Por ejemplo, si tenemos una torre con 2 piezas amarillas (equivale al número 2), y otra torre con 3 piezas amarillas; cogemos la torre que tenga más piezas lego de un mismo color, en este caso la que tiene 3 piezas amarillas.

➢ Práctica 1.

Calcula el m.c.m de (14, 20)

NÚMERO	PIEZAS LEGO	COLORES
14	2 x 7	1 Amarillo y 1 Blanco
20	2 x 2 x 5	2 Amarillos y 1 Rojo

m.c.m (14, 20) = 2^2 x 5 x 7 = 140 porque cogemos el 2^2 (amarillo) que es común al mayor exponente, 5 (rojo) y 7 (blanco) que son no comunes.

- Práctica 2.

Calcula el m.c.m de (20, 24, 36)

NÚMERO	**PIEZAS LEGO**	**COLORES**
20	2 x 2 x 5	2 Amarillos y 1 Rojo
24	2 x 2 x 2 x 3	3 Amarillos y 1 Azul
36	2 x 2 x 3 x 3	2 Amarillos y 2 Azules

m.c.m (20, 24, 36) = 2^3 x 3^2 x 5 = 360 porque cogemos 2^3 (amarillo) que es el color común en las tres torres, 3^2 (azul), y 5 (rojo) que son los colores no comunes en las tres torres.

Duración: 30 minutos.

En esta actividad los alumnos tienen más dificultad a la hora de identificar los números con mayor exponente, es decir, las piezas lego del mismo color que se repiten en una sola torre más veces. Por otro lado, cuando los alumnos realizan las operaciones tienen dificultades en el cálculo, muchos alumnos lo hacen mentalmente y eso da lugar a errores.

Actividad 2.

Repaso de lo aprendido

Mediante una serie de actividades (anexo) repasamos lo aprendido hasta el momento, para resolver posibles dudas y afianzar los contenidos de las sesiones realizadas en clase. Todos los alumnos disponen de pinturas con los colores que forman los números primos con piezas Lego, para que les resulte más sencillo resolver las cuestiones, ya que dibujan su torre correspondiente al ejercicio, y mediante las explicaciones dadas durante las sesiones resolvemos las actividades.

Duración: 30 minutos.

9.5. Control 1.

1. **Tacha con una "X" a los números que NO sean primos.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. **¿Cuáles de estos números son múltiplos de 3? Explica por qué.**

15 20 19 33 49 12

3. **Calcula todos los divisores de 30.**

4. **Calcula el m.c.m y M.C.D. (20, 24, 36)**

5. **En un albergue coinciden tres grupos de excursionistas de 40, 56 y 72 personas cada grupo. El camarero quiere organizar el comedor de forma que en cada mesa haya igual número de comensales y se reúna el mayor número de personas posible sin mezclar los grupos. ¿Cuántos comensales sentará en cada mesa?**

9.6. Control 2.

1. **Tacha con una "X" a los números que NO sean primos.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. **¿Cuáles de estos números son múltiplos de 3? Explica por qué.**

15 20 19 33 49 12

3. **Calcula todos los divisores de 30.**

4. **Calcula el m.c.m y M.C.D. (20, 24, 36)**

5. **En un albergue coinciden tres grupos de excursionistas de 40, 56 y 72 personas cada grupo. El camarero quiere organizar el comedor de forma que en cada mesa haya igual número de comensales y se reúna el mayor número de personas posible sin mezclar los grupos. ¿Cuántos comensales sentará en cada mesa?**

Calificaciones

ALUMNOS	NOTA CONTROL 1	NOTA CONTROL 2
1	6,3	9,75
2	4	5
3	4,5	9,5
4	3,75	7,25
5	1,8	6,25
6	6	6,75
7	2	6
8	7,6	9,75
9	2,5	7
10	6,25	7,4
11	5,35	8,4
12	3	9,15
13	9,3	7,9
14	7,65	5,4
15	2,5	4
16	1,5	8,65
17	F	5,25
18	5,5	8
19	4,75	8,5
20	9	10
21	3	9,4
22	5,05	6,25
23	5,8	F
24	9,8	10

Tabla 13. Notas de los controles de números primos

En el ejercicio 1, la criba de Eratóstenes, podemos ver que todos los alumnos de 6ºB han mejorado su puntuación respecto al primer examen, excepto 2 alumnos que empeoraron su puntuación en el segundo examen, los cuales faltaron el día de la explicación del proceso de la criba de Eratóstenes.

Control 1

En cuanto a los alumnos con notas por debajo del 5, observo que dos alumnos han tenido un problema en cuanto al enunciado de ejercicio, en el cual pone *"Tacha con una X los números que NO sean primos"*, y han tachado los números primos. Los demás alumnos con esta calificación han tachado los números que ellos creían que no eran primos, donde la gran mayoría coincide en que son todos los números acabados en 0. Tres alumnos han tachado todas las columnas de los pares pero luego no supieron seguir con los demás múltiplos.

