Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Trabajo de Fin de Grado

Grado en ADE

La Teoría de Juegos: Las Subastas a Céntimo

Presentado por:

Óliver Diez Gutiérrez

Valladolid, 17 de julio de 2018

INDICE

Índice de Gráficos y Tablas.

RESUMEN

En este trabajo se presenta de una manera breve y concisa los aspectos teóricos de la teoría de juegos, los distintos tipos de juegos y su solución, para ello debemos entender cómo funcionan las relaciones interpersonales que suponen entre los jugadores. Una de las soluciones propuestas es el equilibrio de Nash, además en la Teoría de Juegos veremos un tipo concreto como son los juegos con información incompleta, dentro de ellos una de las aplicaciones con mayor importancia es la Teoría de las Subastas, dentro de esta teoría veremos una de las subastas más novedosas y que más sorprende, por su funcionamiento, las subastas a céntimo, las cuales se van desarrollando gracias a su popularidad en internet.

Palabras clave: teoría de juegos, dilema del prisionero, equilibrio de Nash, subastas a céntimo.

JEL: C72, D44, D82.

ABSTRACT

In this paper we present in a brief and concise way the theoretical aspects of game theory, the different types of games and their solutions, for that we must understand how the interpersonal relationships that they suppose among the players work. One of the proposed solutions is the Nash equilibrium, in addition to the Game Theory we will see a specific type such as the games with incomplete information, within them one of the most important applications is the Theory of the Auctions, within this theory we will see one of the most novel auctions and that surprises, by its operation, the auctions to penny, which are developed thanks to its popularity on the internet.

Key words: game theory, prisoner's dilemma, Nash equilibrium, penny auctions.

1. INTRODUCCIÓN

La elección por mi parte del tema a estudiar viene dada por el interés que me suscitan las relaciones interpersonales cuando hay que tomar decisiones, aquí es donde juega un papel crucial la teoría de juegos, ya que la mayoría de estas relaciones se puede simplificar y estudiar como un juego. Hablamos así de numerosos ejemplos como pueden ser bien la batalla de los sexos o bien un juego de cartas típico. El objetivo base es poder explicar de una forma sencilla como actúan los individuos en dichas relaciones, además de poder explicar con simplicidad el funcionamiento de las subastas a céntimo, las cuales considero que son un tipo de juegos que se dan continuamente, sobre todo desde que tenemos acceso al mundo digital.

El presente trabajo está estructurado en base a los dos puntos más importantes y con los que quiero explicar la teoría de juegos y como nos afecta. En el segundo apartado vemos los inicios de la teoría de juegos, y como ha ido evolucionando hasta nuestros días, en este apartado veremos los juegos más significativos, los autores que los desarrollaron, y durante este apartado el lector podrá llegar a plantearse como muchas de sus interacciones con el resto de la sociedad en gran medida se corresponde a la toma de decisiones en los distintos juegos que se dan. En el tercer punto quiero hacer una reflexión de como las subastas son un tipo de juego, y aquí se verán un tipo de subastas muy interesantes y peculiares, como son las subastas a céntimo, más conocidas como Penny Auctions, donde veremos la importancia que ha desempeñado internet en dichas subastas, sería interesante que se siguiese investigando sobre este tipo de subastas ya que son novedosas y suscitan curiosidad.

2. TEORÍA DE JUEGOS

2.1. Introducción a la teoría de juegos

La teoría de juegos nace en los años cuarenta de la mano de la publicación de "Game Theory and Economic Behaviour" (un libro de Jonh Von Neuman [1]y

---

[1] John Von Neumann (Budapest, Hungria, 1903 - Washington D.C., USA.1957). Fue un matemático húngaro-estado unidense, el cual hizo numerosas contribuciones al campo de la física cuántica, nos interesa ya que junto a Oskar Morgenstern fue el padre de la teoría de juegos,

Oskar Morgenstern[2] de 1944), aunque previos a estos dos autores hay trabajos a principios de siglo XX como son los de Zermelo (1913), Borel (1921), Von Neuman (1928) y también otros trabajos matemáticos clave para entender la teoría de juegos como son los de Cournot (1838) y Edgeworth (1881). Sin embargo, no podemos hablar de una teoría como tal hasta que en 1944 Von Neuman y Morgenstern publicaron su famoso libro y que han ido precedidos por otros grandes autores del tema como ha sido Jonh F. Nash[3], Jonh Harsanyi[4] y Reinhard Selten[5], los cuales tienen una gran presencia en la teoría desde los años 70.

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas, que trata de determinar cómo deberían comportarse los individuos en situaciones de interdependencia e incertidumbre. Para ello veremos en el siguiente punto algunos de los principales conceptos que serán la base angular del trabajo realizado.

Vemos las situaciones que se pueden modelizar como juegos en muchas de las relaciones sociales que existen entre los individuos en el día a día, el simple hecho de observar a dos individuos decidiendo entre ir juntos a tomar unas tapas e ir a la piscina, puede ser analizado como un juego donde cada uno de los individuos querrá maximizar su beneficio o utilidad.

---

con el libro (Game theory and economic behaviour, del año 1944), en el cual se sentó las bases de esta nueva teoría matemática.

[2]"Oskar Morgenstern: (Görlitz, 1902 - Princeton, Nueva Jersey, 1977) Economista estadounidense de origen austríaco que desarrolló, junto con Neumann, la teoría de juegos, una teoría matemática del comportamiento económico."

[3] Jonh Forbes Nash (1928-2015, E.E.U.U.) Fue un matemático y economista estadounidense, Nash desarrolló los cálculos que hablan del equilibrio en la teoría de juegos, los cuales le supusieron en 1994 el premio nobel junto a Jonh Harsanyi y Reinhard Selten.

[4] Jonh Harsanyi (Budapest, 1920 - Berkeley, 2000) economista, filosofo, licenciado en farmacia, todo un todoterreno de los estudios nos interesa ya que estudió las interacciones de los jugadores en juegos como el póker y el ajedrez, y sobre todo nos interesa por la aplicación que sus estudios tuvieron en la teoría de juegos sobre todo en los juegos con información incompleta. Ganó en 1994 el premio nobel junto a JF Nash y Reinhard Selten.

[5] Reinhard Selten (1930-2016), científico alemán, premio nobel 1994, sus teorías de juegos basadas en la cooperación y el conflicto, las cuales le hicieron ganar dicho premio nobel, nos interesan debido a sus contribuciones a la teoría de juegos.

2.2. Tipos de juegos.

Antes de comenzar con la descripción de los tipos de juegos principales, me gustaría hacer una breve iniciación a la explicación de cada componente de los juegos, que veremos en cada ejemplo y que tiene que quedar claro antes de empezar.

