TRATADO

DE ARITMETICA Y GEOMETRIA

DE DIBUJANTES,

QUE PUBLICA LA REAL ACADEMIA

DE SAN FERNANDO

PARA USO DE SUS DISCÍPULOS.

ORDENADO POR EL ARQUITECTO TENIENTE DE DIRECTOR

DE LA MISMA DON JUAN MIGUEL DE INCLÁN VALDÉS.

SEGUNDA IMPRESION.

MADRID

POR IBARRA, IMPRESOR DE CÁMARA DE S. M.

1826.

PRÓLOGO.

Establecido por la Real Academia de San Fernando el curso por donde debe abrirse la carrera de las artes, se hacia forzoso el arreglar un tratado particular que solamente comprendiese las lecciones que tuvo por necesarias; y como sea de absoluta necesidad para imponerse en el interesante estudio de la simetría instruir al joven principiante por lo menos en el sistema de la numeracion aritmética, en las operaciones de los números enteros y quebrados, en la doctrina general de las razones y proporciones, y en las diversas especies que de estas se conocen, con cuanto corresponde á su composicion y descomposicion; fue de su primera atencion dar principio por esta parte de la Aritmética, cuyo estudio fijará la de los niños, y sujetará la natural volubilidad de su imaginacion, haciéndoles adquirir amor á la verdad con el método preciso en todas las cosas, y muy particularmente en la Geometría. Esta ciencia, que es la que ofrece las justas ideas de las figuras de sus contornos y dintornos, suministrando medios para denominarlas, clasificarlas y distinguir la inmensa variedad de cuerpos de la naturaleza por las diferentes formas que afectan á los sentidos; es asimismo la que corrigiendo los defectos que tiene la vista de todos aquellos que ven las cosas mas anchas que largas, ó mayores ó menores que lo que en realidad son, dará á los discípulos con la delineacion de las figuras geométricas la soltura, facilidad y destreza necesarias á la mano del dibujante. Asi que, siendo el presente tratado limitado á los principios referidos en la Aritmética, será ceñido en la Geometría á las ideas generales de la ciencia en el conocimiento de las líneas rectas y curvas, á las posiciones que pueden tener unas con otras, ó por sí solas, á los ángulos que con ellas se forman, á la diversidad de figuras que resultan de su combinacion, al modo de formarlas, y á una sencilla idea de los sólidos.

PARTE PRIMERA.

DE LA ARITMETICA.

NOCIONES PRELIMINARES, QUE DECLARAN LA NATURALEZA DE LOS NUMEROS Y SUS DIFERENTES ESPECIES.

1. *Aritmética es la ciencia de los números, ó bien la que trata de la cantidad discreta*; esto es, de la cantidad expresada por números.

Considera la aritmética la naturaleza de los números y sus propiedades, y suministra medios fáciles asi para representarlos como para componerlos y resolverlos, que es lo que se llama *calcular*.

2. *Cantidad es todo lo que es capaz de aumento ó diminucion, ó todo lo que en su especie puede ser mayor ó menor*; como el peso, la extension ó medida, la duracion &c. Mas aqui se debe entender solamente la cantidad expresada por números, que es la que forma el asunto de la aritmética.

3. Llámase en general *unidad á toda cantidad que se elige para que sirva de término de comparacion respecto de todas las cantidades de una misma especie.* Divídese en abstracta y concreta; se llama abstracta cuando no se refiere á especie determinada, como uno ó una; y concreta cuando se refiere á especie determinada, como un real, una vara.

4. *Número es el resultado de la comparacion de una cantidad con la que se toma por unidad.* Si se desea saber los pesos fuertes que hay en un monton, se elegirá uno de ellos; y si se contuviese, por egemplo, veinte veces en el monton se dirá que

veinte es el número, por ser el resultado de la comparacion.

5. El número se divide en entero, quebrado, mixto, y quebrado de quebrado.

6. Número entero *es aquel en que la unidad se contiene exâctamente*; tales son cincuenta varas, treinta reales, veinte maravedises; pues la vara, el real y el maravedí se hallan contenidos en ellos un número justo de veces.

7. Número quebrado *es aquel que consta solamente de partes de la unidad*: un medio, tres cuartos ó tres cuartas partes de una cosa, cuatro sextos &c. son números quebrados, pues solamente constan de partes de la unidad.

8. Número mixto *es aquel que consta ó se compone de unidades enteras y de partes de la unidad*: cuatro y medio, tres y un cuarto, seis y dos tercios son números mixtos, por cuanto cada uno de ellos se compone de unidades enteras y de partes de la unidad.

9. Quebrado de quebrado *es el que equivale á parte de partes de la unidad*; la mitad de la cuarta parte de una vara es un quebrado de quebrado.

10. Se llama *número abstracto* todo número que se pronuncia sin determinar la especie de unidades de que se compone: así tres ó tres veces, cuatro ó cuatro veces son números abstractos; pero si al pronunciar un número tambien se expresa la especie de las unidades que le forman, se llama *concreto*: seis reales, cuatro pesos, cinco hombres son números concretos.

De la numeracion.

11. La numeracion es el arte de expresar todos los números con una cantidad limitada de nombres

y caracteres. Estos caracteres se llaman *guarismos* ó *cifras*.

12. Los caracteres de que se usa, ó fueron adoptados en la numeracion, y los nombres de los números que representan, son como sigue:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
cero,	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve.

Para expresar con estos caracteres todos los demas números han convenido los aritméticos en reducir ó juntar diez unidades en sola una, á la cual llamaron *decena*: en contar por decenas del mismo modo que por unidades, esto es, una decena, dos decenas, tres decenas &c. formando con diez decenas una *centena*: en contar por centenas del mismo modo que por unidades y decenas; y en valerse para representar estas nuevas unidades de decena y centena de los mismos guarismos que para expresar las unidades simples; pero distinguiéndolas por el lugar en que se escriben, poniendo las decenas al lado de las unidades simples hácia la izquierda, y las centenas al lado izquierdo de las decenas.

13. Esto supuesto, para representar el número *treinta y cuatro*, que contiene tres decenas y cuatro unidades, se escribirá el guarismo 4 de unidades, y á su izquierda el 3 que ha de representar las decenas, quedando colocados del modo siguiente: 34. Para representar *sesenta*, que contiene un número cabal de decenas sin unidad alguna, se escribe 60, poniendo un cero en seguida del 6, con lo que se da á entender que no hay unidades simples, y se hace que el guarismo 6 represente un número de decenas. A este modo se puede contar hasta *noventa y nueve* inclusive: *por consiguiente es propiedad de la numeracion que un guarismo puesto al lado de otro hácia la izquierda, ó despues del cual se*

sigue cero, representa un número diez veces mayor que si estuviera solo.

14. En virtud de este convenio desde el número 99 se puede contar hasta novecientos noventa y nueve: asi para representar *setecientos sesenta y cinco*, que contiene siete centenas, seis decenas y cinco unidades, se escribirá 765. Si se quisiese representar *setecientos y cinco*, que contiene siete centenas, ninguna decena y cinco unidades, se escribirá 705 poniendo un cero en lugar de las decenas que no hay: y si faltasen tambien las unidades, como para expresar *setecientos*, que solo contiene siete centenas, se pondrán dos ceros en los lugares de decenas y unidades, y se escribirá 700.

Es fácil percibir la razon de esta práctica, y de que para representar el número setecientos y cinco se debe escribir 705, poniendo un cero en lugar de las decenas; porque si al expresar este número no se pusiese carácter alguno en lugar de las decenas que no hay, se escribiría 75 solamente, en cuyo caso el guarismo 7 solo representaria decenas, y no centenas, como se habia propuesto: luego para que exprese centenas, ó valga setecientos, se ha de poner un cero entre el 7 y el 5, como se ha visto. Este razonamiento se puede aplicar á todos los casos semejantes. *Por tanto un guarismo al cual se siguen otros dos ó dos ceros, representa un número cien veces mayor que si estuviese solo.*

15. En la propia forma desde *novecientos noventa y nueve* se puede contar hasta *nueve mil novecientos noventa y nueve*, formando con diez centenas una unidad, que se llama *millar*, por cuanto diez veces ciento son mil, contando estas unidades como se hizo con las anteriores, y representándolas con los mismos guarismos puestos al lado izquierdo

de las centenas. Asi para representar *ocho mil seiscientos treinta y cuatro* se escribirá 8634: para representar *ocho mil treinta y cuatro*, 8034: para representar *ocho mil y cuatro*, 8004; y para representar *ocho mil*, 8000. *Por lo que un guarismo, al cual se le siguen otros tres ó tres ceros, representa un número mil veces mayor que si estuviese solo.*

Practicando esta misma regla de comprender diez unidades de cierta órden en una sola unidad, y colocando estas nuevas unidades en lugares tanto mas avanzados hácia la izquierda cuanto mayor es su órden, se consigue expresar por un método uniforme y con solos diez caracteres todos los números enteros imaginables.

16. Para leer fácilmente un número representado por cuantos guarismos se quisiere, se repartirán en porciones de tres guarismos cada una, procediendo de la derecha á la izquierda, y se dará á cada porcion los nombres siguientes: la primera, empezando por la derecha, de *unidades*, de *millares*, de *millones* de millares de *millones*, de *billones*, de *millares de billones*, de *trillones &c.* El primer guarismo de cada porcion, empezando siempre por la derecha, lleva el nombre de unidades, el segundo de decenas, el tercero de centenas; y empezando á leer por la izquierda se leerá cada porcion como si estuviese sola, pronunciando al fin de cada una el nombre correspondiente á la misma porcion.

Esto supuesto, para leer cualesquiera cantidad que se presente, por crecida que sea, como la siguiente:

trillones *billones* *millones* *unidades*

3 2 1

81,398.674,349.271,432.124

divídase toda la cantidad de tres en tres cifras, empezando por mano derecha y poniendo en la primera division un punto, en la segunda una coma, en la tercera un punto, en la cuarta una coma &c.: escribase para mayor facilidad encima de la division en donde toca coma un 1, un 2, un 3, para tener presente que al llegar á estas señales debe decirse *millon*, *billon*, *trillon*; y repitiendo los tres lugares primeros de *unidad*, *decena y centena*, se dirá en la segunda division *unidad de millar*, *decena de millar*, *centena de millar*; en la tercera se dirá *unidad de millon*, *decena de millon*, *centena de millon &c.* Con que leyendo la cantidad propuesta se dirá que vale ochenta y un trillones, trescientos noventa y ocho mil seiscientos setenta y cuatro billones, trescientos cuarenta y nueve mil doscientos setenta y un millones, cuatrocientos treinta y dos mil ciento veinte y cuatro unidades.

Operaciones de la aritmética.

17. Las operaciones fundamentales de la aritmética son cuatro; *sumar*, *restar*, *multiplicar* y *partir*; y en cuantas cuestiones se puedan proponer sobre los números se tiene que hacer alguna de estas operaciones, ó todas ellas, porque reduciéndose á operaciones de composicion y de resolucion, pertenece á las primeras el sumar y multiplicar, y á las segundas restar y dividir. Esto supuesto, ya se deja conocer de cuanta importancia sean estas operaciones, cuya egecucion se enseña tratando primeramente de los números enteros.

De la adicion ó modo de sumar los números enteros.

18. Cuando se calculan los números con la mira

de expresar en uno solo el valor de todos juntos, esto se llama hacer una adicion: luego *sumar es juntar dos ó mas cantidades de una misma especie en una sola, que exprese el valor de todas juntas.*

Si los números que se han de sumar no contienen sino un solo guarismo, no se necesita regla alguna; pero cuando constan de muchos guarismos se hallará su valor, llamado *suma*, practicando la regla siguiente.

19. *Escríbanse los números ó cantidades propuestas unas debajo de otras, de modo que las unidades de cada una correspondan con las unidades de las otras*, ó esten en una misma línea de arriba abajo; *las decenas con las decenas, las centenas con las centenas &c.*, y tírese por debajo una línea.

Hecho esto dése principio á sumar por la columna de las unidades; y si la suma no pasase de 9, escríbase debajo de esta columna el número que la exprese; pero si completase decena ó decenas justas, se pondrá un cero; y reservando la decena ó decenas, teniéndolas por otras tantas unidades del órden mayor, se juntarán á la suma de los números de la columna inmediata, que es la de decenas: si la suma pasare de 10, se pondrán debajo las unidades de exceso á la decena, y esta decena ó decenas se juntarán del mismo modo á la columna inmediata. Con este órden se practicará la suma de las decenas, de las centenas &c., cual se manifiesta por los egemplos siguientes, que aclararán toda duda.

Egemplo 1.°

Se trata de sumar las cantidades 45624 y 3233. Se escribirán del modo expresado; y tirando por debajo la línea correspondiente, quedarán cual se ve.

Se empezará á sumar por la columna de las unidades diciendo: 4 y 3 son 7, que por no llegar á decena se escribe debajo: se pasa á la segunda columna ó de decenas diciendo: 2 y 3 son 5, que por la misma razon se escribe debajo: se continúa del mismo modo en las centenas, 6 y 2 son 8; en los millares 5 y 3 son 8, y últimamente en las decenas de millares diciendo: 4 es 4. El número hallado 48857 será la suma de las cantidades propuestas.

45624	
3233	
48857	Suma.

Egemplo 2.°

Se pide la suma de los cuatro números ó cantidades siguientes: 6309, 4786, 395, 3527. Escritas del modo dicho, se dará principio por la columna de unidades diciendo: 9 y 6 son 15, y 5 son 20, y 7 son 27; pero 27 unidades hacen dos decenas y 7 unidades. Por tanto se escriben las 7 unidades reservando las dos decenas para agregar á la columna inmediata, en cuya razon se dirá: 2 llevadas y o es 2, y 8 son 10, y 9 son 19, y 2 son 21; mas 21 decenas hacen 2 centenas y 1 decena mas; se escribirá pues la 1 decena, y las dos centenas se llevarán al órden correspondiente: prosígase diciendo: 2 llevadas y 3 son 5, y 7 son 12, y 3 son 15, y 5 son 20; pero 20 centenas hacen 2 millares justos, con que se escribirá un cero en la suma, y los 2 millares se llevarán á la columna inmediata, diciendo del mismo modo: 2 y 6 son 8, y 4 son 12, y 3 son 15, que se escribirán finalmente poniendo el 5 debajo de los millares, y el 1 á su izquierda, ocupando un lugar mayor ó de mayor

6309	
4786	
395	
3527	
15017	Suma.

órden cual es el de decena de millar: y será la suma 15017 unidades.

20. Para expresar la adicion se suele usar de esta señal $+$, que quiere decir *mas*, y se coloca en medio de los dos números que se han de sumar; asi $3+4$ expresa que se ha de sumar el 3 con el 4, y se lee 3 mas 4: á la suma se antepone este signo $=$, que significa igualdad, y asi $3+4=7$, se dice 3 mas 4 igual 7; y esta otra expresion $8+7=15$, se leerá 8 mas 7 igual 15.

De la sustraccion ó del modo de restar los números enteros.

21. La sustraccion no es otra cosa que una operacion en la que se trata de averiguar la diferencia que hay entre dos números de una misma especie. Luego se puede decir que *restar es quitar un número menor de otro mayor, para hallar la diferencia que hay entre los dos.*

En la operacion de restar concurren dos cantidades, la cantidad de quien se resta llamada *restando*, y la cantidad que se resta llamada *restador*: el resultado de esta operacion se llama *resta*, *diferencia ó residuo.* Para hacer esta operacion escríbase el restador, ó cantidad que se quiera restar debajo del restando, ó cantidad de quien se ha de restar con la propia atencion que en el sumar, y que correspondan las unidades bajo de unidades, decenas bajo de decenas &c.; y tirando una línea se principiará la resta por la columna de unidades, quitando el número inferior del superior, y escribiendo debajo de estos respectivos números la diferencia que hay del uno al otro; ó bien poniendo cero cuando fuesen iguales, y por consiguiente sin diferencia.

22. Si el guarismo inferior del restador fuese mayor que el superior del restando, entonces no se puede verificar la resta sin hacer otra operacion, aunque solo se hace con el pensamiento, cual es la de quitar una unidad del órden inmediato de decenas, que vale diez unidades, y juntas con las que se tengan en el guarismo restando se verificará la resta.

Cuando el guarismo inmediato es cero ó ceros, se considerará sacada la unidad del inmediato primer guarismo de valor, que es lo mismo, pues progresivamente irá cada unidad valiendo diez en el órden inferior. Esta unidad quitada del órden inmediato se tendrá presente para cuando se hayan de restar sus guarismos, pues ó bien se ha de tener por disminuida en el restando, ó aumentada al restador. La práctica de esta operacion y egemplos siguientes aclararán toda duda.

Egemplo 1.º

Se pide restar de la cantidad 8954 la cantidad 5432.

8954	restando.
5432	restador.
———	
3522	resta.

Escríbanse las cantidades segun se ha dicho, y tirando por debajo la línea, empiécese por las unidades diciendo: de 4 quitando 2 resta 2, que se escribe debajo; pásese á las decenas, y dígase: de 5 quitando 3 resta 2, que asimismo se escribe; y haciendo lo propio en las centenas se dirá: de 9 quitando 4 resta 5; y últimamente: de 8 quitando 5 resta 3. Y resultará que la diferencia ó resta entre los dos números ó cantidades propuestas es 3522.

Egemplo 2.º

Se pide restar de la cantidad 45964 la cantidad 9897.

45964	restando.
9897	restador.
36067	resta.

Escritas las cantidades del modo dicho, se dá principio á la resta por los guarismos de la unidad, y como del restando 4 no se puede quitar el restador 7, se tomará una unidad del guarismo inmediato, que vale 10 unidades simples, y unidas al 4 serán 14: asi se dirá: de 14 quitando 7 restan 7. Pasando luego á las decenas se tendrá presente que la unidad que se quitó anteriormente, ó bien se debe considerar disminuida en el restando 6, ó bien aumentada al 9 restador, lo que es una misma cosa, y por tanto creyéndose menos expuesto á equivocaciones se determina el aumentarla al restador, en cuyo supuesto se dirá: de 14 (que anteriormente se hizo el restando) se lleva 1, y 9 son 10; quien de 6 quita 10 no puede ser, con que se hará la misma operacion de aumentarle de una unidad del órden inmediato, y se tendrá 16, de cuyo número, restando el 10 como queda dicho, es la diferencia 6. En la tercera columna se dirá del mismo modo: 1 quitada, ó que se lleva, y 8 que hay en el restador, son 9; quien de 9 quita 9 no resta nada, y se pondrá un cero á la resta; continúa la operacion diciendo: de 15 quitando 9 resta 6; y se concluirá finalmente diciendo: 4 menos 1, que se lleva en 15 es 3. Sentado esto se tendrá que la resta ó diferencia entre las dos cantidades propuestas es la de 36067.

23. Para expresar una sustraccion se escriben los números dados, poniendo en medio el signo *menos*: que es el siguiente —, asi 12 — 8 = 4, se leerá: 12 menos 8 igual 4.

De las pruebas de la adicion y sustraccion.

24. Toda operacion aritmética tiene comprobacion ó prueba, y esta nueva operacion asegura el acierto en el resultado de la primera.

25. La prueba de la adicion se reduce á sumar al reves de como antes se hizo la operacion; esto es, empezando por la izquierda y guarismos del órden mayor, y restando la suma particular de cada columna de la parte que la corresponde en la suma principal progresivamente; y cuando no quedase resta alguna en esta operacion, estará bien hecha la primera.

6309	
4786	
395	
3527	
15017	suma.
02220	
000	

Se quiere probar si está bien egecutada la operacion del segundo egemplo de la adicion. Dando principio por el órden mayor, se dirá: 6 y 4 son 10, y 3 son 13, á 15 que hay en la suma van 2, que se escribe por debajo del 5, cubriendo con un cero la decena de dicho 15. En la segunda columna: 3 y 7 son 10, y 3 son 13, y 5 son 18, á 20 que se tiene en la suma van 2. En la tercera columna: 8 y 9 son 17, y 2 son 19, á 21 van 2. Ultimamente: 9 y 6 son 15, y 5 son 20, y 7 son 27; á 27 cero; con lo que queda toda la suma coronada de ceros, y por tanto en seguridad de que la primitiva operacion estuvo bien egecutada.

26. Tambien hay otra prueba del sumar, que por pedir mayor operacion no está tan en uso; pero siendo un comprobante seguro, y el único que dan por texto algunos autores, parece oportuno hacer mencion de ella en el egemplo siguiente, proponiendo las mismas cantidades.

Se sumarán todas las cantidades propuestas menos una, como por egemplo, la primera que se separa por una línea, y esta suma, que se llama *suma parcial*, se restará de la suma total, y si la resta ó diferencia fuese igual á la cantidad que se dejó por sumar, como se verifica en el egemplo propuesto, la operacion estará bien egecutada.

6309	separada.
4786	
395	
3527	
15017	suma total.
8708	suma parcial.
6309	resta.

27. La prueba de la sustraccion es muy sencilla, y se reduce de la misma operacion; pues si la resta ó residuo manifiesta la diferencia que hay del restando al restador, ó lo que es lo mismo, cuanto el restador es menor que el restando, sumando la diferencia con el restador habrá de salir la suma igual á la cantidad del restando.

Asi en la operacion del segundo egemplo de la sustraccion, sumando el restador 9897 con la resta 36067, sale la suma 45964 igual en un todo á la cantidad restando.