De los alumnos con notas superiores a 5, destacamos a dos alumnos que han hecho el ejercicio completo sin ningún fallo. Por otro lado, exceptuando un alumno que ha tenido bastantes fallos en este primer ejercicio, los demás alumnos han tenido pequeños fallos comunes, en números más próximos al 100.

Control 2

Son siete los alumnos que tienen este ejercicio correcto completamente, tres alumnos tienen bastantes fallos de nuevo, donde dos de ellos coincide en que se ausentaron el día de la explicación de la criba de Eratóstenes. El resto de alumnos han tenido entre 1 y 5 errores de números que han tachado pensando que no eran primos y sí lo eran.

<u>En el ejercicio 2</u>, los múltiplos de 3, todos los alumnos excepto dos, han mejorado su puntuación en el último control; la mayoría de los alumnos en el primer control cometen el fallo de no explicar por qué esos números que han rodeado son múltiplos de 3, el resto de alumnos coinciden con las respuestas que podemos ver a continuación.

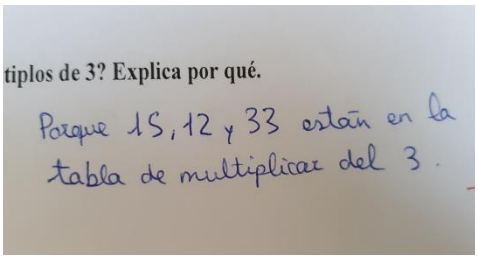

Figura 14. Ejercicio 2, control 1.

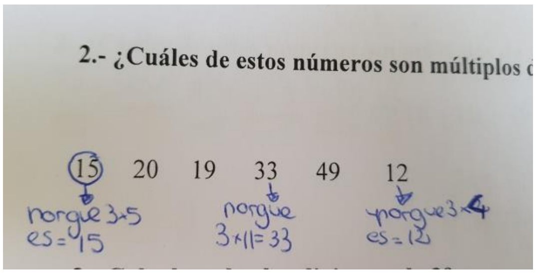

Figura 15. Ejercicio 2, control 1.

Un dato curioso, es que los dos alumnos que han bajado su puntuación en el ejercicio número 2 del primer control al segundo; ambos tenían una nota inferior al 5 en su primer control.

Control 1

En los alumnos con notas inferiores a 5, se observa que sí saben cuáles son los múltiplos de 3, pero no saben explicar el porqué. De los once alumnos suspensos, seis han explicado que los números rodeados son múltiplos de 3 porque están en la tabla del 3, esto no es una argumentación incierta, pero tampoco sería la más adecuada para números mayores de 30. Por otro lado, cuatro alumnos no han explicado el porqué. El alumno restante ha dado una explicación totalmente errónea.

Los alumnos con notas superiores a 5, destacan en su mayoría con la explicación de que esos números que han rodeado son múltiplos de 3 porque al sumar sus cifras es múltiplo de 3, y otra de las explicaciones es porqué son divisibles entre 3. Solo dos de estos alumnos ha dejado sin responder el porqué.

Control 2

Diecisiete alumnos tienen este ejercicio completo y correcto, todos coinciden con la explicación que yo les cité en clase con las piezas lego. La pieza lego del 3 era el color azul, por tanto, los números que rodean son múltiplos de 3 porque al construir la torre de esos números contienen la pieza azul.

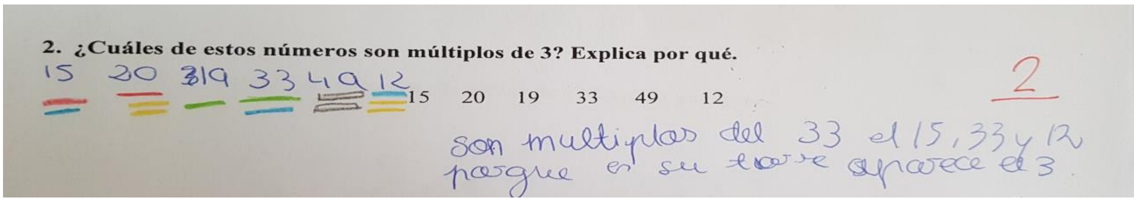

Figura 16. Ejercicio 2, control 2.

Dos alumnos, uno de ellos el que tiene el control 2 suspenso, han explicado lo mismo que la gran mayoría de alumnos en el primer control, es decir, que son múltiplos de 3 porque aparecen en la tabla del 3. Un alumno sigue sin explicarlo; y dos alumnos los han explicado bien pero se han comido o han rodeado de más números que no son múltiplos de 3, estos mismos alumnos no han querido dibujar su torre de legos para asegurarse de los múltiplos, algo que los alumnos que tiene el ejercicio correcto sí han hecho.