- *Jugadores:* son dos o más individuos que participan en la situación de interdependencia, ahora llamada juego, con el único fin de maximizar su utilidad o de obtener el mayor beneficio posible.
- *Acciones:* son las decisiones que puede tomar cada jugador en un momento dado en el que el juego está en marcha (las acciones están condicionadas por la información que tiene cada jugador).
- *Resultados:* son los distintos modos en los que concluye el juego.
- *Pagos:* lo que recibe cada jugador una vez ha concluido el juego, depende del resultado. Es la utilidad que consigue cada jugador, conociendo sus acciones y que derivan en las estrategias.
- *Estrategias:* es el plan o conjunto de acciones llevado a cabo por los jugadores.
- *Forma estratégica o normal y forma extensiva:* la primera describe el juego organizado de forma matricial, los jugadores son capaces de tomar las decisiones de una sola vez, en el segundo caso el juego se organiza en forma de árbol de decisión, donde las decisiones pueden tomarse de forma secuencial. Estas dos formas de representar un juego se verán ampliadas en puntos posteriores.

2.2.1. Juegos cooperativos.

Llamamos juegos cooperativos a aquellos en los que existe algún tipo de colusión o cooperación entre los jugadores, de manera que las utilidades y las estrategias de los jugadores, serán tomadas a cabo de manera conjunta y con una maximización de la utilidad de manera colusoria. En este tipo de juegos la maximización de la utilidad conjunta, se llama valor mínimo que querrían obtener el conjunto de los jugadores.

"Definición 2.1. Un juego en forma coalicional o en forma de función característica con utilidades transferibles consiste en:

Un conjunto finito de jugadores J = {1, 2, ..., n}.

Una función característica, que asocia a cada subconjunto S de J (o coalición), un número real ν (S) (valor de la coalición), siendo $\nu(\emptyset) = 0$.

Por tanto, G = (J, ν) es un juego en forma coalicional o en forma de función característica con utilidades transferibles si J y v están especificados". (Pérez Navarro et al. 2004. pp. 48).

2.2.2. Juegos no cooperativos.

Llamamos juegos no cooperativos a aquellos en los que los jugadores toman las decisiones de forma independiente, sin llegar a cooperar y en muchos casos sin que los jugadores tengan información de lo que hacen los otros.

- Juegos con información completa.

En este tipo de juegos hablamos de que ambos jugadores tienen toda la información a su alcance, los jugadores conocen las estrategias que pueden seguir ambos, además conocen y saben que son racionales en la toma de decisiones, lo que quiere decir, que ambos intentarán maximizar su utilidad, por lo que en base a estos resultados cada jugador tomará una decisión.

Estos juegos se representarán según tomen los jugadores las decisiones, si los jugadores toman las decisiones de forma simultánea, hablaremos de juegos estáticos con información completa, y se representarán de forma estratégica, por otro lado, sí los jugadores tomasen las decisiones de forma secuencial, hablaríamos de juegos dinámicos con información completa por lo que se representarán de forma extensiva.

- Juegos con información incompleta o juegos bayesianos.

En este tipo de juegos, existe la posibilidad de que uno o alguno de los jugadores no dispongan de toda la información, o esta sea asimétrica para los jugadores, por lo tanto, los jugadores, aunque son conocedores de las estrategias no conocerán el resultado de aplicarlas. Como hemos visto en la introducción este tipo de juegos es bastante difícil de valorarlo, en ellos se decidió introducir información privada (sobre todo en forma de probabilidades), la cual es de conocimiento por los jugadores y es así como se podrá resolver el juego, tanto de forma estratégica como de forma extensiva.

- Juegos estáticos.

En el punto de los juegos con información completa vimos cómo eran este tipo de juegos, hablamos de juegos estáticos cuando ambos jugadores toman las decisiones de forma simultánea, de una sola vez y al finalizar el juego reciben los pagos, que pueden ser conocidos o no, el juego más conocido por todos de juego estático con información completa es sin duda alguna el juego del "dilema del prisionero" el cual veremos en punto posteriores y haremos una mayor reflexión.

- Juegos dinámicos.

En este tipo de juegos, los jugadores toman las decisiones de manera secuencial, primero las toma uno de ellos y después las tomará el otro.

Este tipo de juegos se distingue de los juegos estáticos simplemente en el tiempo en el que los jugadores toman las decisiones, esto es, únicamente que las decisiones se toman de forma que primero actúa un jugador y acto seguido actuará el otro, luego dependiendo de sí existe información completa o no, se verá si ambos conocen los pagos y/o la forma de proceder del otro.

Imagínese el lector que existen dos empresas, la empresa (A) y la empresa (B), la empresa A, tiene monopolio sobre un producto en un mercado, la empresa B sabe que en dicho mercado existe monopolio de A, pero que también hay beneficios si ella entra, por lo que decide entrar a competir con A, de esta manera pueden existir numerosas estrategias, pero la empresa A, parte con la ventaja de ser la primera jugadora y la empresa B será la que tome las decisiones después que la empresa A.

2.3. Representación de los juegos.

En este punto veremos la clasificación de los juegos en base a dos formas de representarlos y que darán los primeros pasos a las siguientes clasificaciones, pero antes, veremos un juego muy importante el llamado dilema del prisionero, el cuál desarrollamos a modo de introducción para la representación de los juegos.

2.3.1. Dilema del prisionero.

El caso del dilema del prisionero es sin duda el caso más utilizado al hablar de la teoría de juegos, esto es así por su simplicidad y por su elegancia, una vez descrito todo el proceso todos y cada uno de los lectores llegará a la misma conclusión. Pero antes de poder empezar con este caso quiero hacer un breve inciso para que veamos un extracto literal de un libro de William Poundstone (1992) "Prisoner's Dilemma".

"Repartir un pastel: Muchas personas saben cuál es la mejor forma de que dos críos caprichosos se repartan un pastel. No importa cuán equitativo seas al cortar el pastel; uno o ambos (niños) pensarán que le ha tocado el trozo más pequeño, la solución consiste en que uno de los niños corte el pastel, mientras que el otro niño decida que parte quiere" (Poundstone. 1992. pp 68-69). Cada uno, al participar en el reparto, no debería tener queja alguna, esto no solo plantea un juego como tal, sino que nos puede ayudar a ver cómo funciona el concepto de la maximización de la utilidad, ya que ambos buscaran conseguir el máximo beneficio, pudiendo incluso llegar a un equilibrio puro (concepto que veremos más adelante cuando estudiemos el equilibrio de Nash) y que puede explicar de forma muy clara el concepto del dilema del prisionero, que vemos a continuación.

Ejemplo 2.1. El dilema del prisionero. "Dos delincuentes habituales son apresados bajo sospecha de que han cometido dos delitos, uno grave del cual no hay pruebas claras contra ellos, pero sí fuertes indicios, por otra parte, hay pruebas de un delito menor. Ambos son interrogados simultáneamente en habitaciones separadas y se les exponen las siguientes situaciones. Primero se les expone que sí ambos no confiesan, no se les podrá acusar del delito grave y solamente serán condenados al delito menor de un año en prisión, en segundo lugar, uno de ellos puede delatar al otro por lo que el delator se librará de las condenas debido a la cooperación con la policía mientras que el delatado cumplirá 5 años de prisión, en tercer lugar que ambos delaten al otro y colaboren con la policía, así pasarían a cumplir ambos los 5 años del delito mayor pero al colaborar se les resta 1 año de cárcel más por el delito menor" (Pérez Navarro et al. 2004. pp. 64).

Tabla 2.1. El dilema del prisionero.