45964	restando.
9897	restador.
36067	resta.
45964	suma.

De la multiplicacion de los números enteros.

28. *Multiplicar un número por otro es tomar el uno de dos números tantas veces como unidades haya en el otro*: asi, multiplicar 4 por 3 es tomar el número cuatro tres veces.

29. El número que se multiplica se llama *multiplicando*; aquel por quien se multiplica *multiplicador*, y lo que resulta de la multiplicacion *producto*. Tambien al multiplicando y multiplicador se llaman *factores del producto*, ó factores de la multipli-

cacion; asi 4 y 3 son factores del producto 12, porque 4 multiplicado por 3 son 12.

30. El producto en toda multiplicacion es tantas veces mayor que el multiplicando, cuantas el multiplicador es mayor que la unidad; por tanto si se suma tantas veces el multiplicando, cuantas unidades tiene el multiplicador, la suma será igual al producto que resulta de la multiplicacion de los dos factores.

Luego toda multiplicacion no es otra cosa que un sumar abreviado; pues asi como multiplicando 4 por 3, sale de producto 12, asi tambien si se escribe el 4 tres veces, como se ve, haciendo despues la suma, resulta ser esta el mismo 12. Pero esta operacion seria tan sumamente larga cuando el multiplicador fuese un número crecido, como se hace breve por el método de la multiplicacion que se va á explicar.

4
4
4
12

31. Antes de esta explicacion conviene saber: 1.° *que el producto en toda operacion de multiplicar es de la especie del multiplicando*; esto es, que las unidades del producto entre dos factores, ó números de diferente especie, son siempre de la misma naturaleza que las del multiplicando; porque siendo el oficio del multiplicador señalar cuantas veces se deberá tomar el multiplicando, será el producto este mismo multiplicando repetido cierto número de veces. Una sola cuestion bastará para determinar esta verdad: ¿cuánto importarán 24 varas de paño á razon de 36 reales vara? Se ve desde luego que en esta operacion lo que se busca son los reales que costarian las 24 varas: que el multiplicando es el número 36 reales: que el multiplicador es 24 varas; y que el mismo efecto causaria en la multiplicacion, si como este número es de varas,

fuese de arrobas, libras ú otra cualquiera especie.

32. 2.° Que reduciéndose la operacion de que se va tratando á multiplicar unos números por otros y hallar sus productos, jamas la podrá egecutar bien el que no se halle práctico en el manejo de la tabla Pitagórica, que representa los productos de todos los números de un solo guarismo. Conviene por tanto hacerse diestro en su formacion, y en hallar los productos correspondientes á los números que se quieran.

Para formar esta tabla se escribirán los nueve guarismos de valor en una línea de izquierda á derecha con la separacion oportuna, y comenzando luego en el número 1, se formará la columna de los mismos guarismos de arriba abajo, que es el progreso del aumento de una unidad mas en cada número que se vaya escribiendo; en la segunda columna se irán aumentando de dos en dos unidades; en la tercera de tres en tres; en la cuarta de cuatro en cuatro, y asi progresivamente hasta su formacion como en la presente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

33. Para hallar por esta tabla el producto de dos números que se hubiesen de multiplicar, se buscará el número multiplicando en la línea superior, y bajando por la columna que le corresponde, el número que señale al frente del que fuese multiplicador en su misma línea, será el producto que se busca. Asi para hallar, por egemplo, el producto de 8 por 7, no habrá mas que buscar el 8 en la línea superior, y bajando por su columna al número 56, que se halla en la línea del 7 de la primera columna, será el que exprese el valor ó producto de los números propuestos 8 y 7.

34. El signo ó señal de la multiplicacion es el presente $\times$, que significa *multiplicado por*. Asi la expresion $8 \times 7 = 56$, quiere decir, 8 multiplicado por 7 igual 56. Pero cuando alguna de las dos cantidades que se han de multiplicar, ó ambas, son muy compuestas, se escriben dentro de un paréntesis para dar á entender que toda ella, ó el resultado de su expresion, se ha de multiplicar $(3+4) \times 3 = 21$, expresa 3 mas 4 multiplicado por 3 igual 21, esto es, que la suma de 3 y 4 se ha de multiplicar por 3. En la expresion $(4+5) \times (9-3) = 54$, se lee 4 mas 5 multiplicado 9 menos 3 igual 54, que quiere decir que la suma de 4 y 5 se ha de multiplicar por la resta de 9 menos 3.

De la multiplicacion por un número de un solo guarismo.

35. Escrita la cantidad ó número propuesto para multiplicar, se escribirá debajo el número por quien se ha de multiplicar con la correspondencia de unidades para el mejor órden; y tirada una línea se dará principio á la multiplicacion multiplicando la cifra

de unidades del multiplicando por la del multiplicador, y sucesivamente la de decenas, la de centenas &c., escribiendo debajo cada producto respectivo si no contiene mas que unidades; pero cuando este producto completase decena ó decenas justas se pondrá cero, reservando la decena ó decenas que complete para aumentar al producto siguiente de decenas; y si se compusiese de decenas y unidades se escribirán las unidades con la propia reserva de las decenas y su agregacion. Esta operacion es tan sencilla como se verá por el

Egemplo 1.º

Se quiere multiplicar el número 2468 por 4.

2468	multiplicando.
4	multiplicador.
9872	producto.

Escritos los números del modo dicho cual aparecen, se multiplicará sucesivamente el multiplicador 4 por todas las cifras del multiplicando, principiando por la de unidades, y diciendo 4 por 8 son 32; pero 32 unidades hacen 3 decenas y 2 unidades, que se escribirán debajo, reservando las 3 decenas para agregar al producto del lugar siguiente: se prosigue diciendo 4 por 6 son 24, y 3 decenas reservadas, ó que se llevan, son 27; escríbanse las 7 decenas reservando las 20, que hacen ya 2 centenas, y continuando la operacion se dirá 4 por 4 son 16, y 2 llevadas son 18: aqui se observa lo mismo escribiendo 8 centenas, y reservando la decena de este órden, que es ya un millar, se concluirá diciendo 4 por 2 son 8, y 1 que se lleva son 9, cuyo número se escribirá á continuacion, resultando el producto 9872, que es cuatro veces mayor que el multiplicando, *porque rigurosamente se compone de* 4 *veces* 8 *unidades*, 4 *veces* 6 *decenas*, 4 *veces* 4 *centenas*, *y últimamente* 4 *veces* 2 *millares.*

Si el número propuesto 2468 fuese de pesetas de nuestra moneda castellana, y se hubiese hecho la operacion de multiplicarle por el número 4, que son los reales que cada una vale, para saber á cuanto ascendia su valor total en reales, entonces el verdaderamente multiplicando era el 4 reales, mas aun en este caso se escribiria como en el egemplo invirtiendo el órden material, pues sobre ser lo mismo tomar el 4 reales 2468 veces que si este número 2468 se tomase 4 veces, facilita la operacion sin exponerse á equivocaciones: por lo que en la multiplicacion de los números enteros se acostumbra poner siempre por multiplicador el número de menos guarismos.

De la multiplicacion por un número de muchos guarismos.

36. Cuando el multiplicador se compone de dos ó mas guarismos se practicará sucesivamente con cada uno de sus guarismos la operacion que queda declarada, empezando siempre por la derecha y guarismo de la unidad; asi se multiplicarán primero todas las cifras del multiplicando por la correspondiente á unidades en el multiplicador, cuyo producto se escribirá como si fuese solo: despues se multiplicará por la cifra de decenas; y como este producto es ya de un lugar superior al de unidades, porque multiplicando decenas por unidades el producto ha de ser de decenas, se escribirá bajo del primero colocándole en el lugar de decenas, y seguidamente los demas guarismos, avanzando siempre un lugar mas hácia la izquierda. El tercer producto será de centenas, y se escribirá con la misma atencion ganando otro lugar mas hácia la izquierda, y asi sucesivamente.

Colocados por este órden los productos particulares de cada cifra del multiplicador por todas las del multiplicando, que se llaman *productos parciales*, y tirada una línea, se hará la suma de ellos, y esta suma será el *producto total.* Luego en toda operacion de multiplicar *ha de haber tantos productos parciales, y se han de hacer tantas multiplicaciones que los produzcan, como cifras ó guarismos se tenga en el multiplicador.*

Egemplo 2.º

Se ha de multiplicar el número 54604 por 548.

54604	multiplicando.
548	multiplicador.
436832	productos parciales.
218416	
273020	
29922992	producto total.

Multiplíquese primeramente 54604 por el número 8 que representa las unidades del multiplicador, segun se practicó en el egemplo primero, y escríbase el producto 436832.

Multiplíquese igualmente 54604 por el segundo guarismo del multiplicador 4, y como este señala el lugar de decenas, escríbase su producto 218416 debajo del primero; pero con la atencion de que siendo producto de decenas, ocupe su primer guarismo 6 el segundo lugar, á correspondencia del 3 de decenas en el primer producto.

Multiplíquese finalmente 54604 por la tercera cifra del multiplicador 5, y el producto 273020, que es ya de centenas, escríbase con esta atencion bajo del tercer lugar del primero, y guarismo 8 de centenas: súmense estos tres productos parciales cual se hallan colocados, y su suma 29922992 será el producto total.

37. Cuando los últimos caracteres del multipli-

cando ó del multiplicador, ó á la derecha de ambos fuesen ceros, se abreviará la multiplicacion egecutándola de solo los guarismos significativos, y añadiendo despues al producto los ceros que haya en el multiplicando y multiplicador, se tendrá el verdadero producto.

Egemplo 3.º

Se trata de multiplicar 56200 por 340. Multiplíquense los guarismos significativos separando los ceros de multiplicando y multiplicador, y á su producto 19108 añádanse los tres ceros que hay en uno y en otro, y se tendrá el producto total 19108000.

```
562,00
  34,0
------
 2248
1686
--------
19108000
```

38. Esta regla para abreviar una multiplicacion cuando hay ceros á la derecha del uno ó de los dos factores, ofrece asimismo la que se deberá tener cuando entre los guarismos del multiplicador hubiese tambien ceros; pues si la multiplicacion de estos produce solamente cero, se podrá suprimir su escritura pasando á multiplicar la cifra inmediata significativa, pero con la atencion de reservar en el producto el lugar ó lugares que correspondiesen á la multiplicacion de dichos ceros, como se verá en el egemplo siguiente.

Egemplo 4.º

Se ha de multiplicar el número 30463 por 2004.

Hecha la multiplicacion de la cantidad propuesta por el primer caracter 4 del multiplicador, como el segundo y tercero son ceros, se suprime la multiplicacion de ellos, anotando los lugares de decena y de centena que deberian ocupar sus productos, y efectuando la mul-

```
   30463
    2004
--------
  121852
60926,,
--------
61047852
```

tiplicacion de la cuarta cifra 2, se colocará su producto correspondientemente al lugar de millares que ocupa.

39. Por la misma razon siempre que se hubiese de multiplicar por 10, por 100, por 1000 &c., como toda cantidad multiplicada por la unidad es la misma cantidad, quedará efectuada la multiplicacion con solo añadir á la cantidad propuesta un cero, dos ceros, tres ceros &c., segun fuese el multiplicador diez, ciento, mil. Asi 24 multiplicado por 10 serán 240; multiplicado por 100, serán 2400, y multiplicado por 1000 serán 24000.

40. Cuando los factores en una multiplicacion son dos números iguales, entonces al producto que resulta se llama *cuadrado*, y á estos factores sus *raices*. Si el número 12, por egemplo, se hubiese de multiplicar por 12, esto es, por sí mismo siendo por consiguiente dos veces factor, el producto 144 que resulta se llama número cuadrado, ó el cuadrado de 12; y á este número 12, raiz cuadrada de 144.

41. Solo resta advertir que la expresion de *duplicar*, *triplicar*, *cuadruplicar*, *quintuplicar &c.* un número cualquiera, es lo mismo que multiplicarle por 2, por 3, por 4, por 5 &c.

42. Los usos de la multiplicacion son tan diferentes, que seria difusa su particular enumeracion: por su medio se halla el valor de cuantas cantidades se ofrezcan buscar, una vez sea conocido el valor de cada una de sus unidades. Cuanto corresponde al peso y á la medida, y cuanto la imaginacion pueda concebir, para reducir los valores de las unidades de un órden superior al que tengan en las de su mas ínfima especie, está sujeto á esta operacion.

De la division de los números enteros.

43. *Dividir un número por otro es averiguar cuántas veces el uno de los dos números cabe ó se contiene en el otro.* Asi dividir 12 por 3 es averiguar cuántas veces el 12 contiene al 3, ó lo que es lo mismo, cuántas veces el 3 está incluido en 12.

El número que se ha de partir se llama *dividendo*, aquel por quien se ha de partir *divisor*, y el número que expresa cuantas veces el dividendo contiene al divisor se llama *cociente*. En el egemplo propuesto, 12 es el dividendo, 3 el divisor, y el número 4, que expresa las veces que el dividendo 12 contiene al divisor 3, es el cociente.

44. Luego el dividendo en toda operacion de partir es tantas veces mayor que el divisor, cuantas el cociente es mayor que la unidad: 12 es mayor que 3 cuanto 4 es mayor que la unidad. Por tanto si se multiplicase el cociente por el divisor, el producto habrá de salir igual al dividendo $4 \times 3 = 12$. Esto supuesto el dividendo se puede considerar como un producto cuyos factores son el cociente y el divisor.

45. Segun fuere la cuestion que motivare la particion, asi el cociente señalará ó no unidades de la misma especie que el dividendo; porque si la particion se hiciese con la mira de repartir una cantidad entre cierto número de personas, el cociente señalará lo que á cada una toca, y será de la misma especie del dividendo; mas si la particion se hiciese solamente con la mira de averiguar cuántas veces un número incluye á otro, saldrá otro número cuya especie puede no tener relacion con la expresion del dividendo, ni con la del divisor. Es decir, que la cues-

tion determinará en toda operacion de partir la naturaleza de las unidades del cociente.

46. El signo de la particion son dos puntos interpuestos entre dividendo y divisor. 12 : 3 = 4, se lee asi: 12 dividido por 3 igual 4.

47. La operacion del partir supone al discípulo perfectamente diestro en la tabla, pues asi como para multiplicar se necesita saber hallar los productos de los números enteros, aqui es á la inversa, pues conocido el producto y uno de los factores cual es el divisor, se busca el otro factor, ó bien el número que mas se le aproxime.

48. Propuestas las cantidades ó números con los que se hubiese de hacer la particion, se escribirá primero el dividendo, á su derecha se escribirá el divisor con una línea que los separe, y tirando otra línea por debajo del divisor se irá escribiendo bajo de esta el cociente.

Dispuestas las cantidades del modo dicho, se han de tomar tantas cifras del dividendo hácia su izquierda como haya en el divisor, separándolas con una coma; y si aquellas fuesen menores se tomará otra mas, con lo que se tendrá ya cantidad suficiente para dar principio á la particion. Se buscará luego cuántas veces estos guarismos tomados contienen al divisor, y este número se escribirá debajo del expresado divisor, y será la primera cifra en el órden superior del cociente. Multiplíquese despues el divisor por este cociente, y réstese el producto de la parte del dividendo á la cual corresponde.

Si de esta última operacion no quedare resta alguna, se tomará el guarismo inmediato para continuarla; mas si quedare resta se bajará dicho guarismo inmediato, y se escribirá á su lado, con lo que se tendrá un nuevo dividendo, y se practicará lo propio que con el primero: si tomando el guarismo inmediato por si solo ó junto con la resta fuese menor que el divisor, se pondrá cero al cociente, y se tomará otro guarismo mas.

49. *De toda esta doctrina se deduce, como regla general, que la particion debe hacerse por partes: que la particion requiere tres operaciones:* 1.ª *Dividir para encontrar un cociente parcial.* 2.ª *Multiplicar este cociente por el divisor.* 3.ª *Restar este producto del dividendo parcial.* Los egemplos siguientes aclararán esta operacion dando principio por lo mas fácil, y subiendo á lo mas dificil.

De la division por un número de solo un guarismo.

Egemplo 1.º

Se propone dividir el número 8324 por 6.

Escritos el dividendo y divisor con las líneas de separacion dichas, se da principio por la izquierda tomando su primer guarismo por no haber en el divisor mas que otro, y diciendo 8 entre 6 cabe á 1, se escribe debajo de la línea, y será el primer guarismo del cociente, se multiplicará luego por el divisor 6, cuyo producto

dividendo.		
8,3,2,4	6	divisor.
6	$1387\frac{2}{6}$	cociente.
23		
18		
052		
48		
044		
42		
02		

se escribe debajo del dividendo parcial 8, y efectuando la resta queda de diferencia 2.

Al lado de esta resta 2 se bajará la cifra inmediata 3 del dividendo, y se tendrán 23, que será un segundo dividendo parcial, con el que se proseguirá la particion diciendo 23 entre 6 á 3, escríbase en el cociente, y multiplicado por el divisor será el producto 18, que escrito asímismo bajo el dividendo 23 se hará la resta, y será la diferencia 5.

Se bajará al lado de la nueva resta 5 el guarismo siguiente 2 del dividendo, y se tendrán 52, que es otro nuevo dividendo parcial para continuar la operacion del mismo modo, 52 entre 6 les toca á 8, que es el número mas aproximado; se escribirá asimismo en el cociente, y multiplicándole por el divisor, y escribiendo el producto 48 bajo el dividendo 52 se efectuará la resta entre estos dos números, cuya diferencia es 4.

Bájese finalmente al lado de esta resta 4 la última cifra del dividendo tambien 4, y se tendrán 44, con cuyo nuevo y último dividendo parcial se concluirá la operacion diciendo 44 entre 6 cabe á 7, y escrito este guarismo en el cociente se efectuará la multiplicacion por el divisor sentando el producto 42 debajo del dividendo 44. Hecha la resta será la diferencia 2, cuyo número se pondrá al lado del cociente un poco mas alto, y tirada por debajo una línea se escribirá tambien el divisor 6, que representará un quebrado.

Resulta pues que habiéndose practicado la particion del número 8324 por 6, da de cociente 1387 y $\frac{2}{6}$, que es decir: si el número propuesto 8324 fuese de unidades determinadas para repartir entre 6 compañeros ó partes iguales, seria cada una de estas partes 1387, con mas dos sextas partes de la unidad que representase la cantidad.

Para tocar todos los casos que puedan ocurrir en la particion se pondrá otro egemplo de la misma clase, porque en la particion simple se comprenderán mas bien las dificultades y variaciones que ofrece esta operacion.

Egemplo 2.°

Se ha de dividir el número 244832 por 8.

24,4,8,3,2	8
24	30604
0048	
48	
0032	
32	
00	

Dispuestas las cantidades en forma de division se deben tomar tantas cifras del dividendo como haya en el divisor; pero como el 2 es menor que el 8 se tomará otra mas, esto es 24, que partido entre 8 da justamente 3 de cociente, de cuya multiplicacion y resta respectiva no queda residuo alguno.

Bájese la cifra inmediata 4 del dividendo: este número 4 es, como se ha visto, un nuevo dividendo parcial, que se debe partir por el divisor; y como por ser menor que aquel no se puede hacer la particion, se pondrá al cociente un cero, el que sobre indicar no poderse hacer la particion ocupe el lugar de la cifra que se pondria si hubiese podido verificarse la particion, y bajada inmediatamente la cifra contigua 8 del dividendo se tendrá ya 48, con cuyo número se hará la particion: 48 entre 8 les toca á 6, multiplicado luego 6 por 8 es el producto 48, que restado del dividendo parcial tampoco queda resta alguna.

Aqui se verificará lo mismo que anteriormente, pues bajado el 3, cifra inmediata del dividendo, no se puede partir entre 8 por ser menor que este, con que se pondrá al cociente cero, y se bajará la última cifra 2 del dividendo, que junta con el 3 harán 32. Este número partido entre 8 da de cociente 4, y su producto multiplicándole por el divisor no deja resta alguna.

50. *Luego siempre que en el intermedio de una particion bajada que sea la cifra del dividendo, y junta con la resta ó por sí sola, no pudiese efectuarse la division por ser número menor que el divisor, se habrá de poner cero al cociente; y considerando el parcial dividendo como una resta, se bajará y unirá á él la cifra inmediata.*

De la division por un número de muchos guarismos.

51. Hasta aqui se ha practicado la division por un solo guarismo; pero cuando esta se ha de hacer por un divisor de dos ó de mas guarismos, entonces á mas de las reglas generales son necesarias otras particulares de tanteo que facilitan las operaciones, y sin cuyo conocimiento jamas se podrán egecutar bien. La regla general de la particion enseña que se han de tomar tantas cifras á la izquierza del dividendo cuantas haya en el divisor; que si estas fuesen de menor valor se tome otra mas, y que estos guarismos formarán el primer dividendo particular; pero como ya los guarismos del divisor con quien se va á comparar forman un número crecido, ni hay el auxilio de la tabla, ni la imaginacion puede comunmente alcanzar cuantas veces el divisor esté contenido en el dividendo, singularmente cuando van en aquel de menor á mayor, no siendo por medio del tanteo dicho practicado por partes.