<u>En el ejercicio 3</u>, calcular todos los divisores de 30, seis alumnos han empeorado su puntuación en el segundo control. La mayoría de los alumnos realizan este ejercicio sin demasiada dificultad.

Control 1

Los alumnos con notas inferiores a 5, en este ejercicio, cuatro de ellos no tienen puntuación debido a que no han entendido en enunciado o no han sabido hacerlo.

En cuanto a los alumnos con notas superiores a 5, en este ejercicio tienen todos puntuaciones altas.

Cabe destacar que este ejercicio es de los que más puntuación ha obtenido.

Control 2

Once son los alumnos que han obtenido la puntuación completa en este ejercicio. Para ayudarles, les coloqué un cuadro en el ejercicio para que dibujaran su torre de lego del número 30 y así les resultase más fácil sacar los divisores. El resto de alumnos, ha dibujado bien la torre de lego con el número 30 pero a la hora de escribir los divisores se han dejado alguno sin escribir, el divisor que más alumnos se han olvidado de escribir es el 1.

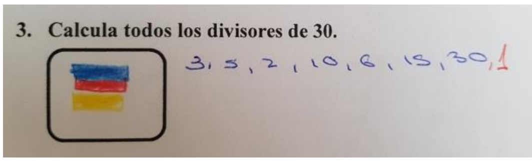

Figura 17. Ejercicio 3, control 2.

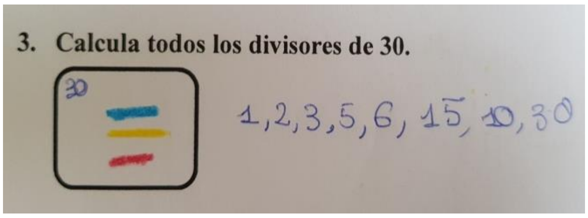

Figura 18. Ejercicio 3, control 2.

<u>En el ejercicio 4</u>, mínimo común múltiplo y máximo común divisor, se ha notado la dificultad que suponía para ellos realizar el primer control sin haber hecho un repaso previo.

Control 1

Todos los alumnos suspensos en el primer control, no tienen puntuación en este ejercicio, destacan la mayoría en fallar a la hora de la descomposición factorial, por lo tanto todo lo que sigue en el proceso va a ser incorrecto. A parte de este fallo común en casi todos, no diferencian m.c.m y M.C.D, porque no lo recuerdan.

Los alumnos aprobados, también destacan en su mayoría por ese fallo de la descomposición factorial, sin embargo, hay una minoría de alumnos que han hecho bien la descomposición factorial y han fallado en las operaciones de multiplicación. Solamente tres alumnos han tenido completamente correcto el ejercicio.

Control 2

Ocho alumnos tienen este ejercicio correctamente realizado. En este ejercicio también les coloqué 3 cuadros para que ellos dibujaran su torre de piezas lego y les resultase más sencillo. Diez alumnos han realizado correctamente el M.C.D, pero han fallado en el m.c.m. Dos alumnos no han sabido realizar los dibujos de las torres de lego con lo cual no han sabido hallar ni el m.c.m ni el M.C.D, uno de ellos es el alumno con el control 2 suspenso.

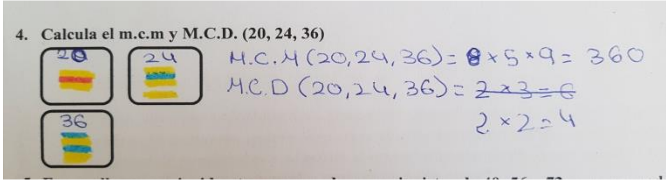

Figura 19. Ejercicio 4, control 2.

<u>En el ejercicio 5</u>, el problema del M.C.D, nueve alumnos no han sabido hacer la descomposición factorial, cinco alumnos han hecho la descomposición factorial correctamente pero luego no han sabido aplicar el M.C.D.

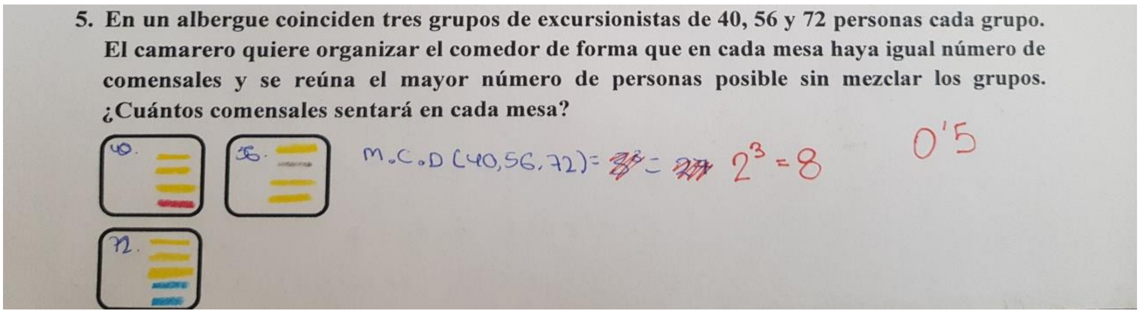

Figura20. Ejercicio 5, control 2.