P_2 / P_1	**No Confesar**	**Confesar**
No Confesar	**-1,-1**	**-5,0**
Confesar	**0,-5**	**-4,-4**

Fuente: Pérez Navarro et al. 2004. pp. 64.

En este tipo de juegos cabe encontrar una solución factible que pueda ser o bien confesar y delatar al otro con lo que el jugador podría quedar libre de la pena, o bien que ambos se delaten con lo que ambos jugadores irían a la cárcel con la máxima pena, o bien por último que ambos jugadores no se delaten y ambos prisioneros tengan una condena por el delito menor. Como bien sabemos los jugadores racionales querrán maximizar su utilidad, por lo que la lógica cabe decir que como ambos no pueden comunicarse, al final decidirán delatar al otro para así poder salvarse, entonces al suceder esto ambos prisioneros estarán incurriendo en la mayor de las condenas.

En el ejemplo 2.1. El dilema del prisionero, vemos como dependiendo de las estrategias obtenían unos resultados, vamos a modificar este ejemplo para que los resultados pasen a ser positivos, así sumaremos 5 años, en este caso, a las utilidades de la anterior tabla con lo que obtendremos esta nueva tabla.

Tabla 2.2: El dilema del prisionero.

P_2 / P_1	**No Confesar**	**Confesar**
No Confesar	**4,4**	**0,5**
Confesar	**5,0**	**1,1**

Fuente: Pérez Navarro et al. 2004.pp. 64.

2.3.2. Juegos de forma estratégica o normal.

Para empezar a desarrollar este tipo de representación de juegos es conveniente que hagamos una pausa y volvamos a ver qué se entiende por estrategia para un jugador. Como ya vimos las estrategias son los planes de acción que llevan a la toma de decisiones de manera que se pueda maximizar la utilidad del jugador. Por tanto, cada estrategia pura para el jugador i, coincide con cada acción tomada por el mismo jugador, por ser un juego estático.

Los juegos en forma estratégica son la forma de representación adecuada para los juegos estáticos con información completa.

Entonces un juego en forma estratégica G viene especificado por

$$G=(J,(S_i)_{i\in J},(r_i)_{i\in J})$$

Donde J son los jugadores, S_i las estrategias y r_i los pagos del jugador i

$$s_i \in Si \rightarrow S = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \epsilon\, s_1 \times s_2 \times \ldots \times s_n = S$$

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$$

Ejemplo 2.2. La batalla de los sexos. Una pareja se cita después del trabajo, para ir al cine o al fútbol. Cada uno toma una decisión, sin saber lo que hace el otro, asique tienen que esperar para ver qué decisión tomará la otra persona. Ambos prefieren ir juntos a cualquiera de las dos opciones, antes de ir solos, el jugador 1 prefiere ir a ver el partido de futbol, mientras que el jugador 2 prefiere ir a ver una película al cine.

Tabla 2.3: La batalla de los sexos.

J_2 / J_1	**Cine**	**Fútbol**
Cine	**1,2**	**0,0**
Fútbol	**0,0**	**2,1**

Fuente: Pérez Navarro, Cerdá Tena y Jimeno Pastor, 2004. pp. 65.

En el ejemplo anterior vemos como las estrategias: S_i donde S_1 = S_2 {Cine, Fútbol}

2.3.3. Juegos de forma extensiva.

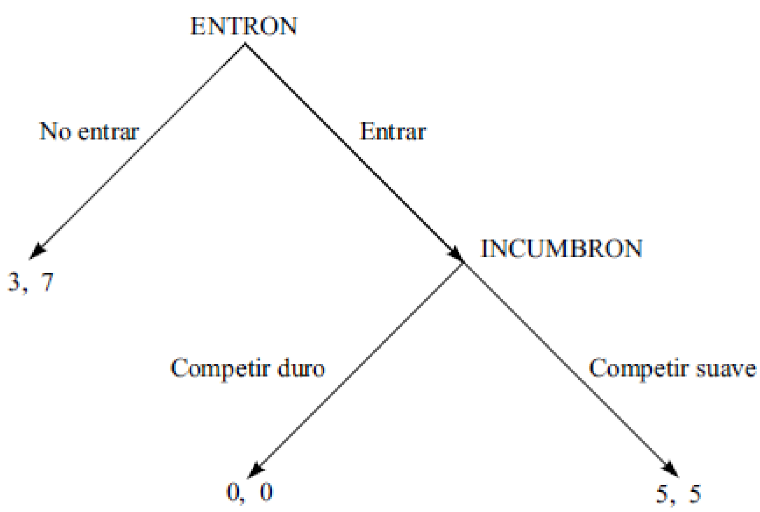
Este tipo de representación es la más adecuada para los juegos dinámicos. Como ya vimos en la introducción este tipo de juego se verá mejor representado con un ejemplo.

Ejemplo 2.3. Un juego de disuasión

"En el siguiente juego de disuasión, la empresa INCUMBRON ejerce un monopolio de hecho en el mercado de un bien, lo cual le produce unos beneficios altos, de 7 u.m. Por su parte, la empresa ENTRON, que opera en otros mercados, está estudiando la posibilidad de entrar en el mercado monopolizado por INCUMBRON porque sabe que podría aumentar sus beneficios de 3 a 5 u.m., siempre que la reacción de ésta sea buena y se establezca una competencia razonable. En ese caso, la empresa establecida, INCUMBRON, obtendría unos beneficios moderados, de 5 u.m. Sin embargo, una competencia dura, por ejemplo, una guerra de precios haría que ambas empresas se quedaran sin beneficios.

Esta situación se representa como un juego en forma extensiva en la Figura 2.1, en donde ENTRON es la jugadora 1 e INCUMBRON es la jugadora 2." (Pérez Navarro et al. 2004. pp. 220).

Gráfico 2.1: Un juego de disuasión.



Fuente: Pérez Navarro, Cerdá Tena y Jimeno Pastor, 2004. pp. 221.

Elementos del juego.

- Jugadores: J={1,2}={ENTRON, INCUMBRON}
- Acciones: Vemos como las acciones son, A_1={Entrar, No Entrar}, A_2={Competir Suave, Competir Duro} .
- Estrategias: donde $s_i(x)$ son las estrategias que cada jugador puede llevar a cabo. S_1={Entrar, No Entrar}, S_2={Competir Suave, Competir Duro}
- Pagos: donde $r_i(x)$ es el pago de un jugador i en el nodo terminal.
  - r_1(No Entrar, ---)=3 y r_2 (No Entrar, ---)=7
  - r_1(Entrar, Competir Duro)=0; r_1(Entrar, Competir suave)=5
  - r_2(Entrar, Competir Suave)=0; r_2(Entrar, Competir suave)=5

2.4. Soluciones del juego.

Hasta el momento el lector habrá podido ir desgranando lo que se entiende por solución de un juego, entendemos esta, como aquel momento dentro del juego donde todos los jugadores han llegado a su estrategia óptima, habrán maximizado su utilidad. Según la teoría del Equilibrio de Nash, que veremos más adelante en este mismo punto, la solución que propone es aquella en la que ningún jugador de forma individual querrá optar por otra estrategia.