Tomados tantos guarismos del dividendo como hubiese en el divisor, se comparará el primero de esta parte dividendo con el primero del divisor; y cuando por ser menores los de aquel se hubiese tomado otro guarismo mas del dividendo, se compararán los dos primeros con el primero del divisor: de esta comparacion resultará el número de veces que cabe en el dividendo dicho primer guarismo del divisor; y haciendo mentalmente la multiplicacion y resta, se sabrá tambien cuanto sobra, para que unida la resta al inmediato guarismo se haga la misma comparacion con el segundo del divisor, y ver si en este cabe el mismo número de veces que en la primera comparacion. Por este medio, y como el cociente ha de ser siempre uno mismo, se averiguará el verdadero guarismo que le toca, y se podrá efectuar la particion sin necesidad de borrar nada de lo que una vez se ha escrito, ni andar con otras cuentas aparte de la principal.

Cuando los guarismos del divisor van de mayor á menor, poca ó ninguna dificultad ofrece el tanteo, pues comunmente á lo que una vez cabe en la primera comparacion cabe en la segunda; pero siempre se deberá hacer el tanteo antes de escribir el cociente. La práctica de los egemplos aclarará los casos de dificultad.

Egemplo 3.º

Se propone la division del número 68426 por 54.

Tómense las dos primeras cifras, pues que en el divisor hay dos, y como son de mayor valor hágase la particion que desde luego se conoce no puede arrojar de cociente mas que la unidad; hágase la multiplicacion de este cociente por los guarismos del divisor, y réstese el producto del dividendo parcial cual se hizo en los anteriores egemplos, la diferencia será 14.

68,4,2,6	54
54	$1267\frac{8}{54}$
144	
108	
0362	
324	
0386	
378	
008	

Bájese la inmediata cifra del dividendo, y unida á la resta se tendrán 144: tómese para el tanteo las dos primeras cifras, esto es 14, y compárese con la primera 5 del divisor, se verá que cabe á 2, y sobran 4 para unir á la última cifra tambien 4 en este particular y segundo dividendo parcial, y que en 44 sobradamente ha de caber la segunda del divisor dos veces, por lo que 2 es el verdadero cociente que se busca; multiplíquese el 2 por 54, y su producto 108 réstese de 144, quedará de diferencia 36.

Bájese la cifra 2 del dividendo, y agregada á la resta 36 se tendrán 362, tercero dividendo parcial: tantéese del mismo modo esta nueva particion diciendo: 36 entre 5 cabe á 7; pero 7 por 5 son 35, á 36 resta solo 1, que junta con el 2 siguiente son 12; y comparando 12 con 4, segunda cifra del divisor, no cabe á 7: con que ya se ve que la particion de 362 por 54 no puede dar de cociente 7, y en este caso se rebaja una unidad quedando en 6, con el que se puede efectuar la particion. Escríbase desde luego 6 en el cociente, y practicando la multiplicacion y resta respectiva, queda de diferencia el número 38.

Ultimamente se bajará para unir con esta resta la última cifra 6 del dividendo, y practicando con el resultado 386 la misma operacion, se hallará de cociente 7, y por resta del todo de particion el número 8, que se escribirá en forma de quebrado al lado del cociente como queda dicho.

Egemplo 4.º

Se propone la division del número 2773500 por 375.

Por cuanto los tres primeros guarismos del dividendo son de menor valor que los tres de que consta el divisor, se tomará otro mas; y pues son ya 2773

```
2773,5,0,0 | 375
2625       |-----
-----      | 7396
 01485
  1125
  -----
  03600
   3375
   -----
   02250
    2250
    -----
    0000
```

á partir entre 375, tomando los dos primeros guarismos, compárense con el primero del divisor; mas aunque 27 entre 3 les cabe justamente á 9, nada queda para unir á la cifra siguiente, y poder hacer con esto la segunda comparacion; reflexiónese que por cuanto la segunda cifra del divisor es muy crecida, debe quedar un residuo competente, para que unido con el inmediato guarismo pueda caber en la cantidad que formen el mismo número de veces que se lleva de tanteo, ó que se tomó en la primera comparacion; asi aunque 27 entre 3 cabe á 8 sobradamente, es no obstante muy corto el residuo 3 que resulta efectuada la multiplicacion y resta, para que unido con el 7 siguiente quepa en el 37 que forma el segundo guarismo 7 del divisor las mismas 8 veces. Por este tanteo se verá que el verdadero cociente es el número 7, y que siguiendo este mismo método y reglas anteriores se hallarán todos los demas guarismos que corresponden á aquel.

52. Este método comun de tanteo se abrevia y facilita aun mas, cuando siendo la segunda cifra del divisor mas que doble que la primera, se imagina á esta primera aumentada de una unidad; pues buscando entonces el número que mas se aproxime al todo comparado, será tambien este número el mas aproximado al verdadero cociente. Asi en el egemplo presente, si al comparar las dos primeras cifras del dividendo con la primera del divisor, puesto que la segunda es doble mayor que ella, se considerase el 3 aumentado de una unidad, se verá que comparan-

do 27 con el 4 imaginado, el número que mas se aproxima, aunque con exceso, es el 7, que multiplicado por 4 da un producto de sola una unidad de diferencia con el miembro comparado; y en esta atencion ya se tiene un número cociente con que comparar los guarismos del dividendo con los verdaderos que hay en el divisor.

53. Podrá ocurrir en el tanteo de una particion, que haciendo comparacion por partes entre dividendo y divisor, se halle caber á mas de 9, ó que parece caber á mas de 9; esto no obstante nunca podrá pasar de este número, pues si se tiene presente que lo que se va buscando es solo un guarismo que exprese unidades de cierta especie, caber á mas de 9 solamente probaria que la particion anterior estaba mal egecutada, ó no se habia dado al cociente todo el valor que le correspondia.

Medios para abreviar el método de la division.

54. Para facilitar la inteligencia de la operacion de partir, se escribió en todos los egemplos propuestos debajo de cada dividendo parcial el producto que resultaba de la multiplicacion del divisor por cada cifra respectiva del cociente; mas como el fin de la aritmética se dirige siempre á abreviar las operaciones, una vez impuesto en aquel método, se debe excusar el escribir dichos productos haciendo desde luego la sustraccion á medida que se vaya multiplicando cada guarismo del divisor por el cociente. El egemplo siguiente bastará para manifestar como esto se hace.

Egemplo 5.º

Se ha de dividir el número 36636 por 86.

366,3,6	86
0223	426
0516	
000	

Tomadas las tres primeras cifras del dividendo necesarias á la particion cual se ha dicho, separándolas con una coma, serán 366 á partir por 86, que se halla caber á 4; y haciendo la multiplicacion por el divisor, se irá restando respectivamente el producto de cada cifra de este de la correspondiente en el dividendo de este modo: 4 por 6 son 24, á 26 última cifra, ó de unidades en la parte parcial tomada en el dividendo parcial, resta 2, que se escribe debajo, y en 20 se llevan 2, que se reservan para unir al producto inmediato: vuélvase á la multiplicacion del cociente por la segunda cifra del divisor, 4 por 8 son 32, y 2 que se llevan 34, á 36 que se hallan en el dividendo resta 2, que se escribirá asimismo pagando ó poniendo bajo del 3 un cero. Quedan de resta 22, y bajada la inmediata cifra 3 del dividendo se tendrán 223: continúa la particion diciendo 223 dividido entre 86 les cabe á 2; y practicando lo mismo que en la primera parte se dirá: 2 por 6 son 12, á 13 en el dividendo se resta 1, que se pondrá bajo el 3: de 13 se lleva 1; y 2 por 8 son 16, y una reservada 17, á 22 dividendo resta 5. Será el residuo 51, y bajando la última cifra 6 del dividendo se tendrán 516 á partir por 86: cabe á 6, y efectuando la multiplicacion será 6 por 6 son 36, á 36 dividendo cero; en 36 van 3, 6 por 8 son 48, y 3 son 51, á 51 que hay en el dividendo nada resta; con que se cubrirá con ceros.

55. Si á la derecha del dividendo y divisor hubiese ceros, se quitarán en ambas cantidades un igual número de dichos ceros; esto es, tantos como hubiese en la de menos, y se practicará la operacion con los resultados. Por egemplo, para dividir 8000 entre

400, se reducirá, quitando los dos ceros que hay en el menor de estos números, á dividir 80 entre 4, que será igual á 20: cociente idéntico al que daria haciendo la division materialmente entre 8000 y 400; porque en efecto 80 es 20 veces mayor que 4, del mismo modo que 8000 es 20 veces mayor que 400.

56. Luego si á la derecha del divisor hubiese ceros se abreviará la operacion asimismo, apartando tantas cifras en el dividendo cuantos ceros tuviese el divisor, y efectuando despues la particion, las cifras significativas separadas en el dividendo se unirán al residuo que quedare para ponerlas en el cociente en forma de quebrado con todo el divisor inclusos los ceros. Por egemplo 8364 partido por 900, haciendo la separacion dicha, y efectuando la particion, quedaría de este modo 83, 64: 9,00 $= 9+\frac{264}{900}$, pues se reduciría á partir solamente 83 por 9.

57. Del mismo modo siempre que un número, cualquiera que sea, se hubiese de partir por 10, 100, 1000 &c., como toda cantidad dividida por la unidad es la misma cantidad, quedará hecha la operacion con solo separar tantas cifras á la derecha del dividendo cuantos ceros tuviere el divisor: el resto de los guarismos separados será el cociente, y los separados será la resta que resultaria de la particion: 4324 partido por 100 dará de cociente $43+\frac{24}{100}$.

58. Los usos de la particion son tambien tan diferentes como útiles, pues por su medio no solo se hallará cuantas veces un número contiene á otro, averiguando al propio tiempo y sabido el valor total de un número de unidades, sean cuales fuesen, cuanto toca valer á cada una; sino tambien se tendrá la facilidad de dividirle en las partes iguales que se quiera: porque tomar la mitad, la tercera, cuarta ó quinta parte de un número, es dividirle en 2, en 3, en 4

ó en 5 partes iguales para tomar una de ellas. Sirve asimismo la division para reducir las unidades de una especie determinada é inferior á unidades de especie superior: un número de maravedises, por egemplo, se reducirá á reales dividiéndole por 34, que son los maravedises que contiene un real: un número de reales dividido por 15, que son los reales que contiene un peso, dará el número de pesos que compone; y asi de lo demas.

Pruebas de la multiplicacion y division.

59. De las definiciones dadas para la multiplicacion y division se deberá sacar el método con que se han de hacer las operaciones para sus respectivas pruebas.

60. Se dijo (28) que la multiplicacion no era otra cosa que tomar tantas veces el multiplicando, cuantas unidades tuviese el multiplicador: se dijo asimismo, y como deduccion precisa de la propia regla (30), que el producto era tantas veces mayor que el multiplicando, cuantas el multiplicador fuese mayor que la unidad. Luego si se divide el producto por el multiplicador, el cociente ha de salir igual al multiplicando; y por la misma razon, si el producto se dividiese por el multiplicando, el cociente ha de ser igual al multiplicador: por tanto será regla general en toda multiplicacion que para probar si la operacion está bien hecha *se divida el producto total por uno de los factores, y el cociente ha de ser igual al otro factor.*

El egemplo 1.º de la multiplicacion comprobará esta regla; pues habiendo hallado que 2468 multiplicado por 4 dió de producto 9872, dividiendo este producto por el multiplicando da de cociente 4, que es el multiplicador; asi como dividiéndole por el multiplicador da de cociente 2468, que es el multiplicando.

Multiplicacion.	1.ª *Division.*		2.ª *Division.*	
2468	9872	2468	9872	4
4	0000	4	18	2468
9872			027	
			032	
			00	

61. Del mismo modo se deduce la prueba de la division de las definiciones y reglas que la constituyen; pues si el cociente expresa (43) cuantas veces el divisor está contenido en el dividendo, ó bien cuantas veces el dividendo es mayor que el divisor, es consecuencia precisa que si se multiplica el divisor por el cociente, el producto (44) ha de salir igual al dividendo: porque no será otra cosa esta multiplicacion que tomar el divisor tantas veces cuantas se necesita para ser igual al dividendo. Luego será la regla general para probar toda particion, *multiplicar el divisor por el cociente; y añadiendo al producto la resta que pueda haber en la particion, será igual al dividendo.*

El egemplo 1.º de la particion comprobará esta regla, pues habiendo hallado que dividido el número 8324 por 6 fue el cociente 1387 y $\frac{2}{6}$, multiplicando este cociente por el divisor, y añadiéndole la resta 2 se tendrá el mismo dividendo.

Division.		*Multiplicacion.*
8324 | 6		1387 y $\frac{2}{6}$
23	1387 y $\frac{2}{6}$	6
052		8322
044		2
0[2		8324

De los divisores simples y compuestos de una cantidad.

62. Cuando un divisor es tal que da por cociente un número entero sin fraccion, se llama *divisor exacto*, ó *medida del número que sirva de dividendo*; y si conviene esta misma medida á dos ó mas números, se llama *divisor*, ó *medida comun de ellos*. Por egemplo 2 y 3, que dividen exactamente al 6, son medidas suyas; y 3 y 5, que dividen al 15, lo son de este: pero 1 y 3, que dividen á ambos, son medidas comunes de 6 y 15. Los números 2, 3, 6 y 9 son medidas comunes de 18 y 36.

63. Si un número entero no se puede medir, ó dividir con exactitud por cualesquiera otro entero sino por sí mismo ó por la unidad, se llama *número simple* ó *primero*; y si tiene á lo menos otra medida mas, *número compuesto*. De este modo 1, 2, 3, 5, 7 &c. son números primos; y 4, 6, 8, 9, 10 &c. *números compuestos*.

64. Cuando dos ó mas enteros no tienen otra medida comun que la unidad, se llaman *primeros entre sí*; y si tienen otra ú otras medidas, *compuestos entre sí*. Por tanto 3 y 8 son números primeros entre sí, y 4 y 12 números compuestos.

65. Si el número compuesto tiene por medida al

número 2, ó es divisible por 2, se llama *número par*; y si no es divisible por 2, *impar*. El 2, 4, 6 y 8 son números pares, como tambien lo son todos aquellos cuyo último guarismo sea 2, 4, 6, 8 y 0. El 3, 5, 7 y 9 son números impares, como tambien lo son todos aquellos cuyo último guarismo sea 1, 3, 5, 7 y 9.

66. Conviene saber, que asi como todo número cuyo último guarismo sea par ó cero tiene mitad, y es divisible por 2: *todo número que sumados los guarismos que le componen resulta tener su suma tercera parte, es divisible por 3. Y que todo número, cuyo último guarismo es cero ó cinco, tiene quinta parte, y es divisible por 5.*

67. Esto supuesto, para hallar todos los divisores simples y compuestos que un número ó cantidad pueda tener, se practicará la regla siguiente: *Si tiene mitad*, esto es, si su último guarismo fuese par ó cero, *pártase por* 2; *el cociente que resulte si tuviese mitad se partirá asimismo por* 2; *si no tuviese mitad, y sí tercera parte, divídase por* 3; *y cuando resulte no poderse dividir por* 3, *véase si tiene quinta parte, y divídase por* 5. *De suerte que esta operacion se va egecutando sucesivamente hasta encontrar un cociente que no se pueda dividir sino por sí mismo*; todos los divisores hallados serán los divisores simples, y los productos que estos den multiplicados de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro &c., serán los divisores compuestos.

Sea por egemplo la cantidad 210, á la que se pretende hallar todos los divisores simples y compuestos: divídase primero por 2, pues tiene mitad; el cociente que resulta 105 no tiene ya mitad, pero tiene tercera parte, y es divisible por 3; el nuevo cociente 35 tiene quinta parte, y será dividido por 5; resulta de cociente el número 7, que no tiene mas division que por sí mismo, como se manifiesta:

$210:2=105$ „ $105:3=35$ „ $35:5=7$ „ $7:7=1$

serán por tanto los divisores simples

2, 3, 5, 7.

Divisores compuestos de dos en dos

6, 10, 14, 15, 21, 35.

Compuestos de tres en tres:

30, 42, 70, 105.

Y últimamente el mismo número 210, como producido de la multiplicacion de todos los divisores simples.

De la mayor medida comun entre dos ó mas números.

68. Se ha dicho (62) que medida comun de dos números era aquel número que repetido cierto número de veces los completa; esto es, el número por el que puedan uno y otro ser divididos exactamente. Luego buscar la mayor medida comun de dos números, es buscar entre sus divisores el máximo que puedan tener.

69. Para hallar la mayor medida comun á dos números propuestos, *divídase el mayor de los números por el menor, y si no quedare resta alguna será este divisor ó número menor el máximo que se solicita; pero si quedare resta se partirá el divisor por ella, y si aun quedare resta se continuará la operacion, partiendo siempre el último divisor por el último residuo, hasta encontrar una particion exacta; en cuyo caso el último divisor será la mayor medida comun: mas si en la última division quedare la unidad por resta, los números serán entre sí primos, y por tanto no tienen medida comun.*

Se quiere encontrar la mayor medida comun de los dos números 468 y 120. Dividido el mayor por el menor queda de resta 108: dividiendo el divisor 120 por la resta 108 queda de diferencia 12; y dividiendo el último divisor 108 por 12 da un cociente exacto: luego el número 12, último divisor, es la mayor medida comun que tienen los números propuestos.

468	120		120	108		108	12	
108	3		012	1		000	9	

Si se hubiese de buscar la mayor medida comun de tres números, se buscará primero la mayor medida entre los dos primeros, y despues se hallará asimismo la mayor medida comun entre la medida ya hallada y el tercer número. Por egemplo, se busca la mayor medida comun entre los tres números 468, 324 y 120.

Primera operacion.

468	324		324	144		144	36	
144	1		036	2		000	4	

Hallada que sea la mayor medida 36 de los dos números primeros, se encontrará por el mismo método la que corresponde al tercer número, y el mismo 36.

Segunda operacion.

120	36		36	12
012	3		00	3

Será tambien 12 como último divisor la mayor medida comun entre los tres números propuestos 468, 324 y 120.

De los quebrados.

70. En la práctica de la division se ha dicho que el sobrante de una particion, en la que no se tenia un cociente exacto, se ponia al lado del mismo cociente en forma de quebrado; y en esto parece manifestarse que un quebrado nace de la particion de un número menor por otro mayor. Se dijo tambien anteriormente (7) que cuando una cantidad constaba solamente de partes de la unidad, el número que la expresaba se llamaba quebrado. Mas para formar justa idea de lo que es un quebrado, se debe considerar que una cantidad cualquiera tomada por la unidad está dividida en cierto número de partes ó unidades de menor especie, de las que se ha de tomar otro cierto número.

Por egemplo, un peso está dividido ó consta de 15 unidades menores llamadas reales, asi como un real consta de 34 maravedises, que son unidades menores que la del real: pues si contando por unidades de peso se hubiesen de tomar una ó muchas partes de esta unidad dividida, v. g. 7, al número que expresa estas siete unidades menores se llama *quebrado*, y se podrá escribir de dos modos: 7, *reales*, escribiendo á continuacion la clase ó especie á que corresponde, ó de este modo $\frac{7}{15}$, *que es la propia forma del quebrado*, escribiendo primero el número 7, *que expresa las partes que se toman de la unidad dividida*, *y se llama numerador*, y debajo de él, separado con una línea, el número 15, *que expresa las partes en que dicha unidad se halla dividida*, *y se llama denominador.*

71. Por consiguiente en todo quebrado concurren dos números, que se llaman en general *términos* del quebrado. Cuyos nombres propios son, segun queda expresado, *numerador* y *denominador*.

Para leer un quebrado se nombra primero el numerador, y despues el denominador, bajo la expresion de *medios*, *tercios*, *cuartos*, *quintos* &c., segun lo que represente dicho denominador: asi $\frac{1}{2}$ se nombra un medio, $\frac{2}{3}$ dos tercios, $\frac{3}{4}$ tres cuartos, $\frac{4}{5}$ cuatro quintos &c.; pero cuando el denominador sea mayor que diez, se le añade al nombrar su representacion la expresion de *avos*, que es una voz anticuada, que significa partecillas ó partes menores en que una cantidad se halla dividida. El quebrado $\frac{7}{15}$ se lee *siete quincenos ó siete quinzavos*; $\frac{9}{24}$ *nueve veinte y cuatro avos*; $\frac{16}{32}$ *diez y seis treinta y dos avos.*

Supuesto que el denominador de un quebrado expresa las partes en que la unidad se halla dividida, y el numerador las partes que de la unidad dividida se han de tomar, es visto que cuanto mas se acerque el numerador de un quebrado al valor del denominador, tanto mas se acercará el quebrado á la unidad: esto es, que siendo uno mismo el denominador de dos ó mas quebrados, cuanto mayor sea el numerador tanto mayor será el valor del quebrado; y que siendo uno mismo el numerador de dos ó mas quebrados, cuanto mayor fuese el denominador, tanto menor será el valor del quebrado. En $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{9}$ y $\frac{7}{9}$ será el quebrado de mas valor $\frac{7}{9}$. En $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{7}$ y $\frac{4}{10}$ será el quebrado de menor valor $\frac{4}{10}$.

72. Los quebrados se llaman propios ó propiamente quebrados *cuando el numerador es menor que su denominador*; y quebrados impropios *cuando el numerador es igual ó mayor que su denominador*: $\frac{5}{5}$ es quebrado impropio, porque siendo el numerador igual con su denominador, vale toda la unidad. $\frac{10}{8}$ es un quebrado impropio, porque siendo el numerador mayor que su denominador, vale mas que la unidad, pues hay que tomar mas partes que las necesarias pa-

ra formarla: por eso se llama tambien á los quebrados impropios *números fraccionarios*.