Los mismos tres alumnos que tuvieron el ejercicio 4 del control 1 correctamente hecho también tienen bien realizado el ejercicio 4 del control 2, y el resto de alumnos no han llegado a la conclusión de que se trataba del M.C.D.

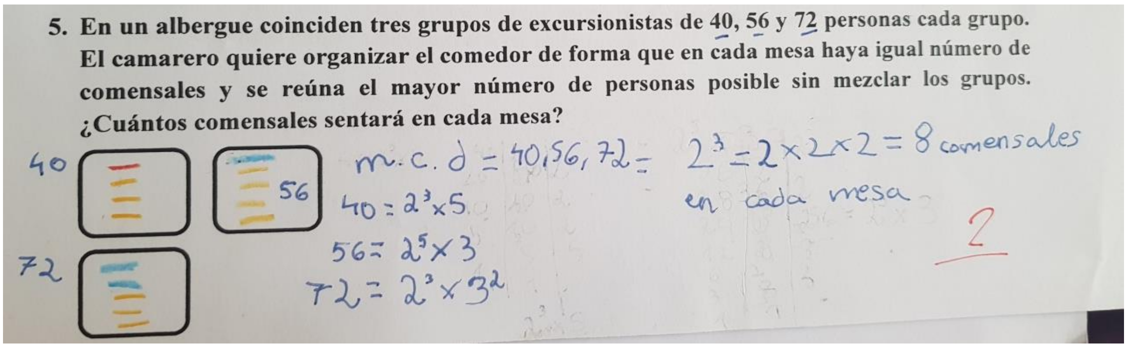

Figura 21. Ejercicio 5, control 2.

Control 1

Los alumnos con notas por debajo del 5, se repite el fallo de no saber realizar la descomposición factorial, 8 de 11 alumnos han cometido este error; lo mismo que sucedió en el ejercicio anterior.

Los alumnos con notas superiores a 5, hacen en su mayoría correctamente la descomposición factorial, pero luego no realizan correctamente el M.C.D, bien porque no cogen los comunes al menor exponente, o bien, porqué hacen el m.c.m.

Control 2

12 alumnos han resuelto el problema correctamente, han dibujado las 3 torres de piezas legos con los números que aparecen en el problema, y con su ayuda han resuelto el M.C.D. 6 alumnos han dibujado bien las torres de piezas lego, han identificado que había que resolverlo mediante M.C.D. pero han fallado a la hora de coger los comunes al menor exponente. 3 alumnos no han sabido dibujar la torre de lego con los números correspondiente, con lo cual no han sabido seguir con el problema; uno de ellos es el alumno suspenso en el control 2.