Existen numerosos métodos de resolución de juegos, en este trabajo vamos a centrarnos en dos que serán fundamentales, la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas (usada para juegos estáticos) y por otra parte el equilibrio de Nash (el cual se usará tanto para los juegos estáticos como para los juegos dinámicos, así como también se utilizará si existe información completa o incompleta). Por todo lo que veremos en los siguientes puntos podremos decir sin duda alguna que el equilibrio de Nash (EN) es la solución más elegante de resolución de juegos y la búsqueda del equilibrio por parte de los jugadores.

2.4.1. Soluciones con argumentos de dominación.

Estas soluciones consisten en que sí un jugador tiene una estrategia que le proporciona mayor utilidad que otra, independientemente de lo que haga el resto de los jugadores, siempre utilizará dicha estrategia y no otra.

Dadas s’ y s’’ dos estrategias del jugador i, se dice que s’ está dominada por s’’ o que s’’ domina a s’ si los pagos proporcionados para el jugador i por s’ son menores o iguales que los que proporciona s’’ independientemente de lo que jueguen el resto de los jugadores. Al menos en un caso los pagos deben ser menores. En esta situación hablamos de dominancia débil o simplemente dominancia. Cuando todos los pagos son menores se habla de dominancia estricta.

Una estrategia es dominante (estrictamente dominante) cuando domina al resto de estrategias del jugador. Un perfil de estrategias es un equilibrio en estrategias dominantes cuando está formado por estrategias dominantes para cada jugador.

Atendiendo a estos criterios tenemos tres tipos de solución

- Uso de estrategias dominantes: Cada jugador utiliza una estrategia dominante, si la tiene. “Pertenecen a la solución del juego todos aquellos perfiles de estrategias en los cuales cada jugador usa una estrategia dominante”. (Perez Navarro et al. 2004. pp 71). En la tabla 2.2. El dilema del prisionero. Vemos que este es un método muy sencillo que muchas veces se torna ineficaz, ya que en numerosas ocasiones dentro del juego no existirán estrategias dominantes, o simplemente serán estrategias con una dominación débil. En el ejemplo 2.1 El dilema del prisionero que vimos en puntos anteriores vemos claramente cómo posee un equilibrio en estrategias dominantes (Confesar, Confesar).

  r_1(No confesar, No confesar)= 4 < r_1(Confesar, No confesar)=5

  r_1(No confesar, Confesar)= 0 < r_1(Confesar, Confesar) = 1

  r_2(No confesar, No confesar)= 4 < r_2(No confesar, Confesar)=5

  r_2(Confesar, No confesar)= 0 < r_2(Confesar, Confesar) = 1

  En este juego vemos como los dos presos podrían estar mejor si ambos no confesasen, pero como son racionales, maximizaran su utilidad de forma individual, haciendo que incurran en la estrategia de Confesar.

- Eliminación iterativa estricta: Se van eliminando de forma iterativa las estrategias estrictamente dominadas para cada jugador. La estrategia s_i' está estrictamente dominada por s_i si:

  $$r_i (s_1,\ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1},\ldots s_n) < r_i (s_1,\ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1},\ldots, s_n)$$

  para todo $s_1 \in S_i,\ldots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1},\ldots, s_n \in S_n$.

- Eliminación iterativa débil: Se van eliminando de forma iterativa las estrategias débilmente dominadas para cada jugador. La estrategia s_i' está débilmente dominada por s_i si:

  $$r_i (s_1,\ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1},\ldots s_n) \leq r_i (s_1,\ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1},\ldots, s_n)$$

  para todo $s_1 \in S_i,\ldots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1},\ldots, s_n \in S_n$. con alguna desigualdad estricta

Tabla 2.4: Estrategias débilmente dominadas.

J_2 / J_1	X	Y
A	**10,9**	**15,10**
B	**15,0**	**15,15**

$r_1(A, X)= 10< r_1(B,X)=15$

$r_1(A,Y)= 15 \leq r_1(B,Y) = 15$

$r_2(X,A)= 9<r_2(Y,A)=10$

$r_2(X,B)= 0 < r_2(Y,B) = 15$

Se ve claramente como el equilibrio en estrategias con dominancia débil es el r_i {B,Y}={15,15}

Tabla 2.5: Ejemplo de EIE.

J_2 / J_1	I	C	D
A	**3,1**	**4,2**	**1,2**
M	**2,4**	**3,5**	**4,0**
B	**1,0**	**2,1**	**0,3**

Fuente: Pérez Navarro, et al, 2004. pp. 78.

En este caso vemos que sí aplicamos la solución de EIE al subconjunto de soluciones que salen son, S^{EIE}= {(A,C), (A, D), (M, C), (M, D)}, puesto que las únicas soluciones que se eliminarían en primera instancia serían de J_1 = B, y de J_2 = I.

Tabla 2.6: Ejemplo de EIE.

J_2 / J_1	C	D
A	4,2	1,2
M	3,5	4,0

Fuente: Pérez Navarro et al. 2004. pp. 78.

Sin embargo, aquí vemos como sí en vez de aplicar la EIE, aplicamos la solución menos estricta EID podremos eliminar más conjuntos de estrategias. Así en segunda instancia hemos eliminado de J_2 = D y por último hemos eliminado de J_1 = M, quedándonos un S^{EID}= {(A,C)}.

Tabla 2.7: Ejemplo de EID.

J_2 / J_1	C
A	4,2

Fuente: Pérez Navarro et al. 2004. pp. 78.

2.4.2. El equilibrio de Nash.

El equilibrio de Nash es el concepto de solución de juegos más importante, y se verá en todo tipo de juegos, tanto en los estáticos como en los dinámicos, así como en los que tienen información completa o los que la tienen incompleta. Hasta ahora estábamos viendo, análisis dedicados a la dominación de estrategias y basados en la racionalidad de los jugadores, por lo que veíamos muchos casos en los que los juegos quedaban sin resolver o quedaban resueltos de una manera débil, así con el equilibrio de Nash, de ahora en adelante EN, vemos como esto cambiará y los juegos serán más fáciles de resolver.

El enfoque del EN lo que propone es una línea de análisis en el que la cuestión clave no pase solamente por el estudio de estrategias dominadas y eliminación iterativa.

El concepto de equilibrio de Nash se basa en que un jugador toma la mejor decisión posible, supuestas dadas las decisiones del resto de los jugadores. Cuando un perfil de estrategias es un equilibrio de Nash, ningún jugador tiene motivos para cambiar su decisión puesto que está jugando de manera óptima supuesto que el resto de los jugadores no cambian su elección.

Definición formal de equilibrio de Nash:

Así veremos la definición del EN en estrategias puras. "En el juego

$$G=\{s_1, \ldots, s_n; r_1, \ldots, r_n\},$$

decimos que el perfil de estrategias puras ($s'_1, s'_2, \ldots, s'_i, \ldots, s'_n$) es un **Equilibrio de Nash** (EN) si para cada jugador i, para todo s_i de S_i

$$r_i(s'_1, \ldots, s'_{i-1}, s'_i, s'_{i+1}, \ldots, s'_n) \geq r_i(s'_1, \ldots, s'_{i-1}, s_i, s_{+1}', \ldots, s'_n)$$

Es decir, para cada jugador i, s^*_i es una solución del problema

max $r_i(s'_1, \ldots, s'_{i-1}, s'_i, s'_{i+1}, \ldots, s'_n)$donde s_i es la variable de decisión y pertenece a S_i. O, dicho de otro modo, para cada jugador i, s'_i es una respuesta óptima a s'_{-i}.".