Con los quebrados se practican las mismas operaciones que con los números enteros; sumar, restar, multiplicar y partir; pero para llegar á estas operaciones es necesario que preceda el conocimiento de otras que se hacen previamente para sus transformaciones y reducciones.

Transformacion de los números enteros en quebrados, y al contrario.

73. *En todo quebrado se puede considerar el numerador como un dividendo, y el denominador como un divisor*: luego *todo quebrado es igual al cociente que resulta del numerador partido por el denominador*. Por tanto para expresar en forma de quebrado un número entero, cualquiera que sea, v. g. 8, sin que pierda nada de su valor, se le pondrá la unidad por denominador, y será $\frac{8}{1}$. En efecto 8 unidades, ó lo que es lo mismo 8 partido por 1, es el mismo 8. En la propia forma se deduce

1.° *Que para sacar de un quebrado impropio los enteros que contenga, se partirá el numerador por el denominador, y el cociente serán los enteros*: asi el quebrado impropio $\frac{24}{8}$, efectuada la particion, es igual á 3 enteros. Si en la particion del numerador por el denominador quedase alguna resta, se pondrá por numerador de un nuevo quebrado, cuyo denominador será el del quebrado; $\frac{27}{5}$ efectuada la reduccion es igual á 5 enteros y $\frac{2}{5}$, que en expresion se escribiria de este modo $\frac{27}{5} = 5 + \frac{2}{5}$.

2.° *Que para reducir un entero á quebrado de una denominacion dada se multiplica el entero por la denominacion, y al producto se pone por denominador la misma denominacion dada*: 8 enteros reducidos á la denominacion de quintos, será $\frac{8\times5}{5}=\frac{40}{5}$. En efecto, lo mismo son 40 quintos que 8 enteros ó unidades, porque efectuada la division de 40 por el denominador 5, sale el cociente 8.

3.º *Que para reducir un entero á la especie de un quebrado que le acompañe, se multiplicará el entero por el denominador del quebrado, al producto se añadirá el numerador del quebrado, y á esta suma se pondrá por denominador el del quebrado*: 5 enteros reducidos á la especie del quebrado $\frac{2}{3}$ será $\frac{(5\times3+2)}{3}=\frac{15+2}{3}=\frac{17}{3}$: la mejor demostracion de esta verdad es deshacer lo hecho, esto es, partir el numerador por el denominador, y se tendrá que $\frac{17}{3}=5+\frac{2}{3}$.

Modos de alterar los términos de un quebrado sin que pierda este de su valor.

74. *Un quebrado no muda de valor cuando sus dos términos se multiplican, ó parten por un mismo número*; porque si á manera que el numerador aumenta ó disminuye, se aumenta ó disminuye el denominador, es constante que los dos términos quedan en una misma igualdad de circunstancias que los primeros. Si los dos términos del quebrado $\frac{1}{2}$ se multiplican por 2, por 3, por 4 &c., efectuando la multiplicacion se tendrá $\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{2}{4}$, $\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{3}{6}$, $\frac{1\times4}{2\times4}=\frac{4}{8}$ &c., en cuyos quebrados $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ se ve patentemente que el numerador de cada uno es siempre mitad de su denominador, asi como lo es en el primitivo $\frac{1}{2}$, y por tanto son todos

ellos iguales en su valor. Del mismo modo si los dos términos de un quebrado como $\frac{12}{18}$ se parten por un mismo número, se verá igual efecto; porque $\frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}$, $\frac{12:3}{18:3} = \frac{4}{6}$, $\frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$ en todos estos quebrados que resultan $\frac{6}{9}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}$, como en el propuesto $\frac{12}{18}$, siempre es el numerador las dos terceras partes de su denominador, *y por consiguiente iguales tambien en su valor.*

En estos principios estriba el fundamento de las dos reducciones de quebrados siguientes, sin cuyo conocimiento no se puede dar un paso en las operaciones ulteriores, como lo acreditará su repetido uso.

Reduccion de quebrados á un mismo denominador.

75. Para reducir dos ó mas quebrados á un comun denominador *multiplíquese el numerador y denominador de cada quebrado por el producto de los denominadores de los otros quebrados*, y se tendrá que cada uno de los nuevos quebrados que resultan de estas multiplicaciones será respectivamente igual con cada uno de los propuestos; porque no se hace otra cosa que multiplicar los dos términos de cada quebrado por un mismo número, sin que por ello mude de valor, como se ha visto (74).

Para reducir $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ á un mismo denominador, multiplíquense los dos términos del quebrado $\frac{2}{3}$ por 5 denominador del segundo, y será $\frac{10}{15}$; multiplíquense asimismo los del segundo $\frac{4}{5}$ por 3 denominador del primero, y será $\frac{12}{15}$. Los dos quebrados propuestos $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ quedarán reducidos á los iguales respectivamente $\frac{10}{15}$ y $\frac{12}{15}$.

Para reducir los tres quebrados siguientes $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ á un mismo denominador, se multiplicarán los dos términos del primero $\frac{1}{3}$ por 24 producto de los denominadores 4 y 6 del segundo y tercero, y se tendrá $\frac{24}{72}$; multiplíquense asimismo los dos términos del segundo $\frac{3}{4}$ por 18 producto de los denominadores 3 y 6 del primero y tercero, será el nuevo quebrado $\frac{54}{72}$: últimamente, multiplicando los dos términos de tercero $\frac{5}{6}$ por 12 producto de los denominadores 3 y 4 del primero y segundo, se tendrá $\frac{60}{72}$. Serán los tres quebrados propuestos $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ reducidos ya á un comun denominador iguales á los tres siguientes $\frac{24}{72}$, $\frac{54}{72}$, $\frac{60}{72}$.

Del mismo modo se reducirian á un mismo denominador una serie de quebrados que se quisiese, fuese su número cual fuese; porque en general no habria mas que multiplicar el numerador de cada quebrado por el producto de todos los denominadores de los otros menos el suyo, y poner por denominador comun de los nuevos quebrados el producto de todos los denominadores entre sí.

Reduccion de los quebrados á su mas simple expresion.

76. La expresion de un quebrado es tanto mas simple cuanto son menores los términos que le forman; por lo que todas las veces que sea posible se deben reducir los quebrados á sus mas mínimos términos, ó á su mas simple expresion, ya por la facilidad de calcularlos despues de verificada su reduccion, ya porque se percibe su valor mas fácilmente á primera vista, y ya tambien porque en toda operacion debe buscarse la simplicidad, pues con ella se asegura mejor el acierto, ahorrando tiempo, y evitando la confusion que traen las operaciones consigo mis-

mas, cuando el calculador se vale de un número crecido de guarismos, pudiendo representar sus cantidades con otro menor.

La reduccion de los quebrados á su mas simple expresion se puede verificar de dos modos; *ó por medio de la mayor medida comun entre los dos términos del quebrado, ó por los divisores exactos que los mismos términos tengan.*

Por medio de los divisores exactos, *partiendo tanto el numerador como el denominador* por 2, por 3, por 5, por 7 ó por 9, segun se dijo (67). Se quiere reducir á su mas simple expresion el quebrado $\frac{3360}{3780}$; y pues que tiene mitad se sacará esta, ó lo que es lo mismo se dividirá por 2 numerador y denominador: será el nuevo quebrado $\frac{1680}{1890}$. Vuélvase á dividir por 2, pues tiene mitad, quedará en $\frac{840}{945}$. Este quebrado no tiene mitad, pero tiene tercera parte; por consiguiente dividido por 3 resulta $\frac{280}{315}$, nuevo quebrado que ya no tiene tercera parte; mas por cuanto uno de sus términos concluye con 0 y el otro con 5, tiene quinta parte, y es divisible por 5; efectuada la division resulta $\frac{56}{63}$, quebrado que ya no tiene mas division que por 7, y que efectuada esta queda en $\frac{8}{9}$, que es la menor ó mas simple expresion que se buscaba.

Por medio de la mayor medida comun se verificará la reduccion, buscando esta medida segun se enseña (69), y hallada que sea *se partirá por ella numerador y denominador*. En el quebrado $\frac{279}{465}$, hallada la mayor medida comun á los dos términos, se tendrá que es 93, y que partidos dichos dos términos por este número resultará ser el quebrado propuesto igual á $\frac{3}{5}$.

De la adicion ó método de sumar los quebrados.

77. Se dijo en los números enteros (18) que las cantidades ó números que se propusiesen para sumar habian de ser de una misma especie, y en los números quebrados viene á ser lo mismo: pues para poder sumarlos deberán ser todos de una misma *denominacion*, esto es, tener los quebrados un mismo denominador.

Cuando los quebrados propuestos tienen un mismo denominador, la operacion es muy sencilla, porque se reduce á *sumar todos los numeradores entre sí, y poner á esta suma por denominador el comun que tengan dichos quebrados.* $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{16}{8}$, cuyo quebrado reducido á enteros es igual á 2.

Si los quebrados no tuviesen un mismo denominador, como $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{6}{7}+\frac{1}{2}$, habrán de reducirse á un comun denominador para poderlos sumar por el método dicho (75), y serán $\frac{2}{3}=\frac{140}{210}$, $\frac{3}{5}=\frac{126}{210}$, $\frac{6}{7}=\frac{180}{210}$, $\frac{1}{2}=\frac{105}{210}$; quedando por consiguiente reducidos los quebrados propuestos en cuestion á los iguales $\frac{140}{210}+\frac{126}{210}+\frac{180}{210}+\frac{105}{210}$, que siendo ya de una misma denominacion se procederá á su suma segun se acaba de manifestar, y resultará de ella el quebrado $\frac{551}{210}=2+\frac{131}{210}$.

Esta operacion se puede simplificar aun, pues cuando se reducen los quebrados á un mismo denominador, los productos que arroja cada numerador respective por todos los denominadores de los otros quebrados se van escribiendo seguidamente y con el signo correspondiente sobre una sola línea, y bajo de esta se escribe el denominador comun en esta forma: $\frac{140+126+180+105}{210}=2+\frac{131}{210}$.

Cuando se hubiesen de sumar números enteros acompañados de quebrados, *se sumarán primero los quebrados; y si la suma arrojase enteros, se agregará su número al de los enteros propuestos* 8 y $\frac{3}{5}+7$ y $\frac{1}{5}+9$ y $\frac{4}{5}$, haciendo primero la suma de los quebrados será esta igual á $\frac{8}{5}=1+\frac{3}{5}$, que agregada á los números enteros se tendrá la suma total $25+\frac{3}{5}$.

De la sustraccion ó modo de restar los números quebrados.

78. *Cuando los quebrados propuestos tienen un mismo denominador, se restarán los numeradores entre sí, y á la resta se pondrá por denominador el comun.* Si de $\frac{8}{9}$ se han de restar $\frac{5}{9}$, será la resta $\frac{3}{9}$, diferencia que hay entre 8 y 5.

Si los quebrados no tienen un mismo denominador no podrán restarse si primero no se les da esta denominacion comun; pues así como en los enteros los números propuestos á restar deben ser de una misma especie, deben tambien los quebrados ser de una misma denominacion. Asi para restar de $\frac{6}{8}$, $\frac{2}{3}$ se reducen á quebrados de un mismo denominador (57), y quedarán transformados en $\frac{18}{24}-\frac{16}{24}$: restando los numeradores, y poniendo á la resta el denominador comun, resulta $\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$.

Si de entero y quebrado como $6+\frac{3}{9}$ se hubiese de restar el quebrado $\frac{7}{9}$, no pudiendo restarse de $\frac{3}{9}$ el quebrado $\frac{7}{9}$ por ser mayor, *se tomará una unidad del entero restando, que reducida á novenos, y añadida á los* $\frac{3}{9}$ *que se tienen compondrá* $\frac{12}{9}$; por consiguiente quedará la propuesta reducida á restar de $5+\frac{12}{9}$ el quebrado $\frac{7}{9}$; y efectuada esta resta en los quebrados quedará en $5+\frac{5}{9}$.

Cuando de un entero, como 8, *se hubiese de restar un entero y quebrado*, v. g. $3+\frac{4}{5}$, *se tomará una* *unidad del entero restando, y se hará de la especie del quebrado restador.* Efectuado asi será la cuestion restar de 7 y $\frac{5}{5}$, 3 y $\frac{4}{5}$, y hecha la resta en quebrados y enteros será esta igual á $4+\frac{1}{5}$.

De la multiplicacion de quebrados.

79. Antes de entrar en la multiplicacion de quebrados se debe tener presente, que multiplicar un número por otro es tomar tantas veces el multiplicando (28) cuantas la unidad cabe en el multiplicador. Por tanto, todo número multiplicado por la unidad da de producto el mismo número; multiplicado por mas de la unidad da de producto un número mayor que el propuesto; luego multiplicado un número por menos que la unidad, ha de ser su producto menor que el número propuesto: si el número entero 12 se multiplica por 1, el producto será el mismo número 12: si se multiplica por 2, es el producto 24 duplo de 12; luego si 12 se ha de multiplicar por el quebrado $\frac{1}{2}$ por cuanto el multiplicador es mitad de la unidad, se ha de tomar la mitad del multiplicando, y esta mitad 6 será el verdadero producto. Para que esto se verifique asi, la expresion de la multiplicacion habrá de ser del modo siguiente: $12 \times \frac{1}{2} = \frac{12 \times 1}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

En la propia forma si 12 se hubiese de multiplicar por $\frac{1}{3}$, se habrá de tomar una tercera parte del multiplicando, por cuanto el multiplicador es la tercera parte de la unidad, y será 4 el producto. $12 \times \frac{1}{3} = \frac{12 \times 1}{3} = \frac{12}{3} = 4$. Si se hubiese de multiplicar 18 por el quebrado $\frac{4}{6}$, se habrán de tomar las cuatro sextas partes del multiplicando 18, pues que el multiplicador $\frac{4}{6}$ es cuatro sextas partes de la unidad:

será por tanto $18 \times \frac{4}{6} = \frac{18 \times 4}{6} = \frac{72}{6} = 12$. Esto es un producto cuyo valor sea solamente cuatro sextos de diez y ocho.

Por consiguiente se verifica siempre, segun queda manifiesto, *que para multiplicar un número entero por un número quebrado se multiplica el entero por el numerador del quebrado, y el producto se parte por el denominador del mismo quebrado.*

80. Si á un número entero, v. g. 6, que se ha de multiplicar por el quebrado $\frac{3}{4}$, se le da la forma de quebrado, se tendrá (73) transformado el 6 en $\frac{6}{1}$: y siendo asi que 6 unidades es lo mismo que 6 enteros, será la expresion de $6 \times \frac{3}{4}$ la misma que $\frac{6}{1} \times \frac{3}{4}$, y el producto en la primera igual en todo al de la segunda: esto es, $\frac{6}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{6 \times 3}{1 \times 4} = \frac{18}{4} = 4$ y $\frac{1}{2}$. *Luego para multiplicar un quebrado por un quebrado, se multiplicará el numerador del uno por el numerador del otro, y el denominador por el denominador.* Para multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ se multiplicarán los numeradores 4 y 2, su producto 8 será el numerador del nuevo quebrado, cuyo denominador será el número 15, que produce la multiplicacion de los denominadores 5 y 3, y la expresion se escribirá asi $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$.

En efecto multiplicar el quebrado $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, es tomar dos veces la tercera parte de $\frac{4}{5}$; pero siendo la tercera parte del quebrado $\frac{4}{5}$ igual á una expresion tres veces menor cual es $\frac{4}{15}$, habiendo de tomarse dos veces esta tercera parte, será $\frac{8}{15}$ el verdadero producto: luego es probado por las dos demostraciones, que para multiplicar dos quebrados se multiplican los numeradores entre sí, y tambien los denominadores.

81. Si ocurriese multiplicar enteros juntos con

quebrados por enteros y quebrados, se deberá antes de egecutar la operacion reducir cada uno de los enteros á la especie del quebrado que los acompaña, y efectuar luego la multiplicacion de los nuevos quebrados que resultan. Para multiplicar $18+\frac{3}{5}$ por $9+\frac{3}{4}$ hecha la transformacion de los enteros á quebrados (73 deduccion 3.ª) será $\frac{93}{5} \times \frac{39}{4}$, y efectuada la multiplicacion se tendrá de producto $\frac{3627}{20} = 181 + \frac{7}{20}$.

De la division de los quebrados.

82. Discurriendo del propio modo que en la multiplicacion de quebrados se tendrá presente, que dividir un número por otro es buscar cuantas veces el número dividendo contiene al número divisor; ó lo que es lo mismo, cuantas veces el divisor se halla contenido en el dividendo (43). Que todo número que se divide por la unidad da de cociente un número igual al dividendo, esto es, el mismo número; y que si se divide por mas que la unidad el cociente ha de ser un número menor, y tantas veces menor cuantas el divisor sea mayor que la unidad: luego todo número dividido por menos que la unidad, ha de dar un cociente mayor que el número propuesto en la misma razon que el divisor sea menor que la unidad. Si un número entero como 12 se divide por 1, el cociente es el mismo 12, número de veces que el divisor 1 cabe en el dividendo: si el mismo 12 se divide por 2, el cociente será 6 mitad del dividendo, y número de veces que este contiene al divisor: luego si 12 se hubiese de dividir por el quebrado $\frac{1}{2}$, el cociente habrá de ser un doble del dividendo, esto es, 24; porque siendo el divisor mitad de la unidad, ha de caber en el dividendo doble número de veces que la misma unidad. Por tanto, y para que se veri-

fique este verdadero resultado, ha de ser la expresion del modo siguiente: $12 : \frac{1}{2} = \frac{12 \times 2}{1} = \frac{24}{1} = 24$.

En la propia forma si 12 se hubiese de dividir por $\frac{1}{3}$, el cociente que se busca ha de expresar las veces que este divisor está contenido en el dividendo; y siendo este divisor una tercera parte de la unidad, esto es, tres veces menor que ella, el cociente ha de ser tres veces mayor que si el número propuesto se dividiese por la misma unidad; será por tanto la expresion $12 : \frac{1}{3} = \frac{12 \times 3}{1} = \frac{36}{1} = 36$. Si se hubiese de dividir el número entero 18 por el quebrado $\frac{4}{6}$, se buscará un cociente que exprese cuantas veces el divisor cuatro sextos de la unidad cabe en el dividendo 18; y pues este divisor expresa sextos, es fácil conocer que el cociente ha de ser seis veces mayor que si expresase solo enteros, esto es, que si el entero 18 se hubiese de dividir por el número 4 numerador del quebrado. Será por tanto $18 : \frac{4}{6} = \frac{18 \times 6}{4} = \frac{108}{4} = 27$.

Por consiguiente, segun queda manifiesto, se verifica en todos los casos que *para dividir un número entero por un número quebrado, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y el producto se parte por el numerador.*

83. Si á un número entero como 6, que se ha de dividir por el quebrado $\frac{3}{4}$, se le da tambien la forma de quebrado (73), se tendrá que 6 trasformado en quebrado es igual á $\frac{6}{1}$; y siendo cierto que seis unidades ó 6 dividido por uno es lo mismo que 6 enteros, la expresion de $6 : \frac{3}{4}$ será la misma que $\frac{6}{1} : \frac{3}{4}$, y el cociente en la primera igual en un todo al que arroje la segunda: el cociente en la primera es el entero 6 multiplicado por el denominador 4 divi-

dido por el numerador 3, cual resulta de su expresion $6 : \frac{3}{4} = \frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$: en la segunda será asimismo $\frac{6}{1} : \frac{3}{4} = \frac{6 \times 4}{1 \times 3} = \frac{24}{3} = 8$. *Luego para dividir un quebrado por un quebrado se multiplicará el numerador del dividendo por el denominador del divisor, cuyo producto será numerador del quebrado cociente; y despues se multiplicará el denominador del dividendo por el numerador del divisor, y este producto será el denominador del quebrado cociente.*

Para dividir el quebrado $\frac{4}{5}$ por el quebrado $\frac{2}{3}$ se multiplicará el 4 numerador del dividendo por 3 denominador del divisor, su producto 12 será numerador del quebrado cociente, cuyo denominador será el producto del 5 denominador del dividendo por 2 numerador del divisor; asi $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$. En efecto dividir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ es averiguar cuantas veces $\frac{4}{5}$ contiene á $\frac{2}{3}$, y pues el divisor expresa tercios, será contenido en el dividendo tres veces mas que si expresase enteros; luego el cociente ha de ser igual á lo que arroje el quebrado dividendo, dividido primero por 2, numerador del divisor, y multiplicado luego por 3, denominador del mismo. Esta operacion y resultado es enteramente igual con lo que va expuesto, porque dividir primero un número por 2, y multiplicar luego su resultado por 3, es lo propio que multiplicarle primero por 3, y dividir despues este producto por 2. Asi para dividir dos quebrados se multiplicarán en cruz, con la atencion de que el producto del numerador dividendo por el denominador divisor ha de ser numerador del quebrado cociente.