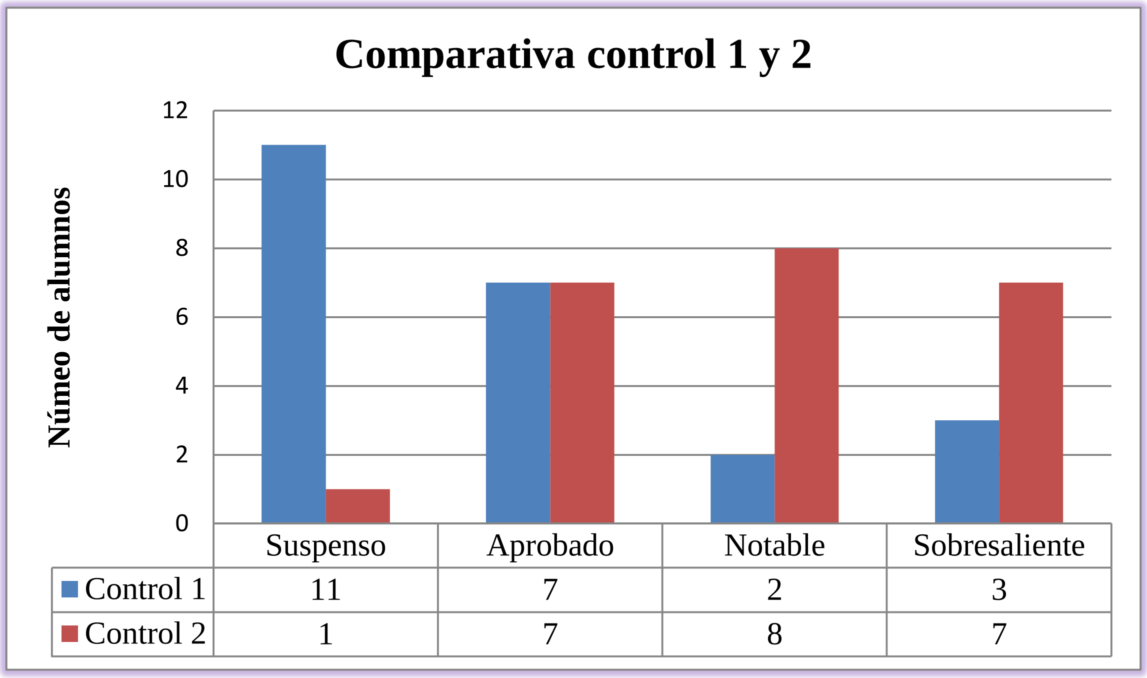

Figura 22. Gráfica comparativa de los controles 1 y 2.

Podemos observar en la gráfica anterior la diferencia tan notable que hay entre los alumnos suspensos en el primer control, en el que no se había impartido ningún tipo de explicación sobre los números primos y compuestos, solo tenían como recursos recordar lo dado en temas anteriores; y el control 2, donde únicamente un alumno suspendió con la calificación de un 4. Este alumno suspenso no suele prestar atención en las clases, tampoco realiza las actividades que se le propone, algo que sucede en todas las asignaturas.

En cuanto a los aprobados, es decir, los alumnos con calificaciones entre 5 y 6,9 coinciden la misma cantidad de alumnos con estas notas en el control 1 y 2, pero estos no son los mismos alumnos. Los alumnos que han aprobado con esta calificación en el segundo control, son los que tenían el primer control suspenso o un aprobado, solo un alumno que tiene calificación de un 7,65 en el primer control, tiene un 5,4 en el segundo control; es decir, la calificación del segundo control es más baja que el primer control, esto es una excepción ya que la gran mayoría de los alumnos ha subido su calificación del segundo control respecto al primero.

Por otro lado, los notables oscilan entre el 7 y el 8,9. Destacamos la diferencia de cinco alumnos más que obtuvieron esta nota en el segundo control respecto al primero. Un dato que resulta curioso, es que cinco de los alumnos que sacaron un notable en el segundo control, habían suspendido el primer control, tres de ellos con calificaciones por debajo del 4.

Por último, los alumnos con sobresaliente en el primer control son alumnos que destacan en todas las asignaturas, son alumnos muy responsables y participativos. Uno de ellos, bajó a un notable en el segundo control, algo que me sorprendió, los otros dos alumnos llegaron al 10 en su segundo control. Los demás alumnos que obtuvieron un sobresaliente en su segundo control, excepto uno, tenían suspenso su primer control, otro dato que llama bastante la atención.

En general a los alumnos les costaba recordar los números primos y compuestos, los múltiplos y divisores, y sobre todo lo que más habían olvidado era el mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

Considero que trabajar con material manipulativo para la comprensión de números primos y compuestos, así como su descomposición ha sido un buen método, ya que los alumnos se encontraban participativos en todo momento, y les llamaba mucho la atención que mediante las piezas Lego se pudiera aprender a descomponer números, crear múltiplos, y averiguar el mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

Cabe destacar que aquellos alumnos con calificaciones por encima del notable consiguieron esa competencia lingüística matemática, que les permitió ayudar a otros compañeros a comprender el tema con más facilidad.

10. INTRODUCCIÓN DE LA VISIÓN LÚDICA DE LAS MATEMÁTICAS.

Magia y matemáticas han sido compañeros a lo largo del tiempo. Tanto matemáticas como magos están generados por el sentido de sorpresa que representa el misterio de la magia. La diferencia entre ambos es que los magos muestran los hechos que son sorprendentes, sin embargo, los matemáticos tratan de explicarlo. Arthur Clarke (1917-2008) destaca que cualquier tecnología adelantada es imitación de la magia.

Como hemos visto en apartados anteriores, la utilización de recursos en el aula como el material manipulativo despierta la motivación y el interés del alumno, otro recurso interesante es la magia matemática, ya que cuando alguien hace magia despierta nuestra curiosidad por saber la explicación de dicho truco.

En este caso, se ha llevado a la práctica una sesión de magia matemática con la divisibilidad del 9 a los alumnos de 6º de Educación Primaria. Esta sesión ha constado de 5 trucos de magia con la divisibilidad del 9.

Se inició la sesión con 3 trucos de magia que realicé a los alumnos sin ningún tipo de explicación previa.

Acertando la suma

1. *Escribe la fecha completa de tu cumpleaños.*
2. *Forma un segundo número ordenando las cifras anteriores.*
3. *Resta el menor de los números al mayor.*
4. *Suma sus cifras, hasta obtener un número de una sola cifra.*

Respuesta: si restamos 2 números que contienen las mismas cifras, siempre nos saldrá un múltiplo de 9. Si seguimos sumando terminamos siempre con el número 9 en el resultado.