De esta definición podemos decir que un EN es un perfil de estrategias del cual ningún jugador querría desviarse de forma unilateral, es decir que la maximización de las utilidades en el EN pasa primero por una maximización conjunta por delante de lo que elegiría un solo jugador. Vemos aquí el supuesto del dilema del prisionero antes mencionado. En el ejemplo 2.1, dilema del prisonero, vemos como el EN es un equilibrio en estrategias dominantes. En la tabla 2.2. del ejemplo del dilema del prisionero vemos que (Confesar,Confesar) es un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes, ya que siempre un jugador iba a obtener mayores utilidades o pagos r_i sí, confesaba y delataba al otro jugador. Por lo que aquí sí coincidirá que este equilibrio en estrategias dominantes es a su vez un equilibrio de Nash, ya que sí escogemos el perfil de estrategias (No Confesar, No confesar) y analizamos al jugador 1, su estrategia que es mejor sería la de no confesar que ya vimos anteriormente y lo mismo ocurre con el jugador 2 por lo que vemos que en este caso se cumple la premisa del equilibrio de Nash, aunque en este caso existe un equilibrio de Nash, este es un equilibrio de Nash cuando vemos la dominación de estrategias como un concepto de equilibrio individual y no como un concepto de equilibrio colectivo de aquí que no sea un equilibrio Pareto[6]-eficiente.

Hasta ahora habíamos visto el EN en estrategias puras, ahora vamos a ver esta solución para otras muchas estrategias, ya que hay que recordar que el EN es una solución aplicable a otro tipo de juegos:

- EN en estrategias mixtas. En este tipo de estrategias vemos a los jugadores no solamente condicionados a la elección entre estrategias ciertas y concreta, sino a que también puedan existir estrategias aleatorias, o una combinación lineal de estrategias, en las cuales juega un papel muy importante las probabilidades que tienen cada estrategia, hay que hacer una pequeña matización; toda estrategia pura es a su vez una estrategia mixta con probabilidades 1 y 0. Por lo tanto aquí el EN funciona de una manera muy similar que en las estrategias puras, a las que añadimos las probabilidades de ocurrencia y así los jugadores podrán maximizar sus utilidades. “Un perfil de estrategias mixtas es un EN si solo si, para cada jugador, todas las estrategias puras soporte de su estrategia mixta son una respuesta óptima a la combinación de estrategias de equilibrio del resto de jugadores”. (En el punto de juegos bayesianos veremos un claro ejemplo de como proceder con estrategias mixtas).

- EN en los juegos dinámicos (EN perfecto en subjuegos). Este tipo de juegos están representados de forma extensiva, como ya vimos en apartados anteriores del trabajo, en ellos tenemos que desarrollar un nuevo concepto que será el que marque la diferencia para obtener los resultados deseados; este será la credibilidad, ya que sin ella es muy difícil poder ver las

[6] “la dominación de Pareto es un concepto de análisis de la eficiencia social, relevante para el grupo de jugadores como tal grupo, la dominación de estrategias es un concepto de análisis de la eficiencia individual.” (Pérez Navarro et al. 2004. pp. 106)

decisiones de los jugadores en cada momento, las decisiones futuras estarán condicionando las decisiones presentes. Esto es así ya que al ver un juego de forma extensiva y transformarlo en un juego en forma estratégica se perdería información, por eso damos tanta importancia al término credibilidad. En el ejemplo 2.3, que vimos del juego de disuasión se ve claramente lo que queremos explicar.

Tabla 2.8: Ejemplo 2.3. Juego de disuasión en forma normal.

J_1 \ J_2		**INCUMBRON**	
		Comp. Duro	**Comp. Suave**
ENTRON	**Entrar**	**0,0**	**5,5**
	No entrar	**3,7**	**3,7**

Fuente: Pérez Navarro, et al, 2004. pp. 233.

El equilibrio de Nash en estrategias puras parece ser que; s'_i = (Entrar, Competir Suave) y s'_i = (No entrar, Competir Duro) Aunque ambos perfiles estratégicos son EN, el segundo de ellos no es razonable desde el punto de vista de la dinámica de juegos, ya que estamos obviando el término de credibilidad. Si la empresa 1 decide Entrar, la empresa 2, Competirá Suave, ya que es la única opción que maximiza la utilidad. El único que es un equilibrio razonable es Entrar, Competir Suave que es el único EN perfecto en subjuegos.

- EN bayesiano: es la solución para resolución de juegos bayesianos, donde no hay información completa, en este punto vamos a ver un nuevo ejemplo donde quedará más clara la forma de proceder para obtener los EN bayesianos.

Ejemplo 2.4. “Una empresa (Jugadora 1) está establecida en un mercado y debe decidir si construir o no una nueva planta. Los potenciales beneficios de esta acción dependen de si otra empresa (Jugadora 2) entra o no en el mercado. La Jugadora 2 tiene incertidumbre acerca de los costes de construir la planta que enfrenta la Jugadora 1, que pueden ser altos o bajos con probabilidades estimadas en 1/3 y 2/3 respectivamente. La Jugadora 1 conoce sus costes. Las decisiones de construir o no construir y entrar o no entrar se toman simultáneamente. Los pagos se muestran a continuación.

- Encuentre los equilibrios bayesianos de este juego".

(Universidad Carlos III de Madrid TEORÍA DE LOS JUEGOS Lista de ejercicios de juegos repetidos y bayesianos, ejercicio 7).

Tabla 2.9. Costes altos.

Con una probabilidad de 1/3

J_2 / J_1	**Entrar**	**No Entrar**
Construir	**0,-1**	**15,-1**
No construir	**2,1**	**3,0**

Tabla 2.10. Costes bajos.

Con una probabilidad de 2/3

J_2 / J_1	**Entrar**	**No entrar**
Construir	**15,-1**	**35,0**
~~**No construir**~~	~~**2,1**~~	~~**3,0**~~

Para la resolución del caso hay que ver:

1º. Quien tiene información perfecta; de aquí sacamos las estrategias dominadas. Jugadora 1.

2º. Quien es la que tiene información imperfecta; es en la que estudiamos sus posibilidades. Jugadora 2. C>Nc

3º. Las estrategias que existen y las que se eliminan por la existencia de dominación. S_1={(C,C) ~~(C,Nc) (Nc,Nc)~~ (Nc,C)}, S_2 ={E,Ne}

4º. Se dan las opciones reales para la Jugadora 1; {(C,C) (Nc,C)}

a. Si J_1 elige (C,C) . u(E)= ((-1) × 1/3+(-1) × 2/3) = -1

u(Ne)= ((-1) × 1/3+ 0 × 2/3) = -1/3

Preferimos No Entrar ya que -1/3>-1

b. En el caso de Nc,C, no existe EN bayesiano ya que 15>3

5º. EN bayesianos {((C,C),NE)}

En este ejemplo vemos simplificado un ejercicio con EN bayesianos, los cuales suelen tornarse complicados, además vemos cómo proceder para su solución con EN en juegos bayesianos, la cual combina las probabilidades que se ven en juegos dinámicos y las soluciones de estrategias dominadas y eliminación iterativa que se ven en los juegos estáticos.