84. En la multiplicacion de enteros por quebra-

dos el mismo resultado se tiene de multiplicar el entero por el quebrado, que el quebrado por el entero; mas en la division son enteramente opuestos y diferentes los resultados. Ya se ha visto cómo se divide un entero por un quebrado, véase ahora cómo se divide un quebrado por un entero. Si el quebrado $\frac{3}{4}$ se hubiese de dividir por el entero 5, desde luego se ve que el cociente ha de ser de un valor cinco veces menor que el dividendo; pero un quebrado se hace cinco veces menor multiplicando por este número su denominador dejando intacto el numerador, con que será $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$. Por otra parte si en la expresion $\frac{3}{4}$: 5 se hace el entero quebrado, ó se transforma en quebrado poniéndole la unidad por denominador, será $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} : \frac{5}{1}$, y efectuando la division de estos dos quebrados será $\frac{3}{4} : \frac{5}{1} = \frac{3 \times 1}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$, cuyo quebrado ó cociente es asimismo 5 veces menor que el dividendo $\frac{3}{4}$. *Luego para dividir un quebrado por un entero se multiplicará el entero por el denominador del quebrado, y al producto se pondrá por numerador el mismo que el quebrado tiene.*

85. Para dividir enteros juntos con quebrados se reducirán los enteros á la especie de los quebrados que los acompañan (73 deduccion 3.ª), y luego se efectuará la division entre los nuevos quebrados que resultan: por egemplo, se ha de dividir 54 y $\frac{1}{2}$ por 9 y $\frac{3}{4}$, hecha la reduccion resultarán los quebrados siguientes: $\frac{109}{2}$ y $\frac{39}{4}$, y efectuando la particion de estos nuevos quebrados se tendrá $\frac{109}{2} : \frac{39}{4} = \frac{436}{78} = 5 + \frac{46}{78}$.

Valuacion de los quebrados, y aplicacion de las reglas antecedentes.

86. Valuar un quebrado no es otra cosa que averiguar su valor; y pues un quebrado propiamente tal solo consta de partes de la unidad, habrá de ser el valor que se busque expresado en unidades de inferior especie; tales son las unidades de peso respecto á un doblon, las unidades de real respecto al peso, y las unidades de maravedí respecto al real; pues si tratándose de unidades de doblon se preguntase, por egemplo, cuánto vale el quebrado $\frac{3}{5}$ de doblon, se buscará primero su valor en pesos; y si quedase quebrado de peso se buscará luego su valor en reales &c.

La naturaleza misma de los quebrados enseña que $\frac{3}{5}$ de doblon es lo mismo que 3 doblones divididos en 5 partes, ó la quinta parte de 3 doblones; y que constando un doblon de cuatro pesos, los 3 doblones valen 12 pesos: luego lo mismo será decir 3 doblones divididos en 5 partes, ó la quinta parte de 3 doblones, que decir 12 pesos divididos en 5 partes, ó la quinta parte de 12 pesos: esto es, que $\frac{3}{5}$ de doblon es igual á $\frac{12}{5}$ de peso; quebrado impropio que reducido á enteros vale 2 pesos, mas $\frac{2}{5}$ de peso. Por consiguiente el quebrado de doblon $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$.

Luego para valuar un quebrado, conocida su especie, se multiplicará el numerador por el número de unidades de especie inferior que contiene una unidad á la que el quebrado se refiere, y este producto se dividirá por el denominador.

Por este método, y continuando la operacion en el quebrado propuesto, se hallará el verdadero valor que tiene, expresado hasta el último maravedí. Se ha visto ya que los $\frac{3}{5}$ de doblon valen 2 pesos y $\frac{2}{5}$ de peso; multiplíquese ahora este quebrado de peso por 15 número de reales que tiene un peso, será $\frac{2}{5} \times 15 = \frac{30}{5} = 6$ reales, se hallará que el quebrado propuesto $\frac{3}{5}$ de doblon valen justamente 2 pesos y 6 reales.

87. Si se pidiese el valor de un quebrado que fuese $\frac{5}{8}$ de 9 doblones, se sacaria el valor del quebrado de doblon, y su resultado se multiplicaria luego por 9, por cuanto el quebrado propuesto es de 9 doblones; pero siendo la misma operacion y resultado multiplicar desde luego el quebrado por los 9 doblones, y hacer despues la reduccion, es mas cómodo y fácil dar principio por esta multiplicacion. Asi $\frac{5}{8}$ de 9 doblones es igual $\frac{5}{8} \times 9 = \frac{45}{8} = 5 + \frac{5}{8}$; esto es, 5 doblones y $\frac{5}{8}$ de doblon, que reducido á pesos, será $\frac{5}{8} \times 4 = \frac{20}{8} = 2 + \frac{4}{8} = 2 + \frac{1}{2}$; esto es, 2 pesos y $\frac{1}{2}$; reducido á reales el quebrado $\frac{1}{2}$, será $\frac{1}{2} \times 15 = \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}$; esto es, 7 reales y $\frac{1}{2}$, que reducidos últimamente á maravedises, será $\frac{1}{2} \times 34 = \frac{34}{2} = 17$. Con que el quebrado propuesto $\frac{5}{8}$ de 9 doblones tiene de valor 5 doblones, 2 pesos, 7 reales y 17 maravedises.

88. Para completar el tratado de los quebrados resta solamente hablar de los quebrados de quebrados, ó quebrados compuestos á que inmediatamente llama la consideracion la valuacion hecha de los quebrados.

Si se considera un quebrado dividido en un cierto número de partes iguales, una ó muchas de estas partes forman un quebrado de quebrado, que se escriben separados por la preposicion *de*, v. g. $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, quiere decir que el quebrado $\frac{4}{5}$ está dividido en 3 partes iguales, y de ellas se han de tomar 2, esto es, las dos terceras partes de $\frac{4}{5}$. Y como para dividir el quebrado $\frac{4}{5}$ por 3 se multiplica el denominador 5 por 3, quedando intacto el numerador, será el quebrado cociente $\frac{4}{15}$; y si se toma este cociente 2 veces, será lo mismo que multiplicar este quebrado por el entero 2, de cuya multiplicacion resulta el quebrado $\frac{8}{15}$: quebrado simple que representa el valor del quebrado compuesto $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$. *Luego para reducir un quebrado de quebrado, ó quebrados compuestos á simples, se multiplicarán entre sí los numeradores y denominadores:*

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}.$$

Si se hubiesen de reducir á quebrado simple una serie de quebrados como $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ de 6 enteros, seria equivalente dicha serie á la expresion de $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} \times 6$, y efectuada esta multiplicacion resulta $\frac{90}{56}$, quebrado impropio pero simple, que expresa el valor de los quebrados compuestos, y es igual $1 + \frac{36}{56} = 1 + \frac{18}{28} = 1 + \frac{9}{14}$. Si se pidiesen los $\frac{3}{4}$ de $5 + \frac{3}{8}$, se reducirá el entero 5 á la especie de su quebrado, y se tendrá $\frac{3}{4}$ de $\frac{43}{8} = \frac{129}{32} = 4 + \frac{1}{32}$.

De los números denominados.

89. *Números denominados, que tambien se llaman complexos, son aquellos que constan de diferentes especies de unidades relativas todas ellas á un mismo género.* Asi 6 doblones, 3 pesos, 8 reales y 20 maravedises; 12 dias, 18 horas, 30 minutos y 24 segundos son números denominados ó complexos: y aunque las reglas hasta aqui declaradas pudieran tambien aplicarse al cálculo de estos números, se deben considerar de un modo particular, por cuanto la division que en ellos se hace de la unidad principal facilita y abrevia este cálculo.

Son muchas las especies de números denominados, mas bastará dar á conocer las cuatro mas usuales en monedas, en pesos, en medida y en tiempo, con el modo de reducir las especies superiores á las ínfimas, como tambien las ínfimas á las especies superiores. Para esto véanse las tablas siguientes, con las señales ó caracteres con que se representan á la derecha; y á la izquierda las especies inferiores de que cada una de las superiores se compone.

Para monedas.

Maravedises ....(mrs.)

34	Real..(rs.)		
510	15	Peso..(Pe.)	
2040	60	4	Doblon.........................(Dob.)

Para pesos.

Adarmes ....(ad.)

16	Onza..(O.)			
256	16	Libra......................................(Lb.)		
6400	400	25	Arroba.............................(A.)	
25600	1600	100	4	Quintal...............(Q.)

Para medidas.

Punto..(pº)

12	Línea ....(l.)			
144	12	Pulgada ....(p.)		
1728	144	12	Pie. ....(P.)	
5184	432	36	3	Vara........................(V.)

Para el tiempo.

Terceros...(‴)

60	Segundo.......................................(″)			
3600	60	Minuto......................................(′)		
216000	3600	60	Hora.......................(h.)	
5184000	86400	1440	24	Dia.......(D.)

90. Esto supuesto, reducir las especies superiores á las ínfimas no es otra cosa que aplicar los usos de la multiplicacion, segun se dijo (42): asi para reducir un número de pesos á reales no habrá mas que multiplicarle por 15, número de reales que contiene un peso; y si se hubiesen desde luego de reducir á maravedises multiplicarle por 510, número de maravedises que tiene un peso. Pero los números denominados se pueden expresar en forma de quebrado, sin que alteren de su valor. Por egemplo, 2 pesos, 3 rs. 8 mrs. reducidos á maravedises se tendrá, 2 pesos reducidos á rs. son 30, y añadidos los 3 rs. que se tienen en la propuesta 33. 33 rs. reducidos á mrs. son 1122, y

agregados los 8 mrs. de la propuesta 1130 mrs.; mas un maravedí es la 510.^{ma} parte del peso, luego el quebrado $\frac{1130}{510}$ de peso vale tanto (73) como el número propuesto 2 pesos, 3 rs. 8 mrs.

91. En la propia forma reducir las especies inferiores á las superiores es aplicar los usos de la particion, segun se dijo (58); asi para reducir un número de mrs á pesos no habrá mas que dividirle por 510. número de mrs. que comprende un peso, del mismo modo que para reducirle á rs. se dividirá por 34, número de mrs. que componen un real. Pero para sacar de un quebrado cualquiera el valor que le corresponde expresado en número denominado, por egemplo, el quebrado anterior $\frac{1130}{510}$ de peso, hay que aplicar las reglas que le corresponden (73 deduccion 1.^{a}), esto es, sacar los enteros que contiene; á saber, 2 pesos y $\frac{110}{510}$ de peso; hallando el valor de este quebrado en rs. (86) resulta 3 rs. y $\frac{120}{510}$ de real, que valuado en mrs. es igual á 8 mrs.: luego 2 pesos, 3 rs. 8 mrs. son lo mismo que el quebrado propuesto $\frac{1130}{510}$ de peso.

Adicion de los números complexos.

92. Para sumar números denominados se escribirán unos debajo de otros, pero de modo que formen ó esten en una misma columna los números de una misma especie, y con tal disposicion que á la izquierda se halle la de mayor valor, y sucesivamente á la derecha las de menor.

Dispuestas asi las cantidades empiécese á sumar por las unidades de la especie menor; y si la suma de esta columna no llegase á completar una unidad del órden inmediato mayor, se escribirá debajo de la misma; pero si completase una ó mas unidades justas se pondrá cero, y si la suma fuese mayor se pondrá el exceso; y la unidad ó unidades justas que completen de la especie mayor se llevarán para juntarlas con sus semejantes en la columna inmediata, en donde se practicará la misma operacion, y asi sucesivamente.

Egemplo.

	Dob.	Pe.	rs.	mrs.
Suman.	00	3	11	20
	22	0	8	32
	61	2	9	28
Suma.	84	3	00	12

Dando principio por la especie menor, y sumados los maravedises que contiene resulta ser su número 80, que componen 2 unidades de real y 12 mrs. mas: se escriben los 12 mrs., y los 2 rs. se llevan para agregar á la columna del órden inmediato, cuya suma asciende á 30 rs., número que compone 2 unidades justas de peso, por lo que se pondrá cero á la suma, y los 2 pesos se llevarán para agregar á la suma de su clase: esta suma asciende á 7 pesos, que hacen un doblon y 3 pesos mas, que se escriben debajo; y llevando el doblon á su respectiva columna será la suma en esta 84 doblones, y el total en dicha suma 84 doblones, 3 pesos, 12 mrs.

Sustraccion de los números complexos.

93. Dispuestas las cantidades como para sumar, pero la menor debajo de la mayor, empiécese á restar por las unidades de la especie menor; y si el número restando fuese mayor que el del restador, se escribirá debajo la resta ó diferencia; mas si la especie del restador fuese mayor que la del restando

se tomará una unidad de la inmediata mayor, que reducida á unidades de la menor, se añadirá á las que se tengan en este número restando, con lo que se hará la resta. Practicando lo propio con cada una de las especies sucesivas, se tendrá la atencion de que siempre que se tome prestada una unidad del órden inmediato se disminuye en este al practicar la resta, que sucesivamente se irá escribiendo debajo del número que la hubiese dado.

Egemplo.

	Dob.	Pe.	rs.	mrs.
De...................	16.........	0.........	8.........	30
Se han de restar.	3.........	3.........	12.........	22
Resta.................	12.........	0.........	11.........	08

Practicando lo expuesto, y dando principio por los maravedises, se verá que si de 30 se rebajan 22, es la resta 8, que se escribirá debajo; pasando á la inmediata columna se tendrá que de 8 rs. no se pueden restar 12 sin tomar antes una unidad del órden inmediato mayor ó de peso; mas en este se halla ser cero su número; por lo que se debe recurrir á tomar prestado un doblon, que vale 4 pesos, de los que se tomará la unidad de peso que se necesita para hacer la resta en los rs. Tomado este peso se tienen ya 15 rs., que con 8 del número restando componen 23, y rebajando de 23 los 12 del restador es la resta 11 rs. Pasando luego á los pesos, se tendrá presente que aunque se ha tomado un doblon se quitó un peso para agregar á los reales, y por consiguiente quedó la unidad de doblon ó los 4 pesos que vale reducidos á 3; y quien de 3 resta 3 es la diferencia cero. Ultimamente se dirá que los 16 doblones del restando quedaron en 15, de los que rebajados 3 que el restador representa es la resta 12. Será la diferencia total del restador al restando 12 doblones, 11 rs. 8 mrs.

Multiplicacion de los números complexos.

94. Para la mayor inteligencia de esta operacion se debe tener presente (31) que las unidades del producto entre dos factores de diferente especie han de ser siempre de la misma naturaleza que en el multiplicando.

95. Esto supuesto, para multiplicar dos números denominados *redúzcanse las especies superiores á las ínfimas, tanto en el multiplicando como en el multiplicador; y esta reduccion respectiva póngase por numerador de un quebrado, cuyo denominador será una unidad del órden mayor reducida al menor*; y supuesto que en toda operacion de multiplicar concurren dos cantidades, resultarán en esta dos quebrados, que multiplicados entre sí darán el quebrado producto. Este quebrado será *de la especie del órden mayor en el multiplicando*; porque siempre su numerador se presenta dividido por el producto de la unidad del órden mayor, reducida al menor en multiplicando y multiplicador.

Egemplo.

Se pregunta cuánto importarán 4 varas, 2 pies y 4 pulgadas, sean de paño, ó sea de una obra que se emprendiese, á razon de 2 pesos, 3 reales y 4 maravedises la vara. Será la expresion reducida á quebrados segun se dijo.

	Pe.	rs.	mrs.	
Multiplicando:	2.....	3.....	4.	$= \frac{1126}{510}$.
	V.	P.	p.	
Multiplicador:	4.....	2.....	4.	$= \frac{172}{36}$.

Multiplicando ahora estos quebrados (80) será $\frac{1126}{510} \times \frac{172}{36} = \frac{193672}{18360}$ quebrado producto, que reducido á enteros (73 deduccion 1.ª) será igual á 10 pesos mas el quebrado $\frac{10072}{18360}$ de peso; y valuando este quebrado (86) resultarán 8 rs., mas el quebrado de real $\frac{4200}{18360}$, que hallado su valor en maravedises, viene á ser 8. Por consiguiente todo el producto es 10 pesos, 8 rs. y 8 mrs.

De la division de los números complexos.

96. Enterado bien de la multiplicacion de los números denominados es sumamente fácil y sencilla la division, pues que en todo sigue los mismos pasos: asi que, reducidas las especies superiores á las ínfimas en el dividendo y divisor, se formarán dos quebrados, que cada uno respectivamente tendrá por denominador una unidad del órden mayor reducida al menor como en la multiplicacion; y teniendo presente que el cociente ha de ser siempre de la especie del dividendo (45), se tendrá la atencion de no equivocarle con el divisor, porque en la naturaleza de los quebrados se ha visto no cabe alteracion de lugar cuando se trata de la division.

Con el siguiente egemplo se hará la prueba de la multiplicacion anterior al mismo tiempo que se manifieste la práctica de la operacion presente.

Egemplo.

Se pregunta si 4 varas, 2 pies y 4 pulgadas de obra costaron 10 pesos, 8 reales y 8 maravedises, ¿á cómo sale cada vara?

	Pe.	rs.	ms.		
Dividendo:	10	8	8.	=	$\frac{5380}{510}$
	V.	P.	p.		
Divisor:	4	2	4.	=	$\frac{172}{36}$

Hecha la reduccion de los números propuestos á quebrados, se multiplicarán estos en cruz para verificar la division como se enseñó (83), y será $\frac{5380}{510} : \frac{172}{36} = \frac{193680}{87720}$ quebrado, que reducido á enteros da 2 pesos y $\frac{18240}{87720}$ de peso; hallado el valor de este quebrado (86), resultan 3 reales, y el quebrado de real $\frac{10440}{87720}$, que valuado en maravedises hace 4 maravedises; será el cociente, ó lo que cada vara vale, 2 pesos, 3 reales y 4 maravedises.

Nota. Aunque hay otros métodos para la multiplicacion y division de los números complexos, se prefiere el presente; porque si en algunos casos no es el mas breve, es siempre el mas fácil y perceptible.

De las razones y proporciones.

1.° DE LAS RAZONES.

97. *Razon es el resultado de la comparacion que se hace entre dos cantidades de una misma especie, ya sea con el fin de atender á la diferencia que hay de una á otra, ya con el de averiguar cuántas veces la una se contiene en la otra.*

Dos números, como 6 y 2, se pueden comparar con estos dos fines, ó para saber en cuánto es 6 mayor que 2, ó para averiguar cuántas veces el 6 incluye al 2. En la propia forma el número 2 puede ser comparado con 6, atendiendo á la diferencia que hay de 2 á 6, ó á cuántas veces 2 es menor que el 6.

Los números de que consta una razon, llamados *términos de la razon*, se nombran *antecedente* y *consecuente*: antecedente es el número que se escribe y nombra primero, ó el que se compara; consecuente es el segundo número, ó á quien se compara.

Si en la comparacion de dos cantidades se atiende solamente á la diferencia que hay entre antecedente y consecuente se llama *razon aritmética*, y se escribe poniendo un punto en medio de los dos términos; asi 6 . 2 es razon aritmética. Si en la comparacion de dos cantidades se lleva la mira de conocer las veces que la una incluye á la otra, ó se halla incluida en ella, se llama *razon geométrica*, y se escribe poniendo dos puntos entre los dos términos; asi 6 : 2 es razon geométrica.

Se llama en general *exponente de una razon* al número que la expresa: por tanto, exponente de una razon aritmética será *el número que exprese la diferencia que hay entre antecedente y consecuente.* En la razon aritmética 6 . 2 su exponente es 4. Exponente de una razon geométrica, siguiendo el método generalmente adoptado, *es el cociente que resulta del antecedente partido por el consecuente*: asi el exponente de la razon geométrica 6 : 2 es 3.

98. Una razon aritmética no se altera aun cuando á cada uno de sus dos términos se le añada ó quite una misma cantidad. La razon de 6 . 8 es la misma que la de 10 . 12, que la de 2 . 4, siendo asi que se añadió y quitó respectivamente un mismo número á los términos de la primera; porque siempre queda entre los dos términos de cada razon una misma diferencia: por tanto se llaman *razones iguales.*

99. Una razon geométrica no se altera aun cuando sus dos términos se multipliquen ó partan por un mismo número, porque siendo la razon geométrica ó su exponente, el cociente que resulta del antecedente partido por el consecuente, será este antecedente como numerador de una fraccion cuyo denominador sea el consecuente; y asi como un quebrado no muda de valor (74) cuando sus dos términos se multiplican ó parten por un mismo número, asi en la razon geométrica ha de suceder del propio modo: 24 : 6 tiene la misma razon que 72 : 18, y que 8 : 2, siendo asi que

se hallan los términos de la primera razon multiplicados y partidos respectivamente por un mismo número 3 en la segunda y tercera; por tanto se llaman *razones iguales*.

Asimismo dos números, cualquiera que sean, tienen entre sí la misma razon geométrica que sus duplos, sus triplos, sus cuádruplos &c., como tambien la tienen con sus mitades, sus terceras, cuartas partes &c.

La razon geométrica se divide en razon de *igualdad* y razon de *desigualdad.* Razon de igualdad es cuando el antecedente es igual á su consecuente, y razon de desigualdad es cuando el antecedente es mayor ó menor que su consecuente; de suerte que cuando el antecedente de una razon es mayor que su consecuente se llama *de mayor desigualdad*; y cuando el antecedente es menor que el consecuente se llama *de menor desigualdad.*

Se llama á una razon *dupla*, *tripla*, *cuádrupla &c.* cuando el antecedente es dos, tres, cuatro &c. veces mayor que su consecuente; y razon *subdupla*, *subtripla*, *subcuádrupla &c.*, cuando el antecedente es dos, tres, cuatro &c. veces menor que su consecuente.