Leyendo el pensamiento

1. *Piensa un número del 1 al 9.*
2. *Réstale 3.*
3. *Multiplica el resultado por 3-*
4. *Eleva al cuadrado el resultado anterior.*

5. *Suma las cifras del resultado, si obtiene más de una cifra, súmalas hasta obtener una sola cifra.*
6. *Si el resultado anterior es menor que 5 súmale 5. Si es 5 o superior réstale 4.*
7. *Multiplica el resultado por 2.*
8. *Réstale 6*
9. *Asignamos el resultado, 1 con la A, el 2 con B, 4 con C, 5 con D, etc.*
10. *Piensa en un país europeo que empiece por la letra anterior.*
11. *Piensa en un animal que empiece por la segunda letra del país anterior.*

Respuesta: El resultado siempre será 9, porque la suma de cifras de múltiplos de 9 es siempre 9, por lo que restamos 5, y el resultado será 4. El único país de Europa que empieza por D es Dinamarca y el animal será la Iguana.

El número oculto

1. *Escribe un número de tres cifras.*
2. *Multiplícalo por 2.*
3. *Multiplícalo por un número de una cifra diferente de cero.*
4. *Multiplícalo por 3.*
5. *Multiplícalo otra vez por el número que quieras.*
6. *Multiplícalo por 6.*
7. *Finalmente, multiplícalo por un número de una sola cifra diferente a 0.*
8. *Tendrás un número de más de tres cifras. Escoge una de ellas diferente a 0 y di las otras en el orden que quieras.*

Respuesta: Las operaciones importantes son las multiplicaciones de 3 y 6, la suma de las cifras de un múltiplo de 9 siempre es múltiplo de 9.

La respuesta por parte del alumnado fue muy positiva; estaban concentrados en realizar todos los pasos de los trucos de magia e intrigados por saber cómo era posible que adivinase los resultados a los que ellos llegaban.

Una minoría de alumnos enseguida se dio cuenta de que los trucos de magia tenían que ver con el tema de la divisibilidad, pero no comprendían del todo los resultados.

A continuación trabajaron por parejas, a cada miembro de la pareja le facilité un truco de magia con los pasos y la solución, como se puede ver a continuación, para que se lo realizaran a su compañero.

En el blanco

1. *Escribe tu número favorito.*
2. *Multiplica el número de años anterior por tu edad.*
3. *Suma al resultado anterior el número del portal en el que vives.*
4. *Resta al resultado el número de amigos íntimos que tienes. (si tienes muchos amigos y la resta te sale negativa se deberá sumar).*
5. *Multiplica el número obtenido por 18 y suma las cifras del resultado. Si dicha suma contiene más de una cifra se vuelve a sumar hasta obtener un número de una sola cifra.*

Respuesta: El resultado siempre será 9, porque al sumar las cifras de cualquier múltiplo de 9 obtenemos siempre 9. Hemos pedido que multiplique su resultado por 18 (9 x 2).

Completando el número

1. *Piensa un número de tres cifras diferentes.*
2. *Forma un segundo número con las mismas cifras que el primero pero escritas en orden inverso.*
3. *Resta el menor de los números al mayor.*
4. *El resultado será un número de 3 cifras. Di las unidades y las centenas*

Respuesta: el resultado final será múltiplo de 9, por tanto al decirte las unidades y las centenas, averiguarás las decenas.

Por orden, realizaron el truco todos los alumnos que tenían el truco de magia "*En el blanco*", una vez finalizado realizaron el truco los alumnos que tenían *"Completando el número"*.

Tras finalizar los trucos de magia de la divisibilidad del 9, expliqué porqué acertaba los resultados de las operaciones, y los alumnos, en general, quedaron bastante impactados con la justificación de los trucos de magia. En este momento, los alumnos que habían tenido errores en sus trucos descubrieron el porqué; algunos alumnos tenían problemas en las operaciones, y otro error común fue que a la hora de cambiar la posición de las cifras se olvidaban de poner alguna o incluso cambiaban algún número.

Una vez revisados todos los trucos, los niños se dieron cuenta de cuáles eran sus fallos y volvieron a repetirlo de forma autónoma sin que nadie se lo hubiera impuesto, algo que me llamó la atención.

Por tanto se concluye que en esta sesión se despertó el interés y la participación en los alumnos, los cuales ampliaron sus conocimientos y competencias, ya que se realizaban los trucos de magia unos a otros.

11. CONCLUSIÓN.

He realizado un trabajo práctico en el aula con el objeto de encontrar diferencias entre el aprendizaje tradicional y el aprendizaje didáctico con material manipulativo en el área de Matemáticas.