3. TEORIA DE LA SUBASTAS

3.1. Introducción a la teoría de las subastas.

Entendemos como subastas al mecanismo de asignación de bienes mediante el cual, el vendedor da la oportunidad al pujador de conseguir uno o varios objetos al precio que estipule conveniente. En todas las subastas destacan tres elementos que son fundamentales:

- ¿Quién tiene el objeto o los objetos a subastar? El vendedor.
- Cuáles son las asignaciones (pujas) que los compradores hacen del objeto subastado.
- Los compradores solo juegan el papel de pujadores, el resto no interesa dentro de la subasta.

Las subastas son procedimientos por los que se venden uno o varios objetos donde el precio final de los objetos no está prefijado de antemano, así el comprador o compradores tienen la oportunidad de presentar sus ofertas mediante lo que llamamos pujas.

Muchas subastas son estudiadas como un tipo de juego con información incompleta, desde el punto de vista de la teoría de juegos, ya que cumplen las premisas para ello, existen jugadores, o pujadores, existen diferentes estrategias y acciones y existen los pagos o resultados. Aunque son estudiadas como un tipo de juego las primeras subastas datan de antes de los romanos, según cree Martin Shubik[7] las subastas se remontan a la época babilónica donde se subastaban a las mujeres como si fueran esposas, y donde los distintos pujantes ofrecían mayores cantidades de dinero por las mejores mujeres. No obstante, el

[7] Martin Shubik: (1926 – Actualidad E.E.U.U.) profesor y economista en la Universidad de Yale, nos interesa por sus estudios en la teoría de juegos, sobre todo en lo que concierne a la teoría de las subastas.

termino subasta o "auction" en inglés viene del latín, ya que fue el antiguo imperio Romano el que dio más uso a las subastas, tanto para el intercambio de vienes como de personas o animales.

Las subastas normalmente se dan en torno a las sociedades por que cubren las necesidades que tiene la sociedad en torno a la oferta y la demanda de bienes y servicios, así para la aparición de las subastas en las sociedades se dan por dos premisas:

- Cubrir la necesidad de intercambio de bienes y servicios en una sociedad con una población concentrada.
- La existencia de una moneda que sirva para dar valor a todo tipo de intercambios dentro de esa sociedad.
- ¿Quién tiene el objeto o los objetos a subastar? El vendedor.
- Cuáles son las asignaciones (pujas) que los compradores hacen del objeto subastado.
- Los compradores solo juegan el papel de pujadores, el resto no interesa dentro de la subasta.

En la sociedad global actual con internet como medio global, las subastas han vuelto a tener una mayor repercusión, Ebay es el claro ejemplo de esta repercusión, aunque no solo en Ebay, existen numerosas plataformas de intercambio en la que el tipo de juego es más parecido a una subasta, por ejemplo, en la moda de las subastas a céntimo, donde es posible adquirir un producto con descuentos de hasta el 90%. Más adelante veremos explicado como funcionan este tipo de subastas, donde no es oro todo lo que reluce.

3.2. Juegos bayesianos.

Hasta ahora habíamos estudiado los supuestos de que todos los juegos tenían información completa y perfecta para los jugadores, algo que es muy inusual en el mundo real, a partir de ahora veremos los casos en los que la información es asimétrica. Los ejemplos más claros que podemos desgranar de este tipo de juegos son las ventas de productos, por ejemplo, productos de segunda mano, las subastas, y cualquier tipo de negociación donde uno de los jugadores tiene más información que el otro.

Se conocen como juegos bayesianos aquellos en los que es posible que la información de la que disponen los jugadores sea para uno o para ambos asimétrica, esto quiere decir que los jugadores disponen de información distinta. El análisis de estos juegos es más complejo que los de información completa. La solución viene de los trabajos de Harsanyi (1967), quien introduce el concepto de información privada con una jugada de azar previa al desarrollo del juego. El hecho de poder escoger las estrategias con asimetrías en la información es la característica principal de este tipo de juegos. El modelo de Harsanyi incluía el azar, como un jugador que da cierta información a alguno de los otros jugadores.

En los juegos bayesianos hacemos hincapié en las preferencias para la toma de decisiones.

"En la representación de los juegos con información incompleta (juego bayesiano estático) cada jugador *i* tiene, además de acciones A_i y pagos r_i, un conjunto de **tipos** T_i y una suposición o **conjetura** p_i sobre el tipo de los otros jugadores. En general, suponemos que cada tipo t_i es una variable aleatoria, que la distribución de probabilidad conjunta de los tipos viene dada por la función $p(t_1, ..., t_i, ..., t_n)$ y que la conjetura *pi* es una probabilidad condicionada, denotada $p_i(t_{-i}/t_i)$, que depende de cuál sea el tipo efectivo *ti* del jugador *i*. Por último, la función de pagos de cada jugador depende de las acciones decididas y de los tipos efectivos de todos los jugadores, denotándose

$$r_i(a_1, ..., a_i, ..., a_n; t_1, ..., t_i, ..., t_n)$$

Resumiendo:

$$G_B = \{J; A_1, A_2, ..., A_n; T_1, T_2, ..., T_n; p_1, p_2, ..., p_n; r_1, r_2, ..., r_n\}$$

La estructura de resolución para dicho juego pasa por varias fases.

1º. Veremos como el azar ha fijado un vector de tipos $\boldsymbol{t}=(t_1, ..., t_i, ..., t_n)$, donde t_i pertenece a T_i, de acuerdo con una probabilidad a priori $p(\boldsymbol{t})$, que es de dominio público. Aquí vemos cuales son las situaciones que se dan en el juego para que ambos jugadores puedan tomar las decisiones sobre las estrategias."

2º. El jugador *i* tiene información privada sobre el juego que aparece recogida en tipo t_i.

3º. Vemos todas las estrategias existentes en el juego, condicionadas a los **tipos** t_i y a las **conjeturas** p_i.

4º. Los jugadores toman las decisiones de forma conjunta teniendo en cuenta los tipos y acciones posibles.

3.3. Tipos de subastas.

Siguiendo las premisas del modelo de Vickrey (1961), donde vemos como analiza las subastas como si fuera un juego con información incompleta, se han establecido cuatro tipos básicos de subastas, para subastas de un objeto y dos para subastas de múltiples objetos, que son las más importantes sí tenemos en cuenta que solo hay un objeto subastado que se quiere adquirir o que existan subastas de múltiples unidades pero que solo queramos adquirir una de ellas. Entendemos como subastas al mecanismo de asignación de bienes mediante el cual, el vendedor da la oportunidad al pujador de conseguir uno o varios objetos al precio que estipule conveniente. En todas las subastas destacan tres elementos que son fundamentales:

Las subastas se pueden clasificar de varias formas, según las unidades a subastar, pueden ser individuales o múltiples. Dentro de las individuales vemos que se pueden clasificar según el mecanismo de asignación es el método de la subasta, estas pueden ser a sobre abierto, en ellas los compradores son conscientes de todas las pujas que se hacen por el objeto, y luego están las subastas de sobre cerrado, donde los pujadores no tienen más información que su propia puja. Dentro de las subastas de sobre cerrado veremos las subastas ascendentes o inglesas y las subastas descendentes u holandesas.