Cuando en dos ó mas razones se multiplican los antecedentes entre sí, y tambien los consecuentes, la razon que resulta se llama *razon compuesta.*

Dícese de una razon que es *inversa* respecto de otra, cuando el antecedente de la una es consecuente de la otra, ó al reves.

2.º DE LAS PROPORCIONES.

100. *Proporcion*, que tambien se llama analogía, *es la que resulta de la igualdad de dos razones.*

Por consiguiente cuando las dos razones que se comparan son aritméticas, la proporcion que forman se llama *aritmética*; y cuando las dos razones son geométricas, la proporcion que forman se llama *geométrica*. Si cuatro números, como 7, 9, 12, 14, son tales que entre el primero y segundo hay la misma diferencia que entre el tercero y cuarto, forman una *proporcion aritmética*, que se escribe ó con dos puntos en medio de las dos razones $7 . 9 : 12 . 14$, ó con el signo de igualdad, que es mas usual, $7 . 9 = 12 . 14$, leyéndose en una y en otra de este modo: 7 es aritméticamente á 9, como 12 es á 14.

Si cuatro números son tales que el primero respecto del segundo es tantas veces mayor ó menor que el tercero respecto del cuarto, como 3, 9, 8, 24, forman una *proporcion geométrica*, que se escribe, ó con cuatro puntos en medio de las dos razones $3 : 9 :: 8 : 24$, ó con el signo de igualdad $3 : 9 = 8 : 24$; leyéndose del mismo modo en una que en otra, 3 es geométricamente á 9 como 8 es á 24.

Al primero y último término de una proporcion se llaman *extremos*, al segundo y tercero se llaman *medios*; y como en toda proporcion hay dos antecedentes y dos consecuentes, en la primera razon se dice *primer antecedente*, *primer consecuente*, y en la segunda, *segundo antecedente*, *segundo consecuente*.

101. Cuando en una proporcion, ya sea aritmética, ya geométrica, el consecuente de la primera razon sirve de antecedente á la segunda, la proporcion se llama *continua*; $4 . 7 = 7 . 10$ es una proporcion aritmética continua, cuya expresion se escribe suprimiendo el término repetido, y anteponiendo el presente signo $\div 4 . 7 . 10$, que advierte que al pronunciar la proporcion, se debe repetir el término medio 7. En la propia forma $18 : 12 = 12 : 8$ es una

proporcion geométrica continua, que se escribe anteponiendo este signo ÷ 18 : 12 : 8, para expresar que el término medio 12 se debe repetir: 18 es geométricamente á 12, como el mismo 12 es á 8.

Propiedades de las proporciones aritméticas.

102. *En toda proporcion aritmética la suma de los extremos es igual á la suma de los medios:* por egemplo, 3 . 7 = 8 . 12, la suma de 3 y 12, términos extremos, es la misma que la de 7 y 8, términos medios; porque siendo las dos razones que la forman iguales, el segundo término tiene de mas que el primero lo mismo que el tercero tiene de menos que el cuarto: luego compensado el aumento del uno con la diminucion en el otro, el primer término con el cuarto ha de componer tanto como el segundo y tercero juntos.

En toda proporcion aritmética continua, la suma de los extremos es igual al duplo del término medio: por egemplo ÷ 6 . 9 . 12 la suma de los términos extremos 6 y 12 es igual á dos veces el término medio 9.

Asi que, siempre que se verifique que en cuatro cantidades propuestas la suma de los extremos sea igual á la de los medios, formarán proporcion aritmética; como asimismo si en tres cantidades propuestas la suma de los extremos primera y tercera, sea igual al duplo de la cantidad media, formarán una proporcion aritmética continua.

Esto supuesto, será fácil hallar cualquiera de los términos extremos ó medios que falten para formar una proporcion aritmética, como se verá por los tres egemplos siguientes:

1.° A tres términos dados hallar un cuarto proporcional aritmético. *Súmense segundo y tercero, de la suma réstese el primero, y la resta será el cuarto.* Sean dados los tres números 4, 7 y 13; sumando 7 con 13 componen 20, y restando de este número el primero 4 queda 16, cuarto término que se busca; será la proporcion 4 . 7 = 13 . 16.

2.º A dos términos dados hallar un tercero proporcional aritmético. *Dúplese el segundo, de este duplo réstese el primero, y la resta será el tercero.* Sean dados los dos números 4 y 9, el duplo de 9 son 18, restando de este número el primer término 4 será la resta 14, tercero proporcional que se busca, y la proporcion ÷ 4 . 9 . 14.

3.º A dos términos dados hallar un medio proporcional aritmético. *Súmense los dos términos, la mitad de esta suma será el medio.* Sean los dos números 4 y 20, su suma es 24; la mitad de esta suma es 12, y el número medio proporcional que se busca. La proporcion será ÷ 4 . 12 . 20.

Propiedades de las proporciones geométricas.

103. *En toda proporcion geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios.* Por egemplo, en la proporcion 12 : 3 = 8 : 2 el producto de los extremos 12 por 2 es 24, y el de los medios 3 por 8 es tambien 24. En la proporcion 2 : 6 = 3 : 9 el producto de 2 por 9, términos extremos, es tambien igual al de 6 por 3, términos medios. Esta verdad es bien sencilla, porque siendo las dos razones que forman la proporcion geométrica en uno y otro egemplo iguales respectivamente, el segundo término en la primera es tantas veces menor que el primero, cuantas el tercero es mayor que el cuarto: del mismo modo, el segundo término en la

segunda es tantas veces mayor que el primero, cuantas el tercero es menor que el cuarto: luego recompensándose igualmente la diminucion ó mayoría de veces del segundo término, con la mayoría ó diminucion de las mismas veces en el tercero, y el aumento ó diminucion en el primero con la diminucion ó aumento en el cuarto, el mismo producto resultará multiplicando los medios que multiplicando los extremos.

En toda proporcion geométrica continua el producto de los extremos es igual al producto del término medio multiplicado por sí mismo. Por egemplo, $\div$ 3 : 9 : 27, el producto de los términos extremos 3 por 27, es 81, y el del término medio 9 por 9 es tambien 81. La razon es porque como en toda proporcion geométrica el producto de los extremos es igual al de los medios, siendo en la proporcion continua el término medio consecuente de la primera razon y antecedente de la segunda, el producto de los extremos ha de ser igual con precision al producto del término medio multiplicado por sí mismo.

Luego si cuatro cantidades se hallan tales que el producto de la primera multiplicada por la cuarta fuese igual al producto de la segunda por la tercera, las cuatro cantidades serán geométricas proporcionales: y si asimismo se hallase que tres cantidades sean tales que el producto de la primera y tercera fuese igual al producto de la segunda multiplicada por sí misma, esto es á su cuadrado (40), estas tres cantidades formarán una proporcion geométrica continua.

Esto supuesto, será muy fácil hallar cualquiera de los términos extremos ó medios que falten para formar una proporcion geométrica, como se verá por los tres egemplos siguientes.

1.° A tres términos dados hallar un cuarto proporcional geométrico. *Multiplíquese el segundo por el tercero, el producto pártase por el primero, el cociente será el cuarto.* Sean dados los tres números 5, 3 y 10; multiplíquese el segundo 3 por el tercero 10, su producto 30 pártase por el primero 5, y el cociente 6 será el cuarto termino que se busca 5 : 3 = 10 : 6.

2.º A dos términos dados hallar un tercero proporcional geométrico. *Multiplíquese el segundo por sí mismo, y este producto pártase por el primero, el cociente será el tercero.* Sean los dos números dados 18 y 12; multiplíquese el segundo 12 por 12, su producto 144 pártase por el primero 18, el cociente 8 será el tercero que se pide ÷ 18 : 12 : 8.

3.º A dos términos dados hallar un medio proporcional geométrico. *Multiplíquense entre si los dos términos, y buscando el número que multiplicado por sí mismo de igual producto, será este número el medio que se pretende hallar.* Sean los números dados 12 y 3; multiplicados entre sí producen 36, y el número 6, que multiplicado por sí mismo compone 36, ó es (40) su raiz, será el medio que se busca ÷ 12 : 6 : 3.

De las variaciones que pueden tener los términos de una proporcion.

104. Los términos de una proporcion aritmética pueden cambiar de lugar alternando ó invirtiendo el órden con que estan escritos, quedando siempre la suma de los extremos igual á la de los medios, y por consiguiente en proporcion.

En la proporcion geométrica son varios los modos con que esta variacion puede hacerse, quedando siempre el producto de los extremos igual al de los medios, y por tanto en proporcion; pero los mas comunes son cuatro. *Alternando, invirtiendo, componiendo y dividiendo.*

Alternando es comparando los antecedentes entre sí, y tambien los consecuentes. Asi la proporcion $9:3=18:6$ puede ser variada en la siguiente $9:18::=3:6$.

Invirtiendo es comparando los consecuentes á los antecedentes: asi la proporcion $9:3=18:6$ puede ser variada en la siguiente $3:9=6:18$.

Componiendo es comparando la suma de cada antecedente y consecuente, á su mismo antecedente ó consecuente. La misma proporcion $9:3=18:6$ puede ser variada en la siguiente $9+3:9=18+6:18$, ó en la de $9+3:3=18+6:6$.

Dividiendo es comparando la diferencia que hay entre el antecedente y consecuente á su mismo antecedente ó consecuente: la proporcion propuesta $9:3=18:6$ podrá ser variada del modo siguiente $9-3:9=18-6:18$, ó bien $9-3:3=18-6:6$.

Algunos usos de las proporciones y proposiciones precedentes.

105. La doctrina de las proporciones de que se acaba de tratar es de un uso continuo en la resolucion de las diferentes cuestiones pertenecientes á la aritmética, como que de su aplicacion resulta el desenlace de las que se distinguen con los nombres de reglas de tres, de compañía, de aligacion, y de falsa posicion; pero la manifestacion de todas estas operaciones pertenece al tratado de una aritmética mas extensa que la presente, y por tanto se dará solamente una ligera idea de las reglas de tres.

De la regla de tres.

106. La regla de tres ó de proporcion se divide

en *simple* y *compuesta*; y sea cual fuere la cuestion que la motive se dirige siempre á hallar una cantidad desconocida, siendo conocidas otras tres, ó lo que es lo mismo, un cuarto término proporcional. Esta cantidad ó término desconocido se representa por la letra x.

107. Regla de tres simple es toda cuestion en la que no entran mas que cuatro cantidades, tres conocidas y una por conocer; y esta regla de tres simple puede ser *directa* ó *inversa*: será directa *cuando creciendo* (por egemplo) *el tercer término de la cuestion respecto del primero, el cuarto desconocido deba crecer respecto al segundo.* Será inversa *cuando creciendo el tercer término en la cuestion, respecto al primero, deba el cuarto disminuir respecto al segundo.*

Facilmente se vendrá en conocimiento de si una regla de tres simple es directa ó inversa, ordenando los términos de la cuestion de suerte que el primero sea de la especie del tercero, y el segundo de la del cuarto que se busca, que es como por lo comun viene propuesta. Egemplo: 20 hombres ganan 16 pesos por dia, ¿ 14 hombres cuánto ganarán? Esta propuesta se halla bien ordenada; véase ahora si como disminuyendo el tercer término de ella respecto al primero, el cuarto desconocido debe ó no disminuir respecto al segundo: en efecto, menor número de hombres han de ganar en un mismo tiempo menor número de pesos; luego la presente regla de tres es directa, y comparando entre sí los términos semejantes, *por cuanto los efectos deben estar siempre en la misma razon que las causas*, quedará reducida á la proporcion 20 homb.: 14. homb.$=$16 pe.: x pe.: multiplicando ahora el segundo término por el tercero, y partiendo el producto por el primero (103) se hallará el cuarto $\frac{14 \times 16}{20} = 11 + \frac{1}{5}$ número de pesos que ganarian los 14 hombres.

Si al hacer examen de la cuestion se notare que creciendo el tercer término respecto del primero, el cuarto deba disminuir respecto al segundo, entonces la regla de tres será inversa. Egemplo: una barra que pesa 6 libras se arrojó á 18 pies de distancia, otra barra que pese 9 libras ¿á qué distancia se arrojará? Claro es que una misma fuerza ha de arrojar un mayor peso á menos distancia, y que por consiguiente esta regla de tres es inversa. Para resolver la regla de tres simple inversa se debe transformar en directa, permutando los términos que causan la inversion; luego en la cuestion propuesta, en vez de la proporcion inversa que se presenta 6 lib. : 9. lib. = 18 ps. : x ps. quedará permutada en la directa 9 lib. : 6 lib. = 18 pe. : x ps. Esto es, ¿á qué distancia se podrá arrojar una barra de 9 libras, en el supuesto de que otra de 6 libras se arrojó á 18 pies? Haciendo la multiplicacion y particion, segun se dijo, será $\frac{6 \times 18}{9} = 12$ número de pies á cuya distancia se arrojará la barra de 9 libras.

108. Regla de tres compuesta es toda cuestion en la que entran mas de cuatro cantidades, esto es, tres cantidades principales y conocidas como causas y efectos, acompañadas de otras como circunstancias ó condiciones. Por consiguiente, asi como en la regla de tres simple la cantidad desconocida con la cantidad de la misma especie en la cuestion, se ha visto estar entre sí en la razon simple de las otras dos cantidades que formaban las causas; en la regla de tres compuesta la cantidad que se busca con la cantidad semejante en la cuestion, está en razon compuesta de las cantidades que forman las causas y con-

diciones de que van respectivamente acompañadas.

Egemplo: 12 hombres en 6 dias ganan 32 doblones, 18 hombres en 8 dias ¿cuántos ganarán? Esta regla de tres se llama compuesta, porque las cantidades que forman la cuestion van acompañadas de otras que determinan el tiempo ó condiciones, que asi como son de solo dias, podrian ademas tener otras como de hora &c. Asi la cantidad que se busca de doblones con la cantidad de la misma especie en la cuestion, estan entre sí en la *razon compuesta* de los hombres y dias que determina como causas.

Para resolver la regla de tres compuesta se examinará antes si es directa ó inversa, *haciendo tantas reglas de tres simples como condiciones tiene.* Aplicando este examen al egemplo propuesto se dirá: *primero*, 12 hombres en ciertos dias ganan 32 doblones, 18 hombres en iguales dias deben ganar mayor cantidad; luego esta regla de tres se halla directa en su primera parte. *Segundo*: cierto número de hombres en 6 dias ganan 32 doblones, el mismo número de hombres en 8 dias deberán ganar mayor cantidad, y por consiguiente tambien esta segunda parte ó de condiciones se halla directa: comparando pues los términos semejantes, y haciendo (99) la razon compuesta, que formarán las causas y condiciones, será la expresion de este problema 12 homb. $\times$ 6 ds. : 18 hombr. $\times$ 8 ds. $=$ 32 dob. : x dob. ; y efectuando las multiplicaciones indicadas quedará en la proporcion $72 : 144 = 32 : x$, que multiplicando el segundo término por el tercero, y partiendo su producto por el primero (103), será $\frac{144 \times 32}{72} = 64$ doblones, que es la cantidad que se buscaba ó que deberian ganar los 18 hombres en 8 dias, segun se propone.

Si al hacer examen de la regla de tres compuesta se hallase inversa, se permutarán los términos que causen la inversion, como se egecutó en la regla simple, y ya ordenada en directa se hará la resolucion en los mismos términos que queda manifestado.

Egemplo: 16 hombres trabajando 12 horas cada dia necesitaron 8 dias para ganar una cierta cantidad (por egemplo de 100 pesos); ¿cuántos dias necesitarán para tener igual ganancia 10 hombres trabajando 15 horas por dia? Claro es que si 16 hombres trabajando cierto número de horas necesitaron 8 dias para ganar cierta cantidad, 10 hombres con las mismas horas de trabajo necesitan mas dias; por tanto esta primera comparacion es inversa; en la propia forma, si cierto número de hombres trabajando á 12 horas por dia necesitan 8 dias para cierta ganancia, el mismo número de hombres trabajando 15 horas por dia necesitan menos dias, por cuya razon tambien es esta segunda parte inversa; asi que, en lugar de la expresion inversa 16 homb. $\times$ 12 hor. : 10 homb. $\times$ 15 hor. $=$ 8 ds. : x ds. se tendrá permutada en directa 10 homb. $\times$ 15 hor. : 16 homb. $\times$ 12 hor. $=$ 8 ds. : x ds., ó lo que es lo mismo, la proporcion 150 : 192 $=$ 8 : x, cuyo cuarto término es 10 y $\frac{6}{25}$ número de dias que se buscaba, y que los 10 hombres trabajando á 15 horas por dia necesitaban para poder ganar los 100 pesos.

PARTE SEGUNDA.

DE LA GEOMETRIA.

IDEA GENERAL DE LA GEOMETRIA.

1. La Geometría trata no solo de apurar cuanto pertenece á la medida de la extension, sino que suministra medios para la descripcion de las figuras, su division y reduccion, y para hallar las relaciones ó proporciones que tienen las partes de aquellas unas con otras, ó con el todo á que se refieren. De esta exactitud en las proporciones nace el poderse comparar una estatua con un hombre, asegurando ser semejantes ó desemejantes.

2. Aunque en todos los cuerpos se observe á primera vista su longitud, latitud y grueso, ó lo que es lo mismo, sus dimensiones como inseparables de ellos, esto no obstante se atiende con mucha frecuencia solamente á lo que tienen de largo, prescindiendo de su ancho y grueso; y otras veces se para la atencion en la longitud y latitud sin atender al grueso.

3. Por esto se distinguen en la Geometría tres maneras de extension; á saber: la extension en solo longitud, que se llama *línea*: la extension en longitud y latitud, que se llama *superficie*; y la extension en longitud, latitud, y profundidad ó grueso, que se llama *cuerpo*.

Del punto y de la formacion de la línea.

4. El principio de cada una de estas dimensiones

es el *punto*, el cual se considera como que no tiene extension ninguna, y que si alguna se le da es sumamente pequeña, como se verifica en los extremos de una línea trazada muy sutilmente. En esta inteligencia se podrá definir el punto diciendo ser *la menor señal que con la punta de un lápiz ó pluma se pueda hacer*; y que si se considera á este punto movible en una determinada direccion, dejando un rastro ó señal por donde vaya caminando, formará una línea. Por consiguiente cada línea no es otra cosa que una continuacion de puntos.

5. Supuesta la formacion de la línea sus extremos son puntos, y se puede definir en general diciendo que *es una longitud sin latitud*. Las líneas pueden ser *rectas* ó pueden ser *curvas*. Se tratará primero de las líneas rectas, y despues de las curvas; advirtiendo que de la union de la una línea recta y otra curva nace la que se llama línea *mixta*, sin que por eso se entienda ser otra tercera línea, sino solamente el agregado de las dos primitivas recta y curva.

De las líneas rectas, y de las diferentes posiciones que pueden tener unas con otras, ó consideradas por sí solas.

6. *Línea recta es aquella cuyos puntos estan todos en una misma direccion*, como AB (fig. 1). Todas las líneas rectas son de una misma especie; pero pueden diferenciarse en ser mas ó menos largas, ó en el diferente modo con que esten colocadas las unas respecto de las otras, que es lo que se entiende *por sus diferentes posiciones*.

Las posiciones que pueden tener las rectas entre sí son dos, porque una línea recta puede encontrar á otra ó no encontrarla: si la encuentra ha de suceder forzosamente una de dos cosas; á saber, ó que caiga sobre la que encuentre sin inclinarse mas á un lado que á otro, ó que se incline mas á un lado que al otro.

7. Cuando una recta *cae ó concurre con otra sin inclinarse mas á un lado que á otro*, se llama *perpendicular*. Tal es DC (fig. 2) respecto de AB; y tambien la misma AB respecto de la DC; porque una á otra son mutuamente perpendiculares, asi como tambien lo son las RS, TQ (fig. 3).

8. Cuando una recta *cae ó concurre con otra inclinándose mas á un lado que á otro* se llama *oblicua*. Tal es la línea GH (fig. 4) respecto de la EF, y recíprocamente EF respecto de GH, pues que una á otra son mutuamente oblicuas.

9. Si dos líneas como LM, NO (fig. 5) *estan situadas de tal modo, que todos los puntos de la primera esten igualmente distantes de los puntos de la segunda*, dichas dos líneas son *paralelas*, y aun cuando se las prolongue á una distancia considerable, nunca se podrán encontrar. Esta posicion es la segunda que pueden tener entre sí dos líneas rectas.

Cuando dos paralelas son cortadas por otra línea como la s *s* ó cualquiera otra recta, se llama *secante*.

10. Una línea que cae de arriba abajo perpendicularmente á la superficie de la tierra, ó en la misma direccion que tiene un hilo á cuyo extremo inferior se ha colgado un plomo *ab* (fig. 6), se llama *vertical*. Una línea situada en direccion perpendicular á la vertical ó paralela á la superficie de la tierra como *cd* (fig. 7), se llama *horizontal*.

11. Las líneas que distan entre sí menos por un lado que por otro, aunque sea una cantidad muy corta, dejan ya de ser paralelas, porque prolongadas que sean hácia la parte de su inclinacion concurrirán en un punto: tal son XYV (fig. 8), y miradas por el

lado que distan menos, se nombran *convergentes.* El punto C en donde concurren en su prolongacion, se llama *punto de concurso ó de convergencia.* Si las líneas se consideran como que salen de un punto C (fig. 9), dirigiéndose á diferentes lados se llaman *divergentes.* Bien claro es que al paso que se apartan mas del punto de donde salen, van siendo mas y mas divergentes entre sí.