Con estas sesiones he intentado despertar el interés del alumno hacia las matemáticas, haciéndoles ver que estas no solo se conciben de forma abstracta, si no que se pueden entender de varias formas.

Para poder comparar resultados, los alumnos realizaron un control previo a las 4 sesiones, donde su único recurso era el recuerdo de haberlo estudiado meses anteriores. Por otra parte, se realizó otro control al finalizar las sesiones de los números primos y compuestos través de material manipulativo.

Una vez realizados y analizados los controles y las diversas calificaciones del primer control al segundo; en general, los alumnos han mejorado notablemente. El hecho de utilizar piezas Lego y poder manipularlas para crear números primos y compuestos, múltiplos y divisores, mínimo común múltiplo y máximo común divisor, ha despertado cierta intriga en algunos alumnos que normalmente no eran participativos en el área de Matemáticas.

Considero que la mayoría de los alumnos ha alcanzado esa competencia matemática; esto se notaba porque había algunos alumnos que no llegaban a comprender la función de los Legos y se preguntaban entre ellos y se resolvían las dudas. El trabajo en grupo facilita dicha competencia matemática lingüística.

En cuanto a la introducción de la visión lúdica de las matemáticas, en la cual se realizaron trucos de magia con la divisibilidad del 9, se pretendía que los alumnos tuvieran más contacto con el tema de la divisibilidad de una forma dinámica y divertida, que despertara su interés. Su respuesta fue muy buena, todos los alumnos querían participar en los trucos de magia, y aprender a hacerlos para poder ponerlos en práctica con sus compañeros.

Finalmente, he de decir que la experiencia de trabajar directamente con alumnos en el aula ha sido muy positiva para mí y me ha enseñado mucho. He podido ver las matemáticas de otra forma completamente distinta, innovadora y dinámica; la cual creo que debería utilizarse más a menudo en el aula, ya que para los alumnos resulta bastante positivo, y el índice de mejora es notable.

12. REFERENCIAS.

- Alexandre, E. *Matemáticas, música: Pitágoras, Las matemáticas y la música*. 2013
- BOCYL, Decreto 26/2016, de 21 de Julio. Por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León.
- Capó Dolz, m. *Magia matemática*. Grupo Z, 2012.
- Clarke, C. *Profiles of the future*. Milleum Edition, 1962.
- Gracián, E. *Los números primos, un largo camino al infinito.* RBA Libros, 2010.
- Grossman, L. *El bosque mágico.* Ediciones B, 2015.
- Maldonado, M. E. *Teorías psicológicas del aprendizaje.* Universidad de Cuenca, 2001.
- Montessori, M. *Pedagogía científica.* Barcelona, Araluce, 1937.
- Puig Adam, P. *Didáctica matemática Heurística,* Madrid, Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral, 1956.
- Piaget, J. *El nacimiento de la inteligencia.* Barcelona, Crítica, 1990.
- Piaget, J. *Psicología del niño.* Madrid, Morata, 1982.
- Real Decreto 1393/2007, de 29 de Octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias.
- Real Decreto 1513/2006, de 7 de Diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas en Educación Primaria.
- Rivest. R, Shamir. A, Adleman. L. *A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems.* 1977
- Sautoy, M. *La música de los números primos.* Barcelona, Acantilado, 2007.
- Sierra Vázquez, M; González Acosta, M; Sánchez García, A; González Astudillo, M T. *Divisibilidad.* Síntesis, 1989.

- Soler, E. *La educación sensorial en la educación infantil.* Madrid, Rialp, 1992.
- Stewart, I. *Historia de las matemáticas.* Crítica, 2008.
- Thong, T. *Los estadios del niño en la Psicología Evolutiva: Los sistemas de Piaget. W allon. Gesell y Freud.* Madrid, Pablo del Río, 1981.
- Vygotsky, L.S. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona, Grijalbo, 1979.
- Yaglis, D. *Montessori: la educación natural y el medio.* Sevilla, Trillas, 2005.

ANEXOS

Anexo I. Presentación sesiones.