- Subasta ascendente o inglesa: Es el tipo de subasta más utilizado, el ejemplo más simple de este tipo de subastas, son las subastas de obras de arte en una galería, aquí la puja comienza con un precio bajo (precio reserva, el cual sirve para costear los gastos de la subasta) y los postores comienzan subiendo sus pujas. Esta característica es la que la hace interesante. La puja más alta es el precio que se paga por el objeto que gana. Algunas veces en vez de pujar a viva voz (cantar pujas) se utilizan medios electrónicos, estos limitan la información de las pujas, aunque los postores siempre serán conscientes de la puja máxima en cada momento.

- Subasta descendente u holandesa: Recibe este nombre por las subastas de flores y pescado en Holanda, funcionan al contrario que las anteriores. En este caso se marca un precio máximo y los postores van cantando pujas por debajo del precio hasta que se llega a una puja superior al resto que es la que gana.

- Subasta en sobre cerrado al primer precio: Aquí los postores que desean el objeto presentan una oferta o puja en un sobre cerrado y gana el postor que haya ofrecido la puja más alta. En el supuesto en que existan dos o más postores que hayan empatado en las pujas el desempate se producirá valorando las pujas con la misma probabilidad y actuando así el azar, o bien se les permitirá volver a realizar una puja más alta a la anterior con el fin de que desempaten. En este tipo de subastas la información de las pujas es privada por lo que ningún potencial comprador conoce cual son las pujas del resto, el postor además solo tiene una oportunidad para adquirir el objeto. Los ejemplos más destacados de este tipo de subastas son; las concesiones mineras, de petróleo, o las concesiones para la construcción de vías públicas.

- Subasta en sobre cerrado al segundo precio (subasta Vickrey): Esta subasta sería como la anterior, con la salvedad de que gana la puja más alta, pero sin embargo se paga el segundo precio más alto. De esta manera el precio es independiente de la puja ganadora.

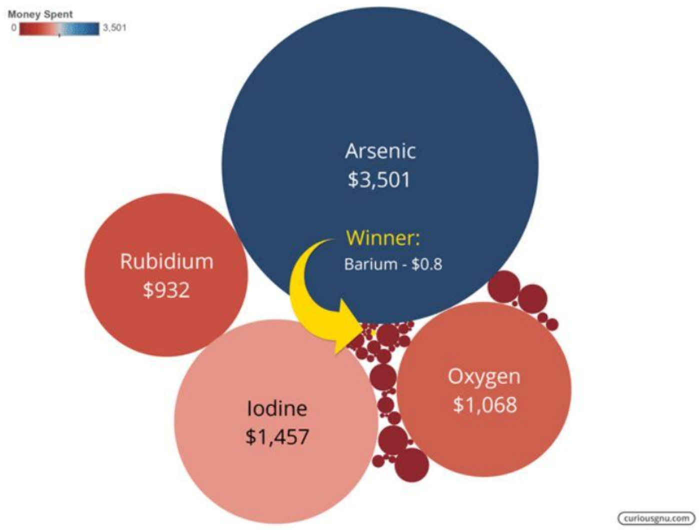
Además de estos cuatro tipos de subastas, existe una gran variedad de modificaciones como por ejemplo las subastas de precio mínimo, subastas inversas, subastas a céntimo, etc… Analizaremos en el siguiente epígrafe estas últimas por sus características particulares y sorprendentes.

Además de las subastas de una unidad, existen subastas de N unidades, o subastas múltiples veremos dos tipos de subastas que pueden darnos una ligera idea de como funcionan este tipo de subastas, además pueden tener un parecido a las subastas al primer y al segundo precio. En este tipo de subastas el postor escribe una puja por cada unidad que quiere adquirir, el subastador las ordena de mayor a menor y fija un precio de corte (normalmente donde la demanda se iguala o supera a la oferta), a partir de ahí se adjudican los objetos. Sí se pagan los precios máximos por cada unidad, hablamos de una subasta discriminatoria, mientras que sí por el contrario el precio a pagar es el precio de corte, hablamos de una subasta con precio uniforme. (Juez, 2003; Millán, 2006).

3.4. Subastas a céntimo.

Las subastas a céntimo o (penny auctions) por su nombre en inglés son una modalidad novedosa de subastas que pueden considerarse como un híbrido entre una subasta ascendente o inglesa Hinnosaar (2016) y una lotería. Se llama subasta a céntimo, pero bien podría llamarse subasta con apuestas, donde el postor en vez de realizar pujas realiza apuestas. Puja, es la acción que se lleva a cabo en una subasta cuando quieres conseguir el objeto subastado, mejor dicho, es el precio que estás dispuesto a pagar por un objeto en una subasta. Apuesta, es la acción que se lleva a cabo cuando quieres arriesgar una cantidad monetaria o de otro tipo para conseguir un propósito, en este caso queremos apostar dinero. La diferencia entre las dos definiciones se ve sobre todo en el termino arriesgar, que es cuando tu pago monetario por un objeto está condicionado para su consecución a un elemento llamado riesgo, donde existen probabilidades que lo harán posible o no. Entonces el funcionamiento de las subastas a céntimo será el siguiente. Este tipo de subastas se suele dar mediante páginas web, las más famosas son: beezid.com (actualmente ha cerrado), wellbid.com, quibids.com…, su funcionamiento varía entre unas y otras pero a grandes rasgos funcionan de la siguiente manera; en ellas los postores pueden conseguir objetos a precios con descuentos de entre el 80 al 90%, su explicación es debido a que cada apuesta por el postor aumenta en un céntimo el precio del bien subastado, el cual por norma general empieza siendo de 0 unidades monetarias. Que dicho objeto aumente en un céntimo por cada apuesta no significa que ese sea el precio que pagarán los postores, ya que las apuestas normalmente se hacen por créditos y los créditos se suelen comprar por precios más altos en torno a los 0,20 céntimos y hasta un 1 €, además en muchas subastas cada apuesta se hace por más de un crédito, luego cada subasta tiene un límite de tiempo, el cuál suele aumentar por cada apuesta realizada. Con todo esto no hay garantías de que sí haces la mayor apuesta te lleves el objeto subastado, ya que en este tipo de subastas gana la última puja realizada y todos los postores tienen que pagar sus pujas. En un sitio web curiousGnu (2016) se da un ejemplo de cómo funcionan este tipo de subastas de una manera visualmente muy simple, en el hablan de como en beezid.com se subastó una tablet que tenía un precio de 180 $ (precio venta minorista), la cual generó unas 18160 ofertas, además de 56 usuarios casi la mitad de las ofertas las realizó un mismo postor, que perdió unos 3500 $ y lo más curioso es que no ganó la subasta, quien ganó la subasta la ganó apostando 0,8 $, los autores han hecho un gráfico sobre el ejemplo, en el cual han sustituido los nombres de los postores por elementos químicos.