De las líneas curvas y de las líneas rectas consideradas en el círculo.

12. La línea curva *es aquella cuyos puntos no estan todos en una misma direccion*, ó bien aquella cuyos puntos varían de direccion á cada paso, como cada una de las ABC (fig. 10), que saliendo de un punto A, para llegar al otro punto extremo C, van formando el rodeo ABC. Por eso se dice que la mas corta distancia entre dos puntos es la línea recta AC.

Son muchas las especies que hay de líneas curvas; pero la mas conocida de todas es la línea circular, ó circunferencia de círculo de que se va á tratar.

13. Línea circular, ó circunferencia de un círculo, *es una curva cerrada ó reentrante, cuyos puntos están todos á igual distancia de un punto comun, que tiene en su medio al rededor del que gira, llamado centro.* Tal es la línea ABDEF (fig. 11), cuyo punto centro es C.

Las líneas que como CA, CB, CD, CE, CF van desde el centro á la circunferencia, son todas iguales, y se llaman *radios.*

Las líneas que pasando por el centro terminan sus estremos en la circunferencia, como FD y EB, se llaman *diámetros.* Todos los diámetros de un círculo son iguales, y dividen la línea circular ó circunferencia en dos partes iguales, que por esta razon se llaman *semicircunferencias*.

Las líneas que no pasando por el centro terminan sus extremos en la circunferencia se llaman *cuerdas*: tales son BA y DE (fig. 12). Toda cuerda divide la circunferencia en dos partes desiguales, de las que á la mas grande se llama *arco mayor*, y á la otra *arco menor*.

Cualquiera línea recta que toque la circunferencia de un círculo en un solo punto sin cortarla, como TAN, se llama *tangente*: y toda aquella recta que corte á la circunferencia en dos puntos, cayendo parte dentro y parte fuera, como SM, se llama *secante*.

14. Análogamente se dirá tambien que las circunferencias representadas en las figuras 12′ y 12″, son mutuamente tangentes, aunque el punto de contacto es en unas 12′ interior, y en las otras 12″ exterior; y que las denotadas en las figuras 13 son mutuamente secantes.

15. Para describir con toda exactitud una circunferencia de círculo se fijará una de las puntas de un compas en el punto que se elija por centro, y poniendo en la otra un lapicero ó pluma, se girará con ella al rededor de la primera, y quedará trazada la circunferencia que se pedia: de esta manera se han descrito las circunferencias representadas por la figura 14; y como todas ellas tienen un mismo centro, por eso se las llama *concéntricas*.

Se deja conocer que aunque estas circunferencias tienen un mismo centro, estan trazadas con diferentes aberturas de compas, y que por lo tanto son desiguales entre sí, porque para ser iguales habrian de tener radios y diámetros iguales. Fácilmente se concebirá que por pequeña que sea una circunferencia se puede dividir en el mismo número de partes que otra muy grande; porque solo se diferenciarán las divisiones que se hagan en las circunferencias propuestas en que las partes de la primera serán mas pequeñas que las de la segunda, y las de la segunda mas pequeñas que las de la tercera.

Asi que, toda circunferencia se considera dividida en 360 partes iguales, que se llaman *grados*; cada grado en 60 partes iguales que se llaman *minutos* &c. Esto supuesto, á la semicircunferencia la corresponde valer 180 grados, que es la mitad de los 360 de su total; y á la cuarta parte de la circunferencia 90 grados, cuarta parte de su todo. Esta doctrina tiene la interesante aplicacion que se verá luego.

16. Correspondia tratar aqui de las demas especies de curvas; pero como su aplicacion y formacion son de alguna mayor complicacion, será mas oportuno suspender hasta mas adelante el hablar de ellas, dirigiendo al principiante por los caminos mas sencillos que posible sean.

De los ángulos.

17. Llámese ángulo *la abertura ó inclinacion de dos líneas que concurren en un punto*; y este punto de concurrencia se llama *vértice del ángulo*. Las líneas que forman el ángulo se llaman *lados*; y como puede suceder que estas líneas sean ambas rectas ó ambas curvas, ó bien la una recta y la otra curva, de aqui proviene la division que del ángulo se hace en *rectilíneo*, *curvilíneo* y *mixtilíneo*.

El ángulo (fig. 15) BAC, formado por dos rectas es rectilíneo; el FED, formado por dos curvas, curvilíneo, y el HQO, formado por una recta y una curva, mixtilíneo.

Los ángulos se nombran ó bien con la letra que está en el vértice, ó bien con tres letras; pero colocando siempre en el medio la que señala el vértice, como se hizo en los anteriores.

18. El vértice de todo ángulo rectilíneo se puede considerar como centro de un círculo, y cualquiera de sus lados se puede asímismo tomar por radio: en este supuesto, si se imagina que el lado ó línea NR del ángulo MNR (fig. 16), quedando señalado en la situacion que ahora tiene, gira despues al rededor del punto N, hasta situarse con NM, su extremo R describirá el arco RM: y si la línea NM sigue apartándose de la NR, el arco RM irá creciendo de contínuo, y el ángulo NMR aumentando de valor á manera que el lado NM vaya acercándose á N*m*.

Luego el que un ángulo sea mayor ó menor que otro no depende de que tenga sus lados mas ó menos largos, sino de que estén mas ó menos apartados entre si estos mismos lados.

19. Con atencion al mayor ó menor arco de círculo que pueden interceptar los ángulos entre sus lados, y es su *medida*, se dividen en *rectos*, *agudos* y *obtusos*.

Angulo recto es el que tiene por medida un arco de 90 grados, ó la cuarta parte de la circunferencia, como (fig. 17) cada uno de los cuatro ángulos que tienen su vértice en el centro C de la circunferencia punteada.

Angulo agudo es el que tiene por medida un arco menor que la cuarta parte de una circunferencia; esto es, que no llega á 90 grados, ó el menor que un recto, como ABC (fig. 18).

Angulo obstuso es el que tiene por medida un arco mayor que la cuarta parte de la circunferencia; esto es, mas de 90 grados, ó el que es mayor que un recto, como ABD.

20. Es dicho *al número* 7, que para ser una línea perpendicular á otra, no se ha de inclinar mas á un lado que á otro, por consiguiente los ángulos que forman son iguales, y por tanto rectos. De aqui podrá el principiante sacar un método seguro para averiguar si son mútuamente perpendiculares dos líneas que haya trazado á ojo, ya juntándose ó ya cortándose.

Sean DC y AB (fig. 19) las líneas tiradas á pulso, y que se suponen perpendiculares en el punto C. Haciendo centro en este punto con la abertura de compas que se quiera, se trazará la semicircunferencia ADB, que cortará partes iguales CA y CB en la línea AB; y si la DC divide la semicircunferencia en dos partes iguales, el punto D estará á igual distancia de los puntos A y B, y será perpendicular. Del mismo modo se dirá con respecto á la prolongacion CF de la línea DC, pues que siendo esta prolongacion perpendicular á la AB, el punto F ha de estar tambien á igual distancia del punto A que del punto B.

Luego *si dos diámetros se dividen ó cortan perpendicularmente, dividen la circunferencia del círculo en que se tiren en cuatro partes iguales*; las que, como se ha dicho, son medidas respectivas de los cuatro ángulos rectos que en el centro se forman.

21. De la doctrina anterior se deduce el modo de hacer cuatro operaciones principales: 1.ª *formar un ángulo igual á otro dado*: 2.ª *en un punto dado en una línea levantar una perpendicular*: 3.ª *dividir una recta dada en dos partes iguales*; y 4.ª *dado un punto fuera de una recta, bajar á ella una perpendicular.*

1.ª Para formar un ángulo igual á otro dado como ABC (fig. 20), tírese una recta arbitraria *ab*, y describiendo el arco AC medida del ángulo en A, con la misma abertura de compas fija la una punta en *b*, hágase tambien el arco *ac*; córtese en él la parte igual á AC, y por el punto *c* tírese la línea *bc*. El ángulo *abc* será igual al dado ABC, *por cuanto teniendo los dos ángulos una misma medida, esto es, arcos iguales por medida, han de ser con precision de un mismo valor.*

2.ª Para levantar una perpendicular en un punto dado C, de la recta AB (fig. 21), tómese un compas, y haciendo centro en el punto dado con una misma abertura, señálense en la recta los dos puntos E y F, y haciendo centro en estos puntos con una misma abertura de compas, mayor siempre que la mitad de EF, háganse dos arcos de interseccion cual se ven en D; tírese por este punto y el dadc en la recta la línea DC, que será la perpendicular pedida; *porque distando los puntos* D *y* C *de la recta tirada igualmente del punto* E *que del punto* F, *la recta* DC *no se inclina mas á un lado que á otro, siendo por lo tanto (7) perpendicular.*

3.ª Para dividir con exactitud una recta dada EF en dos partes iguales (fig. 22), hágase centro en los puntos extremos E y F de la recta, y con una abertura de compas, mayor que la mitad de la recta propuesta, háganse las dos intersecciones en G y en H, y quedarán señalados dos puntos, por los que tirada la recta GH, dividirá á la línea propuesta EF en dos partes iguales cual se pedia: *porque hallándose los puntos* G *y* H *por los que se tiró esta línea, igualmente distantes de los puntos extremos* E *y* F *de la recta dada, será* GH *perpendicular á la* EF; *y como todos los puntos de una línea recta estan en una misma direccion (6), resulta que el punto comun* Y *está igualmente distante de los extremos* E *y* F, *y por tanto dividida la* EF *por mitad.*

4.ª Para bajar desde un punto dado D, fuera de la recta MN, (fig. 23) una perpendicular hágase centro en el punto dado D, y describiendo el arco AB que corte la recta propuesta en dos puntos A y B, divídase la parte AB por mitad en el punto C, y tírese por este punto y el dado la DC, que será la perpendicular pedida: *porque hallándose los puntos* D *y* C *de la recta tirada á igual distancia de los puntos* A *y* B *de la recta dada, no se inclina mas á un lado que á otro, y es por tanto perpendicular.*

22. Todas las líneas divergentes que salen de un punto tal, como C (fig. 9), se pueden mirar siendo iguales como radios de una misma circunferencia, pues si se pasa un lápiz por los puntos extremos de estas líneas quedará trazada aquella: en efecto, como el punto C de divergencia es el vértice comun de los ángulos que forman las líneas continuadas al centro, la suma de todos ellos valdrá tantos grados como vale la circunferencia, esto es, 360 grados; y por consiguiente la curva punteada será una verdadera circunferencia.

23. Resta solo tratar de la diferencia que hay entre los ángulos formados en el centro de una circunferencia, y los ángulos que tienen su vértice en la misma circunferencia, é insisten en un mismo arco. Se ha visto que los ángulos formados en el centro como el ACB (fig. 24) tienen por medida toda la parte de circunferencia AB que abrazan entre sus lados: se prueba en la Geometría que todo ángulo formado en la circunferencia como el ADB cuando estriba sobre el mismo arco AB, es mitad del ángulo ACB formado en el centro: *luego por consecuencia precisa el ángulo, cuyo vértice se halle en la circunferencia de un círculo, tiene por medida la mitad del arco sobre que estriba.*

Esto supuesto, los ángulos formados en una semicircunferencia como los EDF, GDF que tienen su vértice en la circunferencia, y sus lados estriban en los extremos del diámetro EF, tienen por medida la mitad de la otra semicircunferencia; esto es, la cuarta parte de aquella, que cual se ha dicho vale 90 grados: *por consiguiente cada uno de estos ángulos es recto, y los lados ó líneas que los forman perpendiculares entre sí.*

Esta verdad enseña á levantar una perpendicular al extremo de una recta dada, tal como la AB (fig. 25), á cuyo punto extremo A se ha de levantar la perpendicular.

Tómese un compas, y eligiendo un punto como C fuera de la línea dada, con el intervalo ó distancia que media de este punto al extremo A de la recta, se girará una circunferencia, y por el punto B, en donde corta á la línea propuesta y centro C, se tirará una línea, que prolongada va á cortar la circunferencia en D, siendo su diámetro: por este punto D y el extremo A de la recta tírese la DA, que será la perpendicular pedida: *porque siendo el ángulo* BAD *formado en una semicircunferencia, tiene por medida la mitad de la otra semicircunferencia, es por tanto ángulo recto, y las líneas que le forman perpendiculares.*

De las figuras.

24. El espacio cerrado ó terminado por todas partes, bien sea cerrado por una línea curva, bien por el agregado de líneas rectas, ó bien por líneas rectas y curvas, se llama en general *figura*; y sea cual fuere esta figura, ofrece siempre dos cosas á la consideracion. La una es el conjunto de las líneas que encierran este espacio, que se llama *contorno*, *ámbito* ó *perimetro*; y la otra es el mismo espacio que dentro de sí encierra el

contorno. Este espacio tiene las dos dimensiones de longitud y latitud, por lo que se llama *superficie* ó *area.*

25. Se ha hablado (13) de la línea circular ó circunferencia de un círculo, dando de aquella su definicion; mas no se debe confundir dicha circunferencia con el círculo, porque el círculo es el espacio que forma ó encierra dentro de sí la circunferencia, y esta no es mas que la curva que forma el círculo. Por tanto se puede definir el círculo diciendo que *es una figura plana terminada por una sola línea llamada circunferencia.*

26. Las superficies ó figuras geométricas pueden ser de dos modos, planas ó curvas: superficie plana *es aquella en la que todos sus puntos estan en una misma altura*, como la de un cristal muy limpio: superficie curva *es aquella que sus puntos estan unos mas altos que otros*; y esta superficie puede ser *cóncava* ó *convexa*, como se verifica en las dos que presenta una bola hueca, que mirada por el interior se dice cóncava, y mirada por el exterior se dice convexa.

27. Las figuras ó superficies planas que estan terminadas por líneas rectas se llaman *rectilíneas*, las que son terminadas por líneas curvas *curvilíneas*, y las que se hallan formadas por líneas rectas y curvas *mixtilíneas*.

En un círculo (fig. 26) A, que es el espacio contenido por un arco y una cuerda, es una figura mixtilínea, que se llama *segmento*: B, que es el espacio contenido por dos radios y un arco, es una figura mixtilínea, que se llama *sector*: cuando este arco fuese la cuarta parte de la circunferencia, se llama *cuadrante*; si el arco fuese la sexta parte de la circunferencia, se llama *sextante*; y si fuese la octava parte *octante.*

M

Esto supuesto se podrán ya dár á conocer las figuras rectilíneas, y los nombres particulares que cada una tiene.

De los triángulos.

28. La figura formada por tres líneas ó lados se llama *trilátera*; y por cuanto comprende tres ángulos se llama *triángulo*; y este es su nombre propio. Los triángulos serán *rectilíneos* cuando esten formados por líneas rectas, como el señalado al núm.° 1.°; *curvilíneos* cuando esten formados por líneas curvas, como en el núm.° 2.°; y *mixtilíneos* cuando se formen por líneas rectas y líneas curvas, como en el núm.° 3.°; advirtiendo que el lado sobre que descansan ó se consideran insistiendo los triángulos se llama siempre la *base*.

Pues que en todo triángulo hay tres líneas que le forman, y tres ángulos que comprende, ha de hacerse de ellos con precision dos divisiones; la una con atencion á los lados, y la otra con respecto á los ángulos.

29. Cuando los triángulos son considerados con respecto á los lados que los forman, se nombran *equilátero*, *isósceles* y *escaleno*. Porque en efecto un triángulo ó ha de estar formado por tres líneas iguales, ó por dos iguales y una desigual, ó por tres líneas desiguales.

Triángulo equilátero *es el formado por tres líneas iguales* como el representado al núm.° 27. Este triángulo tiene tambien iguales los tres ángulos que comprende.

Triángulo isósceles *es el formado por dos líneas iguales* y *otra desigual*, como el representado al número ó figura 28. En este triángulo los dos ángulos

M:

opuestos á los lados iguales, *ó adyacentes á la base,* son tambien iguales.

Triángulo escaleno *es el que tiene los tres lados desiguales*, como el representado al número 29. En este triángulo los tres ángulos que comprende son tambien desiguales.

30. Cuando los triángulos son considerados con respecto á los ángulos que comprenden, se nombran *rectángulo*, *obtusángulo* y *acutángulo*; porque en efecto, un triángulo ó ha de comprender un ángulo recto y dos agudos, ó un ángulo obtuso y dos agudos, ó los tres ángulos agudos.

Triángulo rectángulo *es el que comprende un ángulo recto*, como el señalado al número 30. Este triángulo puede ser isósceles ó escaleno.

Triángulo obtusángulo *es el que comprende un ángulo obtuso*, como el representado al número 31. Este triángulo puede ser isósceles ó escaleno.

Triángulo acutángulo *es el que comprende los tres ángulos agudos*, como cada uno de los dos 27 y 28. Este triángulo puede ser equilátero, isósceles ó escaleno.

31. Con atencion á la doctrina predicha, respecto á los triángulos, es bien sencillo distinguirlos uno de otro; y tambien lo es comprender que dos triángulos que tengan los tres lados del uno iguales á los tres lados del otro, han de ser con precision en un todo iguales. Por tanto será fácil formar un triángulo igual á otro que se proponga, pues solo se reduce á describir ángulos iguales, y á ajustar con ellos las tres líneas que le constituyen, iguales á otras tres conocidas.

Por egemplo, se pide hacer un triángulo igual á otro dado ABC (fig. 32), tírese una recta, y córtese en ella *ac* igual á la AC, y haciendo centro en C con el intervalo del lado CB, descríbase hácia la parte superior un arco; haciendo asimismo centro en *a* con el intervalo AB, descríbase otro arco que corte al primero. Por el punto *b* de interseccion y los puntos *a* y *c*, tírense rectas, y quedará formado el triángulo *abc* igual al dado ABC, segun se pedia.

Del mismo modo se podrá ya formar un triángulo equilátero sobre una recta dada y determinada como DE (fig. 33); pues como los otros dos lados han de ser iguales á ella, se tomará con un compas lo largo de esta recta, y haciendo centro en los extremos D y E, se hará con este intervalo la interseccion en F, por cuyo punto y extremos de la recta, tirando las líneas FD y FE, quedará formado el triángulo equilátero que se pedia.

De las figuras cuadriláteras.

32. Se llama en general *figura cuadrilátera* todo espacio terminado por cuatro lados ó líneas; pero cuando estos lados tienen ó no entre sí correspondencia de igualdad y paralelismo, toman nombres diferentes y propios á cada uno de ellos en particular.

33. Cuando un cuadrilátero tiene los lados opuestos paralelos é iguales, se llama *paralelógramo*; pero como los paralelógramos pueden tener los ángulos rectos, ó bien los pueden tener oblicuos ó no rectos, se distinguen con los nombres de *paralelógramo rectángulo* al que tiene ó comprende ángulos rectos, y *paralelógramo oblicuángulo* al que comprende ángulos oblicuos.

Si entre dos líneas paralelas AB, CD (fig. 34) se cortan partes iguales con las perpendiculares AC, BD, quedará formado un paralelógramo rectángulo; y si á dos paralelas *ab*, *cd* se cortan partes iguales con las líneas oblícuas y paralelas *ac*, *bd*, quedará formado un paralelógramo oblicuángulo.

34. Los paralelógramos rectángulos ó han de tener los cuatro lados iguales, ó han de tener solamente iguales los lados opuestos. *Cuando tienen los cuatro lados iguales*, como el figurado al número 35, se llama *cuadrado*; y *cuando tienen solamente iguales los lados opuestos*, como el figurado al número 36, se llama *cuadrílongo*. Un cuadrilongo se distingue tambien con el nombre general de *rectángulo*.

Asimismo los paralelógramos oblicuángulos ó han de tener los cuatro lados iguales, ó solamente iguales los lados opuestos. *Si el oblicuángulo tiene los cuatro lados iguales*, como el figurado al número 37, se llama *rombo*; y *si tiene solamente iguales los lados opuestos*, como el figurado al número 38, se llama *romboide*[1].

35. Toda otra figura cuadrilátera que no sea paralelógramo se llama *trapecio* ó *trapezoide*. Trapecio *es el cuadrilátero que tiene solamente dos lados paralelos*, como el figurado al número 39; y trapezoide *el que no tiene ningun lado paralelo*, como en la figura 40.

36. En cualquiera figura cuadrilátera se entiende por *base* el lado sobre el que se considera insistiendo; AD en el cuadrilátero (fig. 40) es su base.

37. La línea que desde el vértice de un ángulo sobre la base se tira al vértice del ángulo superior opuesto, como la línea punteada AB, se llama *diagonal*: y toda diagonal tirada de un cuadrilátero regular ó paralelógramo, le divide en dos partes iguales.