Imagen 1. Presentación día 1

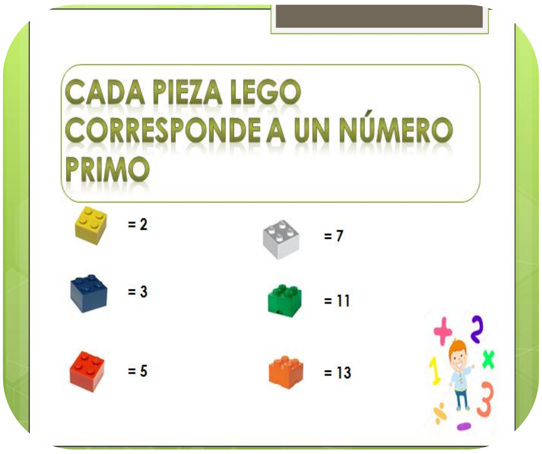

Imagen 2. Presentación día 2

Imagen 3. Presentación día 2

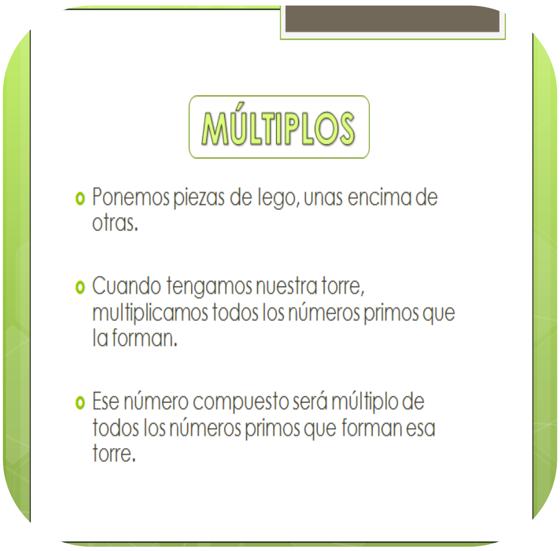

Imagen 4. Presentación día 2

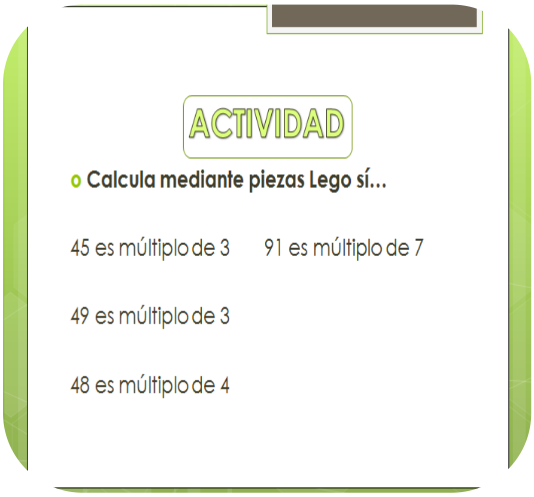

Imagen 5. Presentación día 2

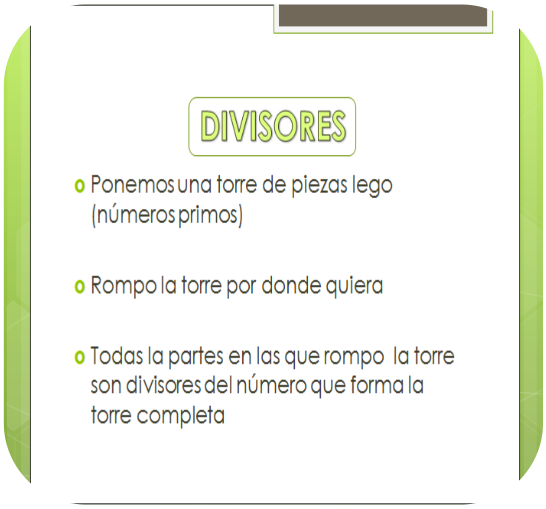

Imagen 6. Presentación día 3

Imagen 7. Presentación día 3

Imagen 8. Presentación día 3

Imagen 9. Presentación día 3

Imagen 10. Prsentación día 4

Imagen 11. Presentación día 4

Anexo II. Cuadro general.

Nivel, curso y grupo	Objetivos generales	Objetivos específicos	Actividades	Criterios de evaluación
6º B Educación Primaria	1. Conocer y diferenciar los números primos y compuestos. 2. Calcular los primeros múltiplos de un número dado. 3. Calcular todos los divisores de cualquier número menor que 100. 4. Calcular mínimo común múltiplo y máximo común divisor. 5. Aplicar el mínimo común múltiplo y máximo común divisor para la resolución de problemas.	1. Mediante la criba de Eratóstenes diferenciar números primos de números compuestos. 2. Aprender los números primos y compuestos con piezas Lego. 3. Dominar Múltiplos y divisores mediante piezas Lego. 4. Calcular mínimo común múltiplo y máximo común divisor mediante piezas Lego.	**Sesión 1** Actividades 1 y 2 **Sesión 2** Actividades 1, 2 y 3 **Sesión 3** Actividad 1 **Sesión 4** Actividades 1 y 2	1. Diferenciar números primos de números compuestos. 2. Formar números primos y compuestos mediante piezas Lego. 3. Formar múltiplos y divisores mediante piezas Lego. 4. Hallar el mínimo común múltiplo y máximo común divisor mediante piezas Lego.

Anexo III. Piezas Lego

Imagen 12, Piezas Lego utilizadas en el aula.