Gráfico 3.2: Ejemplo Penny Auctions.



Como vemos en este ejemplo hay cuatro personas que no han sido racionales frente a la subasta ya que sí eso hubiera sido así estas personas hubieran parado sus pujas justo cuando ya habían gastado lo equivalente al precio que les hubiera supuesto comprarlo a un minorista.

Según Gnutzmann (2014) este tipo de subastas suelen arrojar unos beneficios superiores al 50% por productos relacionados con la tecnología y que suelen tener precios altos en ventas minoristas, por otro lado, cuanto más bajos son estos precios este tipo de subastas va perdiendo su atractivo llegando incluso a obtener pérdidas de más de un 20% en algunos objetos. Estas conclusiones parecen una locura, pero tienen su explicación por el mero hecho de que en estudios realizados por Kahneman y Tversky (1979), sobre las actitudes de las personas hacia el riesgo, habla de que las personas no saben valorar el riesgo cuando creen que pueden conseguir una ganga.

Las páginas web sobre este tipo de subastas han gozado de mucha popularidad estos últimos años, aunque actualmente están siendo vigiladas e investigadas por el gran número de denuncias de estafas que han ido obteniendo (consumer report, 2014).

4. CONCLUSIONES.

En este trabajo se ha intentado explicar que es la Teoría de Juegos y algunas de sus derivaciones como puede ser la Teoría de las Subastas. La Teoría de Juegos, estudia las relaciones interpersonales que se dan a diario, donde los jugadores siempre buscarán la maximización de los resultados, cumpliendo las reglas impuestas por dichas relaciones.

Desde el comienzo del trabajo hemos podido observar como dicha teoría no solo se limita al campo de las matemáticas y la economía, sino que, debido a las relaciones interpersonales, se ha podido utilizar también en la psicología, sociología, el marketing…

En la Teoría de Juegos destaca un tipo de juegos que suscita un enorme interés y que se asemeja mejor a la realidad y al día a día, estos son los juegos con información incompleta o juegos bayesianos, los cuales destacan por ser un tipo de juegos donde la información es asimétrica, para algunos jugadores. La solución que introdujo Harsanyi (1967) en sus trabajos, en la que nos habla del concepto del azar, mediante una jugada anterior al desarrollo del juego, suele ser la solución más utilizada por muchos estudios posteriores.

De este tipo de juegos se desarrolla la Teoría de las Subastas, que se pueden interpretar como juegos con información incompleta. Dentro de la Teoría de las subastas, hemos visto un tipo de subastas novedoso, como son las subastas a céntimo o penny auctions, en ellas vemos como su funcionamiento es un híbrido entre una lotería y una subasta, donde las pujas son más parecidas a apuestas, ya que en estas subastas no gana el postor con mayor puja, sino gana la última puja antes de que acabe la subasta. Este nuevo tipo de subastas está actualmente en el punto de mira de muchas personas e incluso de algunos gobiernos debido a su dudosa forma de proceder. Sería muy positivo para todos sí se pudiera tener un modelo teórico de estudio para las subastas a céntimo, donde se pudiera resumir cómo funcionan, ya que, en la actualidad, dependiendo de los sitios webs donde quieras hacer tu apuesta, se procede de distinta manera. Con respecto a ellas hay autores como Gnutzman (2014) e Hinnosar (2016), que coinciden en las teorías de las perspectivas y de la aversión al riesgo para explicar como hay postores que no son racionales a la hora de realizar las pujas.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

Gnutzmann, H. (2014). Of Pennies and Prospects: Understanding Behaviour in Penny Auctions.

Hinnosaar, T. (2016). Penny auctions. International Journal of Industrial Organization, 48, 59-87.

Juez, P. D. (2003). Teoría de subastas y reputación del vendedor. Dirección de Estudios, Comisión Nacional del Mercado de Valores.

Millán, L. (2006). Teoría de Subastas. Notas de Clase.

Pérez Navarro, J., Cerdá Tena, E. y Jimeno Pastor, J. L. (2004). Teoría de juegos. Pearson educación.

Poundstone, W. (1992). *Prisoner's Dilemma*. Nueva York, Doubleday. (Traducción al español: *El dilema del prisionero*. Madrid, Alianza Editorial, 1995).

Ricart, J. E. (1988). Juegos con información incompleta. IESE Business School-Universidad de Navarra, 5-9.

Referencias procedentes de internet.

Aguado Franco, J.C. (abril, 2018). Introducción a la teoría de juegos 2ª edición, Universidad Rey Juan Carlos. En Miriadax.net. [Consulta 15/05/2018]. Disponible en. https://miriadax.net/web/introduccion-a-la-teoria-de-juegos-2/inicio?timestamp=

Stokel-Walker, C. (mayo, 2015). ¿Qué es exactamente la teoría de juegos? [Consulta 15/05/2018]. Disponible en.

http://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/02/150220_teoria_de_juegos_que_es_finde_dv

Biografías y Vidas, la enciclopedia biográfica en línea. (2004-2018). [Consulta 15/05/2018]. Disponible en.

https://www.biografiasyvidas.com/

J Navarro, J. ¿Qué es la Teoría de Juegos? (mayo de 2011) [Consulta 19/05/2018]

https://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia/que-es-la-teoria-de-juegos

Mathema Getafe. (diciembre, 2016) Equilibrio de Nash en juegos bayesianos. [Consulta 21/05/2018]. Disponible en.

https://www.youtube.com/watch?v=ZZN_1wRROGo&t=20s

Díaz, L. Un recorrido por la historia de las subastas. [Consulta 21/05/2018]. Disponible en.

http://www.surusin.com/un-recorrido-por-la-historia-de-las-subastas/

Universidad Carlos III de Madrid. TEORÍA DE LOS JUEGOS, Lista de ejercicios de juegos repetidos y bayesianos, (ejercicio 7). [Consulta 01/06/2018]. Disponible en.

http://www.eco.uc3m.es/docencia/new_juegos/doc/Problemas%20Repetidos%20y%20Bayes.pdf

With penny auctions, you can spend a bundle but still leave empty-handed (junio, 2014). [Consulta 20/06/2018]. Disponible en.

https://www.consumerreports.org/cro/2011/12/with-penny-auctions-you-can-spend-a-bundle-but-still-leave-empty-handed/index.htm

Bidding on penny auction sites is risky (junio, 2014). [Consulta 20/06/2018]. Disponible en.

https://www.consumerreports.org/cro/news/2014/06/bidding-on-penny-auction-sites-is-risky/index.htm

Penny Auctions - How to sell a $180 tablet for $7,264 (abril, 2016). [Consulta 20/06/2018]. Disponible en.

https://www.curiousgnu.com/penny-auctions

Martin, A. (abril, 2016). Las subastas para ganar iPhones por 10 euros que no dejas de ver en Facebook, explicadas. [Consulta 01/07/2018]. Disponible en.

https://hipertextual.com/2016/04/subastas-a-centimo