Como siempre la diagonal divide el cuadrilátero en dos triángulos ACB, AED, será fácil comprender el

1 *El rombo es la figura que debe formarse al cruzar las líneas ó plumeadas, que constituyen la sombra en todo dibujo.*

modo de formar otro cuadrilátero igual en un todo al que se proponga. Tírese una recta cualquiera, y córtese en ella la parte *ad* igual á la base AD, haciendo centro en *d* con el intervalo del lado DB; descríbase un arco, y haciendo centro en *a*, con el intervalo de la diagonal AB hágase la interseccion en *b*, y tiradas las líneas *ba*, *bd* quedará formado el triángulo *abd* igual al ABD. Del mismo modo haciendo centro en *a* con el intervalo del lado AC descríbase un arco, y con la longitud ó intervalo del lado BC, desde el punto *b* hágase la interseccion en *c*, y tirando desde este punto las líneas *bc*, *ca* quedará formado un segundo triángulo *acb*, igual en todo al ACB. Por consiguiente el cuadrilátero *acbd* será igual al propuesto ACBD.

De los polígonos, y de las figuras inscritas ó circunscritas al círculo.

38. Toda figura que esté cerrada ó terminada por mas de cuatro líneas se llama *figura multilátera* ó *polígono*; pero entre estas figuras hay algunas, á las que corresponde un nombre particular, segun el número de lados de que estan formadas. Asi cuando la figura tenga

5 lados se llama	Pentágono, como el	41.
6 lados..............	Exágono..............	42.
8 lados..............	Octágono..............	43.
10 lados..............	Decágono..............	44.

Los polígonos pueden ser *regulares* ó *irregulares*: polígonos regulares son aquellos cuyos lados y ángulos son iguales, como los ya citados; y polígonos irregulares los que tienen lados y ángulos desiguales.

39. Si los lados de una figura cualquiera regular se dividen por mitad, y en los puntos medios se levantasen perpendiculares, el punto en donde estas se corten será el centro. Si en el pentágono (fig. 45)

dos de sus lados se dividen por mitad en los puntos *aa*, y en ellos se levantan perpendiculares, el punto *c* en donde se cortan será el centro: á estas perpendiculares *a*c, *a*c, se llaman *radios rectos*, y á las líneas que desde el centro van á parar á los vértices de los ángulos, como la CB, CB, se llaman *radios oblicuos*.

Si fijando una punta de compas en el centro C con el intervalo del radio recto C*a* se gira una circunferencia, será tangente con todos los lados del pentágono; y si desde el mismo centro con el intervalo de un radio oblicuo como CB, se describe otra circunferencia, pasará por todos los puntos vértices del pentágono.

40. Por consiguiente un círculo está inscrito en una figura rectilínea, como en el pentágono dicho, *cuando su circunferencia va á ser tangente con todos los lados del pentágono*: un círculo está circunscrito á un pentágono *cuando su circunferencia pasa por todos los puntos vértices del pentágono*. Asimismo un pentágono está inscrito en un círculo *cuando los puntos vértices se hallen en la circunferencia del círculo*; un pentágono está circunscrito á un círculo *cuando sus lados son tangentes á la circunferencia del círculo*.

De aqui se sacan dos reglas generales para la egecucion y comprobacion de las figuras hechas á pulso.

1.ª Que para formar un polígono regular con toda exactitud, cuando no se determina precisamente la magnitud de sus lados, se describirá una circunferencia, y dividiéndola en tantas partes iguales como lados ha de tener el polígono, por los puntos de division, ó lo que es lo mismo, de punto á punto, se tirarán líneas rectas (cuerdas n.º 13.), y quedará formado el polígono que se pretenda.

2.ª Que dados tres puntos con A, B, D (fig. 46), ó bien un arco de círculo ABD, para hallar el centro de este círculo, y poderle concluir, se tirarán por dichos puntos las dos rectas ó cuerdas BA, y BD, y levantando en sus medios perpendiculares, como se hizo (21 construccion 3.ª), el punto C en donde se cortan es el centro que se busca; desde el que con el intervalo del radio oblicuo CB, se girará ó concluirá la circunferencia.

Del óvalo, y de otras figuras curvilíneas.

41. Segun lo que se acaba de ver acerca de los polígonos, se puede considerar un círculo ó cualquier otra figura cerrada por una curva, como un polígono formado por una multitud de lados, ó sea un polígono de infinitos lados; por consiguiente será este lugar el mas propio para tratar del óvalo y de algunas otras figuras que el dibujante no solo debe conocer, sino tambien saber formar con exactitud. Se dará primeramente la idea de cómo se considera originado el óvalo.

42. Si se considera flexible la circunferencia de un círculo como NPMQ (fig. 47), y que á los extremos P y Q de su diámetro vertical se aplican los dedos comprimiendo la circunferencia, se comprenderá fácilmente que al paso que estos puntos se acerquen al centro C, se apartarán los puntos N y M del diámetro horizontal; y que la línea circular irá tomando la forma que se representa por la punteada *npmq*. En este estado, y sin embargo de subsistir el centro C, no será ya círculo, sino la figura que se llama *óvalo*, y con mas propiedad *elipse*; sus diámetros son ya desiguales, se llaman *ejes*, y se nombran eje mayor al *nm*, y eje menor al *pq*.

43. La formacion de la elipse arreglada á dimensiones fijas ó eges mayor y menor no conviene á este

pequeño tratado y su simplicidad de principios; mas la formacion de aquella ó del óvalo arbitrario, y aun sujeto á dimension en su ege mayor, es sumamente fácil y perceptible en los dos modos ó métodos siguientes:

1.º Tírese una recta arbitraria, ó bien sea dada, para que sirva de ege mayor como la AB (fig. 48). Divídase en tres partes iguales A, 1, 2, B, y haciendo centro en los puntos medios 1 y 2, fórmense las circunferencias que se ven punteadas; los puntos C y D en donde se cortan, serán dos centros desde los que con el intervalo de los diámetros CG, CH; DE, DF respectivamente, se describirán los arcos EF, GH, que unidos á las porciones de circunferencia EAG y FBH formarán el óvalo.

Estas porciones de circunferencia son siempre la tercera parte de cada una de ellas; por lo que observado que sea, y conocido tambien el método de construccion, se abrevia esta cortando desde luego que sean formadas las circunferencias, partes iguales al radio á una y otra mano desde los extremos del ege, quedando señalados los puntos E, G, F, H; y haciendo centro en los puntos D y C en que se cortan las circunferencias, se giran las porciones EF y GH, que las unen, y completan el óvalo.

2.º Tirada la recta AB (fig. 49), divídase en cuatro partes iguales A, 1, 2, 3, B, y haciendo centro en los puntos intermedios 1 y 3, descríbanse las circunferencias que se ven punteadas, y viniendo á los puntos extremos del ege A y B con la misma abertura de compas, córtese en estas partes iguales á una y otra mano con los arcos *e*, *g*, *f*, *h*: desde estos puntos con el intervalo que media *ef*, *gh*, respectivamente, háganse las intersecciones D y C, y haciendo centro en estos puntos sin variar la abertura de compas, se describen los arcos *ef*, *gh*, que unidos á las porciones circulares *e*A*g*, *f*B*h*, formarán el óvalo.

Los óvalos pueden ser tangentes como cuando dos ó mas se toquen sin cortarse; secantes cuando se corten en dos puntos; y concéntricos cuando tengan comun el punto céntrico de sus eges.

Asimismo puede un círculo estar trazado dentro de un óvalo ó por fuera de él, siendo tangentes en los puntos extremos de sus eges respectivamente, como se manifiesta en la figura 50: y un óvalo puede ser trazado dentro ó fuera de un círculo siendo tangentes respectivamente en los puntos extremos de sus diámetros, como manifiesta la figura 51.

44. Otra curva hay interesante en el dibujo, parecida á la que forma un huevo, y es por esta razon llamada *la curva oval*, ó *la curva absa*, que se diferencia del óvalo en su construccion, y en irse angostando al extremo inferior del diámetro vertical ó mayor. Esta curva se forma tambien de dos modos, ya dándola la forma mas conforme al huevo, ya dándola una mayor finura á la parte inferior en donde se estrecha.

Para la primera forma se tira una línea vertical como AB (fig. 52), y dividiéndola en ocho partes iguales, haciendo centro en el punto 3 de la tercera division, se gira una circunferencia con todo el intervalo 3 A, y se tira el diámetro CD perpendicular al vertical: haciendo centro en el punto 6 de la sexta division, con el intervalo de dos partes 6 B, se gira otra circunferencia, y sin mover la abertura de compas se cortan desde el extremo B dos puntos iguales en E y G. Desde uno de estos puntos E, tírese una paralela al diámetro mayor, que será perpendicular al CD, y haciendo centro en los puntos C y E, D y G, con el intervalo del duplo de esta perpendicular EJ, ó lo

N 2

que es lo mismo, toda la altura BA, háganse las intersecciones en M y N, cuyos puntos serán centros respectivos para describir los arcos CE, y DG, que unidos al semicírculo CAD, y á la porcion circular EBG, forman la curva absal mas conforme á la figura del huevo.

El otro modo de formar la curva oval es aun mas simple, pues tirada la recta AB (fig. 53), se toman en ella dos partes desiguales AM, MB para formar los dos círculos como en la anterior; pero será oportuno obrar siempre fijando un dato. Para ello, divídase la recta vertical en nueve partes iguales, y cogiendo siete para diámetro del círculo mayor, y dos para radio del menor, será la division 7 ó punto M centro de este, y el punto N centro del mayor; formadas las circunferencias, con la misma abertura de compas respectiva á cada una de ellas se cortarán las partes AC, AD iguales al radio mayor, y BE, BF iguales al menor; y haciendo centro en los puntos C y E, D y F con el intervalo que media entre EC, ó FD, háganse las intersecciones *r* y *s*, cuyos puntos serán centros de los arcos CE y DF, los que con las porciones circulares CAD, EBF formarán la curva propuesta.

De la cuadrícula.

45. Para poder formar cabal juicio de lo que sea hacer una cuadrícula conviene saber primero, que medir una superficie no es otra cosa que averiguar cuantas veces una medida conocida como la vara, el pie, la pulgada &c. cabe tanto en la longitud como en la latitud, esto es, en el largo y ancho de la superficie: por tanto si el rectángulo ABCD (fig. 54) tuviese 5 pies de latitud, cual representa su lado AD, y 6 pies de longitud, representada por la línea DC, resultará que el todo de su superficie será el producto

de 5 multiplicado por 6; esto es, 30 pies cuadrados, cual manifiesta su pormenor.

Esto supuesto para cuadricular una superficie como la presente, no habrá mas que dividir en partes iguales la longitud y latitud, y tirar luego líneas por los puntos de division, que serán paralelas respectivas á los extremos de su ancho y de su largo. Mas si se pretendiese hacer la reduccion de un rectángulo á otro que sea en un todo proporcional con él y sus partes, como si se dijese, cuadriculado el lienzo ABCD, se quiere reducir á otra superficie menor que sea mitad, tercera, cuarta ó quinta parte de él. Tirada la línea *ad* de la base (fig. 55), y su altura *dc*, debiendo por egemplo, reducirse á dos terceras partes los lados del lienzo primitivo, se tomará en uno y otro lado esta dimension de dos veces la tercera parte, y dividiendo luego la línea *ad* en cinco partes iguales, y la *dc* en seis, tirando paralelas por los puntos de division, quedará formada la cuadrícula enteramente proporcional con la propuesta.

Se usa de este artificio cuando se pretende copiar exactamente un dibujo, ya haciéndole igual, ya reduciéndole de mayor á menor, ó al contrario de menor á mayor, porque en general formada la cuadrícula en el original del modo dicho, no hay mas que dividir la base y la altura que se elijan en el lienzo ó papel en el que se ha de hacer la copia, en tantas partes iguales como presente en una y otra línea el original.

De la línea espiral.

46. Antes de dar una idea de los sólidos será bien tratar de la línea espiral, cuyo conocimiento compete tambien al dibujante: en la figura 56 se representa esta línea que se va enroscando sin que en todo su ca-

mino se encuentre. Fórmase con dos centros A y B colocados en una línea vertical llamada *cateto*; por manera que formando primero el semicírculo A 1 B, que une los puntos centros, puesta la punta de compas en B con la distancia BA, se hace el semicírculo A 2 F. Haciendo centro en A con el intervalo AF se gira el semicírculo F 3 E. Volviendo al punto B con la distancia BE, se gira el E 4 D; y últimamente cambiando el centro al punto A con la abertura AD, se forma el semicírculo D 5 C, continuando del mismo modo si se quiere, pues cambiando alternativamente de centro creceria siempre sin encontrarse jamas.

Tambien se llama línea espiral ó de *caracol* aquella línea que se va envolviendo ó enroscando al rededor de un trozo ó rollo de madera perfectamente redondo é igual en toda su longitud, guardando una misma distancia en sus vueltas, como la representada en la figura 57.

De los sólidos.

47. El espacio cerrado por todas partes de una ó de muchas superficies es justamente la última especie de extension, que cual se dijo en el número 3 abraza longitud, latitud, y profundidad ó altura; á este se llama *cuerpo*, *volúmen* ó *sólido*, sin que esta última denominacion de sólido suponga precisamente que dicho espacio asi cerrado haya de ser macizo; porque igualmente se da el nombre de sólido á una piedra ó trozo de madera, que al espacio que encierran las paredes de un cuarto ó sala con suelo y techo. Los sólidos tienen diferentes nombres segun la diferente naturaleza de las superficies que los terminan, ó segun tambien el diferente modo con que estas estan colocadas constituyendo su figura.

48. En todo sólido se considera por base la super-

ficie inferior sobre que insiste, que se llama tambien *plano generador*; porque en efecto si se considera la base ó plano ABC en el sólido (fig. 58) que se va moviendo paralelamente á sí misma, dejando un rastro ó señal de su camino en toda la altura hasta situarse ó ajustarse con el plano superior, ó base opuesta *abc*, formará el sólido, y en cada punto de su movimiento dejará marcados nuevos planos ó superficies iguales á ella, que se llaman *elementos del sólido.*

La altura de los sólidos, de que se va á dar una idea, es siempre la perpendicular bajada á la base, ó bien desde su opuesta, ó bien desde el punto superior que forma el vértice del sólido.

49. El volúmen comprendido entre dos bases iguales y paralelas, que se halla terminado al rededor por tantos paralelógramos como lados tiene la base, se llama en general *prisma.* Y en razon á la figura ó nombre propio del plano generador ó base que los forma, se llama *prisma triangular* al representado por la figura 58; *prisma cuadrangular* al de la figura 59; y si la base fuese un pentágono, como en la figura 60, se dice *prisma pentagonal* &c.

50. Cuando las bases del prisma cuadrangular son dos paralelógramos, como en la figura 59, se llama *paralelepipedo*, y cuando el paralelepípedo está terminado por seis cuadrados iguales, como en la figura 61, se llama *cubo.*

51. El sólido cuyas bases son dos círculos iguales y paralelos, y está terminado al rededor por una superficie curva, como en la figura 62, se llama *cilindro.*

52. Todo sólido que teniendo por base una figura cualquiera, todas sus caras son triángulos que tienen su vértice en un mismo punto, como se advierte en la figura 63, se llama *piramide.* Cuando la base es un triángulo se dice *pirámide triangular*, co-

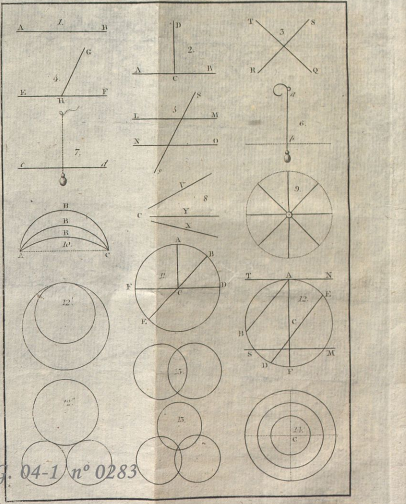
mo en la presente; y si la base fuese un cuadrilátero, como en la figura 64, *pirámide cuadrangular* &c.; pero si la base es un círculo, y está terminada por una superficie curva, como en la figura 65, entonces se llama *pirámide cónica* ó *cono.*

Si en una pirámide se diese un corte ó seccion paralela á la base, resultará un trozo ó tronco de pirámide, al que se llama *pirámide truncada*; y cuando esta seccion fuese dada en un cono ó pirámide cónica, se dice *cono truncado.*

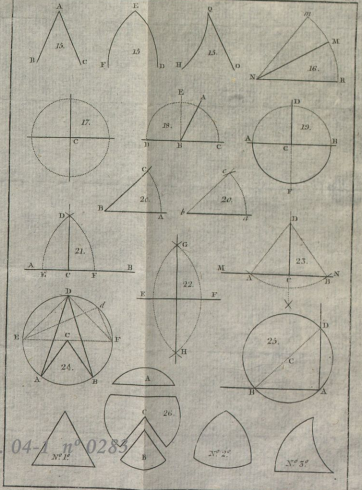
53. Si se imagina que un semicírculo gira al rededor de su diámetro, producirá un sólido como el representado en la figura 66, que se llama *esfera.* Luego la esfera es un sólido terminado por una superficie curva, cuyos puntos están todos igualmente distantes de un punto comun c, que tiene en su medio *centro de la esfera*, en la que concurrirán las mismas circunstancias que en el círculo respecto á las lineas que salen de este centro, y á las que por él pasan; advirtiendo que al diámetro al rededor del que gira se llama *eje de la esfera*, y á los extremos de este eje *polos.*

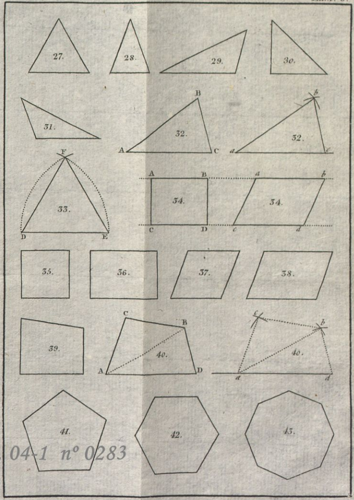
Lo dicho hasta aqui podrá cumplir los fines que la Real Academia se propone, si el joven alumno sabe apreciar sus desvelos por el progreso é ilustracion de las artes, y por ponerle en estado de llamarse algun dia profesor: y pues tanto cuanto mas se adiestre en la ejecucion á pulso de todas las figuras geométricas, hallará despues facilitadas las que deba formar en la copia de los originales en cada una de las partes del cuerpo humano, acostumbrando su vista á la exactitud, y la mano á obedecer diestramente á su entendimiento, deberá ser incansable en este egercicio hasta llegar á la perfeccion, y hacer cualquiera figura geométrica á pulso, cual si fuese con regla y compas.

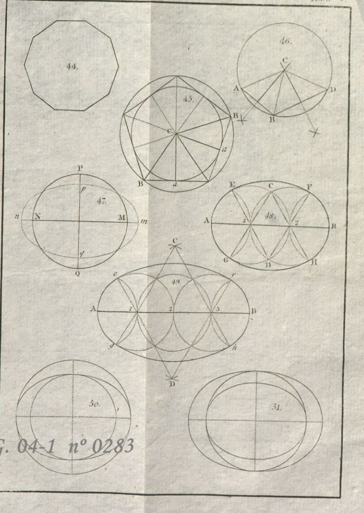
Lam.ª 1.ª

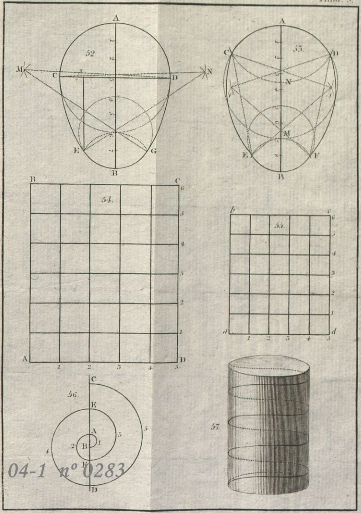

A 1. B
D 2. A C B
T S 3 R Q
G 4. E H F
S 5 L M N O s
a 6. b
7. c d
V 8 C Y X
9.
B B B 10. A C
A B 11. F D C E
12.
T A N 12. E C B S M D F
12.
12.
13.
13.
14. C

Lam.ª 2.ª

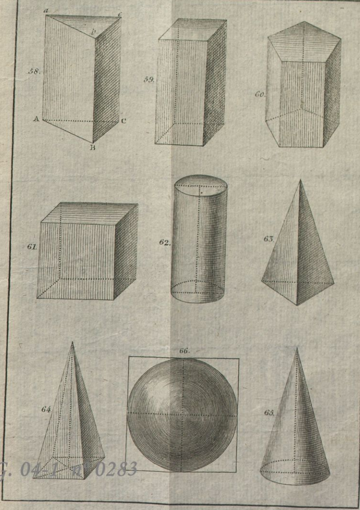



27.
28.
29.
30.
31.
B
32.
A
C
b
32.
a
c
F
33.
D
E
A
B
34.
C
D
a
b
34.
c
d
35.
36.
37.
38.
39.
C
B
40.
A
D
c
b
40.
a
d
41.
42.
43.


44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
A
B
C
D
E
F
G
H
P
Q
N
M
n
m
p
q
a
c
e
f
g
h
1
2
3


52
53.
54.
55.
56.
57.

Lam.ª 6.ª



100 15 6666,000
100
90
10

85 15
75 5 2
10 4

6666
15
33330
6660
99900
100
100,000

500 15
35 33
050
05

$100 \text{Ɖ} : 15 = 6666 + 22 \text{m.}^{s} + \frac{15}{18}$

$100000 : 15 = 6666 + 22 \text{m.}^{s} + \frac{10}{15}$

5547,000 1750
9250 6
1090

10
12
24
04
2
24